



FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Trabajo Fin de Grado

## **La cicloide**

Fernando Manuel Corcho Gutiérrez

2017



# Resumen

La definición más sencilla que podemos hacer de la cicloide es la de una curva plana descrita como la trayectoria de un punto fijado de una circunferencia que rueda sobre una recta horizontal sin deslizamiento.

Teniendo en cuenta el punto de contacto de la circunferencia con la recta horizontal en un instante inicial, al comenzar el rodamiento observamos que este punto va describiendo un arco hasta que vuelve a posarse sobre dicha recta. Este arco estará encerrado en un área plana sobre la recta horizontal en el intervalo  $[0, 2\pi r]$ , siendo  $r$  el radio de la circunferencia descrita.

En el primer capítulo ahondaremos en esta curva tan peculiar, explicando algunas de sus características más importantes. El segundo capítulo lo dedicaremos a hablar de sus parientes, algunas de ellas muy conocidas aunque pasen desapercibidas. Y en el tercer capítulo expondremos dos de sus aplicaciones más importantes e interesantes.



# Abstract

We can define the cycloid as the plane curve whose path is the one that generates a fixed point of a circle that rolls on a horizontal line without slip.

Taking the point of contact of the circumference with the horizontal line at an initial instant, at the beginning of the bearing we can observe that this point is describing an arc until it returns to rest on that line again. This arc will be limited in a plane area on the horizontal line in the interval  $[0, 2\pi]$ , with  $r$  the radius of the circumference described.

The first chapter will focus on this peculiar curve, explaining some of its most important characteristics and interesting properties. The second chapter we will dedicate to talk about their relatives, some of them well known although they go unnoticed. And in the last chapter we will discuss two of its most important and interesting applications.



# Índice general

<b>1. La cicloide</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Construcción de la cicloide . . . . .	4
1.3. Ecuación paramétrica de la cicloide . . . . .	6
1.4. Curvatura . . . . .	9
1.5. Tangente y normal a la cicloide . . . . .	9
1.6. Definición geométrica de la cicloide . . . . .	14
1.7. La “curva compañera” de la cicloide y su descubrimiento . . . . .	17
1.8. Área de la cicloide . . . . .	21
1.9. Otras propiedades de la cicloide . . . . .	24
<b>2. Curvas relacionadas con la cicloide</b>	<b>29</b>
2.1. Epicloide . . . . .	30
2.2. Cardioide . . . . .	35
2.3. Hipocicloide . . . . .	38
2.4. Evolventes y evolutas . . . . .	44
2.4.1. Propiedades fundamentales de la evolvente . . . . .	44
2.4.2. Evolvente de una circunferencia . . . . .	48
2.4.3. Evolvente de la cicloide. Longitud del arco de cicloide . . . . .	49
<b>3. Aplicaciones: tautocrona y braquistocrona</b>	<b>53</b>
3.1. El mejor péndulo . . . . .	53
3.1.1. Christiaan Huygens y su invento . . . . .	53
3.1.2. Curva tautocrona de Huygens . . . . .	54
3.2. Problema de la braquistocrona . . . . .	59
<b>Conclusión</b>	<b>67</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>69</b>





# Capítulo 1

## La cicloide

### 1.1. Introducción

Aunque los antiguos griegos fueron conscientes de un concepto similar al del movimiento, no hay evidencias de que supieran o estudiaran la cicloide. Esta curva tuvo la “suerte” de aparecer en un momento en que las matemáticas se estaban desarrollando muy rápidamente y tal vez los matemáticos fueron afortunados con la aparición de una curva tan útil en ese momento. Una nueva y poderosa herramienta para el estudio de las curvas fue proporcionada por la geometría analítica. Nuevos métodos para encontrar tangentes a curvas, áreas bajo curvas y volúmenes de sólidos delimitados por superficies curvas, fueron descubiertos rápidamente, y un nuevo tema, el cálculo, estaba en proceso.

El descubridor original de la cicloide parece ser desconocido. John Wallis en una carta de 1679, atribuyó el descubrimiento a Nicolas Cusanus en 1450 y también mencionó a Bouelles como quien en 1500 avanzó el estudio de esta curva. En el caso de Cusanus, sin embargo, los historiadores están de acuerdo en que Wallis estaba equivocado a menos que, según Cantor, tuviera acceso a algún manuscrito ahora perdido. Bouelles menciona que observó una rueda rodante, pero parece haber considerado el arco generado como parte de un círculo cuyo radio era de cinco cuartos el del círculo generador. La historia de la cicloide se vuelve más clara cuando llegamos a Galileo. Este científico y profesor, famoso por su telescopio y microscopio, descubridor del isocronismo <sup>1</sup>, intentó la cuadratura de un arco cicloidal en 1599, o al menos eso escribió su discípulo Torricelli en una publicación de 1644.

---

<sup>1</sup>Igualdad de duración de las oscilaciones de un péndulo

Galileo trató de medir su área y, según escribió Cantor, fue el primero en hacer esta curva bien conocida y quien le dió su nombre. La curva también se conoció como ruleta o trocoide.

Avanzamos y cambiamos de escena a Francia, a las actividades de Gilles Personne de Roberval y al problema de la cuadratura de la cicloide. En 1628, Roberval pronto se convirtió en un miembro de ese pequeño grupo de científicos y matemáticos que solían reunirse dos veces por semana, generalmente en la casa de Père Marin Mersenne, para discutir asuntos de interés común. Mersenne llamó la atención de los matemáticos franceses con la cicloide en varias ocasiones y Roberval pronto aprendió sobre esta curva, pero no pudo inmediatamente efectuar su cuadratura. Sin embargo, un nuevo método para encontrar áreas bajo curvas se dio a conocer en 1629 cuando Cavalieri presentó sus notas sobre la *teoría de indivisibles* para mostrar su aptitud para la cátedra de matemáticas en la Universidad de Bolonia, a la que era candidato. Esta nueva teoría, y sus extensiones posteriores, ejercieron una enorme influencia sobre el problema de encontrar áreas bajo curvas y, por lo tanto, en el desarrollo del cálculo.

Alrededor de 1634, Roberval efectuó la cuadratura de la cicloide, o trocoide, como llamó a esta curva. La primera publicación de su prueba parece que tuvo lugar en 1693 cuando su *Traité des Indivisibles* vió la luz.

A principios de 1638, Mersenne escribió a Fermat y Descartes, presentando para su consideración el problema de la cuadratura de la cicloide y la construcción de una tangente a la curva. Durante un año o más, Roberval y Fermat estuvieron escribiéndose, con el senador Carcavy como intermediario. Los temas tratados incluyeron tangentes y centros de gravedad. Las cartas de Mersenne, sin embargo, pusieron en foco la cuestión de las tangentes, pues en agosto de ese año Roberval, Fermat y Descartes dieron a Mersenne un método de dibujo para la tangente y cada uno tenía un método diferente. En las disputas siguientes entre Fermat y Descartes sobre los méritos relativos de sus construcciones, Roberval se puso del lado de Fermat. A su vez, Descartes escribió varias cartas a Mersenne ridiculizando algunas de las construcciones tangentes de Roberval que Mersenne le había transmitido.

Parte de la disputa sobre los méritos relativos a las construcciones surgió de diferentes ideas en cuanto al significado de tangentes a curvas distintas de círculos. La definición de tangente como la posición límite de una secante todavía no había sido aceptada en general.

Con el área bajo el arco cicloidal y la construcción de la tangente bien dominada por sus compañeros franceses, Mersenne anunció estos resultados a Galileo en 1638. Galileo, ahora anciano y ciego, pasó dichos resultados a sus alumnos Torricelli y Viviani. Sus alumnos respondieron con una formulación para la cuadratura y la tangente. Este interés llevó a Torricelli a un considerable estudio de la curva. En 1644 hizo pública su cuadratura y un método de dibujar su tangente. Este fue el primer artículo impreso sobre la cicloide.

Roberval se enojó al ver otra prueba de la impresión de los que consideraba sus propios descubrimientos y escribió una carta a Torricelli acusándole de plagio.

El siguiente avance histórico es debido a Blaise Pascal, conocido por su “Pensées y sus Lettres Provinciales”, así como por sus obras matemáticas. Trabajó en un relato tolerablemente completo de la geometría de la cicloide. Como ciertas preguntas acerca de esta curva nunca habían sido contestadas públicamente, con las publicaciones de Pascal y Wallis en este momento, los problemas de cuadratura, tangentes, rectificación y centros de gravedad se completan sustancialmente en la medida en lo que a la cicloide, o ruleta como era mejor conocida por los franceses, se refiere. Todo esto se logró en un período de veinticinco años y antes del trabajo de Newton en el cálculo.

Unos quince años después, Huygens se encontraba usando el péndulo cicloidal en un intento por obtener un mejor cronómetro y utilizó la propiedad de que la evoluta de la cicloide es también otra cicloide. Además descubrió que una partícula pesada alcanza el fondo de un arco cicloidal invertido en la misma longitud de tiempo, no importa desde qué punto del arco comience su descenso. En 1686, Leibniz escribió la ecuación para la curva, mostrando así el rápido progreso que se estaba haciendo en la geometría analítica.

En la década siguiente a la publicación de esta ecuación, los hermanos Bernoulli, Jacques y Jean, publicaron varios artículos sobre la cicloide.

En junio de 1696, Jean Bernoulli propuso un nuevo problema que invitaba a los matemáticos a resolver: Si dos puntos  $A$  y  $B$  se dan en un plano vertical, asignar a una partícula móvil  $M$  la trayectoria  $AMB$  a lo largo de la cual, descendiendo bajo su propio peso, pasa del punto  $A$  al punto  $B$  en el menor tiempo. Así, el famoso problema de la braquistocrona apareció en escena.

## 1.2. Construcción de la cicloide

Como primera toma de contacto con esta curva, se plantea su construcción “por puntos” y trataremos de hacerlo con mucho cuidado. Tracemos (figura 1.1) la recta  $AB$ , y en su extremo izquierdo construyamos un círculo de radio  $a$  tangente a  $AB$  en el punto  $T$ . Es más sencillo proceder de la siguiente forma: a una distancia  $a$  de la recta  $AB$  tracemos la recta  $CD$  paralela a ella (esta recta nos será de utilidad más adelante). Próximo al extremo izquierdo de  $CD$  señalemos el punto  $O$  y construyamos la circunferencia de radio  $a$  y centro  $O$ , que necesariamente será tangente a  $AB$ . Denotemos con la letra  $T$  el punto de tangencia.

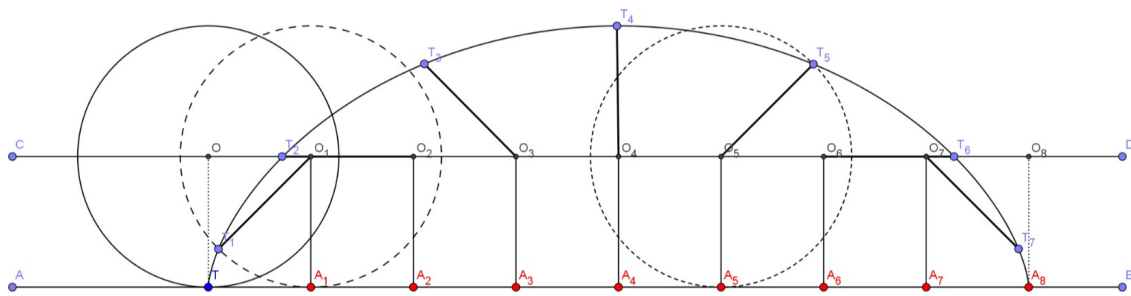


Figura 1.1: Construcción cicloide por puntos

Tomemos en la recta  $AB$  un segmento partiendo del punto  $T$  hacia la derecha, con longitud igual a la de la circunferencia de radio  $a$ . Si se quiere realizar a mano, es importante hacerlo de forma exacta con la ayuda de un compás y una regla, por lo que se realizará una construcción aproximada. Si el radio de la circunferencia es  $a$ , entonces su longitud es  $2\pi a$ , es decir, aproximadamente  $6,28 a$ . Supongamos que hemos trazado la recta  $CD$  a una distancia de  $4$  cm de la recta  $AB$  ( $a = 4$ ), entonces deberemos tomar  $AB$  un segmento igual a  $4 \cdot 6,28 = 25,12$  cm. Denotemos el final de este segmento con  $A_8$ .

Supongamos ahora que el círculo que hemos construido se mueve por la recta  $AB$ , por lo que su centro se desplazará por  $CD$ . Dividamos el segmento  $OO_8$  igual a  $TA_8$  en 8 partes iguales. El punto  $O_1$  corresponde a  $\frac{1}{8}$  de vuelta. Cuando el centro se traslada desde  $O$  hasta  $O_1$ , el radio  $OT$  gira en  $360^\circ : 8 = 45^\circ$ . Construyamos el ángulo  $A_1O_1T_1$  igual a  $45^\circ$  y tracemos el segmento  $O_1T_1$  igual a  $OT$ . El punto  $T_1$  debe pertenecer a la cicloide.

Consideremos ahora el punto  $O_2$  que coincide con el centro del círculo que ha girado  $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$  de vuelta. Haciendo una construcción análoga a la anterior, teniendo en cuenta que esta vez la amplitud del ángulo  $A_2O_2T_2$  debe ser igual a  $2 \cdot \left(\frac{360}{8}\right) = 90^\circ$ . Obteniendo así el punto  $T_2$  de la cicloide. Para obtener el siguiente punto, en el centro  $O_3$  construyamos el ángulo igual a  $3 \cdot \left(\frac{360}{8}\right) = 135^\circ$  y tracemos el segmento  $O_3T_3$ , igual a  $OT$ .

La construcción de los puntos  $T_4, T_5, T_6$  y  $T_7$  resulta evidente, al igual que  $T_8$  que coincide con el punto  $A_8$ . Al unir mediante una curva suave todos los puntos obtenidos de esta forma obtendremos la cicloide. Si la curva obtenida no parece lo suficientemente “suave”, se pueden construir más puntos intermedios dividiendo, al inicio, el segmento principal (la longitud de la circunferencia que rueda) no en 8, sino, en 10 ó 12 partes. En este último caso, en lugar de ángulos de  $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ , etcétera, sería necesario construir ángulos de  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$  y así sucesivamente.

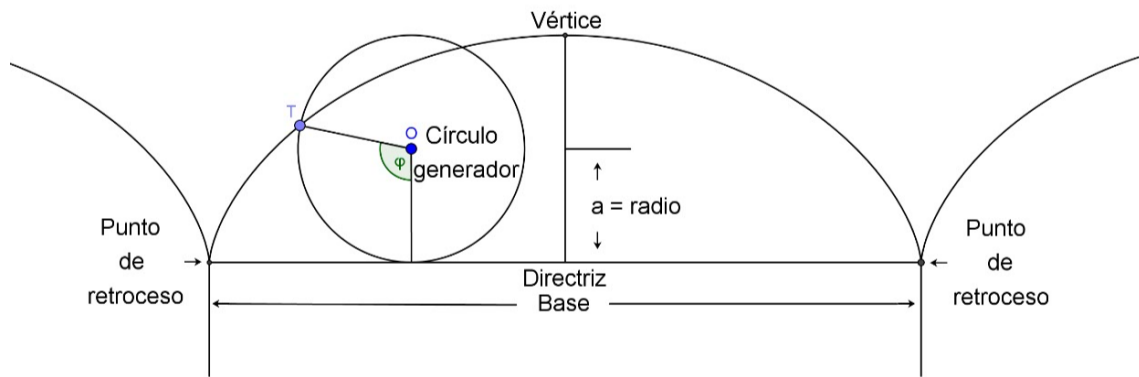


Figura 1.2: Elementos de la cicloide

Hay que destacar que, al igual que la recta, la cicloide se considera una curva infinita, es decir, suponemos que el círculo (denominado *círculo generador*) rueda por la recta (*recta directriz*) sin fin, por lo que se obtiene una serie infinita de arcos. Los arcos se unen en ciertos puntos “picos”, los cuales tienen tangentes (verticales) comunes.

Estos puntos se denominan *puntos de retroceso* de la cicloide y corresponden a las posiciones inferiores del punto de la circunferencia que describe la cicloide.

Las posiciones superiores se encuentran justamente entre dos puntos de retroceso, a una misma distancia de ambos; estos puntos “más altos” se denominan *vértices* de la cicloide (en la figura 1.1, uno de los vértices se encuentra en el punto  $T_4$ ). El segmento de recta que se forma entre dos puntos de retroceso adyacentes es igual a  $2\pi a$  y se denomina *base* de la cicloide (más exactamente, *base de un arco de la cicloide*).

¿Qué problemas surgen cuando investigamos la cicloide? Primero es necesario darle una definición puramente geométrica, independiente de la mecánica. A continuación, es preciso investigar sus propiedades; aprender a trazar una tangente a la cicloide; calcular el área limitada por su arco y su base; calcular la longitud del arco y el volumen del cuerpo formado por la rotación del arco de la cicloide alrededor de la recta directriz. De forma paralela estudiaremos las curvas de la “familia” de la cicloide y conoceremos sus aplicaciones puramente geométricas y sus aplicaciones en otros campos.

### 1.3. Ecuación paramétrica de la cicloide

Hay curvas que son perfectamente diferenciables, que sin embargo presentan “picos” en su traza. Este es el caso de la cicloide.

Antes que nada, recordemos algunas definiciones que necesitaremos tener en mente:

**Definición 1.** Una curva parametrizada regular (c.p.r.) en  $R^m$  es una aplicación

$$\alpha : (a, b) \subseteq R \rightarrow R^m : t \rightarrow \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$$

tal que:

- $\alpha \in C^k, k \geq 1$  (*Condición de Diferenciabilidad*)
- $\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} \neq 0$ , para todo  $t \in (a, b)$  (*Condición de Regularidad*)

Nótese que en nuestro caso fijaremos  $m = 2$ , ya que hablamos de curvas planas.

Si existe  $t_0 \in (a, b)$  tal que  $\alpha'(t_0) = 0$ , el punto  $\alpha(t_0)$  se llama *punto singular* y tiene un aspecto “anguloso”.

**Definición 2.** Sean  $\alpha : (a, b) \rightarrow R^2$  una c.p.r. y  $t_0 \in (a, b)$ . Se llama vector velocidad de  $\alpha$  a la aplicación  $\alpha' : (a, b) \rightarrow R^2$  dada por  $t \rightarrow \alpha'(t)$ , que por la *Condición de Regularidad* es no nula en todos los puntos. Al módulo del vector velocidad de  $\alpha$  en  $\alpha(t_0)$  se le llama velocidad de  $\alpha$  en  $\alpha(t_0)$ .

Se llama *vector tangente* a  $\alpha$  en  $\alpha(t_0)$  al vector

$$\mathbf{t}(t_0) = \frac{\alpha'(t_0)}{|\alpha'(t_0)|},$$

que es unitario. Se llama *campo vectorial tangente* de  $\alpha$  a la aplicación  $\mathbf{t} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:

$$t \rightarrow \mathbf{t}(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}.$$

**Definición 3.** Sean  $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  una c.p.r y  $t_0 \in (a, b)$ . Se llama *recta tangente* a  $\alpha$  en  $\alpha(t_0)$  a la recta que pasa por  $\alpha(t_0)$  y tiene como dirección al vector tangente a  $\alpha$  en  $\alpha(t_0)$ , que, claramente, es una c.p.r. Su ecuación es:

$$\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : r \rightarrow \beta(r) = \alpha(t_0) + r\mathbf{t}(t_0) = \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0).$$

**Nota.** La parametrización de una curva por su arco se llama *parametrización natural* y es la adecuada para estudiar una curva a nivel teórico o cuando sólo interesa su forma geométrica.

**Definición 4.** Sea  $\alpha = \alpha(s)$  una c.r.p.n. en el plano  $\mathbb{R}^2$ , con  $s$  el parámetro natural dado por:

$$s : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\sigma)| d\sigma$$

Se llama *vector normal* de  $\alpha$  en  $\alpha(s)$  al único vector  $\mathbf{n}(s)$  ortogonal a  $\mathbf{t}(s)$  (con el par  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s))$  positivamente orientado). Se llama *recta normal* a  $\alpha$  en  $\alpha(s)$  a la recta que pasa por  $\alpha(s)$  y tiene como dirección al vector normal a  $\alpha$  en  $\alpha(s)$ . Su ecuación es  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : r \rightarrow \beta(r) = \alpha(s) + r\mathbf{n}(s)$ .

Ahora sí, prosigamos con nuestro estudio sobre la cicloide (figura 1.3). Sea un arco de la cicloide dado por  $ACB$ , con  $C$  el punto medio o vértice. Sea  $P$  un punto sobre la curva y  $O$  el centro de la circunferencia, entonces  $OP$  corresponde al radio del círculo generador.

Tomando como eje el de las  $X$ , llamaremos  $I$  al punto de contacto con el eje. Sea  $PM$  la recta perpendicular al radio vertical  $OI$ .

Luego, si  $OP = a$  y denominamos  $t$  al ángulo formado por  $MOP$ ,  $AI = \text{arco}(PI) = at$ .

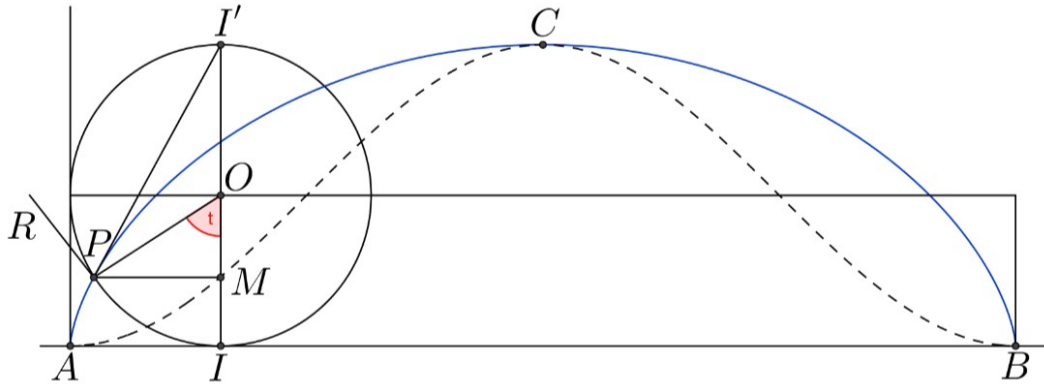


Figura 1.3: Obtención de las ecuaciones paramétricas de la cicloide

Las coordenadas  $(x, y)$  de  $P$  vienen dadas por:

$$\begin{aligned} x(t) &= at - a\text{sent} = a(t - \text{sent}) \\ y(t) &= a - a\text{cost} = a(1 - \text{cost}) \end{aligned}$$

Es decir, la posición de  $P$  viene dada por:

$$\alpha(t) := \begin{cases} x(t) = at - a\text{sent} = a(t - \text{sent}) \\ y(t) = a - a\text{cost} = a(1 - \text{cost}) \end{cases}$$

Se ha supuesto, que en  $t = 0$ ,  $P$  coincide con  $I$ , y con el origen de coordenadas.

El vector velocidad se escribe:

$$\alpha'(t) := \begin{cases} x'(t) = a - a\text{cost} \\ y'(t) = a\text{sent} \end{cases}$$

que se anula en  $t = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ , etc. Cerca de estos puntos singulares (denominados también puntos de retroceso) se ve a  $P$  caer (casi verticalmente) sobre el eje  $X$  y llegando al momento de contacto ( $P = I$ ) con velocidad nula, elevándose luego (casi verticalmente). La razón de esto es que:

$$\lim_{t \rightarrow \pi} \left( \frac{\alpha'(t)}{t} \right) = (0, a)$$



## 1.4. Curvatura

En primer lugar, recordemos la definición de curvatura <sup>2</sup>:

Si  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva plana  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , la curvatura con signo de  $\alpha$  en  $t$  es

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}}.$$

La parametrización como ya vimos en la sección anterior, viene dada por:

$$\alpha(t) := \begin{cases} x(t) = at - asint = a(t - sint) \\ y(t) = a - acost = a(1 - cost) \end{cases}$$

Luego, calculando las derivadas de primer y segundo orden

$$\begin{cases} x'(t) = a(1 - cost) \\ x''(t) = a(sint) \\ y'(t) = a(sint) \\ y''(t) = a(cost) \end{cases}$$

Y sustituyendo obtenemos:

$$k(t) = \frac{a^2(1 - cost)cost - a^2(sint)^2}{((a(1 - cost))^2 + (asint)^2)^{3/2}}.$$

## 1.5. Tangente y normal a la cicloide

Tiene sentido pensar que la definición más natural de circunferencia es la siguiente: se llama circunferencia a la trayectoria de una partícula de un cuerpo sólido que rota alrededor de un eje fijo. Esta definición es ilustrativa, a partir de ella es fácil deducir todas las propiedades de la circunferencia, y lo principal, nos presenta inmediatamente la circunferencia como una curva continua.

---

<sup>2</sup>En caso de duda consultar el libro [4] de la bibliografía

Esto último no se aprecia en la definición clásica: la circunferencia es el lugar geométrico<sup>3</sup> de los puntos del plano que se encuentran a una misma distancia de un punto.

Comencemos con el análisis de la tangente y la normal a la cicloide. Para ello, recordemos previamente la definición de tangente para nuestro caso:

Sea  $\alpha: I \rightarrow R^2$  una curva parametrizada diferenciable. Para cada  $t \in I$  en donde  $\alpha'(t) \neq 0$  existe una recta bien definida, que pasa por el punto  $\alpha(t)$  y contiene al vector  $\alpha'(t)$ . Esta recta se denomina *recta tangente* a  $\alpha$  en  $t$ .

Por otro lado, se denomina *normal* a la perpendicular a la tangente en el punto de tangencia.

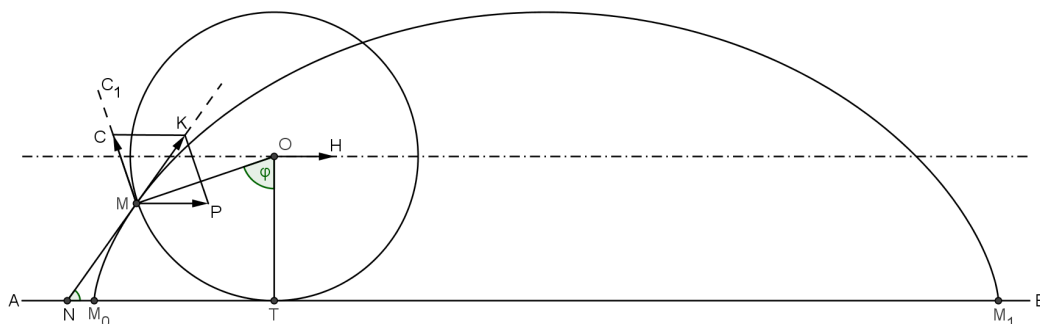


Figura 1.4: Tangente a la cicloide

El círculo rueda por la recta  $AB$ . Supongamos que el radio vertical del círculo, que pasó en el instante inicial por el punto de retroceso de la cicloide, giró un ángulo  $\varphi$  y tomó la posición  $OM$ . O lo que es lo mismo, consideramos que el segmento  $M_0T$  representa la misma parte del segmento  $M_0M_1$  que el ángulo  $\varphi$  representa de  $360^\circ$  (una vuelta entera). Además, el punto  $M_0$  llegó al punto  $M$  y de este modo,  $M$  es justo un punto de la cicloide.

La flecha  $OH$  muestra la velocidad con que se mueve el centro del círculo que rueda. Todos los puntos del círculo, incluido  $M$ , tienen esta misma velocidad horizontal. Pero, además, el punto  $M$  toma parte en la rotación del círculo. La velocidad  $MC$  que adquiere el punto  $M$  de la circunferencia durante el movimiento de rotación está dirigida por la tangente  $MC_1$  a dicha circunferencia, es decir, es perpendicular

<sup>3</sup>El conjunto de todos los puntos que cumplen una condición dada (en el caso de la circunferencia, encontrarse a una misma distancia de un punto dado).

al radio  $OM$ . La velocidad  $MC$  es igual en valor absoluto a la velocidad  $MP$  (es decir, a la velocidad  $OH$ ). Por eso, en este caso el paralelogramo de velocidad será un rombo (el rombo  $MCKP$  en la figura 1.4). Precisamente la diagonal  $MK$  de este rombo nos dará la tangente a la cicloide.

Dada la recta directriz  $AB$  de la cicloide, el radio  $r$  del círculo generador y el punto  $M$  de la cicloide (figura 1.4), se necesita construir la tangente  $MK$  a la cicloide.

Teniendo el punto  $M$ , construyamos el círculo generador en la posición en la que un punto de la circunferencia coincide con  $M$ . Para esto hallemos antes el centro  $O$  con ayuda del radio  $MO = r$  (el punto  $O$  debe yacer en una recta paralela a  $AB$  a una distancia  $r$  de ella). Ahora construyamos el segmento  $MP$  de longitud arbitraria, paralelo a la recta directriz.

Tracemos la recta  $MC_1$  perpendicular a  $OM$  y tomemos en ella, a partir del punto  $M$ , el segmento  $MC$ , igual al segmento  $MP$ . Construyamos entonces un rombo tomando  $MC$  y  $MP$  como lados: la diagonal de este rombo será la tangente a la cicloide en el punto  $M$ .

Esta construcción es puramente geométrica y obtenemos algunas conclusiones, comenzando con este sencillo teorema:

**Teorema 1.** El ángulo entre la tangente a la cicloide (en cualquier punto) y la recta directriz es igual al ángulo complementario (hasta  $90^\circ$ ) de la mitad del ángulo de giro del radio del círculo generador.

Es decir, en la figura 1.4, el ángulo  $KNT$  es igual a  $90^\circ - \frac{\angle MOT}{2}$  ó  $\angle KMP = 90^\circ - \varphi/2$ . Tratemos de demostrar esta igualdad.

Como ya hemos citado previamente, notaremos por  $\varphi$  al *ángulo principal* del círculo generador. De este modo el ángulo  $MOT$  en la figura 1.4 es un ángulo principal. Consideremos que el ángulo principal es agudo (también puede estudiarse el caso de ángulo obtuso, es decir, estudiar el caso en el que el círculo que rueda realiza más de un cuarto de vuelta completa).

Consideremos el ángulo  $CMP$ . El lado  $CM$  es perpendicular a  $OM$  (la tangente a la circunferencia es perpendicular al radio). El lado  $MP$  (horizontal) es perpendicular a  $OT$  (la vertical). Pero el ángulo  $MOT$ , por condición, es agudo (acordando considerar el primer cuarto de vuelta, y el ángulo  $CMP$  es obtuso).

Esto significa que los ángulos  $MOT$  y  $CMP$  suman  $180^\circ$  (ángulos con lados mutuamente perpendiculares, uno de los cuales es agudo, y el otro, obtuso).

Así, el ángulo  $CMP$  es igual a  $180^\circ - \varphi$ . Pero como es sabido, la diagonal del rombo divide el ángulo del vértice por la mitad. Por consiguiente,  $\angle KMP = 90^\circ - \varphi/2$ , que es lo que se quería demostrar.

Ahora prestemos atención a la *normal* a la cicloide. Para ello, observemos la figura 1.5 en la que también hemos trazado la normal  $ME$  ( $ME \perp MK$ ).

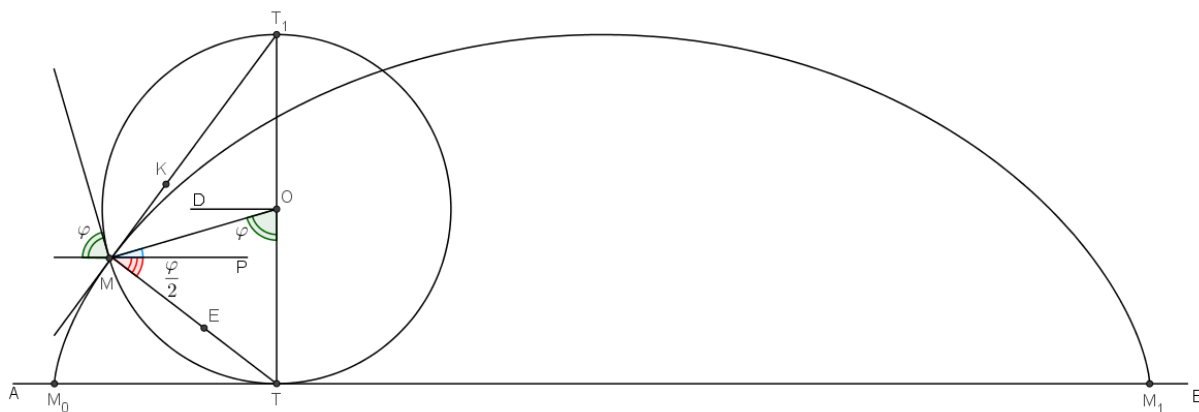


Figura 1.5: Explicación del Teorema 2

Deducimos pues que el ángulo  $EMP$  es igual a la diferencia de los ángulos  $KME$  y  $KMP$ , es decir, es igual a  $90^\circ - \angle KMP$ . Acabamos de demostrar que el propio ángulo  $KMP$  es igual a  $90^\circ - \varphi/2$ . Así obtenemos:

$$\angle PME = 90^\circ - \angle KMP = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\varphi}{2}$$

Hemos demostrado un teorema simple pero útil. Demos ahora su formulación.

**Teorema 2.** El ángulo entre la normal a la cicloide (en cualquiera de sus puntos) y la recta directriz es igual a la mitad del *ángulo principal*.

Unamos el punto  $M$  con el punto de contacto del círculo generador con la recta directriz,  $T$ . Es evidente que el triángulo  $MOT$  es isósceles ( $OM$  y  $OT$  son radios del círculo generador). La suma de los ángulos de la base de este triángulo es  $180^\circ - \varphi$ , y cada uno es igual a la mitad de esta suma. Así pues,  $\angle OMT = 90^\circ - \varphi/2$ .

Centrémonos ahora en el ángulo  $PMT$ , igual a la diferencia de los ángulos  $OMT$  y  $OMP$ . Hemos visto que  $\angle OMT$  es igual a  $90^\circ - \varphi/2$  y el ángulo  $OMP$  es igual al ángulo  $DOM$  (son ángulos alternos internos entre paralelas). Es evidente que  $\angle DOM$  es igual a  $90^\circ - \varphi$  y por tanto,  $\angle OMP = 90^\circ - \varphi$ .

De este modo obtenemos:

$$\angle PME = \angle OMT - \angle OMP = 90^\circ - \frac{\varphi}{2} - (90^\circ - \varphi) = \frac{\varphi}{2}$$

Por tanto llegamos a que el ángulo  $PMT$  es igual al ángulo  $PME$  (véase el Teorema 2). Por tanto, podemos formular el siguiente teorema:

**Teorema 3 (primera propiedad fundamental de la cicloide).** Toda normal a la cicloide pasa por el punto *inferior* del círculo generador.

Es sabido que el ángulo entre la tangente y la normal es un ángulo recto. Este es un ángulo inscrito en la circunferencia del círculo generador por lo que debe apoyarse en el diámetro de este círculo. Así,  $TT_1$  es el diámetro y  $T_1$  es el punto *superior* del círculo generador. Y por tanto, podemos formular un corolario a partir del teorema anterior.

**Corolario (segunda propiedad fundamental de la cicloide).** La tangente a la cicloide pasa por el punto *superior* del círculo generador.

Llevemos a cabo la construcción de la cicloide por puntos, como hicimos en la figura 1.1. En la figura 1.6 la base de la cicloide se ha dividido en seis partes iguales (como sabemos, cuanto mayor sea la cantidad de divisiones, tanto más precisa será nuestra construcción). En cada punto construido se ha trazado una tangente uniendo el punto de la curva con el punto *superior* del círculo generador. En el gráfico considerado se obtienen siete tangentes (dos de ellas verticales). Tracemos ahora la cicloide intentando que sea tangente a cada una de estas tangentes. Además, la propia cicloide “envolverá” a todas las tangentes<sup>4</sup>.

Tracemos en la misma figura 1.6 las normales a todos los puntos de la cicloide (en total serán cinco, sin contar la recta directriz). A continuación construyamos la envolvente de estas normales. Si en lugar de 6 tomáramos 12 ó 16 puntos de división, entonces en el gráfico tendríamos más normales y la envolvente se vería con más claridad.

<sup>4</sup>Una línea de este tipo se denomina *envolvente*. Toda curva es una envolvente de sus tangentes.

Esta envolvente de todas las normales desempeña un papel importante en el estudio de las propiedades de cualquier curva. En el caso de la cicloide se pone de manifiesto un hecho curioso: como envolvente de las normales se puede tomar la misma cicloide, sólo que desplazada  $2a$  unidades hacia abajo y  $\pi a$  unidades hacia la derecha. Más adelante volveremos a mencionar este resultado característico de la cicloide.

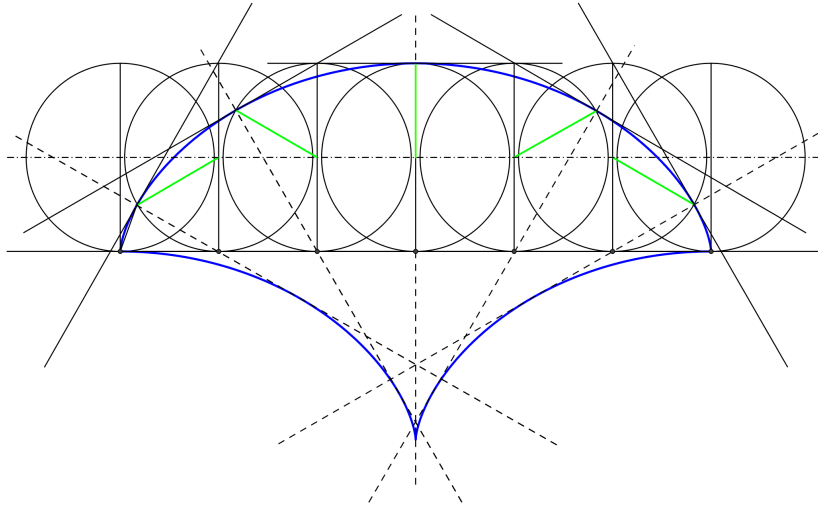


Figura 1.6: La cicloide es la envolvente de sus tangentes

## 1.6. Definición geométrica de la cicloide

Consideremos la recta arbitraria  $AB$  (asumiremos que es horizontal) y el punto  $M_0$  que pertenece a  $AB$ . A continuación, consideremos todos los círculos de radio determinado, tangentes a esta recta y ubicados a un lado de la misma. En cada círculo, a partir del punto  $T$  de tangencia con la recta  $AB$ , tomemos (en dirección hacia el punto  $M_0$ ) el arco  $TM$ , de longitud igual al segmento  $M_0T$ . El lugar geométrico de los puntos  $M$  (tomados en todos los círculos considerados) será la cicloide.

Si quisiéramos deducir la propiedad de la tangente y la normal a la cicloide utilizando sólo esta definición, nos enfrentaríamos a grandes dificultades: no en vano ni Torricelli ni Roberval pudieron superarlas y se remitieron a la mecánica.

Descartes, en su análisis puramente geométrico de la cicloide, se apoyó en un eficaz método de investigación geométrica inventado por él mismo: el método de coordenadas<sup>5</sup>.

Intentemos establecer otra propiedad importante de la cicloide y utilizarla como base para investigar esta curva.

Consideremos el triángulo  $MTT_1$  (figura 1.7), formado por el diámetro vertical del círculo generador, la tangente y la normal a la cicloide. El ángulo  $MT_1T$ , como ángulo inscrito, es igual a la mitad del ángulo central que se apoya en ese mismo arco, es decir, es igual a  $\varphi/2$ . Tracemos  $MK \parallel AB$  y  $ME \perp AB$ . En lo sucesivo el segmento  $ME$  desempeñará un importante papel, por lo que le daremos nombre y notación: lo denominaremos *altura* del punto  $M$  de la cicloide y lo denotaremos con la letra  $h$ . De esta manera, la altura del punto  $M$  de la cicloide es igual a la distancia que lo separa de la recta directriz.

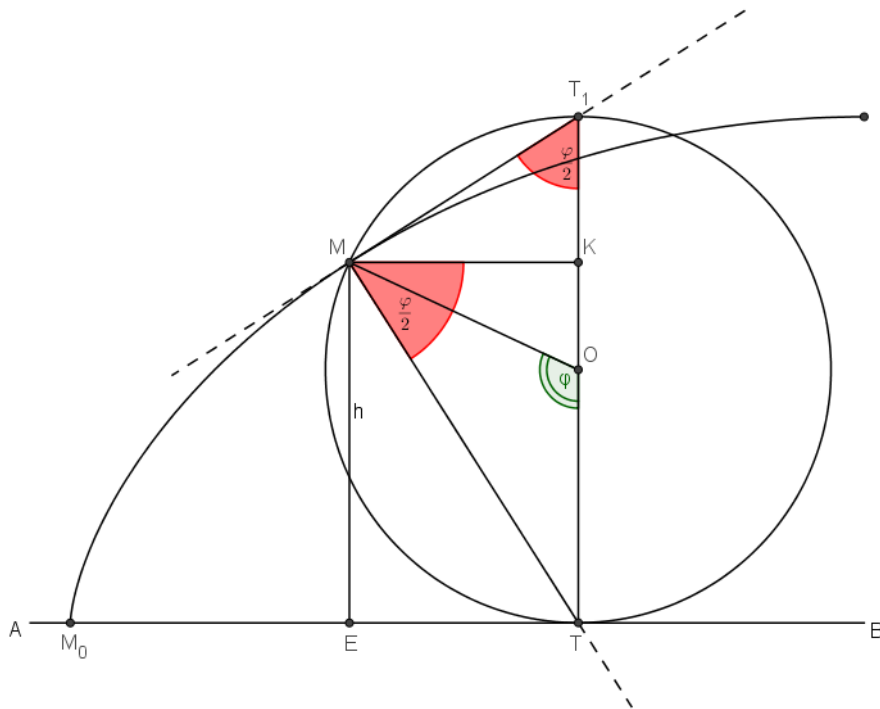


Figura 1.7: Relación entre la *altura* y la pendiente de la tangente

<sup>5</sup>Para mas información acerca de este método se recomienda el libro [8] de la bibliografía

Prestemos atención al ángulo  $KMT$  que es igual al ángulo  $MT_1T$ . Del triángulo  $TMT_1$  obtenemos:

$$MT = 2a \left( \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \right)$$

y del triángulo  $TKM$ :

$$KT = MT \left( \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \right)$$

Comparando estos resultados y puesto que  $KT = h$ , obtenemos finalmente

$$h = 2a \left( \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} \right).$$

Hemos expresado la altura del punto  $M$  mediante el ángulo entre la tangente en el punto  $M$  y la vertical (seguimos considerando que la recta  $AB$  es horizontal). Ahora expresemos el seno de este ángulo mediante la *altura*. Obtenemos de forma evidente:

$$\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{h}{2a}} = k\sqrt{h},$$

donde  $k = \sqrt{\frac{1}{2a}}$  es una constante para la cicloide dada.

Lo que da pie al siguiente teorema:

**Teorema 4.** El seno del ángulo formado por la tangente a la cicloide en el punto  $M$  y la vertical, es proporcional a la raíz cuadrada de la *altura* del punto  $M$ .

Toda cicloide posee, evidentemente, esta propiedad, pero es posible demostrar que además es la única curva que lo cumple, de modo que el siguiente teorema es recíproco:

**Teorema 5.** Dados una recta  $AB$  y un punto  $M$ , la única curva que cumple las condiciones del Teorema 4 y pasa por el punto  $M$  es la cicloide.

Además, el radio del círculo generador de esta cicloide está relacionado con el coeficiente  $k$  (del que se habla en el Teorema 4), mediante la expresión:

$$k = \sqrt{\frac{1}{2a}}$$

Como es lógico, la distancia desde el punto  $M$  hasta  $AB$  debe ser menor que  $2a$ .



La demostración rigurosa de este teorema mediante el uso de matemática elemental es muy voluminosa, por lo que no ha sido incluida.

Si en las condiciones del Teorema 5 no se aclara que la curva investigada pasa por el punto  $M$ , entonces se obtiene no una<sup>6</sup>, sino un número infinito de cicloides, que se obtienen una de otra por desplazamiento paralelo en dirección de la recta  $AB$  (una pasa por el punto  $M$ ; otra por  $M_1$ , otra por  $M_2$ , y así sucesivamente). Este conjunto es conocido como *familia de cicloides*.

Otra propiedad de la cicloide que merece ser destacada es que su arco es simétrico respecto a la perpendicular trazada por el centro de la base.

En la siguiente sección pasaremos a analizar brevemente otra notable curva investigada por Roberval, quien la denominó *curva compañera* de la cicloide.

## 1.7. La “curva compañera” de la cicloide y su descubrimiento

Consideremos la cicloide mostrada en la figura 1.8. Desde el punto  $M$  tracemos la perpendicular hasta el diámetro vertical del círculo generador: obteniendo el punto  $P$ . Llevemos a cabo el mismo procedimiento con todos los puntos de la cicloide, sin excepción (así, al punto  $M_2$  le corresponderá el punto  $P_2$ , al vértice de la cicloide, el propio vértice  $P_1$ , etcétera). Cuando el punto  $M$  describe un arco completo de la cicloide, el punto  $P$  también describe cierta curva. Precisamente esta curva se denomina *curva compañera* de la cicloide. Sus propiedades fueron investigadas por Gilles de Roberval, quien las utilizó para el cálculo del área limitada por el arco de la cicloide y su base.

Tomemos el punto  $M$  de la cicloide y el correspondiente punto  $P$  de la curva compañera (figura 1.9). Denotemos el centro del círculo generador con la letra  $Q$ . Entonces, tendremos

$$\begin{aligned} QP &= QM \cos \angle MQP = a \cos(180^\circ - \varphi) = \\ &= -a \cos \varphi = -a \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi) = \\ &= a \operatorname{sen}(\varphi - 90^\circ). \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>Incluso cuando se cumplen rigurosamente las condiciones del Teorema 5, no se obtiene una, sino dos cicloides.

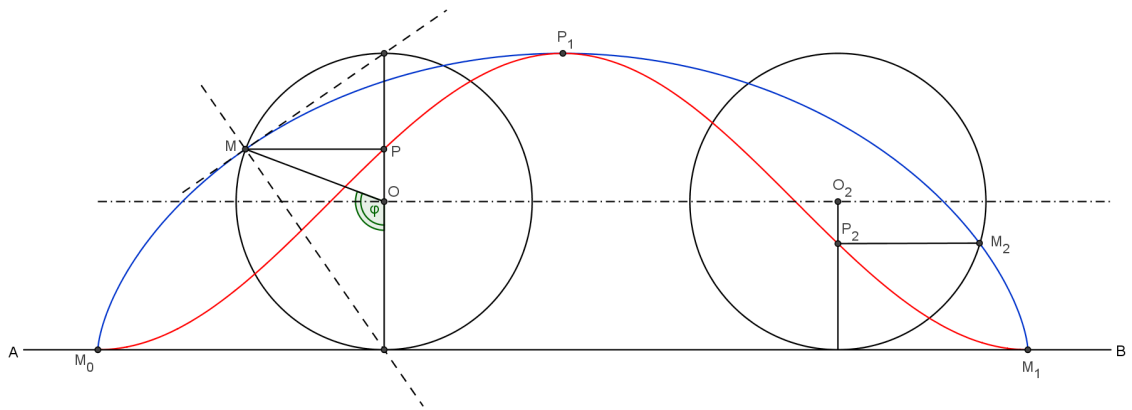


Figura 1.8: Curva compañera de la cicloide

Construyamos gráficamente el lugar geométrico de los centros del círculo generador (recta  $X_1X$  en la figura 1.9).

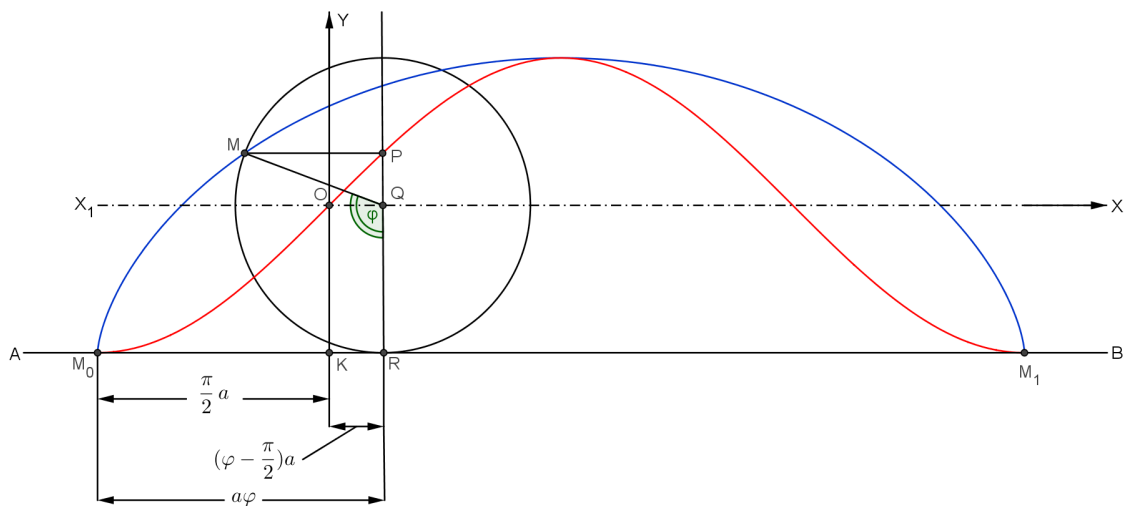


Figura 1.9: La curva compañera de la cicloide es una senoide

Desde el punto  $M_0$  tomemos en la recta  $AB$  el segmento  $M_0K$ , igual a  $\frac{\pi a}{2}$ . Tracemos  $KY \perp X_1X$ . Denotemos con la letra  $O$  el punto de intersección entre  $X_1X$  y  $KY$ . Con esto ponemos fin a todas las construcciones auxiliares, ahora podemos establecer la verdadera “identidad” de la curva compañera de la cicloide.

El segmento  $M_0R$  en la recta directriz, desde el punto de retroceso  $M_0$  de la cicloide hasta el punto de contacto del círculo generador  $R$ , es igual a  $a\varphi$ , donde  $\varphi$  es el ángulo principal  $MQR$ , expresado en radianes<sup>7</sup>.

El segmento  $OQ$  en el eje horizontal  $X_1X$  es igual a  $M_0R - M_0K = \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)a$ , y el segmento  $QP$  es igual a  $a\text{sen}\angle PMQ$ , es decir, al seno del ángulo  $\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$  multiplicado por el radio  $a$ .

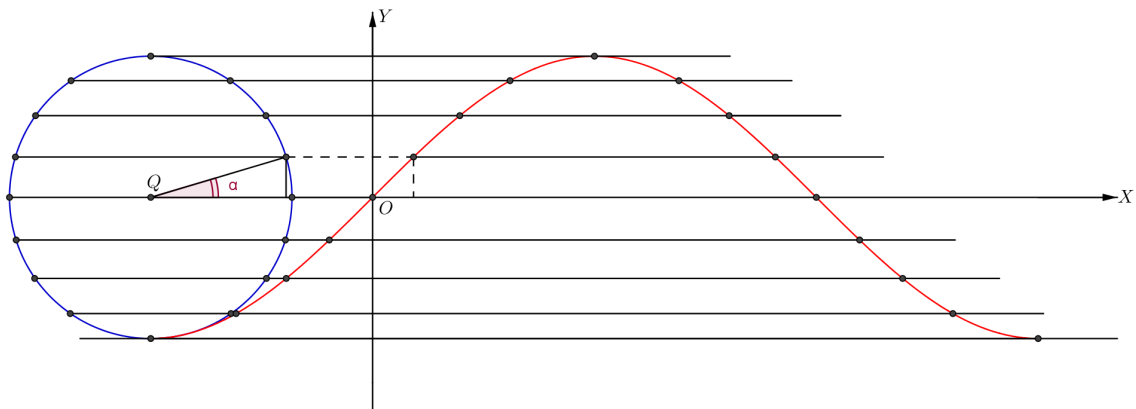


Figura 1.10: Construcción de la senoide

Así, desde el punto  $O$ , por la horizontal, se trazan segmentos de igual longitud a los arcos de la circunferencia, y por la vertical, las líneas de los senos de los ángulos correspondientes a estos arcos. Aquí podemos reconocer el conocido método de construcción de la senoide. Aunque el “inicio” de esta senoide ( $O$ ) no coincide con el “pico” de la cicloide, sino que está desplazado  $\frac{\pi}{2}a$  unidades a la derecha y  $a$  unidades hacia arriba.

En la figura 1.11 se muestran varias figuras limitadas por arcos de senoide, rectas verticales y rectas horizontales. A partir de las propiedades de simetría es fácil deducir que los sectores I, II, III, IV (señalados cada uno de un color) son iguales. Así, el giro de  $180^\circ$  alrededor del punto  $O$  en el plano de la figura, superpone los sectores I y II, la reflexión especular respecto a la recta entre II y III, superpone los sectores II y III, y la reflexión especular respecto a la recta entre III y IV, superpone los sectores III y IV con III y I, respectivamente.

<sup>7</sup> $M_0R$  es igual a la longitud del arco  $MR$ , y la longitud del arco de la circunferencia es igual a  $a\varphi$  (aquí  $\varphi$  es el ángulo central expresado en radianes)

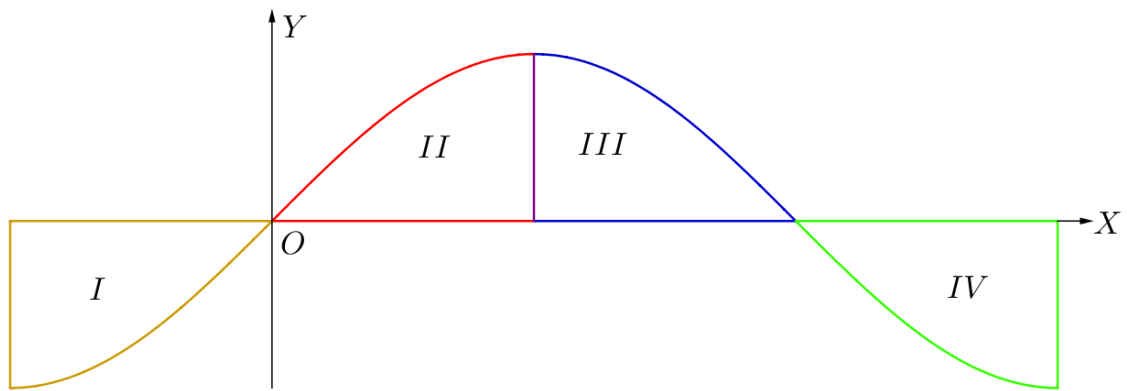


Figura 1.11: Propiedades de la senoide

Así, en la figura 1.12 se observa que la senoide divide al rectángulo  $ABCE$  en dos partes que poseen la misma área. En efecto, si la figura  $AOTE$  se gira  $180^\circ$  alrededor del punto  $O$ , la haremos coincidir con la figura  $AOTK$ . De igual forma, cuando la figura  $KBPT$  se gira  $180^\circ$  alrededor del punto  $P$ , la haremos coincidir con la figura  $CTPB$ .

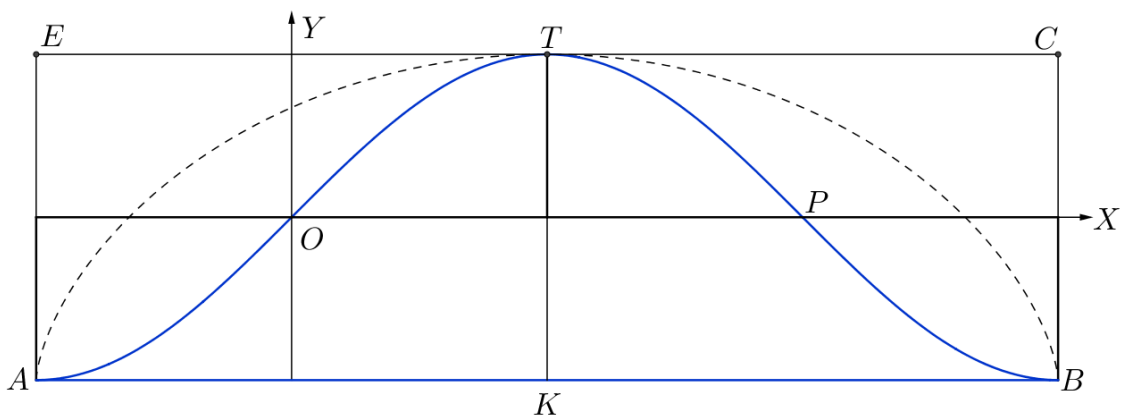


Figura 1.12: Área entre la senoide y la recta directriz

Por consiguiente, el área limitada por la curva compañera de un arco de la cicloide y por la base de este arco, es igual a la mitad del área del rectángulo  $AECEB$ , cuya base  $AB$  tiene igual longitud que la circunferencia del círculo generador, es decir, es igual a  $2\pi a$ , y la altura  $KT$  es igual al diámetro del propio círculo ( $2a$ ).

De este modo, el área de la figura  $AOTPBK$  (señalada en azul) es igual a  $2\pi a$  por  $2a$  dividido entre 2. Si denotamos este área con  $S$ , obtenemos la fórmula:

$$S = 2\pi a^2.$$

Lo cual podemos expresar de la siguiente manera:

**Teorema.** El área limitada por la curva compañera de un arco de cicloide y su base es igual al doble del área del círculo generador.

## 1.8. Área de la cicloide

Ya disponemos de la preparación necesaria para calcular el área limitada entre el arco de la cicloide y su base. La primera referencia sobre el cálculo de este área la encontramos en los trabajos de Vincenzo Viviani y Evangelista Torricelli, quienes relacionaron este cálculo con el nombre de su maestro, Galileo Galilei; por eso, el teorema sobre el área de la cicloide frecuentemente se denomina *Teorema de Galileo*.

Tanto Torricelli como Viviani utilizaron un método especial para el cálculo de áreas limitadas por curvas, el *método de los indivisibles*. Este método consistía en que una figura curvilínea era dividida en franjas infinitamente finas, “indivisibles”, cuyas áreas podían ser calculadas con relativa facilidad y después sumadas. Al cabo de medio siglo este procedimiento condujo al surgimiento del cálculo integral. Nos centraremos en otro método de cálculo del área, el método de Roberval (con algunas modificaciones).

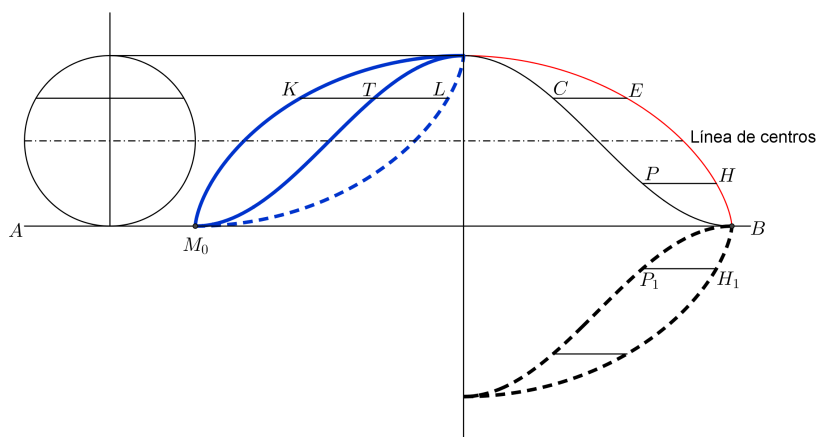


Figura 1.13: Figura de dos hojas de Roberval

Consideremos una figura limitada por el arco de la cicloide y su correspondiente curva compañera. En la figura 1.13, vemos que se compone de dos hojas y está delineada con una línea gruesa. Calculemos su área.

En primer lugar, construyamos la reflexión especular de la hoja derecha de la figura respecto a la directriz  $AB$  (mostrada en la figura 1.13 con línea discontinua). Ahora traslademos esta curva dibujada con línea discontinua hacia arriba y a la izquierda y “peguémosla” a la hoja izquierda de modo que los arcos de las sinusoides de cada hoja coincidan. Obtendremos la figura convexa delimitada por el color azul en la figura 1.13 y mostrada por separado en la siguiente figura:

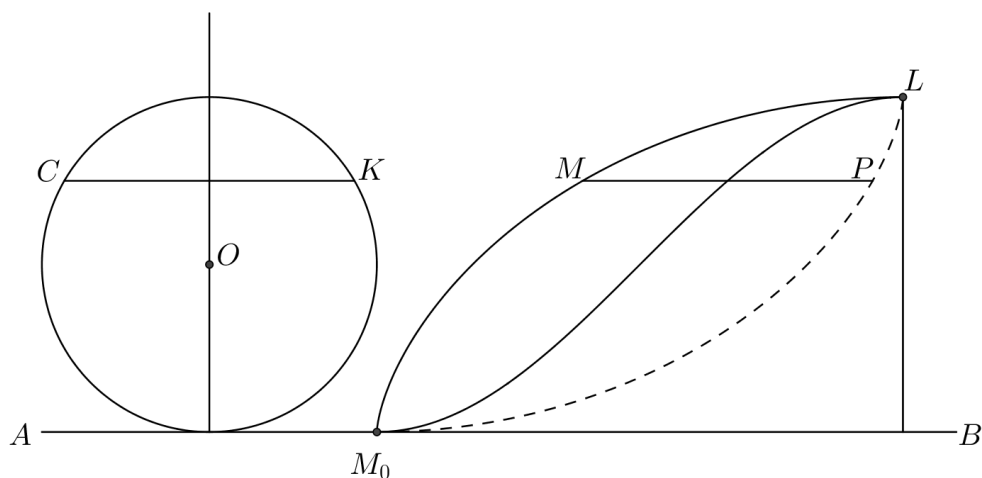


Figura 1.14: Transformación de la figura de dos hojas

Establezcamos sus propiedades más importantes:

1. La figura convexa  $M_0PLM$  tiene igual área que la mostrada con línea gruesa en la figura 1.13 ya que está formada por las mismas hojas.
2. Toda cuerda horizontal de la figura convexa es igual al doble de la cuerda que se encuentra en la hoja a la misma distancia de  $AB$ . En efecto, las cuerdas  $CE$  y  $PH$  (figura 1.13) de la hoja derecha que se encuentran a una misma distancia de la línea de centros, son iguales, pues las semicuerdas iguales a ellas del círculo generador se encuentran a la misma distancia del centro. Esto significa que:

$$KT = CE = PH = P_1H_1 = TL.$$

Hemos obtenido un importante resultado: la cuerda  $MP$  de la figura convexa (figura 1.14) es igual a la cuerda  $CK$  del círculo generador, la cual está a la misma distancia de la recta directriz.

Supongamos ahora que trazamos la recta tangente superior a la figura 1.14. A continuación, trazamos rectas paralelas a la directriz, unimos sus puntos de intersección con la circunferencia y el contorno de la figura convexa mediante segmentos. Ahora, si aumentáramos ilimitadamente el número de rectas “intermedias” paralelas a  $AB$  de forma tal que la distancia entre cualquier par adyacente tienda a 0. Entonces, obtendremos en el círculo una serie de polígonos inscritos cuya cantidad de lados crece infinitamente, y cada uno de los lados tiende a 0. Sabemos que el área  $S_n$  de estos polígonos en el límite es el área del círculo,

$$\lim S_n = \pi a^2$$

De este modo, obtenemos inmediatamente la siguiente consecuencia: el área de la figura de dos hojas (figura 1.13) es igual al área del círculo generador.

Observemos ahora la figura 1.12. El área de  $AOTPBKA$ , como vimos, es igual al doble del área del círculo generador (el área entre la curva compañera de un arco de cicloide y la base de esta cicloide). Acabamos de determinar que el área de la figura de dos hojas es igual al área del círculo generador. Por consiguiente, obtenemos el siguiente teorema, conocido con el nombre de *Teorema de Galileo*.

**Teorema (de Galileo).** El área limitada por un arco de la cicloide y su base es igual al triple del área del círculo generador.

Comprobemos ahora el cálculo de este área gracias a la matemática superior, para ello, como sabemos, si una curva  $C$  viene dada por las ecuaciones  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  con  $t \in (t_1, t_2)$ , y estas funciones definen entre los puntos de abscisas  $a = x(t_1)$  y  $b = x(t_2)$  una función  $y = f(x)$  integrable, entonces el área encerrada entre la curva  $C$  y el eje  $OX$  es:

$$A = \int_a^b |f(x)| dx = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)x'(t)| dt$$

Por lo que, sustituyendo:

$$A = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos(t))(1 - \cos(t))dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{2} - 2\cos(t) + \frac{1}{2}\cos(2t) \right) dt$$

Llegamos a:

$$A = a^2 \left( \frac{3}{2}t - 2\text{sen}(t) + \frac{1}{4}\text{sen}(2t) \right) dt$$

Que al evaluarlo en 0 y  $2\pi$ :

$$A = 3\pi a^2$$

Tal y como esperábamos.

## 1.9. Otras propiedades de la cicloide

Una vez hemos calculado el área, es natural hablar sobre la longitud del arco de la cicloide y sobre los volúmenes de los cuerpos generados por el giro de este arco. Analicemos primero los volúmenes.

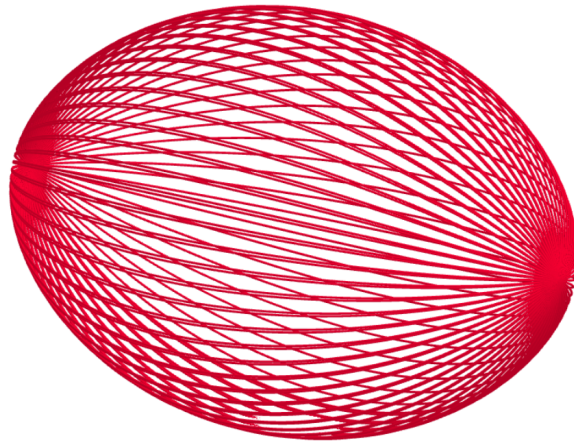


Figura 1.15: Cuerpo de revolución en forma de melón generado por la cicloide

Cuando un arco de la cicloide gira alrededor de su base, genera una superficie que limita un cuerpo con forma de melón (figura 1.15). Para obtener el volumen de este cuerpo, Roberval lo dividió en un número infinito de finas capas, inscribió un cilindro en cada una y luego sumó los volúmenes de todos los cilindros. En la actualidad la matemática superior permite calcular este volumen con facilidad. En primer lugar, recordemos cómo calcular tanto el área como el volumen de sólidos de revolución:



Si una curva está definida por las funciones  $x(t)$  e  $y(t)$ , perteneciendo  $t$  a un intervalo  $[a, b]$  y siendo el eje de revolución el eje  $X$ , el área  $A$  estará dada por la integral:

$$A = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Y si se gira una figura plana comprendida entre  $y = f(x)$ ,  $y = 0$ ,  $x = a$  y  $x = b$  alrededor del eje  $OX$ , el volumen del sólido de revolución viene generado por la fórmula:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Enunciemos el resultado: el volumen del cuerpo generado por la rotación del arco de la cicloide alrededor de su base es igual a  $5\pi^2 a^3$ . Y el área de este cuerpo:  $\frac{64}{3}\pi a^2$ , es decir, supera en más de 21 veces el área del círculo generador.

Guilles de Roberval consideró también otra superficie generada por la rotación de la cicloide: construyó la reflexión de un arco de la cicloide respecto a la base e hizo girar respecto al eje  $KT$  la figura oval obtenida de la cicloide y su reflexión (figura 1.16). Las fórmulas para el cálculo del área y volumen de este nuevo cuerpo de revolución varían de las anteriores, pero no tienen mayor dificultad. El área de la superficie de revolución obtenida es igual a  $32\pi^2 a^2$  y el volumen del cuerpo en forma de “paraguaya” limitado por esta superficie es igual a  $12\pi^3 a^3$ .

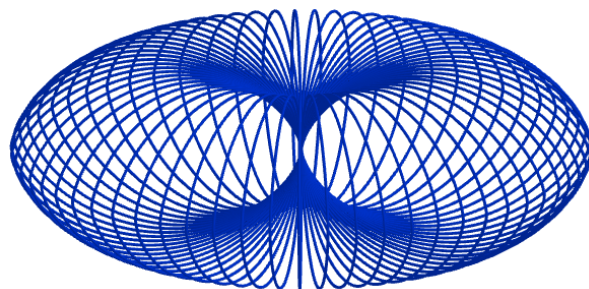


Figura 1.16: Cuerpo de revolución en forma de paraguaya generado por la cicloide

Poco tiempo después, el notable físico Blaise Pascal determinó el volumen y el centro de gravedad de los cuerpos generados por la rotación de las partes de la cicloide alrededor de diferentes ejes.

En 1658, el arquitecto y matemático inglés Christopher Wren, constructor de la famosa cúpula de la catedral de San Paul en Londres, determinó la longitud de la cuerda de la cicloide. Su descubrimiento provocó una gran impresión ya que en aquella época el problema del cálculo de la longitud de los arcos de las curvas era considerado de extrema dificultad y había sido resuelto sólo para contadas curvas (la circunferencia, la parábola y algunas espirales).

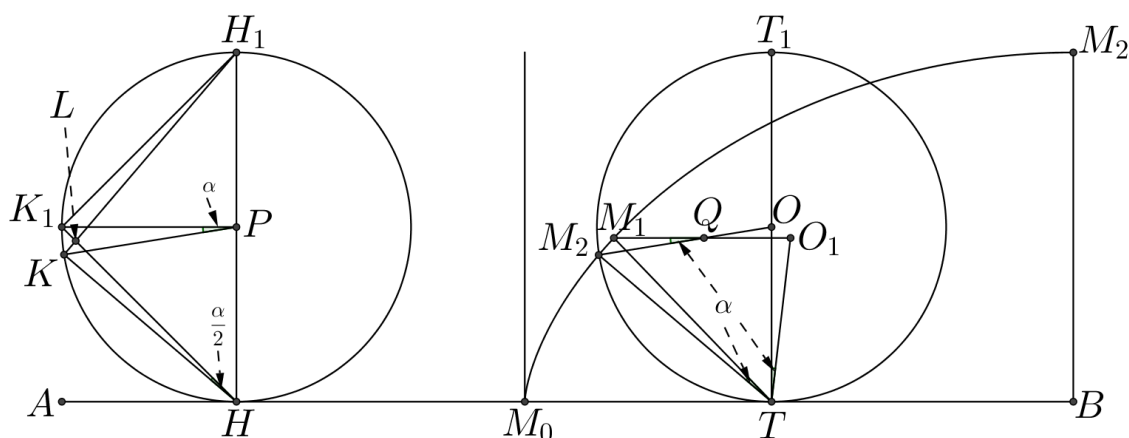


Figura 1.17: Idea aproximada del razonamiento de Wren

Wren comenzó su cálculo a partir de razonamientos de la mecánica, lo que nos recuerda los primeros trabajos de Torricelli y Roberval. Él analizó el giro en un ángulo muy pequeño  $\alpha$  de un círculo (generador) que rueda cerca del punto  $T$  (figura 1.17). Además, el centro de este círculo se mueve del punto  $O$  al punto  $O_1$  de modo que el ángulo  $OTO_1$  es exactamente igual a  $\alpha$ . En este mismo ángulo gira la cuerda  $TM$ , y de manera simultánea el punto  $M$  describe un pequeño arco de la cicloide y llega al punto  $M_1$ .

Consideraremos, como Wren, que el ángulo  $\alpha$  es tan pequeño que resulta imposible diferenciar el arco de la cicloide  $MM_1$  del arco de la circunferencia de radio  $TM$  y centro  $T$ . Esto significa que consideraremos la longitud del arco  $MM_1$  de la cicloide igual a  $MT \cdot \alpha$  (se supone que el ángulo  $\alpha$  está dado en radianes). Aquí estamos cometiendo un error premeditado, pero cuanto menor sea el ángulo  $\alpha$ , tanto menor será el error y por tanto en el límite será despreciable.

Además, como resultado de este pequeño giro, el triángulo  $OMT$  coincide con el triángulo  $O_1M_1T$ . El lado  $OM$  gira en el mismo ángulo que el lado  $MT$ . De este modo, el ángulo entre  $OM$  y  $M_1O_1$ , es decir, el ángulo  $MQM_1$ , será igual a  $\alpha$ .

Construyamos en el círculo de la izquierda, de centro  $P$  y radio igual a  $OT$ , los radios  $PK \parallel OM$  y  $PK_1 \parallel O_1M_1$ . Evidentemente el ángulo  $K_1PK$  es igual a  $\alpha$ . La cuerda  $KH_1$  es paralela e igual al segmento tangente a la cicloide en el punto  $M$ . La cuerda  $K_1H_1$  no puede diferenciarse mucho del segmento tangente a la cicloide en el punto  $M_1$ , pues al pasar del punto  $M$  al punto  $M_1$  el círculo generador se desliza muy poco. Wren supuso (aunque esto conduce a cierta imprecisión) que esta cuerda es igual al segmento tangente a la cicloide en el punto  $M_1$ .

El ángulo  $KHK_1$  es un ángulo inscrito que se apoya en el mismo arco que el ángulo central  $KPK_1$ , igual a  $\alpha$ , por lo que  $\angle KHK_1 = \frac{\alpha}{2}$ . La disminución de la longitud de la cuerda  $MT_1 = KH_1$  cuando el punto  $M$  pasa a la posición  $M_1$  es igual, con diferencia insignificante, al segmento  $KL$ , el cual a su vez se puede considerar igual al radio  $HK$  multiplicado por el ángulo  $KHK_1$  (expresado en radianes), es decir, igual a  $HK \cdot \frac{\alpha}{2}$  ó  $MT \cdot \frac{\alpha}{2}$ .

A esta disminución de la longitud de la cuerda del círculo generador le corresponde un aumento del arco de la cicloide igual a  $MM_1$ , es decir, como ya se dijo, igual a  $MT \cdot \alpha$ . Hemos obtenido que para un pequeño giro del círculo generador, la disminución de la longitud de la cuerda  $MT_1$  es dos veces menor que el aumento de la longitud del arco de la cicloide.

Desde luego, esta proporción no es del todo exacta; pero si tomamos un giro de  $180^\circ$  del círculo generador, lo dividimos en partes muy pequeñas (*giros elementales*  $\alpha$ ), calculamos las correspondientes disminuciones de las cuerdas y los aumentos de los arcos, calculamos la suma de las disminuciones y de los aumentos y analizamos el comportamiento en el límite, entonces veremos que la disminución total de la longitud de la cuerda es exactamente dos veces menor que la longitud del semiarco de la cicloide. Además, la cuerda varía desde  $2a$  (cuando el punto  $M$  ocupa la posición inferior) hasta  $0$  (cuando el punto  $M$  llega a la posición superior).

La disminución de la longitud de la cuerda es  $2a$ , por tanto, la longitud del semiarco de la cicloide es  $4a$ , y la longitud de todo el arco  $8a$ .

Así pues, estos razonamientos indican que la longitud de un arco de la cicloide debe igualarse a ocho radios del círculo generador. Este resultado es sorprendente, pues incluso para la longitud de una curva tan simple como la circunferencia, fue necesario introducir el número irracional  $\pi$ , cuyo cálculo no es sencillo.

Wren realizó una demostración de la rectificación de la cicloide que fue recogida en el libro *Tractus duo*, publicado por Wallis y dándole a Wren la prioridad sobre la prueba. Las demostraciones de los teoremas dadas por los científicos del Renacimiento, o bien son muy complejas y voluminosas, o bien tienen carácter de razonamientos intuitivos en lugar de demostraciones matemáticas rigurosas; con frecuencia se utilizaba la mecánica, aunque ya en aquella época se consideraba preferible una exposición geométrica independiente de la mecánica. También hay que tener en cuenta que los trabajos de los científicos del siglo XVII dedicados a cualquier otra curva adaptan sus razonamientos a casos concretos, es decir, en aquella época no existían métodos generales y cada investigación requería de procedimientos nuevos y, en ocasiones, muy ingeniosos.

Podemos comprobar el resultado gracias a la matemática de nuestros días de una manera rápida y sencilla. Sabemos que si una curva plana viene dada en paramétricas, la longitud de su arco se calcula mediante la fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Donde, sustituyendo obtenemos:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1 - \cos(t)))^2 + (a \cdot \operatorname{sen}(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1 - \cos t)} dt$$

Teniendo en cuenta la fórmula del ángulo mitad:

$$L = a \int_0^{2\pi} \sqrt{4\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt = 2a \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt = -4\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

Que al evaluarlo en 0 y  $2\pi$  nos da:

$$L = 8a$$

Como era de esperar.

## Capítulo 2

### Curvas relacionadas con la cicloide

Imaginemos un círculo generador “preparado para comenzar a rodar”. En breve, el punto  $M_0$  situado en la circunferencia describirá una elegante cicloide. Supongamos que existe un punto  $C_0$  que se encuentra en el interior de la circunferencia del círculo generador y un punto  $E_0$  que es un punto exterior, rígidamente fijado al círculo generador. Podemos suponer, por ejemplo, que  $E_0$  está en el borde exterior (reborde) de la rueda de un tren. Tanto  $C_0$  (punto interior) como  $E_0$  (punto exterior) se moverán junto con la rueda y describirán ciertas curvas.

En este capítulo nos dedicaremos al estudio de las curvas que describen los puntos exteriores e interiores de un círculo que rueda.

Mientras el círculo generador rueda, el punto interior describe una curva que llamaremos *cicloide acortada*. Tracemos por el punto  $C_0$  una circunferencia auxiliar (figura 2.1). Cuando el círculo generador rueda por la recta  $AB$ , la circunferencia pequeña se desplazará por la recta  $A'B'$ , pero su movimiento se acompañará de deslizamiento. De este modo, se puede decir que la cicloide acortada es la curva que describe un punto de la circunferencia de un círculo que rueda con deslizamiento por la recta directriz.

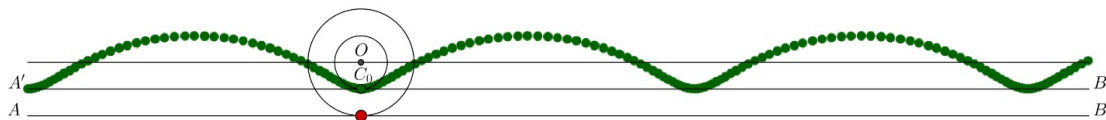


Figura 2.1: Cicloide acortada

De forma análoga, el punto exterior del círculo generador describe la curva denominada *cicloide alargada*. La cicloide alargada se puede considerar como una curva generada por un punto de la circunferencia de un círculo que rueda, pero cuando el movimiento se acompaña de un deslizamiento en dirección contraria.

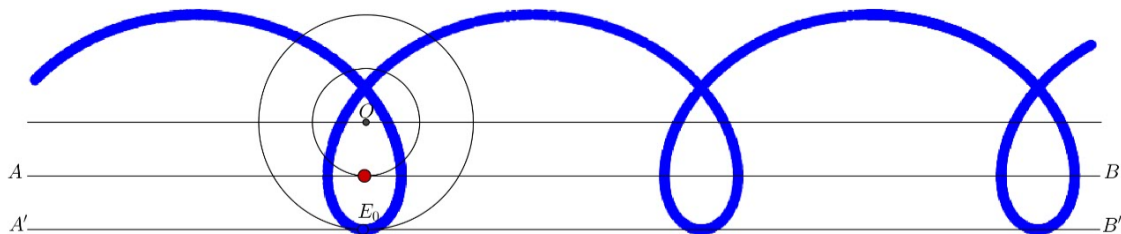


Figura 2.2: Cicloide alargada

La cicloide acortada nos recuerda vagamente a una senoide y la cicloide alargada es una curva con bucles. En la actualidad, ambas curvas conservan el nombre de *trocoide*, con el que en el pasado los matemáticos franceses nombraban a todas las curvas relacionadas con el desplazamiento con rotación de un círculo por una recta, entre ellas, a la cicloide común.

Toricelli, Cavalieri, Roberval y Descartes también investigaron las tangentes a las cicloides acortada y alargada. Wren estableció que la longitud del arco de estas curvas era igual a la longitud del arco de algunas elipses cuya construcción resulta fácil si se tienen la base y el círculo generador de la cicloide.

Como un ejemplo cotidiano y sencillo, observemos el juguete conocido como “tentetieso”. La parte inferior del juguete tiene forma de semiesfera (la parte superior nos resulta indiferente) y en su interior tiene un cierto peso que provoca que su centro de gravedad se encuentre muy bajo. Si inclinamos el “tentetieso”, su centro de gravedad describirá un arco de cicloide acortada, pues, en esencia, estamos ante el movimiento de un punto interno de un círculo que rueda por una recta.

Si inclinamos el juguete y después lo soltamos, entonces se moverá de modo que su centro de gravedad descienda lo más posible, lo que significa que el tentetieso regresará a su posición inicial (se pondrá de pie).

## 2.1. Epicloide

Continuaremos haciendo rodar el círculo generador, pero ahora no lo haremos por una recta, sino por la parte exterior de la circunferencia de otro círculo.

Dependiendo de la razón entre los radios de los círculos móvil y fijo (generador y directriz), se obtendrán diferentes curvas: todas pertenecen a la misma familia y se denominan *epicicloides*.

Comencemos la descripción de las epicicloides con el caso en que el radio del círculo generador es dos veces menor que el radio del círculo directriz: obtenemos una curva con dos puntos de retroceso.

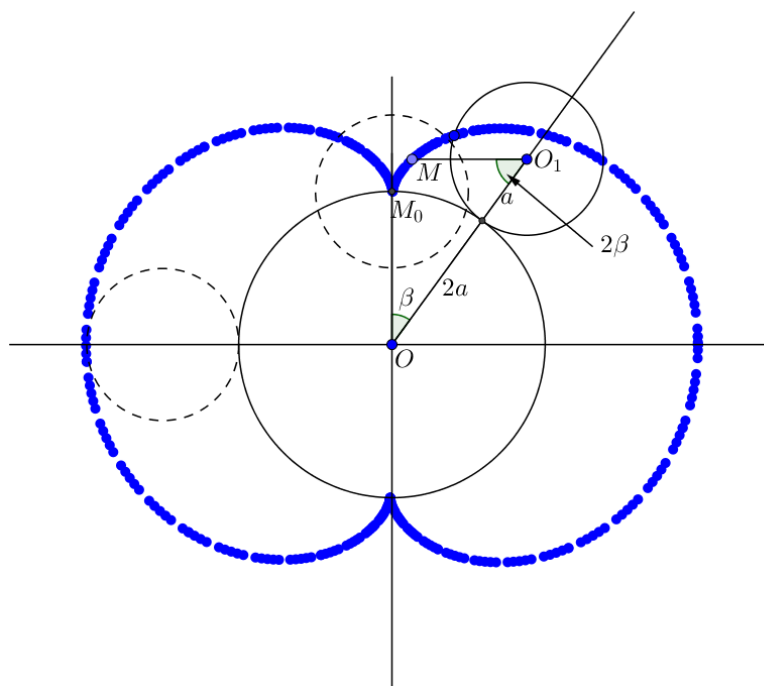


Figura 2.3: Epicicloide con dos puntas

Si el radio del círculo “fijo” es tres, cuatro o seis veces mayor, entonces se obtienen figuras parecidas a flores con tres, cuatro o seis pétalos, respectivamente.

Los mismos científicos que investigaron la cicloide común establecieron las reglas para la construcción de la tangente a diferentes epicicloides, así como también las propiedades métricas de estas curvas (es decir, las propiedades relacionadas con la medición de la longitud de los arcos, las áreas que estos limitan, etcétera). Las deducciones de estas propiedades son muy parecidas a las correspondientes a la cicloide común. Aquí expondremos los resultados<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Para conocer mejor a estas curvas, se aconseja el libro [7] de la bibliografía

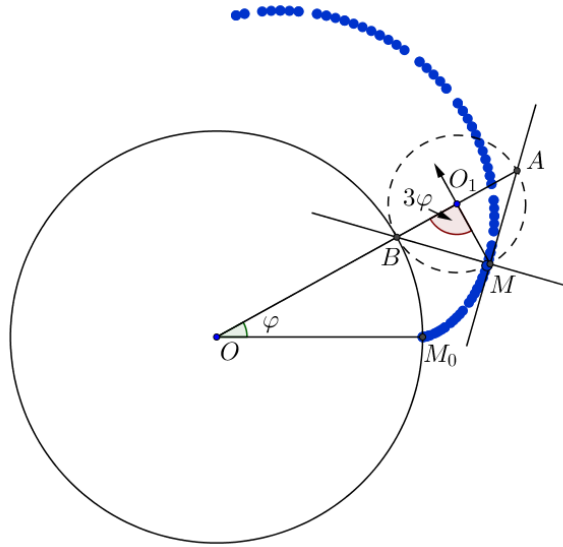


Figura 2.4: La tangente y la normal a la epicloide

Consideremos el círculo directriz con centro  $O$  (figura 2.4). Sea  $M_0$  el punto de retroceso de una epicloide de tres puntas (los razonamientos casi no varían cuando la cantidad de puntas es otra). Sea también  $O_1$  el centro del círculo móvil, es decir, del círculo generador (el propio círculo se muestra en la figura con línea discontinua). Construyamos el punto  $M$  de la epicloide correspondiente a esta posición del círculo generador. Si denotamos el ángulo  $O_1OM_0$  mediante  $\varphi$ , entonces es necesario tomar el ángulo  $OO_1M$  igual a  $3\varphi$  (desde luego, estamos considerando la rodadura sin deslizamiento). El centro  $O_1$  se mueve en dirección perpendicular a  $OO_1$ ; en este movimiento también participa el punto  $M$ , que además participa en la rotación alrededor del centro  $O_1$ .

Los mismos razonamientos que tuvimos en cuenta para el caso de la cicloide común conducen al siguiente resultado: la tangente a la epicloide pasa por el punto “superior” ( $A$ ), y la normal pasa por el punto “inferior” ( $B$ ) del círculo generador.

Al igual que hicimos en el caso de la cicloide común denotaremos con la letra  $a$  el radio del círculo generador. En el caso de la cicloide común, el número  $a$  determina totalmente a la curva (como, por ejemplo, el radio determina completamente a la circunferencia). En el caso de la epicloide, es necesario indicar otro número: en cuántas veces es mayor el radio del círculo fijo que el radio del círculo móvil. Denotaremos este número con  $n$ . Si  $n = 2$  obtenemos una epicloide con dos puntas, si  $n = 10$  la epicloide posee diez puntas, etcétera.



Teniendo en cuenta esta notación, se obtiene la siguiente fórmula para calcular la longitud de un arco de epicicloide de  $n$  puntas:

$$l_1 = \frac{8(n+1)a}{n}$$

La cicloide común, al igual que la recta, es infinita, por lo que no es posible hablar de su longitud total. Por el contrario, la epicicloide es acotada (como la circunferencia), por lo que junto con la longitud de su arco, se puede indicar su longitud total, la cual, evidentemente, es  $n$  veces mayor que la longitud de un arco. La longitud de toda la epicicloide es:

$$l = n \cdot l_1 = 8a(n+1)$$

Del mismo modo, con respecto al área, es posible obtener las fórmulas tanto para el área entre un arco y el círculo fijo, como para toda el área limitada por la epicicloide. La cicloide común, a diferencia de la epicicloide, no es una curva cerrada, por lo que no limita ningún área. Denotemos con  $S_1$  el área entre el círculo generador y un arco, y el área total abarcada por toda la epicicloide, mediante  $S$ .

Es evidente que  $S$  es igual a  $n$  veces el área de  $S_1$  más el área del círculo fijo.

Las fórmulas para  $S_1$  y  $S$  son

$$S_1 = \frac{3n+2}{n} \pi a^2$$

$$S = 3\pi a^2(n+1)$$

Modifiquemos ligeramente las condiciones tomadas en consideración para generar la epicicloide. Supongamos que tenemos un círculo directriz y que por él se mueve uniformemente el centro de otro círculo que rota también de manera uniforme.

La construcción indicada nos conduce a la epicicloide de Tolomeo, que resulta no ser una epicicloide “verdadera” ya que sería necesario elegir una proporción específica entre la velocidad en el centro y la velocidad angular de rotación del círculo móvil. Si la relación entre estas velocidades es otra, el círculo móvil rodará con deslizamiento por el círculo directriz, y en lugar de epicicloides comunes, se obtendrán *epicicloides acortadas o alargadas*.

Imaginemos ahora que en un aro fijo se “cuelga” otro aro móvil de radio 2, 3 o  $n$  veces mayor que el radio del aro fijo. La curva que describe un punto de la circunferencia exterior que rueda por la circunferencia interior se denomina *pericicloide*. Sus propiedades pueden obviarse porque si las analizamos cuidadosamente, cada pericicloide coincide con cierta epicloide.

En general, podemos tener una relación entre los radios mucho más complicada, es decir, que la razón entre los radios del círculo fijo y móvil de la epicloide sea una fracción irreducible  $p/q$ . En este caso, el círculo móvil debe dar  $p$  vueltas (rodeando  $q$  veces la circunferencia fija). Aunque el caso más interesante es el de la epicloide que se obtiene cuando la razón entre los radios de los círculos móvil y fijo es un número irracional. Los radios de los círculos fijo y móvil son inconmensurables y su razón no se puede expresar con un número racional. Por eso, la epicloide generada por estos círculos *nunca* se cierra: no habrá final para sus bucles, tendrá un número infinito de puntos de retroceso y de autointersección.

Recordemos la ecuación paramétrica que define a la epicloide y veamos como calcular los puntos singulares:

$$\alpha(t) := \begin{cases} x(t) = (r_1 + r_2)\cos(t) - r_2\cos\left(t\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)\right) \\ y(t) = (r_1 + r_2)\sen(t) - r_2\sen\left(t\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)\right) \end{cases}$$

Siendo  $r_1$  el radio del círculo directriz y  $t$  el ángulo que forma con la vertical.

Derivando:

$$\alpha'(t) := \begin{cases} x'(t) = (r_1 + r_2) \left( \sen\left(\frac{t(r_1 + r_2)}{r_2}\right) - \sen(t) \right) \\ y'(t) = (r_1 + r_2) \left( \cos(t) - \cos\left(\frac{t(r_1 + r_2)}{r_2}\right) \right) \end{cases}$$

El siguiente paso sería ver cuando se anula la derivada, hagámoslo para el caso particular de la nefroide (figura 2.3). Supongamos  $r_1 = 2r$  y  $r_2 = r$  en la formula anterior:

$$\alpha'(t) := \begin{cases} x'(t) = 3r(\sen(3t) - \sen(t)) \\ y'(t) = 3r(\cos(t) - \cos(3t)) \end{cases}$$

Vemos que la derivada se anula para los valores  $t = 0$  y  $t = \pi$ , tal y como esperábamos.

## 2.2. Cardioide

Ahora pasaremos a estudiar la existencia de una epicicloide cuyo radio del círculo generador sea igual al del círculo fijo, es decir, de una epicicloide con  $n = 1$  y por tanto, posee las mismas propiedades generales que caracterizan a este tipo de curvas.

Las fórmulas para calcular la longitud del arco de la cardioide (que coincide con la longitud de toda la curva) y el área limitada por ella se obtienen a partir de las fórmulas mostradas en la sección anterior mediante la simple sustitución  $n = 1$ .

De este modo, para la cardioide:

$$l = l_1 = 16a$$

$$S_1 = 5\pi a^2$$

$$S = 6\pi a^2$$

Señalemos sólo que, en el caso de la cardioide, los ángulos  $O_0OO_1$  y  $OO_1M$  son iguales.

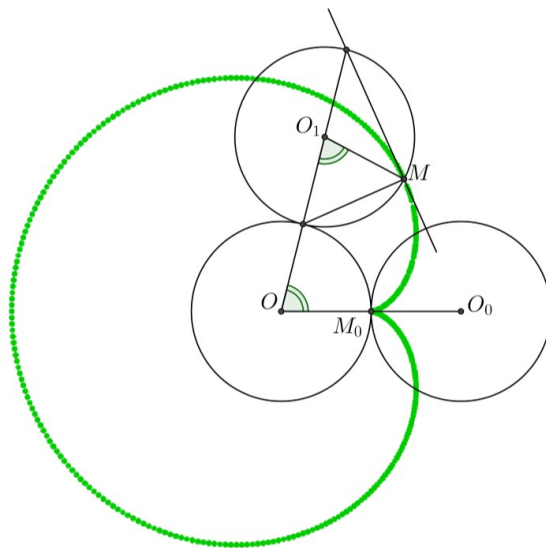


Figura 2.5: Cardioide

El cuerpo que se obtiene producto de la rotación de la cardioide alrededor de su eje de simetría ( $OO_0$  en la figura superior), tiene forma de tomate y su volumen es igual a  $\frac{64}{3}\pi a^3$ .

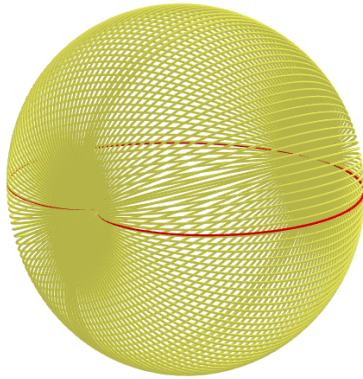


Figura 2.6: Cuerpo de revolución generado por la cardioide

Veamos ahora una interesante propiedad de la cardioide. Unamos un punto  $M$  de la cardioide con su “punta”  $M_0$ , como se muestra en la figura 2.7. Prestemos atención a  $K$ , que es el punto de intersección de la cuerda  $MM_0$  con el círculo fijo. Los ángulos  $M_0OO_1$  y  $OO_1M$  son iguales (se ha mencionado anteriormente). También son iguales los radios  $OM_0$  y  $O_1M$ , lo que significa que la cuerda  $M_0M$  es paralela al segmento  $OO_1$ , que une los centros de los círculos. De forma análoga,  $KO \parallel MO_1$ . Por tanto, el segmento  $KM$  es igual al segmento  $OO_1$ , es decir, al diámetro del círculo fijo (y del círculo móvil). Al unir el punto  $M_0$  con cualquier punto de la cicloide, veremos que el segmento de cuerda que se forma, contenido entre el punto de la curva y el punto  $K$  del círculo fijo, siempre será igual al diámetro del círculo generador. De esta particularidad se obtiene el siguiente método de construcción de la cardioide.

Tracemos una circunferencia de radio  $a$  y centro  $O$ , y tomemos en ella un punto arbitrario  $M_0$  (figura 2.8). Por el punto  $M_0$  tracemos un haz de rayos (mientras más rayos se tomen, tanto más precisa será la curva que se obtenga). Desde los puntos de intersección de los rayos con la circunferencia, tomemos hacia ambos lados, a lo largo de cada rayo, diámetros iguales. El lugar geométrico de los puntos obtenidos mediante este procedimiento será la curva mostrada con línea punteada y azul en la figura.

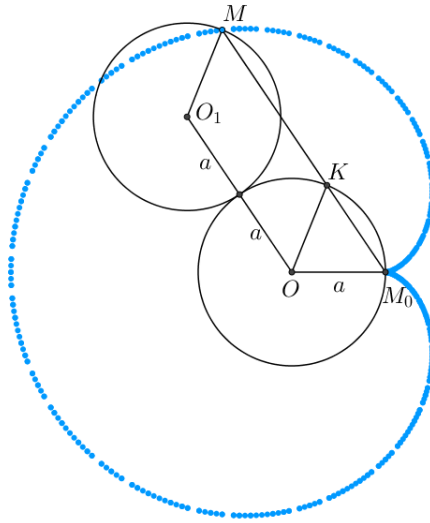


Figura 2.7: Propiedad interesante de la cardioide

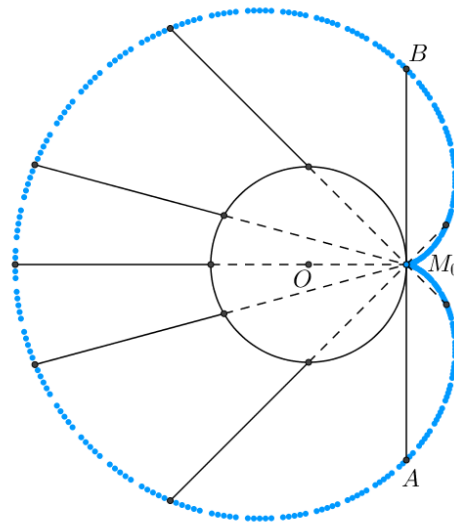


Figura 2.8: Construcción de la cardioide

La cardioide posee diversas aplicaciones en la técnica: las levas se fabrican en forma de cardioide, en ocasiones se utiliza para construir ruedas dentadas y también en la técnica óptica.

Como la cardioide es un caso especial de epicicloide en el que el radio del círculo directriz y del círculo móvil son iguales, su ecuación paramétrica sería:

$$\alpha(t) := \begin{cases} x(t) = 2r\cos(t) - r\cos(2t) \\ y(t) = 2r\sen(t) - r\sen(2t) \end{cases}$$

Y su punto singular se encontrará cuando la derivada se anule:

$$\alpha'(t) := \begin{cases} x'(t) = 2r(\sen(2t) - \sen(t)) \\ y'(t) = 2r(\cos(t) - \cos(2t)) \end{cases}$$

Es decir, en  $t=0$ , como habíamos visto.

### 2.3. Hipocicloide

Hasta el momento, siempre hemos hecho rodar un círculo por el “exterior” de otro, veamos qué ocurre al hacerlo por el interior. Si tenemos un círculo grande que se encuentra fijo y por su interior rueda otro círculo pequeño, entonces cualquier punto de la circunferencia del círculo menor describirá una curva denominada *hipocicloide*. Si el radio del círculo móvil es 2, 3 o  $n$  veces menor que el radio del círculo fijo, entonces se obtiene una hipocicloide con 2, 3 ó  $n$  puntas respectivamente.

Si el círculo interior rueda con deslizamiento, entonces se pueden obtener tanto *hipocicloides alargadas* como *acortadas*.

La normal a la hipocicloide en cualquiera de sus puntos pasa por el punto de tangencia de los círculos móvil y fijo. La tangente a la hipocicloide en cualquiera de sus puntos pasa por el punto diametralmente opuesto al punto de tangencia entre el círculo móvil y el círculo fijo.

Si denotamos mediante  $a$  y  $na$  los radios de los círculos móvil y fijo, respectivamente, entonces la longitud  $l_1$  de un arco de hipocicloide, la longitud  $l$  de toda la hipocicloide, el área  $S_1$  entre un arco de la hipocicloide y el círculo fijo, y finalmente, el área total  $S$  limitada por la hipocicloide de  $n$  puntas, se expresarán con las

siguientes fórmulas:

$$l_1 = \frac{8(n-1)}{n}a$$

$$l = 8(n-1)a$$

$$S_1 = \frac{3n-2}{n}\pi a^2$$

$$S = (n-1)(n-2)\pi a^2$$

Que nos recuerdan las correspondientes fórmulas para las epicicloides.

De todas las hipocicloides, analizaremos con más detalle la hipocicloide con cuatro puntas (figura 2.9), también conocida como *astroide* (parecida a una estrella).

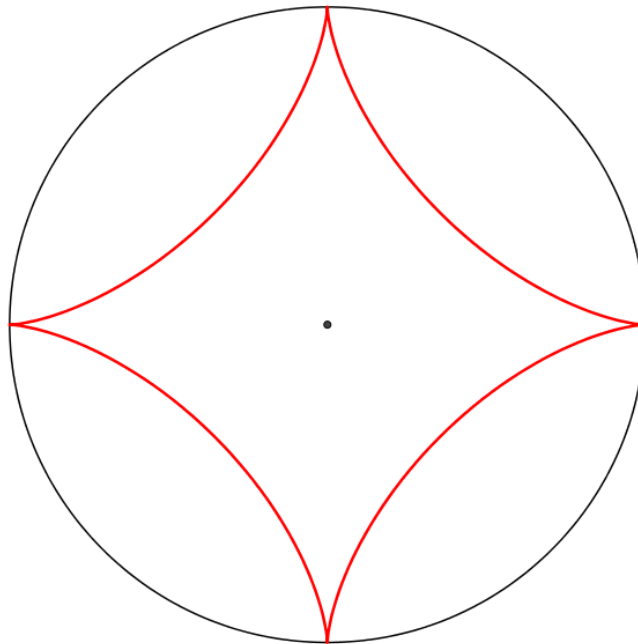


Figura 2.9: Astroide

Generalmente, la astroide no se determina por la longitud del radio del círculo fijo, que comúnmente se denota con  $R$ . Si en las fórmulas que acabamos de mostrar suponemos  $n = 4$  y sustituimos  $a$  por  $R/4$  (de igual valor que  $a$ ), obtendremos para la astroide:

$$l_1 = \frac{3}{2}R$$

$$l = 6R$$

$$S_1 = \frac{5}{32}\pi R^2$$

$$S = \frac{3}{8}\pi R^2$$

Así pues, obtenemos el siguiente teorema:

**Teorema.** La longitud de toda la astroide es igual a seis radios del círculo fijo y el área que ella limita, a tres octavos del área de este círculo.

Observemos con atención la tangente  $AB$  a la astroide en el punto  $M$  (figura 2.10) que, como en todas las hipocicloides, pasa por el punto  $T$ , diametralmente opuesto al punto de tangencia  $K$  de los círculos móvil y fijo. Si denotamos el ángulo  $O_1OM_0$  mediante  $\varphi$ , entonces el ángulo  $MO_1K$  será igual a  $4\varphi$ . La suma de los ángulos de la base del triángulo isósceles  $TO_1M$  tendrá el valor del ángulo exterior no adyacente a ellos  $4\varphi$ , y cada uno de estos ángulos será igual a  $2\varphi$  (por el mismo teorema sobre el ángulo exterior de un triángulo). Pero el ángulo  $TOB$  es igual a  $\varphi$  (según la notación que hemos tomado), por tanto, también el ángulo  $TBO$  será igual a  $\varphi$ , y puesto que el triángulo  $OTB$  es isósceles obtenemos que  $OT = BT$ . Exactamente de la misma manera, comprobaremos que  $TA = OT = TB$ .

Pero  $OT$ , que es la diferencia entre el radio del círculo fijo y el diámetro del círculo móvil, es igual a la mitad del radio del círculo fijo, es decir,  $R/2$ . Por consiguiente, el segmento tangente a la astroide, contenido entre dos radios del círculo fijo perpendiculares entre sí y trazados en las puntas de la astroide, es igual al radio de este círculo fijo independientemente de cómo se tome el punto  $M$ .



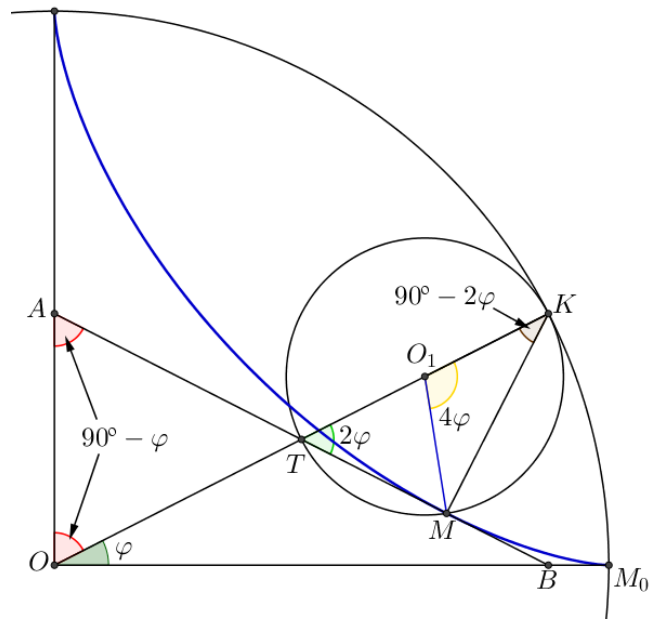


Figura 2.10: Tangente a la astroide

En la figura 2.11 se muestra el cuerpo limitado por la superficie generada por la rotación de la astroide alrededor del segmento que une sus puntas opuestas. el volumen de este cuerpo es igual a  $\frac{32}{105}\pi R^3$  y el área de su superficie es  $\frac{12}{5}\pi R^2$ .

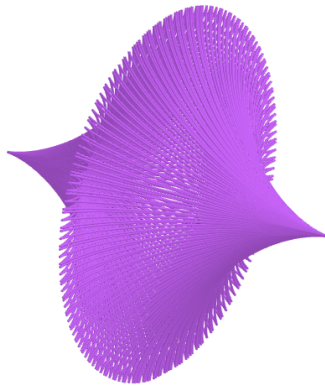


Figura 2.11: Cuerpo de revolución generado por la astroide

Ahora, analizaremos el caso de  $n = 2$ , es decir, la hipocicloide de dos puntas. Supongamos que el centro del círculo móvil ocupó la posición arbitraria  $O_1$ .

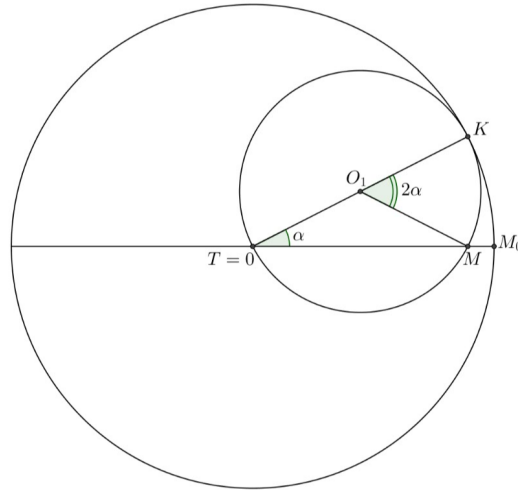


Figura 2.12: Teorema de Copérnico

Para obtener el correspondiente punto de la hipocicloide es necesario construir el ángulo  $KO_1M$ , dos veces mayor que el ángulo  $O_1OM_0$ . Pero el círculo móvil pasará todo el tiempo por el centro del círculo fijo. El ángulo  $KOM = \alpha$  está inscrito en la circunferencia del círculo móvil, y el ángulo  $KO_1M$ , igual a  $2\alpha$ , es dos veces mayor que el inscrito, es decir, es central para la misma circunferencia. Por eso, el punto  $M$  debe encontrarse en el segmento  $OM_0$ . Esto es válido para cualquier posición del centro  $O_1$ . De este modo, hemos obtenido un interesante resultado, que ya era conocido por Nicolás Copérnico.

**Teorema (Copérnico).** El punto de una circunferencia que rueda sin deslizamiento por el interior de una circunferencia fija de radio dos veces mayor se mueve por el diámetro de esta circunferencia fija.

En este caso, el punto  $M$  recorre el diámetro de extremo a extremo en las dos direcciones. Si en las fórmulas de la página 39 suponemos  $n = 2$ , entonces para el área  $S$  obtenemos 0, y para la longitud de toda la “curva” obtenemos  $8a$ , es decir, el doble de la longitud del diámetro del círculo generador. Esto es precisamente lo que cabía esperar.

Supongamos ahora que el radio  $a$  del círculo móvil está definido, y el radio del círculo fijo  $na$  aumenta infinitamente. Dicho de otro modo, supongamos que  $n$  toma una serie creciente de valores: 3, 4, 5 y así hasta el infinito. En este caso, el círculo fijo se irá “enderezando” cada vez más y tenderá a la posición límite: la recta. Además, la hipocicloide irá perdiendo curvatura y en el límite se transformará en una cicloide común.

Analicemos qué sucede en este caso con las fórmulas para calcular la longitud del arco de una hipocicloide y el área correspondiente. Tenemos:

$$l_1 = \frac{8(n-1)}{n}a = 8a \frac{n-1}{n} = 8a \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Cuando  $n$  tiende a infinito,  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$  tiende a 1 ya que  $1/n$  tiende a 0. Por tanto, en este caso la longitud del arco tiende a  $8a$ , es decir, a la longitud del arco de la cicloide común.

Para el cálculo del área tenemos la fórmula:

$$S_1 = \frac{3n-2}{n}\pi a^2 = \left(3 - \frac{2}{n}\right)\pi a^2$$

Cuando  $n$  tiende a infinito, el segundo miembro tenderá a  $3\pi a^2$ , es decir, al área limitada por el arco de la cicloide común y su base.

La ecuación paramétrica que define a la hipocicloide se asemeja bastante a la de la epicloide, con la que no hay que confundir:

$$\alpha(t) := \begin{cases} x(t) = (r_1 - r_2)\cos(t) + r_2\cos\left(t\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\right) \\ y(t) = (r_1 - r_2)\sen(t) + r_2\sen\left(t\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\right) \end{cases}$$

Su derivada es:

$$\alpha'(t) := \begin{cases} x'(t) = (r_1 - r_2) \left( \sen\left(\frac{t(r_2 - r_1)}{r_2}\right) - \sen(t) \right) \\ y'(t) = (r_1 - r_2) \left( \cos(t) - \cos\left(\frac{t(r_2 - r_1)}{r_2}\right) \right) \end{cases}$$

E igualando a cero obtendríamos los puntos singulares. En el caso de la astroide,  $r_1 = 4r$  y  $r_2 = r$ , los puntos singulares se dan en  $t = 0, \pi/2, \pi$  y  $3\pi/2$ .

## 2.4. Evolventes y evolutas

Consideremos un arco convexo de una curva. Supongamos que en uno de los extremos del arco se ha fijado un hilo flexible y no elástico de la misma longitud que el arco; además este hilo está enrollado alrededor de la curva considerada, de modo que su otro extremo coincide con el punto final del arco.

Si “enderezamos” el hilo manteniéndolo tenso de modo que su parte libre sea todo el tiempo tangente al arco. La curva que describe el extremo del hilo en estas condiciones se denomina *evolvente* de la curva inicial.

Si el arco no es convexo hacia un mismo lado en toda su extensión, es decir, si el arco posee un punto en el que la tangente a la curva pasa de un lado a otro (tal punto se denomina *punto de inflexión*), entonces también en este caso se puede hablar de la evolvente de la curva, pero los razonamientos serán más complejos.

Supongamos que el hilo está fijo justo en el punto de inflexión. Entonces, “desenrollándose” del arco, describirá la curva que será la evolvente.

Ahora consideremos el hilo ceñido al arco de la curva inicial. Este hilo ya está alargado, pues en el punto de inflexión se le une un trozo de hilo. Enderezando el hilo alargado de la curva (desde el inicio del arco hasta el punto de inflexión), obtendremos otro arco que, junto con el anterior formará una sola curva continua. Esta curva, aunque continua, no es diferenciable en todas partes: al punto de inflexión de la curva inicial le corresponderá el punto de retroceso de la nueva curva. Esta curva será la evolvente de la curva inicial.

### 2.4.1. Propiedades fundamentales de la evolvente

La evolvente se puede representar como una circunferencia cuyo radio varía todo el tiempo y cuyo centro se desplaza por una curva  $AB$ .

Pero en cada instante el punto de tangencia se puede considerar como el centro de un arco infinitésimo de una circunferencia que coincide con un arco infinitésimo de desarrollo.

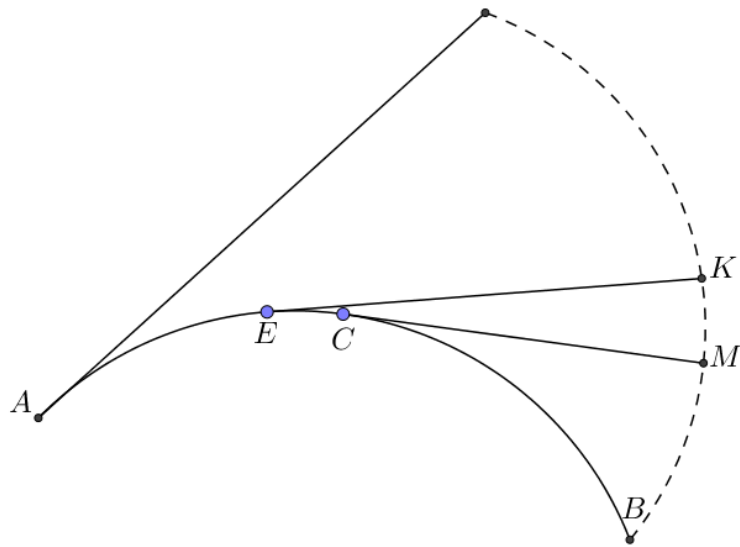


Figura 2.13: Propiedad fundamental de la evolvente

Por eso, el punto  $C$  se denomina *centro instantáneo* o *centro de curvatura* de la evolvente. De este modo, obtenemos el siguiente teorema:

**Teorema.** Toda curva es el lugar geométrico de los centros de curvatura de su propia evolvente.

Debido a que el arco infinitésimo  $MK$  se “fusiona” con el arco infinitésimo de la circunferencia de radio  $CM$  y centro  $C$ , la tangente a la evolvente en el punto  $M$  será perpendicular al radio instantáneo  $CM$ . Este es un resultado importante: la dirección de la evolvente (es decir, de la tangente a ella) es perpendicular a la tangente a la curva inicial. De esto se deduce el siguiente resultado:

**Teorema.** La normal a la evolvente es tangente a la curva inicial.

O lo que es lo mismo, la evolvente corta todas las tangentes a una curva dada bajo un ángulo recto. Esta es una propiedad fundamental de la evolvente y tiene sentido estudiarla con más detalle.

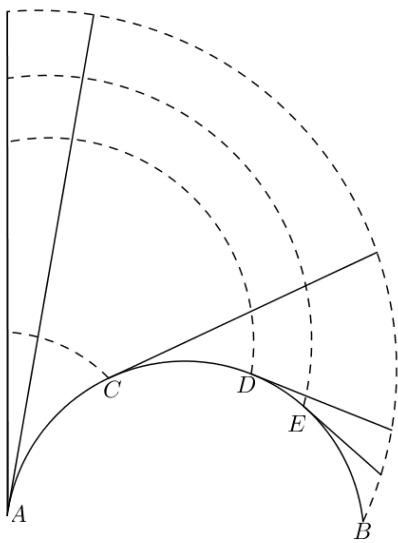


Figura 2.14: Familia de evolventes

En la figura superior se muestra la curva  $AB$  (línea continua) y algunas de sus tangentes (en diferentes puntos). Vemos que existe no sólo una, sino un conjunto infinito de curvas (líneas discontinuas) que cortan todas estas tangentes formando un ángulo recto: cada una de estas curvas sirve como evolvente de la curva  $AB$ .

Todas estas curvas de líneas discontinuas son equivalentes y cada una de ellas se puede considerar como evolvente de la curva  $AB$ . Este resultado se puede formular de la siguiente manera:

**Teorema.** Una curva diferenciable no posee una, sino un conjunto infinito de evolventes.

Si observamos con atención la figura 2.14, notaremos que todas las evolventes de la curva dada son “paralelas” entre sí, es decir, son paralelas en el sentido de que los segmentos de la tangente a la curva  $AB$  entre dos evolventes son todos iguales entre sí, de la misma manera que son iguales los segmentos de las perpendiculares entre rectas paralelas.

Prácticamente, la propiedad fundamental de la evolvente es la que se deduce de manera directa de la propia construcción de esta curva:

**Teorema.** La longitud del arco  $AB$  de una curva es igual al segmento de la tangente en el punto  $A$  comprendido entre el punto de tangencia y la evolvente que pasa por el punto  $B$ .

Hasta ahora nos hemos dedicado al siguiente problema: dada una curva, se requiere hallar (es decir, construir) su evolvente. Sin embargo, tiene sentido plantear el problema inverso: hallar una curva para la cual la curva dada sea su evolvente. Para la solución de este problema nos apoyaremos en el hecho de que la normal a la evolvente es tangente a la curva inicial. Tracemos algunas normales a la curva dada, es decir, a la evolvente de cierta curva que aún no conocemos. Cuanto más normales construyamos, tanto más precisa será la curva que se obtenga.

Debemos construir la curva que sea tangente a todas ellas, es decir, la envolvente de estas normales. Está claro que la curva dada será la evolvente de la curva construida. De este modo hemos resuelto el problema planteado: a partir de una curva dada construimos una nueva curva para la cual la curva dada es evolvente.

La envolvente de las normales se denomina *evoluta* y reviste una gran importancia en el estudio de las propiedades de las curvas. Así, cada curva es la evoluta de su propia evolvente, y viceversa, toda curva es una de las evolventes de su evoluta.

Los científicos del siglo XVII demostraron que todas las curvas que ellos investigaron tienen evoluta. Más adelante demostraremos que la cicloide tiene una evoluta totalmente determinada.

La matemática superior permite demostrar que cada curva diferenciable tiene una única evoluta. La excepción la constituyen sólo las líneas cuyas normales o bien todas se cortan en un punto, o bien todas son paralelas entre sí. La curva en la cual todas las normales se cortan en un punto es la circunferencia (las normales a la circunferencia son los radios, que, como se sabe, son perpendiculares a las tangentes). La curva en la cual todas las normales son paralelas entre sí es la recta. Ella coincide con su propia tangente en cualquier punto, y como normales a ella sirven las perpendiculares paralelas entre sí tomadas en diferentes puntos de dicha recta. Para finalizar, a esta afirmación general se le puede dar la siguiente formulación:

**Teorema.** Toda curva diferenciable, excepto la circunferencia y la recta, posee una evoluta única.

### 2.4.2. Evolvente de una circunferencia

Como ahora sabemos, la circunferencia no tiene evoluta: todas sus normales se cortan en un punto, el centro. En ocasiones se dice que la evoluta de una circunferencia se “degenera” en un punto. En cambio, la circunferencia si posee evolvente. Esta evolvente es una “pariente” muy cercana de las curvas cicloidales.

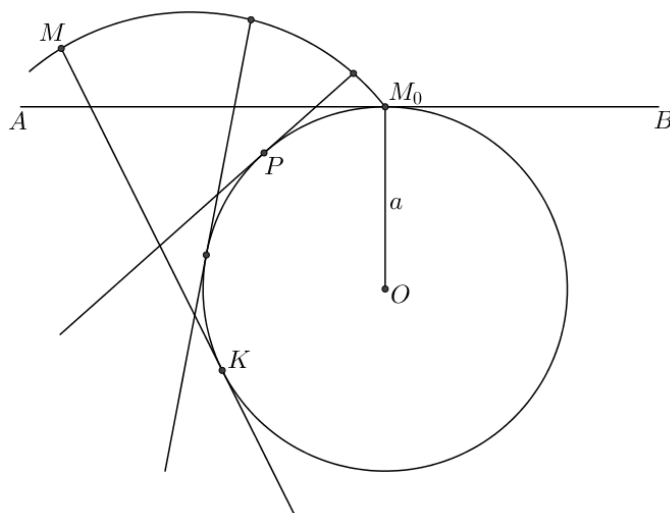


Figura 2.15: Desplazamiento de una recta por un círculo

Consideremos un círculo fijo de radio  $a$  y la recta  $AB$ , tangente a este círculo en el punto  $M_0$ . Si la recta  $AB$  se desplaza sin deslizamiento por la circunferencia, entonces, evidentemente, el punto  $M_0$  describirá la evolvente de la circunferencia. En efecto, para cualquier punto  $M$  de esta curva, la recta  $KM$  en movimiento sirve como normal y la longitud del segmento  $KM$  es igual a la longitud del arco  $M_0PK$  de la circunferencia fija.

De este modo, la evolvente del círculo es una “cicloide del revés”. En el caso de la cicloide, el círculo rueda sin deslizamiento por una recta mientras que en el caso de la evolvente de un círculo, la recta se desplaza sin deslizamiento por una circunferencia fija.

Existe otro camino que permite descubrir el “parentesco” de la evolvente de la circunferencia con las curvas cicloidales. Anteriormente mencionamos que, en el caso de las epicicloides o las hipocicloides, el aumento infinito del radio del círculo móvil cuando mantenemos constante el radio del círculo fijo nos conduce a la cicloide.



Si nos imaginamos la pericicloide, que ya comentamos, notaremos que al dejar invariable el radio del círculo fijo y aumentar infinitamente el radio del círculo móvil, esta curva se transforma en la evolvente del círculo.

### 2.4.3. Evolvente de la cicloide. Longitud del arco de cicloide

Los problemas analizados nos han permitido familiarizarnos con los conceptos de evoluta y evolvente: ya estamos preparados para comenzar la investigación de las evolventes de las curvas cicloidales.

Al investigar una u otra curva, a menudo hemos considerado una curva auxiliar, la llamada curva compañera de la curva dada: así construimos la evolvente de la circunferencia y la senoide (la curva compañera de la cicloide). Ahora, partiendo de una cicloide dada, construiremos una cicloide auxiliar, estrechamente relacionada con la primera: la investigación de este par de cicloides resulta, en ciertos aspectos, más fácil que la investigación de una cicloide por separado. Esta cicloide auxiliar es llamada *cicloide acompañante*.

Consideremos la mitad del arco de la cicloide,  $AMB$  (figura 2.16). No nos debe confundir el hecho de que en la figura la cicloide se muestra volteada hacia arriba. Tracemos cuatro rectas paralelas a la recta directriz  $AK$  a distancias  $a$ ,  $2a$ ,  $3a$  y  $4a$ , respectivamente. Construyamos el círculo generador en la posición correspondiente al punto  $M$ , denotemos con  $O$  el centro de este círculo y el ángulo de giro  $MOH$  mediante  $\varphi$ . Entonces, el segmento  $AH$  será igual a  $a\varphi$  (el ángulo  $\varphi$  se expresa en radianes).

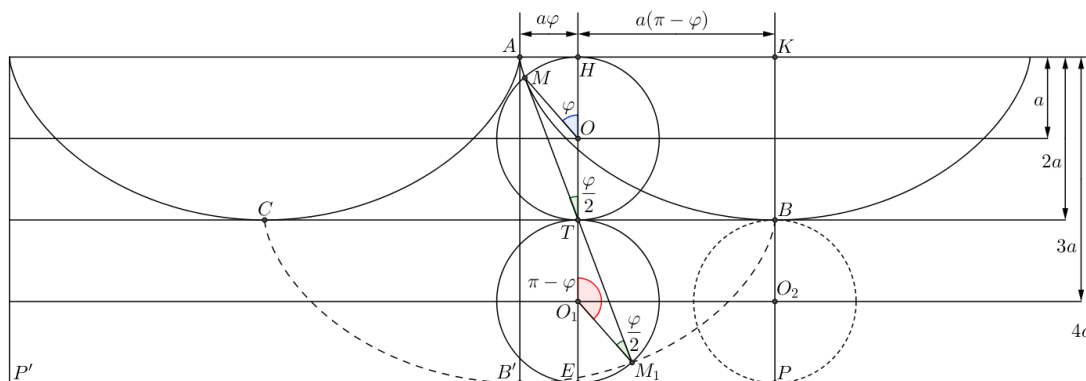


Figura 2.16: La cicloide y su acompañante

Prolonguemos el diámetro  $HT$  del círculo generador, pasando por  $T$ , hasta la intersección con la recta  $P'P$ . Tomando  $TE$  como diámetro, construyamos una circunferencia (con centro  $O_1$ ) y la tangente a la cicloide  $AMB$  en el punto  $M$ . Para esto, como sabemos, es necesario unir el punto  $M$  con  $T$ . Prolonguemos la tangente  $MT$  a partir de  $T$  hasta la intersección con la circunferencia auxiliar, y denotemos el punto de intersección con  $M_1$ . Ahora nos ocuparemos precisamente de este punto  $M_1$ .

Habíamos denotado el ángulo  $MOH$  con  $\varphi$ , por lo que el ángulo  $MTH$  será igual a  $\varphi/2$  (ángulo inscrito que se apoya en el mismo arco). Es claro que el triángulo  $TO_1M_1$  es isósceles, por lo que los ángulos  $O_1TM_1$  y  $TM_1O_1$  serán ambos iguales a  $\varphi/2$ . De este modo, a la parte del ángulo  $TO_1M_1$  en el triángulo  $TO_1M_1$  le corresponden exactamente  $\pi - \varphi$  radianes (recordemos que  $180^\circ$  es  $\pi$  radianes). Señalemos también que, evidentemente, el segmento  $HK$  es igual a  $a(\pi - \varphi)$ .

Consideremos ahora la circunferencia de centro  $O_2$  mostrada con línea discontinua: vemos que si la hacemos rodar sin deslizamiento por la recta  $CB$ , entonces su punto  $B$  describirá la cicloide  $BB'$ . Cuando el círculo de línea discontinua gire en un ángulo  $\pi - \varphi$ , el centro  $O_2$  llegará al punto  $O_1$ , y el radio  $O_2B$  ocupará la posición  $O_1M_1$ . De este modo, el punto  $M_1$  que hemos tomado es un punto de la cicloide  $BB'$ .

La construcción descrita hace corresponder a cada punto  $M$  de la cicloide  $ABM$  un punto  $M_1$  de la cicloide  $BM_1B'$ . La cicloide obtenida de esta manera se denomina *cicloide acompañante*. En la figura 2.16 la cicloide dibujada con línea discontinua es la cicloide acompañante de las cicloides representadas con línea continua.

En la figura se observa también que la recta  $MM_1$  es la normal a la cicloide acompañante en el punto  $M_1$ . En efecto, esta recta pasa por el punto  $M_1$  de la cicloide y por el punto de tangencia  $T$  del círculo generador y la recta directriz (el punto “inferior” del círculo generador, como lo llamamos en ocasiones anteriores, ahora es el “superior”, puesto que la figura está volteada). Pero esta misma recta, por construcción, es tangente a la cicloide “principal”  $AMB$ . De este modo, la cicloide inicial es tangente a cada normal de la cicloide acompañante, ella es la envolvente de las normales de la cicloide acompañante, es decir, es la evoluta de esta. Por tanto, la cicloide acompañante es la evolvente de la cicloide inicial.

Al analizar esta construcción hemos demostrado un notable teorema descubierto por el científico holandés Christiaan Huygens:

**Teorema (Huygens).** La evoluta de una cicloide es una cicloide igual a ella, pero desplazada.

Si construimos la evoluta no sólo para un arco, sino para toda la cicloide (lo que, desde luego, se puede hacer solo mentalmente), y después, construimos la evoluta de esta evoluta, y así sucesivamente, obtendremos algo parecido al dibujo que hacíamos del tejado de una casa cuando éramos pequeños.

Del Teorema de Huygens se obtiene inmediatamente un importante corolario. Consideremos el segmento  $AB'$  en la figura 2.16 cuya longitud es igual a  $4a$ . Supongamos ahora que al arco  $AMB$  de la cicloide se ha ceñido un hilo que se encuentra fijo en el punto  $A$  y posee un lápiz atado en el punto  $B$ . Si comenzamos a “enderezar” el hilo, entonces el lápiz se moverá por la evolvente de la cicloide  $AMB$ , es decir, por la cicloide  $BM_1B'$ . Resulta evidente que la longitud del hilo, igual a la longitud del semiarco de la cicloide, será igual a la del segmento  $AB'$ , es decir, a  $4a$ . Por tanto, la longitud  $l$  de todo el arco de la cicloide será  $8a$ , y la fórmula  $l = 8a$  se puede considerar demostrada de modo suficientemente riguroso.

Además, es posible observar la fórmula no sólo para calcular la longitud de un arco completo de cicloide, sino también para calcular la longitud de cualquier arco de la misma. En efecto, es evidente que la longitud del arco  $MB$  es igual a la longitud del segmento  $MM_1$ , es decir, al doble del segmento de la tangente en el punto correspondiente de la cicloide comprendido dentro del círculo generador.

Los mismos razonamientos y construcciones nos conducen a las evolutas de las epicicloides y las hipocicloides. A continuación mostraremos los resultados. La evoluta de la epicicloide es una epicicloide semejante a la dada, con el mismo centro del círculo fijo pero girada en un ángulo de  $\frac{\pi}{n}$  radianes (es decir, en  $\frac{180}{n}$  grados), donde  $n$  es la razón entre el radio del círculo fijo y el radio del círculo móvil. La razón de semejanza es  $\frac{n}{n+2}$ . Dicho de otro modo, si el radio del círculo fijo es, por ejemplo, tres veces mayor que el radio del círculo móvil, entonces las dimensiones lineales de la evoluta son  $\frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$  de las correspondientes dimensiones de la propia epicicloide.

La evoluta de la hipocicloide es una hipocicloide con el mismo centro del círculo fijo y girada, como en el caso de la epicicloide, en  $\frac{\pi}{n}$  radianes. Pero a diferencia de la evoluta de la epicicloide, la evoluta de la hipocicloide es mayor que la propia curva, además, la razón de semejanza es  $\frac{n}{n-2}$ .

Los conceptos de evoluta y evolvente son muy importantes tanto para la propia geometría como para sus aplicaciones. Huygens llegó a su famoso teorema justamente a partir de un problema físico, el cual comentaremos en el siguiente capítulo.



## Capítulo 3

# Aplicaciones: tautocrona y braquistocrona

### 3.1. El mejor péndulo

#### 3.1.1. Christiaan Huygens y su invento

Huygens (1629 - 1695) fue un científico de vastos conocimientos: obtuvo resultados notables en la matemática, la mecánica aplicada y la óptica. Como ya hemos señalado, en el Renacimiento y en el siglo XVII esta diversidad de conocimientos no era nada rara.

A Huygens pertenece el honor de haber inventado el reloj de péndulo. Elaboró la teoría y construyó los primeros relojes de este tipo. Aún en la actualidad, los relojes de péndulo son difundidos con fines domésticos (por ejemplo, como relojes de pared), pero su valor es mucho mayor: fueron durante mucho tiempo los relojes más exactos e incluso eran utilizados en los observatorios astronómicos<sup>1</sup>. El trabajo de Huygens *Horologium oscillatorium* (1675) contiene una serie de excelentes descubrimientos matemáticos.

Además de sus hallazgos en la mecánica, la física y la astronomía, Huygens obtuvo varios resultados novedosos en la matemática: simultáneamente a Fermat y Pascal, sentó la base de la teoría de las probabilidades; calculó el área de la superficie de la elipsoide y la paraboloides de rotación. A él pertenece también una serie de excelentes teoremas sobre la circunferencia que permitieron calcular el número  $\pi$  con una precisión asombrosa para aquella época. Finalmente, elaboró la teoría sobre las evolutas y la aplicó en la investigación de la cicloide.

---

<sup>1</sup>En la actualidad los relojes más precisos son los llamados atómicos.

Estos estudios están estrechamente relacionados con el trabajo sobre los relojes de péndulo.

Una pregunta que nos podemos plantear es si los relojes de péndulo circulares son o no fiables. Mientras observaba una lucerna que oscilaba suspendida del techo de una catedral, Galileo descubrió que el tiempo de una oscilación completa de la lucerna, es decir, el tiempo que tarda en regresar a la posición inicial, *período de oscilación*, era el mismo para las oscilaciones grandes y las pequeñas. Esta observación hizo que Galileo llegara a la conclusión de que un cuerpo que oscila (péndulo) se puede utilizar para regular el funcionamiento de los relojes.

El propio Galileo no logró construir un reloj de péndulo, y poco después se hizo evidente que sus observaciones no fueron exactas.

Observaciones más precisas demostraron que el período de oscilación de un péndulo es mayor cuanto mayor es su amplitud; pero debido al inevitable rozamiento del eje y a la resistencia del aire, la amplitud de las oscilaciones todo el tiempo disminuyen, por lo cual también disminuye su período de oscilación. El reloj de péndulo común, llamado también *péndulo circular* (porque cada punto del péndulo describe un arco de circunferencia), no puede funcionar correctamente.

Huygens inventó el accesorio necesario para que el péndulo circular mantuviera oscilaciones constantes y además resolvió otro interesante problema: respondió a la interrogante relacionada con la búsqueda de la curva a lo largo de la cual debe moverse un punto para que el período de sus oscilaciones no dependa de la amplitud (es decir, para que el tiempo de balanceo no dependa de su envergadura). Él creó un dispositivo que aseguraba que el movimiento del centro de gravedad del péndulo se realizase por dicha curva.

Huygens creó un mecanismo que permitía regular con facilidad la marcha del reloj, sin embargo, como verdadero científico, se interesó por aquel péndulo cuyo período de oscilación no dependiera del valor de amplitud, es decir, el péndulo “perfecto”.

### 3.1.2. Curva tautocrona de Huygens

Tautocrona es un término de origen griego que significa simplemente “mismo tiempo”. Así Huygens denominó la curva que había comenzado a buscar, es decir, la curva por la que debe moverse el centro de gravedad del péndulo para que su período de oscilación no dependa de la amplitud.

La búsqueda fue exitosa: la “misteriosa” tautocrona resultó ser la cicloide que había sido estudiada poco tiempo antes. Cabe destacar que la investigación de la evoluta se inició justo durante el proceso de solución de este problema.

Huygens razonó del siguiente modo (expondremos su razonamiento algo simplificado y en términos actuales). Imaginemos que una pequeña y pesada bola  $M$  se mueve por una “ranura” en forma de cicloide (figura 2.17), y consideremos el caso ideal cuando el rozamiento y la resistencia del aire no existen.

Denotemos los puntos de retroceso de la cicloide mediante  $M_0$  y  $M'_0$  y el radio del círculo generador, con  $a$ . Construyamos un círculo de radio  $a$  y centro  $O$  que sea tangente a la cicloide en el vértice y el círculo generador en la posición correspondiente al punto  $M$  de la cicloide (mostrado con línea discontinua).

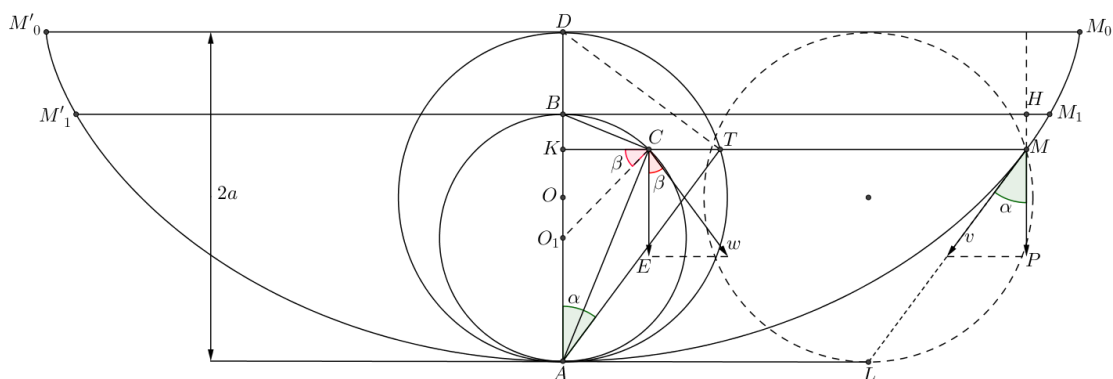


Figura 3.1: Esquema del péndulo cicloidal

Supongamos que colocamos la bola en el punto  $M_1$  de la ranura y la dejamos moverse libremente: bajo la acción de la gravedad la bola rodará. Analicemos su movimiento.

Al desplazarse desde  $M_1$  hasta  $M$ , la bola consume cierta cantidad de energía potencial. Este gasto de energía es igual al producto del peso de la bola  $mg$  ( $m$  es la masa de la bola y  $g$  es la aceleración de la gravedad) por la “pérdida de altura”, es decir, por la diferencia de las alturas en las posiciones  $M_1$  y  $M$  (estas alturas se miden desde un nivel determinado, por ejemplo, desde el suelo). Independientemente de la referencia que se utilice para medir las alturas, la diferencia será  $HM$ . De este modo, la pérdida de energía potencial será igual a  $mg \cdot HM$ .

Pero en virtud de la ley de conservación de la energía, la energía potencial consumida por la bola se transforma en energía cinética de su movimiento, la cual, como se sabe, es igual a  $\frac{mv^2}{2}$ , donde con  $v$  denotamos la velocidad de la bola, por ahora desconocida. Al igualar esta energía cinética con la energía potencial consumida, obtenemos la ecuación:

$$\frac{mv^2}{2} = mg \cdot HM$$

De donde hallamos el valor de la velocidad de la bola:

$$v = \sqrt{2g \cdot HM}$$

Tampoco resulta difícil determinar la dirección de esta velocidad: estará dirigida por la tangente a la cicloide, es decir, por la cuerda  $ML$ , donde  $L$  es el punto “inferior” del círculo generador.

Prestaremos atención no tanto a la velocidad  $v$  en sí, sino a su proyección vertical, es decir, a la “velocidad de descenso” de la bola o velocidad de variación de su altura. Esta proyección vertical se calcula con facilidad: es igual a  $v \cos \alpha$ , donde  $\alpha$  es el ángulo entre la cuerda  $ML$  y la vertical. Evidentemente, la cuerda  $AT$  del círculo de centro  $O$  es igual y paralela a la cuerda  $ML$ ; por tanto, el ángulo  $LMP$  es igual al ángulo  $KAT$ . Así pues,

$$v_{vert} = MP = v \cdot \cos \alpha = \sqrt{2g \cdot HM} \cdot \cos \alpha$$

Comparemos el movimiento no uniforme por la cicloide, que por ahora desconocemos, con el movimiento uniforme por una circunferencia estudiado detalladamente en la escuela. Para esto, construyamos una circunferencia auxiliar y según la propuesta de Huygens lo haremos del siguiente modo: por el vértice  $A$  de la cicloide se traza la perpendicular  $AD$  (el diámetro del círculo de centro  $O$ ), y por el punto inicial del movimiento de la bola  $M_1$  se traza la paralela  $M_1B$  respecto a su base. Supongamos que se denota con  $B$  el punto de intersección de la paralela y la perpendicular. La circunferencia construida tomando  $AB$  como diámetro, será la circunferencia auxiliar que se necesita. Por ahora no sabemos en qué radica la superioridad de esta circunferencia respecto a otras, esto se aclarará a continuación y gradualmente con la exposición de los razonamientos de Huygens.

Comencemos relacionando la componente vertical de la velocidad del movimiento de la bola con los elementos de la circunferencia auxiliar. Entonces, tenemos:

$$MP = \sqrt{2g \cdot HM} \cos \alpha = \sqrt{2g \cdot BK} \cos \alpha$$



pues  $HM = BK$ . A partir del triángulo  $AKT$  obtenemos:

$$\cos\alpha = \frac{KA}{AT}$$

pero  $AT = 2a\cos\alpha$ , por lo cual:

$$\cos\alpha = \frac{KA}{2a\cos\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{KA}{2a}$$

de donde

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{KA}}{\sqrt{2a}}$$

Sustituyendo en la primera fórmula obtenemos:

$$MP = \sqrt{2g \cdot BK} \cos\alpha = \sqrt{2g \cdot BK} \cdot \frac{\sqrt{KA}}{\sqrt{2a}} = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \sqrt{BK \cdot KA}$$

La última raíz cuadrada es igual a la media proporcional entre los segmentos  $BK$  y  $KA$ , es decir, entre los segmentos de la hipotenusa  $AB$  del triángulo  $ABC$  en los que dicha hipotenusa es dividida por la altura  $CK$ . Pero esta media proporcional, según el conocido teorema sobre los segmentos proporcionales en un triángulo rectángulo, es precisamente igual a la altura  $CK$ :

$$BK \cdot KA = (CK)^2$$

Por tanto, para la componente vertical  $MP$  de la velocidad del movimiento de la bola por la cicloide obtenemos finalmente:

$$MP = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot CK$$

Las magnitudes  $a$  y  $g$  están dadas desde un inicio y no están relacionadas ni con el punto  $M$  ni con la posición inicial  $M_1$ . De este modo, el movimiento de la bola por la cicloide se determina totalmente por la cuerda  $KC$  de la circunferencia auxiliar, es decir, por la posición del punto  $C$  en esta circunferencia.

Consideremos el movimiento uniforme del punto  $C$  por la circunferencia auxiliar con velocidad angular de  $\sqrt{\frac{g}{a}}$  radianes por segundo, es decir,

$$\frac{360}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{a}}$$

grados por segundo. Además, la velocidad del punto  $C$  por la circunferencia es igual al producto del radio de la circunferencia por la velocidad angular, expresada en radianes por segundo, es decir, igual a

$$\frac{AB}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{a}}$$

La velocidad  $w$  del movimiento del punto de la circunferencia está dirigida por la tangente a la circunferencia, es decir, es perpendicular al radio.

Su proyección sobre la vertical es igual a la propia velocidad  $w$  multiplicada por el coseno del ángulo  $\beta$ . Pero es evidente que el ángulo  $\beta$  es igual al ángulo  $KCO_1$ : ambos se obtienen si se sustrae el ángulo  $O_1CE$  del ángulo recto. El coseno del ángulo  $KCO_1$  es igual a

$$KC : \frac{1}{2}AB$$

Para la proyección vertical del movimiento uniforme por la circunferencia hallamos:

$$w \cos \beta = \frac{AB}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \frac{KC}{\frac{1}{2}AB} = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot KC = MP$$

Hemos obtenido un importante resultado: cuando el punto se mueve uniformemente por la circunferencia, su proyección sobre la vertical se mueve de la misma manera que la proyección sobre la vertical de la bola que se desplaza por la cicloide. Las proyecciones de ambas velocidades en cualquier instante son iguales entre sí. De esto se deduce que el punto de la circunferencia (partiendo desde  $B$ ) y la bola en la cicloide (partiendo desde  $M_1$ ) llegarán hasta  $A$  al mismo tiempo. No es difícil calcular este tiempo. Anteriormente dijimos que un punto de la circunferencia auxiliar se mueve a  $\sqrt{\frac{g}{a}}$  radianes por segundo, es decir, gira 1 radián en  $\sqrt{\frac{a}{g}}$  segundos, y  $\pi$  radianes (media circunferencia) en  $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ . Se requiere exactamente el mismo tiempo para que la bola se desplace por la cicloide desde el punto  $M_1$  hasta el punto  $A$ . El mismo tiempo será necesario para que por inercia se eleve hasta el punto  $M'_1$ ; el mismo tiempo, para bajar de nuevo hasta  $A$ ; el mismo tiempo, para volver otra vez a la posición inicial  $M_1$ . Por tanto, el tiempo de la oscilación completa de la bola (período de oscilación) será igual a  $4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ .

Esta es una fórmula muy interesante. Notemos que el período del movimiento de la bola por la ranura cicloidal se determina totalmente mediante las dimensiones del canal (radio del círculo generador de la cicloide) y la aceleración de la gravedad. La posición del punto  $M_1$  en la cicloide y su distancia hasta la recta  $M_0M'_0$  no son importantes: independientemente del punto de la cicloide a partir del cual la bola comience a moverse, su período será el mismo.

### 3.2. Problema de la braquistocrona

Para facilitar la comprensión, iremos haciendo un ejercicio a medida que avanzamos en la teoría acerca de la braquistocrona.

Consideremos el triángulo  $ABC$ . Su hipotenusa  $AB$  es una rampa de 20 metros y su altura  $BC$  es de 12 metros. Calculemos el tiempo que tardará un coche de juguete en descender desde el vértice  $B$  hasta la base  $A$  de la rampa. Como es usual, no tendremos en cuenta el rozamiento.

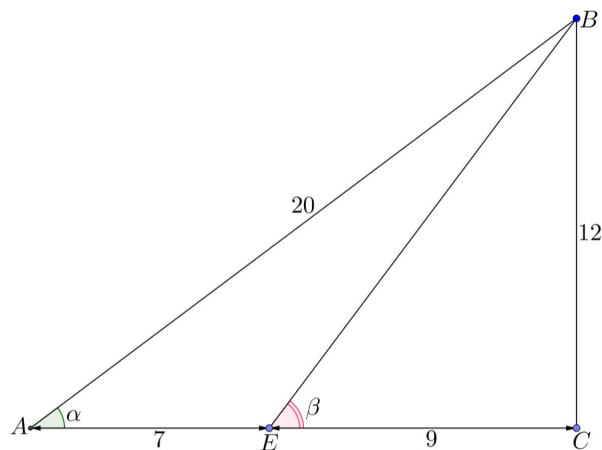


Figura 3.2: En busca del descenso más rápido

Tras minuciosas observaciones, Galileo estableció la siguiente ley: el tiempo del movimiento de un cuerpo por un plano inclinado sometido sólo a la acción de la fuerza de gravedad se relaciona con la longitud del camino como el tiempo de su caída vertical desde la misma altura se relaciona con dicha altura. Esta formulación se puede sustituir por otra equivalente: el tiempo en el que el cuerpo se desliza por un plano inclinado bajo la acción de la fuerza de gravedad, es igual al tiempo de caída libre desde la misma altura, dividido por el seno del ángulo entre el plano inclinado y el horizonte.

Galileo estableció esta ley de forma experimental, pero no resulta difícil deducirla a partir de la ley de caída libre aplicando la regla de descomposición de las fuerzas.

Así pues, comencemos por calcular el tiempo de caída libre de un cuerpo desde el punto  $B$  hasta el punto  $C$ . Sabemos que la trayectoria de la caída libre  $BC$  se expresa mediante la aceleración de la gravedad ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ) y el tiempo  $t$ , de la siguiente forma:

$$BC = \frac{1}{2}gt^2$$

De donde, para el tiempo  $t$ , obtenemos:

$$t = \sqrt{\frac{2BC}{g}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot 2\sqrt{6} = 0,32 \cdot 4,90 = 1,57$$

Ahora no es difícil hallar el tiempo  $T$  que tarda el cochecito en descender por el plano inclinado: es suficiente dividir el valor de  $t$  (1,57) por el seno del ángulo  $\alpha$  ( $12/20 = 3/5$ ) o, lo que es lo mismo, multiplicar  $t$  por  $5/3$ . Entonces obtenemos:

$$T = 1,57 \cdot \frac{5}{3} = 2,61$$

De este modo, el coche descenderá por la rampa en 2,61 segundos.

Ahora supongamos que el coche se desliza desde  $B$  hasta  $A$  no por la rampa, sino por el camino más complejo: primero lo hace por una rampa más abrupta  $BE$  y después continúa su desplazamiento por inercia por el tramo  $EA$  con la velocidad adquirida al descender. Recorrer la trayectoria desde  $B$  hasta  $E$  le toma un tiempo igual al tiempo de caída desde la altura de 12 metros dividido por el seno del ángulo  $\beta$  (multiplicado por  $5/4$ ), es decir,  $1,57 \cdot \frac{5}{4} = 1,96$  segundos. A este tiempo se debe añadir el tiempo del movimiento por inercia (en el segmento  $EA = 7 \text{ m}$ ). La velocidad que adquiere el coche cuando llega al punto  $E$  se calcula comparando la energía potencial perdida ( $mgh$ ) y la energía cinética adquirida  $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ :

$$mgh = m\frac{v^2}{2}$$

de donde

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{g} \cdot \sqrt{24} \text{ m/s}$$

Para hallar el tiempo del movimiento por inercia del coche desde  $E$  hasta  $A$ , es necesario dividir la trayectoria recorrida (7 metros) por la velocidad ( $\sqrt{g} \cdot \sqrt{24}$ ), pues el movimiento por inercia es uniforme:

$$t_{EA} = 7 : v = \frac{7}{\sqrt{g} \cdot 2 \cdot \sqrt{6}} = 0,32 \cdot \frac{7}{12} \cdot \sqrt{6} = 0,46$$

Al sumar el tiempo de descenso por la pendiente  $BE$  (1,96s) y el tiempo del movimiento por inercia (0,46 s), obtenemos el tiempo total del movimiento por la línea quebrada  $BEA$ , igual a  $1,96s + 0,46s = 2,42s$ , es decir, resulta menor que el tiempo de descenso por la pendiente  $BA$ .

A pesar de que la recta  $AB$  es la “distancia más corta” entre  $A$  y  $B$ , no es la trayectoria del “tiempo mínimo”: desde este punto de vista la línea quebrada  $BEA$  resulta “la más corta”. Esto es comprensible: la pérdida que supone una trayectoria más larga se compensa con creces con el aumento de velocidad obtenido debido a una mayor pendiente del plano inclinado.

Estos razonamientos sugieren que lo más ventajoso para economizar tiempo sería la trayectoria por la línea quebrada  $BCA$ : primero el coche descendería por la recta  $BC$ , y después, pasando por una pequeña curvatura que le haría cambiar de dirección lo más suavemente posible, continuaría su movimiento, ahora por inercia, por la recta  $CA$ , manteniendo una elevada velocidad.

Ya determinamos el tiempo de caída libre del coche por el cateto  $BC$  :  $t = 1,57s$ . La velocidad en el punto  $C$  se calcula comparando la pérdida de energía potencial y la adquisición de energía cinética:  $v = \sqrt{g} \cdot \sqrt{24}$ , como ya se calculó. Dividiendo la trayectoria  $CA$  (16m) por la velocidad, obtendremos el tiempo  $t_{CA}$ :

$$t_{CA} = 16 : (\sqrt{g} \cdot \sqrt{24}) = 0,32 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2,45 = 1,04s$$

Sumando a  $t_{CA}$  el tiempo de caída libre (1,57s), obtendremos el tiempo total del movimiento por la línea quebrada  $BCA$ :

$$t_{BCA} = 1,57s + 1,04s = 2,61s$$

Resulta que esta trayectoria no es la óptima: el tiempo necesario para recorrerla es igual al tiempo en que se recorre la trayectoria por la recta  $BA$ , y por tanto, es notablemente mayor que el tiempo por la línea quebrada  $BEA$ . De las tres trayectorias consideradas, la línea quebrada  $BEA$  resultó ser la de menor duración (aunque no es la de menor longitud).

Surge el problema: por los puntos  $B$  y  $A$  que se encuentran a diferentes alturas sobre la superficie de la Tierra, trazar una curva a lo largo de la cual el movimiento de un cuerpo desde  $B$  hasta  $A$ , bajo la acción de la gravedad, transcurra en el menor tiempo posible. La curva buscada se denominó “braquistocrona”, es decir, “curva del tiempo más corto”. Si los puntos  $B$  y  $A$  yacen en una misma vertical, entonces la “braquistocrona” es, evidentemente un segmento recto. En caso de no estar situados en una misma vertical la solución no es trivial, por lo cual analizaremos la braquistocrona más detalladamente.

Para ello, como paso previo, supongamos que una partícula se mueve en forma rectilínea desde el punto  $A$  hasta la recta  $HK$ , y después, desde  $HK$  hasta el punto  $B$ ; además, desde  $A$  hasta la recta  $HK$  la partícula se mueve con velocidad  $v$ , y desde la recta  $HK$  hasta  $B$ , con velocidad  $w$ . Demostremos que la trayectoria más breve en lo que al tiempo se refiere es aquella en la que la razón entre el seno del ángulo  $PCA$  y el seno del ángulo  $BCM$  es igual a la razón entre las velocidades  $v$  y  $w$ .

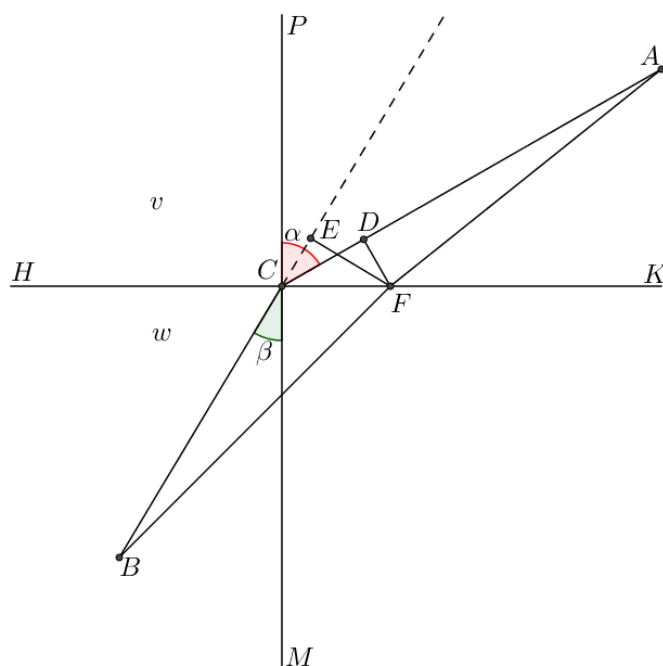


Figura 3.3: Deducción de la ley de Snell

Sea  $ACB$  la trayectoria necesaria, es decir, sea la condición:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta} = \frac{v}{w}$$

Tomemos en  $HK$  el punto arbitrario  $F$  y demostremos que el tiempo necesario para recorrer la trayectoria  $AFB$  es mayor que para recorrer  $ACB$ .

Hagamos una construcción preliminar que nos facilite el análisis posterior. Tracemos perpendiculares desde el punto  $F$  hasta el rayo incidente y hasta la dirección del rayo refractado (la terminología óptica es útil para la solución del problema sobre una partícula en movimiento).

Dicho de otro modo, construyamos  $FD \perp CA$  y  $FE \perp BC$ . El ángulo  $DFC$  es igual a  $PCA$  (ángulo  $\alpha$ ), pues poseen lados perpendiculares entre sí. Por la misma razón, el ángulo  $CFE$  es igual  $BCM$  (ángulo  $\beta$ ). Por tanto:

$$\text{sen}\alpha = \frac{CD}{CF}$$

$$\text{sen}\beta = \frac{CE}{CF}$$

Al dividir estas expresiones una por la otra, reagruparlas y recordar que  $\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta} = \frac{v}{w}$  (según la ley de Snell<sup>2</sup>), obtenemos:

$$\frac{CD}{CE} = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta} = \frac{v}{w}$$

O bien:

$$\frac{CD}{v} = \frac{CE}{w}$$

Este es el resultado preliminar que necesitábamos. Comparemos ahora los tiempos que se emplean en el movimiento por las trayectorias  $ACB$  y  $AFB$ .

Para las trayectorias  $ACB$  y  $AFB$  tenemos, correspondientemente:

$$t = \frac{AC}{v} + \frac{CB}{w}$$

$$t_1 = \frac{AF}{v} + \frac{FB}{w}$$

---

<sup>2</sup>Si la luz parte del medio  $A$  e incide en el medio  $B$ , entonces la razón entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es una magnitud constante (igual a la razón entre el índice de refracción del medio  $B$  y el índice de refracción del medio  $A$ ).

(para determinar el tiempo en cada tramo rectilíneo del movimiento uniforme dividimos la trayectoria entre la velocidad).

Es necesario demostrar que  $t < t_1$ , es decir.

$$\frac{AC}{v} + \frac{CB}{w} < \frac{AF}{v} + \frac{FB}{w}$$

Transformaremos ahora la expresión para  $t$ . Sustituycamos el segmento  $AC$  por la suma  $AD + DC$  y obtenemos:

$$t = \frac{AD + DC}{v} + \frac{CB}{w} = \frac{AD}{v} + \frac{DC}{v} + \frac{CB}{w}$$

Si sustituimos ahora  $\frac{CD}{v}$  por la expresión igual  $\frac{CE}{w}$ , obtenemos:

$$t = \frac{AD}{v} + \frac{CE}{w} + \frac{CB}{w} = \frac{AD}{v} + \frac{BE}{w}$$

pues  $CE + CB = BE$ .

Queda un último paso: comparar los segmentos  $AD$  y  $AF$ . El primero es perpendicular, y el segundo, oblicuo con respecto a  $DF$ . Por tanto,  $AD < AF$ . Del mismo modo,  $EB < BF$ . Pero, si  $AD < AF$ , entonces  $\frac{AD}{v} < \frac{AF}{v}$ . Del mismo modo,  $\frac{BE}{w} < \frac{BF}{w}$ . Finalmente obtenemos:

$$\frac{AD}{v} + \frac{BE}{w} < \frac{AF}{v} + \frac{BF}{w}$$

Es decir, que  $t < t_1$ .

Así pues, hemos demostrado que el tiempo necesario para recorrer la trayectoria  $ACB$  es menor que el tiempo necesario para recorrer cualquier otra trayectoria. Así que ya estamos preparados para resolver el problema de la braquistocrona.

A continuación mostraremos la solución dada por Jacob Bernoulli a este problema. Él comenzó por sustituir un problema difícil por una gran cantidad de problemas simples, es decir, elementales: dividió la diferencia de las alturas de los puntos  $A$  y  $B$  en una gran cantidad de partes iguales y trazó imaginariamente por los puntos de división planos paralelos, de modo que todo el espacio resultó “dividido en capas”. Si denotamos el grosor de cada capa con  $c$ , y el número de capas con  $n$ , entonces, evidentemente, el producto  $cn$  es igual a la magnitud  $h$ , la diferencia de las alturas



de los puntos  $A$  y  $B$ .

Supongamos ahora que la velocidad de la partícula al pasar de una capa a otra no varía continuamente, sino a saltos. Además, en la primera capa (superior) esta velocidad es  $v_1 = \sqrt{2gc}$ , es decir, la velocidad que tendría la partícula bajo la acción de la gravedad al final de la primera capa.

En la segunda capa la velocidad es  $v_2 = \sqrt{2g \cdot 2c}$ , es decir, la velocidad que tendría la partícula al final de la segunda capa en su movimiento natural. Análogamente, se deduce la velocidad que tendrá la partícula en cualquier capa. Como resultado, la partícula se moverá bajo la acción de la gravedad por una línea quebrada; además, si  $n$  es grande (paralelamente, el grosor de las capas será pequeño), el movimiento por la línea quebrada se aproximará al movimiento natural por un canal poligonal. Para determinar la forma de la línea quebrada que forma la trayectoria de la partícula en el caso aproximado del movimiento “a saltos”, es necesario determinar todos los ángulos en los vértices de esta línea quebrada.

Es posible calcular también los ángulos que cada tramo de la línea quebrada forma con la vertical: es cómodo denotar estos ángulos mediante  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , etcétera, donde el índice de  $\alpha$  indica el número de la capa.

Analicemos el comportamiento de la partícula en la frontera de cualesquiera dos capas, por ejemplo, entre la quinta y la sexta; los razonamientos y los resultados serán los mismos para cualquier par de capas adyacentes. Para que el tiempo de recorrido por la quinta y la sexta capas sea el menor, es necesario que los senos de los ángulos correspondientes se relacionen como las velocidades en la quinta y sexta capas. Así pues, se debe cumplir la igualdad:

$$\frac{\text{sen}\alpha_5}{\text{sen}\alpha_6} = \frac{v_5}{v_6}$$

Pero  $v_5 = \sqrt{2g \cdot 5c}$  y  $v_6 = \sqrt{2g \cdot 6c}$ ; por tanto:

$$\frac{\text{sen}\alpha_5}{\text{sen}\alpha_6} = \frac{\sqrt{2g \cdot 5c}}{\sqrt{2g \cdot 6c}} = \frac{\sqrt{5c}}{\sqrt{6c}}$$

O bien:

$$\frac{\text{sen}\alpha_5}{\sqrt{5c}} = \frac{\text{sen}\alpha_6}{\sqrt{6c}}$$

Repitiendo este razonamiento para todos los pares de capas adyacentes, obtendremos una serie de igualdades:

$$\frac{\text{sen}\alpha_1}{\sqrt{c}} = \frac{\text{sen}\alpha_2}{\sqrt{2c}} = \frac{\text{sen}\alpha_3}{\sqrt{3c}} = \frac{\text{sen}\alpha_4}{\sqrt{4c}} = \dots$$

Dicho de otro modo, la razón entre el seno del ángulo, formado por cualquier tramo de la línea quebrada y la vertical, y la correspondiente distancia de la capa desde el plano superior, es un valor constante.

La “línea quebrada de tiempo mínimo” que buscábamos ya está totalmente determinada: es posible comenzar su construcción tramo a tramo comenzando desde el primero.

Siguiendo los pasos de Jacob Bernoulli, supusimos que el grosor  $c$  de las capas disminuye ilimitadamente, y su cantidad crece de la misma manera. Así, en el límite, la trayectoria quebrada se transforma en la curva buscada, en la braquistocrona, y el problema estará resuelto.

La dirección de cada tramo de la línea quebrada coincidirá con la dirección de la tangente a la curva buscada. De este modo, en cualquier punto de la braquistocrona, la razón entre el seno del ángulo formado por la tangente y la vertical y la raíz cuadrada de la “altura” (distancia del punto de la curva a la horizontal superior) será constante.

Pero esto último es precisamente una característica de la cicloide. Recordemos los Teoremas 4 y 5. La única curva para la cual la dirección de la tangente en cualquiera de sus puntos y la distancia desde este punto hasta la recta de base están relacionadas por una relación como la mencionada, es la ya muy conocida cicloide.

Desde luego, la solución de Jacob Bernoulli no es perfecta. En su propuesta no queda claro cuán justificado está el paso al límite de la línea quebrada a la curva y se evidencian otras “imprecisiones” de carácter lógico. Sin embargo, de ningún modo se puede negar la gran ingeniosidad de Bernoulli para solucionar este problema. Y fue precisamente el desarrollo de las ideas contenidas en esta solución lo que condujo en el siglo XVIII a la creación del cálculo variacional.

# Conclusión

Tal y como dijimos al principio de nuestro encuentro con esta curva, la cicloide es la trayectoria que sigue un punto del borde de una rueda, pero ahora sabemos más cosas acerca de ella. Es la curva llamada *tautocrona* (curva de oscilaciones de período constante) y también la denominada *braquistocrona* (curva de descenso más rápido). Aunque la cosa no queda ahí: las curvas cicloidales se aplican en muchos cálculos técnicos.

Por otra parte, fue utilizada por los científicos del siglo XVII para la creación de métodos de investigación de otras curvas, lo que derivó en el surgimiento del cálculo diferencial e integral. Y, en concreto, el problema de la braquistocrona, condujo a la creación del cálculo variacional.

Así pues, la cicloide está relacionada de manera indispensable con uno de los períodos más interesantes en la historia de la matemática.



# Bibliografía

- [1] M. ANDERSON, V. KARTZ, R. WILSON, *Sherlock Holmes in Babylon*, The Mathematical Association of America, 2004.
- [2] G. N. BERMAN, *La cicloide: historia de una curva asombrosa y de sus afines*, URSS, 2010.
- [3] A. F. COSTA, M. GAMBOA y A. M. PORTO, *Notas de geometría diferencial de curvas y superficies*, Sanz y Torre, 3ª edición, 2005.
- [4] M. P. DO CARMO, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Alianza editorial, 1990.
- [5] M. KLINE, *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Alianza editorial, 2012.
- [6] R. LARSON, B. H. EDWARDS, *Calculus*, CENGAGE Learning, 2010.
- [7] E. H. LOCKWOOD, *A book of curves*, Cambridge University Press, 2007.
- [8] L. S. PONTRIAGUIN, *Método de coordenadas*, URSS, 2011.
- [9] R. A. PROCTOR, *A treatise on the cycloid and all forms of cycloidal curves, and on the use of such curves in dealing with the motions of planets, comets, &c., and of matter projected from the sun*, Andesite Press, 2015.
- [10] D. E. SMITH, *History of mathematics. Vol I*, Dover Publications Inc., 2003.
- [11] D. J. STRUIK, *A source book in mathematics, 1200-1800*, Princeton University Press, 3ª edición, 1990.
- [12] J. WALLIS, *Opera mathematica*, E. Theatro Sheldoniano, 1693.
- [13] J. G. YODER, *Unrolling time: Christiaan Huygens and the mathematization of nature*, Cambridge University Press, 1989.