



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER:

**ANÁLISIS Y CONTROL DE PROBLEMAS DE TIPO
NAVIER-STOKES**

Irene Marín Gayte

Dirigido por:
Enrique Fernández Cara

Agradecimientos

Agradezco a todas las personas que, directa o indirectamente, han contribuido y seguirán contribuyendo en mi formación tanto académica como personal.

En concreto, agradecer a todos mis profesores, entre ellos, a mi tutor Enrique Fernández Cara por haberme dedicado su tiempo durante todo el año y por abrirme este nuevo campo de estudio. Por todo ello y a todos, ¡Muchísimas gracias!

Abstract

This work is framed within the field of EDPs and Numerical Analysis, aiming to continue the study of the Navier-Stokes equations which was already started on the subjects “EDPyA”, “ANED” and “MySN”. It is meant for deepening our knowledge on the regularity and control of the Navier-Stokes equations. Additionally, an analogous study of the Boussinesq system is carried out.

Throughout this text we broach the existence, uniqueness and regularity of the Navier-Stokes equations as well as the Boussinesq system. The article of Caffarelli, Kohn and Nirenberg plays a central role in the research of the regularity of Navier-Stokes equations.

Besides the above-mentioned aspects, various numerical methods to approximate the solutions to the Navier-Stokes equations and Boussinesq system are wide developed. The applicability of the results is exemplified by studying the simulations of these methods.

The text concludes with a theoretical analysis of the control of the Navier-Stokes equations.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Introducción | ix |
| 1. Resultados de existencia y unicidad para las ecuaciones de Navier-Stokes | 1 |
| 1.1. Resultados teóricos previos | 1 |
| 1.2. Teorema de existencia | 4 |
| 1.3. Teorema de unicidad ($N = 2$) | 13 |
| 1.4. Teorema de unicidad parcial ($N = 3$) | 17 |
| 1.5. Soluciones más regulares | 19 |
| 1.6. Recuperación de la presión | 25 |
| 2. Resultados de existencia y unicidad para el sistema de Boussinesq | 27 |
| 2.1. Teorema de existencia | 27 |
| 2.2. Teorema de unicidad ($N = 2$) | 32 |
| 2.3. Teorema de unicidad parcial ($N = 3$) | 35 |
| 2.4. Soluciones más regulares | 36 |
| 3. Resultados de regularidad para las ecuaciones de Navier-Stokes | 39 |
| 3.1. Regularidad parcial de la solución admisible de las ecuaciones de Navier-Stokes (Caffarelli, Kohn y Nirenberg) | 39 |
| 3.1.1. Introducción | 39 |
| 3.1.2. Demostración de la Proposición 1 | 46 |
| 3.1.3. Demostración de la Proposición 2 | 53 |
| 3.1.4. Demostración del Teorema B | 58 |
| 3.1.5. Existencia de solución débil admisible | 59 |
| 3.2. Regularidad parcial de la solución admisible de Navier-Stokes (Ladyzhenskaya) | 64 |
| 4. Resultados de regularidad para el sistema de Boussinesq | 67 |
| 4.1. Existencia de solución débil admisible | 67 |
| 4.2. Regularidad parcial de la solución débil admisible | 69 |
| 5. Métodos numéricos de paso fraccionario para problemas de valores iniciales | 71 |
| 5.1. Método de Peaceman-Rachford | 72 |
| 5.2. Método de Douglas-Rachford | 74 |
| 5.3. El θ -esquema | 77 |
| 5.4. Aplicación a las ecuaciones de Navier-Stokes | 79 |

| | |
|--|------------|
| 5.5. Aplicación al sistema de Boussinesq | 81 |
| 5.6. Simulaciones | 83 |
| 6. Un problema de control para las ecuaciones de Navier-Stokes | 89 |
| 6.1. El problema de control | 89 |
| 6.2. Formulación y análisis de un problema de control óptimo | 90 |
| 6.3. Semidiscretización en tiempo | 93 |
| 6.4. Aproximación del problema completamente discreto | 95 |
| Conclusiones | 99 |
| Bibliografía | 101 |

Introducción

Este trabajo pretende servir como una introducción a las ecuaciones de tipo Navier-Stokes. Muchos de los conceptos y argumentos que usamos aquí se pueden generalizar a otras ecuaciones y así ayudar en el análisis de muchas otras EDPs provenientes de la Ingeniería o de otras disciplinas científicas.

A lo largo del trabajo, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto conexo acotado al menos de clase $\mathcal{C}^{0,1}$ ($N = 2$ y $N = 3$) y tomamos $0 \leq T < +\infty$. También, usaremos la notación $Q := \Omega \times (0, T)$ y $\Sigma := \partial\Omega \times (0, T)$.

Así, nos centraremos primero en las ecuaciones de Navier-Stokes,

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = f \text{ en } Q, \\ \nabla \cdot u = 0 \text{ en } Q, \\ u = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ en } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

donde $\nu > 0$, $f = f(x, t)$ y $u_0 = u_0(x)$ están dadas.

Este modelo sirve para estudiar el comportamiento de un fluido Newtoniano, viscoso e incompresible que el dominio Ω durante el intervalo de tiempo $(0, T)$. Así nuestras incógnitas en (1) son $u = u(x, t)$ que se corresponde con la velocidad del fluido y $p = p(x, t)$ que denota la presión. La función dato $f = f(x, t)$ representa la densidad de fuerzas externas y $u_0 = u_0(x)$ es la velocidad inicial del fluido. Con estas ecuaciones estamos suponiendo que la densidad de masa del fluido es igual a 1. La primera ecuación de (1) se corresponde con la ley de conservación de la cantidad de movimiento, es decir, la segunda ley de Newton escrita a lo largo de las trayectorias expresada por unidad de volumen. La segunda ecuación es debida a que el fluido es incompresible, es decir, el volumen ocupado por un conjunto de partículas es independiente del tiempo. Por último, debemos completar el sistema con condiciones de contorno que expresan que las partículas se adhieren a la pared del dominio y por ello no deslizan y la condición inicial para $t = 0$.

Nuestro primer objetivo en este trabajo es analizar la existencia, unicidad y regularidad de la solución de (1), las principales ideas para nuestras demostraciones pueden encontrarse en [3, 6, 15, 19, 21, 22, 27, 29].

Desde el punto de vista de la mecánica, para intentar resolver (1) es totalmente coherente que asumamos que el estado del fluido en el tiempo $t = 0$ y las fuerzas que actúan sobre el mismo durante $(0, T)$ son conocidas, para así determinar el estado del fluido en todo instante $t \in (0, T)$.

Sin embargo, las ecuaciones (1) no son siempre las más apropiadas para describir el flujo

de un fluido incompresible. De hecho, hay muchas modificaciones de (1) que conducen a nuevos problemas matemáticos. Pasemos a mencionar algunas de ellas,

- El término $-\nu\Delta u$ en (1) es la contribución de la viscosidad al movimiento de las partículas y es debido a la aceleración por los efectos de difusión. En algunas situaciones ideales, es más adecuado asumir que $\nu = 0$; esto significa que el papel de la viscosidad es despreciable. Entonces la ecuación resultante se llama **ecuación de Euler**:

$$u_t + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0. \quad (2)$$

- El término no lineal $(u \cdot \nabla)u$ es debido a la aceleración convectiva del fluido y al igual que en el caso anterior también pueden establecerse ciertas modificaciones. De hecho, la estructura de este término es importante para la regularidad de la solución pues se sabe que, si cambiamos un término de la forma por $(u \cdot A\nabla)u$ con A adecuada, la solución no es en general L^∞ . En cambio para la ecuación de Navier-Stokes como veremos, no se sabe si esto es cierto.
- A veces, es más preciso asumir que la densidad de masa del fluido no es constante. En dichos casos, debemos introducir una incógnita adicional en (1), $\rho = \rho(x, t)$ real y positiva y debemos añadir una nueva ecuación que proviene de la ley de conservación de la masa. Así, resulta el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \rho(u_t + (u \cdot \nabla)u) - \nu\Delta u + \nabla p = \rho f, \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (3)$$

(las ecuaciones de Navier-Stokes con densidad variable).

- Para fluidos más complejos, ν puede no ser constante y depender del estado del fluido. En dicho caso, es normal asumir que ν es una función positiva de $|Du|$ donde $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$ es la parte simétrica del gradiente de u . Esto da origen a lo que se conoce como las ecuaciones de fluidos quasi-Newtonianos:

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - 2\nabla \cdot (\nu(|Du|)Du) + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0. \quad (4)$$

Es importante mencionar que, contrariamente a lo que cabría esperar, para este tipo de ecuaciones, con ν adecuado, sí que se ha conseguido probar tanto la existencia como unicidad de solución en los casos bidimensional y tridimensional.

- Más generalmente, muchas veces ocurre que los efectos de la viscosidad dependen de u globalmente; por ejemplo, a través de la solución de la ecuación de transporte gobernada por u . Hay muchas situaciones para las que ésta es la mejor manera de modelar el comportamiento del fluido. Por ejemplo, si consideramos el caso de un fluido visco-elástico de Oldroyd, el sistema es

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = f + \nabla \cdot \tau, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ \tau_t + (u \cdot \nabla)\tau + c\tau + g_a(\nabla u, \tau) = bDu. \end{cases} \quad (5)$$

Aquí, $\tau = \tau(x, t)$ es un tensor simétrico (el tensor de tensiones extra elástico); c y b son dos constantes positivas y $g_a : \mathbb{R}^{N \times N} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ es una función tensorial bilineal apropiada.

Para más detalles sobre estas ecuaciones y otras provenientes de la mecánica de fluidos, se puede consultar por ejemplo [4, 10, 16, 22, 24].

Otra consideración que podemos tener en cuenta es que la velocidad del fluido puede depender de la temperatura. En dicho caso tenemos un nuevo sistema de ecuaciones que se conoce como sistema de Boussinesq:

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f + \vec{K}\theta \text{ en } Q, \\ \nabla u = 0 \text{ en } Q, \\ \theta_t + u \cdot \nabla \theta - \kappa \Delta \theta = g \text{ en } Q, \\ u = 0, \theta = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ u(0) = u_0, \theta(0) = \theta_0 \text{ en } \Omega. \end{cases} \quad (6)$$

Como vemos aparece una nueva incógnita $\theta = \theta(x, t)$ que se corresponde con la temperatura del fluido.

En nuestro trabajo nos centraremos principalmente en analizar las ecuaciones de Navier-Stokes. También, intentaremos generalizar este estudio para el sistema de Boussinesq.

Hay principalmente dos razones por las cuales las ecuaciones de Navier-Stokes son importantes en Ciencia. Primero porque, como ya hemos mencionado, se pueden usar para modelar el comportamiento de una familia muy importante de fluidos. Pero, por otro lado, también desde el punto de vista matemático las ecuaciones de (1) son de gran interés puesto que en la práctica presentan muchas de las dificultades que se pueden encontrar cuando se trabaja con EDPs no lineales. Para tener una idea del gran número de cuestiones relevantes que aún siguen abiertas con respecto a (1) se puede consultar [5].

Desde el siglo XX, estas ecuaciones han sido aplicadas en numerosos campos como la Hidráulica, la Meteorología y la Aeronáutica; en general, en fenómenos físicos que incluyen fluidos. Constituyen, junto con las EDPs de Lamé, de Maxwell y de Schrödinger, las ecuaciones básicas de la Física.

Sin embargo, como veremos, aún hay muchas cuestiones abiertas en torno a ellas, como por ejemplo, la unicidad y la regularidad de la solución en el caso tridimensional. De hecho, el Instituto Clay de Matemáticas incluye esta cuestión como uno de los siete Problemas del Milenio.

Ahora pasemos a exponer brevemente los contenidos de cada capítulo.

Nuestro trabajo consta de dos partes bien diferenciadas. Una primera parte, la más extensa, que comprende los cuatro primeros capítulos, en la que analizamos detalladamente la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes y el sistema de Boussinesq. Nos centramos, por tanto, en estudiar tanto la existencia como la unicidad y regularidad de la solución en el caso bidimensional y tridimensional.

Después desarrollamos una parte más breve en la que exponemos métodos numéricos para aproximar la solución y describimos brevemente un problema de control para las ecuaciones de Navier-Stokes en el caso bidimensional.

Así, en el primer capítulo, vamos a comenzar estudiando los aspectos generales de las ecuaciones de Navier-Stokes: resultados de existencia y unicidad de solución débil para el caso $N = 2$ y $N = 3$. Recordaremos que, efectivamente, la unicidad en el caso $N = 2$ está probada pero no para $N = 3$, en cuyo caso sólo se sabe que la solución es única si los datos de partida son suficientemente pequeños en cierto sentido. Terminaremos este capítulo profundizando en la regularidad de la solución y presentando algunos resultados que ayudan a recuperar la presión (puesto que esta incógnita no aparece cuando formulamos el problema débil de Navier-Stokes).

En el segundo capítulo, desarrollaremos un estudio completamente análogo al del capítulo anterior, pero ahora trabajaremos con el sistema de Boussinesq. Al igual que en el que Capítulo 1, daremos resultados de existencia, unicidad y regularidad de la solución débil de dicho sistema. Como ya mencionamos, aquí podemos ver cómo en la práctica se pueden generalizar los resultados de Navier-Stokes a muchas otras ecuaciones y sistemas.

El tercer capítulo es el más extenso y quizás el más complejo del trabajo, puesto que en él desarrollamos resultados importantes que tratan de probar la regularidad parcial de la solución de Navier-Stokes. Este capítulo aporta los mejores resultados que se han conseguido obtener para avanzar en la cuestión abierta de si la solución u de la ecuación de Navier-Stokes está en $L^\infty(Q)$. Para esto seguiremos dos artículos, véase [3, 18]. En la primera parte de este capítulo probaremos que, para un tipo de solución débil de Navier-Stokes, que llamaremos **solución admisible**, el conjunto de puntos, S , de los puntos que no poseen ningún entorno donde la solución admisible u es L^∞ es de medida de Hausdorff unidimensional igual a 0. Es más, usaremos una medida que refina la medida de Hausdorff y, para ésta, conseguiremos probar que efectivamente el conjunto S tiene medida 0. Como ya hemos dicho, esto es a lo más que se ha podido llegar para responder a la pregunta de si la solución u de Navier-Stokes es L^∞ en todo su dominio de definición. En la segunda parte del capítulo, veremos el artículo [18], donde se demuestra que, redefiniendo el concepto de solución admisible por otro más restrictivo que usa el concepto de continuidad Hölder, el “nuevo” conjunto de puntos singulares vuelve a tener medida de Hausdorff unidimensional igual a 0.

De nuevo, en el siguiente capítulo, vamos a generalizar los resultados del Capítulo 3 para el sistema de Boussinesq. Con lo cual, veremos que el conjunto de puntos S vuelve a tener medida unidimensional de Hausdorff 0. Este resultado era de esperar, ya que parece lógico que la nueva variable, la temperatura, no añada nuevos puntos al conjunto S .

Ya en el Capítulo 5, pasamos a estudiar distintos métodos numéricos que después utilizaremos para aproximar tanto la solución de la ecuación de Navier-Stokes como la del sistema de Boussinesq. En concreto, veremos tres esquemas de tipo “splitting”. Éstos esquemas reposan sobre la idea de descomponer el cálculo de u y p en cada etapa de tiempo en cálculos intermedios correspondientes a varias “subetapas”. En cada una se trabaja con al menos uno de los términos “problemáticos” del sistema o la ecuación que queremos aproximar. Por ejemplo, para el caso de la ecuación de Navier-Stokes lo habitual es aproximar primero la solución del problema linealizado con divergencia nula y presión y, después, usar esta solución para aproximar la solución del sistema no lineal pero sin presión ni condición de divergencia nula. Así, la solución final que hallamos aproxima bien a la solución real de las ecuaciones y, por otra parte, el tiempo de cálculo es mucho menor que cuando no se usa un método de tipo splitting. Al igual que para la ecuación de Navier-Stokes, también se pueden aplicar

estos métodos para hallar la solución del sistema de Boussinesq. Por último, terminamos presentando algunas simulaciones que hemos realizado para las ecuaciones de Navier-Stokes en dos dimensiones, realizadas con *FreeFem++*.

Tras esto, pasamos a estudiar brevemente, en el Capítulo 6, un problema de control óptimo para las ecuaciones de Navier-Stokes en el caso bidimensional. Presentamos el problema, el correspondiente sistema de optimalidad y sus aproximaciones (en tiempo y en tiempo y espacio).

Capítulo 1

Resultados de existencia y unicidad para las ecuaciones de Navier-Stokes

En este primer capítulo nos vamos a encargar en primer lugar de la existencia y unicidad de solución de problemas de Cauchy-Dirichlet para las ecuaciones de Navier-Stokes, en dimensión dos y tres. Tras varios resultados en este sentido, analizaremos la regularidad de la solución.

1.1. Resultados teóricos previos

Antes de comenzar el estudio vamos a introducir algunos elementos previos y la notación que seguiremos a lo largo del trabajo.

Consideremos un abierto conexo con frontera Lipschitz continua $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N = 2$ ó 3 , que será acotado a menos que indiquemos lo contrario.

A continuación vamos a recordar la definición de algunos espacios útiles y habituales para el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes. Estos espacios son:

$$\mathcal{V} := \{u \in \mathcal{D}(\Omega)^N : \nabla \cdot u = 0\},$$

$$V := \overline{\mathcal{V}}^{H^1} = \{u \in H_0^1(\Omega)^N : \nabla \cdot u = 0\} \text{ (la adherencia de } \mathcal{V} \text{ en } H_0^1(\Omega)^N),$$

$$H := \overline{\mathcal{V}}^{L^2} = \{u \in L^2(\Omega)^N : \nabla \cdot u = 0, u \cdot \vec{n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\} \text{ (la adherencia de } \mathcal{V} \text{ en } L^2(\Omega)^N).$$

En el espacio H consideraremos el producto escalar inducido por $L^2(\Omega)^N$; V es un espacio de Hilbert con el producto escalar siguiente:

$$((u, v)) := \sum_{i=1}^N (D_i u, D_i v),$$

siendo (\cdot, \cdot) y $|\cdot|$ el producto escalar y la norma de $L^2(\Omega)^N$; denotaremos $\|\cdot\|$ la norma habitual en $H_0^1(\Omega)^N$. Por otra parte, $\|\cdot\|_*$, denotará la norma en V' (el dual de V) asociada a $\|\cdot\|$.

Observemos ahora que el espacio V está contenido en H , donde es denso, y que además, la inyección $i : V \rightarrow H$ es compacta (sólo continua si Ω es no acotado). También, si consideramos

los espacios duales V' y H' , correspondientes, la inyección adjunta, $i^* : H' \rightarrow V'$ es lineal y compacta. Así, por el Teorema de Riesz, podemos identificar H con su dual H' y escribir la siguiente cadena de inyecciones continuas y compactas, donde cada espacio es denso en el siguiente;

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V'.$$

Como consecuencia de esta cadena, podemos extender el producto escalar en H de $f \in H$ y $u \in V$ a un producto de dualidad entre V' y V , que denotaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Podemos ver que, para cada $u \in V$, la aplicación $v \in V \mapsto ((u, v)) \in \mathbb{R}$ es lineal y continua en V ; y por lo tanto, por el Teorema de Riesz, existe un único elemento en el dual, denotado $Au \in V'$, tal que $\langle Au, v \rangle = ((u, v))$ para todo $v \in V$.

Si consideramos el caso en el que el dominio Ω es no acotado, debemos tomar en V el producto escalar

$$[[u, v]] = ((u, v)) + (u, v)$$

y así seguiremos teniendo la cadena de inclusiones antes mencionada más arriba, aunque ahora no serán compactas.

Ahora, una vez introducida la notación y algunos de los espacios en los que vamos a trabajar, vamos a recordar varios conceptos y resultados que más adelante necesitaremos. Se pueden consultar las demostraciones en [27].

Definición 1.1.1. *Sea X un espacio de Banach, y a, b tales que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Entonces para α dado con $1 \leq \alpha < +\infty$, denotamos $L^\alpha(a, b; X)$ al espacio de las clases de funciones L^α -integrables en el sentido de Böchner de $[a, b]$ en X . Se trata de un nuevo espacio de Banach con la norma*

$$\|f\|_{L^\alpha(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^\alpha dt \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Recordemos que se dice que f es α -integrable en el sentido de Böchner si:

- Existe un conjunto $Z \subset [a, b]$ de medida nula tal que $f|_{Z^c}$ toma valores en un separable.
- $f : (a, b) \rightarrow X$ es medible.
- $\left(\int_a^b \|f(t)\|_X^\alpha dt \right)^{1/\alpha} < +\infty$.

Tenemos que $L^\alpha(a, b; X)$ es el espacio cociente del espacio de las funciones α -integrables sobre el conjunto de funciones nulas casi por doquier (c.p.d. en lo que sigue).

En esta línea podemos definir también el espacio $L^\infty(a, b; X)$ como sigue,

Definición 1.1.2. *Denotamos $L^\infty(a, b; X)$ el espacio de las clases de funciones medibles y acotadas c.p.d. en $[a, b]$.*

Se trata de un nuevo espacio de Banach, con la norma

$$\|f\|_{L^\infty(a,b;X)} = \text{Ess sup}_{[a,b]} \|f(t)\|_X.$$

Observemos que en la norma del espacio anterior hemos considerado el supremo esencial puesto que recordemos que estamos en un espacio de clases de funciones y por tanto, no podemos tomar supremo.

Por último, recordemos que el espacio vectorial $\mathcal{C}([a, b]; X)$ de las funciones continuas $f : [a, b] \rightarrow X$ se convierte en un espacio de Banach para la norma,

$$\|f\|_{\mathcal{C}([a,b];X)} = \sup_{[a,b]} \|f(t)\|_X.$$

A continuación, recordaremos un resultado que se refiere a las derivadas de funciones con valores en espacios de Banach:

Lema 1.1.3. Sean X un espacio de Banach, X' su dual y $u, f \in L^1(a, b; X)$; entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

(a) u coincide con una primitiva de f en casi todo, es decir,

$$u(t) = \xi + \int_0^t f(s) ds, \quad \xi \in X, \text{ c.p.d. } t \in [a, b].$$

(b) Para cada función “test” $\phi \in \mathcal{D}((a, b))$,

$$\int_a^b f(t)\phi(t) dt = - \int_a^b u(t)\phi'(t) dt, \text{ siendo } \phi' = \frac{d\phi}{dt}.$$

(c) Para cada $n \in X'$,

$$\frac{d}{dt} \langle n, u \rangle = \langle n, f \rangle,$$

en el sentido de las distribuciones en (a, b) .

Además, si alguna de las propiedades anteriores se satisfacen entonces la función u es igual en casi todo a una función continua de $[a, b]$ en X .

Lema 1.1.4. Sean X e Y espacios de Banach tales que X es reflexivo y $X \hookrightarrow Y$ con inyección continua. Si $\phi \in L^\infty(0, T; X)$ y es continua con valores en Y entonces ϕ es débilmente continua con valores en X . Es decir, la aplicación $t \mapsto \langle m, \phi(t) \rangle_{X', X}$ es continua para todo $m \in X'$.

Además, se tiene la propiedad siguiente:

Si las $\phi_n \rightharpoonup \phi$ débil-* en $L^\infty(0, T; X)$ y están acotadas en $\mathcal{C}^0([0, T]; Y)$, entonces ϕ es débilmente continua de $[0, T]$ en X y para todo $t \in [0, T]$ $\phi_\mu(t) \rightharpoonup \phi(t)$ débil en X .

Ahora vamos a introducir un nuevo espacio que ayudará a probar la existencia de solución de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Definición 1.1.5. Sean a, b tales que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $\gamma > 0$ y X_0, X_1 dos espacios de Hilbert con $X_0 \hookrightarrow X_1$. Denotamos $\mathcal{H}^\gamma(a, b; X_0, X_1)$ al espacio siguiente:

$$\mathcal{H}^\gamma(a, b; X_0, X_1) := \{u \in L^2(a, b; X_0) : D_t^\gamma u \in L^2(a, b; X_1)\}.$$

Por $D_t^\gamma u$ denotamos la derivada fraccionaria de orden γ de u respecto de t , definida (por ejemplo) a partir de la transformada de Fourier de la prolongación de u a todo \mathbb{R} por 0. Antes de seguir vamos recordar algunas propiedades de la derivada fraccionaria que hemos introducido.

Sea $u \in L^2(0, T; X_0) \hookrightarrow L^2(0, T; X_1)$, entonces extendemos la función u por cero a todo \mathbb{R} y denotamos \tilde{u} su prolongación. Claramente, $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}; X_1)$.

Podemos considerar la transformada de Fourier de la función \tilde{u} , que se define por

$$\hat{u} := \mathcal{F}\tilde{u}, \quad \hat{u}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau t} \tilde{u}(t) dt, \quad \tau \text{ c.p.d. en } \mathbb{R}.$$

Así, podemos definir $D^\gamma u$ para cada $\gamma > 0$ como sigue:

$$D^\gamma u = \mathcal{F}^{-1}(|\tau|^\gamma \hat{u})|_{(0, T)}.$$

Observemos que esta definición generaliza la habitual puesto que, si $\gamma = n \in \mathbb{N}$ coincide con la derivada de orden n natural.

Observemos que $\mathcal{H}^\gamma(a, b; X_0, X_1)$ es un espacio de Hilbert para la norma

$$\|u\|_{\mathcal{H}^\gamma(a, b; X_0, X_1)} := \left(\|u\|_{L^2(a, b; X_0)}^2 + \|D_t^\gamma u\|_{L^2(a, b; X_1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tenemos el siguiente resultado importante, que también usaremos más adelante:

Teorema 1.1.6. *Sean X_0, X, X_1 tres espacios de Hilbert que satisfacen la siguiente cadena de inyecciones continuas:*

$$X_0 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_1,$$

siendo además la inyección de X_0 en X compacta. Entonces, para cualquier intervalo (a, b) y cualquier $\gamma > 0$, tenemos que la inyección de $\mathcal{H}^\gamma((a, b); X_0, X_1) \hookrightarrow L^2(a, b; X)$ es compacta.

Con este último resultado damos por terminado el repaso de los resultados y conceptos teóricos previos y ya podemos pasar a estudiar propiamente las ecuaciones de Navier-Stokes.

1.2. Teorema de existencia

En esta sección vamos a estudiar la existencia de solución para las ecuaciones de Navier-Stokes para $N = 2$ y $N = 3$.

Así, consideremos la forma trilineal continua sobre V dada por

$$b(u, v, w) := \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u_i D_i v_j w_j dx \quad \forall u, v, w \in V.$$

Veamos algunas propiedades de la forma trilineal que nos resultarán útiles para demostrar la existencia de solución.

Si $u \in V$, entonces se verifica que $b(u, v, v) = 0$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)^N$.

Además, por el Teorema de Riesz, tenemos que, para cada $u, v \in V$, existe una aplicación bilineal continua, $B : V \times V \rightarrow V'$ tal que

$$\langle B(u, v), w \rangle = b(u, v, w) \quad \forall w \in V.$$

A continuación, vamos a formular el problema de valores iniciales para las ecuaciones de Navier-Stokes. Comenzaremos viendo una formulación poco rigurosa pero bastante intuitiva:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^N, \text{ y } p : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ u_t - \nu \nabla u + \sum_{i=1}^N u_i D_i u + D_i p = f \text{ en } Q := \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot u = 0 \text{ en } Q, \\ u = 0 \text{ sobre } \Sigma := \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ en } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

En este problema, las funciones $f : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ y $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ son datos.

Definición 1.2.1. Decimos que (u, p) es una **solución clásica** de (1.1) si $u \in \mathcal{C}^0(\overline{Q}; \mathbb{R}^N) \mathcal{C}^2(Q; \mathbb{R}^N)$, $p \in \mathcal{C}^1(Q; \mathbb{R})$ y las igualdades anteriores se verifican puntualmente.

Esta definición de solución clásica es bastante fuerte y poco útil a la hora de intentar probar un resultado de existencia. De hecho, veremos más adelante que la existencia de solución clásica es un problema abierto. Por ello, vamos a introducir otro concepto de solución más débil.

Observamos que, si u es solución clásica de (1.1), entonces u está en $L^2(0, T; V)$ y para cada $v \in \mathcal{V}$ tenemos que:

$$\frac{d}{dt}(u, v) + \nu((u, v)) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle.$$

Esta igualdad se mantiene por continuidad para toda función $v \in V$.

Observemos que en esta última igualdad ha desaparecido la presión p , lo que permite que el problema se simplifique. Más adelante demostraremos que la presión se puede recuperar a partir de u .

Así, podemos introducir ya una formulación debilitada del problema y la definición de solución débil:

Definición 1.2.2. Dadas $f \in L^2(0, T; V')$ y $u_0 \in H$, decimos que u es una **solución débil del problema de Navier-Stokes** si

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \\ \frac{d}{dt}(u, v) + \nu((u, v)) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V, \\ u(0) = u_0. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Ahora vamos a probar que la condición $u(0) = u_0$ tiene sentido, puesto que, en principio, para una función de $L^2(0, T; V)$ no tiene sentido hablar de sus valores en un conjunto de medida nula. Aún así, vamos a probar que si una función está en $L^2(0, T; V)$ y verifica la ecuación anterior entonces, tiene sentido hablar del valor que tiene en cada $t \in [0, T]$. Antes, veamos un resultado que necesitaremos después.

Lema 1.2.3. *Si $u \in L^2(0, T; V)$, la función $B(u, u)$ dada por*

$$\langle B(u, u)(t), v \rangle = b(u(t), u(t), v) \quad \forall v \in V, \text{ c.p.d. en } (0, T),$$

pertenece a $L^1(0, T; V')$.

A continuación pasaremos a probar que efectivamente la condición inicial en (1.2) tiene sentido.

Observemos que para casi todo t tenemos que $B(u, u)(t) \in V'$ y además la función $t \in (0, T) \mapsto B(u, u)(t) \in V'$ es medible. Como $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ es una forma trilineal continua sobre V , existe $C > 0$ tal que

$$\|B(w, w)\|_* \leq C\|w\|^2, \text{ para todo } w \in V.$$

Luego si integramos en tiempo tenemos que

$$\int_0^T \|B(u, u)\|_* dt \leq C \int_0^T \|u\|^2 dt.$$

Con lo cual, $B(u, u)(t) \in L^1(0, T, V')$ de hecho, veremos más adelante que $B(u, u) \in L^\sigma(0, T; V')$ para un cierto $\sigma > 1$ (que depende de N).

Además, como $\frac{d}{dt}(u, v) = \langle f - \nu Au - B(u, u), v \rangle$, para todo $v \in V$, y $Au \in L^2(0, T; V')$, de donde $f - \nu Au - B(u, u)$ está en $L^1(0, T; V')$; con lo cual, $u_t \in L^1(0, T; V')$.

Así, por el Lema 1.1.3, podemos afirmar que u es igual en casi todo a una función continua de $[0, T]$ en V' ; y la condición $u(0) = u_0$ tiene sentido, a menos como igualdad en V' . Más aún, como $u \in L^\infty(0, T; H)$, también tenemos por el Lema 1.1.4 que u coincide c.p.d. con una función débilmente continua de $[0, T]$ en H ; luego la igualdad también tiene sentido en H .

Ahora, vamos a pasar a ver una formulación alternativa del problema (1.2). Es la siguiente:

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \text{ tal que} \\ u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \quad u_t \in L^1(0, T; V'), \\ u_t - \nu Au + B(u, u) = f \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

El resultado siguiente es inmediato:

Lema 1.2.4. *Los problemas (1.2) y (1.3) son equivalentes.*

Estos dos problemas poseen solución gracias al siguiente

Teorema 1.2.5. *Sean $f \in L^2(0, T; V')$ y $u_0 \in H$. Existe al menos una solución débil u del problema de Navier-Stokes. Además, u es débilmente continua de $[0, T]$ en H .*

Demostración

Antes de probar la existencia de u veamos que si u es solución entonces u es débilmente continua.

Para ello vamos a aplicar el Lema 1.1.4. Tomamos $X = H$ e $Y = V'$, entonces por lo que probaremos a continuación sabemos que $u \in L^\infty(0, T; H)$ y además, u es débilmente continua en V' . Luego aplicando el Lema 1.1.4 tenemos que u es débilmente continua de $[0, T]$ con valores en H .

Así pasamos ahora a probar que efectivamente existe al menos una solución u de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Usaremos el método de compacidad, combinado con una estrategia de Galerkin.

APROXIMACIÓN DE GALERKIN

Como el espacio \mathcal{V} es denso en V y éste es separable, existe una sucesión $\{w_n\} \subset \mathcal{V}$ de funciones linealmente independientes que es total en V .

Así pasamos a considerar el problema aproximado de (1.2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_m = \sum_{k=1}^m \alpha_{im}(t) w_i \text{ tal que} \\ (u'_m(t), w_j) + \nu((u_m(t), w_j)) + b(u_m(t), u_m(t), w_j) = \langle f, w_j \rangle, \\ t \in [0, T], j = 1, \dots, m; \\ u_m(0) = u_{0m}, \end{array} \right. \quad (1.4)$$

siendo u_{0m} la proyección ortogonal del dato inicial $u_0 \in H$ sobre el espacio $V_m := [w_1, w_2, \dots, w_m]$.

Obsevemos que (1.4) es en realidad un problema de Cauchy para el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\sum_{i=1}^m (w_i, w_j) \alpha'_{im} + \nu \sum_{i=1}^m ((w_i, w_j)) \alpha_{im} + \sum_{i,k=1}^m b(w_i, w_k, w_j) \alpha_{im} \alpha_{km} = \langle f(t), w_j \rangle,$$

o equivalentemente,

$$\alpha'_{im} + \sum_{j=1}^m a_{ij} \alpha_{im} + \sum_{j,k=1}^m c_{ijk} \alpha_{jm} \alpha_{km} = \sum_{j=1}^m d_{ij} \langle f(t), w_j \rangle,$$

para adecuado $a_{ij}, c_{ijk}, d_{ij} \in \mathbb{R}$.

También, la condición inicial para u_m equivale a m condiciones iniciales para los α_{im} :

$$u_m(0) = \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(0) w_i = \sum_{i=1}^m (u_0, w_i) w_i \Leftrightarrow \alpha_{im}(0) = (u_0, w_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Tenemos un problema de Cauchy para un SDO no lineal, con m ecuaciones y m incógnitas. Luego existe una única solución u_m definida en un intervalo maximal por la derecha $[0, t_m]$, con $0 < t_m \leq T$.

Veamos que $t_m = T$, para todo m . Supongamos que $t_m < T$, entonces $\limsup_{t \rightarrow t_m} \|u_m(t)\| = +\infty$. Pero ahora veremos $|u_m(t)|$ está acotada en $[0, T]$ por una constante independiente de t y de m . Luego la solución está definida en todo $[0, T]$ para todo m .

ESTIMACIONES A PRIORI

Para obtener las estimaciones a priori vamos a multiplicar en (1.4) por $\alpha_{jm}(t)$ y sumar en j ; así tenemos que

$$(u'_m(t), u_m(t)) + \nu((u_m(t), u_m(t))) + b(u_m(t), u_m(t)u_m(t)) = \langle f(t), u_m(t) \rangle,$$

y si operamos y aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, llegamos a que,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \nu \|u_m(t)\|^2 = \langle f(t), u_m(t) \rangle \leq \|f(t)\|_* \|u_m(t)\|.$$

Ahora, usando la desigualdad de Young, tenemos que

$$\frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + 2\nu \|u_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{\nu} \|f(t)\|_*^2 + \nu \|u_m(t)\|^2,$$

con lo cual,

$$\frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \nu \|u_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{\nu} \|f(t)\|_*^2.$$

Integrando en tiempo en el intervalo $[0, t]$ con $t \leq T$ podemos escribir que

$$|u_m(t)|^2 \leq \int_0^t \|f(s)\|_*^2 ds + |u_{0m}|^2 \leq |u_0|^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^T \|f(s)\|_*^2 ds, \quad (1.5)$$

de donde

$$\sup_{t \in [0, t_m]} |u_m(t)|^2 \leq |u_0|^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^T \|f(t)\|_*^2 dt,$$

luego efectivamente $t_m = T$ para todo m y, además, $\{u_m\}$ está uniformemente acotada en $L^\infty(0, T; H)$.

Ahora para obtener otra estimación a priori de $\{u_m\}$ vamos a integrar en el intervalo $[0, T]$ la ecuación (1.5) y así tenemos que

$$\|u_m(T)\|^2 + \nu \int_0^T \|u_m(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{\nu} \int_0^T \|f(t)\|_*^2 dt + |u_{0m}|^2.$$

Con lo cual,

$$\nu \int_0^T \|u_m(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{\nu} \int_0^T \|f(t)\|_*^2 dt + |u_0|^2.$$

Y, por lo tanto, podemos concluir que $\{u_m\}$ también está uniformemente acotada en $L^2(0, T; V)$.

CONVERGENCIA

Consideremos ahora las extensiones por cero de las u_m a todo \mathbb{R} , denotadas \tilde{u}_m . Podemos también considerar la correspondiente transformada de Fourier \widehat{u}_m .

Vamos a probar que $\{u_m\}$ está uniformemente acotada en $\mathcal{H}^\gamma(0, T; V, H)$ para $0 < \gamma < \frac{1}{4}$.

Como ya hemos visto que $\{u_m\}$ está uniformemente acotada en $L^2(0, T; V)$, sólo nos queda probar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} |\widehat{u}_m(\tau)|^2 d\tau \leq C.$$

Para demostrar esta desigualdad consideramos la ecuación verificada por u_m extendida a todo \mathbb{R} :

$$(\tilde{u}'_m, w_j) = \langle \tilde{f}_m, w_j \rangle + (u_{0m}, w_j)\delta_0 - (u_m(T), w_j)\delta_T, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.6)$$

donde \tilde{f}_m es la extensión de f_m a todo \mathbb{R} y $f_m = f - \nu Au_m - B(u_m, u_m)$.

Así también podemos ver que al extender a todos los número reales aparecen dos términos nuevos uno multiplicado por δ_0 y otro por δ_T que es la distribución de Dirac en 0 y en T , respectivamente. Estos términos provienen de la integración por partes pues, si $(y_t, w_j) = (f(t, y), w_i)$ para todo i en $[0, T]$, entonces el sistema extendido se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t, y) \Psi(t) dt &= \int_0^T f(t, y) \Psi(t) dt = \int_0^T (y_t, w_i) \Psi(t) dt \\ &= - \int_0^T (y, w_i) \Psi'(t) dt + (y(T), w_i) \Psi(T) - (y(0), w_i) \Psi(0) \\ &= \int_0^T (y_t, w_i) \Psi(t) dt + (y, w_i) \Psi(t) \delta_T - (y, w_i) \Psi(t) \delta_0 \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\tilde{y}_t, w_i) \Psi(t) dt + (y, w_i) \Psi(t) \delta_T - (y, w_i) \Psi(t) \delta_0 \quad \forall \Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Fourier a (1.6), tenemos que

$$2\pi i\tau(\widehat{u}_m, w_j) = \langle \widehat{f}_m, w_j \rangle + (u_{0m}, w_j) - (u_m(T), w_j)e^{-2\pi iT}.$$

Y si ahora multiplicamos esta ecuación por $\widehat{\alpha}_{jm}$, que es la transformada de Fourier de la extensión por cero a todo \mathbb{R} de α_{jm} , y sumamos en j nos queda que

$$2\pi i\tau(\widehat{u}_m(\tau), \widehat{u}_m(\tau)) = \langle \widehat{f}_m(\tau), \widehat{u}_m(\tau) \rangle + (u_{0m}, \widehat{u}_m(\tau)) - (u_m(T), \widehat{u}_m(\tau))e^{-2\pi iT},$$

es decir:

$$2\pi i\tau|\widehat{u}_m(\tau)|^2 = \langle \widehat{f}_m(\tau), \widehat{u}_m(\tau) \rangle + (u_{0m}, \widehat{u}_m(\tau)) - (u_m(T), \widehat{u}_m(\tau))e^{-2\pi iT}.$$

Como $f_m = f - \nu Au_m - B(u_m, u_m)$ y $\|B(u_m, u_m)\|_* \leq C\|u_m\|^2$ sabemos que f_m está uniformemente acotada en $L^1(0, T; V')$:

$$\int_0^T \|f_m(t)\|_* dt \leq \int_0^T (\|f(t)\|_* + \nu\|u_m(t)\| + C\|u_m(t)\|^2) dt \leq C$$

Por tanto, \tilde{f}_m está uniformemente acotada en $L^1(\mathbb{R}; V')$ y \widehat{f}_m lo está en $L^\infty(\mathbb{R}, V')$:

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|\widehat{f}_m(\tau)\|_* \leq C.$$

Teniendo en cuenta que u_m está uniformemente acotada en $L^\infty(0, T; H)$, también tenemos que

$$|u_m(0)| \leq C, \quad |u_m(T)| \leq C.$$

Así, podemos escribir que

$$2\pi\tau|\widehat{u}_m(\tau)|^2 \leq \|\widehat{f}_m(\tau)\|_* \|\widehat{u}_m(\tau)\| + |u_{0m}| \|\widehat{u}_m(\tau)\| + |u_m(T)| \|\widehat{u}_m(\tau)\|,$$

y, también,

$$\tau|\widehat{u}_m(\tau)|^2 \leq C\|\widehat{u}_m(\tau)\|.$$

Ahora fijamos γ en $(0, \frac{1}{4})$. Existe una constante $C_\gamma > 0$ tal que podemos escribir la siguiente desigualdad, que necesitaremos más adelante:

$$|\tau|^{2\gamma} \leq C_\gamma \frac{1 + |\tau|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}}, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Si nos fijamos esta desigualdad se tiene para todo $\tau \in \mathbb{R}$ pues si τ es suficientemente grande en valor absoluto, entonces estamos comparando dos polinomios del mismo grado y para τ próximo a 0 que $0 \leq C_\gamma$; luego tomando C_γ adecuadamente tenemos esta desigualdad.

Así podemos escribir que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma} |\widehat{u}_m(\tau)|^2 d\tau &\leq C_\gamma \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + |\tau|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} |\widehat{u}_m(\tau)|^2 d\tau \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{u}_m(\tau)\|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} d\tau + C \int_{\mathbb{R}} \|\widehat{u}_m(\tau)\|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Esta última desigualdad la tenemos pues como ya hemos visto, $\tau|\widehat{u}_m(\tau)|^2 \leq C\|\widehat{u}_m(\tau)\|$, y $\frac{1}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} \leq 1$.

Recordemos que buscamos acotar

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma} |\widehat{u}_m(\tau)|^2 d\tau,$$

luego si acotamos las dos integrales anteriores ya lo tendremos. Por ello veamos que ambas están uniformemente acotadas. Así tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{u}_m(\tau)\|^2 d\tau \leq C,$$

pues $\{u_m\}$ está uniformemente acotada en $L^2(0, T; V)$ y por la Identidad de Parseval tenemos que $\|\widehat{u}_m\|_{L^2(0, T; V)} = \|\mathcal{F}\tilde{u}_m\|_{L^2(0, T; V)} = \|\tilde{u}_m\|_{L^2(0, T; V)} = \|u_m\|_{L^2(0, T; V)}$.

Por otro lado, para ver que la otra integral está acotada usaremos la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{u}_m(\tau)\|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} d\tau \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |\tau|^{1-2\gamma})^2} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{u}_m(\tau)\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pero la penúltimas integral está acotada si $2 - 4\gamma < 1$, es decir, si $\gamma < \frac{1}{4}$. Por lo tanto ya tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{u}_m(\tau)\|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} d\tau \leq C,$$

luego queda probado que

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma} |\widehat{u}_m(\tau)|^2 d\tau \leq C$$

y $\{u_m\}$ está uniformemente acotada en $\mathcal{H}^\gamma(0, T; V, H)$.

EXTRACCIÓN DE SUBSUCESIONES Y PASO AL LÍMITE

Podemos extraer subsucesiones que convergen en sentido apropiado a una función u para luego pasar al límite en el problema aproximado.

Como $\{u_m\}$ está uniformemente acotada en $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, entonces existe una subsucesión, que denotamos de la misma manera, de forma que

$$u_m \rightharpoonup u \text{ débil en } L^2(0, T; V);$$

$$u_m \rightharpoonup u \text{ débil-} * \text{ en } L^\infty(0, T; H).$$

Además, como $V \hookrightarrow H$ con inyección compacta, por el Teorema 1.1.6, tenemos que

$$\mathcal{H}^\gamma(0, T; V, H) \hookrightarrow L^2(0, T; H) \text{ con inyección compacta,}$$

de donde

$$u_m \rightarrow u \text{ fuerte en } L^2(0, T; H).$$

Para el paso al límite en la aproximación de Galerkin, vamos a necesitar un lema previo que enunciamos a continuación, pero que no demostraremos:

Lema 1.2.6. *Si u_μ converge a u débilmente en $L^2(0, T; V)$ y fuertemente en $L^2(0, T; H)$, entonces para cualquier función $w \in \mathcal{C}^1(\overline{Q})^N$ se tiene que*

$$\int_0^T b(u_\mu(t), u_\mu(t), w) dt \rightarrow \int_0^T b(u(t), u(t), w) dt.$$

Se puede encontrar la prueba en [27]. La idea de la misma consiste en escribir que

$$b(u_\mu, u_\mu, w) = -b(u_\mu, w, u_\mu) = - \sum \int_{\Omega} u_{\mu i} \partial_i w_j u_{\mu j} dx$$

y usar las propiedades de convergencia de las u_μ .

Así ya podemos pasar al límite en el problema aproximado de Galerkin.

Para ello, consideramos una función $\Psi \in \mathcal{D}(0, T)$, multiplicamos por Ψ las EDOs de (1.4) e integramos en $(0, T)$ y nos queda:

$$\begin{aligned} - \int_0^T (u_m(t), \Psi'(t)w_j) dt + \nu \int_0^T ((u_m(t), \Psi(t)w_j)) dt + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w_j\Psi(t)) dt \\ = \int_0^T \langle f(t), w_j\Psi(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Y si ahora pasamos al límite y usamos el Lema 2.1.5 tenemos que

$$\begin{aligned} - \int_0^T (u(t), \Psi'(t)w_j) dt + \nu \int_0^T ((u(t), \Psi(t)w_j)) dt + \int_0^T b(u(t), u(t), \Psi(t)w_j) dt \\ = \int_0^T \langle f(t), \Psi(t)w_j \rangle dt \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u'(t), \Psi(t)w_j \rangle dt + \nu \int_0^T ((u(t), \Psi(t)w_j)) dt + \int_0^T b(u(t), u(t), \Psi(t)w_j) dt \\ = \int_0^T \langle f(t), \Psi(t)w_j \rangle dt. \end{aligned}$$

Esta igualdad es cierta por linealidad y por densidad para todo $v \in V$. Por tanto, tenemos que u verifica la igualdad diferencial de (1.2)

Ahora ya sólo queda probar que $u(0) = u_0$.

Para ello, repetimos el argumento precedente esta vez con $\Psi \in \mathcal{C}^\infty([0, T])$ con $\Psi(T) = 0$ y vemos que

$$\begin{aligned} - \int_0^T (u(t), \Psi'(t)v) dt + \nu \int_0^T ((u(t), \Psi(t)v)) dt + \int_0^T b(u(t), u(t), \Psi(t)v) dt = \\ = (u_0, \Psi(0)v) + \int_0^T \langle f(t), \Psi(t)v \rangle dt. \end{aligned}$$

Pero no es difícil demostrar que

$$\int_0^T (u, \Psi'(v)) dt = - \int_0^T \langle u', \Psi v \rangle dt - (u(0), \Psi(0)v).$$

Con lo cual, llegamos a que

$$\Psi(0)(u_0 - u(0), v) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Tomando $\Psi(0) = 1$, tenemos $u(0) = u_0$. Y con esto terminamos la demostración del teorema. ■

Observemos que este teorema también es válido si Ω es no acotado. También si tomamos f como suma de dos funciones f_1 y f_2 tales que

$$f_1 \in L^2(0, T; V') \text{ y } f_2 \in L^1(0, T; H).$$

También podemos observar que la solución del teorema anterior verifica lo que se conoce como la *desigualdad de energía*.

Sea $t \in [0, T]$. Entonces la solución que proporciona el Teorema 1.2.5 satisface

$$|u(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|u(s)\|^2 ds \leq |u_0|^2 + \int_0^t \langle f(s), u(s) \rangle ds.$$

Esta es la denominada desigualdad de energía. Es consecuencia de las siguientes identidades verificadas por las u_m :

$$(u'_m(t), u_m(t)) + \nu \|u_m(t)\|^2 = \langle f(t), u_m(t) \rangle.$$

En efecto, si integramos nos queda

$$|u_m(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds = |u_{0m}|^2 + 2 \int_0^t \langle f(s), u_m(s) \rangle ds.$$

Como $u_m \rightharpoonup u$ en $L^2(0, T; V)$ y $\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma} |\widehat{u}(\tau)|^2 dt \leq C$, entonces $u_m \rightarrow u$ fuertemente en $L^2(0, T; H)$. Gracias al Lema 1.1.4, tenemos también que $u_m(t) \rightharpoonup u(t)$ débil en H para cada $t \in [0, T]$.

Y así llegamos a que

$$|u(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|u(s)\|^2 ds \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \left(|u_m(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds \right).$$

Por tanto, dado que $u_{0m} \rightharpoonup u_0$ en H ,

$$|u(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|u(s)\|^2 ds \leq |u_0|^2 + \int_0^t \langle f(s), u(s) \rangle ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Es desconocido saber si todas las soluciones débiles de las ecuaciones de Navier-Stokes verifican la igualdad de energía, es decir, la relación anterior con igualdad en vez de desigualdad.

1.3. Teorema de unicidad ($N = 2$)

En esta sección vamos a estudiar la unicidad de solución en el caso bidimensional.

Recordemos antes una serie de resultados previos.

Lema 1.3.1. *Supongamos $N = 2$. Entonces*

$$\|v\|_{L^4} \leq 2^{1/4} \|v\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2}^{1/2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.7)$$

Demostración

Como $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$ bastará probarlo para $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ pues por densidad ya lo tendremos para $v \in H_0^1(\Omega)$.

Así si prolongamos v por 0 fuera de Ω podemos escribir que

$$|v(x)|^2 = |v(x_1, x_2)|^2 = 2 \int_{-\infty}^{x_1} v(\xi_1, x_2) D_1 v(\xi_1, x_2) d\xi_1 = 2 \int_{-\infty}^{x_2} v(x_1, \xi_2) D_2 v(x_1, \xi_2) d\xi_2$$

* En esta demostración $|\cdot|$ es el valor absoluto no la norma en $L^2(\Omega)$.

Siguiendo la demostración podemos escribir que:

$$|v(x)|^2 \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |v(\xi_1, x_2)| |D_1 v(\xi_1, x_2)| d\xi_1 = 2w_1(x_2),$$

$$\text{siendo } w_1(x_2) = \int_{\mathbb{R}} |v(\xi_1, x_2)| |D_1 v(\xi_1, x_2)| d\xi_1.$$

De igual modo tenemos que:

$$|v(x)|^2 \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |v(x_1, \xi_2)| |D_2 v(x_1, \xi_2)| d\xi_2 = 2w_2(x_1),$$

$$\text{siendo } w_2(x_1) = \int_{\mathbb{R}} |v(x_1, \xi_2)| |D_2 v(x_1, \xi_2)| d\xi_2.$$

Y así,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |v(x)|^4 dx \leq 4 \int_{\mathbb{R}^2} w_1(x_2) w_2(x_1) dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} w_1(x_2) dx_2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} w_2(x_1) dx_1 \right).$$

Usando la definición de $w_i(x_j)$ y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |v(x)|^4 dx \leq 4 \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|D_1 v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|D_2 v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Ahora utilizamos la siguiente desigualdad $a^2 + b^2 \geq 2ab$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, con $a = \|D_1 v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ y $b = \|D_2 v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ y llegamos a que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |v(x)|^4 dx \leq 2 \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$$

y, por tanto, queda probada la desigualdad. ■

Lema 1.3.2. *Supongamos que $N = 2$, entonces*

$$|b(u, v, w)| \leq 2^{1/2} |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} |v|^{1/2} \|v\|^{1/2} \|w\| \quad \forall u, v, w \in H_0^1(\Omega). \quad (1.8)$$

Por otra parte, si $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, entonces $B(u, u) \in L^2(0, T; V')$ y

$$\|B(u, u)\|_{L^2(0, T; V')} \leq 2^{1/2} \|u\|_{L^\infty(0, T; H)} \|u\|_{L^2(0, T; V)}.$$

Demostración

Como $N = 2$, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ con inyección compacta para todo p finito. Entonces, si aplicamos la desigualdad de Hölder con tres factores en $L^2(\Omega)$, podemos deducir que

$$|b(u, v, w)| \leq \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} |u_i D_i v_j w_j| \, dx \leq \sum_{i,j=1}^2 \|u_i\|_{L^4} \|D_i v_j\|_{L^2} \|w_j\|_{L^4},$$

y si ahora usamos la desigualdad de Hölder con tres factores en \mathbb{R} tenemos que

$$|b(u, v, w)| \leq \left(\sum_{i,j=1}^2 \|D_i v_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^2 \|u_i\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^2 \|w_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Usando ahora el Lema 1.3.1 podemos deducir

$$|b(u, v, w)| \leq \left(\sum_{i=1}^2 2^{1/2} \|u_i\|_{L^2} \|\nabla u_i\|_{L^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^2 \|D_i v_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^2 2^{1/2} \|w_j\|_{L^2} \|\nabla w_j\|_{L^2} \right)^{1/2}.$$

Con lo cual,

$$|b(u, v, w)| \leq 2^{1/2} |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|v\| \|w\|^{1/2} |w|^{1/2}.$$

Con esto queda probada la primera parte del lema. Para la segunda parte observemos que como $b(u, v, w) = -b(u, w, v)$. Entonces llegamos a que, también,

$$|b(u, v, w)| \leq 2^{1/2} |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|v\|^{1/2} |v|^{1/2} \|w\|.$$

En particular, tomando $u = v$ tenemos que

$$|b(u, u, w)| \leq 2^{1/2} |u| \|u\| \|w\| \quad \forall u, w \in V,$$

de donde

$$\|B(u, u)\|_* \leq 2^{1/2} |u| \|u\|, \quad \forall u \in V.$$

Con lo cual, si tomamos $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ podemos escribir que

$$\int_0^T \|B(u(t), u(t))\|_*^2 \, dt \leq \int_0^T 2|u(t)|^2 \|u(t)\|^2 \, dt \leq 2 \|u\|_{L^\infty(0, T; H)}^2 \|u\|_{L^2(0, T; V)}^2.$$

Luego, $B(u, u) \in L^2(0, T; V')$ y además

$$\|B(u, u)\|_{L^2(0, T; V')} \leq 2^{1/2} \|u\|_{L^\infty(0, T; H)} \|u\|_{L^2(0, T; V)}.$$

Y con esto queda terminada la demostración del lema. ■

Lema 1.3.3. *Sea u una función de $L^2(0, T; V)$ con derivada u_t en $L^2(0, T; V')$ entonces u es igual c.p.d. a una función continua de $[0, T]$ en H . Además, la función $t \mapsto |u(t)|^2$ es absolutamente continua y*

$$\frac{d}{dt} |u(t)|^2 = 2 \langle u_t(t), u(t) \rangle \text{ c.p.d. en } (0, T).$$

Para la demostración, véase por ejemplo [27].

Con estos resultados ya podemos pasar a probar la unicidad de solución débil para las ecuaciones de Navier-Stokes en dimensión 2:

Teorema 1.3.4. *Si $N = 2$, la solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes que proporciona el Teorema 1.2.5 es única. Además, dicha solución es igual c.p.d. a una función continua de $[0, T]$ en H .*

Demostración

Empecemos probando la continuidad de $u : [0, T] \rightarrow H$.

Como $u_t = f - \nu Au - B(u, u)$ y por el Lema 1.3.2 tenemos que $B(u, u) \in L^2(0, T; V')$ y además, $f, Au \in L^2(0, T; V')$; con lo cual $u_t \in L^2(0, T; V')$. Entonces por el Lema 1.3.3 tenemos que $u \in \mathcal{C}([0, T]; H)$ y

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2\langle u_t(t), u(t) \rangle \text{ c.p.d. en } (0, T).$$

Luego ya sólo queda probar la unicidad. Supongamos que existen dos soluciones débiles u_1, u_2 de las ecuaciones de Navier-Stokes. Pongamos $u = u_1 - u_2$ entonces u satisface que $u_t \in L^2(0, T; V')$, $u_t + \nu Au = -B(u_1, u_1) + B(u_2, u_2)$ y $u(0) = 0$.

En consecuencia,

$$\langle u_t, u \rangle + \nu(Au, u) = -b(u_1, u_1, u) + b(u_2, u_2, u) \text{ c.p.d. en } (0, T).$$

Y ahora sumando y restando $b(u_1, u_2, u)$, como $b(u_1, u, u) = 0$, aplicando el Lema 1.3.3, tenemos que

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + 2\nu\|u(t)\|^2 = -2b(u(t), u_2(t), u(t)).$$

Con lo cual, por el Lema 1.3.2 podemos afirmar que

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + 2\nu\|u(t)\|^2 \leq 2^{\frac{3}{2}}|u(t)|\|u(t)\|\|u_2(t)\|.$$

Aplicando ahora la desigualdad de Young, tenemos que

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + 2\nu\|u(t)\|^2 \leq 2\nu\|u(t)\|^2 + \frac{1}{\nu}|u(t)|^2\|u_2(t)\|^2,$$

de donde

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 \leq \frac{1}{\nu}|u(t)|^2\|u_2(t)\|^2.$$

Como $u_2 \in L^2(0, T; V)$, podemos aplicar el Lema de Gronwall. Usando que $u(0) = 0$, llegamos a que

$$|u(t)|^2 \leq 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Luego $u_1 = u_2$, como queríamos probar. ■

Como consecuencia de este resultado y del Lema 1.3.1, tenemos:

Corolario 1.3.5. *Supongamos que $N = 2$. Entonces la única solución débil de Navier-Stokes verifica $u \in L^4(Q)^2$.*

Para acabar esta sección, observemos que el teorema y corolario anterior también son válidos si el dominio Ω es no acotado.

Además, para $N = 2$, la solución débil verifica la identidad de energía. En efecto, como $u \in L^2(0, T; V)$, $u_t \in L^2(0, T; V')$ y $u_t + \nu Au + B(u, u) = f$, entonces multiplicando por $u(t)$ e integrando, gracias al Lema 1.3.3, llegamos a que

$$|u(t)|^2 - |u(0)|^2 + 2\nu \int_0^t \|u(s)\|^2 ds = 2 \int_0^t \langle f(s), u(s) \rangle ds.$$

1.4. Teorema de unicidad parcial ($N = 3$)

En esta sección vamos a estudiar la unicidad en el caso tridimensional. En este caso, sólo es posible demostrar algunos resultados parciales.

Comencemos con dos resultados previos,

Lema 1.4.1. *Supongamos que $N = 3$. Entonces*

$$\|v\|_{L^4} \leq C|v|^{1/4}\|v\|^{3/4}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Demostración

Como $N = 3$, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ con inyección continua para $p \leq 6$. Entonces tenemos que, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\|\varphi\|_{L^4(\Omega)}^4 = \int_{\Omega} |\varphi|^4 dx = \int_{\Omega} |\varphi|^3 |\varphi| dx.$$

Y si usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\|\varphi\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq \left(\int_{\Omega} |\varphi|^6 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\varphi|^2 dx \right)^{1/2} \leq \|\varphi\|_{L^6(\Omega)}^3 |\varphi| \leq C|\varphi| \|\varphi\|^3.$$

Como $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$ ya tenemos probado el resultado. ■

Obsérvese que el Lema 1.4.1 proporciona una desigualdad “peor” que el Lema 1.3.1. En efecto, el exponente de la norma más fuerte a la derecha es mayor. Esto tiene gran influencia en los resultados que siguen.

Teorema 1.4.2. *Sea $N = 3$, entonces la solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes que proporciona el Teorema 1.2.5 verifica $u \in L^{8/3}(0, T; L^4(\Omega))$ y $u_t \in L^{4/3}(0, T; V')$.*

Demostración

Por el lema anterior sabemos que para casi todo $t \in (0, T)$ tenemos que

$$\|u(t)\|_{L^4} \leq C|u(t)|^{1/4}\|u(t)\|^{3/4}.$$

Con lo cual tenemos que,

$$\int_0^T \|u(t)\|_{L^4}^{8/3} dt \leq \int_0^T (\|u(t)\|^{3/4}|u(t)|^{1/4})^{8/3} dt = \int_0^T \|u(t)\|^{1/2}|u(t)|^{3/2} dt,$$

por el teorema de existencia sabemos que $u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ así que

$$\int_0^T \|u(t)\|_{L^4}^{8/3} dt \leq \int_0^T \|u(t)\|^{1/2} \left(\max_{t \in [0, T]} |u(t)| \right)^{3/2} dt \leq \|u\|_{L^\infty(0, T; H)}^{3/2} \|u\|_{L^{1/2}(0, T; V)}^{1/2} \leq C.$$

Con lo cual, ya hemos probado que $u \in L^{8/3}(0, T; L^4(\Omega))$, ahora queda ver la otra propiedad.

Por la desigualdad de Hölder observamos que

$$|b(u, u, v)| = |b(u, v, u)| \leq C\|u\|_{L^4(\Omega)}^2 \|v\| \text{ para todo } u, v \in V.$$

Por lo tanto,

$$\|B(u(t), u(t))\|_* \leq C\|u(t)\|_{L^4}^2 \text{ c.p.d. en } (0, T).$$

Con lo cual, como $u \in L^{8/3}(0, T; L^4(\Omega))$ entonces $B(u, u) \in L^{4/3}(0, T; V')$ y así llegamos a que $u_t = f - \nu Au - B(u, u) \in L^{4/3}(0, T; V')$ pues $f, Au \in L^2(0, T; V')$; terminando entonces la prueba del teorema. ■

Ahora sí que podemos pasar ya a enunciar y demostrar el teorema de unicidad de solución (fuerte) para las ecuaciones de Navier-Stokes en dimensión 3:

Teorema 1.4.3. *Supongamos $N = 3$, entonces hay a lo más una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes que verifica $u \in L^8(0, T; L^4(\Omega))$. Además, si existe, tal solución es continua de $[0, T]$ en H .*

Demostración

Sea u solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes. Entonces, sabemos que $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$.

Si $u \in L^8(0, T; L^4(\Omega))$ entonces $B(u, u) \in L^2(0, T; V')$ al menos, pues como vimos antes $\|B(u, u)(t)\|_* \leq C\|u(t)\|_{L^4}^2$. Luego $u_t \in L^2(0, T; V')$.

Si aplicamos el Lema 1.3.3 sabemos que u es igual en casi todo a una función continua de $[0, T]$ en H .

Veamos ahora que dicha solución es única.

Usando el lema anterior y la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$|b(u, u, v)| \leq C\|u\|_{L^4}\|v\|_{L^4}\|u\| \leq C|u|^{1/4}\|u\|^{7/4}\|v\|_{L^4} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Supongamos que existen dos soluciones débiles u_1, u_2 y pongamos $u = u_1 - u_2$, es obvio que $u \in L^8(0, T; L^4(\Omega))$.

Así, con los cálculos habituales, podemos ver que

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + 2\nu\|u\|^2 = -2b(u, u_2, u) = 2b(u, u, u_2) \leq 2C|u|^{1/4}\|u\|^{7/4}\|u_2\|_{L^4},$$

con lo cual,

$$\frac{d}{dt}|u|^2 \leq \nu\|u\|^2 + C|u|^2\|u_2\|_{L^4}^8.$$

Como $u_2 \in L^8(0, T; L^4(\Omega))$ podemos escribir que

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-C \int_0^t \|u_2(s)\|_{L^4}^8 ds} |u(t)|^2 \right) \leq 0,$$

con lo cual, $|u(t)|^2 \leq 0$ para todo $t \in [0, T]$.

Luego $u_1 = u_2$, como queríamos probar. ■

Esta prueba también es válida para dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ no acotados.

También, se puede generalizar el Teorema 1.4.3 al caso e que se impone

$$u \in L^r(0, T; L^s(\Omega)), \text{ con } \frac{2}{r} + \frac{3}{s} \leq 1, s > 3.$$

La demostración de esta última observación se puede consultar en [21].

1.5. Soluciones más regulares

En esta sección vamos a ver que, con segundos miembros y condiciones iniciales más regulares, conseguimos soluciones más regulares para las ecuaciones de Navier-Stokes. En el caso tridimensional además debemos suponer que los datos iniciales son suficientemente “pequeños”, en cierto sentido.

Teorema 1.5.1. *Supongamos que $N = 2$, $f, f_t \in L^2(0, T; V')$ con $f(0) \in H$ y $u_0 \in H^2(\Omega)^2 \cap V$. Entonces la única solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes satisface*

$$u_t \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \tag{1.9}$$

y, por lo tanto, $u \in \mathcal{C}([0, T]; V)$.

Demostración

Para demostrar este teorema volveremos a usar las aproximaciones de Galerkin y probaremos nuevas estimaciones a priori para las u'_m . En efecto, veremos que las u'_m están uniformemente acotadas en $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ y así pasando al límite tendremos que (1.9).

Como $u_0 \in V \cap H^2(\Omega)^2$, podemos elegir los u_{0m} como las proyecciones ortogonales de u_0 sobre el espacio $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$. Con lo cual, podemos afirmar que $u_{0m} \rightarrow u_0$ en $H^2(\Omega)^2$ y que $\|u_{0m}\|_{H^2} \leq \|u_0\|_{H^2}$.

Ahora, si multiplicamos por $\alpha'_{jm}(t)$ en las EDOs de (1.4) y sumamos en j , tenemos que

$$|u'_m(t)|^2 + \nu((u_m(t), u'_m(t))) + b(u_m(t), u_m(t), u'_m(t)) = \langle f(t), u'_m(t) \rangle.$$

En particular, para $t = 0$, nos queda que

$$|u'_m(0)|^2 + \nu((u_m(0), u'_m(0))) + b(u_m(0), u_m(0), u'_m(0)) = \langle f(0), u'_m(0) \rangle$$

o, equivalentemente,

$$|u'_m(0)|^2 + \nu(\Delta u_{0m}, u'_m(0)) + b(u_{0m}, u_{0m}, u'_m(0)) = \langle f(0), u'_m(0) \rangle.$$

Como $f(0) \in H$, y $u_{0m} \in H^2(\Omega)^2 \cap V$, podemos acotar de la siguiente manera,

$$|u'_m(0)|^2 \leq |f(0)| |u'_m(0)| + \nu |\Delta u_{0m}| |u'_m(0)| + \|B(u_{0m}, u_{0m})\|_* |u'_m(0)|.$$

Con lo cual,

$$|u'_m(0)| \leq |f(0)| + \nu |\Delta u_{0m}| + \|B(u_{0m}, u_{0m})\|_*.$$

Como $u_{0m} \rightarrow u_0$ en $H^2(\Omega)^2$ y $\|u_{0m}\|_{H^2} \leq \|u_0\|_{H^2}$, entonces podemos afirmar que

$$|\Delta u_{0m}| \leq C \|u_{0m}\|_{H^2} \leq C \|u_0\|_{H^2},$$

pues la aplicación $u \mapsto \Delta u$ es lineal y continua de $H^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$.

Por otro lado, tenemos gracias a la desigualdad de Hölder que

$$|b(u, u, v)| \leq C \|u\|_{L^4} \|\nabla u\|_{L^4} |v| \quad \forall u \in H^2(\Omega)^2, \forall v \in L^2(\Omega)^2.$$

Ahora, si usamos lo anterior junto con el Lema 1.3.1 y la desigualdad de Sobolev, entonces para toda $u \in H^2(\Omega)^2$ y toda $v \in L^2(\Omega)^2$ tenemos que

$$\begin{aligned} |b(u, u, v)| &\leq C |u|^{1/2} |\nabla u|^{1/2} |\nabla u|^{1/2} |\Delta u|^{1/2} |v| = C |u|^{1/2} |\nabla u| |\Delta u|^{1/2} |v| \\ &\leq C |u|^{1/2} |\nabla u| \|u\|_{H^2}^{1/2} |v| \leq C \|u\|_{H^2}^{1/2} \|u\| \|u\|_{H^2}^{1/2} |v| = C \|u\|_{H^2} \|u\| |v|. \end{aligned}$$

En particular, volviendo a usar la desigualdad de Sobolev tenemos que

$$\|B(u_{0m}, u_{0m})\|_* \leq C \|u_{0m}\| \|u_{0m}\|_{H^2} \leq C \|u_{0m}\|_{H^2}^2 \leq C \|u_0\|_{H^2}^2.$$

La consecuencia es que

$$|u'_m(0)| \leq C \|u_0\|_{H^2}^2 + C \|u_0\|_{H^2}^2 + |f(0)|,$$

de donde $\{u'_m(0)\}$ está uniformemente acotada en H .

Ahora, como $f_t \in L^2(0, T; V')$, si derivamos respecto de t las EDOs de (1.4), tenemos que

$$(u_m'', w_j) + \nu((u_m', w_j)) + b(u_m', u_m, w_j) + b(u_m, u_m', w_j) = \langle f_t, w_j \rangle,$$

y multiplicando por α'_{jm} y sumando en j llegamos a que

$$\frac{d}{dt}|u_m'|^2 + 2\nu\|u_m'\|^2 + 2b(u_m', u_m, u_m') = \langle f_t, u_m' \rangle.$$

Por el Lema 1.3.2 y por la desigualdad de Young, tenemos que

$$2|b(u_m'(t), u_m(t), u_m'(t))| \leq 2^{3/2}|u_m'(t)|\|u_m'(t)\|\|u_m(t)\| \leq \nu\|u_m'(t)\|^2 + \frac{2}{\nu}|u_m'(t)|\|u_m(t)\|^2.$$

Con lo cual, deducir fácilmente que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}|u_m'|^2 + 2\nu\|u_m'\|^2 - 2|b(u_m', u_m, u_m')| \\ & \leq \frac{d}{dt}|u_m'|^2 + 2\nu\|u_m'\|^2 + 2b(u_m', u_m, u_m') = \langle f_t, u_m' \rangle, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}|u_m'|^2 + 2\nu\|u_m'\|^2 - \nu\|u_m'\|^2 - \frac{2}{\nu}|u_m'|\|u_m\|^2 \\ & = \frac{d}{dt}|u_m'|^2 + \nu\|u_m'\|^2 - \frac{2}{\nu}|u_m'|\|u_m\|^2 \leq \|f_t\|_*|u_m'|. \end{aligned}$$

Y aplicando de nuevo la desigualdad de Young tenemos que

$$\frac{d}{dt}|u_m'|^2 + \nu\|u_m'\|^2 \leq \frac{2}{\nu}|u_m'|\|u_m\|^2 + \frac{2}{\nu}\|f_t\|_*^2. \quad (1.10)$$

Entonces, aplicando el Lema de Gronwall, teniendo en cuenta que u_m está uniformemente acotada en $L^2(0, T; V)$ y $u_m'(0)$ está uniformemente acotada en H , obtenemos que u_m' está acotada en $L^\infty(0, T; H)$.

Y usando la desigualdad (1.10) también llegamos a que u_m' está uniformemente acotada en $L^2(0, T; V)$, (de la misma forma que hicimos en la prueba del Teorema 1.2.5). ■

Teorema 1.5.2. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, si además Ω es de clase \mathcal{C}^2 y $f \in L^\infty(0, T; H)$, entonces $u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)^2)$.*

Demostración

Observemos que podemos escribir que

$$\nu((u(t), v)) = (g(t), v) \quad \forall v \in V,$$

siendo $g(t) = f(t) - u_t(t) - B(u(t), u(t))$.

Para esta prueba usamos los resultados de regularidad de la ecuación de Stokes estacionaria, véase la Proposición 2.2 del Capítulo 1 de [27].

Como $u \in L^\infty(0, T; V)$ y

$$|b(u, u, v)| \leq C \|u\|_{L^4} \|u\| \|v\|_{L^4} \leq C \|u\|^2 \|v\|_{L^4},$$

tenemos que $B(u, u) \in L^\infty(0, T; L^{4/3}(\Omega))$. Por el Teorema 1.5.1 $u_t \in L^\infty(0, T; H)$ y por hipótesis $f \in L^\infty(0, T; H)$; luego $g \in L^\infty(0, T; L^{4/3}(\Omega))$.

Y por el resultado de [27], podemos afirmar que $u \in L^\infty(0, T; W^{2,4/3}(\Omega))$.

Por el Teorema de Inyección de Sobolev tenemos que $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, con inyección compacta para todo $p > 1$, por lo tanto, $u \in L^\infty(Q)^2$.

Esta regularidad puede mejorarse si acotamos $B(u, u)$ como sigue:

$$|B(u(t), u(t))| \leq \left(\sup_{t \in [0, T]} \|u(s)\| \right) \|u(t)\|.$$

Así podemos afirmar que $B(u, u) \in L^\infty(0, T; H)$; por lo que $g \in L^\infty(0, T; H)$ y aplicando de nuevo el resultado de [27] tenemos que $u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)^2)$, como queríamos probar. ■

Observemos que si aplicamos sucesivamente el resultado de [27] podemos probar que si Ω es de clase C^∞ y $f \in C^\infty(Q)$ entonces $u \in C(\bar{\Omega} \times [0, T])^2$. De hecho, cabe esperar, que cuanto más exigentes sean las hipótesis sobre los datos mayor será la regularidad de u .

Ahora vamos a probar resultados de regularidad similares a los anteriores en el caso tridimensional. Tendremos que añadir hipótesis adicionales que exijan que los datos sean “pequeños”.

Teorema 1.5.3. *Supongamos que $N = 3$. Sean u_0 y f tales que $u_0 \in H^2(\Omega)^3 \cap V$, $f \in L^\infty(0, T; H)$, $f_t \in L^1(0, T; H)$ y $f(0) \in H$. Si además las funciones u_0, f, f_t son suficientemente pequeñas en sus respectivos espacios, entonces existe una única solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes que verifica $u_t \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$.*

Demostración

Como $u \in L^\infty(0, T; V)$ y $V \hookrightarrow L^4(\Omega)^3$ con inyección compacta, entonces $u \in L^\infty(0, T; L^4(\Omega)^3)$. Y por el Teorema de 1.4.3 tenemos que dicha solución u es única.

Con lo cual solo nos queda ver que $u_t \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$. Para ello nos apoyamos de nuevo en el método de aproximación de Galerkin, eligiendo u_{0m} tales que $u_{0m} \rightarrow u_0$ en H^2 y $\|u_{0m}\|_{H^2} \leq \|u_0\|_{H^2}$.

Así, de nuevo, podemos deducir que

$$|\Delta u_{0m}| \leq C \|u_{0m}\|_{H^2} \leq C \|u_0\|_{H^2}.$$

Con lo cual, $u'_m(0)$ está uniformemente acotada en H :

$$|u'_m(0)| \leq d_1 := |f(0)| + \nu C \|u_0\|_{H^2} + C \|u_0\|_{H^2}^2.$$

Si ahora derivamos las EDOs de (1.4) respecto de t , multiplicamos por $\alpha'_{jm}(t)$ y sumamos en j , tenemos que

$$\frac{d}{dt}|u'_m|^2 + 2\nu\|u'_m\|^2 + 2b(u'_m, u_m, u'_m) = 2\langle f_t, u'_m \rangle.$$

Luego,

$$\frac{d}{dt}|u'_m|^2 + 2(\nu - C\|u_m\|)\|u'_m\|^2 \leq 2|f_t||u'_m|.$$

Como ya teníamos antes, sabemos que

$$\frac{d}{dt}|u'_m|^2 + \nu\|u_m\|^2 \leq \frac{1}{\nu}\|f(t)\|_*^2,$$

y

$$\sup_{s \in [0, T]} |u_m(s)|^2 \leq |u_0|^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^T \|f(t)\|_*^2 dt,$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \nu\|u_m(t)\|^2 &\leq \frac{1}{\nu}\|f(t)\|_{V'}^2 - 2(u_m(t), u'_m(t)) \leq \frac{1}{\nu}\|f(t)\|_{V'}^2 + 2|u_m(t)||u'_m(t)| \leq \\ &\leq \frac{1}{\nu}\|f\|_{L^\infty(0, T; V')}^2 + 2\left(|u_0|^2 + \frac{T}{\nu}\|f\|_{L^\infty(0, T; V')}^2\right)^{1/2}|u'_m(t)|. \end{aligned}$$

Y sustituyendo en $t = 0$ tenemos que

$$\nu\|u_m(0)\|^2 \leq \frac{d_2}{\nu} + 2d_1\left(|u_0|^2 + \frac{Td_2}{\nu}\right)^{1/2} := d_3,$$

siendo $d_2 := \|f\|_{L^\infty(0, T; V')}^2$.

Por hipótesis, podemos suponer que

$$d_4 := \frac{d_2}{\nu} + 2d_1\left(|u_0|^2 + \frac{Td_2}{\nu}\right)^{1/2} e^{\int_0^T |f_t(t)| dt} < \frac{\nu^3}{C^2}.$$

Como $d_3 \leq d_4$ entonces

$$\nu\|u_m(0)\|^2 \leq d_3 \leq d_4 < \frac{\nu^3}{C^2},$$

y por lo tanto, $\nu - C\|u_m(0)\| > 0$.

De aquí podemos deducir que existe $t^* \in (0, T]$ tal que $\nu - C\|u_m(t)\| \geq 0$ para todo $t \in [0, t^*]$.

Sea T_m el primer tiempo menor que T tal que la diferencia anterior se hace 0 (si no hay un tiempo así, tomamos $T_m = T$). Entonces $\nu - C\|u_m(t)\| \geq 0$ para $0 \leq t \leq T_m$ y usando que

$$\frac{d}{dt}|u'_m|^2 + 2(\nu - C\|u_m\|)\|u'_m\|^2 \leq 2|f_t||u'_m|,$$

llegamos a que

$$\frac{d}{dt}|u'_m|^2 \leq 2|f_t||u'_m|,$$

con lo cual,

$$\frac{d}{dt}(1 + |u'_m|^2) \leq 2|f_t|(1 + |u'_m|^2).$$

Luego aplicando el lema de Gronwall tenemos que, para $t \in [0, T_m]$,

$$\frac{d}{dt}(1 + |u'_m(t)|^2) \leq e^{\int_0^t |f_t(s)| ds} \Rightarrow 1 + |u'_m(t)|^2 \leq (1 + |u'_m(0)|^2) e^{\int_0^t |f_t(s)| ds} \leq (1 + d_1^2) e^{\int_0^T |f_t(s)| ds} ..$$

Como

$$\begin{aligned} \nu \|u_m(t)\|^2 &\leq \frac{d_2}{\nu} + 2 \left(|u_0|^2 + \frac{Td_2}{\nu} \right)^{1/2} |u'_m(t)| \\ &\leq \frac{d_2}{\nu} + \left(|u_0|^2 + \frac{Td_2}{\nu} \right)^{1/2} (1 + |u'_m(t)|^2), \end{aligned}$$

y por lo visto anteriormente tenemos que

$$\begin{aligned} \nu \|u_m(t)\|^2 &\leq \frac{d_2}{\nu} + \left(|u_0|^2 + \frac{Td_2}{\nu} \right)^{1/2} (1 + |u'_m(t)|^2) \\ &\leq \frac{d_2}{\nu} + \left(|u_0|^2 + \frac{Td_2}{\nu} \right)^{1/2} (1 + d_1^2) e^{\int_0^T |f_t(s)| ds} = d_4. \end{aligned}$$

Con lo cual, como $\nu \|u_m(t)\|^2 \leq d_4$ para todo $t \in [0, T_m]$, entonces

$$\nu - C \|u_m(t)\| \geq \nu - C \sqrt{\frac{d_4}{\nu}} \text{ para todo } t \in [0, T_m].$$

Observemos que por hipótesis $\nu - C \sqrt{\frac{d_4}{\nu}} > 0$, luego podemos afirmar que $\nu - C \|u_m(t)\| > 0$ para todo $t \in [0, T]$, es decir, $T_m = T$.

Y por lo tanto, tenemos que

$$\frac{d}{dt} |u'_m(t)|^2 + 2 \left(\nu - C \sqrt{\frac{d_4}{\nu}} \right) \|u'_m(t)\|^2 \leq 2|f_t(t)| |u'_m(t)|.$$

Razonando como en ocasiones anteriores, podemos afirmar que u'_m está uniformemente acotada en $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$. Y con esto terminamos la demostración del teorema. ■

Al igual que en el caso bidimensional tenemos:

Teorema 1.5.4. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, si además Ω es un abierto de clase C^2 , tenemos que $u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)^3)$.*

Demostración

De nuevo vamos a usar la igualdad $\nu((u(t), v)) = (g(t), v)$ para todo $v \in V$, siendo $g(t) = f(t) - u_t(t) - B(u(t), u(t))$.

Como $f - u_t \in L^\infty(0, T; H)$ por la Proposición 2.2 de [27] tenemos que, si $B(u, u) \in L^\infty(0, T; H)$, entonces $u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)^3)$.

Luego veamos esto último y ya habremos acabado la demostración, para ello usaremos la desigualdad de Hölder

$$|b(u, u, v)| \leq C \|u\|_{L^6} \|u\| \|v\|_{L^3} \leq \|u\|^2 \|v\|_{L^3}.$$

Como $u \in L^\infty(0, T; V)$, entonces tanto g como $B(u, u)$ están en $L^\infty(0, T; L^{3/2}(\Omega)^3)$.

Y de nuevo usando el mismo resultado que en el caso bidimensional tenemos que $u \in L^\infty(0, T; W^{2,3/2}(\Omega)^3)$, y como $W^{2,3/2}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ con inyección continua para $r \in [1, +\infty)$, podemos afirmar que $u \in L^\infty(0, T; L^r(\Omega)^3)$, para $r \in [1, +\infty)$.

Luego, si tomamos $r = 8$ tenemos que $u \in L^\infty(0, T; L^8(\Omega)^3)$ y usando la desigualdad de Hölder llegamos a que

$$|b(u, u, v)| \leq C \|u\|_{L^8} \|u\| \|v\|_{L^{8/3}}.$$

Con lo cual, $B(u, u), g \in L^\infty(0, T; L^{8/3}(\Omega)^3)$ y por la Proposición 2.2 de [27], llegamos a que $u \in L^\infty(0, T; W^{2,8/5}(\Omega)^3)$ que se inyecta de forma continua en $L^\infty(\Omega)^3$; por lo tanto, $u \in L^\infty(Q)^3$. Y con esto terminamos la demostración de este teorema. ■

1.6. Recuperación de la presión

Vamos a terminar este primer capítulo viendo cómo podemos recuperar la presión una vez obtenida la solución u de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Para ello vamos a definir las siguientes funciones:

$$U(t) := \int_0^t u(s) ds, \quad \beta(t) := \int_0^t B(u, u)(s) ds, \quad F(t) := \int_0^t f(s) ds.$$

Observemos que si u es solución de Navier-Stokes, entonces se verifica que $U, \beta, F \in \mathcal{C}([0, T]; V')$.

Integrando ahora la ecuación variacional llegamos a que

$$\nu((U(t), v)) = \langle g(t), v \rangle \quad \forall v \in V, \quad \forall t \in [0, T],$$

siendo $g = F - \beta - u + u_0 \in \mathcal{C}([0, T]; V')$.

A continuación presentaremos dos resultados importantes, demostrados en [27], con los que se prueba que es posible recuperar la presión una vez obtenida la solución de Navier-Stokes.

Lema 1.6.1. (De Rham) Sea $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ con $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ para todo i . Entonces,

$$\langle f, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \exists p \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ tal que } f = \nabla p.$$

Proposición 1.6.2. Sea $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

- I. Si $\partial_i p \in L^2(\Omega)$ para todo i , entonces $p \in H^1(\Omega)$ y $\|p\|_{H^1/\mathbb{R}} \leq C \|\nabla p\|$.
- II. Si $\partial_i p \in H^{-1}(\Omega)$ para todo i , entonces $p \in L^2(\Omega)$ y $\|p\|_{L^2/\mathbb{R}} \leq C \|\nabla p\|_{H^{-1}}$.

III. *El operador gradiente, $p \mapsto \nabla p$, es un isomorfismo de $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ sobre $H^{-1}(\Omega)^N$.*

Deducimos así que para cada $t \in [0, T]$, existe una función $P(t) \in L^2(\Omega)$ tal que

$$-\nu\Delta U(t) + \nabla P(t) = g(t)$$

o, equivalentemente,

$$u(t) - u_0(t) - \nu\Delta U(t) + \beta(t) + \nabla P(t) = F(t).$$

Luego, $\nabla P = g + \nu\Delta U$ y por lo tanto, $\nabla P \in \mathcal{C}([0, T]; H^{-1}(\Omega))$; esto implica que

$$P \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Así, podemos derivar la ecuación anterior en el sentido de las distribuciones sobre Q y obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \sum_{i=1}^N u_i D_i u + \nabla p = f \text{ en } Q,$$

siendo $p = \frac{\partial P}{\partial t}$ (la presión aparece en el sistema como una distribución en Q).

En general, sólo puede afirmarse que $p = \frac{\partial P}{\partial t}$ con $P \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$; aunque, bajo hipótesis de regularidad más fuertes, podemos probar que $p \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$.

Con esto damos por terminado el estudio general de las ecuaciones de Navier-Stokes que hemos hecho en este primer capítulo.

Capítulo 2

Resultados de existencia y unicidad para el sistema de Boussinesq

En este segundo capítulo vamos a estudiar el sistema de Boussinesq. Llevaremos un desarrollo análogo al que hemos descrito en el capítulo anterior puesto que muchos resultados son una extensión de los precedentes.

Así, siguiendo con la notación ya usada, consideremos el sistema:

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f + \vec{K}\theta \text{ en } Q, \\ \nabla u = 0 \text{ en } Q, \\ \theta_t + u \cdot \nabla \theta - \kappa \Delta \theta = g \text{ en } Q, \\ u = 0, \theta = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ u(0) = u_0, \theta(0) = \theta_0 \text{ en } \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Éste describe el comportamiento de un fluido homogéneo, (es decir, que tiene densidad constante), incompresible, Newtoniano, (es decir, surge aplicando la segunda ley de Newton al movimiento del fluido) y para el cual los efectos térmicos son importantes. Al igual que pasa con las ecuaciones de Navier-Stokes, el coeficiente ν es positivo y se interpreta como la viscosidad cinemática del fluido. La función $f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^N$ determina el campo de fuerzas externas y $g : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ es una fuente de calor. La constante κ determina el coeficiente de conductividad térmico del fluido y $\vec{K} = Ke_N$ es el vector gravedad con K la constante de gravedad.

Consideramos que el fluido ocupa todo el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y que está adherido a la frontera del mismo. Las incógnitas $u : Q \rightarrow \mathbb{R}^N$, $p, \theta : Q \rightarrow \mathbb{R}$ representan la velocidad, presión y temperatura del fluido, respectivamente.

De la misma forma que en las ecuaciones de Navier-Stokes, el término convectivo $u \cdot \theta$ representa el calor que está siendo transportado por el fluido.

2.1. Teorema de existencia

Pasemos a estudiar la existencia de solución para dicho sistema.

Denotaremos $b_1 : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ a la forma trilineal continua dada por:

$$b_1(u, v, w) := \int_{\Omega} (u \cdot \nabla v) w \, dx \quad \forall u, v, w \in V.$$

También introduciremos otra forma trilineal continua que denotamos $b_2(u, \theta, \eta) : V \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$b_2(u, \theta, \eta) := \int_{\Omega} u \nabla \theta \cdot \eta \, dx \quad \forall u \in V, \forall \theta, \eta \in H_0^1(\Omega).$$

Observemos que igual que para el caso de Navier-Stokes, tenemos que $b_1(u, v, v) = b_2(u, \eta, \eta) = 0 \, \forall u, v \in V, \forall \eta \in H_0^1(\Omega)$, y por el Teorema de Riesz existen $B_1(u, u) \in V'$ y $B_2(u, \theta) \in H^{-1}(\Omega)$ de forma que $\langle B_1(u, u), v \rangle = b_1(u, u, v)$ y $\langle B_2(u, \theta), \eta \rangle = b_2(u, \theta, \eta)$.

Lema 2.1.1. *Si $(u, \psi) \in L^2(0, T; V \times H_0^1(\Omega))$ entonces las aplicaciones $B_1(u, \psi)$ y $B_2(u, \psi)$, definidas anteriormente, verifican que $B_1(u, \psi) \in L^1(0, T; V')$ y $B_2(u, \psi) \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ para $t \in [0, T]$ c.p.d.*

La demostración de este lema no la haremos puesto que es análoga a la que hicimos para el caso de Navier-Stokes en el Capítulo 1.

Definición 2.1.2. *Decimos que (u, θ, p) es una **solución clásica** de (2.1) si $u \in C^2(\overline{Q}; \mathbb{R}^N)$, $\theta \in C^2(\overline{Q}; \mathbb{R})$ y $p \in C^1(\overline{Q}; \mathbb{R})$ y se verifican las igualdades del sistema (2.1) puntualmente.*

Ya podemos introducir el concepto de solución débil,

Definición 2.1.3. *Dadas $f \in L^2(0, T; V')$, $g \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ y $(u_0, \theta_0) \in H \times L^2(\Omega)$, decimos que (u, θ) es una **solución débil del problema de Boussinesq** si*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \quad \theta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \frac{d}{dt}(u, v) + \nu((u, v)) + b_1(u, u, v) = \langle f, v \rangle + \overrightarrow{K}(\theta, v) \quad \forall v \in V, \\ \frac{d}{dt}(\theta, \eta) + \kappa((\theta, \eta)) + b_2(u, \theta, \eta) = \langle g, \eta \rangle, \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega), \\ u(0) = u_0 \text{ y } \theta(0) = \theta_0. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Igual que probamos para las ecuaciones de Navier-Stokes se puede demostrar de manera análoga que la condición $u(0) = u_0$ y $\theta(0) = \theta_0$ tiene sentido, al menos como igualdad en $V' \times H^{-1}(\Omega)$. Más aún, como $u \in L^\infty(0, T; H)$, $\theta \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, también tenemos por el Lema 1.1.4 que u coincide c.p.d. con una función débilmente continua de $[0, T]$ en H y θ coincide c.p.d. con una función débilmente continua de $[0, T]$ en $L^2(\Omega)$. Luego la igualdad también tiene sentido en $H \times L^2(\Omega)$.

De nuevo podemos afirmar que los problemas (2.1) y (2.2) son equivalentes y poseen solución gracias al siguiente resultado.

Teorema 2.1.4. Sean $f \in L^2(0, T; V')$, $g \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ y $(u_0, \theta_0) \in H \times L^2(\Omega)$. Entonces existe al menos una solución débil (u, θ) del problema de Boussinesq. Además, (u, θ) es débilmente continua de $[0, T]$ en $H \times L^2(\Omega)$.

Demostración

Esta demostración se realiza de forma análoga a del Teorema 1.2.5. Por ello, para probar la existencia de solución usaremos de nuevo el método de Galerkin, para después continuar hallando estimaciones a priori y así pasar al límite.

APROXIMACIÓN DE GALERKIN

Comencemos observando que en este caso el espacio $\mathcal{V} \times \mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $V \times H_0^1(\Omega)$ y éste es separable. Con lo cual, existe una sucesión $\{(w_m, \phi_m)\}$ en $\mathcal{V} \times \mathcal{D}(\Omega)$ de funciones linealmente independientes que es total en $V \times H_0^1(\Omega)$.

Así pasamos a considerar el problema aproximado de (2.2);

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_{im}(t) w_i, \quad \theta_m(t) = \sum_{k=1}^m h_{im}(t) \phi_i; \\ (u'_m(t), w_j) + \nu((u_m(t), w_j)) + b_1(u_m(t), u_m(t), w_j) = \langle f, w_j \rangle + (\vec{K} \theta_m(t), w_j); \\ (\theta'_m(t), \phi_j) + \kappa((\theta_m(t), \phi_j)) + b_2(u_m(t), \theta_m(t), \phi_j) = \langle g, \phi_j \rangle; \\ t \in [0, T], \quad j = 1, \dots, m; \\ u_m(0) = u_{0m}, \quad \theta_m(0) = \theta_{0m}. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

siendo (u_{0m}, θ_{0m}) la proyección ortogonal del dato inicial $(u_0, \theta_0) \in H \times L^2(\Omega)$ sobre el espacio $V_m := [w_1, w_2, \dots, w_m] \times W_m := [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m]$.

Obsevemos que (2.3) es un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales acopladas para (α_{im}, h_{im}) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (w_i, w_j) \alpha'_{im} + \nu \sum_{i=1}^m ((w_i, w_j)) \alpha_{im} + \sum_{i,k=1}^m b_1(w_i, w_k, w_j) \alpha_{im} \alpha_{km} &= \langle f(t), w_j \rangle + \sum_{i=1}^m h_{im} (\vec{K} \phi_i, w_j), \\ \sum_{i=1}^m (\phi_i, \phi_j) h'_{im} + \kappa \sum_{i=1}^m ((\phi_i, \phi_j)) h_{im} + \sum_{i,k=1}^m b_2(w_i, \phi_k, \phi_j) \alpha_{im} h_{km} &= \langle g(t), \phi_j \rangle, \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} \alpha'_{im} + \sum_{j=1}^m a_{ij} \alpha_{im} + \sum_{j,k=1}^m c_{ijk} \alpha_{jm} \alpha_{km} &= \sum_{j=1}^m d_{ij} \langle f(t), w_j \rangle + \sum_{j=1}^m e_{ij} h_{im}, \\ h'_{im} + \sum_{j=1}^m \tilde{a}_{ij} h_{im} + \sum_{j,k=1}^m \tilde{c}_{ijk} \alpha_{jm} h_{km} &= \sum_{j=1}^m \tilde{d}_{ij} \langle g(t), \phi_j \rangle, \end{aligned}$$

siendo $a_{ij}, c_{ijk}, d_{ij}, e_{ij}, \tilde{a}_{ij}, \tilde{c}_{ijk}, \tilde{d}_{ij} \in \mathbb{R}$.

También, la condición inicial para u_m y θ_m equivale a m condiciones iniciales para los α_{im} y las h_{im}

$$(\alpha_{im}(0), h_{im}(0)) = (\alpha_{im}^0, h_{im}^0),$$

siendo éstas la componente i -ésima de u_{0m} y de θ_{0m} respectivamente.

El sistema no lineal junto con las condiciones iniciales posee una solución (u_m, θ_m) definida en un intervalo maximal por la derecha $[0, t_m]$, con $0 < t_m \leq T$, para cada m .

Veamos que $t_m = T$, para todo m .

Supongamos que $t_m < T$, entonces

$$\limsup_{t \rightarrow t_m} \|u_m(t)\| = +\infty,$$

$$\limsup_{t \rightarrow t_m} \|\theta_m(t)\| = +\infty.$$

Pero como ahora veremos $|u_m(t)|$ y $|\theta_m(t)|$ están acotadas en $[0, T]$ por una constante independiente de t y de m . Luego la solución está definida en todo $[0, T]$ para todo m .

ESTIMACIONES A PRIORI

Para obtener las estimaciones a priori vamos a multiplicar en (2.3) por $\alpha_{jm}(t), h_{jm}(t)$, respectivamente, y sumar en j ; así tenemos que

$$(u'_m(t), u_m(t)) + \nu((u_m(t), u_m(t))) = \langle f(t), u_m(t) \rangle + (\vec{K}\theta_m(t), u_m(t)), \quad (2.4)$$

$$(\theta'_m(t), \theta_m(t)) + \kappa((\theta_m(t), \theta_m(t))) = \langle g(t), \theta_m(t) \rangle. \quad (2.5)$$

Observemos que la última ecuación, (2.5), es de la misma forma que la ecuación que teníamos en la demostración de Teorema 1.2.5. Luego, teniendo en cuenta que $g \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, podemos aplicar el mismo procedimiento y así llegamos a que

$$\{\theta_m\} \text{ está uniformemente acotada en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$\{\theta_m\} \text{ está uniformemente acotada en } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Una vez que tenemos que θ_m está uniformemente acotada en $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ ya podemos hallar estimaciones para u_m . De nuevo, si seguimos el mismo procedimiento que el que usamos para las estimaciones de Navier-Stokes, teniendo en cuenta que nuestra función del segundo miembro ya no es f sino que ahora es $f(t) + \vec{K}\theta_m(t)$; llegamos a que

$$\{u_m\} \text{ está uniformemente acotada en } L^\infty(0, T; H),$$

$$\{u_m\} \text{ está uniformemente acotada en } L^2(0, T; V).$$

Y así también hemos probado que $t_m = T$ pues la solución no puede explotar en tiempo finito.

CONVERGENCIA

Consideremos ahora las extensiones por cero de las u_m a todo \mathbb{R} , denotadas $\tilde{u}_m(t)$ y las extensiones por cero de las θ_m , denotadas $\tilde{\theta}_m$. Así podemos también considerar las respectivas transformadas de Fourier y las denotamos \hat{u}_m y $\hat{\theta}_m$.

Ahora debemos probar que $\{u_m\}$ y $\{\theta_m\}$ están uniformemente acotadas en $\mathcal{H}^\gamma(0, T; V, H)$ y $\mathcal{H}^\gamma(0, T; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ para $0 < \gamma < \frac{1}{4}$.

De la misma manera que razonamos en el Capítulo 1, podemos afirmar que como $\{u_m, \theta_m\}$ está uniformemente acotada en $L^\infty(0, T; H \times L^2(\Omega))$ y en $L^2(0, T; V \times H_0^1(\Omega))$; llegamos a que

$\{u_m, \theta_m\}$ está uniformemente acotada en $\mathcal{H}^\gamma(0, T; V \times H_0^1(\Omega), H \times L^2(\Omega))$, para $0 < \gamma < \frac{1}{4}$.

EXTRACCIÓN DE SUBSUCESIONES Y PASO AL LÍMITE

Así podemos estimar subsucesiones que converjan en algún sentido a una función (u, θ) para luego pasar al límite en el problema aproximado.

Como $\{u_m, \theta_m\}$ está uniformemente acotada en $L^2(0, T; V \times H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H \times L^2(\Omega))$ entonces existe una subsucesión, que denotamos de la misma manera, de forma que

$$(u_m, \theta_m) \rightharpoonup (u, \theta) \text{ débilmente en } L^2(0, T; V \times H_0^1(\Omega));$$

$$(u_m, \theta_m) \rightharpoonup (u, \theta) \text{ débil-} * \text{ en } L^\infty(0, T; H \times L^2(\Omega)).$$

Además, como tanto $V \hookrightarrow H$ como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, con inyección compacta entonces por el Teorema 1.1.6, tenemos que

$$\mathcal{H}^\gamma(0, T; V \times H_0^1(\Omega), H \times L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; H \times L^2(\Omega)) \text{ con inyección compacta,}$$

de donde,

$$(u_m, \theta_m) \rightarrow (u, \theta) \text{ fuerte en } L^2(0, T; H \times L^2(\Omega)).$$

Para esta parte vamos a necesitar un lema previo que enunciamos a continuación, pero que no demostraremos.

Lema 2.1.5. *Si (u_μ, θ_μ) converge a (u, θ) débilmente en $L^2(0, T; V \times H_0^1(\Omega))$ y fuertemente en $L^2(0, T; H \times L^2(\Omega))$, entonces para cualquier función $(w, \phi) \in \mathcal{C}^1(\bar{Q})^N \times \mathcal{C}^1(\bar{Q})^N$ tenemos que*

$$\begin{aligned} \int_0^T b_1(u_\mu(t), u_\mu(t), w) dt &\rightarrow \int_0^T b_1(u(t), u(t), w) dt \\ \int_0^T b_2(u_\mu(t), \theta_\mu(t), \phi) dt &\rightarrow \int_0^T b_2(u(t), \theta(t), \phi) dt. \end{aligned}$$

Ya podemos pasar al límite en el problema aproximado de Galerkin. De nuevo razonando en cada ecuación de la misma forma que hicimos para las ecuaciones de Navier-Stokes, llegamos a probar que (u, θ) son soluciones débiles del sistema de Boussinesq y con esto terminamos la demostración del teorema. ■

Observemos que el teorema anterior también es válido si tomamos $f = f_1 + f_2$ y $g = g_1 + g_2$, cumpliendo

$$\begin{aligned} f_1 &\in L^2(0, T; V'), \quad f_2 \in L^1(0, T; H), \\ g_1 &\in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad g_2 \in L^1(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Además, si el dominio Ω es no acotado el Teorema 2.1.4 se cumple.

También para el sistema de Boussinesq tenemos las desigualdades de energía,

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|u(s)\|^2 ds &\leq |u_0|^2 + \int_0^t \langle f(s), u(s) \rangle + (\vec{K}\theta_m(s), u_m(s)) ds, \\ |\theta(t)|^2 + 2\kappa \int_0^t \|\theta(s)\|^2 ds &\leq |\theta_0|^2 + \int_0^t \langle g(s), \theta(s) \rangle ds, \end{aligned}$$

para $t \in [0, T]$ c.p.d.

De nuevo es un problema abierto saber si todas las soluciones del sistema de Boussinesq cumplen la igualdad de energía.

2.2. Teorema de unicidad ($N = 2$)

Ahora vamos a pasar a estudiar la unicidad de solución para el sistema de Boussinesq en el caso bidimensional.

Como ya hicimos para la unicidad de solución de las ecuaciones de Navier-Stokes, necesitamos algunos lemas previos, uno de ellos ya mencionado en el capítulo anterior (Lema 1.3.1) y otro análogo al Lema 1.3.2,

Lema 2.2.1. *Supongamos que $N = 2$ y escribimos $X_1 := V$, $X_2 := H_0^1(\Omega)$. Entonces*

$$|b_i(u, v, w)| \leq 2^{1/2} |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} |v|^{1/2} \|v\|^{1/2} \|w\|, \quad \forall u \in V, \quad \forall v, w \in X_i, i = 1, 2.$$

Por otra parte, si $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ entonces tenemos que $B(u, u) \in L^2(0, T; V')$, $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, tenemos que $B_i(u, v) \in L^2(0, T; X_i')$ para $i = 1, 2$, y

$$\|B_i(u, v)\|_{L^2(0, T; X_i')} \leq 2^{1/2} \|u\|_{L^\infty(0, T; H)} \|v\|_{L^2(0, T; X_i)}.$$

La demostración de este lema no la haremos puesto que se rezona igual que en el Lema 1.3.2.

Así ya podemos pasar a ver el principal resultado de esta sección.

Teorema 2.2.2. *Si $N = 2$. Entonces la solución débil del sistema de Boussinesq que proporciona el Teorema 2.1.4 es única. Además, dicha solución es igual c.p.d. a una función continua de $[0, T]$ en $H \times L^2(\Omega)$.*

Demostración

Empecemos probando la continuidad de $(u, \theta) : [0, T] \rightarrow H \times L^2(\Omega)$.

Como $u_t + \nu A_1 u + B_1(u, u) = f + \vec{K}\theta$ en $[0, T]$ entonces $u_t = f - \nu A_1 u - B_1(u, u) + \vec{K}\theta$ que por el lema anterior tenemos que $B_1(u, u) \in L^2(0, T; V')$ y además, $f, A_1 u, \vec{K}\theta \in L^2(0, T; V')$. Con lo cual $u_t \in L^2(0, T; V')$.

De igual forma, $\theta_t = g - \kappa A_2 \theta - B_2(u, \theta)$ que por el Lema 2.2.1 tenemos que $B_2(u, \theta) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Además, $g, A_2 u, \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$; por lo tanto, $\theta_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Luego por Lema 1.3.3 tenemos que $(u, \theta) \in \mathcal{C}([0, T]; H \times L^2(\Omega))$ y

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2\langle u_t(t), u(t) \rangle,$$

$$\frac{d}{dt}|\theta(t)|^2 = 2\langle \theta_t(t), \theta(t) \rangle,$$

c.p.d. en $[0, T]$.

Luego ya sólo queda probar la unicidad de solución. Para ello supongamos que existen (u_1, θ_1) y (u_2, θ_2) dos soluciones débiles del sistema de Boussinesq. Consideremos $u = u_1 - u_2$ y $\theta = \theta_1 - \theta_2$ entonces (u, θ) satisface que

$$(u_t, \theta_t) \in L^2(0, T; V' \times H^{-1}(\Omega)),$$

$$u_t + \nu A_1 u = -B_1(u_1, u_1) + B_1(u_2, u_2) + \vec{K}\theta,$$

$$\theta_t + \kappa A_2 \theta = -B_2(u_1, \theta_1) + B_2(u_2, \theta_2),$$

$$u(0) = 0 \text{ y } \theta(0) = 0.$$

Así multiplicando por $u(t)$ y por $\theta(t)$ en casi todo t e integramos en Ω y tenemos que

$$\langle u_t(t), u(t) \rangle + \nu(A_1 u(t), u(t)) = -b_1(u_1(t), u_1(t), u(t)) + b_1(u_2(t), u_2(t), u(t)) + (\vec{K}\theta(t), u(t)),$$

$$\langle \theta_t(t), \theta(t) \rangle + \kappa(A_2 \theta(t), \theta(t)) = -b_2(u_1(t), \theta_1(t), \theta(t)) + b_2(u_2(t), \theta_2(t), \theta(t)).$$

Y ahora sumando y restando $b_1(u_1(t), u_2(t), u(t))$, y $b_2(u_1, \theta_2, \theta)$, respectivamente, teniendo en cuenta que $b(u_1(t), u(t), u(t)) = 0$ y $b_2(u_1(t), \theta(t), \theta(t)) = 0$, llegamos a que

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + 2\nu\|u(t)\|^2 = -2b_1(u(t), u_2(t), u(t)) + 2(\vec{K}\theta(t), u(t)),$$

$$\frac{d}{dt}|\theta(t)|^2 + 2\kappa\|\theta(t)\|^2 = -2b_2(u(t), \theta_2(t), \theta(t)).$$

Con lo cual, por el Lema 2.2.1 podemos afirmar que

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + 2\nu\|u(t)\|^2 \leq 2^{3/2}|u(t)|\|u(t)\|\|u_2(t)\| + 2k|\theta(t)|^2|u(t)|^2,$$

siendo $k := |\vec{K}|$.

Aplicando ahora la desigualdad de Young tenemos que

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + 2\nu\|u(t)\|^2 \leq 2\nu\|u(t)\|^2 + \frac{1}{\nu}|u(t)|^2\|u_2(t)\|^2 + 2k|\theta(t)|^2|u(t)|^2.$$

Luego,

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 - \left(\frac{1}{\nu} \|u_2(t)\|^2 + 2k|\theta(t)|^2 \right) |u(t)|^2 \leq 0.$$

Y como $F(t) := \frac{1}{\nu} \|u_2(t)\|^2 + 2k|\theta(t)|^2$ es integrable pues $u_2 \in L^2(0, T; V)$ y $\theta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, podemos escribir que

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-C \int_0^t F(s) ds} |u(t)|^2 \right) \leq 0.$$

Si ahora integramos y usamos que $u(0) = 0$, llegamos a que

$$|u(t)|^2 \leq 0, \text{ para todo } t \in [0, T].$$

Luego $u_1 = u_2$, como queríamos probar.

Razonando de forma análoga para θ podemos escribir que

$$\frac{d}{dt} |\theta(t)|^2 + 2\kappa \|\theta(t)\|^2 \leq 2^{3/2} |u(t)|^{1/2} \|u(t)\|^{1/2} \|\theta_2(t)\| |\theta(t)|^{1/2} \|\theta(t)\|^{1/2}.$$

Ahora aplicando la desigualdad de Young para $p = 3/4$ y $q = 4$ tenemos que

$$\frac{d}{dt} |\theta(t)|^2 + 2\kappa \|\theta(t)\|^2 \leq 2\kappa \|\theta(t)\|^{2/3} + C |u(t)|^2 \|\theta_2(t)\|^4 |\theta(t)|^2 \leq 2\kappa \|\theta(t)\|^2 + C |u(t)|^2 \|\theta_2(t)\|^4 |\theta(t)|^2.$$

Y como $G(t) := C |u(t)|^2 \|\theta_2(t)\|^4$ es integrable por ser producto de funciones integrables tenemos que

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-C \int_0^t G(s) ds} |\theta(t)|^2 \right) \leq 0.$$

Si ahora integramos y usamos que $\theta(0) = 0$, llegamos a que

$$|\theta(t)|^2 \leq 0, \text{ para todo } t \in [0, T].$$

Luego $\theta_1 = \theta_2$, como queríamos probar y así terminamos la demostración del teorema. ■

Como consecuencia de este resultado y del Lema 1.3.1 tenemos:

Corolario 2.2.3. *Supongamos que $N = 2$, entonces la única solución débil de Boussinesq verifica $(u, \theta) \in L^4(Q)^2 \times L^4(Q)$.*

Para acabar esta sección, observemos que el teorema y corolario anterior también son válidos si el dominio Ω es no acotado.

Además, para $N = 2$, la solución débil verifica la igualdad de energía, igual que ocurría en las ecuaciones de Navier-Stokes.

2.3. Teorema de unicidad parcial ($N = 3$)

En esta sección vamos a estudiar la unicidad en el caso tridimensional. En este caso, sólo es posible demostrar algunos resultados parciales de unicidad, al igual que ocurre para las ecuaciones de Navier-Stokes.

Comencemos antes viendo dos resultados previos,

Teorema 2.3.1. *Sea $N = 3$. Entonces la solución débil del sistema de Boussinesq que proporciona el Teorema 2.1.4, verifica $(u, \theta) \in L^{8/3}(0, T; L^4(\Omega)^2 \times L^4(\Omega))$ y $(u_t, \theta_t) \in L^{4/3}(0, T; V' \times H^{-1}(\Omega))$.*

Este teorema se demuestra de forma análoga a como se prueba el Teorema 1.4.3 del capítulo anterior.

Así ya podemos pasar a enunciar y demostrar el teorema de unicidad de solución (fuerte) para el sistema de Boussinesq en dimensión 3:

Teorema 2.3.2. *Supongamos $N = 3$. Entonces hay a lo más una solución débil del sistema de Boussinesq que verifica $(u, \theta) \in L^8(0, T; L^4(\Omega)^2 \times L^4(\Omega))$. Además, si existe, tal solución es continua de $[0, T]$ en $H \times L^2(\Omega)$.*

Demostración

La prueba es análoga a la del Teorema 1.4.3, lo único que ahora resulta la siguiente acotación

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 \leq F(t)|u(t)|^2$$

siendo $F(t) := C\|u_2(t)\|_{L^4(\Omega)}^8 + 2k|\theta(t)|^2$. Esta cota viene de hacer lo siguiente:

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + 2\nu\|u(t)\|^2 = -2b_1(u(t), u_2(t), u(t)) + 2(\overline{K}^\sharp\theta(t), u(t)).$$

Y usando los resultados anteriores tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|u(t)|^2 + 2\nu\|u(t)\|^2 &\leq C|u(t)|^{1/4}\|u(t)\|^{7/4}\|u_2(t)\|_{L^4} + 2k|\theta(t)|^2|u(t)|^2 \\ &\leq 2\nu\|u(t)\|^2 + \left(C\|u_2(t)\|_{L^4}^8 + 2k|\theta(t)|^2\right)|u(t)|^2. \end{aligned}$$

De la misma forma que hemos razonado anteriormente, como F es integrable, aplicando el Lema de Gronwall llegamos a que $u_1 = u_2$, como queríamos probar.

De forma análoga, como

$$\frac{d}{dt}|\theta(t)|^2 + 2\kappa\|\theta(t)\|^2 = -2b_2(u(t), \theta_2(t), \theta(t))$$

razonando igual llegamos a que

$$\frac{d}{dt}|\theta(t)|^2 \leq G(t)|\theta(t)|^2,$$

siendo $G(t) := C\|u(t)\|^6|u(t)|^2\|\theta_2(t)\|^8$, integrable. Y de nuevo aplicando el Lema de Gronwall llegamos a que $\theta_1 = \theta_2$, como queríamos probar.

■

Esta prueba también es válida para dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ no acotados.

Observemos que igual que para las ecuaciones de Navier-Stokes, se puede generalizar el teorema anterior imponiendo

$$(u, \theta) \in L^r(0, T; L^s(\Omega)^4) \text{ con } \frac{2}{r} + \frac{3}{s} \leq 1, s > 3.$$

2.4. Soluciones más regulares

En esta sección vamos a ver que, con segundos miembros y condiciones iniciales más regulares, conseguimos soluciones más regulares para el sistema de Boussinesq igual que ocurría en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes. Y de nuevo en el caso tridimensional además, debemos suponer que los datos iniciales son suficientemente “pequeños”, en cierto sentido.

Teorema 2.4.1. *Supongamos que $N = 2$, $(f, g); (f_t, g_t) \in L^2(0, T; V' \times H^{-1}(\Omega))$ con $(f(0), g(0)) \in H \times L^2(\Omega)$ y $(u_0, \theta_0) \in H^2(\Omega)^4 \cap (V \times H_0^1(\Omega))$. Entonces la única solución débil del sistema de Boussinesq satisface*

$$(u_t, \theta_t) \in L^2(0, T; V \times H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H \times L^2(\Omega))$$

y, por lo tanto, $(u, \theta) \in \mathcal{C}([0, T]; V \times H_0^1(\Omega))$.

Demostración

Para demostrar este teorema lo único que tenemos que observar es que $\theta'_m \in L^2(0, T; V')$, pues como ya vimos $\theta'_m = g - \kappa A_2 \theta_m - B_2(u_m, \theta_m)$ y $B_2(u, \theta_m) \in L^2(0, T; V')$ y $g, A_2 \in L^2(0, T; V')$. Luego usando esta observación ya podemos deducir por lo demostrado para las ecuaciones de Navier-Stokes que:

$$u_t \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$$

Y sabiendo esto podemos deducir que

$$\theta_t \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

Y así queda demostrado el teorema. ■

Teorema 2.4.2. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, si además Ω es de clase \mathcal{C}^2 y $(f, g) \in L^\infty(0, T; H \times L^2(\Omega))$, entonces $(u, \theta) \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)^4)$.*

Este teorema se demuestra de forma equivalente al teorema visto para las ecuaciones de Navier-Stokes.

De nuevo ocurre que si aplicamos sucesivamente un resultado equivalente al de [27] podemos probar que si Ω es de clase \mathcal{C}^∞ y $f, g \in C^\infty(Q)$ entonces $(u, \theta) \in \mathcal{C}(\bar{\Omega} \times [0, T])^4$. De hecho, como se puede observar, cuanto más exigentes sean las hipótesis sobre los datos mayor será la regularidad de (u, θ) .

Ahora vamos a estudiar resultados de regularidad similares a los anteriores pero para el caso tridimensional, e igual que pasaba para las ecuaciones de Navier-Stokes tridimensional, tendremos que añadir hipótesis adicionales que exijan que los datos sean “pequeños”.

Teorema 2.4.3. *Supongamos que $N = 3$. Sean u_0, θ_0 y f, g tales que $u_0 \in H^2(\Omega)^3 \cap V$, $\theta_0 \in H^2(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)$, $(f, g) \in L^\infty(0, T; H \times L^2(\Omega))$, $(f_t, g_t) \in L^1(0, T; H \times L^2(\Omega))$ y $(f(0), g(0)) \in H \times L^2(\Omega)$. Si además $u_0, \theta_0, f, f_t, g, g_t$ son suficientemente pequeñas en sus respectivos espacios, entonces existe una única solución débil del sistema de Boussinesq que verifica $(u_t, \theta_t) \in L^2(0, T; V \times H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H \times L^2(\Omega))$.*

Demostración

Para esta demostración sólo tenemos que observar que $\theta_m \in L^\infty(0, T; V')$ y esto resulta obvio a partir del teorema de existencia, puesto que además como ya vimos para el caso bidimensional seguimos teniendo que $\theta'_m \in L^2(0, T; V')$.

Así podemos aplicar la demostración usada para Navier-Stokes y llegamos a que u'_m está uniformemente acotada en $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$.

Teniendo en cuenta esto y siguiendo el mismo razonamiento podemos escribir que θ'_m está uniformemente acotada en $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Y con esto terminamos la demostración del teorema. ■

Al igual que en el caso bidimensional ocurre que:

Teorema 2.4.4. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, si además Ω es un abierto de clase \mathcal{C}^2 , tenemos que $(u, \theta) \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)^6)$.*

Este teorema se demuestra de forma análoga al ya demostrado para las ecuaciones de Navier-Stokes.

Observemos que de nuevo una vez obtenida una solución para el sistema de Boussinesq podemos recuperar la presión gracias a resultado análogos a los vistos para las ecuaciones de Navier-Stokes.

Así damos por concluido el estudio del sistema de Boussinesq que como vemos es una generalización de las ecuaciones de Navier-Stokes que sigue manteniendo propiedades análogas.

Capítulo 3

Resultados de regularidad para las ecuaciones de Navier-Stokes

En este capítulo, recordaremos los resultados principales de Caffarelli, Kohn y Nirenberg y de Ladyzhenskaya. Ambos presentan los mejores resultados conocidos en relación a la regularidad de la solución de las EDPs de Navier-Stokes.

Comenzaremos estudiando con detalle el artículo de Caffarelli, Kohn y Nirenberg, donde encontramos el principal resultado sobre regularidad que se conoce hasta ahora para las ecuaciones de Navier-Stokes. A continuación veremos el artículo de Ladyzhenskaya que aporta una pequeña modificación a dicho resultado mejorándolo un poco, como ya explicaremos.

3.1. Regularidad parcial de la solución admisible de las ecuaciones de Navier-Stokes (Caffarelli, Kohn y Nirenberg)

Desarrollemos pues en esta sección el artículo de Caffarelli, Kohn y Nirenberg, véase [3].

3.1.1. Introducción

Para esta sección vamos a considerar las ecuaciones de Navier-Stokes en tres dimensiones con datos y condiciones de contorno como sigue,

$$\begin{cases} u_t^i + u \cdot \nabla u^i - \Delta u^i + \nabla^i p = f^i, & i = 1, 2, 3, \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, 0 < t < T. \end{cases} \quad (3.1)$$

Supondremos que la función dada $f = (f^1, f^2, f^3)$ verifica que $\nabla \cdot f = 0$. Esto no supone una pérdida de generalidad, puesto que para toda $f \in L^q(\Omega)$ hay una descomposición $f = \nabla\phi + g$ con $\nabla \cdot g = 0$ y $\|g\|_{L^q(\Omega)} \leq C(q, \Omega)\|f\|_{L^q(\Omega)}$, $1 < q < +\infty$, véase [11].

Usando esta descomposición para cada tiempo, fácilmente se reduce el problema de Navier-Stokes con una función $f \in L^q(\Omega \times (0, T))$ al caso particular en que $\nabla \cdot f = 0$.

Para comprender bien las demostraciones es fundamental hacer primero un análisis sobre la dimensión que tiene cada término de las ecuaciones. Observemos que si $u(x, t)$ y $p(x, t)$ son solución de las ecuaciones de Navier-Stokes con segundo miembro $f(x, t)$, entonces para cada $\lambda > 0$ se verifica que el par (u_λ, p_λ) , donde $u_\lambda(x, t) := \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$ y $p_\lambda := \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t)$ es solución de las ecuaciones de Navier-Stokes con segundo miembro $f_\lambda := \lambda^3 f(\lambda x, \lambda^2 t)$. Una vez vista esta propiedad podemos asignarle a cada término una dimensión que se obtiene mediante un sencillo cambio de variable con el que adimensionalizamos los términos. Así, decimos que un término es de dimensión k , con k entero, si queda adimensionalizado cuando se multiplica por λ^{-k} , donde λ es una longitud característica. Y podemos afirmar que

- cada x_i tiene dimensión 1,
- t es de dimensión 2,
- u^i tiene dimensión -1,
- p tiene dimensión -2,
- f tiene dimensión -3,
- ∇_i tiene dimensión -1,
- ∂_t tiene dimensión -2,

con lo cual, cada término de la ecuación tiene dimensión -3.

La existencia y unicidad de la solución ha sido estudiada en el Capítulo 1 así que ahora nos preocuparemos más a fondo por la regularidad de la solución débil. Así, comenzaremos con la definición siguiente,

Definición 3.1.1. Sea $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$. Decimos que (x, t) es **singular** si la solución u no es L^∞_{loc} en ningún entorno de (x, t) . Análogamente, decimos que (x, t) es **regular** en caso contrario, es decir, si la solución u es L^∞ en algún entorno de (x, t) .

En [3], los autores consiguieron estimar una dimensión de tipo Hausdorff del conjunto de los puntos singulares S de las ecuaciones de Navier-Stokes. Esta estimación muestra que S es “pequeño” y por tanto conduce a un teorema de regularidad parcial.

Antes de presentar dicho teorema, recordemos el resultado principal al que había llegado Scheffer sobre la regularidad parcial;

Teorema 3.1.2 (Teorema A). Para $f = 0$ existe una solución débil de Navier-Stokes cuyo conjunto de puntos singulares S satisface:

$$\mathcal{H}^{5/3}(S) < +\infty \quad \text{y} \quad \mathcal{H}^1(S \cap (\Omega \times \{t\})) < +\infty \quad \text{uniformemente en } t,$$

siendo \mathcal{H}^k la medida k -dimensional de Hausdorff en \mathbb{R}^N y Ω cualquier dominio acotado tal que $\partial\Omega$ tiene medida de Lebesgue 0.

En el resultado principal de [3], se considera una clase particular de soluciones que llamaremos **soluciones débiles admisibles**, o simplemente soluciones admisibles. En él, se muestra que, para cualquier solución admisible el conjunto de puntos singulares tiene medida de Hausdorff unidimensional igual a cero. De hecho, prueban que $\mathcal{P}^1(S) = 0$, siendo \mathcal{P}^1 una medida análoga a la medida de Hausdorff unidimensional \mathcal{H}^1 que usa recubrimientos por cilindros parabólicos en su definición; en particular $\mathcal{H}^1 \leq C\mathcal{P}^1$, y por tanto, también se tiene $\mathcal{H}^1(S) = 0$.

El resultado principal de [3] es:

Teorema 3.1.3 (Teorema B). *Para cualquier solución admisible de las ecuaciones de Navier-Stokes en un conjunto abierto $\Omega \times (0, T)$, el conjunto de puntos singulares S asociado satisface que $\mathcal{P}^1(S) = 0$.*

Este resultado mejora al Teorema A: en primer lugar, posee carácter local y por otra parte, constituye un refinamiento de la estimación de la dimensión de Hausdorff de S . Además, es válido para cualquier segundo miembro.

Para probar el Teorema B, nos ayudaremos de algunos resultados que veremos a continuación.

En lo que sigue, para cada (x, t) y cada $r > 0$, pondremos

$$Q_r(x, t) := \{(y, \tau) : |y - x| < r, t - r^2 < \tau < t\}.$$

Diremos que $Q_r(x, t)$ es un **cilindro parabólico** en torno a (x, t) .

Proposición 3.1.4 (Proposición 1). *Supongamos que (u, p) es una solución débil admisible de las ecuaciones de Navier-Stokes en $Q_1 = Q_1(0, 0)$, con $f \in L^q(\Omega \times (0, T))$, para $q > \frac{5}{2}$. Existen constantes absolutas $\epsilon_1, C_1 > 0$ y una constante $\epsilon_2 = \epsilon_2(q) > 0$ que depende sólo de q tales que si*

$$\iint_{Q_1} (|u|^3 + |u||p|) + \int_{-1}^0 \left(\int_{|x|<1} |p| dx \right)^{5/4} dt \leq \epsilon_1 \quad (3.2a)$$

y

$$\iint_{Q_1} |f|^q \leq \epsilon_2, \quad (3.2b)$$

entonces

$$|u(x, t)| \leq C_1 \text{ c.p.d. en } (x, t) \in Q_{1/2} = Q_{1/2}(0, 0). \quad (3.2c)$$

En particular, tendremos que el punto $(0, 0)$ es regular.

La Proposición 1 dice que, si u, p y f son suficientemente pequeños en el cilindro normalizado Q_1 entonces todo punto de $Q_{1/2}$ es regular. Así queda claro que existe una relación entre el tamaño de los datos y soluciones normalizadas y su regularidad.

Ahora, si ponemos

$$M(r) := \frac{1}{r^2} \iint_{Q_r} (|u|^3 + |u||p|) + r^{-13/4} \int_{t-r^2}^t \left(\int_{|y-x|<r} |p| dy \right)^{5/4} d\tau \quad (3.3)$$

y

$$F_q(r) := r^{3q-5} \iint_{Q_r} |f|^q \quad (3.4)$$

deducimos:

Corolario 3.1.5. *Supongamos que (u, p) es una solución admisible de las ecuaciones de Navier-Stokes en el cilindro $Q_r = Q_r(x, t)$ con $f \in L^q(\Omega \times (0, T))$ para $q > \frac{5}{2}$. Si además, $M(r) \leq \epsilon_1$ y $F_q(r) \leq \epsilon_2$ entonces*

$$|u| \leq C_1 r^{-1} \text{ c.p.d. en } Q_{r/2}(x, t).$$

En particular, todo punto del cilindro $Q_{r/2}(x, t)$ es regular.

Este corolario puede ser visto como una estimación del nivel de energía en el que puede desarrollarse una singularidad. De hecho, supongamos que (x_0, t_0) es un punto singular entonces $M(r) \leq \epsilon_1$ y $F_q(r) \leq \epsilon_2$ deben fallar en $Q_r(x, t)$ cuando $(x_0, t_0) \in Q_{r/2}(x, t)$. Como $q > 5/2$, tenemos que necesariamente $F_q(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$. Por tanto, $M(r) > \epsilon_1$ siempre que r es suficientemente pequeño y $Q_r(x, t)$ contiene a (x_0, t_0) .

Esto sugiere que $|u| \geq \frac{C}{r}$ ó $|p| \geq \frac{C}{r^2}$ y, como $r = (|x - x_0|^2 + |t - t_0|^2)^{1/2} \rightarrow 0$, es natural preguntarse si $|\nabla u|(x, t) \geq \frac{C}{r^2}$ cuando $(x, t) \rightarrow (x_0, t_0)$.

La segunda herramienta fundamental para la prueba del Teorema B tiene que ver con esta cuestión.

Pongamos ahora

$$Q_r^*(x, t) := \{(y, \tau) : |y - x| < r, t - \frac{7}{8}r^2 < \tau < t + \frac{1}{8}r^2\}.$$

Obsérvese que $Q_r^*(x, t) = Q_r(x, t + \frac{1}{8}r^2)$.

Proposición 3.1.6 (Proposición 2). *Si (u, p) es una solución admisible de Navier-Stokes en un entorno de (x, t) y existe una constante absoluta $\epsilon_3 > 0$ tal que*

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \iint_{Q_r^*(x, t)} |\nabla u|^2 \leq \epsilon_3$$

entonces (x, t) es un punto regular.

El Teorema B es consecuencia de la Proposición 2, como veremos más adelante, pero antes vamos a mostrar brevemente algunos detalles que usamos en su prueba.

Consideremos primero la prueba de que el conjunto S de puntos singulares tiene dimensión de Hausdorff menor o igual que $5/3$.

Usando el corolario anterior y un lema de recubrimiento, podemos ver que para cada $\delta > 0$, S puede ser recubierto por una familia de cilindros parabólicos $\{Q_i^* = Q_{r_i}^*(x_i, t_i)\}$ tales que $r_i < \delta$, y

$$\frac{1}{r_i^2} \iint_{Q_{r_i/5}^*} (|u|^3 + |u||p|) + r^{-13/4} \int_{t_i - \frac{7}{8}r_i^2}^{t_i + \frac{1}{8}r_i^2} \left(\int_{|x-x_i| < r_i} |p| dx \right)^{5/4} dt > \epsilon_1 \quad (3.2a')$$

para todo i y, además, $Q_{r_i/5}^*(x_i, t_i)$ son disjuntos dos a dos.

Supongamos por el momento que $u \in L^{10/3}(\Omega \times (0, T))^3$ y $p \in L^{5/3}(\Omega \times (0, T))$. Entonces usando la desigualdad de Hölder tenemos que

$$r_i^{-5/3} \iint_{Q_{r_i/5}^*} (|u|^{10/3} + |p|^{5/3}) > C(\epsilon_1),$$

de donde podemos deducir que

$$\sum r_i^{5/3} \leq C \iint_{\cup Q_{r_i/5}^*} (|u|^{10/3} + |p|^{5/3}).$$

Tomando $\delta \rightarrow 0$, deducimos que $\mathcal{P}^{5/3}(S) = 0$, de donde en particular, vemos que la dimensión de Hausdorff asociada es a lo sumo, $5/3$.

Para mostrar que $\mathcal{P}^1(S) = 0$ por un método similar, sería necesario modificar el segundo argumento para que el espacio integral de tiempo sea de dimensión 1; ésta es la finalidad de la Proposición 2. De hecho, usando la Proposición 2 podemos cambiar la desigualdad (3.2a) por

$$\frac{1}{r_i} \int \int_{Q_{r_i/5}^*} |\nabla u|^2 > \epsilon_3 \quad (3.2a'')$$

y así llegamos a que

$$\sum r_i \leq C \iint_{\cup Q_{r_i/5}^*} |\nabla u|^2$$

y podemos concluir que $\mathcal{P}^1(S) = 0$ (incluso sin la hipótesis de que sea $p \in L^{5/3}(\Omega \times (0, T))$).

Es natural preguntarse si se puede mejorar la cota con este método, es decir, si podemos estimar mejor la dimensión de S . Dicho de otro modo, ¿existe $k < 1$ tal que $\mathcal{P}^k(S) = 0$? Esta pregunta aún no se ha conseguido resolver.

Ahora vamos a proseguir viendo la definición de solución admisible para después comentar brevemente la definición y propiedades de la medida \mathcal{P}^k .

Definición 3.1.7. Decimos que el par (u, p) es una **solución débil admisible**, o simplemente **solución admisible**, para las ecuaciones de Navier-Stokes en un abierto $D \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ con segundo miembro f , si se cumplen las siguientes condiciones:

1 (Hipótesis de integrabilidad) u, p, f son funciones medibles en D tales que:

- $f \in L^q(D)^3$, $q > 5/2$ y $\nabla \cdot f = 0$,
- $p \in L^{5/4}(D)$,
- Para ciertas constantes $E_0, E_1 < +\infty$:

$$\int_{D_t} |u|^2 dx \leq E_0, \text{ siendo } D_t = D \cap (\mathbb{R}^3 \times \{t\}), \text{ para } t \text{ c.p.d. con } D_t \neq \emptyset,$$

$$\iint |\nabla u|^2 \leq E_1.$$

2 (Ecuaciones) u, p, f satisfacen las ecuaciones de Navier-Stokes en el sentido de las distribuciones en D .

3 (Generalización de la desigualdad de energía) Para cada función real $\phi \in C_0^\infty(D)$ con $\phi \geq 0$ tenemos que:

$$2 \iint |\nabla u|^2 \phi \leq \iint \left(|u|^2 (\phi_t + \Delta \phi) + (|u|^2 + 2p)u \cdot \nabla \phi + 2(u \cdot f)\phi \right)$$

Notemos que necesitamos la hipótesis $f \in L^q(D)^3$ con $q > 5/2$ principalmente porque ésta es la condición que usamos para probar la Proposición 1.

Asumimos que $p \in L^{5/4}(D)$ porque ésta es la mejor estimación de L^q conocida para el problema de valores iniciales con Ω acotado. De hecho, cuando Ω es todo \mathbb{R}^3 la presión también satisface que $p \in L^{5/3}(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$. Con lo cual, parece razonable que nos planteemos una estimación análoga (al menos local) para Ω acotado. En [?] se demuestra que efectivamente $p \in L^{5/3}(D)$.

Para el Teorema B, Caffarelli, Kohn y Nirenberg eligieron estimar la medida \mathcal{P}^1 del conjunto S , en vez de usar la medida \mathcal{H}^1 . Dicha medida se define de manera análoga a la medida de Hausdorff \mathcal{H}^1 pero usando los cilindros parabólicos en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Ambas definiciones son casos especiales de una construcción hecha por Caratheodory que se detalla en [9].

Definición 3.1.8. Para cualquier $X \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ y $k \geq 0$ definimos la medida $\mathcal{P}^k(X)$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{P}^k(X) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{P}_\delta^k(X)$$

donde $\mathcal{P}_\delta^k(X) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} r_i^k, X \subseteq \bigcup Q_{r_i}, r_i < \delta \right\}$, y los $Q_{r_i} = Q_{r_i}(x, t)$ son cilindros parabólicos, definidos anteriormente.

Podemos comprobar que \mathcal{P}^k es una medida exterior y que el σ -álgebra de los correspondientes conjuntos medibles contiene a los conjuntos de Borel. Po tanto, \mathcal{P}^k es una medida regular de Borel, véase [9].

La medida de Hausdorff \mathcal{H}^k se define de manera similar pero en vez de usar Q_{r_i} se reemplaza por conjuntos cerrados arbitrarios de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, de diámetro a lo sumo r_i . Claramente, $\mathcal{H}^k \leq C(k)\mathcal{P}^k$.

Observemos que, para todo $X \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, se tiene que $\mathcal{P}^k(X) = 0$ si y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ X puede ser recubierto por una familia de cilindros parabólicos $\{Q_{r_i}\}_{i=1}^{+\infty}$ tal que $\sum r_i^k < \epsilon$.

A continuación, recordaremos varias estimaciones básicas que ayudarán a probar la Proposición 1.

Sea $Q_\rho = Q_\rho(0, 0) = \{(x, t) : |x| < \rho; -\rho^2 < t < 0\}$ y sea (u, p) un par con la regularidad de la Definición 3.1.7. Consideraremos para cada $r < \rho$ los siguientes términos:

$$A(r) := \sup_{-r^2 < t < 0} \frac{1}{r} \int_{B_r \times \{t\}} |u|^2 dx,$$

$$\begin{aligned}\delta(r) &:= \frac{1}{r} \iint_{Q_r} |\nabla u|^2 \\ G(r) &:= \frac{1}{r^2} \iint_{Q_r} |u|^3, \\ L(r) &:= \frac{1}{r^2} \iint_{Q_r} |u| \cdot |p - \bar{p}_r|, \\ K(r) &:= \frac{1}{r^{13/4}} \int_{-r^2}^0 \left(\int_{B_r} |p| dx \right)^{5/4} d\tau\end{aligned}$$

donde $B_r := \{x : |x| < r\}$ y $\bar{p}_r = \bar{p}_r(t) := \int_{B_r} p(x, t) dx$, es el valor medio de $p(\cdot, t)$.

Las estimaciones que obtendremos serán aplicadas a las soluciones admisibles de las ecuaciones de Navier-Stokes. De momento, sin embargo, usaremos únicamente el hecho de que ciertas cantidades son finitas y además que

$$\Delta p = - \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u^i u^j; \quad \nabla \cdot u = 0 \text{ en } B_\rho \times \{t\} \text{ para } -\rho^2 < t < 0 \text{ c.p.d.}$$

Nuestro objetivo es obtener estimaciones para $G(r)$ y $L(r)$ en función de los valores de $\delta(r)$, $A(r)$, $K(r)$. Para ello, usaremos los dos lemas siguientes.

Lema 3.1.9.

$$G(r) \leq CA(r)^{3/4} (A(r)^{3/4} + \delta(r)^{3/4})$$

Demostración

Observemos primero que para $u \in H^1(\mathbb{R})$ siguiendo la interpolación de la desigualdad de Sobolev podemos escribir que

$$\int_{B_r} |u|^q \leq C \left(\int_{B_r} |\nabla u|^2 \right)^a \left(\int_{B_r} |u|^2 \right)^{q/2-a} + \frac{C}{r^{2a}} \left(\int_{B_r} |u|^2 \right)^{q/2},$$

siendo C una constante independiente de r , $2 \leq q \leq 6$ y $a = \frac{3}{4}(q-2)$.

Así tomando ahora $q = 3$ tenemos que

$$\int_{B_r} |u|^3 \leq C \left(\int_{B_r} |\nabla u|^2 \right)^{3/4} \left(\int_{B_r} |u|^2 \right)^{3/4} + \frac{C}{r^{3/2}} \left(\int_{B_r} |u|^2 \right)^{3/2}.$$

Y de aquí integrando en tiempo y usando la desigualdad de Hölder llegamos a que:

$$\iint_{Q_r} |u|^3 \leq C \left(\iint_{Q_r} |\nabla u|^2 \right)^{3/4} \left(\int_{-r^2}^0 dt \left(\int_{B_r} |u|^2 \right)^3 \right)^{1/4} + \frac{C}{r^{3/2}} \int_{-r^2}^0 \left(\int_{B_r} |u|^2 \right)^{3/2} dt.$$

Para este paso hemos usado la desigualdad de Hölder entre los términos $\alpha^{3/4}$ y $\beta^{1/4}$, siendo $\alpha = \int_{B_r} |\nabla u|^2 \in L^{4/3}$ y $\beta = \left(\int_{B_r} |u|^2 \right)^3 \in L^4$.

Teniendo en cuenta las definiciones de los términos precedentes, podemos escribir que

$$\iint_{Q_r} |u|^3 \leq C(r\delta(r))^{3/4} (r^5 A(r)^3)^{1/4} + Cr^{1/2} (rA(r))^{3/2}.$$

Con lo cual,

$$G(r) = \frac{1}{r^2} \iint_{Q_r} |u|^3 \leq \frac{C}{r^2} (r\delta(r)(r^5 A(r)^3)^{1/4} + Cr^{1/2-2}(rA(r))^{3/2},$$

o equivalentemente,

$$G(r) \leq CA(r)^{3/4}(\delta(r)^{3/4} + A(r)^{3/4}),$$

como queríamos probar. ■

Lema 3.1.10. *Sea $r < \frac{1}{2}\rho$ entonces*

$$\begin{aligned} L(r) &\leq C\left(\frac{r}{\rho}\right)^{7/5} A(r)^{1/5} G(r)^{1/5} K(\rho)^{4/5} + C\left(\frac{r}{\rho}\right)^{5/3} G(r)^{1/3} G(\rho)^{2/3} \\ &\quad + CG(r)^{1/3} G(2r)^{2/3} + Cr^3 G(r)^{1/3} \sup_{-r^2 < t < 0} \int_{2r < |y| < \rho} \frac{1}{|y|^4} |u|^2 dy \end{aligned}$$

Las demostraciones de este lema y de otros posteriores son muy técnicas y se pueden consultar en [3] en las Secciones 3 y 5.

A continuación, presentaremos las demostraciones de los principales resultados del artículo de Caffarelli, Kohn y Nirenberg.

3.1.2. Demostración de la Proposición 1

En esta sección, elijeremos constantes absolutas C_1 y ϵ_1 , independientes de los datos y una constante ϵ_2 , dependiente únicamente de q , tales que (3.2a) y (3.2b) implican (3.2c).

En primer lugar, observemos que, para cualquier solución débil admisible en $\Omega \times (a, b)$, para cada t con $a < t < b$ y para toda función regular ϕ con soporte compacto no negativa, tenemos que

$$\int_{\Omega \times \{t\}} |u|^2 \phi + 2 \int_a^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \phi \leq \int_a^t \int_{\Omega} \left(|u|^2 (\phi_t + \Delta \phi) + (|u|^2 + 2p) u \cdot \nabla \phi + 2(u \cdot f) \phi \right). \quad (3.5)$$

Esta desigualdad será usada durante la demostración junto con una segunda desigualdad que surge de ésta si (u, p) es solución admisible en $Q_1(0, 0)$ tomamos $\phi \in C^\infty(Q_1(0, 0))$ con $\phi \geq 0$ y ϕ nula en un entorno de $\{|x| = 1\} \cup \{t = -1\}$ y $-1 < s < 0$:

$$\int_{B_1 \times \{s\}} |u|^2 \phi + 2 \int_{-1}^s \int_{B_1} |\nabla u|^2 \phi \leq \int_{-1}^s \int_{B_1} \left(|u|^2 (\phi_t + \Delta \phi) + (|u|^2 + 2p) u \cdot \nabla \phi + 2(u \cdot f) \phi \right). \quad (3.6)$$

Nuestro objetivo durante la demostración es acotar $|u|^2$ en (a, s) . Para ello, podemos pensar en usar en (3.6) la función test

$$\phi^*(x, t) = \chi(x, t) \cdot (s - t)^{-3/2} e^{-|x-a|^2/4(s-t)}$$

definida en $\{(x, t) : t < s\}$, donde χ es una función regular con soporte compacto, con $0 \leq \chi \leq 1$ y $\chi = 1$ cerca de (a, s) . Observemos que ϕ recuerda a una solución fundamental de la ecuación retrógrada del calor $\phi_t + \Delta\phi = 0$.

Así podemos intentar acotar $|u|^2(a, s)$ con dicha función test usando la desigualdad (3.6). Pero esta función falla cuando queremos obtener buenas cotas para los dos últimos términos de la derecha. Por ello, siguiendo una idea de Scheffer, vamos a aproximar la función test ϕ^* por una sucesión de funciones test $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde ϕ_n es "más o menos" una regularización de ϕ^* de orden 2^{-n} . Siguiendo este argumento inductivo vamos a conseguir encontrar una cota para $|u|^2(a, s)$ gracias a las hipótesis de "pequeñez" de la función u y p .

Así comenzamos la demostración que consta de varias etapas:

PASO 1. LA INDUCCIÓN

Para empezar, recordemos las hipótesis impuestas:

$$\iint_{Q_1} (|u|^3 + |u||p|) + \int_{-1}^0 \left(\int_{|x|<1} |p| dx \right)^{5/4} dt \leq \epsilon_1 \quad (3.7a)$$

y

$$\iint_{Q_1} |f|^q \leq \epsilon_2. \quad (3.7b)$$

con $B_1 = \{|x| < 1\}$ y $Q_1 = Q_1(0, 0)$. Queremos probar que existe una constante C_0 tal que

$$\int_{|x-a|<r_n} |u|^2(x, s) dx \leq C_0 \epsilon_1^{2/3}, \quad \forall (a, s) \in Q_{1/2}(0, 0), \quad \forall n \geq 2, \quad (3.8)$$

donde $r_n := 2^{-n}$.

Si tuviéramos lo anterior ya tendríamos demostrado que

$$|u|^2(a, s) \leq C_0 \epsilon_1^{2/3} = C_1$$

y con esto quedaría probada la Proposición 1.

En lo que sigue de demostración, fijaremos un punto arbitrario $(a, s) \in Q_{1/2}(0, 0)$. Notemos que $Q_{1/2}(a, s) \subset Q_1$. Por tanto, de (3.7a) deducimos que

$$\iint_{Q_{1/2}(a, s)} (|u|^3 + |u||p|) + \int_{s-1/4}^s \left(\int_{|x-a|<1/2} |p| dx \right)^{5/4} dt \leq \epsilon_1 \quad (3.9)$$

Pongamos ahora $Q^n := Q_{r_n}(a, s)$. El procedimiento de inducción para probar la proposición consistirá en probar que

$$\sup_{s-r_n^2 < t \leq s} \int_{|x-a|<r_n} |u|^2 dx + r_n^{-3} \iint_{Q^n} |\nabla u|^2 \leq C_0 \epsilon_1^{2/3} \quad \forall n \geq 2. \quad (3.10)$$

Para ello, nos ayudaremos probando también las desigualdades:

$$\int_{Q^n} |u|^3 + r_n^{3/5} \int_{Q^n} |u||p - \bar{p}_n| \leq \epsilon_1^{2/3} \quad \forall n \geq 3, \quad (3.11)$$

o equivalentemente,

$$r_n^{-5} \iint_{Q^n} |u|^3 + r_n^{-22/5} \iint_{Q^n} |u||p - \bar{p}_n| \leq \epsilon_1^{2/3} \quad \forall n \geq 3.$$

Para la demostración asumiremos que $\epsilon_1 \leq 1$, junto con otras condiciones de pequeñez. Claramente las desigualdades (3.10) incluyen la desigualdad (3.8).

La prueba de (3.10) se hará por inducción en n : primero probaremos el caso $n = 2$. Después, supondremos por inducción que (3.10) $_k$ es cierta para todo $2 \leq k \leq n$ y con esta hipótesis demostraremos que se tiene (3.11) $_{n+1}$ si $n \geq 2$. Una vez probadas estas desigualdades debemos demostrar que (3.11) $_k$ para $3 \leq k \leq n$ implica (3.10) $_n$ si $n \geq 3$. Y con esto completaremos la demostración de la Proposición 1.

PASO 2. PRUEBA DE (3.10) PARA $n = 2$.

En este caso, el resultado se deduce usando las desigualdades (3.7b), (3.9) y (3.5) para un ϕ adecuado. En efecto, tenemos en primer lugar que

$$\begin{aligned} \sup_{s-r_2^2 < t \leq s} \int_{|x-a| < r_2} |u|^2 dx + r_2^{-3} \iint_{Q^2} |\nabla u|^2 &= \sup_{s-r_2^2 < t \leq s} r_2^{-3} \int_{B(a, r_2)} |u|^2 dx + r_2^{-3} \iint_{Q^2} |\nabla u|^2 \\ &\leq C \left(\sup_{s-r_2^2 < t \leq s} \int_{B(a, r_1)} |u|^2 \phi dx + \iint_{Q^1} |\nabla u|^2 \phi \right), \end{aligned}$$

siendo C una constante que únicamente depende de r_2 y tomando como función test una función regular ϕ con $0 \leq \phi \leq 1$ con $\phi = 1$ en Q^2 y soporte contenido en Q^1 .

Usando ahora (3.5), podemos escribir que:

$$\begin{aligned} \sup_{s-r_2^2 < t \leq s} \int_{B(a, r_1)} |u|^2 \phi dx + \iint_{Q^1} |\nabla u|^2 \phi &\leq \int_{B(a, r_1) \times \{s\}} |u|^2 \phi + 2 \iint_{Q^1} |\nabla u|^2 \phi \\ &\leq \int_{s-r_1^2}^s \int_{B(a, r_1)} \left(|u|^2 (\phi_t + \Delta \phi) + (|u|^2 + 2p) u \cdot \nabla \phi + 2(u \cdot f) \phi \right). \end{aligned}$$

Así por las propiedades de la función $\phi = \chi(x, t) \cdot (s-t)^{-3/2} e^{-|x-a|^2/4(s-t)}$, donde $0 \leq \chi \leq 1$ es regular con soporte compacto y es igual a 1 cerca de (a, s) ; podemos afirmar que

$$\sup_{s-r_2^2 < t \leq s} \int_{|x-a| < r_2} |u|^2 dx + r_2^{-3} \iint_{Q^2} |\nabla u|^2 \leq C \left(\iint_{Q^1} |u|^2 + \iint_{Q^1} (|u|^3 + |u||p|) + \iint_{Q^1} |u||f| \right).$$

A continuación usamos la desigualdad de Hölder y (3.7b) y tenemos que

$$\begin{aligned} &\iint_{Q^1} |u|^2 + \iint_{Q^1} (|u|^3 + |u||p|) + \iint_{Q^1} |u||f| \\ &\leq C \left(\iint_{Q^1} |u|^3 \right)^{2/3} + \epsilon_1 + \epsilon_2(q)^{1/q} \left(\iint_{Q^1} |u|^{q'} \right)^{1/q'}, \end{aligned}$$

pues $q > 5/2$ y por lo tanto, $q' < 5/3$.

Ahora si usamos la hipótesis (3.9) y tomamos ϵ_1 suficientemente pequeño tenemos que

$$\iint_{Q^1} |u|^2 \iint_{Q^1} (|u|^3 + |u||p|) + \iint_{Q^1} |u||f| \leq C\epsilon_1^{2/3} + C\epsilon_1^{2/3} + C\epsilon_2(q)^{1/q} \left(\iint_{Q^1} |u|^3 \right)^{1/3}$$

$$\iint_{Q^1} |u|^2 \iint_{Q^1} (|u|^3 + |u||p|) + \iint_{Q^1} |u||f| \leq C\epsilon_1^{2/3} + C\epsilon_2(q)^{1/q} \epsilon_1^{1/3} \leq C\epsilon_1^{2/3} + C\epsilon_1^{2/3},$$

tomando ϵ_2 suficientemente pequeño. Así llegamos a que

$$\sup_{s-r_2^2 < t \leq s} \int_{|x-a| < r_2} |u|^2 dx + r_2^{-3} \iint_{Q^2} |\nabla u|^2 \leq C_0 \epsilon_1^{2/3}$$

como queríamos probar.

PASO 3. (3.10) $_k$, $2 \leq k \leq n \Rightarrow$ (3.11) $_{n+1}$ $n \geq 2$.

Suponemos por inducción que para todo k tal que $2 \leq k \leq n$ se tiene

$$\sup_{s-r_k^2 < t \leq s} \int_{|x-a| < r_k} |u|^2 dx + r_k^{-3} \iint_{Q^k} |\nabla u|^2 \leq C_0 \epsilon_1^{2/3}$$

y queremos probar que

$$\int_{Q^{n+1}} |u|^3 + r_{n+1}^{3/5} \int_{Q^{n+1}} |u||p - \bar{p}_{n+1}| \leq \epsilon_1^{2/3}.$$

Observemos que si expresamos las hipótesis en función de los términos definidos en la Sección 3.1.1 tenemos que

$$A(r_k) + \delta(r_k) \leq C\epsilon_1^{2/3} r_k^2$$

para $2 \leq k \leq n$ y

$$G(r_1) + K(r_1) \leq C\epsilon_1,$$

desigualdad (3.9).

Por el Lema 3.1.9, tenemos que:

$$r_n^{-2} \iint_{Q^n} |u|^3 = G(r_n) \leq CA(r_n)^{3/4} (A(r_n)^{3/4} + \delta(r_n)^{3/4}) \leq CA(r_n)^{3/4} r_n^{3/2} \epsilon_1^{1/2} \leq C\epsilon_1 r_n^3.$$

Con lo cual podemos escribir que

$$\int_{Q^{n+1}} |u|^3 \leq C \int_{Q^n} |u|^3 \leq C^* \epsilon_1,$$

siendo C^* una constante que verifica $C^* \epsilon_1^{1/3} \leq 1/2$ si ϵ_1 es suficientemente pequeño.

Así, ya tenemos que

$$\int_{Q^{n+1}} |u|^3 \leq \frac{1}{2} \epsilon_1^{2/3}. \quad (3.12a)$$

Para el otro término de la desigualdad, usaremos el Lema 3.1.10 con $\rho = 1/4$ y $r = r_{n+1}$. Así,

$$\begin{aligned} L(r_{n+1}) &\leq Cr_{n+1}^{7/5} A(r_{n+1})^{1/5} G(r_{n+1})^{1/5} K(1/4)^{4/5} + Cr_{n+1}^{5/3} G(r_{n+1})^{1/3} G(1/4)^{2/3} \\ &+ CG(r_{n+1})^{1/3} G(2r_{n+1})^{2/3} + Cr_{n+1}^3 G(r_{n+1})^{1/3} \sup_{-r_{n+1}^2 < t < 0} \int_{2r_{n+1} < |y| < 1/4} \frac{1}{|y|^4} |u|^2 dy. \end{aligned}$$

Ahora pasaremos a acotar estos términos de la derecha y ya tendremos probada el segundo término de la desigualdad (3.11).

Por hipótesis tenemos que,

$$\begin{aligned} G(r_{n+1}) &\leq CG(r_n) \leq C\epsilon_1 r_n^3, \\ A(r_{n+1}) &\leq A(r_n) \leq C\epsilon_1^{2/3} r_n^2 \\ K(1/4) &= K(r_2) \leq K(r_1) \leq C\epsilon_1. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que

$$r_{n+1}^{7/5} A(r_{n+1})^{1/5} G(r_{n+1})^{1/5} K(1/4)^{4/5} \leq Cr_n^{12/5} \epsilon_1^{2/15} \epsilon_1 \leq Cr_n^{12/5} \epsilon_1,$$

$$r_{n+1}^{5/3} G(r_{n+1})^{1/3} G(1/4)^{2/3} \leq Cr_{n+1}^{5/3} \epsilon_1^{1/3} r_n \epsilon_1^{2/3} \leq Cr_n^{8/3} \epsilon_1,$$

$$G(r_{n+1})^{1/3} G(2r_{n+1})^{2/3} \leq C\epsilon_1^{1/3} r_n \epsilon_1^{2/3} r_n^2 \leq Cr_n^3 \epsilon_1,$$

$$\begin{aligned} r_{n+1}^3 G(r_{n+1})^{1/3} \sup_{-r_{n+1}^2 < t < 0} \int_{2r_{n+1} < |y| < 1/4} \frac{1}{|y|^4} |u|^2 dy &\leq r_{n+1}^3 \epsilon_1^{1/3} r_n \sup_{-r_{n+1}^2 < t < 0} \int_{2r_{n+1} < |y| < 1/4} \frac{1}{|y|^4} |u|^2 dy \\ &\leq r_n^4 \epsilon_1^{1/3} \sum_{k=2}^n r_k^{-3} A(r_k) \leq Cr_n^4 \epsilon_1^{1/3} \sum_{k=2}^n r_k^{-3} \epsilon_1^{2/3} r_k^2 \leq Cr_n^4 \epsilon_1 \sum_{k=2}^n r_k^{-1} \leq Cr_n^3 \epsilon_1, \end{aligned}$$

y, como $r_n \leq 1$, vemos que

$$L(r_{n+1}) \leq Cr_n^{12/5} \epsilon_1.$$

Retomando el término que queríamos acotar, tenemos que

$$r_{n+1}^{3/5} \int_{Q^{n+1}} |u| |p - \bar{p}_{n+1}| \leq Cr_{n+1}^{13/5} L(r_{n+1}) \leq C^{**} \epsilon_1,$$

siendo de nuevo C^{**} una constante tal que $C^{**} \epsilon_1^{1/3} \leq 1/2$.

Por lo tanto, ya tenemos que

$$\int_{Q^{n+1}} |u|^3 + r_{n+1}^{3/5} \int_{Q^{n+1}} |u| |p - \bar{p}_{n+1}| \leq \epsilon_1^{2/3},$$

concluyendo así este paso de la demostración.

PASO 4. (3.11)_k, $3 \leq k \leq n \Rightarrow (3.10)_n$, $n \geq 3$.

Para este paso usaremos la desigualdad local de energía (3.6) con una función concreta como función test adecuada $\phi = \phi_n$. Para simplificar la notación haremos un cambio de coordenadas en espacio-tiempo de forma que en lo que sigue el origen $(0, 0)$ representará formalmente al punto (a, s) .

Tomamos $\phi_n = \chi \Psi_n$, siendo Ψ_n la solución fundamental de la ecuación retrógrada del calor, $\phi_t + \Delta \phi = 0$ con singularidad en $(0, r_n^2)$. Explícitamente

$$\Psi_n(x, t) = \frac{1}{(r_n^2 - t)^{3/2}} e^{-|x|^2/(4(r_n^2 - t))} \quad \forall (x, t) \text{ con } t < r_n^2,$$

y χ es una función de clase C^∞ con $0 \leq \chi \leq 1$,

$$\begin{cases} \chi = 1 \text{ en } Q^2 = Q_{1/4}(0, 0), \\ \chi = 0 \text{ fuera de } Q_{1/3}(0, 0). \end{cases}$$

Así, es fácil observar que $\phi_n \geq 0$ y cumple las propiedades siguientes:

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial t} + \Delta \phi_n = 0 \text{ en } Q^2,$$

$$\left| \frac{\partial \phi_n}{\partial t} + \Delta \phi_n \right| \leq C \text{ en todo su dominio de definición,}$$

$$\frac{1}{C} r_n^{-3} \leq \phi_n \leq C r_n^{-3}, \quad |\nabla \phi_n| \leq C r_n^{-4} \text{ en } Q^n,$$

$$\phi_n \leq C r_k^{-3}, \quad |\nabla \phi_n| \leq C r_k^{-4} \text{ en } Q^{k-1} \setminus Q^k, \text{ para } 1 < k \leq n,$$

siendo C una constante independiente de n .

Usando ϕ_n en (3.6) y razonando como en el Paso 2, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \sup_{-r_n^2 < t \leq 0} \int_{|x| < r_n} |u|^2(x, t) dx + r_n^{-3} \iint_{Q^n} |\nabla u|^2 \leq \sup_{-r_n^2 < t \leq 0} r_n^{-3} \int_{B(0, r_n)} |u|^2 dx + r_n^{-3} \iint_{Q^n} |\nabla u|^2 \\ & \leq C \left(\sup_{-r_n^2 < t \leq 0} \int_{B(0, r_1)} |u|^2 \phi dx + \iint_{Q^1} |\nabla u|^2 \phi \right) \leq C(I + II + III + IV), \end{aligned}$$

siendo

$$I_1 := \iint_{Q^1} |u|^2 \left| \frac{\partial \phi_n}{\partial t} + \Delta \phi_n \right|,$$

$$I_2 := \iint_{Q^1} |u|^3 |\nabla \phi_n|,$$

$$I_3 := \left| \iint_{Q^1} p(u \cdot \nabla \phi_n) \right|,$$

$$I_4 := \iint_{Q^1} |u| |f| |\phi_n|.$$

Nuestro objetivo ahora es acotar estos cuatro términos usando las desigualdades (3.11)_k, $3 \leq k \leq n$, (3.7b), (3.9) y las propiedades de ϕ_n .

En primer lugar,

$$I_1 \leq C \iint_{Q^1} |u|^2 \leq C \epsilon_1^{2/3},$$

$$I_2 = \iint_{Q^2} |u|^3 |\nabla \phi_n| + \iint_{Q^1 \setminus Q^2} |u|^3 |\nabla \phi_n| \leq \sum_{k=2}^n \iint_{Q^k} |u|^3 |\nabla \phi_k| + C r_2^{-4} \iint_{Q^1} |u|^3$$

$$\leq C \sum_{k=2}^n r_k^{-4} \iint_{Q^k} |u|^3 + C r_2^{-4} \epsilon_1^{2/3} \leq C \sum_{k=1}^n r_k^{-4} \epsilon_1^{2/3} \leq C \epsilon_1^{2/3}.$$

Para acotar el término I_4 debemos usar, además, las desigualdades (3.11)_k y la desigualdad de Hölder como vemos a continuación,

$$I_4 \leq C \sum_{k=1}^n r_k^2 \left(\int_{Q^k} |u| \right)^{1/3} \left(\int_{Q^k} |f|^{3/2} \right)^{2/3}$$

$$\leq C \sum_{k=1}^n \epsilon_1^{2/9} r_k^2 \left(\int_{Q^k} |f|^q \right)^{1/q} \leq C \epsilon_1^{2/9} \epsilon_2^{1/q} \sum_{k=1}^n r_k^{2-5/q}.$$

Como $q > 5/2$ podemos elegir $\epsilon_2(q)$ de forma que $\epsilon_2^{1/q} \sum_{k=1}^{+\infty} r_k^{2-5/q} < \epsilon_1^{4/9}$, de donde también tendremos

$$I_4 \leq C \epsilon_1^{2/3}.$$

Por último debemos acotar el término I_3 . Para ello, debemos usar el hecho de que u tiene divergencia nula y reducir el problema de estimar la oscilación de p . Así, para cada $k \geq 1$, sea χ_k una función de clase C^∞ en $Q^1 = Q_{1/2}(0,0)$, tal que $0 \leq \chi \leq 1$,

$$\chi_k = 1 \text{ en } Q_{7r_k/8}(0,0), \quad \chi_k = 0 \text{ fuera de } Q_{r_k}(0,0), \quad |\nabla \chi_k| \leq \frac{C}{r_k}.$$

Observemos que $\chi_1 \phi_n = \phi_n$, con lo cual

$$\iint_{Q^1} p(u \cdot \nabla \phi_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \iint_{Q^1} p u \cdot \nabla ((\chi_k - \chi_{k+1}) \phi_n) + \iint_{Q^1} p u \cdot \nabla (\chi_n \phi_n).$$

Ahora vamos a estimar cada término por separado. Como u tiene divergencia nula y $\chi_k - \chi_{k+1}$ tiene soporte en Q^k , para $k \geq 3$ observamos que

$$\iint_{Q^1} p u \cdot \nabla ((\chi_k - \chi_{k+1}) \phi_n) = \iint_{Q^k} (p - \bar{p}_k) u \cdot \nabla ((\chi_k - \chi_{k+1}) \phi_n)$$

y

$$\iint_{Q^1} pu \cdot \nabla(\chi_n \phi_n) = \iint_{Q^n} (p - \bar{p}_n)u \cdot \nabla(\chi_n \phi_n).$$

Para $k = 1, 2$ por las propiedades impuestas a ϕ_n y χ_k tenemos que

$$\left| \iint_{Q^1} pu \cdot \nabla((\chi_k - \chi_{k+1})\phi_n) \right| \leq C \iint_{Q^1} |p||u|.$$

Con lo cual, podemos escribir que

$$I_3 = \left| \iint_{Q^1} p(u \cdot \nabla \phi_n) \right| \leq C \sum_{k=3}^n \iint_{Q^k} |u||p - \bar{p}_k|r_k^{-4} + C \iint_{Q^1} |u||p|,$$

pues $|\nabla((\chi_k - \chi_{k+1})\phi_n)| \leq Cr_k^{-4}$ y $|\nabla(\chi_n \phi_n)| \leq Cr_n^{-4}$.

Usando las desigualdades (3.11)_k y (3.9), obtenemos finalmente que

$$I_3 \leq C \sum_{k=3}^n r_k^{-23/5} \iint_{Q^k} |u||p - \bar{p}_k|r_k^{3/5} + C \iint_{Q^1} |u||p| \leq C \sum_{k=3}^n r_k^{-23/5} \epsilon_1^{2/3} + C\epsilon_1 \leq C\epsilon_1^{2/3}.$$

Y con esto ya tenemos que (3.10)_n $\leq C\epsilon_1^{2/3}$ como queríamos probar. Por lo tanto queda demostrada la Proposición 1.

Observemos además que la constante C es absoluta y no depende ni de n ni de ϵ_1 . Además las constantes C^* y C^{**} son independientes de ϵ_1 y n y podemos elegir ϵ_1 suficientemente pequeño de forma que se cumplan las desigualdades y sin peligro de entrar en un razonamiento circular. Una vez escogido ϵ_1 , podemos fijar $\epsilon_2 = \epsilon_2(q)$ de forma que las desigualdades se sigan manteniendo. ■

3.1.3. Demostración de la Proposición 2

Para demostrar la Proposición 2 utilizaremos una proposición y algunos lemas técnicos que no probaremos; sus demostraciones pueden ser encontradas en [3].

A la vista del Corolario 3.1.5, la idea de la demostración será de nuevo estimar el radio compatible con una singularidad. El corolario sugiere que cerca de un punto singular (x_0, t_0) tendremos $|u| \geq C/r$, donde $r^2 = |x - x_0| + |t - t_0|$. Si u crece rápido, esperamos que $|\nabla u|$ también lo haga, para que el punto sea singular; así la Proposición 2 sugiere cerca de un punto singular una estimación tipo $|\nabla u|^2 \geq C/r^4$ cuando $r \rightarrow 0$.

En lo que sigue vamos a trabajar con los cilindros:

$$Q_r^*(a, s) = Q_r(a, s + \frac{1}{8}r^2).$$

En la prueba vamos a estudiar el comportamiento de la solución (u, p) cerca de un punto particular (x, t) que, mediante una traslación, identificaremos con el punto $(0, 0)$. Simplificaremos la escritura, poniendo $Q_r^* := Q_r^*(0, 0)$. Ahora introduciremos nuevos términos que ayudarán a demostrar la proposición,

$$\begin{aligned}
A_*(r) &:= \sup_{-\frac{7}{8}r^2 < t < \frac{1}{8}r^2} \frac{1}{r} \int_{B_r \times \{t\}} |u|^2 dx, \\
\delta_*(r) &:= \frac{1}{r} \iint_{Q_r^*} |\nabla u|^2, \\
G_*(r) &:= \frac{1}{r^2} \iint_{Q_r^*} |u|^3, \\
K_*(r) &:= \frac{1}{r^{13/4}} \int_{-7/8r^2}^{1/8r^2} \left(\int_{B_r} |p| \right)^{5/4} dt, \\
J_*(r) &:= \frac{1}{r^2} \iint_{Q_r^*} |u||p|, \\
H_*(r) &:= \frac{1}{r^2} \iint_{Q_r^*} |u| \cdot ||u|^2 - \overline{|u|_r^2}|, \\
F_*(r) &:= \frac{1}{r^{1/2}} \iint_{Q_r^*} |f|^{3/2}.
\end{aligned}$$

Aquí, $B_r := \{x : |x| < r\}$ y

$$\overline{|u|_r^2} = \overline{|u|_r^2}(t) := \int_{B_r} |u|^2 dx.$$

Notemos que A_* , δ_* , G_* y K_* son términos análogos a A , δ , G y K donde se ha usado Q_r^* en vez de Q_r ; por lo tanto, se siguen manteniendo las estimaciones ya probadas en la Sección 3.1.1.

Denotemos ahora por $M_*(r)$ la siguiente expresión:

$$M_*(r) = G_*(r)^{2/3} + H_*(r) + J_*(r) + K_*(r)^{8/5}.$$

Tenemos entonces el resultado siguiente:

Proposición 3.1.11 (Proposición 3). *Sea (u, p) una solución débil admisible para las ecuaciones de Navier-Stokes con segundo miembro f en Q_ρ^* . Supongamos que $\delta_*(\rho) \leq 1$ y $F_*(\rho) \leq 1$. Entonces para $r \leq \rho/4$ tenemos que*

$$M_*(r) \leq C_2 \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^{1/5} M_*(\rho) + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 (M_*(\rho)^{1/2} \delta_*(\rho)^{1/2} + M_*(\rho) \delta_*(\rho) + F_*(\rho) + \delta_*(\rho)) \right\},$$

donde C_2 es una constante independiente de u, p y f .

Lo importante de esta proposición es que: (a) todos los términos de la derecha, salvo uno, son potencias positivas de ρ/r , que es grande, y están multiplicados por una potencia positiva de $\delta_*(\rho)$ y de $F_*(\rho)$, que son pequeños, y (b) el único término distinto lleva un factor $(r/\rho)^{1/5}$, que es pequeño. Así podremos estimar que si u es regular en $(0, 0)$ entonces $M_*(r)$ converge rápidamente a 0 cuando $r \rightarrow 0$.

Veamos que la Proposición 3 implica la Proposición 2 y así ya sólo nos quedará probar la Proposición 3 y ya tendremos lo que buscamos.

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $(x, t) = (0, 0)$ y que (u, p) está definida en un entorno D de $(0, 0)$. Recordemos además que de la definición de la solución admisible tenemos que $f \in L^q(D)$ para $q < \frac{5}{2}$.

Observemos que

$$F_q(r) = r^{3q-5} \iint_{Q_r} |f|^q \leq r^{5/2} \iint_D |f|^q$$

para $Q_r \subset D$; en particular, $F_q(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$.

Si aplicamos el Corolario 3.1.5, $(0, 0)$ es regular si

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{r^2} \iint_{Q_r^*} (|u|^3 + |u||p|) + r^{-13/4} \int_{-7r^2/8}^{r^2/8} \left(\int_{B_r} |p| dx \right)^{5/4} dt \right\} \leq \epsilon_1,$$

(escrita la condición en términos de Q_r^* , lo cual es posible gracias al Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue).

Comparando esta desigualdad con la que aparece en la Proposición 3, vemos que si existe $\bar{\epsilon}_1$, tal que

$$\liminf_{r \rightarrow 0} M_*(r) \leq \bar{\epsilon}_1 \tag{3.13a}$$

entonces tendremos que

$$\liminf_{r \rightarrow 0} M(r) \leq \epsilon_1 \tag{3.13b}$$

y, en consecuencia, $(0, 0)$ será un punto regular.

Veamos primero que (3.13a) implica (3.13b), en efecto, como $Q_r^*(0, 0) = Q_r(0, 1/8r^2)$ y las funciones que integramos son positivas podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} \liminf_{r \rightarrow 0} M(r) &= \liminf_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{r^2} \iint_{Q_r} (|u|^3 + |u||p|) + r^{-13/4} \int_{-r^2}^0 \left(\int_{B_r} |p| dx \right)^{5/4} dt \right\} \\ &\leq \liminf_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{r^2} \iint_{Q_r^*} (|u|^3 + |u||p|) + r^{-13/4} \int_{-7r^2/8}^{r^2/8} \left(\int_{B_r} |p| dx \right)^{5/4} dt \right\} = \liminf_{r \rightarrow 0} M_*(r) \leq \bar{\epsilon}_1. \end{aligned}$$

Para ver que $\liminf_{r \rightarrow 0} M_*(r) \leq \bar{\epsilon}_1$ lo haremos por reducción al absurdo, supongamos que $\liminf_{r \rightarrow 0} M_*(r) > \bar{\epsilon}_1$.

Supongamos ahora que existen constantes absolutas $0 < \epsilon_3 \leq 1$ y $0 < \gamma \leq 1/4$ tales que

$$M_*(\rho) > \bar{\epsilon}_1 \implies F_*(\rho) \leq \epsilon_3 \text{ y } \delta_*(\rho) \leq \epsilon_3$$

implica

$$M_*(\gamma\rho) \leq \frac{1}{2} M_*(\rho). \tag{3.14}$$

Ahora podemos tener dos situaciones, una en la que $M_*(\gamma\rho) \leq \bar{\epsilon}_1$, en dicho caso habríamos terminado; y otro en el que $M_*(\gamma\rho) > \bar{\epsilon}_1$. Si tenemos esta situación podríamos volver a aplicar (3.14) y así llegaríamos a que

$$M_*(\gamma^2\rho) \leq \frac{1}{2^2} M_*(\gamma\rho).$$

Así podríamos seguir sucesivamente hasta que llegamos a una contradicción con el hecho de que $\liminf_{r \rightarrow 0} M_*(r) > \bar{\epsilon}_1$.

Ahora veamos que efectivamente podemos elegir las constantes ϵ_3 y γ de forma que se verifique (3.14).

De hecho, si usamos la desigualdad de Hölder tenemos que

$$F_*(r) = \frac{1}{r^{1/2}} \iint_{Q_r^*} |f|^{3/2} \leq C \left(\iint_{Q_r^*} |f|^q \right)^{3/(2q)} r^{9/2 - 15/(2q)} \leq Cr^{3/2} \left(\iint_{Q_r^*} |f|^q \right)^{3/(2q)} \text{ para } r \leq 1.$$

Como $q > \frac{5}{2}$ entonces tenemos que $F_*(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$, luego existe una constante r_0 tal que

$$F_*(r) \leq \epsilon_3 \text{ para todo } r < r_0.$$

Y por hipótesis de la Proposición 2 también tenemos que

$$\delta_*(r) \leq \epsilon_3 \text{ para todo } r < r_0.$$

Observemos que si tenemos que $M_*(\rho) > \bar{\epsilon}_1$, $F_*(\rho) \leq \epsilon_3$ y $\delta_*(\rho) \leq \epsilon_3$ entonces tenemos que $M_*(\rho)^{1/2} < \bar{\epsilon}_1^{-1/2} M_*(\rho)$.

Usando la Proposición 3 podemos concluir que

$$M_*(r) \leq C_2 \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^{1/5} M_*(\rho) + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 \left(\left(\frac{\epsilon_3}{\bar{\epsilon}_1} \right)^{1/2} + \epsilon_3 \right) M_*(\rho) + 2 \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 \epsilon_3 \right\}$$

para $r \leq \frac{1}{4}\rho$.

Así elegimos γ de forma que $C_2\gamma^{1/5} \leq \frac{1}{6}$ y $\gamma \leq \frac{1}{4}$.

Una vez fijado γ elegimos $\epsilon_3 \leq 1$ tal que

$$C_2\gamma^{-2} \left(\epsilon_3 + \left(\frac{\epsilon_3}{\bar{\epsilon}_1} \right)^{1/2} \right) \leq \frac{1}{6} \text{ y } 2C_2\gamma^{-2}\epsilon_3 \leq \frac{1}{6}\bar{\epsilon}_1.$$

Con todo esto si tomamos $r = \gamma\rho$ podemos escribir que

$$M_*(\gamma\rho) \leq \frac{1}{3}M_*(\rho) + \frac{1}{6}\bar{\epsilon}_1 \leq M_*(\rho).$$

Luego vemos que efectivamente podemos elegir las constantes ϵ_3 y γ para que se verifique (3.14) y así terminamos la prueba; ya sólo nos queda demostrar la Proposición 3 y ya habremos terminado.

Para demostrar la Proposición 3, necesitaremos varias desigualdades adicionales. Están contenidas en el resultado siguiente:

Lema 3.1.12. *Para los términos definidos anteriormente tenemos que*

$$H_*(r) \leq C(G_*(r)^{2/3} + A_*(r)\delta_*(r)), \quad (3.15a)$$

Si $r \leq \rho/2$, tenemos:

$$G_*(r) \leq C \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^3 A_*(\rho)^{3/2} + \left(\frac{\rho}{r} \right)^3 A_*(\rho)^{3/4} \delta_*(\rho)^{3/4} \right\}, \quad (3.15b)$$

$$J_*(r) \leq C \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^{1/5} A_*(\rho)^{1/5} G_*(r)^{1/5} K_*(\rho)^{4/5} + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 A_*(\rho)^{1/2} \delta_*(\rho) \right\}, \quad (3.15c)$$

$$K_*(r) \leq C \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^{1/2} K_*(\rho) + \left(\frac{\rho}{r} \right)^{5/4} A_*(\rho)^{5/8} \delta_*(\rho)^{5/8} \right\}, \quad (3.15d)$$

$$A_*(r) \leq C \frac{\rho}{r} \left(G_*(\rho)^{2/3} + H_*(\rho) + J_*(\rho) + F_*(\rho)^{4/3} \right). \quad (3.15e)$$

Para la demostración véase [3].

Así tras este lema ya podemos pasar a demostrar la Proposición 3.

Demostración

Gracias al Lema 3.1.12 podemos escribir que

$$A_*\left(\frac{1}{2}\rho\right) \leq C \left(M_*(\rho) + F_*(\rho)^{4/3} \right). \quad (3.16)$$

Si $r \leq \rho/4$ podemos usar el lema anterior de nuevo y estimar $M_*(r)$ en término de $M_*(\rho/2)$, $A_*(\rho/2)$, y de $\delta_*(\rho/2)$.

Antes de continuar, recordemos que $M_*(\rho/2) \leq CM_*(\rho)$, $\delta_*(\rho/2) \leq C\delta_*(\rho)$ y que, por hipótesis, $F_*(\rho) \leq 1$ y $\delta_*(\rho) \leq 1$.

Como $M_*(r) = G_*(r)^{2/3} + H_*(r) + J_*(r) + K_*(r)^{8/5}$, vamos a acotar cada uno de los términos de la derecha para así llegar a la cota deseada.

Usando el Lema 3.1.12 tenemos que

$$G(r)^{2/3} \leq C \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 A_*\left(\frac{1}{2}\rho\right) + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 A_*\left(\frac{1}{2}\rho\right)^{1/2} \delta_*(\rho)^{1/2} \right\},$$

y usando (3.16) podemos escribir que

$$\begin{aligned} G_*(r)^{2/3} &\leq C \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 (M_*(\rho) + F_*(\rho)^{4/3}) + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 (M_*(\rho)^{1/2} + F_*(\rho)^{2/3}) \delta_*(\rho)^{1/2} \right\} \\ &\leq C \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 M_*(\rho) + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 M_*(\rho)^{1/2} \delta_*(\rho)^{1/2} + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 (F_*(\rho)^{4/3} + \delta_*(\rho)) \right\} \\ &\leq C \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 M_*(\rho) + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 M_*(\rho)^{1/2} \delta_*(\rho)^{1/2} + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 (F_*(\rho) + \delta_*(\rho)) \right\}. \end{aligned}$$

Ahora pasamos a estimar $H_*(\rho)$, usando el Lema 3.1.12 tenemos que

$$H_*(r) \leq C(G_*(r)^{2/3} + A_*(r)\delta_*(r))$$

y usando dicho lema para acotar $A_*(r)$ junto con que $\delta_*(r) \leq (\rho/r)\delta_*(\rho)$ por definición, deducimos que

$$H_*(r) \leq C \left\{ G_*(r)^{2/3} + \left(M_*(\rho) + F_*(\rho)^{4/3} \right) \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 \delta_*(\rho) \right\}.$$

Combinando las estimaciones de $G_*(r)^{2/3}$ y $H_*(r)$, llegamos a que

$$G_*(r)^{2/3} + H_*(r) \leq C \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 M_*(\rho) + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 (M_*(\rho)\delta_*(\rho) + M_*(\rho)^{1/2}\delta_*(\rho)^{1/2}) \right\}$$

$$+C\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 (F_*(\rho) + \delta_*(\rho)).$$

Ahora pasamos a estimar $J_*(r)$. Gracias al Lema 3.1.12,

$$\begin{aligned} J_*(r) &\leq C\left\{\left(\frac{r}{\rho}\right)^{1/5} A_*(\rho)^{1/5} G_*(r)^{1/5} K_*(\rho)^{4/5} + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 A_*(\rho)^{1/2} \delta_*(\rho)\right\} \\ &\leq C\left\{\left(\frac{r}{\rho}\right)^{1/5} \left(A_*\left(\frac{1}{2}\rho\right) + G_*(r)^{2/3} + K_*(\rho)^{8/5}\right) + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 A_*(\rho)^{1/2} \delta_*(\rho)\right\} \\ &\leq C\left\{\left(\frac{r}{\rho}\right)^{1/5} \left(M_*(\rho) + F_*(\rho)^{4/3} + G_*(r)^{2/3} + K_*(\rho)^{8/5}\right) + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 A_*(\rho)^{1/2} \delta_*(\rho)\right\} \end{aligned}$$

y, usando la definición de $M_*(r)$ y que $r/\rho \leq 1$ llegamos a la desigualdad

$$J_*(r) \leq C\left\{\left(\frac{r}{\rho}\right)^{1/5} M_*(\rho) + F_*(\rho) + G_*(r)^{2/3} + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 A_*(\rho)^{1/2} \delta_*(\rho)\right\}.$$

Por otro lado, dado que $A_*(\rho/2) \leq C(M_*(\rho) + F_*(\rho)^{4/3}) \leq C(M_*(\rho) + 1)$, entonces tenemos que

$$J_*(r) \leq C\left\{\left(\frac{r}{\rho}\right)^{1/5} M_*(\rho) + F_*(\rho) + G_*(r)^{2/3} + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \left(M_*(\rho)^{1/2} \delta_*(\rho) + \delta_*(\rho)\right)\right\}.$$

Y usando la estimación de $G_*(r)^{2/3}$ llegamos a que

$$J_*(r) \leq C\left\{\left(\frac{r}{\rho}\right)^{1/5} M_*(\rho) + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \left(M_*(\rho)^{1/2} \delta_*(\rho)^{1/2} + F_*(\rho) + \delta_*(\rho)\right)\right\}.$$

Finalmente, vamos a estimar $K_*(r)^{8/5}$; para ello, usamos el Lema 3.1.12 y de nuevo la desigualdad $A_*(\rho/2) \leq C(M_*(\rho) + 1)$ y escribimos que

$$\begin{aligned} K_*(r)^{8/5} &\leq C\left\{\left(\frac{r}{\rho}\right)^{4/5} K_*(\rho)^{8/5} + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 A_*\left(\frac{1}{2}\rho\right) \delta_*(\rho)\right\} \\ &\leq C\left\{\left(\frac{r}{\rho}\right)^{4/5} M_*(\rho) + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \left(M_*(\rho) \delta_*(\rho) + \delta_*(\rho)\right)\right\}. \end{aligned}$$

Y con todos estos términos acotados, por la definición de $M_*(\rho)$, ya tenemos la cota deseada y así queda probada la Proposición 3. ■

3.1.4. Demostración del Teorema B

Una vez probadas las Proposiciones 1 y 2, ya podemos demostrar el Teorema B. Pero antes de demostrarlo debemos enunciar un lema previo.

Lema 3.1.13. *Sea \mathcal{J} una familia de cilindros parabólicos $Q_r^*(x, t)$ contenidos en un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Entonces existe una subfamilia finita o numerable $\mathcal{J}' = \{Q_i^* = Q_{r_i}^*(x_i, t_i)\}$ tal que*

(a) $Q_i^* \cap Q_j^* = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

(b) Para todo $Q^* \in \mathcal{J}$ existe $Q_{r_i}^*(x_i, t_i) \in \mathcal{J}'$ tal que $Q^* \subset Q_{5r_i}^*(x_i, t_i)$.

Para la demostración de este resultado, véase [3]. Se basa en un argumento inductivo relativamente sencillo.

Ahora ya podemos pasar a probar el Teorema B.

Demostración

Sea (u, p) una solución débil admisible definida en un conjunto abierto. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que D es acotado. Por la Proposición 2 tenemos que, si $(x, t) \in S$, entonces

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \iint_{Q_r^*(x, t)} |\nabla u|^2 > \epsilon_3.$$

Sea V un entorno de S en D y sea $\delta > 0$. Entonces, para cada $(x, t) \in S$, elegimos $Q_r^*(x, t)$ con $r < \delta$ de forma que se tenga

$$\frac{1}{r} \iint_{Q_r^*(x, t)} |\nabla u|^2 > \epsilon_3 \quad \text{y} \quad Q_r^*(x, t) \subset V.$$

Aplicando el Lema 3.1.13 a esta familia de cilindros, deducimos que existe una subfamilia de cilindros disjuntos $\{Q_{r_i}^*(x_i, t_i)\}$ tal que $S \subset \bigcup_i Q_{5r_i}^*(x_i, t_i)$.

Además, se verifica que

$$\sum_i r_i \leq \epsilon_3^{-1} \sum_i \iint_{Q_{r_i}^*} |\nabla u|^2 \leq \epsilon_3^{-1} \sum_i \iint_V |\nabla u|^2.$$

Como δ es arbitrario podemos concluir que S tiene medida de Lebesgue 0 y, también, que

$$\mathcal{P}^1(s) \leq \frac{5}{\epsilon_3} \iint_v |\nabla u|^2$$

para todo entorno de S . Como $|\nabla u|^2$ es una función integrable, podemos afirmar que $\mathcal{P}^1(S) = 0$. En particular, la dimensión de Hausdorff asociada a los cilindros parabólicos es menor o igual que 1. ■

3.1.5. Existencia de solución débil admisible

Finalmente probaremos que efectivamente existen soluciones débiles admisibles de las ecuaciones de Navier-Stokes. De este modo, cobrará pleno sentido el Teorema B.

La mayor dificultad en la prueba está en la estimación de la presión. Cuando el dominio es todo \mathbb{R}^3 basta usar la expresión de Δp , obtenida al aplicar el operador divergencia a las ecuaciones de movimiento. Pero si el dominio Ω no ocupa todo el espacio hay que usar estimaciones provenientes del sistema de Stokes.

Consideraremos el sistema de Stokes

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla p = f, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u = 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Sea $D = \Omega \times (0, T)$ y pongamos

$$E_0(u) := \text{Ess sup}_{0 < t < T} \int_{\Omega} |u|^2,$$

$$E_1(u) := \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2.$$

Cuando el dominio sea $\Omega = \mathbb{R}^3$ las hipótesis de los datos serán $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$, $\nabla \cdot f = 0$ y $u_0 \in H$. Para dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ acotados exigiremos que Ω sea abierto, conexo que está localizado a un lado de la frontera y que ésta sea suficientemente regular. Además, supondremos que $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$, $\nabla \cdot f = 0$ y $u_0 \in H \cap W^{2/5, 4/5}(\Omega)$.

Bajo estas hipótesis podemos enunciar un teorema de existencia de soluciones débiles admisibles:

Teorema 3.1.14. *Supongamos que Ω , u_0 y f verifican las condiciones precedentes en cada caso. Entonces existe al menos una solución débil admisible (u, p) de las ecuaciones de Navier-Stokes en $D := \Omega \times (0, T)$, que verifica*

$$\begin{aligned} u &\in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \\ u(t) &\rightharpoonup u_0 \text{ en } H \text{ cuando } t \rightarrow 0, \\ p &\in L^{5/3}(D) \text{ en el caso de } \Omega = \mathbb{R}^3 \\ p &\in L^{5/4}(D) \text{ en el caso de } \Omega \text{ acotado.} \end{aligned}$$

Además se verifica la desigualdad local de energía

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times \{t\}} |u|^2 \phi + 2 \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \phi &\leq \int_{\Omega} |u_0|^2 \phi(x, 0) \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} \left(|u|^2 (\phi_t + \Delta \phi) + (|u|^2 + 2p) u \cdot \nabla \phi + 2(u \cdot f) \phi \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

para toda función $\phi \in \mathcal{D}(D)$ con $\phi \geq 0$ y $\phi = 0$ cerca de $\partial\Omega \times (0, T)$.

Antes de demostrar el teorema debemos observar que como no se sabe si la solución es única, tiene sentido que nos preguntemos si se podrían construir soluciones débiles de otra forma de modo que se siga verificando la desigualdad local de energía (3.18). Cabe preguntarse, por ejemplo, si la solución obtenida por el método de Galerkin verifica dichas desigualdades.

Si en el teorema tomamos $f = 0$ y $\Omega = \mathbb{R}^3$ se puede seguir la demostración que hizo Scheffer en [26], en donde se aplica un método parecido al que usaremos aquí.

La demostración de este teorema se basa en construir, para cada N suficientemente grande, una solución (u_N, p_N) de las ecuaciones

$$u_t + (\Psi_\delta(u) \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p = f, \text{ y } \nabla \cdot u = 0 \text{ en } D$$

donde $\delta = T/N$ y $\Psi_\delta(u)$ es una regularización de u cuya expresión indicaremos más adelante. En particular, veremos que el valor de $\Psi_\delta(u)$ en un tiempo cualquiera \tilde{t} dependerá únicamente de los valores de u para $t \leq \tilde{t} - \delta$. Como consecuencia, para cada N y cada $m = 0, 1, \dots, N-1$, las ecuaciones precedentes serán lineales en $\Omega \times (m\delta, (m+1)\delta)$. Y, como veremos, (u_N, p_N) verificarán desigualdades similares a (3.18).

Necesitamos los resultados siguientes, cuyas demostraciones no son complicadas a la vista de los resultados presentados en el Capítulo 1 y en las secciones precedentes.

Lema 3.1.15. *Supongamos que $f \in L^2(0, T; V')$, $u_0 \in H$ y $w \in C^\infty(\overline{D}; \mathbb{R}^3)$ con $\nabla \cdot w = 0$. Entonces existe un único par (u, p) solución de*

$$u_t + w \cdot \nabla u - \Delta u + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad (3.19)$$

en el sentido de las distribuciones en D , con $u \in \mathcal{C}([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$, $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $u|_{t=0} = u_0$.

Lema 3.1.16. *Supongamos que Ω , f y u_0 están en las condiciones exigidas en el Teorema 3.1.14 cuando $\Omega = \mathbb{R}^3$. Si además $f \in L^2(0, T; V')$, $u_0 \in H$ y $w \in C^\infty(\overline{D}; \mathbb{R}^3)$ con $\nabla \cdot w = 0$, entonces p verifica*

$$\Delta p = - \sum_{i,j} \nabla_{ij}(w^i u^j),$$

y

$$\iint_D |p|^{5/3} \leq C \iint_D |w|^{5/3} \cdot |u|^{5/3}.$$

Lema 3.1.17. *Supongamos que Ω , f y u_0 están en las condiciones exigidas en el Teorema 3.1.14 cuando Ω es acotado. Si además $f \in L^2(0, T; V')$, $u_0 \in H$ y $w \in C^\infty(\overline{D}; \mathbb{R}^3)$ con $\nabla \cdot w = 0$, entonces se verifica que:*

$$\|\nabla p\|_{L^{5/4}(D)} + \|u_t\|_{L^{5/4}(D)} + \|\Delta u\|_{L^{5/4}(D)} \leq C(\Omega, T)K,$$

donde $K = \|u_0\|_{W^{2/5, 5/4}} + \|w \cdot \nabla u\|_{L^{5/4}(D)} + \|f\|_{L^{5/4}(D)}$.

Además, si se normaliza p de manera que $\int_\Omega p = 0$ en todo tiempo t , tenemos que

$$\|p\|_{L^{5/4}(0, T; L^{5/3}(\Omega_1))} \leq C(\Omega_1)(\|\nabla p\|_{L^{5/4}(D)} + \| |w| |u| \|_{L^{5/3}(D)})$$

para cada abierto Ω_1 con $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$.

Usando ahora desigualdades de tipo interpolación, podemos deducir las siguientes estimaciones:

Lema 3.1.18. *Para $u, w \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))$ se verifica que*

$$\|w \cdot \nabla u\|_{L^{5/4}} \leq CE_1(u)^{1/2} E_1(w)^{3/10} E_0(w)^{1/5},$$

$$\|u\|_{L^{10/3}} \leq CE_1(u)^{3/10} E_0(u)^{1/5},$$

$$\|u\|_{L^5(0, T; L^{5/2})} \leq CT^{1/20} E_0(u)^{7/20} E_1(u)^{3/20}.$$

Lema 3.1.19. *Supongamos que Ω , f y u_0 están en las condiciones exigidas en el Teorema 3.1.14 y sea $w \in C^\infty(\bar{D}, \mathbb{R}^3)$ con divergencia nula. Sea (u, p) solución de (3.19) en el sentido de las distribuciones en D , con $u \in \mathcal{C}([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$ y $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $u|_{t=0} = u_0$. Entonces, para cada $\phi \in C^\infty(\bar{D})$ tal que $\phi = 0$ cerca de $\partial\Omega \times (0, T)$, se tiene:*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times \{t\}} |u|^2 \phi + 2 \iint_D |\nabla u|^2 \phi = \int_{\Omega} |u_0|^2 \phi(x, 0) \\ & + \iint_D \left(|u|^2 (\phi_t + \Delta \phi) + (|u|^2 w + 2pu) \cdot \nabla \phi + 2(u \cdot f) \phi \right) \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$.

La demostración de este lema no es complicada y se puede hacer mediante un procedimiento de aproximación por regularización y paso al límite.

Antes de presentar el siguiente resultado, vamos a definir la función $\Psi_\delta(u)$. En primer lugar, sea $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ tal que $\psi \geq 0$ y $\iint_D \psi = 1$, con soporte contenido en $\{(x, t) : |x|^2 < t, 1 < t < 2\}$.

Dada $u \in L^2(0, T; V)$, denotamos \tilde{u} la prolongación de u por 0 a todo \mathbb{R}^4 . Así, definimos $\Psi_\delta(u)$ como sigue:

$$\Psi_\delta(u)(x, t) = \frac{1}{\delta^4} \iint_{\mathbb{R}^4} \psi\left(\frac{y}{\delta}, \frac{\tau}{\delta}\right) \tilde{u}(x - y, t - \tau) dy d\tau.$$

Observemos que $\Psi_\delta(u)$ está bien definida, pertenece a C^∞ y tiene soporte compacto. También podemos ver que los valores de $\Psi_\delta(u)$ en el tiempo $t\tilde{t}$ dependen únicamente de los valores de u en tiempo $t \in (\tilde{t} - 2\delta, \tilde{t} - \delta)$.

Lema 3.1.20. *Si $u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$, la función $\Psi_\delta(u)$ verifica*

$$\nabla \cdot \Psi_\delta(u) = 0,$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} |\Psi_\delta(u)|^2(x, t) dt \leq CE_0(u),$$

$$\iint_D |\nabla \Psi_\delta|^2 \leq CE_1(u).$$

Estamos ya en condiciones de probar el teorema de existencia de solución débil admisible.

Demostración

Por simplicidad, vamos a considerar únicamente el caso $\Omega = \mathbb{R}^3$.

Para todo N suficientemente grande, pongamos $\delta = T/N$ y consideremos el siguiente problema a resolver:

$$\begin{cases} u_{N,t} + (\Psi_\delta(u_N) \cdot \nabla)u_N - \Delta u_N + \nabla p_N = f, \\ u_N \in L^2(0, T; V) \cap \mathcal{C}([0, T]; H), \\ u_N(0) = u_0. \end{cases}$$

La existencia de (u_N, p_N) está garantizada por el Lema 3.1.15, aplicado inductivamente en cada intervalo $(m\delta, (m+1)\delta)$ con $0 \leq m \leq N-1$.

Observemos que podemos escribir la siguiente igualdad:

$$\int_{\Omega \times \{t\}} |u_N|^2 + 2 \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_N|^2 = \int_\Omega |u_0|^2 + 2 \int_0^t \int_\Omega f \cdot u$$

para todo $t \in (0, T)$. De aquí, podemos deducir que

$$\int_{\Omega \times \{t\}} |u_N|^2 + 2 \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_N|^2 \leq \int_\Omega |u_0|^2 + \int_0^t \|f\|_*^2.$$

En particular, se deduce que, por razonamientos idénticos a los desarrollados en los capítulos anteriores,

$$u_N \text{ está uniformemente acotada en } L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V).$$

Denotamos ahora V_2 la adherencia de \mathcal{V} en $H^2(\Omega)^3$ y V_2' su dual. Por el Lema 4.2 del Capítulo 3 de [27] y por lo ya visto para u_N y p_N , deducimos que

$$\frac{d}{dt}u_N \text{ está uniformemente acotada en } L^2(0, T; V_2')$$

y por el Teorema 2.1 del Capítulo 3 de [27], tenemos que

$$\{u_N\} \text{ está en un conjunto compacto de } L^2(D).$$

Gracias al Lema 3.1.17 podemos afirmar también que

$$\{p_N\} \text{ está acotada en } L^{5/3}(D).$$

Por tanto, podemos extraer subsucesiones, que seguiremos denotando de la misma manera, que convergen en un sentido apropiado a u_* y p_* :

$$u_N \rightarrow u_* \begin{cases} \text{fuertemente en } L^2(D), \\ \text{débilmente en } L^2(0, T; V), \\ * - \text{débil en } L^\infty(0, T; H), \end{cases}$$

$$p_N \rightarrow p_* \text{ débilmente en } L^{5/3}(D).$$

Antes de continuar con la demostración, recordemos el resultado siguiente:

Lema 3.1.21. *Si $1 \leq q < r$ y $u_N \rightarrow u_*$ c.p.d. en D y $\{u_N\}$ está acotada en $L^r(D)$, entonces $u_N \rightarrow u_*$ débilmente en $L^r(D)$ y fuertemente en $L^s(D)$ para $q < s < r$.*

Así si aplicamos este lema para $q = 2$ y $r = 10/3$ podemos concluir que $u_N \rightarrow u_*$ fuertemente en $L^s(D)$ con $2 \leq s < 10/3$.

De la definición de Ψ_δ , como $\delta = T/N$, podemos afirmar que $\Psi_\delta(u_N) \rightarrow u_*$ fuertemente en $L^s(D)$ con $2 \leq s < 10/3$.

Con todas estas convergencias es fácil ver ahora que u_* , junto con alguna p , es la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes con segundo miembro f .

Además como $u_{N,t}$ está acotada en $L^2(0, T; V'_2)$ entonces tenemos que $\{u_N\}$ es uniformemente continua de $(0, T)$ en V'_2 , con lo cual, $u_*(0) = \lim_{N \rightarrow +\infty} u_N(0) = u_0$. Por ser solución débil, sabemos que u_* es débilmente continua en H luego queda probado que $u_*(t) \rightarrow u_0$ débilmente en H .

Para probar la desigualdad local de energía es suficiente ver qué ocurre para $t = T$ y $\phi = 0$ en $\Omega \times \{T\}$; pues el caso general se obtiene basándose en la prueba de la desigualdad de energía.

Supongamos por tanto que ϕ se anula en $\{|x| > R\} \cup \{t = T\}$. Usando uno de los lemas anteriores, en concreto el Lema 3.1.19, tenemos que

$$2 \iint_D |\nabla u_N|^2 \phi = \int_\Omega |u_0|^2 \phi(x, 0) + \iint_D \left(|u_N|^2 (\phi_t + \Delta \phi) + (|u_N|^2 \Psi_\delta(u_N) + 2p_N u_N) \cdot \nabla \phi + 2(u_N \cdot f) \phi \right)$$

Observemos que el término $\iint_D |\nabla u_N|^2 \phi$ es semicontinuo inferiormente para la convergencia débil; esto es consecuencia de la continuidad y convexidad de la función $v \mapsto \iint_D |\nabla v|^2 \phi$. Tomando límites cuando $N \rightarrow +\infty$, tenemos la desigualdad de energía para u_* gracias a las convergencias ya estudiadas.

Esto prueba el teorema cuando $\Omega = \mathbb{R}^3$.

Cuando Ω es acotado, se puede desarrollar un argumento análogo, aunque algo más técnico. La conclusión es esencialmente la misma: existe al menos una solución débil admisible con la regularidad indicada. ■

Con todo esto terminamos esta primera parte del capítulo y ya pasamos a ver el artículo de Ladyzhenskaya.

3.2. Regularidad parcial de la solución admisible de Navier-Stokes (Ladyzhenskaya)

En esta sección describiremos el resultado que aportó Ladyzhenskaya al problema de la regularidad, siguiendo el guión de [18].

Se trata de una mejora de los resultados anteriores, donde se afina en el concepto de punto singular.

La clave está en la definición siguiente:

Definición 3.2.1. *Sea (u, p) una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes. Decimos que un punto (x, t) es **regular** en el sentido de Ladyzhenskaya si u es Hölder-continua en un entorno del punto (x, t) .*

Ahora introduciremos una variante parabólica de los espacios de Morrey que usaremos después, en la definición de solución débil admisible.

Definición 3.2.2. *Sean $G = \Omega \times I \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ y γ un número real positivo. Pondremos entonces*

$$M_{2,\gamma}(\Omega, \mathbb{R}^3) := \{f \in L^2_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^3) : c_\gamma(f; \Omega) < +\infty\},$$

donde

$$c_\gamma(f; \Omega) := \sup_{r>0; Q(z,r) \subset G} \frac{1}{r^{\gamma-2}} \left(\int_{Q(z,r)} |f|^2 dx dt \right)^{1/2}.$$

Definición 3.2.3. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y $T > 0$. Supongamos que $f \in M_{2,\gamma}(\Omega \times (0, T))$ para algún $\gamma > 0$. Diremos que (u, p) es **solución débil admisible** en $\Omega \times (0, T)$ (en el sentido de Lin y Ladyzhenskaya) si se tiene*

- $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$,
- $p \in L^{3/2}(\Omega \times (0, T))$,
- u, p, f verifican las ecuaciones de Navier-Stokes en el sentido de las distribuciones en $\Omega \times (0, T)$.
- Para cada función real $\phi \in C_0^\infty(\Omega \times (0, T))$ con $\phi \geq 0$ tenemos que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u|^2 \phi dx + 2 \iint_{\Omega \times (0, T)} |\nabla u|^2 \phi \\ & \leq \iint_{\Omega \times (0, T)} \left(|u|^2 (\phi_t + \Delta \phi) + (|u|^2 + 2p) u \cdot \nabla \phi + 2(u \cdot f) \phi \right) \end{aligned}$$

El resultado análogo al Teorema B de Caffarelli, Kohn y Nirenberg es el siguiente:

Teorema 3.2.4. *Sean γ una constante positiva y Ω, T, f, u, p como en la Definición 3.2.3. Sea $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$. Si existe una constante positiva ϵ_* , únicamente dependiente de γ , tal que*

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \iint_{Q((x_0, t_0); r)} |\nabla u|^2 < \epsilon_*(\gamma),$$

entonces el punto (x_0, t_0) es regular o, lo que es lo mismo, en un entorno de (x_0, t_0) la función u es Hölder-continua.

Para demostrar este resultado, Ladyzhenskaya divide la prueba en tres partes. En una primera parte, prueba un criterio de Hölder-continuidad local para u usando un procedimiento de explosión. Esta parte es parecida a la aproximación desarrollada para investigaciones de regularidad parcial en ecuaciones elípticas y parabólicas, con la diferencia de que para la incompresibilidad se necesitan algunas correcciones del método. En la segunda parte se mejora el criterio anterior con la ayuda de una escala especial. Y en la tercera parte se obtiene el criterio final de regularidad local de la solución débil admisible, usando algunos resultados y observaciones de [3]. De esta manera se consigue aplicar un argumento más corto que el de [3] y más transparente que el de [20].

Observemos también que de este teorema se sigue que la medida de Hausdorff parabólica unidimensional \mathcal{P}^1 del (nuevo) conjunto de puntos singulares es igual a cero y que la dimensión parabólica asociada es menor o igual que 1. Para más detalles véase [18].

Capítulo 4

Resultados de regularidad para el sistema de Boussinesq

En este nuevo capítulo vamos a desarrollar resultados análogos a los que hemos visto en el Capítulo 3 para el sistema de Boussinesq. Para ello veremos los principales resultados expuestos en [1].

Así en este capítulo vamos a ver el concepto de solución débil admisible para el sistema de Boussinesq y vamos a probar que el conjunto de los puntos singulares tiene medida unidimensional de Hausdorff 0. Observemos que esto no es de extrañar ya que el sistema de Boussinesq lo que introduce es una nueva variable en las ecuaciones de Navier-Stokes y esta variable es solución de la ecuación del calor, cuya solución es regular. Con lo cual, es de esperar que el término de la temperatura no introduzca nuevos puntos singulares.

Con respecto a la existencia de soluciones admisibles para el sistema de Boussinesq, los autores del artículo se basaron en [28] para probarlo. En otras palabras, regularizaron el sistema de Boussinesq añadiendo un término de viscosidad suficientemente grande, de la forma $\varepsilon\Delta^2$ y así probaron la convergencia para las soluciones fuertes regularizadas cuando el parámetro de regularización va a 0. Además obtuvieron un resultado de regularidad parcial basándose en un corolario de [3].

Así pasamos a ver qué entendemos por solución débil admisible del sistema de Boussinesq y el resultado de existencia probado en [1].

En todo este capítulo vamos a considerar que el dominio Ω es todo \mathbb{R}^3 .

4.1. Existencia de solución débil admisible

Definición 4.1.1. *Supongamos que*

$$u_0 \in H, \quad \theta_0 \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad f \in L^2(0, T, H^{-1}(\mathbb{R}^3)^3) \quad y \quad g \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}^3)). \quad (4.1)$$

*Decimos que (u, p, θ) es una **solución débil admisible**, o simplemente una solución admisible, para el sistema de Boussinesq si se verifica que*

1 (Hipótesis de integrabilidad) *u, p, θ son funciones medibles en $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$ tales que:*

- $p \in L^{4/3}(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)) + L^4(\mathbb{R}^3)$.
- $u \in L^2(0, T; V) \cap C^0(0, T; H)$ y $u_t \in L^{4/3}(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}^3)^3)$.
- $\theta \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^3)) \cap C^0(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$ y $\theta_t \in L^{4/3}(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}^3))$.

2 (Ecuaciones) u, p, θ, f, g satisfacen las ecuaciones del sistema de Boussinesq en el sentido de las distribuciones en $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$.

3 (Generalización de las desigualdades de energía) Para cada función real $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$ con $\phi \geq 0$ tenemos que para todo $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} |u(\cdot, t)|^2 \phi + 2 \iint_{Q_t} |\nabla u|^2 \phi \\ \leq & \int_{\mathbb{R}^3} |u_0|^2 \phi(\cdot, 0) + \iint_{Q_t} (|u|^2(\phi_t + \Delta \phi) + (|u|^2 + 2p)u \cdot \nabla \phi) + 2 \int_0^t \langle f, u \phi \rangle d\tau + 2 \iint_{Q_t} \vec{K} u \theta \phi, \end{aligned} \quad (4.2)$$

y

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} |\theta(\cdot, t)|^2 \phi + 2 \iint_{Q_t} |\nabla \theta|^2 \phi \\ \leq & \int_{\mathbb{R}^3} |\theta_0|^2 \phi(\cdot, 0) + \iint_{Q_t} (|\theta|^2(\phi_t + \Delta \phi) + |\theta|^2 u \cdot \nabla \phi) + 2 \int_0^t \langle g, \theta \phi \rangle d\tau \end{aligned} \quad (4.3)$$

siendo $Q_t := \mathbb{R}^3 \times (0, t)$.

4 (Igualdad de energía) Para casi todo $t_0 \in [0, T]$ y para todo $t \geq t_0$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(\cdot, t)|^2 + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |u(\cdot, t_0)|^2 + 2 \int_{t_0}^t \langle f, u \rangle d\tau + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{K} u \theta, \quad (4.4)$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\theta(\cdot, t)|^2 + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \theta|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\theta(\cdot, t_0)|^2 + 2 \int_{t_0}^t \langle g, \theta \rangle d\tau. \quad (4.5)$$

Tras esta definición ya podemos dar el resultado principal de existencia.

Teorema 4.1.2. *Bajo las condiciones de la definición anterior, (4.1), existe al menos una solución débil admisible del sistema de Boussinesq.*

4.2. Regularidad parcial de la solución débil admisible

Para ver el resultado principal de regularidad parcial para el sistema de Boussinesq, antes vamos a dar la definición de punto singular.

Definición 4.2.1. Sea $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, T)$. Decimos que (x, t) es **singular** si la solución u no es L^∞_{loc} en ningún entorno de (x, t) . Análogamente, decimos que (x, t) es **regular** en caso contrario, es decir, si la solución u es localmente L^∞ en cualquier entorno de (x, t) .

Observemos que esta definición es exactamente igual a la definición para las ecuaciones de Navier-Stokes; esto es, porque como ya hemos mencionado la variable θ es regular en todo su dominio por ser solución de una ecuación del calor. Luego no introduce ningún punto singular "nuevo" en el sistema.

Así tenemos el siguiente resultado que estima la medida unidimensional de Hausdorff para el sistema de Boussinesq. Llamemos S al conjunto de puntos singulares entonces

Teorema 4.2.2. Supongamos que estamos bajo las condiciones (4.1). Si además, se cumple que $f \in L^{5/2}_{loc}(Q_T)$, $\nabla \dot{f} = 0$, $g = 0$ y $\theta_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ entonces existe al menos una solución débil del sistema de Boussinesq que verifica:

- (a) $\theta \in L^\infty(Q_T)$ y $\|\theta\|_{L^\infty(Q_t)} \leq \|\theta_0\|_{L^\infty(Q_t)}$;
- (b) $p \in L^{5/3}(Q_T)$,
- (c) $\mathcal{H}^1(S) = 0$.

Vemos que en este caso no hemos exigido que en la definición de solución admisible p esté en $L^{5/3}(Q_T)$ pero aún así en el teorema probamos que efectivamente existe al menos una solución admisible con esa propiedad.

También podemos observar que para este teorema nos hemos restringido únicamente al caso en que g sea idénticamente nula, pero podríamos preguntarnos qué ocurre cuando la función g no es nula, si en dicho caso se sigue teniendo que S tiene medida unidimensional de Hausdorff 0. Con respecto a esta pregunta podemos dar el siguiente resultado:

Teorema 4.2.3. Sea (u, θ) solución débil del sistema de Boussinesq que satisfacen la definición de solución admisible exceptuando las igualdades (4.2) y (4.3) dadas en 3. Si además, $u \in H$, $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^3 \cap L^1(\mathbb{R}^3))$ y $\|g(t)\| \leq C_1(1+t)^{-3/2}$. Entonces,

$$\|\theta(t)\|^2 \leq C(1+t)^{-5/2}.$$

Además si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$, $f \in L^1(0, +\infty; L^2(\mathbb{R}^3))$ y $\nabla \cdot f = 0$ entonces

$$\|u(t)\| \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow +\infty.$$

Como ya dijimos estos resultados no los vamos a probar aunque si se desea la prueba se encuentra en [1]. Aún así vamos a dar el siguiente teorema que es el que usan para probar tanto el teorema de existencia como el de regularidad parcial. Este resultado se basa en regularizar el sistema de Boussinesq introduciendo una penalización dependiente de un parámetro ε , de forma que se puede demostrar que el sistema penalizado posee soluciones fuertes y dichas soluciones convergen a una solución admisible del sistema de Boussinesq cuando ε tiende a 0.

Teorema 4.2.4. *Sea $\varepsilon > 0$, $u_{0,\varepsilon} \in W$, $\theta_{0,\varepsilon} \in H^2(\mathbb{R}^3)$, $f_\varepsilon \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^3)$, $g_\varepsilon \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^3)$. Entonces existe una única solución global fuerte $(u_\varepsilon, \nabla p_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$ del problema:*

$$\begin{cases} u_{\varepsilon,t} + \varepsilon \Delta^2 u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon = -\nabla p_\varepsilon + f_\varepsilon(x, t) + \vec{K} \theta_\varepsilon & \text{en } Q_T, \\ \nabla \cdot u_\varepsilon = 0 & \text{en } Q_T, \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_{0,\varepsilon}(x) & \text{en } \mathbb{R}^3, \\ \theta_{\varepsilon,t} + \varepsilon \Delta^2 \theta_\varepsilon - \Delta \theta_\varepsilon + u_\varepsilon \cdot \nabla \theta_\varepsilon = g_\varepsilon(x, t) & \text{en } Q_T, \\ \theta_\varepsilon(x, 0) = \theta_{0,\varepsilon}(x) & \text{en } \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (4.6)$$

Más aún, la solución $(u_\varepsilon, \nabla p_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$ satisface:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\in L^2(0, T; H^4(\mathbb{R}^3)^3 \cap W) \cap C^0(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; W), \\ \theta_\varepsilon &\in L^2(0, T; H^4(\mathbb{R}^3)^3) \cap C^0(0, T; L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(0, T; H^2(\mathbb{R}^3)), \\ \nabla p_\varepsilon &\in L^2(\mathbb{R}^3 \times (0, T)); \end{aligned}$$

siendo $W := \{v \in H^2(\mathbb{R}^3)^3 : \nabla \cdot v = 0\}$,

$$\begin{aligned} &\|u_\varepsilon\|_{C^0(0, T; H)}^2 + \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3)}^2 + 2\varepsilon \|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3)}^2 \\ &+ \|\theta_\varepsilon\|_{C^0(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))}^2 + \|\nabla \theta_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))}^2 + 2\varepsilon \|\Delta \theta_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))}^2 \\ &\leq C(T) (\|f_\varepsilon\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}^3)^3)}^2 + \|g_\varepsilon\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}^3))}^2) + C(T) (\|u_{0,\varepsilon}\|_H^2 + \|\theta_{0,\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2). \end{aligned}$$

Además para cualquier función ϕ no negativa de clase C^∞ con soporte compacto se tiene que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} |u_\varepsilon(t)|^2 \phi + 2 \iint_{Q_t} |\nabla u_\varepsilon|^2 \phi + 2\varepsilon \iint_{Q_t} |\Delta u_\varepsilon|^2 \phi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |u_{0,\varepsilon}|^2 \phi + \iint_{Q_t} (|u_\varepsilon|^2 (\phi_t + \Delta \phi) + (|u_\varepsilon|^2 + 2p_\varepsilon) u_\varepsilon \cdot \nabla \phi + 2(f_\varepsilon + \vec{K} \theta_\varepsilon) \cdot u_\varepsilon \phi) \\ &+ 4\varepsilon \|\nabla \phi\|_{L^\infty(Q_t)} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(Q_t)} \|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2(Q_t)} + 2\varepsilon \|\Delta \phi\|_{L^\infty(Q_t)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(Q_t)} \|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2(Q_t)}; \end{aligned}$$

y similarmente

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} |\theta_\varepsilon(t)|^2 \phi + 2 \iint_{Q_t} |\nabla \theta_\varepsilon|^2 \phi + 2\varepsilon \iint_{Q_t} |\Delta \theta_\varepsilon|^2 \phi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\theta_{0,\varepsilon}|^2 \phi + \iint_{Q_t} (|\theta_\varepsilon|^2 (\phi_t + \Delta \phi) + |\theta_\varepsilon|^2 u_\varepsilon \cdot \nabla \phi + 2g_\varepsilon \theta_\varepsilon \phi) \\ &+ 4\varepsilon \|\nabla \phi\|_{L^\infty(Q_t)} \|\nabla \theta_\varepsilon\|_{L^2(Q_t)} \|\Delta \theta_\varepsilon\|_{L^2(Q_t)} + 2\varepsilon \|\Delta \phi\|_{L^\infty(Q_t)} \|\theta_\varepsilon\|_{L^2(Q_t)} \|\Delta \theta_\varepsilon\|_{L^2(Q_t)}. \end{aligned}$$

Observemos que como existe una única solución global fuerte esto quiere decir que las igualdades de (4.6) se satisfacen puntualmente.

También, veamos que existe un único ∇p_ε puesto que la función p_ε no es única, salvo que impongamos una condición adicional sobre el valor de p_ε .

Así con la ayuda de este teorema y de la transformada de Fourier se consigue demostrar los resultados de regularidad parcial y existencia para el sistema de Boussinesq.

Con esto damos por terminado nuestro estudio de los resultados de regularidad para el sistema de Boussinesq.

Capítulo 5

Métodos numéricos de paso fraccionario para problemas de valores iniciales

Ahora vamos a pasar a estudiar métodos numéricos que nos sirven para aproximar las ecuaciones de Navier-Stokes. En concreto, vamos a ver los conocidos como métodos de tipo “splitting”, es decir, esquemas que tratan los términos no triviales de una ecuación por separado. Por ejemplo, en la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes nos encontramos con varios términos no triviales que necesitan un tratamiento especial como son:

- El momento de las ecuaciones es no lineal $(u \cdot \nabla)u$,
- La condición de incompresibilidad o de divergencia nula $\nabla \cdot u = 0$.

Así como veremos en lo que sigue usaremos una discretización de tipo “splitting” en tiempo que resolverá las dificultades anteriores, en particular, desacoplará el término no lineal de la condición de incompresibilidad.

El contenido de este capítulo está basado en el Capítulo 2 de [12] aunque también si se desea se puede encontrar en [2, 7, 17].

Para el desarrollo de los métodos numéricos consideraremos que la ecuación que deseamos aproximar es del tipo

$$\begin{cases} \varphi_t + A(\varphi, t) = 0, \\ \varphi(0) = \varphi_0. \end{cases} \quad (5.1)$$

donde para cada t dado A es un operador (posiblemente no lineal e incluso multievaluado) de un espacio de Hilbert H en sí mismo y $\varphi_0 \in H$.

Supongamos que A se puede descomponer de la siguiente manera $A = A_1 + A_2$, siendo A_1 y A_2 operadores más simples que A .

Así podemos ver que es mucho más natural establecer métodos numéricos para la ecuación usando la descomposición del operador estos son los métodos de tipo “splitting” que vemos a continuación.

5.1. Método de Peaceman-Rachford

Sea $dt > 0$ el paso de tiempo con el que discretizamos el intervalo $[0, T]$ en el que queremos resolver nuestro problema. Y denotamos por $\varphi^{n+\alpha}$ a la aproximación de la función φ en el tiempo $(n + \alpha)\Delta t$, siendo φ la solución del problema de valores iniciales (5.1).

La idea fundamental que ahí detrás del esquema de Peaceman-Rachford (introducida en [25]) es simple:

Dividimos el intervalo de tiempo $[0, T]$ en subintervalos del tipo $[n\Delta t, (n + 1)\Delta t]$, y a su vez cada subintervalo lo volvemos a dividir en dos intervalos usando el punto medio $(n + \frac{1}{2})\Delta t$.

Así conocido φ^n hallamos $\varphi^{n+1/2}$ usando un esquema de tipo backward Euler con respecto al operador A_1 y un esquema de tipo forward Euler con respecto a A_2 . Una vez esto, pasamos a aproximar de la misma forma φ^{n+1} conocido $\varphi^{n+1/2}$ invirtiendo los papeles de A_1 y A_2 .

Veamos como quedaría la programación de dicho esquema,

$$\varphi^0 = \varphi_0,$$

Conocido φ_n , para $n \geq 0$, computamos sucesivamente $\varphi^{n+1/2}$ y φ^{n+1} como sigue:

$$\frac{\varphi^{n+1/2} - \varphi^n}{\Delta t/2} + A_1\left(\varphi^{n+1/2}, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) + A_2(\varphi^n, n\Delta t) = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1/2}}{\Delta t/2} + A_1\left(\varphi^{n+1/2}, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) + A_2(\varphi^{n+1}, (n + 1)\Delta t) = 0. \quad (5.3)$$

La convergencia de este esquema está probada en [23] bajo una hipótesis más general de monotonía sobre los operadores A_1 y A_2 , de hecho, estos operadores pueden ser no lineales, no acotados e incluso multievaluados.

Así la convergencia no la estudiaremos puesto que necesita un desarrollo de teoría de operadores para ver que son no expansivos y algunas propiedades más. Pasaremos a estudiar de forma rápida la estabilidad y la precisión de este método. Para ello consideremos la situación más sencilla para el problema (5.1), es decir, tomamos $H = \mathbb{R}^N$, $\phi_0 \in \mathbb{R}^N$ y A una matriz de tamaño $N \times N$ simétrica, definida positiva e independiente de t . Con lo cual, la solución del sistema autónomo correspondiente viene dad por $\varphi(t) = e^{-At}\varphi_0$.

Si ahora queremos proyectar dicha solución sobre alguno de los vectores de la base de \mathbb{R}^N es obvio que quedaría: $\varphi_i(t) = e^{-\lambda_i t}\varphi_{0i}$ para $i = 1, 2, \dots, N$, siendo $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ los autovalores de la matriz A .

Con el objetivo de aplicar el esquema de Peaceman-Rachford, supongamos que la matriz A posee la siguiente descomposición $A = \alpha A + \beta A$ con $\alpha + \beta = 1$ y $0 < \alpha, \beta < 1$; y aplicando el esquema con $A_1 = \alpha A$ y $A_2 = \beta A$ tenemos que

$$\varphi^{n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2}\beta A\right)^{-1} \left(I - \frac{\Delta t}{2}\alpha A\right) \left(I + \frac{\Delta t}{2}\alpha A\right)^{-1} \left(I - \frac{\Delta t}{2}\beta A\right) \varphi^n,$$

siendo I la matriz identidad de orden N .

Si usamos ahora este razonamiento para φ_n y así sucesivamente llegamos a que

$$\varphi^{n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2}\beta A\right)^{-n-1} \left(I - \frac{\Delta t}{2}\alpha A\right)^{n+1} \left(I + \frac{\Delta t}{2}\alpha A\right)^{-n-1} \left(I - \frac{\Delta t}{2}\beta A\right)^{n+1} \varphi_0,$$

$$\varphi_i^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\Delta t}{2} \alpha \lambda_i}{1 + \frac{\Delta t}{2} \alpha \lambda_i} \right)^{n+1} \left(\frac{1 - \frac{\Delta t}{2} \beta \lambda_i}{1 + \frac{\Delta t}{2} \beta \lambda_i} \right)^{n+1} \varphi_{0i}.$$

De aquí podemos deducir que $|\varphi_i^{n+1}| \leq |\varphi_{0i}|$ para todo $i = 1, \dots, N$ y $n \geq 1$, puesto que $0 \leq |(1-a)/(1+a)| < 1$ para todo $a \geq 0$.

Con lo cual, el esquema de Peaceman-Rachford es incondicionalmente estable, al menos para este caso simple que hemos estudiado, además $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_i^n = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, N$.

Ahora vamos a estimar la precisión del método en este caso. Para ello consideramos la siguiente función,

$$R_1(\xi) = \left(\frac{1 - \frac{\xi}{2} \alpha}{1 + \frac{\xi}{2} \alpha} \right) \left(\frac{1 - \frac{\xi}{2} \beta}{1 + \frac{\xi}{2} \beta} \right).$$

Así si hacemos el desarrollo de Taylor para dicha función en un entorno del 0 tenemos que

$$R_1(\xi) = 1 - \xi + \frac{\xi^2}{2} - (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta) \frac{\xi^3}{4} + O(\xi^4)$$

y además

$$e^{-\xi} = 1 - \xi + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{6} + O(\xi^4).$$

Con esto podemos afirmar que nuestro esquema es al menos de segundo orden en tiempo para un par α, β de forma que $\alpha + \beta = 1$ y $0 < \alpha, \beta < 1$. De hecho, si tomamos $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ tenemos que $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = \frac{3}{16} = \frac{1}{6} + \frac{1}{48}$. Con lo cual, para esta elección de α y β podemos afirmar que el esquema es al menos de orden 3 en tiempo (pues $\frac{3}{16}$ es suficientemente pequeño comparado con $\alpha + \beta = 1$).

Además podemos observar que el método de Crank-Nicolson es un caso particular del esquema de Peaceman-Rachford tomando $A_1 = A$ y $A_2 = 0$ y aplicando el esquema y luego al contrario, como vemos a continuación,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{n+1/2} - \varphi^n}{\Delta t/2} + A\left(\varphi^{n+1/2}, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) &= 0, \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1/2}}{\Delta t/2} + A\left(\varphi^{n+1/2}, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) &= 0. \end{aligned}$$

O, equivalentemente, podemos escribir

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + A\left(\frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{2}, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) = 0,$$

y similarmente pero tomando $A_1 = 0$ y $A_2 = A$ podemos deducir que

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{n+1/2} - \varphi^n}{\Delta t/2} + A(\varphi^n, n\Delta t) &= 0, \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1/2}}{\Delta t/2} + A(\varphi^{n+1}, (n+1)\Delta t) &= 0. \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones tenemos que

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}[A(\varphi^n, n\Delta t) + A(\varphi^{n+1}, (n+1)\Delta t)] = 0.$$

Y este último esquema como el que obtuvimos en el caso $A_1 = A$ y $A_2 = 0$, ambos son de tipo Crank-Nicolson. Claramente son de segundo orden en tiempo si A es suficientemente regular y coinciden si el operador A es lineal.

Por último, antes de pasar a ver el siguiente esquema, queremos analizar el caso especial en que el operador A es de la forma $A(\varphi, t) = B(\varphi) + f(t)$, que es una situación bastante común. Así supongamos que el operador B lo podemos seguir descomponiendo como suma de dos operadores más simples B_1, B_2 . La pregunta que surge ahora de manera natural es cómo se trata el término $f(t)$, pues lo más razonable es usar el siguiente esquema de Peaceman-Rachford:

$$\varphi^0 = \varphi_0,$$

Conocido φ_n , para $n \geq 0$, computamos sucesivamente $\varphi^{n+1/2}$ y φ^{n+1} como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{n+1/2} - \varphi^n}{\Delta t/2} + B_1(\varphi^{n+1/2}) + B_2(\varphi^n) &= \frac{2}{3}f\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) + \frac{1}{3}f(n\Delta t), \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1/2}}{\Delta t/2} + B_1(\varphi^{n+1/2}) + B_2(\varphi^{n+1}) &= \frac{2}{3}f\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) + \frac{1}{3}f((n+1)\Delta t). \end{aligned}$$

Para el caso en que A_1 sea "feo" (discontinuo, multievaluado,...) podemos usar la siguiente variante del esquema de Peaceman-Rachford

$$\varphi^0 = \varphi_0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{n+1/2} - \varphi^n}{\Delta t/2} + A_1\left(\varphi^{n+1/2}, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) + A_2(\varphi^n, n\Delta t) &= 0, \\ \frac{\varphi^{n+1} - 2\varphi^{n+1/2} + \varphi^n}{\Delta t/2} + A_2(\varphi^{n+1}, (n+1)\Delta t) &= A_2(\varphi^n, n\Delta t). \end{aligned}$$

Con esto damos por concluido nuestro estudio de este esquema y pasamos a ver el siguiente esquema numérico.

5.2. Método de Douglas-Rachford

Ahora vamos a estudiar el método de Douglas-Rachford (véase [8]). Éste es una variante del esquema de Peaceman-Rachford, pues en este caso no se usa el punto medio sino que se considera una variante de la función φ en el punto $n+1$, como vemos a continuación,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi^0 = \varphi_0 \\ \frac{\tilde{\varphi}^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + A_1(\tilde{\varphi}^{n+1}, (n+1)\Delta t) + A_2(\varphi^n, n\Delta t) = 0, \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + A_1(\tilde{\varphi}^{n+1}, (n+1)\Delta t) + A_2(\varphi^{n+1}, (n+1)\Delta t) = 0. \end{array} \right. \quad (5.4)$$

De nuevo la convergencia de este método se puede ver demostrada en [23] bajo hipótesis generales de monotonía de los operadores A_1, A_2 .

Siguiendo el razonamiento que hicimos en la sección anterior vamos a pasar a estudiar la estabilidad y precisión del esquema para el caso simple en que $H = \mathbb{R}^N$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}^N$ y además, A es una matriz de orden $N \times N$, real, simétrica y definida positiva. Si de nuevo suponemos que A se puede descomponer como $A = \alpha A + \beta A$ con $\alpha + \beta = 1$ y $0 < \alpha, \beta < 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \varphi^{n+1} &= (I + \beta\Delta t A)^{-1}(I + \alpha\Delta t A)^{-1}(I + \alpha\beta\Delta t^2 A^2)\varphi^n, \\ \varphi^{n+1} &= \frac{(1 + \alpha\beta\Delta t^2 \lambda_i^2)^{n+1}}{(1 + \alpha\Delta t \lambda_i)^{n+1}(1 + \beta\Delta t \lambda_i)^{n+1}} \varphi_{0i}, \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Introducimos la siguiente función racional

$$R_2(\xi) = \frac{1 + \alpha\beta\xi^2}{(1 + \alpha\xi)(1 + \beta\xi)}.$$

Como $R_2(\xi) \in (0, 1)$ para todo $\xi > 0$, entonces podemos afirmar que

$$|\varphi_i^{n+1}| \leq |\varphi_i^0|, \quad \forall i = 0, 1, \dots, N-1, \quad n \geq 0.$$

Esto implica el esquema de Douglas-Rachford es incondicionalmente estable en este caso, y además se cumple que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_i^n = 0$, para todo $i = 1, \dots, N$.

Para estudiar la precisión del método, observemos que, razonando como en la sección anterior, en un entorno de $\xi = 0$ tenemos que

$$R_2(\xi) = 1 - \xi + \xi^2 + O(\xi^3),$$

lo que implica que el esquema de Douglas-Rachford es al menos de primer orden, usando también el desarrollo de Taylor de la función $e^{-\xi}$.

Observemos que a diferencia de lo que ocurría en el esquema de Peaceman-Rachford los papeles de A_1 y A_2 son no simétricos en el esquema de Douglas-Rachford. De aquí podemos deducir que de forma general el operador A_2 en este caso necesitará mejores propiedades de monotonía.

Una de las ventajas que tiene el esquema de Douglas-Rachford frente al de Peaceman-Rachford es que este esquema se puede generalizar de manera sencilla para el caso en que un operador A se descomponga como suma de más de dos operadores. Así supongamos que nuestro operador A es de la forma $A = \sum_{i=1}^r A_i$ para $I \geq 2$, entonces tomamos $\varphi^0 = \varphi_0$ y para $n \geq 0$

supongamos conocido φ^n y hallamos φ^{n+1} apoyándonos en $\varphi^{n+1/r}, \varphi^{n+2/r}, \dots, \varphi^{n+i/r}, \dots$, como sigue:

-Cálculo de $\varphi^{n+1/r}$

$$\frac{\varphi^{n+1/r} - \varphi^n}{\Delta t} + \frac{1}{r-1} A_1(\varphi^{n+1/r}, (n+1)\Delta t) + \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) A_1(\varphi^n, n\Delta t) + \sum_{j=2}^r A_j(\varphi^n, n\Delta t) = 0,$$

-Cálculo de $\varphi^{n+i/r}$ para i entre 2 y $r-1$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{n+i/r} - \varphi^n}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ \frac{1}{r-1} A_j(\varphi^{n+j/r}, (n+1)\Delta t) + \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) A_j(\varphi^n, n\Delta t) \right\} \\ + \frac{1}{r-1} A_i(\varphi^{n+i/r}, (n+1)\Delta t) + \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) A_i(\varphi^n, n\Delta t) \\ + \sum_{j=i+1}^r A_j(\varphi^n, n\Delta t) = 0, \end{aligned}$$

-Cálculo de φ^{n+1}

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{r-1} \left\{ \frac{1}{r-1} A_j(\varphi^{n+j/r}, (n+1)\Delta t) + \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) A_j(\varphi^n, n\Delta t) \right\} \\ + \frac{1}{r-1} A_r(\varphi^{n+1}, (n+1)\Delta t) + \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) A_r(\varphi^n, n\Delta t). \end{aligned}$$

Para este esquema $\varphi^{n+i/r}$ es una aproximación de la solución en el paso i de la computación del proceso, pero no es una aproximación de la solución φ en el tiempo $(n+i/r)\Delta t$.

Observemos que si tomamos en el esquema de Douglas-Rachford $A_1 = A$ y $A_2 = 0$ o $A_1 = 0$ y $A_2 = A$ tenemos el esquema backward de Euler.

Ahora vamos a estudiar el caso para el cual el operador A es de la forma $B(\varphi) + f(t)$ con B un operador que se puede escribir como $B = B_1 + B_2$ y f una función que se puede descomponer como $f = \alpha f + \beta f$ siendo $0 < \alpha, \beta < 1$ y $\alpha + \beta = 1$. Así el esquema de Douglas-Rachford quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \varphi^0 = \varphi_0 \\ \frac{\tilde{\varphi}^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + B_1(\tilde{\varphi}^{n+1}) + B_2(\varphi^n) = \alpha f((n+1)\Delta t) + \beta f(n\Delta t), \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + B_1(\tilde{\varphi}^{n+1}) + B_2(\varphi^{n+1}) = f((n+1)\Delta t), \end{cases}$$

donde la elección natural del par (α, β) es $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(1/2, 1/2)$.

Al igual que dijimos para el esquema de Peaceman-Rachford, este nuevo esquema también se puede adaptar para el caso en que el operador A_1 es "malo", en el sentido de que es

discontinuo, está multivaluado, ... En dicho caso podemos considerar el siguiente esquema de Peaceman-Rachford

$$\begin{cases} \varphi^0 = \varphi_0 \\ \frac{\tilde{\varphi}^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + A_1(\tilde{\varphi}^{n+1}, (n+1)\Delta t) + A_2(\varphi^n, n\Delta t) = 0, \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + A_2(\varphi^{n+1}, (n+1)\Delta t) = A_2(\varphi^n, n\Delta t). \end{cases}$$

5.3. El θ -esquema

Una vez estudiado el esquema de Douglas-Rachford y de Peaceman-Rachford vamos a ver un nuevo esquema. Éste es una variante del esquema de Peaceman-Rachford y fue introducido por Glowinski en 1985, véase [13].

Para este esquema consideramos un número θ del intervalo abierto $(0, \frac{1}{2})$, aunque en la práctica se suele tomar $\theta \in (0, \frac{1}{3})$. Así una vez fijado dicho número definimos el θ -esquema como sigue:

$$\varphi^0 = \varphi_0,$$

Conocido φ_n , para $n \geq 0$, computamos sucesivamente $\varphi^{n+\theta}$, $\varphi^{n+1-\theta}$ y φ^{n+1} como sigue:

$$\frac{\varphi^{n+\theta} - \varphi^n}{\theta\Delta t} + A_1(\varphi^{n+\theta}, (n+\theta)\Delta t) + A_2(\varphi^n, n\Delta t) = 0, \quad (5.5)$$

$$\frac{\varphi^{n+1-\theta} - \varphi^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} + A_1(\varphi^{n+\theta}, (n+\theta)\Delta t) + A_2(\varphi^{n+1-\theta}, (n+1-\theta)\Delta t) = 0, \quad (5.6)$$

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} + A_1(\varphi^{n+1}, (n+1)\Delta t) + A_2(\varphi^{n+1-\theta}, (n+1-\theta)\Delta t) = 0. \quad (5.7)$$

No confundamos este θ -esquema con otro θ -esquema que se puede considerar para el problema (5.1) que es como sigue:

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + \theta A(\varphi^{n+1}, (n+1)\Delta t) + (1-\theta)A(\varphi^n, n\Delta t) = 0.$$

Este último esquema se puede ver como el primer paso del esquema de Douglas-Rachford para un θ dado con $A_1 = \theta A$ y $A_2 = (1-\theta)A$.

Como ya hemos dicho nosotros no consideraremos este último sino que usaremos el esquema dado por las ecuaciones (5.5), (5.6) y (5.7).

Ahora consideremos de nuevo la situación en que $H = \mathbb{R}^N$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}^N$ siendo A una matriz real de orden $N \times N$, simétrica y definida positiva con $A = \alpha A + \beta A$ con α y β cumpliendo

las mismas condiciones que anteriormente. En lo que sigue denotaremos $\theta' = 1 - 2\theta$ y vamos a estudiar la estabilidad y precisión del esquema.

$$\varphi^{n+1} = (I + \alpha\theta\Delta tA)^{-2}(I - \beta\theta\Delta tA)^2(I + \beta\theta'\Delta tA)^{-1}(I - \alpha\theta'\Delta tA)\varphi^n,$$

que implica que

$$\varphi_i^{n+1} = \frac{(1 - \beta\theta\Delta t\lambda_i)^{2n}(1 - \alpha\theta'\Delta t\lambda_i)^n}{(1 + \alpha\theta\Delta t\lambda_i)^{2n}(1 + \beta\theta'\Delta t\lambda_i)^n} \varphi_{0i} \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Consideramos la función R_3 definida en

$$R_3(\xi) = \frac{(1 - \beta\theta\xi)^2(1 - \alpha\theta'\xi)}{(1 + \alpha\theta\xi)^2(1 + \beta\theta'\xi)}.$$

Así tenemos que, razonando de manera análoga a los casos anteriores, podemos deducir que $|R_3(\xi)| < 1$ si $0 < \beta < \alpha < 1$ y $\theta \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Luego para estos valores de α, β y θ tenemos que el esquema es incondicionalmente estable. Además, para el caso en que $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, el esquema es incondicionalmente estable para todo $\theta \in (0, \frac{1}{2})$. También es incondicionalmente estable en el caso en que $\theta \in [0, 0,087386, \frac{1}{3}]$ y $\alpha = (1 - 2\theta)/(1 - \theta)$ y $\beta = \theta/(1 - \theta)$.

Con respecto a la precisión del método usando de nuevo un desarrollo de Taylor,

$$R_3(\xi) = 1 - \xi + \frac{\xi^2}{2}(1 + (\beta - \alpha)(2\theta^2 - 4\theta + 1)) + O(\xi^3).$$

Podemos afirmar que el θ -esquema es de segundo orden en tiempo si y sólo si $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ y/o $\theta = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Si no se dan ninguna de estas condiciones entonces el θ -esquema es de primer orden en tiempo.

Observemos que, igual que pasaba en el caso de Douglas-Rachford, en el θ -esquema A_1 y A_2 tienen papeles no simétricos. Con lo cual, la elección natural para el operador A_1 es aquel operador que deje un problema más sencillo para resolver, es decir, aquel cuya resolución requiera menos tiempo.

También es fácil ver que si tomamos en el θ -esquema $A_1 = A$ y $A_2 = 0$ tenemos el esquema implícito de Runge-Kutta.

Ahora como ya hicimos en los esquemas anteriores vamos a estudiar el caso usual que es en el que el operador A se puede descomponer como $A(\varphi, t) = B(\varphi) - f(t)$, siendo $B = B_1 + B_2$. Así debemos considerar dos casos según los valores de θ :

(a) Si $\theta \neq 1 - 1/\sqrt{2}$ usamos:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{n+\theta} - \varphi^n}{\theta\Delta t} + B_1(\varphi^{n+\theta}) + B_2(\varphi^n) &= \frac{1}{2}(f((n+\theta)\Delta t) + f(n\Delta t)), \\ \frac{\varphi^{n+1-\theta} - \varphi^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} + B_1(\varphi^{n+1-\theta}) + B_2(\varphi^{n+\theta}) &= \frac{1}{2}(f((n+1-\theta)\Delta t) + f((n+\theta)\Delta t)), \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} + B_1(\varphi^{n+1}) + B_2(\varphi^{n+1-\theta}) &= \frac{1}{2}(f((n+1)\Delta t) + f((n+1-\theta)\Delta t)). \end{aligned}$$

(b) Si $\theta = 1 - 1/\sqrt{2}$ podemos usar o bien:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{n+\theta} - \varphi^n}{\theta\Delta t} + B_1(\varphi^{n+\theta}) + B_2(\varphi^n) &= f((n+\theta)\Delta t), \\ \frac{\varphi^{n+1-\theta} - \varphi^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} + B_1(\varphi^{n+1-\theta}) + B_2(\varphi^{n+\theta}) &= f((n+\theta)\Delta t), \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} + B_1(\varphi^{n+1}) + B_2(\varphi^{n+1-\theta}) &= f((n+1)\Delta t), \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{n+\theta} - \varphi^n}{\theta\Delta t} + B_1(\varphi^{n+\theta}) + B_2(\varphi^n) &= f(n\Delta t), \\ \frac{\varphi^{n+1-\theta} - \varphi^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} + B_1(\varphi^{n+1-\theta}) + B_2(\varphi^{n+\theta}) &= f((n+1-\theta)\Delta t), \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} + B_1(\varphi^{n+1}) + B_2(\varphi^{n+1-\theta}) &= f((n+1-\theta)\Delta t). \end{aligned}$$

Para terminar el desarrollo de esta parte, vamos a ver por último el esquema modificado para el caso en que el operador A_1 sea mu "malo", en el sentido en que ya mencionamos anteriormente. Para este caso podemos escribir el siguiente θ -esquema:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{n+\theta} - \varphi^n}{\theta\Delta t} + A_1(\varphi^{n+\theta}, (n+\theta)\Delta t) + A_2(\varphi^n, n\Delta t) &= 0, \\ \frac{\theta\varphi^{n+1-\theta} - (1-\theta)\varphi^{n+\theta} + (1-2\theta)\varphi^n}{\theta(1-2\theta)\Delta t} + A_2(\varphi^{n+1-\theta}, (n+1-\theta)\Delta t) &= A_2(\varphi^n, n\Delta t), \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} + A_1(\varphi^{n+1}, (n+1)\Delta t) + A_2(\varphi^{n+1-\theta}, (n+1-\theta)\Delta t) &= 0. \end{aligned}$$

Con esto acabamos el desarrollo teórico de los esquemas y pasamos a aplicar estos métodos a las ecuaciones de Navier-Stokes y al sistema de Boussinesq y después añadiremos algunas simulaciones de estos esquemas.

5.4. Aplicación a las ecuaciones de Navier-Stokes

Aunque en esta sección sólo vamos a ver cómo quedaría el θ -esquema para las ecuaciones de Navier-Stokes, también podríamos implementar cualquiera de los otros dos métodos estudiados anteriormente de manera completamente análoga a este caso.

Así consideramos las ecuaciones de Navier-Stokes con condición de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot u = 0, \text{ en } \Omega \times (0, T) \\ u(0) = u_0, \text{ con } \nabla \cdot u_0 = 0, \text{ en } \Omega, \\ u = g_0 \text{ sobre } \Gamma_0 \times (0, T), \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} - \gamma p = g_1 \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0, T), \end{array} \right. \quad (5.8)$$

siendo $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ con $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ y γ el vector normal exterior a la frontera. Para el caso en que $\Gamma_1 = \emptyset$ necesariamente debe ocurrir que $\int_{\Gamma} g_0 \gamma d\Gamma = 0$.

Con lo cual eligiendo α y β tales que $0 < \alpha, \beta < 1$ y $\alpha + \beta = 1$, y asociándole al operador A_1 el término de la presión, y al operador A_2 el término no lineal, tenemos que el θ -esquema para este sistema quedaría de la forma:

$$u^0 = u_0,$$

para $n \geq 0$, conocido u^n computamos $u^{n+\theta}$ y $p^{n+\theta}$ como sigue:

$$\frac{u^{n+\theta} - u^n}{\theta\Delta t} - \alpha\nu\Delta u^{n+\theta} + \nabla p^{n+\theta} = f^{n+\theta} + \beta\nu\Delta u^n - (u^n \cdot \nabla)u^n,$$

$$\nabla \cdot u^{n+\theta} = 0,$$

$$u^{n+\theta} = g_0^{n+\theta}, \text{ sobre } \Gamma_0,$$

$$\alpha\nu \frac{\partial u^{n+\theta}}{\partial n} - \gamma p^{n+\theta} = g_1^{n+\theta} - \beta\nu \frac{\partial u^n}{\partial n}, \text{ sobre } \Gamma_1.$$

Una vez realizado este paso pasamos al siguiente en el que computamos $u^{n+1-\theta}$:

$$\frac{u^{n+1-\theta} - u^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} - \beta\nu\Delta u^{n+1-\theta} + (u^{n+1-\theta} \cdot \nabla)u^{n+1-\theta} = f^{n+\theta} + \alpha\nu\Delta u^{n+\theta} - \nabla p^{n+\theta},$$

$$u^{n+1-\theta} = g_0^{n+1-\theta}, \text{ sobre } \Gamma_0,$$

$$\beta\nu \frac{\partial u^{n+1-\theta}}{\partial n} = g_1^{n+1-\theta} - \alpha\nu \frac{\partial u^n}{\partial n} + \gamma p^{n+\theta}, \text{ sobre } \Gamma_1.$$

Ahora ya consideramos el último paso del esquema en el que computamos u^{n+1} y p^{n+1} ,

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} - \alpha\nu\Delta u^{n+1} + \nabla p^{n+1} = f^{n+1} + \beta\nu\Delta u^{n+1-\theta} - (u^{n+1-\theta} \cdot \nabla)u^{n+1-\theta},$$

$$\nabla \cdot u^{n+1} = 0,$$

$$u^{n+1} = g_0^{n+1}, \text{ sobre } \Gamma_0,$$

$$\alpha\nu \frac{\partial u^{n+1}}{\partial n} - \gamma p^{n+1} = g_1^{n+1} - \beta\nu \frac{\partial u^{n+1-\theta}}{\partial n}, \text{ sobre } \Gamma_1.$$

Con esto tendríamos ya computado nuestro θ -esquema.

Observemos que tanto $u^{n+\theta}$ y $p^{n+\theta}$ como u^{n+1} y p^{n+1} resuelven un problema lineal de tipo muy parecido al problema de Stokes, en cambio, para el término $u^{n+1-\theta}$ debemos resolver un problema no lineal.

Debemos escoger $\alpha = (1-2\theta)/(1-\theta)$ y $\beta = \theta/(1-\theta)$ de forma que así nuestros subproblemas, tanto los lineales como el no lineal, usan la menor cantidad de memoria posible. Conforme a la elección de θ los experimentos numéricos muestran que la mejor elección es tomar $\theta = 1 - 1/\sqrt{2}$ pues parece que produce mejores resultados incluso cuando el número de Reynolds es muy grande.

Además los experimentos numéricos muestran que prácticamente no perdemos generalidad si en el problema no lineal aproximamos el término no lineal, $(u^{n+1-\theta} \cdot \nabla)u^{n+1-\theta}$, por el término lineal $(u^{n+\theta} \cdot \nabla)u^{n+1-\theta}$. Esto último en la práctica es muy importante porque como vemos pasamos de tener que resolver un problema no lineal a resolver un problema lineal que es más sencillo.

5.5. Aplicación al sistema de Boussinesq

Ahora en esta sección vamos a desarrollar de forma análoga la computación del θ -esquema para el sistema de Boussinesq. Del mismo modo que dijimos en la sección anterior podemos considerar cualquiera de los otros dos métodos numéricos para aproximar este sistema, ambos se computan de manera análoga.

Así consideramos las ecuaciones de Boussinesq con condición de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f + \vec{K}\theta \text{ en } Q, \\ \nabla u = 0 \text{ en } Q, \\ \theta_t + u \cdot \nabla \theta - \kappa \Delta \theta = g \text{ en } Q, \\ u(0) = u_0, \theta(0) = \theta_0 \text{ en } \Omega, \\ u = g_0 \text{ sobre } \Gamma_0 \times (0, T), \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} - \gamma p = g_1 \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \theta = h_0 \text{ sobre } \Sigma. \end{array} \right. \quad (5.9)$$

siendo $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ con $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ y γ el vector normal exterior a la frontera. Para el caso en que $\Gamma_1 = \emptyset$ necesariamente debe ocurrir que $\int_{\Gamma} g_0 \gamma d\Gamma = 0$.

Con lo cual eligiendo α y β tales que $0 < \alpha, \beta < 1$ y $\alpha + \beta = 1$, y asociándole al operador A_1 el término de la presión, y al operador A_2 el término no lineal, tenemos que el θ -esquema para este sistema quedaría de la forma:

$$u^0 = u_0, \theta^0 = \theta_0$$

para $n \geq 0$, conocido u^n, θ^n computamos $u^{n+\theta}, \theta^{n+\theta}$ y $p^{n+\theta}$ como sigue:

$$\frac{u^{n+\theta} - u^n}{\theta \Delta t} - \alpha \nu \Delta u^{n+\theta} + \nabla p^{n+\theta} - \vec{K}\theta^{n+\theta} = f^{n+\theta} + \beta \nu \Delta u^n - (u^n \cdot \nabla)u^n,$$

$$\nabla \cdot u^{n+\theta} = 0,$$

$$\frac{\theta^{n+\theta} - \theta^n}{\theta \Delta t} - \kappa \Delta \theta^{n+\theta} + u^{n+\theta} \cdot \nabla \theta^{n+\theta} = g^{n+\theta},$$

$$u^{n+\theta} = g_0^{n+\theta}, \text{ sobre } \Gamma_0,$$

$$\alpha \nu \frac{\partial u^{n+\theta}}{\partial n} - \gamma p^{n+\theta} = g_1^{n+\theta} - \beta \nu \frac{\partial u^n}{\partial n}, \text{ sobre } \Gamma_1,$$

$$\theta^{n+\theta} = h_0^{n+\theta}, \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Una vez realizado este paso pasamos al siguiente en el que computamos $u^{n+1-\theta}$ y $\theta^{n+1-\theta}$:

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1-\theta} - u^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} - \beta\nu\Delta u^{n+1-\theta} + (u^{n+1-\theta} \cdot \nabla)u^{n+1-\theta} - \vec{K}\theta^{n+1-\theta} &= f^{n+\theta} + \alpha\nu\Delta u^{n+\theta} - \nabla p^{n+\theta}, \\ \frac{\theta^{n+1-\theta} - \theta^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} - \kappa\Delta\theta^{n+1-\theta} + u^{n+1-\theta} \cdot \nabla\theta^{n+1-\theta} &= g^{n+1-\theta}, \\ u^{n+1-\theta} &= g_0^{n+1-\theta}, \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \beta\nu\frac{\partial u^{n+1-\theta}}{\partial n} &= g_1^{n+1-\theta} - \alpha\nu\frac{\partial u^n}{\partial n} + \gamma p^{n+\theta}, \text{ sobre } \Gamma_1, \\ \theta^{n+\theta} &= h_0^{n+\theta}, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ahora ya consideramos el último paso del esquema en el que computamos u^{n+1} , θ^{n+1} , y p^{n+1} ,

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} - \alpha\nu\Delta u^{n+1} + \nabla p^{n+1} - \vec{K}\theta^{n+1} &= f^{n+1} + \beta\nu\Delta u^{n+1-\theta} - (u^{n+1-\theta} \cdot \nabla)u^{n+1-\theta}, \\ \nabla \cdot u^{n+1} &= 0, \\ \frac{\theta^{n+1} - \theta^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} - \kappa\Delta\theta^{n+1} + u^{n+1} \cdot \nabla\theta^{n+1} &= g^{n+1}, \\ u^{n+1} &= g_0^{n+1}, \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \alpha\nu\frac{\partial u^{n+1}}{\partial n} - \gamma p^{n+1} &= g_1^{n+1} - \beta\nu\frac{\partial u^{n+1-\theta}}{\partial n}, \text{ sobre } \Gamma_1, \\ \theta^{n+1} &= h_0^{n+1}, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Con esto tendríamos ya computado nuestro θ -esquema.

Observemos que ahora nuestros subproblemas se han complicado porque en todos ellos tenemos que resolver sistemas no lineales; Aunque comparándolo con el sistema inicial, (5.9), sí que es cierto que se ha simplificado puesto que ese teníamos dos términos no lineales y ahora sólo tenemos un término no lineal en cada problema.

En este caso cabe esperar que de nuevo lo mejor sea escoger $\alpha = (1-2\theta)/(1-\theta)$ y $\beta = \theta/(1-\theta)$ para intentar así reducir la memoria usada al resolver, Conforme a la elección de θ esperamos que la mejor elección sea tomar $\theta = 1 - 1/\sqrt{2}$.

Lo ideal en la práctica sería que pudiéramos linealizar el esquema de forma que no perdamos generalidad. Para ello la linealización más natural que se nos puede ocurrir es sustituir en la primera fase de la computación, el término $u^{n+\theta} \cdot \nabla\theta^{n+\theta}$ por el término lineal $u^n \cdot \nabla\theta^{n+\theta}$. Además con este cambio conseguiríamos desacoplar el sistema. En el segundo paso de la computación podríamos cambiar el término $(u^{n+1-\theta} \cdot \nabla)u^{n+1-\theta}$, por $(u^{n+\theta} \cdot \nabla)u^{n+1-\theta}$. Y en el último paso haríamos un cambio análogo al primero, cambiaríamos $u^{n+1} \cdot \nabla\theta^{n+1}$ por el término lineal $u^{n+1-\theta} \cdot \nabla\theta^{n+1}$. Con estos cambios pasaríamos a tener tres subsistemas lineales con dos de ellos desacoplados luego se simplificaría bastante la resolución.

Con esto acabamos la aplicación de nuestros métodos numéricos a las ecuaciones de Navier-Stokes y al sistema de Boussinesq y ya podemos pasar a desarrollar el último punto de este capítulo en el que veremos algunas simulaciones de estos problemas.

5.6. Simulaciones

Por último en esta sección añadiremos algunas de las simulaciones realizadas mediante el programa *FreeFrem++*.

Comencemos viendo una solución aproximada de Navier-Stokes usando el esquema de Peaceman-Rachford en un dominio en el que hay un obstáculo (ala de avión), siendo $\nu = 0,0025$ (coeficiente de Reynolds 400) y $\Delta t = 0,2$.

Así el problema que se resuelve es

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f \text{ en } Q, \\ \nabla \cdot u = 0 \text{ en } Q, \\ u = g \text{ sobre } \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ en } \Omega, \end{cases} \quad (5.10)$$

donde $\Omega := \mathcal{O} \setminus \overline{B}$ (\mathcal{O} es una sección convexa acotada de todo \mathbb{R}^2 y B es un abierto convexo acotado que representa el perfil de un cuerpo aerodinámico). La función f es $f = k \vec{e}_2$ es la fuerza de la gravedad, $g = 0$ sobre $\partial B \times (0, T)$ y $g = u_{00}$ un vector constante sobre $\partial \mathcal{O} \times (0, T)$. En este caso hemos tomado el vector $u_{00} = [\cos(20 * \pi/180), \sin(20 * \pi/180)]^t$. Además la función u_0 verifica que $u_0 \in H^1(\Omega)^2$ y $\nabla \cdot u_0 = 0$, en este caso $u_0 = u_{00}$.

Para los problemas discretizados en tiempo, se ha usado:

- (a) La aproximación usual $\mathbb{P}_1 - burbuja$ para la velocidad y \mathbb{P}_1 para la presión; para los problemas de tipo Stokes, véase [13].
- (b) La aproximación \mathbb{P}_2 -Lagrange habitual para los problemas elípticos no lineales, véase [2].

Gráfica de u_x

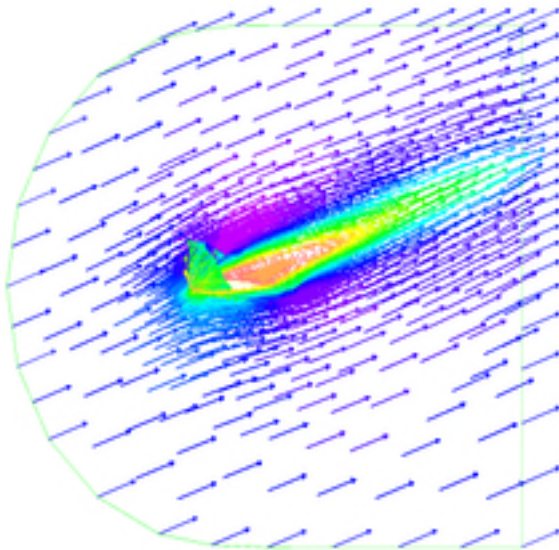


Figura 5.1: Campo de velocidad en el tiempo final.

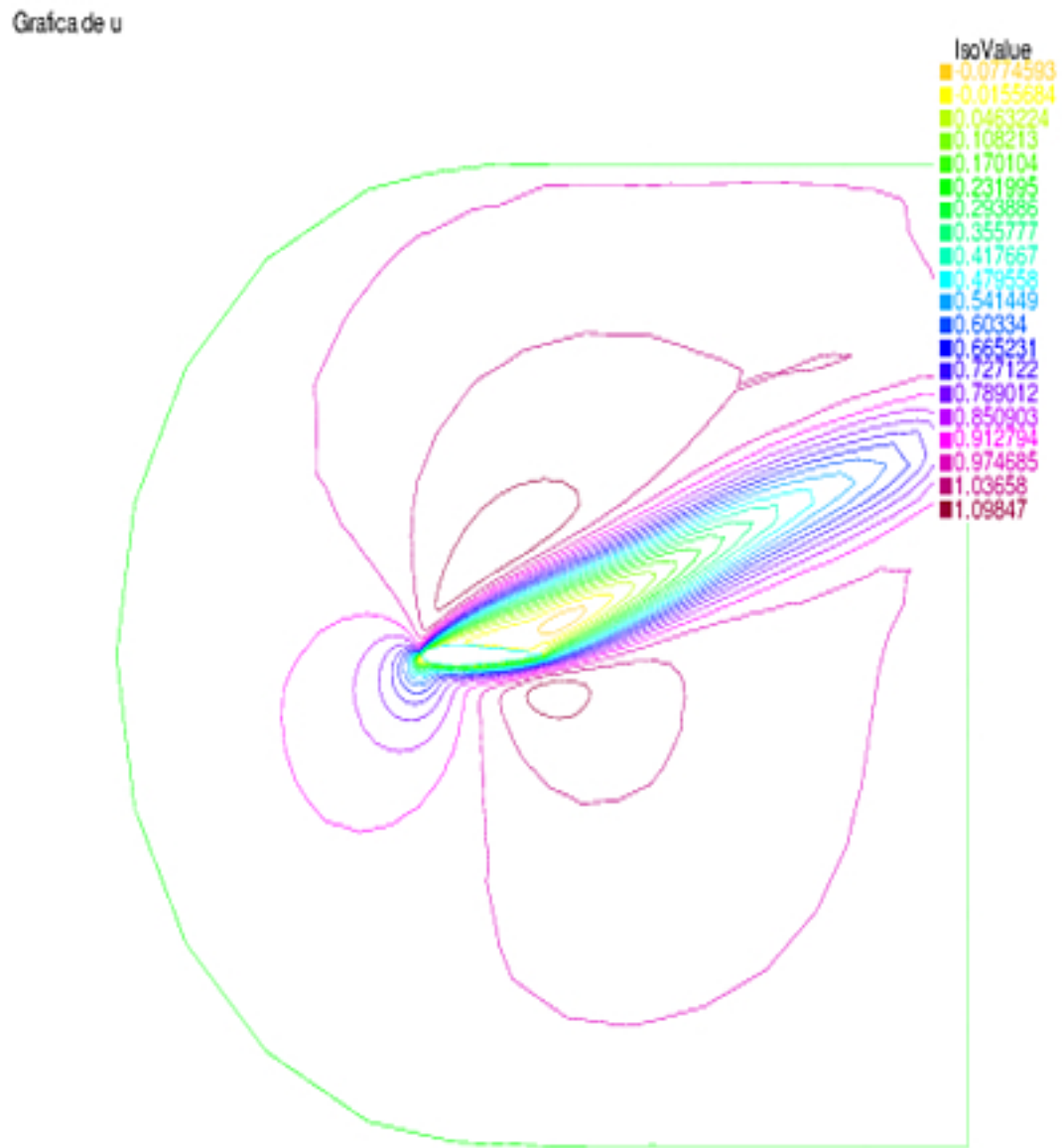


Figura 5.2: Primera componente de la velocidad en el tiempo final.

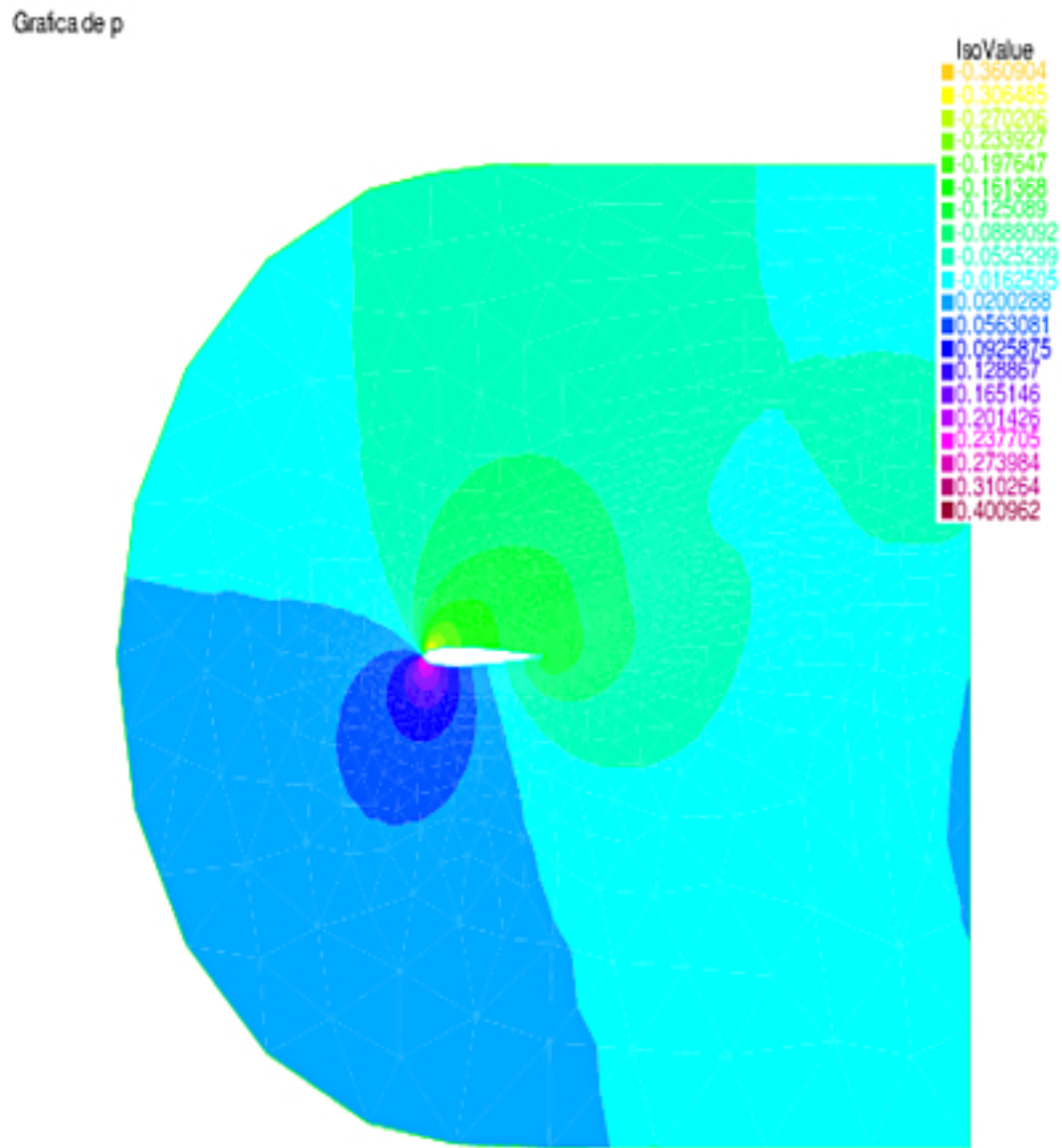


Figura 5.3: Presión en el tiempo final.

Ahora introduciremos también las simulaciones para el problema anterior (con $u_0 = u_{00} = [\cos(10 * \pi/180), \sin(10 * \pi/180)]^t$) usando el esquema de Strang, que es un θ -esquema con $\theta = 0,25$. Así tenemos que tomando $\nu = 0,0025$, y $\Delta t = 0,1$; con coeficiente de Reynolds 400,

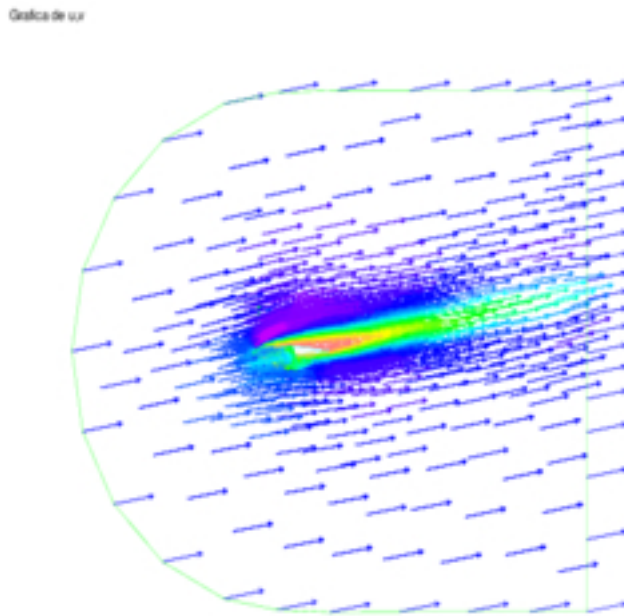


Figura 5.4: Campo de velocidad en el tiempo final.

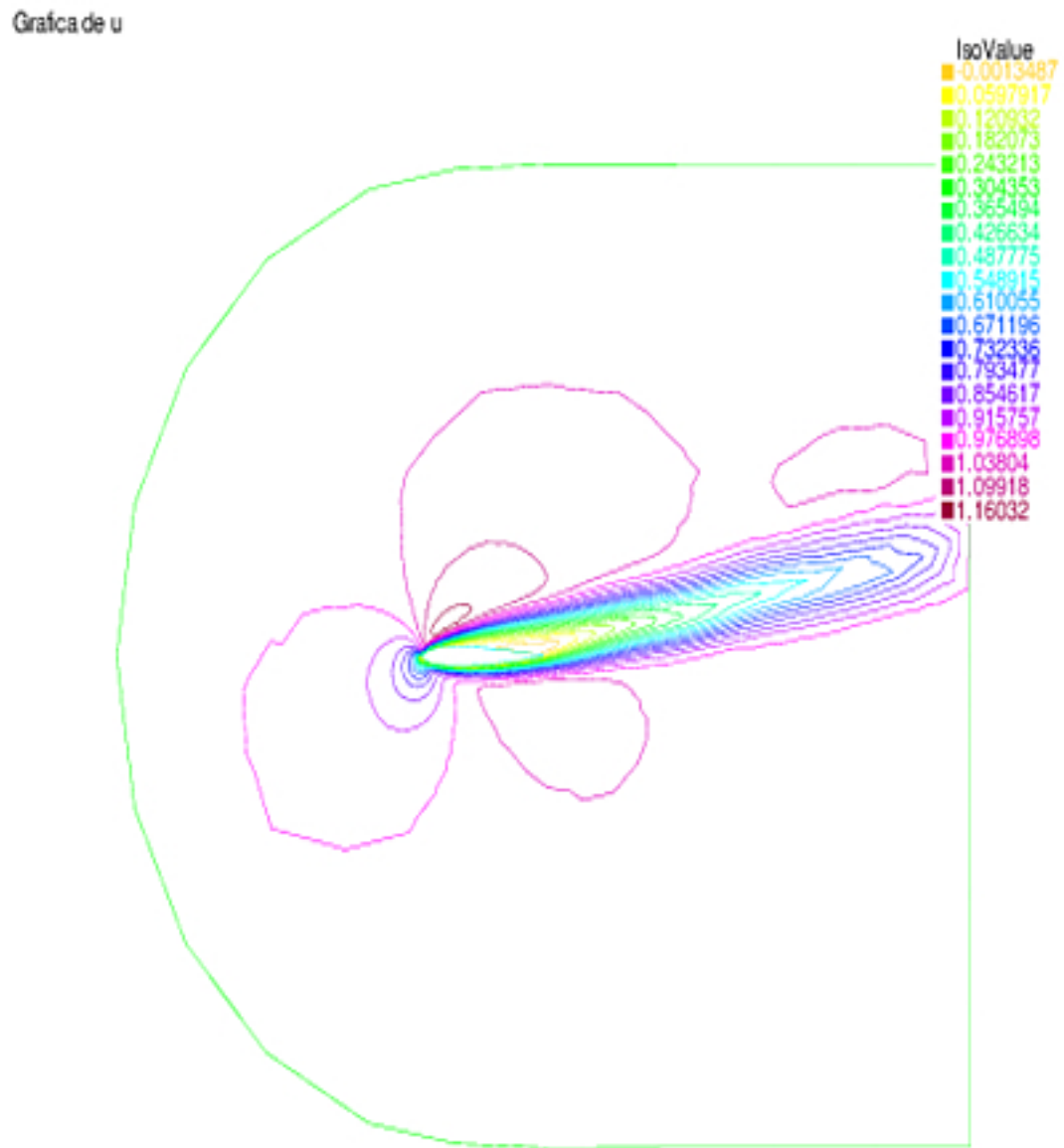


Figura 5.5: Primera componente de la velocidad en el tiempo final.

Gráfica de p

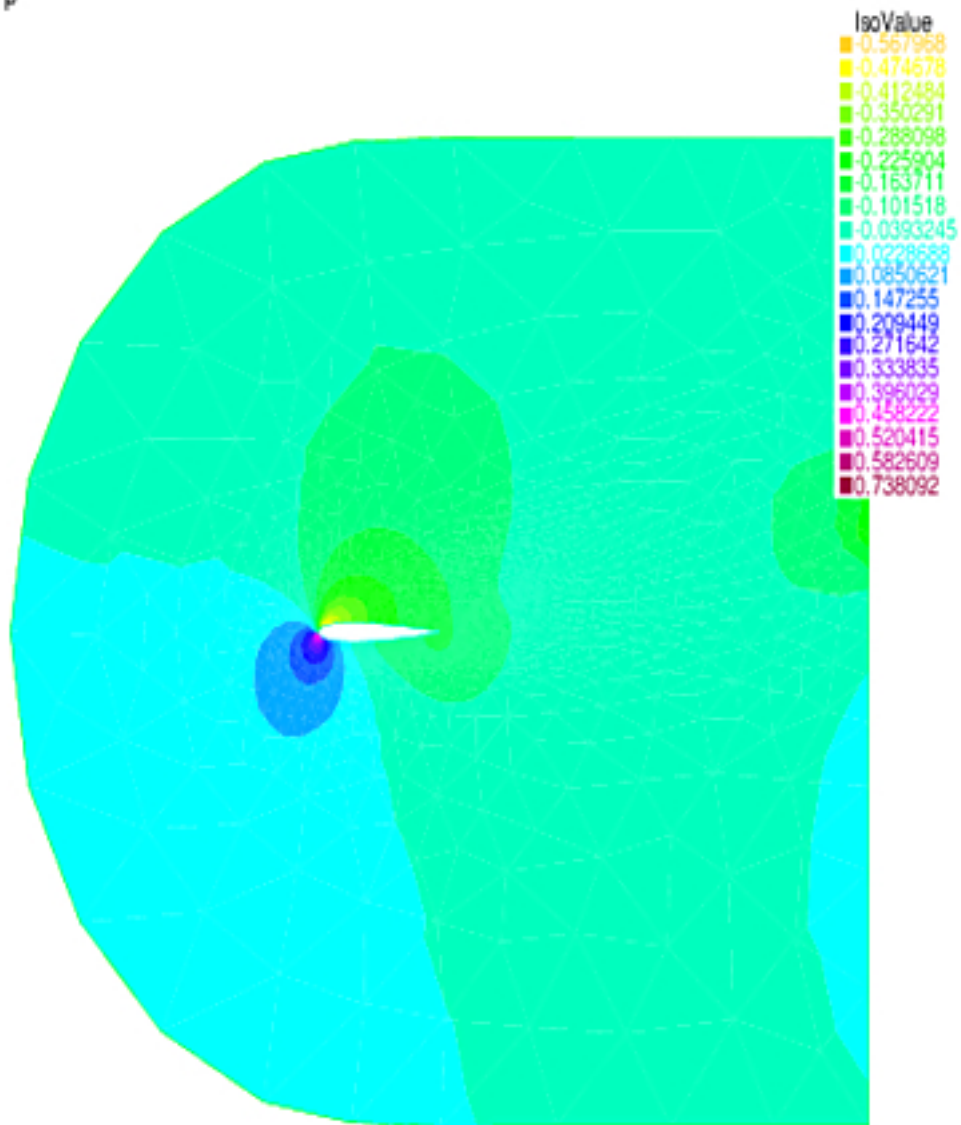


Figura 5.6: Presión en el tiempo final.

Capítulo 6

Un problema de control para las ecuaciones de Navier-Stokes

En este capítulo vamos a desarrollar el análisis y la aproximación numérica de un problema de control óptimo (frontera) para las ecuaciones de Navier-Stokes en el caso bidimensional. Para ello nos basaremos en la Sección 6.3 de [14].

Así estudiaremos la existencia de soluciones óptimas y daremos el sistema de optimalidad que estas soluciones óptimas deben cumplir. También haremos una semidiscretización en tiempo y una discretización en espacio para aproximar el sistema de optimalidad.

6.1. El problema de control

Comencemos estudiando cuál es el problema de control asociado que vamos a estudiar.

Así consideramos las ecuaciones de Navier-Stokes para un dominio bidimensional Ω acotado con frontera regular Γ en el intervalo de tiempo $[0, T]$ para un cierto $T > 0$; tenemos que el problema de control es:

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u = g & \text{sobre } \Gamma_c \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sobre } (\Gamma \setminus \Gamma_c) \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (6.1)$$

siendo $\Gamma_c \subset \Gamma$ la parte de la frontera sobre la que ejercemos el control.

Observemos que el control g debe satisfacer las siguientes condiciones de compatibilidad:

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_c} g \cdot n \, dx = 0, \\ g|_{t=0} = u_0|_{\Gamma_c}, \end{cases} \quad (6.2)$$

donde n denota el vector normal a lo largo de Γ .

Es decir, exigimos que el control tenga un flujo de masas nulo sobre la frontera en la que ejercemos el control y que además este control coincida con el dato inicial en el instante $t = 0$. La primera condición es necesaria debido a la incompresibilidad del fluido y la segunda condición se debe a que buscamos que la solución de Navier-Stokes sea suficientemente regular.

Así la formulación del problema de control óptimo es:

Hallar un control g sobre la frontera y un vector velocidad u tales que el coste del funcional:

$$J(u, g) := \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |u - U|^2 + \frac{\beta}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_c} (|g|^2 + \beta_1 |g_t|^2 + \beta_2 |g_x|^2) \quad (6.3)$$

sea mínimo sujeto a que (u, g) satisfacen (6.1)-(6.2).

Donde $\alpha, \beta, \beta_1, \beta_2$ son constantes positivas. El primer término es, en realidad, el término que queremos minimizar; los otros términos han sido introducidos para acotar el control y probar la existencia de uno óptimo. Así, podemos manejar el tamaño del control gracias a los coeficientes β, β_1 y β_2 .

6.2. Formulación y análisis de un problema de control óptimo

En lo que sigue consideraremos los siguientes espacios

$$L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q = 0\},$$

$$H^{r,s}(Q) := L^2(0, T; H^r(\Omega)) \cap H^s(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$\text{curl}(H^2)(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega) : \nabla \cdot v = 0, \int_{\Gamma} v \cdot n = 0 \right\},$$

$$H_n^1(\Gamma) := \left\{ g \in H^1(\Gamma) : \int_{\Gamma} g \cdot n = 0 \right\},$$

$$H_{n0}^1(\Gamma_c) := H_0^1(\Gamma_c) \cap H_n^1(\Gamma_c).$$

Si tomamos Ω acotado de \mathbb{R}^2 con frontera $\Gamma \in \mathcal{C}^2$. Sean $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ y $p \in L^2(0, T; L_0^2(\Omega))$, también llamadas las **variables de estado**. Sea $g \in L^2(0, T; H_{n0}^1(\Gamma_c))$ con $g_t \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_c))$. Entonces las variables de estado verifican la formulación débil de problema de Navier-Stokes correspondiente, es decir, para casi todo t en $[0, T]$ tenemos:

$$\begin{cases} \langle u_t, v \rangle + a(u, v) + b(u, u, v) + c(v, p) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ c(u, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ (u, s)_{\Gamma} = (g, s)_{\Gamma_c} \quad \forall s \in H^{-1/2}(\Gamma), \\ u(0) = u_0 \in \text{curl}(H^2)(\Omega), \end{cases} \quad (6.4)$$

siendo $a(\cdot, \cdot)$ y $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ los operadores ya estudiados en el Capítulo 1 y

$$c(v, p) := - \int_{\Omega} q \nabla \cdot v \, dx.$$

Podemos dar el siguiente teorema que bajo ciertas hipótesis sobre el control podemos asegurar la existencia y unicidad de las variables de estado.

Teorema 6.2.1. *Sea $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un dominio abierto, acotado con frontera Γ de clase \mathcal{C}^2 . Entonces si el control g cumple que:*

$$g \in H^{1/2,1}(\Sigma), \quad (6.5)$$

$$\int_{\Gamma} g \cdot n = 0 \quad (6.6)$$

$$g(0) = u_0|_{\Gamma}, \quad (6.7)$$

existe una única $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ y una única $p \in L^2(0, T; L_0^2(\Omega))$ que resuelven el problema de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \langle u_t, v \rangle + a(u, v) + b(u, u, v) + c(v, p) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ c(u, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ u = g \text{ sobre } \Gamma, \\ u(0) = u_0 \in \text{curl}(H^2)(\Omega), \end{cases} \quad (6.8)$$

en casi todo $t \in (0, T)$. Más aún,

$$\|u\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 + \|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq C(\|g\|_{H^{1/2,1}(\Sigma)}^2 + \|u_0\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2),$$

donde C es una constante que depende de g .

Así podemos pasar a definir lo que entenderemos por **conjunto de soluciones admisibles** A_d como

Definición 6.2.2. *Dado $T > 0$, $u_0 \in \text{curl}(H^2)(\Omega)$ y $U \in U_{ad} := \{U(x, t) \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^1(\Omega)) : U_t - \nu \nabla^2 U + (U \cdot \nabla)U \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))\}$. Entonces (u, p, g) es una **solución admisible** para el problema de control óptimo si $(u, p, g) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(0, T; L_0^2(\Omega)) \times H^{1,1}(\Gamma_c \times (0, T)) \cap L^2(0, T; H_{n_0}^1(\Gamma_c))$ es solución de (6.4), el control g satisface las condiciones de compatibilidad (6.6) y (6.7) y $J(u, g)$ es finito.*

El problema de control puede ser formulado así:

Dados $u_0 \in \text{curl}(H^2)(\Omega)$ y $U \in U_{ad}$ encontrar $(u, p, g) \in A_d$ tal que el control g minimiza el coste del funcional

$$J(u, g) = \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (u - U)^2 + \frac{\beta}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_c} (g^2 + \beta_1 g_x^2 + \beta_2 g_t^2) \quad (6.9)$$

con $\alpha, \beta, \beta_1, \beta_2 > 0$.

Pasemos a ver que dicho problema de control está bien planteado y posee solución.

Teorema 6.2.3. *Dados $T > 0$ y $u_0 \in \text{curl}(H^2)(\Omega)$, existe una solución $(u, p, g) \in A_d$ del problema de control (6.9).*

Continuemos viendo cuál es la derivada de Gateaux del funcional J y qué condiciones debemos dar para que exista en toda dirección h . Para ello consideremos el conjunto

$$G := \{g \in H^{1,1}(\Sigma) \cap L^2(0, T; H_{n_0}^1(\Gamma)) \text{ cumpliendo las condiciones (6.6) – (6.7)}\}.$$

Teorema 6.2.4. *Dados $\Omega \in \mathcal{C}^2$, $u_0 \in \text{curl}(H^2)$ y $g \in G$, la aplicación*

$$u(g) : G \rightarrow L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

tiene derivada de Gateaux $u_g \cdot h$ en toda dirección $h \in H^{1,1}(\Sigma) \cap L^2(0, T; H_{n_0}^1(\Gamma))$ con $h = 0$ en $t = 0$. Además, $w(h) = u_g \cdot h \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ es la solución del problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle w_t, v \rangle + a(w, v) + b(u, w, v) + c(v, p_1) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ c(w, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ (w, s) = (h, s) \quad \forall s \in H^{-1/2}(\Gamma), \\ w(0) = 0 \text{ en } \Omega. \end{array} \right. \quad (6.10)$$

Teorema 6.2.5. *Si (u, p, g) es una solución óptima para (6.9) entonces la derivada de Gateaux del funcional J se anula en (u, p, g) .*

Ahora veremos el sistema adjunto linealizado y un resultado de existencia de solución para dicho sistema.

Teorema 6.2.6. *Si (u, g) es una solución óptima para el problema de control (6.9), entonces existe $w \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ solución del sistema adjunto linealizado*

$$\left\{ \begin{array}{l} -(w_t, v) + a(w, v) + b(u, v, w) + b(v, u, w) + c(v, \sigma) = \alpha(u - U, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ c(w, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ w = 0 \text{ sobre } \Gamma, \\ w(T) = 0 \text{ en } \Omega. \end{array} \right. \quad (6.11)$$

Además existen dos constantes γ_0 y γ_1 tales que

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_c} (\nu \gamma_1 w \cdot \gamma_0 v - \sigma \gamma_0 v \cdot n) = \\ & = -(w_t, v) + a(w, v) + b(u, v, w) + b(v, u, w) + c(v, \sigma) - \alpha(u - U, v) \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Finalmente, para obtener la solución del problema de control óptimo, debemos resolver el sistema de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} (u_t, v) + a(u, v) + b(u, u, v) + c(v, p) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ c(u, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ (u, s)_\Gamma = (g, s)_\Gamma \quad \forall s \in H^{-1/2}(\Gamma), \\ u(0) = u_0 \in \text{curl}(H^2)(\Omega); \end{cases} \quad (6.12)$$

el sistema adjunto:

$$\begin{cases} -(w_t, v) + a(w, v) + b(u, v, w) + b(v, u, w) + c(v, \sigma) = \alpha(u - U, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ c(w, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ w = 0 \text{ sobre } \Gamma, \\ w(T) = 0 \text{ en } \Omega; \end{cases} \quad (6.13)$$

y la condición de optimalidad

$$\begin{cases} (g, r) - \beta_1(g_{tt}, r) + \beta_2(g_x, r_x) + k(t)(n, r) = \frac{1}{\beta}[(\gamma_1 w, r) - (n\sigma, r)] \quad \forall r \in H_0^1(\Gamma_c), \\ g(0) = \gamma_0 u_0 \text{ sobre } \Gamma_c, \\ g_t(T) = 0, \text{ sobre } \Gamma_c, \\ g = 0 \text{ sobre } \partial\Gamma_c, \end{cases} \quad (6.14)$$

donde $k(t)$ viene definida por la condición de compatibilidad

$$\int_\Gamma g \cdot n = 0, \quad (6.15)$$

y γ_0 y γ_1 son las dos constantes que existen por el teorema anterior.

6.3. Semidiscretización en tiempo

Ahora pasamos a aproximar el problema de control en tiempo, para ello hacemos una partición del intervalo $[0, T]$ en N subintervalos de longitud $\Delta t := T/N$. Así denotamos $q^j = q^j(x) := q(x, t_j)$ para cualquier función q .

Entonces las variables de estado, aproximadas, $u^j \in H_0^1(\Omega)$ y $p^j \in L_0^2(\Omega)$ satisfacen las ecuaciones de Navier-Stokes semidiscretas, para $j = 1, \dots, N$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(u^j - u^{j-1}, v) + a(u^j, v) + b(u^j, u^j, v) + c(v, p^j) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ c(u^j, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ (u^j, s)_\Gamma = (g^j, s)_\Gamma \quad \forall s \in H^{-1/2}(\Gamma), \end{cases} \quad (6.16)$$

siendo $u^0 = u_0 \in \text{curl}(H^2)(\Omega)$.

Análogamente, tenemos una versión semidiscreta para el funcional J

$$J^N(u, g) = \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^N \|u^j - U^j\|^2 \Delta t + \frac{\beta}{2} \sum_{j=1}^N \|g^j\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 \Delta t + \beta_1 \|g_x^j\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 \Delta t + \beta_2 \|g^j - g^{j-1}\|_{L^2(\Gamma_c)}^2. \quad (6.17)$$

Observemos que si Δt tiende a 0 el funcional J^N tiende al funcional continuo.

Así el conjunto de soluciones admisibles A_{ad} viene dado por:

$$A_{ad} := \{(u, p, g) \in H^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H_{n_0}^1(\Gamma_c) \text{ tal que es solución de (6.16),}$$

$$\text{con } g^0 = \gamma u_0 \text{ y } J^N(u, g) \text{ acotado } \}.$$

Y la formulación del problema de control semidiscreto es la siguiente:

Dado $\Delta t = T/N$, $u_0 \in \text{curl}(H^2)(\Omega)$ y $U \in U_{ad}$, entonces (u, p, g) es una solución óptima si existe $\epsilon > 0$ tal que

$$J^N(u, g) \leq J^N(u, h) \quad \forall h \in H_{n_0}^1(\Omega),$$

cuando $\|g^j - h^j\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq \epsilon$ con $j = 1, 2, \dots, N$. Podemos dar los siguientes teoremas que aseguran la existencia de solución.

Teorema 6.3.1. *Sea $\Delta t = T/N$ y $u_0 \in \text{curl}(H^2)(\Omega)$. Si g^N y g_x^N están uniformemente acotadas en $L^2(0, T; H^1(\Gamma_c))$ y en $L^2(0, T; L^2(\Gamma_c))$, respectivamente. Entonces existe una función $u \in H^1(\Omega)$ solución de*

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(u^j - u^{j-1}, v) + a(u^j, v) + b(u^j, u^j, v) + c(v, p^j) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ c(u^j, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ u^j = g^j \text{ sobre } \Gamma_c, \\ u^j = 0 \text{ sobre } \Gamma \setminus \Gamma_c, \\ u^0 = u_0, \end{cases} \quad (6.18)$$

además,

$$\|u^j\|_1^2 \leq K,$$

$$\sum_{j=1}^N \|\nabla u^j\|^2 \Delta t \leq K,$$

$$\sum_{j=1}^N \|u^j - u^{j-1}\|_{-1}^2 \leq K,$$

para $j = 1, 2, \dots, N$ y K una constante independiente de Δt .

Teorema 6.3.2. *Dado $\Delta t = T/N$, $u_0 \in \text{curl}(H^2)(\Omega)$ y $U \in U_{ad}$ entonces existe una solución $(u, p, g) \in A_{ad}$ de (6.16) tal que g minimiza el coste del funcional $J^N(u, g)$.*

Se pueden dar resultados de existencia de solución tanto para el sistema adjunto discreto como para la condición de optimalidad discreta y así tendríamos que la solución del sistema de control semidiscreto existe y viene dada por el sistema de Navier-Stokes semidiscreto para $j = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(u^j - u^{j-1}, v) + a(u^j, v) + b(u^j, u^j, v) + c(v, p^j) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ c(u^j, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ (u^j, s)_\Gamma = (g^j, s)_{\Gamma_c} \quad \forall s \in H^{-1/2}(\Gamma), \\ u^0 = u_0, \end{cases} \quad (6.19)$$

el sistema adjunto semidiscreto para $j = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{cases} -\frac{1}{\Delta t}(w^j - w^{j-1}, v) + a(w^j, v) + b(u^j, v, w^{j-1}) + b(v, u^j, w^{j-1}) + c(v, \sigma^{j-1}) = \alpha(u^j - U^j, v) \\ \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ c(w^j, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ w^{j-1} = 0 \text{ sobre } \Gamma, \\ w^N = 0 \text{ en } \Omega; \end{cases} \quad (6.20)$$

y la condición de optimalidad semidiscreta para $j = 1, 2, \dots, N - 1$

$$\begin{cases} (g^j, r) - \frac{\beta_1}{\Delta t^2}(g^{j+1} - 2g^j + g^{j-1}, r) + \beta_2(g_x^j, r_x) + k^j(n, r) = \frac{1}{\beta}[(\gamma_1 w^j, r) - (n \sigma^j, r)] \quad \forall r \in H_0^1(\Gamma_c), \\ (g^j, n)_\Gamma = 0, \\ g^j = 0 \text{ sobre } \Gamma \setminus \Gamma_c, \\ g^0 = \gamma_0 u_0 \text{ sobre } \Gamma_c, \\ g^N = g^{N-1} \text{ sobre } \Gamma_c. \end{cases} \quad (6.21)$$

6.4. Aproximación del problema completamente discreto

Ahora ya vamos a ver el problema de control de Navier-Stokes completamente discreto. Denotemos $X^h \subset H^1(\Omega)$ y $S^h \subset L^2(\Omega)$ los espacios de elementos finitos en los que iremos aproximando la solución. También consideremos $X_0^h := X^h \cap H_0^1(\Omega)$ y $S_0^h := S^h \cap L_0^2(\Omega)$. Sobre la frontera consideraremos los siguientes espacios, $P^h := X^h|_\Gamma \subset H^{-1/2}(\Gamma)$ y $Q^h := X^h|_{\Gamma_c} \subset H^1(\Gamma_c)$; y $Q_0^h := Q^h \cap H_{n_0}^1(\Omega)$.

Consideremos que se cumplen las siguientes condiciones:

- Hipótesis de aproximación:

Existe un entero l y una constante C independiente de h, u y p tal que para todo k con $1 \leq k \leq l$ tenemos

$$\inf_{u_h \in X^h} \|u_h - u\|_1 \leq Ch^k \|u\|_{k+1} \quad \forall u \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad (6.22)$$

$$\inf_{p_h \in S^h} \|p_h - p\|_1 \leq Ch^k \|p\|_k \quad \forall p \in H^k(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \quad (6.23)$$

■ Condición *inf - sup*

Existe una constante C' independiente de h tal que

$$\inf_{0 \neq q_h \in S^h} \sup_{0 \neq v_h \in X^h} \frac{\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot u_h}{\|u_h\|_1 \|q_h\|} \geq C' > 0. \quad (6.24)$$

■ Propiedad de aproximación de frontera

Existe un entero k y una constante C'' independiente de h y r tal que para todo m con $1 \leq m \leq k$ tenemos

$$\inf_{r_h \in Q_0^h} \|r_h - r\|_{L^s(\Gamma_c)} \leq C'' h^{m-s-1/2} \|r\|_{L^{m+1/2}(\Omega)}, \quad \forall r \in H_{n_0}^1(\Gamma_c), \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (6.25)$$

Entonces las variables de estado, aproximadas, $u_h^j \in X^h$ y $p_h^j \in S^h$ satisfacen las ecuaciones de Navier-Stokes discretas, para $j = 1, \dots, N$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(u_h^j - u_h^{j-1}, v_h) + a(u_h^j, v_h) + b(u_h^j, u_h^j, v_h) + c(v_h, p_h^j) = 0 \quad \forall v_h \in X_0^h, \\ c(u_h^j, q_h) = 0 \quad \forall q \in S_0^h, \\ (u_h^j, s_h)_{\Gamma} = (g_h^j, s_h)_{\Gamma} \quad \forall s \in Q_0^h, \end{cases} \quad (6.26)$$

siendo $u_h^0 = \pi^h u_0 \in \text{curl}(H^2)(\Omega)$.

Análogamente, tenemos una versión discreta para el funcional J

$$J_h^N(u_h, g_h) = \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^N \|u_h^j - U_h^j\|^2 \Delta t + \frac{\beta}{2} \sum_{j=1}^N \|g_h^j\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 \Delta t + \beta_1 \|(g_h)_x^j\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 \Delta t + \beta_2 \|g_h^j - g_h^{j-1}\|_{L^2(\Gamma_c)}^2, \quad (6.27)$$

con $g_h^0 := \pi^h \gamma u_0$.

Observemos que si π^h es un operador de proyección sobre X^h .

Así el conjunto de soluciones admisibles A_{ad} viene dado por:

$$A_{ad} := \{(u_h, p_h, g_h) \in X^h \times S_0^h \times Q_0^h \text{ tal que es solución de (6.26),}$$

$$\text{con } g_h^0 = \pi^h \gamma u_0 \text{ y } J_h^N(u_h, g_h) \text{ acotado } \}.$$

Podemos dar los siguientes teoremas que aseguran la existencia de solución.

Teorema 6.4.1. *Sea $\Delta t = T/N$ y $u_0 \in \text{curl}(H^2)(\Omega)$. Si $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ y se tienen las condiciones (6.22)-(6.25). Entonces existe una función $u \in X^h$ y $p_h \in S_0^h$ solución de*

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(u_h^j - u_h^{j-1}, v_h) + a(u_h^j, v_h) + b(u_h^j, u_h^j, v_h) + c(v_h, p_h^j) = 0 \quad \forall v_h \in X_0^h, \\ c(u_h^j, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in S_0^h, \\ u_h^j = g_h^j \text{ sobre } \Gamma_c, \\ u_h^j = 0 \text{ sobre } \Gamma \setminus \Gamma_c, \\ u_h^0 = \pi^h u_0, \end{cases} \quad (6.28)$$

para $j = 1, 2, \dots, N$.

Teorema 6.4.2. *Dado $\Delta t = T/N$, $u_0 \in \text{curl}(H^2)(\Omega)$ y $U \in U_{ad}$ entonces existe una solución $(u_h, p_h, g_h) \in A_{ad}$ de (6.26) tal que g minimiza el coste del funcional $J_h^N(u_h, g_h)$.*

Se pueden dar resultados de existencia de solución tanto para el sistema adjunto discreto como para la condición de optimalidad discreta y así tendríamos que la solución del sistema de control completamente discreto existe y viene dada por el sistema de Navier-Stokes discreto para $j = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(u_h^j - u_h^{j-1}, v_h) + a(u_h^j, v_h) + b(u_h^j, u_h^j, v_h) + c(v_h, p_h^j) = 0 \quad \forall v_h \in X_0^h, \\ c(u_h^j, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in S_0^h, \\ (u_h^j, s_h)_\Gamma = (g_h^j, s_h)_{\Gamma_c} \quad \forall s \in P^h, \\ u_h^0 = \pi^h u_0, \end{cases} \quad (6.29)$$

el sistema adjunto discreto para $j = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{cases} -\frac{1}{\Delta t}(w_h^j - w_h^{j-1}, v_h) + a(w_h^j, v_h) + b(u_h^j, v_h, w_h^{j-1}) + b(v_h, u_h^j, w_h^{j-1}) + c(v_h, \sigma_h^{j-1}) = \alpha(u_h^j - U_h^j, v_h) \\ \forall v_h \in X_0^h, \\ c(w_h^j, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in S_0^h(\Omega), \\ w_h^{j-1} = 0 \text{ sobre } \Gamma, \\ w_h^N = 0 \text{ en } \Omega; \end{cases} \quad (6.30)$$

y la condición de optimalidad discreta para $j = 1, 2, \dots, N-1$

$$\begin{cases} (g_h^j, r_h) - \frac{\beta_1}{\Delta t^2}(g_h^{j+1} - 2g_h^j + g_h^{j-1}, r_h) + \beta_2((g_h^j)_x, (r_h)_x) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial w_h^j}{\partial n}, r_h \right) \quad \forall r_h \in Q_0^h, \\ (g_h^j, n)_\Gamma = 0, \\ g_h^j = 0 \text{ sobre } \Gamma \setminus \Gamma_c, \\ g_h^0 = \pi^h \gamma_0 u_0 \text{ sobre } \Gamma_c, \\ g_h^N = g_h^{N-1} \text{ sobre } \Gamma_c. \end{cases} \quad (6.31)$$

Así quedaría completamente discretizado el problema de control para las ecuaciones de Navier-Stokes en dimensión dos. A la hora de implementar este problema podemos usar algoritmos como el algoritmo del gradiente o del gradiente conjugado sobre el funcional J_h^N y así obtener el control.

Conclusiones

En este trabajo hemos probado varios resultados teóricos sobre las ecuaciones de Navier-Stokes y el sistema de Boussinesq. Así hemos conseguido demostrar que ambos poseen una única solución débil en el caso bidimensional y también en el caso tridimensional, si tomamos datos suficientemente pequeños.

Hemos presentado con detalle las propiedades de regularidad de lo que hemos denominado solución débil admisible, véase Definición 3.1.7. Así, se ha intentado dar respuesta al problema que aún permanece abierto sobre la regularidad de la solución de Navier-Stokes, véase [3, 27]. Para ello, hemos necesitado algunos resultados previos, pero podemos observar que lo relevante de la prueba está en conseguir buenas cotas (con constantes absolutas o a lo sumo dependientes de un parámetro q) para una serie de términos, entre ellos $\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \iint_{Q_r^*(x,t)} |\nabla u|^2$.

También hemos querido desarrollar algunos esquemas numéricos que se usan en la práctica para implementar la solución de estas EDPs.

Una característica importante que poseen los métodos numéricos que hemos presentado es que son de tipo splitting, tratan de separar las dificultades.

Debemos destacar que todo el estudio que hemos realizado tiene una importante aplicación práctica tanto en el campo de la implementación de las ecuaciones como para dar fiabilidad al modelo frente a otros. Es decir, la aplicación de los resultados obtenidos se abre al vasto campo de fenómenos modelados por EDPs no lineales.

También hemos sido capaces de implementar algunos de los esquemas numéricos estudiados y presentar experiencias numéricas. Así, hemos estudiado las ecuaciones de Navier-Stokes en torno a un obstáculo que en la práctica podría ser aplicado al movimiento del aire alrededor del ala de un avión

Por último, hemos analizado brevemente un problema de control óptimo para las ecuaciones de Navier-Stokes en el caso bidimensional y lo hemos discretizado para así poderlo implementar numéricamente y hallar un control óptimo.

Quedan muchas cuestiones por estudiar, algunas aún sin respuesta. Por mencionar algunas, podemos preguntarnos qué se puede decir para problemas de control óptimo para las ecuaciones de Navier-Stokes tridimensionales o para el sistema de Boussinesq y su implementación numérica.

También podemos hacernos preguntas en torno a la regularidad de la solución como: ¿qué puede decirse en la Proposición 1, Proposición 2 y en el Teorema B si (u, p) es solución de algún otro problema similar? ¿seguiríamos teniendo que $\mathcal{H}^1(S) = 0$ en otros casos?

También podemos preguntarnos ¿qué ocurre si cambiamos los cilindros parabólicos Q^r del

Capítulo 3 por cilindros adecuadamente deformados?, ¿se podrían mejorar las estimaciones? O, ¿es posible obtener estimaciones del tamaño de S a partir de problemas adjuntos? Por supuesto, además de todas estas preguntas también está la ya mencionada pregunta del Milenio sobre la regularidad de la solución.

Bibliografía

- [1] G. Boling, Y. Guangwei, *On the suitable weak solutions for the Cauchy-Problem of the Boussinesq equations*, Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications, Vol. 26, 1996, pp. 1367-1385.
- [2] M. O. Bristeau, R. Glowinski, B. Mantel, J. Periaux, P. Perrier, *Numerical methods for incompressible and compressible Navier-Stokes problems*, J. Wiley, Chichester, Vol. 6, 1985, pp. 1-40.
- [3] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXXV, 1982, pp. 771-831.
- [4] A. J. Chorin, J. E. Marsden, *A mathematical introduction to fluid mechanics*, Springer-Verlag, New-York, 1979.
- [5] D. Cioranescu, *Sur une classe de fluides non-newtoniens*, Appl. Math. Optimiz 3, 1977, pp. 263-282.
- [6] P. Constantin, C. Foias, *Navier-Stokes equations*, The University of Chicago Press, Chicago, 1988.
- [7] E. J. Dean, R. Glowinski, *On some finite element methods for the numerical simulation for incompressible viscous flow*, Cambridge University Press, New York, 1993, pp. 109-150.
- [8] J. Douglas, H. H. Rachford, *On the solution of the heat conduction problem in 2 and 3 space variables*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 82, 1956, pp. 421-439.
- [9] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, New York, 1969.
- [10] E. Fernández-Cara, F. Guillén, R. R. Ortega, *Mathematical modeling and analysis of viscoelastic fluids of the Oldroyd kind*, Handbooks of Numerical Analysis, North-Holland, Amsterdam, Part 2, Vol. VIII, 2002, pp. 543-661.
- [11] D. Fujiwara, H. Morimoto, *An L theorem on the Helmholtz decomposition of vector fields*, Tokyo Univ. Fac. Sciences J. 24, 1977, pp. 685-700.
- [12] R. Glowinski, *Numerical methods for fluids (Part 3)*, North-Holland, Vol. IX, 2013.

-
- [13] R. Glowinski, *Viscous flow simulations by finite element methods and related numerical techniques*, Birkhäuser, Boston, MA, 1985, pp. 173-210.
- [14] M. D. Gunzburger, *Perspectives in flow control and optimization*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003, pp. 190-208.
- [15] J. Heywood, *The Navier-Stokes equations: on the existence, regularity and decay of solutions*, Ind. U. Math. J., 29, 1980, pp. 639-681.
- [16] D. D. Joseph, *Fluid dynamics of viscoelastic liquids*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New-York, Vol. 84, 1990.
- [17] P. Klouček, F. S. Rys, *On the stability of the fractional step θ -scheme for the Navier-Stokes equations*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 31, 1994, pp. 1312-1335.
- [18] O. A. Ladyzhenskaya, G. A. Seregin, *On partial regularity of suitable weak solutions to the three-dimensional Navier-Stokes equations*, J. Mathematical Fluid Mechanics, Vol. 2, 1999.
- [19] O. A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York, 1969.
- [20] F. H. Lin, *A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem*, Comm. Pure Appl. Math., 51, 1998, pp. 241-257.
- [21] J. L. Lions, *Quelques methodes de resolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, Montreal, 1963.
- [22] P. L. Lions, *Mathematical topics in fluid mechanics, Vol. 1: Incompressible models*, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [23] P. L. Lions, B. Mercier, *Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators*, SIAM J. Numer. Anal., Vol 16, 1979, 964-979.
- [24] R. L. Panton, *Incompressible flow*, Wiley Interscience, New York, 1984.
- [25] D. H. Peaceman, H. H. Rachford, *The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations*, J. Soc. Ind. Appl. Math., Vol. 3, 1955, pp. 28-41.
- [26] V. Scheffer, *Hausdorff measure and the Navier-Stokes equations*, Acta Mathematica, Vol. 176, 1996.
- [27] R. Temam, *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*, Studies in Mathematics and Applications, Vol. 2, North-Holland Publishing Co., Amsterdam- New York- Oxford, 1977.
- [28] H. B. Da Veiga, *On the suitable weak solution to the Navier-Stokes equations in the whole space*, J. Math. pures Appl., Vol. 64, 1985, pp. 77-86.

-
- [29] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications*, Springer-Verlag, New York, Vol. IV, 1988.