UNIVERSIDAD DE SEVILLA

TRABAJO DE FIN DE GRADO

BAJO EL TÍTULO DE

UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LOS SUBESPACIOS INVARIANTES

Presentado por
Carlos Constantino Oitavén

Dirigido por
Miguel Lacruz Martín

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

En memoria de mi abuelo, Santiago,
y mi abuela, Salvadora.

Agradecimientos

A mis padres, por concerderme el privilegio de emprender mi formación en la ciencia más compleja y hermosa de todas. Os guardo en el núcleo de mi corazón.

A Miguel, por su tiempo, paciencia y dedicación. Además de ser un magnífico profesional es una excelente persona.

Y la victoria crecerá despacio,
como siempre han crecido las victorias.

Mario Benedetti

Abstract

Halmos says that one of the most recalcitrant unsolved problems in operator theory is the invariant subspace problem. The question has an easy formulation: Does every bounded linear operator on an infinite dimensional, separable complex Hilbert space have a nontrivial invariant subspace?

The aim of this work is to present an introduction to the theory of invariant subspaces, developing some basic notions from functional analysis, the elementary theory of Banach algebras and the Riesz-Fredholm theory about the spectrum of a compact operator, in order to finally provide a proof of Lomonosov's theorem.

Key words and phrases. Banach space, bounded linear operator, compact operator, commutant of an operator, invariant subspace.

Resumen

Halmos dice que uno de los problemas más recalcitrantes en teoría de operadores es el problema del subespacio invariante. La cuestión posee un sencillo enunciado: ¿Tiene cualquier operador lineal y acotado en un espacio de Hilbert separable, complejo e infinito-dimensional un subespacio invariante no trivial?

El objetivo de este trabajo es presentar una introducción a la teoría de los subespacios invariantes, desarrollando algunas nociones básicas del análisis funcional, la teoría elemental de las álgebras de Banach y la teoría de Riesz-Fredholm acerca del espectro de un operador compacto, para poder ofrecer finalmente una demostración del teorema de Lomonosov.

Palabras clave. Espacio de Banach, operador lineal y continuo, operador compacto, conmutante de un operador, subespacio invariante.

Índice general

0. Introducción histórica. Presentación del problema **15**

1. Espacios de Banach y operadores lineales continuos **19**
1.1. Productos escalares. Espacios prehilbertianos 19
1.2. Ortogonalidad 22
1.3. Espacios normados y espacios de Banach 24
1.4. Operadores lineales continuos. Espacio dual 27
1.5. El teorema de Hahn-Banach. Principio de acotación uniforme 28

2. Teoría espectral elemental **29**
2.1. Álgebras de Banach 29
2.1.1. Introducción 29
2.1.2. Los elementos invertibles 31
2.2. Operadores compactos 39
2.2.1. Definiciones. Propiedades elementales 39
2.2.2. La teoría de Riesz-Fredholm 44
2.2.3. Espectro de un operador compacto 47
2.2.4. Operadores diagonales 51

3. Subespacios invariantes. El teorema de Lomonosov **59**
3.1. Definición. Ejemplos 59
3.2. El teorema de Lomonosov 61

A. Topología débil y fuerte. Convergencias **67**

Bibliografía **73**

Capítulo 0

Introducción histórica. Presentación del problema

Dice Halmos [4] que uno de los problemas sin resolver más recalcitrantes en teoría de operadores es el problema del subespacio invariante. La cuestión posee un sencillo enunciado:

¿Tiene cualquier operador lineal y acotado en un espacio de Hilbert separable, complejo e infinito-dimensional un subespacio invariante no trivial?

El origen del problema se remonta a los años 30 del siglo pasado cuando John von Neumann, en un trabajo sin publicar, prueba que cualquier operador compacto en un espacio de Hilbert complejo tiene un subespacio invariante no trivial.

Aronszajn y Smith demuestran en 1954 que cualquier operador completamente continuo en un espacio de Banach complejo tiene un subespacio invariante no trivial. Bernstein y Robinson, usando herramientas del análisis no estándar, prueban en 1966 que todo operador polinomialmente compacto en un espacio de Hilbert complejo tiene un subespacio invariante. Ese mismo año, Halmos proporciona una prueba de este resultado evitando las técnicas del análisis no estándar.

Victor Lomonosov, usando el teorema del punto fijo de Schauder, prueba en 1973 que todo operador compacto no nulo en un espacio de Banach complejo posee un subespacio no trivial que es invariante simultáneamente por todos los operadores que conmutan con dicho operador. Este resultado aparece como un relámpago en un cielo despejado que conmociona a la comunidad matemática. Lomonosov realiza su prueba en el caso no lineal, contruyendo de manera muy ingeniosa una cierta función para la cual puede ser aplicado el teorema del punto fijo de Schauder; de manera que los puntos fijos de esta función sean vectores propios del operador.

Wallen, de la Universidad de Hawaii, le contó la prueba de Lomonosov a su estudiante de doctorado Hilden. Wallen le propuso a Hilden si sería posible reemplazar el teorema de Schauder por el teorema del punto fijo de Banach para aplicaciones contractivas, para así poder ser expuesta en los cursos introductorios de análisis funcional. Al cabo de unos días, Hilden encontró una prueba que no requiere ningún teorema del punto fijo, ni otro resultado más allá de nociones elementales de análisis funcional.

Scott Brown demuestra en 1978 que cualquier operador subnormal en un espacio de Hilbert posee un subespacio invariante no trivial.

Per Enflo contruye en 1976 el primer ejemplo de un operador en un espacio de Banach sin subespacios invariantes no triviales. Este trabajo circula en forma de manuscrito durante una década hasta que finalmente aparece publicado en 1987. Mientras tanto, Bernard Beauzamy publica una simplificación de este resultado en 1985, y Charles Read contruye otro ejemplo, reclamando la autoría sin elegancia ni éxito.

El ejemplo de Per Enflo es un operador sencillo en un espacio de Banach complicado, mientras que el ejemplo de Charles Read es un operador complicado en un espacio de Banach sencillo.

Para que el lector tenga una idea de la complejidad del trabajo de Per Enflo, la reseña de A. M. Davie para Mathematical Reviews menciona:

> La finalización exitosa de la tarea de Enflo es un logro notable; sin embargo, la última parte de su artículo es tan impenetrable que está destinada a ser admirada en vez de ser leída.

Spiros Argyros y Richard Haydon construyen en 2009 un espacio de Banach en donde cualquier operador se expresa como la suma de un operador escalar y un operador compacto, y por lo tanto tiene un subespacio invariante no trivial, por el teorema de Lomonosov.

En la actualidad, se conocen resultados positivos y negativos para una extensa clase de operadores. Por ejemplo, el teorema espectral [3] proporciona subespacios hiperinvariantes para un tipo particular de operadores: los operadores normales.

Sin embargo, a día de hoy, el problema del subespacio invariante para operadores en espacios de Hilbert permanece abierto.

El objetivo de esta memoria es dar una introducción a la teoría de los subespacios invariantes, exponiendo de manera delicada y justa los conceptos necesarios para la comprensión del teorema de Lomosonov. La filosofía con la que ha sido realizado este trabajo es el tratamiento de una manera clara de los conceptos que irán siendo desarrollados, con una variedad de ejemplos que clarifiquen estas ideas, con la finalidad de que el lector interesado pueda ojear este documento sin la dificultad que puede llegar a ocasionar el nivel tan alto con el que algunos libros realizan una introducción a esta teoría.

En el primer capítulo se presenta una gran miscelánea de resultados de carácter introductorio al análisis funcional. El orden del desarrollo del capítulo es el natural: partiendo del producto escalar surgen los espacios prehilbertianos. También se consideran espacios de Banach cuya norma no deriva de un producto escalar. Posteriormente, se resumen de manera concisa las propiedades de los operadores lineales continuos para finalizar con dos resultados generales: el teorema de Hanh-Banach y el principio de acotación uniforme.

En el segundo capítulo se desarrolla adecuadamente un amplia gama de conceptos que constituyen los pilares sobre los que se sostiene la demostración del teorema de

Lomonosov. En la primera sección, se comienza por definir una estructura algebraica esencial: la estructura de álgebra de Banach. Posteriormente se verán sus propiedades. A continuación, se prueba un resultado que garantiza la no vacuidad del espectro de un elemento, para acabar demostrando la preciosa fórmula de Gelfand, que relaciona dos cantidades enteramente distintas: una algebraica y la otra métrica. La segunda sección recoge una presentación de los operadores compactos y sus características principales, así como la teoría de Riesz-Fredholm y el estudio del espectro de un operador compacto para, finalmente, proporcionar un extenso estudio sobre un caso particular de operadores: los operadores diagonales.

En el tercer capítulo se pone en funcionamiento la artillería expuesta en los capítulos anteriores para demostrar el espectacular teorema de Lomonosov. En la primera sección, se define el concepto de invarianza de un subespacio respecto a un operador. Además, se muestran algunos ejemplos que clarifiquen este concepto. En la sección posterior, se demuestra finalmente el teorema de Lomonosov para operadores compactos.

Por último, se ha decidido incluir un apéndice acerca de la topología débil, fruto de la necesidad. En él, se establece la definición de topología débil, sus propiedades elementales y el concepto de convergencia débil. Además, se debaten algunas de las similitudes y diferencias que comparte con la topología usual en los espacios normados, para acabar probando un resultado que garantiza la compacidad para la topología débil de la bola unidad cerrada de un espacio de Hilbert.

Capítulo 1

Espacios de Banach y operadores lineales continuos

El capítulo que se presenta recoge una gran miscelánea de resultados de carácter introductorio al análisis funcional. Será, por tanto, de vital importancia el manejo y entendimiento de los mismos para una futura comprensión de los capítulos posteriores. Partiendo del producto escalar surgen los espacios prehilbertianos. También se consideran espacios de Banach cuya norma no deriva de un producto escalar. Después, se resumen de manera concisa las propiedades de los operadores lineales continuos para finalizar con dos resultados de carácter general.

1.1. Productos escalares. Espacios prehilbertianos

Se comienza con una definición a partir de la cual se desarrollará el contenido de la sección.

Definición 1.1.1. Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un *producto escalar* sobre H es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilineal y definida positiva, es decir, tal que para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y para todo $x, y, z \in H$ se verifica:

i. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$,

ii. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,

iii. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,

iv. $\langle x, x \rangle \geq 0$,

v. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Además, un espacio H dotado de un producto escalar se denomida *espacio prehilbertiano.*

A partir de las propiedades que verifica un producto escalar se deducen las dos siguientes:

vi. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,

VII. $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$.

Definición 1.1.2. Sea H un espacio prehilbertiano y $x \in H$. Se denomina *norma cuadrática de* x al número $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Proposición 1.1.3. *Supóngase que H es un espacio prehilbertiano, que $x, y \in H$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces, se verifica:*

I. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

II. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,

III. $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ *(desigualdad de Cauchy-Schwarz),*

IV. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(desigualdad triangular),*

V. $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$ *(desigualdad triangular inversa),*

VI. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\| + \|y\|\right)^2$ *(identidad del paralelogramo).*

Ejemplos 1.1.4. Se muestran algunos ejemplos de productos escalares en espacios prehilbertianos de dimensión finita e infinita.

- $H = \mathbb{C}^N$ con
$$\langle (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N), (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)\rangle = \sum_{n=1}^{N} \xi_n \overline{\eta_n}.$$
- Si
$$H = \ell^2 := \left\{ (\xi_1, \xi_2, \dots) : \xi_i \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty \right\},$$
sean $x, y \in H$ con $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ e $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$. Entonces
$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_n},$$
define un producto escalar en ℓ^2.
- $H = C[a, b] := \{f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ es continua}\}$ con
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$
- Todo subespacio vectorial de un espacio prehilbertiano es también un espacio prehilbertiano.

Teorema 1.1.5. *Sea H un espacio prehilbertiano y denótese por $\|\cdot\|$ su norma cuadrática. Entonces la función*

$$\begin{array}{rcl} d\colon H\times H & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) := \|x-y\| \end{array}$$

es una distancia sobre H. Esto es, si $x, y, z \in H$, entonces se verifica:

I. $d(x,y) = d(y,x)$,

II. $d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z)$,

III. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Esta distancia se denomina la distancia cuadrática sobre *H.*

Una conclusión del teorema anterior es que todo espacio prehilbertiano puede ser dotado de estructura de espacio topológico. Los abiertos en tal topología serían las uniones arbitrarias de bolas abiertas

$$B(x,r) := \{y \in H : d(x,y) < r\} = \{y \in H : \|x-y\| < r\}, \quad x \in H, r > 0. \tag{1.1}$$

Por ello, tendrá sentido hablar de continuidad de aplicaciones que partan de H hacia cualquier espacio topológico, y viceversa. La teoría correspondiente a estas aplicaciones se abordará en secciones posteriores.

Recuérdense algunos conceptos y resultados de índole topológica. Considérese (X,d) un espacio métrico.

Definición 1.1.6. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ se dice que es *convergente* cuando existe un elemento $x \in X$ tal que $d(x_n, x) \to 0$ a medida que $n \to \infty$. Esto es, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $d(x, x_n) < \varepsilon$. Este elemento es necesariamente único y se denomina el *límite* de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Usualmente se denota

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{ó} \quad x_n \to x.$$

Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *de Cauchy* cuando para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0$ entonces $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Proposición 1.1.7. *Toda sucesión convergente es de Cauchy. Sin embargo, el recíproco no es cierto.*

El espacio (X,d) es *completo* cuando toda sucesión de Cauchy es convergente.

Proposición 1.1.8. *Supóngase que (X,d) es completo y que $A \subseteq X$. Entonces A es cerrado si y solo si (A,d) es un espacio métrico completo.*

Proposición 1.1.9. *Si H es un espacio prehilbertiano, las aplicaciones $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y $\|\cdot\|$ son continuas.*

La completitud provoca un gran enriquecimiento de las propiedades de un espacio prehilbertiano. Por ello, estos espacios poseen nombre propio.

Definición 1.1.10. Un *espacio de Hilbert* es un espacio prehilbertiano que es completo para la distancia cuadrática.

EJEMPLOS 1.1.11.

- El espacio $\mathbb{C}^N$ para $N \geq 1$ es completo para la distancia cuadrática proveniente del producto escalar ordinario.
- El espacio ℓ^2 con el producto escalar definido anteriormente.
- El espacio $L^2[a,b]$ definido como el conjunto cociente $\mathcal{L}^2[a,b]/\sim$ donde

$$\mathcal{L}^2[a,b] := \left\{ f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

con la relación de equivalencia $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ en casi todo, con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

es un espacio de Hilbert.

* * *

1.2. Ortogonalidad

Sea H un espacio de prehilbertiano. Un conjunto $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset H$ se denominará *ortonormal* cuando $\langle e_\gamma, e_\eta \rangle = \delta_{\gamma\eta}$. Además, si $x \in H$, se denominará *serie de Fourier asociada a x* respecto del sistema ortonomal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Un ejemplo intuitivo de sistema ortonormal en ℓ^2 es el conjunto $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde

$$u_i = \{0, 0, \ldots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, 0, \ldots\}.$$

Otro ejemplo es el conocido *sistema trigonométrico*, un sistema ortonormal sobre $L^2[-\pi,\pi]$ que consiste en

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in(x+\pi)} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Teorema 1.2.1. *Sean H un espacio prehilbertiano, $x \in H$ y $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal en H. Se verifica:*

I. *(Desigualdad de Bessel)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$

II. *(Identidad de Parseval) La serie de Fourier asociada a x converge hacia x si y solo si*
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2.$$

III. *Si H es de Hilbert, entonces la serie de Fourier asociada a x es convergente.*

Conviene recordar ahora que si $A \subseteq H$ es un subconjunto de un espacio prehilbertiano H, se denotará por $A^{\perp}$ al conjunto
$$\{y \in H : \langle x, y\rangle = 0 \text{ para cada } x \in A\},$$
y se le conoce como el *complemento ortogonal de A*.

Teorema 1.2.2. *Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano H. Las siguientes aserciones son equivalentes:*

I. *El sistema $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es completo, i.e., la identidad de Parseval se cumple para todo $x \in H$.*

II. *Cada elemento de H es la serie de Fourier respecto del sistema $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

III. *El sistema $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es total, i.e., se verifica que $\overline{\operatorname{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = H$.*

Además, si H es de Hilbert, entonces las siguientes aserciones son equivalentes a cada una de las siguientes:

IV. $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \{0\}$.

V. *El sistema $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es maximal, i.e., no existe otro sistema ortonormal que lo contenga estrictamente.*

Un sistema ortonormal es una *base ortonormal* si se verifica que todo elemento se escribe como su serie de Fourier, o cualquiera de las aserciones equivalentes descritas de acuerdo con el Teorema 1.2.2.

Definición 1.2.3. Si H es un espacio de Hilbert, se dirá que *separable* si contiene un subconjunto denso y numerable.

El concepto de separabilidad puede generalizarse a espacios topológicos. En el caso de los espacios de Hilbert se tiene una hermosa caracterización.

Teorema 1.2.4. *Un espacio de Hilbert es separable si y solo si contiene una base ortonormal.*

* * *

1.3. Espacios normados y espacios de Banach

La motivación del siguiente concepto es la necesidad de cuantificar cada elemento de un espacio vectorial.

Definición 1.3.1. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Una función $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ es una *norma* sobre X si para todo $x, y \in X$ y para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ se verifica:

I. $\|x\| \geq 0$,

II. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

III. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,

IV. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Se dirá que un espacio vectorial es un *espacio normado* si está dotado de una norma.

Ejemplos 1.3.2.
- Todo espacio prehilbertiano es un espacio normado con la norma cuadrática.
- En $\mathbb{C}^N$ para $N \geq 1$ se tienen dos normas conocidas. Para exponer una de ellas, debe conocerse la *desigualdad de Hölder*; ésta establece que si $\xi_1, \dots \xi_N, \eta_1, \dots, \eta_N$ son números complejos, entonces

$$\sum_{i=1}^{N} |\xi_i \eta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{N} |\eta_i|^q \right)^{1/q},$$

para $q > 1$ el único número tal que $1/p + 1/q = 1$.
A partir de esta, se puede probar la *desigualdad de Minkowski*, una generalización de la desigualdad triangular,

$$\left(\sum_{i=1}^{N} |\xi_i + \eta_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{N} |\eta_i|^q \right)^{1/q}.$$

Así, la aplicación

$$x = (\xi_1, \dots, \xi_N) \mapsto \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^p \right)^{1/p}$$

es una norma en $\mathbb{C}^N$, ya que proporciona la desigualdad

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

También lo es la aplicación

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \mapsto \|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,N} |\xi_i|.$$

- Los espacios ℓ^p para $p \in [1, \infty)$, formados por las sucesiones $x = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números complejos tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty,$$

forman un espacio normado con la norma

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{1/p}.$$

La justificación se basa en la desigualdad de Minkowski expuesta en el ejemplo anterior, ya que fácilmente tomando $n \to \infty$ se prueba que ℓ^p es un espacio vectorial, y que efectivamente $\|\cdot\|_p$ es una norma para él.

- De manera análoga que el apartado anterior, los espacios $L^p[a,b]$ son espacios normados con la norma

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p \colon L^p[a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Es útil la conocida *desigualdad de Hölder* en el caso integral

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\, dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{1/q},$$

donde $q > 1$ es el exponente conjugado de $p > 1$, i.e., el único número tal que $1/p + 1/q = 1$. La *desigualdad de Minkowski*

$$\|f+g\|_p = \left(\int_a^b |f+g|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^p \right)^{1/p} = \|f\|_p + \|g\|_p,$$

donde $1 \leq p < \infty$.

Usualmente $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o bien $(\xi_1, \xi_2, \dots)$ denotará a una sucesión. El motivo es que a veces es convienente entender a una sucesión como un vector con una cantidad infinita (numerable) de elementos.

Ya se vio que una norma $\|\cdot\|$ puede inducir una distancia, de acuerdo con el Teorema 1.1.5. La existencia de esta distancia natural en un espacio normado permite hablar de completitud.

Definición 1.3.3. Un espacio normado es un *espacio de Banach* si es completo para la distancia inducida por su norma.

Ejemplos 1.3.4.

- Los espacios
$$c_0 = \left\{(\xi_1, \xi_2, \dots) : \xi_i \in \mathbb{C}, \lim_{n\to\infty} \xi_n = 0\right\}$$
y
$$\ell^\infty = \left\{(\xi_1, \xi_2, \dots) : \xi_i \in \mathbb{C}, \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n| < \infty\right\}$$
son espacios de Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Basta notar que $\mathbb{C}$ es un espacio completo y que si una sucesión es de Cauchy para la norma $\|\cdot\|_\infty$, entonces cada sucesión componente debe ser de Cauchy en $\mathbb{C}$. Por el contrario, el espacio c_{00} de las sucesiones que son nulas a partir de cierto término no es completo, ya que la sucesión
$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 0, 0, \dots) \\ x_2 &= (1, 1/2, 0, 0, \dots) \\ x_3 &= (1, 1/2, 1/3, 0, \dots) \\ &\vdots \\ x_n &= (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, 0, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$
es de Cauchy pero no converge hacia un elemento de c_{00}.
- $L^p[a, b]$ para $1 \le p \le \infty$ es un espacio de Banach.
- El espacio $C[a, b]$ con la norma cuadrática no es completo. En cambio, es de Banach con la norma del supremo. Para comprobarlo, nótense los dos siguientes hechos:
  - La condición de Cauchy de convergencia uniforme: una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a alguna función $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ si y solo si, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para todo $m, n \ge n_0$ y todo $x \in [a, b]$.

- La convergencia uniforme conserva la continuidad.

Teorema 1.3.5. *Sea X un espacio normado e Y un subespacio vectorial de X. Entonces, $\overline{Y}$ es un subespacio vectorial de X. Además, si X es de Banach e Y es cerrado, entonces Y es un espacio de Banach.*

* * *

1.4. Operadores lineales continuos. Espacio dual

Se denotará por $\|\cdot\|$ la norma del espacio de salida como el llegada, siempre y cuando no dé lugar a confusión.

Teorema 1.4.1 (Caracterización de continuidad de operadores lineales)**.** *Sean X e Y espacios normados y $T\colon X \to Y$ una aplicación lineal. Son equivalentes:*

i. *T es continua en el origen.*
ii. *T es continua.*
iii. *T es uniformemente continua.*
iv. *Existe $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in X$.*

El teorema anterior asegura que un operador lineal entre espacios normados es continuo si y solo si es acotado. Posteriormente, se usarán alternativamente los conceptos de continuo y acotado. Este término proviene de la observación de que los operadores lineales continuos envían conjuntos acotados en conjuntos acotados. En efecto, sea $A \subseteq X$ es un conjunto acotado. Entonces, existe un radio $r > 0$ tal que $A \subseteq B(0, r)$. Ahora bien, si $T\colon X \to Y$ es un operador lineal entre espacios normados y $x \in A$,

$$\|Tx\| \leq M\|x\| \leq Mr,$$

por lo que $T(A) \subseteq B(0, Mr)$. Esto prueba que $T(A)$ es acotado.

Si X e Y son dos espacios normados, se denotará por $\mathcal{B}(X, Y)$ el espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales y continuas de X en Y. En el caso de $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$, se llama *espacio dual de X*, se denota por X^*; en el caso en el que $\mathcal{B}(X, X)$ se denotará abreviadamente por $\mathcal{B}(X)$. En el Apéndice A se habla de otro tipo de convergencia, relacionada íntimamente con el espacio dual.

El teorema anterior motiva el concepto de *norma de un operador lineal.*

Teorema 1.4.2. *Sean X e Y dos espacios normados. Para cada $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, se define*

$$\|T\| := \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\}\right\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}.$$

Entonces, $\|\cdot\|$ es una norma sobre $\mathcal{B}(X,Y)$. Además,

$$\|T\| = \text{mín}\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \text{ para todo } x \in X\}.$$

Proposición 1.4.3. *Si Y es de Banach entonces $\mathcal{B}(X,Y)$ es de Banach.*

Corolario 1.4.4. *Sea X un espacio normado, entonces X^* es un espacio de Banach.*

* * *

1.5. El teorema de Hahn-Banach. Principio de acotación uniforme

Teorema 1.5.1 (Hahn-Banach)**.** *Si M es un subespacio de un espacio normado X y $\Lambda \in M^*$, entonces Λ puede extenderse a un elemento $\hat{\Lambda} \in X^*$ tal que $\|\hat{\Lambda}\| = \|\Lambda\|$.*

Corolario 1.5.2. *Si X es un espacio normado y $x_0 \in X \setminus \{0\}$, existe un elemento $\Lambda \in X^*$ con $\|\Lambda\| = 1$ tal que $\Lambda(x_0) = \|x_0\|$.*

Ya se conoce que X^* es siempre un espacio de Banach, independientemente de si X lo es. Una de las consecuencias del Corolario 1.5.2 es que X^* no es el espacio vectorial trivial (i.e., $X^* \neq 0$) si X tampoco lo es. De hecho, X^* "separa puntos" de X. Esto significa que si $x_1 \neq x_2$ en X entonces existe un elemento $\Lambda \in X^*$ tal que $\Lambda(x_1) \neq \Lambda(x_2)$. Para probarlo, basta tomar

$$x_0 = x_2 - x_1$$

en el Corolario 1.5.2.

Otra consecuencia es que, para $x \in X$,

$$\|x\| = \sup\{|\Lambda(x)| : \Lambda \in X^*, \|\Lambda\| = 1\}.$$

Entonces, para cada $x \in X$ fijado, la aplicación $\Lambda \mapsto \Lambda(x)$ es un elemento de X^*, cuya norma es precisamente $\|x\|$.

Se finaliza el capítulo con el principio de acotación uniforme, un resultado útil en el que se ve reflejada, nuevamente, la importancia de la completitud de un espacio.

Teorema 1.5.3 (Banach-Steinhaus o principio de acotación uniforme)**.** *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X,Y)$. Son equivalentes:*

I. *La familia $\mathcal{F}$ está puntualmente acotada, i.e.,*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x)\| < \infty, \quad \text{para cada } x \in X.$$

II. *La familia $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada, esto es, $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\| < \infty$.*

* * *

Capítulo 2

Teoría espectral elemental

Una vez expuestos algunos resultados básicos del análisis funcional, el objetivo de este capítulo es exponer los resultados que son requeridos en la prueba del teorema de Lomonosov. En la primera sección, se comienza por definir una estructura algebraica esencial: la estructura de álgebra de Banach. Posteriormente se verán sus propiedades. A continuación, se probará un resultado que garantiza la no vacuidad del espectro de un elemento, para acabar demostrando la preciosa formúla de Gelfand, que relaciona dos cantidades enteramente distintas: una algebraica y la otra métrica. La segunda sección recoge una presentación de los operadores compactos y sus características principales, así como la teoría de Riesz-Fredholm y el estudio del espectro de un operador compacto para, finalmente, proporcionar un extenso estudio sobre un caso particular de operadores, los operadores diagonales.

2.1. Álgebras de Banach

2.1.1. Introducción

Un *álgebra compleja* es un espacio vectorial complejo $\mathcal{A}$ con un producto que es asociativo y distributivo, es decir,

$$a(bc) = (ab)c, \quad (a+b)c = ab + ac, \quad a(b+c) = ab + ac, \tag{2.1}$$

para cualesquiera $a, b, c \in \mathcal{A}$. Además, se verifica

$$\alpha(ab) = a(\alpha b) = (\alpha a)b, \tag{2.2}$$

para cada $a, b \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Si existe una norma definida en $\mathcal{A}$ que lo convierte en un espacio normado y se satisface la desigualdad

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad a, b \in \mathcal{A}, \tag{2.3}$$

entonces se dice que $\mathcal{A}$ es un *álgebra compleja normada*. Si, además, $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach, se convendrá en decir que $\mathcal{A}$ es un *álgebra de Banach*.

La desigualdad (2.3) convierte a la multiplicación en una operación continua. Esto es, si $a_n \to a$ y $b_n \to b$, entonces $a_n b_n \to ab$; la cual se sigue de (2.3) y de la identidad

$$a_n b_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b - b_n).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\|a_n b_n - ab\| &= \|(a_n - a)b_n + a(b - b_n)\| \\ &\le \|(a_n - a)b_n\| + \|a(b - b_n)\| \\ &\le \|a_n - a\| \cdot \|b_n\| + \|a\| \cdot \|b - b_n\| \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

puesto que al ser $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente, existe una constante $M > 0$ tal que $\|b_n\| \le M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observación 2.1.1. Nótese que no se ha requerido la conmutatividad de $\mathcal{A}$, y se prescindirá de ella siempre y cuando no sea previamente establecido explícitamente.

En lo que sigue, se asumirá que $\mathcal{A}$ posee *elemento unidad*. Esto es, existe un elemento $e \in \mathcal{A}$ tal que

$$ae = ea = a, \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

A partir de su definición es fácil ver que éste es único ($e' = e'e = e$) y que $\|e\| \ge 1$, por (2.3). Además, se asumirá que

$$\|e\| = 1.$$

Definición 2.1.2. En las condiciones precedentes, se dirá que un elemento $a \in \mathcal{A}$ es *invertible* si a tiene un *inverso* en $\mathcal{A}$, i.e., si existe un elemento $a^{-1} \in \mathcal{A}$ tal que

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e.$$

Nuevamente, es claro que cada elemento no posee más de un inverso. En efecto, si a_1^{-1} y a_2^{-1} fueran inversos de a,

$$aa_1^{-1} = e = aa_2^{-1} \Rightarrow a_1^{-1} = a_2^{-1}.$$

Además, si a y b son invertibles en $\mathcal{A}$, también lo son a^{-1} y ab, basta recordar que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Cabe destacar que los elementos invertibles poseen estructura de grupo respecto a la operación de multiplicación.

Ejemplo 2.1.3. El álgebra $\mathcal{B}(X)$, con elemento unidad I, de todos los operadores lineales y acotados en un espacio de Banach X, con

$$(A_1 + A_2)(x) = A_1(x) + A_2(x), \quad (A_1A_2)(x) = A_1(A_2(x)), \quad \|A\| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

si A, A_1 y $A_2 \in \mathcal{B}(X)$.

Las propiedades descritas en (2.1) y (2.2) son inmediatas, por lo que sólo es necesario probar (2.3). Para ello, se tiene,

$$\begin{aligned}\|A_1A_2\| &= \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|A_1A_2x\|}{\|x\|}\\ &\leq \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|A_1\|\cdot\|A_2x\|}{\|x\|}\\ &\leq \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|A_1\|\cdot\|A_2\|\cdot\|x\|}{\|x\|} = \|A_1\|\cdot\|A_2\|.\end{aligned}$$

Definición 2.1.4. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach compleja. El *espectro* de un elemento $a \in \mathcal{A}$, denotado por $\sigma(a)$, es el conjunto de los números complejos λ tales que $a - \lambda e$ no es invertible. Esto es,

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \text{ no es invertible}\}.$$

Observación 2.1.5. La teoría de las álgebras de Banach contiene una gran variedad de resutados que conectan propiedades algebraicas y topológicas. Se conoce que hay una relación íntima entre las álgebras de Banach y las funciones holomorfas, e.g., la prueba más elemental de que el espectro de un elemento es no vacío depende del teorema de Liouville para las funciones enteras. Esta es la razón principal por la cual las álgebras de Banach complejas poseen mayor riqueza que las reales, y por consiguiente, se restringirá la atención a las primeras.

2.1.2. Los elementos invertibles

En este apartado $\mathcal{A}$ denotará un álgebra de Banach compleja con unidad e, y $\mathcal{G}$ el conjunto de todos los elementos invertibles de $\mathcal{A}$.

Se comienza con un teorema que muestra que las álgebras de Banach complejas poseen un comportamiento similar a espacios ya conocidos, así como que los elementos de la forma $e+x \in \mathcal{A}$ para cada $x \in \mathcal{A}$ "pequeño" tienen inversa; y de hecho, se conoce la expresión explícita de ésta.

Teorema 2.1.6. *Sea $x \in \mathcal{A}$, con $\|x\| < 1$, entonces $e + x \in \mathcal{G}$,*

$$(e+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \tag{2.4}$$

y

$$\|(e+x)^{-1} - e + x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}. \tag{2.5}$$

Demostración. En primer lugar, nótese que de la desigualdad multiplicativa (2.3) implica que $\|x^n\| \le \|x\|^n$. Si se denota

$$s_N = e - x + x^2 - \cdots + (-1)^N x^N,$$

se sigue que $\{s_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{A}$. En efecto, para $\varepsilon > 0$, si k y m son dos números naturales arbitrarios, se tiene

$$\begin{aligned}\|s_m - s_k\| &= \left\| \sum_{n=k+1}^{m} (-1)^k x^n \right\| \\ &\le \sum_{n=k+1}^{m} \|x\|^n \\ &= \frac{\|x\|^{k+1} - \|x\|^{m+k+1}}{1 - \|x\|} < \varepsilon\end{aligned}$$

siempre que $k, m \ge N_0$ para un $N_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

La completitud de $\mathcal{A}$ asegura que la serie (2.4) coverge a un elemento $y \in A$. Ahora bien, dado que la multiplicación es continua, $\|x\| < 1$ por hipótesis y

$$(e + x)s_N = e + (-1)^N x^{N+1} = s_N(e + x),$$

se tiene $(e+x)y = e = y(e+x)$. Esto proporciona la identidad (2.4), y (2.5) se obtiene de

$$\begin{aligned}\|(e + x)^{-1} - e + x\| &= \left\| \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^n \right\| \\ &\le \sum_{n=2}^{\infty} \|x^n\| \\ &\le \sum_{n=2}^{\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|},\end{aligned}$$

como se deseaba. □

El siguiente resultado, a pesar de parecer a priori poco útil, proporcionará varios corolarios substanciales. Además, se podrá desembocar en un resultado que asegura la compacidad del espectro de un elemento.

Teorema 2.1.7. *Supóngase $x \in \mathcal{G}$ con $\|x^{-1}\| = 1/\alpha$ y $h \in \mathcal{A}$ tal que $\|h\| = \beta < \alpha$. Entonces, $x + h \in \mathcal{G}$, y además*

$$\|(x + e)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \le \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha - \beta)}. \tag{2.6}$$

Demostración. El elemento $x^{-1}h$ verifica

$$\|x^{-1}h\| \leq \frac{\beta}{\alpha} < 1,$$

por la desigualdad multiplicativa; y por el Teorema 2.1.6, $e + x^{-1}h \in \mathcal{G}$. Por otra parte, es claro que $x + h \in \mathcal{G}$, pues basta notar que

$$x + h = x(e + x^{-1}h)$$

y recordar que el producto de elementos invertibles es invertible con

$$(x + h)^{-1} = (e + x^{-1}h)^{-1}x^{-1}.$$

En consecuencia, usando la desigualdad (2.5) para el elemento $x^{-1}h$,

$$\begin{aligned}\|(x + h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| &= \|[(e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h]x^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|x^{-1}h\|^2}{1 - \|x^{-1}h\|}\|x^{-1}\| \\ &\leq \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha - \beta)},\end{aligned}$$

como se deseaba demostrar. □

Corolario 2.1.8. *$\mathcal{G}$ es un conjunto abierto, y la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ es un homeomorfismo de $\mathcal{G}$ en sí mismo.*

Demostración. Considérese $x \in \mathcal{G}$, entonces,

$$\|(x + h)^{-1} - x^{-1}\| \leq \|(x + h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| + \|x^{-1}hx^{-1}\| \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0,$$

y por tanto la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ es continua. Para concluir, basta notar que se aplica de elementos invertibles en ellos mismos, y al ser su propia inversa es un homeomorfismo. □

Corolario 2.1.9. *La aplicación $x \mapsto x^{-1}$ es diferenciable. De hecho, su diferencial en cualquier punto $x \in \mathcal{G}$ es el operador lineal que a cada $h \in \mathcal{A}$ le asocia $-x^{-1}hx^{-1}$.*

Demostración. En virtud de la desigualdad (2.6), para cada $x \in \mathcal{G}$ fijado,

$$\frac{\|(x + h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\|}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|}{\alpha^2(\alpha - \|h\|)} \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0.$$

En consecuencia, la aplicación que a cada $h \in \mathcal{A}$ le asocia $-x^{-1}hx^{-1}$ es la diferencial de la aplicación $x \mapsto x^{-1}$. □

Nótese que esto podría haberse deducido del Corolario 2.1.8. Esta noción de diferencial queda establecida en cualquier vectorial normado. En caso de suponer que $\mathcal{A}$ es conmutativo, la diferencial definida anteriormente asigna $-z^{-2}h$ a cada $h \in \mathcal{A}$, hecho que coincide con la derivada usual de la función holomorfa z^{-1}, que es $-z^{-2}$.

Teorema 2.1.10. *Para cada $x \in \mathcal{A}$, se verifica:*

I. *Si $\lambda \in \sigma(x)$, entonces $|\lambda| \leq \|x\|$. Esto es, se satisface la inclusión*

$$\sigma(x) \subseteq \overline{D}(0, \|x\|). \tag{2.7}$$

II. *$\sigma(x)$ es compacto.*

Demostración. La prueba original de la primera aserción se encuentra en [8]; una alternativa, en un caso más particular, se recoge en [1]. La peculiaridad de la demostración es la aparición del teorema del punto fijo de Banach.

Supóngase que $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ para un espacio de Banach X, y considérese $T \in \mathcal{B}(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > \|T\|$. Se compueba que entonces $T - \lambda I$ es biyectivo.

Dado $x_0 \in X$, la ecuación $Tu - \lambda u = x_0$, o equivalentemente, $u = \lambda^{-1}(Tu - x_0)$ tiene una única solución si la aplicación

$$G(u) := \lambda^{-1}(Tu - x_0)$$

tiene un único punto fijo. Para ello, basta probar que esta aplicación es contractiva, i.e., existe una contante $\gamma \in (0, 1)$ tal que

$$\|Tu - Tv\| \leq \gamma \|u - v\|, \quad \forall u, v \in X.$$

Pero esto es cierto, puesto que si $u, v \in X$,

$$\|Tu - Tv\| = \left\| \frac{1}{\lambda}(Tu - x_0) - \frac{1}{\lambda}(Tv - x_0) \right\| \leq \frac{\|T\|}{|\lambda|} \|u - v\|,$$

donde $\dfrac{\|T\|}{\lambda} < 1$ por hipótesis.

Para probar que $\sigma(x)$ es compacto, es suficiente probar que es suficiente probar que es cerrado y acotado, en virtud del teorema de Heine-Borel.
Es claro que es acotado, pues acaba de probarse la inclusión (2.7). Para ver que es cerrado, notar que:

- $\lambda \in \sigma(x) \Leftrightarrow x - \lambda e \notin \mathcal{G}$, por definición.
- $\mathcal{G}^c$ es el complementario de un conjunto abierto, en virtud del Corolario 2.1.8.
- La aplicación $\operatorname{eig}\colon \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ tal que $\lambda \mapsto \operatorname{eig}(\lambda) = x - \lambda e$ es continua.

Esto conduce a concluir que el conjunto

$$\operatorname{eig}^{-1}(\mathcal{G}^c) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \notin \mathcal{G}\} \subset \mathbb{C}$$

es un conjunto cerrado, al ser la imagen inversa de un conjunto cerrado por una aplicación continua. □

Teorema 2.1.11. *Sea $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ un operador lineal y acotado. Para $x \in \mathcal{A}$ fijado, defínase*

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{C} \setminus \sigma(x) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \lambda & \longmapsto & f(\lambda) := \Phi[(x - \lambda e)^{-1}]. \end{array}$$

Entonces la función f es holomorfa y $f(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0$.

Demostración. Para $\lambda \notin \sigma(x)$, aplíquese el Teorema 2.1.7 con $x - \lambda e$ en lugar de x y $(\lambda - \mu)e$ en lugar de h. Se tiene entonces que existe una constante $C = C(x, \lambda, \mu)$ tal que

$$\|(x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1} + (\lambda - \mu)(x - \lambda e)^{-2}\| \leq C|\lambda - \mu|.$$

Esto es, si $\mu \to \lambda$,

$$(x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1} + (\lambda - \mu)(x - \lambda e)^{-2} \longrightarrow 0,$$

o equivalentemente,

$$\frac{(x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1}}{-(\lambda - \mu)} \longrightarrow (x - \lambda e)^{-2}.$$

Ahora bien, si se aplica Φ, por su linealidad y continuidad se desprende que

$$\frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} \longrightarrow \Phi[(x - \lambda e)^{-2}].$$

Así, f es diferenciable (y por tanto holomorfa) en $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Finalmente, si $\lambda \to \infty$,

$$\lambda f(\lambda) = \Phi[\lambda(x - \lambda e)^{-1}] = \Phi\left[\left(\frac{T}{\lambda} - e\right)^{-1}\right] \longrightarrow \Phi(-e)$$

y por tanto

$$\lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0,$$

como se deseaba probar. □

Teorema 2.1.12. *Para cada $x \in \mathcal{A}$, $\sigma(x)$ es no vacío.*

Demostración. Fíjese $x \in \mathcal{A}$, y fíjese $\lambda_0 \notin \sigma(x)$. Entonces $(x-\lambda_0 e)^{-1} \neq 0$, y el Corolario 1.5.2 implica la existencia de un operador $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ lineal y acotado tal que

$$\Phi\left[(x-\lambda_0 e)^{-1}\right] = \|(x-\lambda_0 e)^{-1}\| \neq 0.$$

Siguiendo notación del Teorema 2.1.11, si se define

$$f(\lambda) := \Phi[(x-\lambda e)^{-1}],$$

entonces $f(\lambda_0) \neq 0$.

Si $\sigma(x)$ fuese vacío, el Teorema 2.1.11 implicaría que f es una función entera que tiende a 0 en el infinito, entonces $f \equiv 0$ por el teorema de Liouville. Esto contradice el hecho de $f(\lambda_0) \neq 0$. Por tanto, $\sigma(x)$ es no vacío. □

Observación 2.1.13. En dimensión finita, el teorema fundamental del álgebra asegura que todo polinomio de grado positivo posee al menos una raíz, real o compleja. Por ello, es la herramienta que asegura que el espectro de un endomorfismo complejo es no vacío. En efecto, sea $A\colon \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ para $N \geq 1$ una aplicación lineal, y denótese por $P(\lambda)$ su *polinomio característico*

$$P(\lambda) := \det(A-\lambda I).$$

Entonces, se conoce que existe al menos un $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(\lambda_0) = 0$. Por ello, dado que $\det(A-\lambda_0 I) = 0$, se concluye que la matriz $A-\lambda_0 I$ no es invertible. Por tanto, λ_0 pertenece al espectro de A. En conclusión, se puede entender el teorema de Liouville como una generalización del teorema fundamental del álgebra.

Observación 2.1.14. Nótese que para la prueba de que el espectro de un elemento sea no vacío ha sido fundamental tener las hipótesis del teorema de Liouville. Sin embargo, en álgebras de Banach reales hay elementos cuyo espectro es el vacío. Por ejemplo, en las condiciones del Ejemplo 2.1.3, si $X = \mathbb{R}^2$ se puede definir la aplicación lineal y continua $A \in \mathcal{B}(X)$ cuya representación matricial respecto la base canónica estándar sea

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, su polinomio característico

$$P(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \lambda^2 + 1$$

no tiene raíces reales. Por tanto, $\sigma(A) = \emptyset$.

Definición 2.1.15. Para cualquier elemento $x \in \mathcal{A}$, se define su *radio espectral*, $\rho(x)$, como el radio del menor disco cerrado centrado en el origen que contiene a $\sigma(x)$, i.e.,

$$\rho(x) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Teorema 2.1.16 (Fórmula del radio espectral de Gelfand)**.** *Para cada $x \in \mathcal{A}$,*

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}. \tag{2.8}$$

Para la prueba, se hará uso del siguiente lema, que muestra un propiedad acerca del espectro de la potencia de un elemento.

Lema 2.1.17. *Sea $x \in \mathcal{A}$ y n un entero positivo, si $\lambda \in \sigma(x)$ entonces $\lambda^n \in \sigma(x^n)$.*

Demostración. Fijado $x \in \mathcal{A}$, sea n un entero positivo, $\lambda \in \mathbb{C}$ y asúmase que $\lambda^n \notin \sigma(x^n)$. Se tiene,

$$x^n - \lambda^n e = (x - \lambda e)(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1} e). \tag{2.9}$$

Multiplicando cada miembro de (2.9) por $(x^n - \lambda^n e)^{-1}$, se muestra que $x - \lambda e$ es invertible, y por ello $\lambda \notin \sigma(x)$.
Este razonamiento prueba que

$$\lambda^n \notin \sigma(x^n) \Rightarrow \lambda \notin \sigma(x),$$

y por consiguiente, su contrarrecíproco establece que

$$\lambda \in \sigma(x) \Rightarrow \lambda^n \in \sigma(x^n), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

como se deseaba. □

Se procede ahora a desarrollar la demostración del teorema principal de esta sección.

Demostración. (Teorema 2.1.16) Si $x \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \sigma(x)$, se sigue del lema previo que $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. El Teorema 2.1.10 expone que

$$|\lambda|^n = |\lambda^n| \leq \|x^n\|,$$

luego

$$|\lambda| \leq \|x^n\|^{1/n}.$$

Tomando ínfimos y supremos en cada miembro de la desigualdad, respectivamente, se obtiene

$$\rho(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}. \tag{2.10}$$

Ahora, si $|\lambda| > \|x\|$, entonces $\left\|\lambda^{-1}x\right\| < 1$, por lo que aplicando el Teorema 2.1.6 (para el elemento $-\lambda^{-1}x$), se tiene

$$(e - \lambda^{-1}x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} x^n,$$

o, equivalentemente,

$$-(x-\lambda e)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}x^n. \tag{2.11}$$

Denótese ahora por Φ un operador lineal y acotado en $\mathcal{A}$ y defínase f como en el Teorema 2.1.11. Por (2.11), tal expansión

$$f(\lambda)=-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}\Phi(x^n)$$

es válida para todo λ tal que $|\lambda|>\|x\|$. Por el Teorema 2.1.11, f es holomorfa fuera de $\sigma(x)$, y entonces en el conjunto $\{\lambda : |\lambda|>\rho(x)\}$. Así, la serie de potencias (2.11) converge si $|\lambda|>\rho(x)$. En particular,

$$\sup_n|\Phi(\lambda^{-n}x^n)|<\infty \quad \text{si } |\lambda|>\rho(x), \tag{2.12}$$

para cada operador $\Phi\colon\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ lineal y acotado.

Una consecuencia del teorema de Hanh-Banach (ver Sección 1.5) establece que la norma de cualquier elemento de $\mathcal{A}$ es la misma como su norma como operador lineal y acotado en el espacio dual de $\mathcal{A}$. Como (2.12) se verifica para todo Φ, se puede aplicar el teorema de Banach-Steinhaus (ver Sección 1.5) y concluir que cada λ con $|\lambda|>\rho(x)$ existe un número real $C(\lambda)$ tal que

$$\|\lambda^{-n}x^n\|<C(\lambda), \quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.13}$$

Multiplicando (2.13) por $|\lambda|^n$ y tomando raíces n-ésimas se llega a

$$\|x^n\|^{1/n}\leq|\lambda|C(\lambda)^{1/n}, \quad n\in\mathbb{N},$$

si $|\lambda|>\rho(x)$, y entonces

$$\limsup_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}\leq\rho(x). \tag{2.14}$$

Finalmente, (2.10) y (2.14) desembocan en la igualdad (2.8). □

Observación 2.1.18. Si un elemento de $\mathcal{A}$ es o no un invertible en $\mathcal{A}$ es una cuestión puramente algebraica. Por ello, tanto el espectro como el radio espectral de un elemento están definidos en términos de la estructura algebraica de $\mathcal{A}$, independientemente de cualquier consideración métrica o topológica. El límite en el enunciado del Teorema 2.1.16, por el contrario, depende de las propiedades métricas de $\mathcal{A}$. Esta es una de las grandes características del teorema: afirma la igualdad de dos cantitades que surgen de dos ramas enteramente distintas.

Observación 2.1.19. El álgebra inicial puede ser una subálgebra de un álgebra de Banach $\mathcal{E}$, y entonces puede ocurrir que algún $x\in\mathcal{A}$ no sea invertible en $\mathcal{A}$ pero lo sea en $\mathcal{E}$. Por tanto, el espectro de x depende del álgebra donde se aloje; con la notación habitual, se tiene que

$$\sigma_{\mathcal{E}}(x) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(x).$$

Sin embargo, el radio espectral de x no es afectado por ese cambio, ya que el Teorema 2.1.16 asegura que puede ser expresado mediante las propiedades métricas de las potencias de x, y éstas son independientes de lo que ocurre fuera de $\mathcal{A}$.

* * *

2.2. Operadores compactos

2.2.1. Definiciones. Propiedades elementales

En esta subsección X e Y serán dos espacios de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. A menudo se hará uso de la notación $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.

Es conveniente recordar algunos resultados de índole topológica. Si X es un espacio métrico, un conjunto $A \subseteq X$ es *relativamente compacto* si toda sucesión en A posee una subsucesión convergente en X , o equivalentemente en espacios métricos, que su clausura sea compacta. Se dice que es *secuencialmente compacto* si la subsucesión converge hacia un elemento de A. Además, se dice que A es *totalmente acotado* cuando para todo $r > 0$ existen unos elementos $x_1, \dots, x_n \in X$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r).$$

Por último, se dice que A es *compacto* si de todo recubrimiento abierto de A se puede extraer un subrecubrimiento abierto y finito de A. En los espacios métricos completos *ser totalmente acotado*, *ser compacto* y *ser secuencialmente compacto* son propiedades son equivalentes.

Se comienza con la definición de compacidad de un operador lineal y continuo.

Definición 2.2.1. Un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ es *compacto* si cada conjunto acotado $A \subseteq X$ lo transforma en un conjunto relativamente compacto, i.e., que $\overline{T(A)}$ es compacto. El conjunto de los operados compactos se designa por $\mathcal{K}(X, Y)$, y como es habitual, se denotará por $\mathcal{K}(X)$ al espacio $\mathcal{K}(X, X)$.

El siguiente resultado proporciona una satisfactoria caracterización sobre la compacidad de un operador lineal y continuo.

Proposición 2.2.2. *Un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ es* compacto *si y solo si $T(B_X)$ es un conjunto relativamente compacto.*

Demostración. Considérese un operador $T\colon X \to Y$ lineal y continuo. Se procede a probar ambas implicaciones.
$\boxed{\Rightarrow}$ Es claro, puesto que $T(B_X)$ es relativamente compacto si B_X es un conjunto acotado, lo cual es cierto.
$\boxed{\Leftarrow}$ Por hipótesis, si

$$\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_X = \{w \in X : \|w\| \leq 1\},$$

la sucesión $\{Tw_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $\{Tw_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente.

En primer lugar, nótese que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es convergente si y solo la sucesión $\{\alpha x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es convergente (no necesariamente hacia el mismo elemento) para todo $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En particular, es cierto para una sucesión contenida en un conjunto acotado

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A \subseteq B(0,r).$$

Sin pérdida de rigor, puede asumirse entonces considerar la nueva sucesión $\{r^{-1}x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $r > 0$ el radio de una bola que contiene a A. Esta sucesión comparte el mismo carácter convergente que la sucesión original.

Finalmente, la sucesión $\{Tr^{-1}x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente, ya que

$$\{r^{-1}x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_X$$

dado que

$$\|r^{-1}x_n\| \leq |r^{-1}| \cdot \|x_n\| \leq r^{-1} \cdot r = 1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

como se deseaba probar. □

Una clase importante de operadores compactos la forman ciertos operadores integrales, una gama más general se describe en [4]. En el siguiente ejemplo se describen, y se expone la demostración de su compacidad.

Ejemplo 2.2.3. Tómese $X = L^2[0,1]$, el operador $T\colon X \to X$ definido por

$$(Tf)(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)\,dy,$$

donde $k \in C([0,1]\times[0,1])$, es compacto.

Para probarlo, se comprobará que $\overline{T(B_X)}$ es compacto es un subconjunto compacto de $C[0,1]$ con la norma del supremo, esto permitirá asegurar que de toda sucesión de $\overline{T(B_X)}$ puede extraerse una subsucesión convergente para la norma del espacio X.

El arma fundamental para desarrollar la prueba será el teorema de Ascoli-Arzela, por lo que basta ver que es un conjunto cerrado, acotado y equicontinuo.
Es claro que es cerrado, se prueba a continuación que es acotado y equicontinuo, en orden. acotado, i.e., existe una constante finita $M > 0$ tal que

$$\|Tf\|_\infty \leq M, \quad \forall f \in B_X.$$

En efecto, dado $f \in B_X$, es inmediato que $Tf \in C[0,1]$. Además,

$$\|Tf\|_\infty \leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,y)| \cdot |f(y)|\, dy \leq \sup_{(x,y)\in[0,1]^2} |k(x,y)| = \|k\|_\infty$$

y en cualquier caso, $T(B_X)$ es un conjunto acotado.

Una familia $\mathcal{F} \subset C[a,b]$ se dice que es *equicontinua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para x e $y \in [a,b]$

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Nótese ahora que dado $\varepsilon > 0$, por ser k una función uniformemente continua en $[0,1]\times[0,1]$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $|x_1 - x_2| < \delta$ entonces

$$|k(x_1,y) - k(x_2,y)| < \varepsilon, \quad \forall y \in [0,1].$$

Así, para todo $f \in B_X$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|(Tf)(x_1) - (Tf)(x_2)| &\leq \int_0^1 |k(x_1,y) - k(x_2,y)| \cdot |f(y)|\, dy \\
&< \varepsilon \int_0^1 |f(y)|\, dy \\
&\leq \varepsilon \left(\int_0^1 |f(y)|^2\, dy\right)^{1/2} \left(\int_0^1 dy\right)^{1/2} \\
&\leq \varepsilon \cdot \|f\|_2 \\
&\leq \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\overline{T(B_X)}$ es un conjunto compacto en $C[0,1]$ con la norma del supremo. Entonces, dada una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_X$, existe una subsucesión de $\{Tf_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un elemento $f \in C[0,1]$ tal que

$$\|Tf_{n_k} - f\|_\infty \to 0,$$

lo que implica

$$\|Tf_{n_k} - f\|_2 \to 0,$$

y queda probada así la compacidad de T.

Teorema 2.2.4. *El conjunto $\mathcal{K}(X,Y)$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{B}(X,Y)$ para la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(X,Y)}$.*

Demostración. Es claro que es un subespacio vectorial de $\mathcal{B}(X,Y)$, ya que si $A_1, A_2 \in \mathcal{K}(X,Y)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que el conjunto

$$(A_1 + \alpha A_2)(B_X) = A_1(B_X) + \alpha A_2(B_X)$$

es relativamente compacto.

Para comprobar que es cerrado, supóngase $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(X,Y), T \in \mathcal{B}(X,Y)$ y

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \to 0.$$

Hay que probar que $T \in \mathcal{K}(X,Y)$, i.e. $T(B_X)$ es relativamente compacto. Para ello, dada la completitud de Y, es suficiente probar que para cualquier $\varepsilon > 0$, $T(B_X)$ se puede recubrir con un número finito de bolas $B(x_i, \varepsilon)$ en Y, es decir, que $T(B_X)$ es conjunto totalmente acotado. Fíjese $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $T_n(B_X)$ es relativamente compacto,

$$T_n(B_X) \subset \bigcup_{i\in I_0} B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \operatorname{card}(I_0) \neq \infty.$$

Entonces,

$$T(B_X) \subset \bigcup_{i\in I_0} B(x_i, \varepsilon),$$

como se quería. □

Dado un operador $T\colon X \to Y$, se usará la notación habitual

$$\ker T = \{x \in X : Tx = 0\} \quad \text{y} \quad \operatorname{Im} T = \{Tx : x \in X\}$$

para el *núcleo* e *imagen* de T, respectivamente.

Definición 2.2.5. Un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ se dice que es de *rango finito* si $\dim \operatorname{Im} T < \infty$.

Los operadores de rango finito tienen la propiedad de ser compactos, ya que si $A \subset X$ es un conjunto acotado entonces $T(A)$ es acotado, ya que los operadores acotados (o continuos) envían conjuntos acotados en conjuntos acotados. Además, dado que $T(A)$ reside en un espacio de dimensión finita, la compacidad equivale a ser cerrado y acotado, y $\overline{T(A)}$ es cerrado. Por tanto, T es compacto.

Corolario 2.2.6. *Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores continuos de rango finito de X en Y y sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ tal que $\|T_n - T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \to 0$. Entonces $T \in \mathcal{K}(X,Y)$.*

Demostración. Es inmediato ya que $\mathcal{K}(X,Y)$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{B}(X,Y)$ y $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(X,Y)$. □

El famoso "*problema de aproximación*" (Banach, Grothendieck) se refiere al recíproco del Corolario 2.2.6. Dado un operador compacto T,

¿existe una sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de operadores de rango finito tal que $T_n \to T$?

En general, la respuesta es negativa (Enflo, 1972). No obstante, la respuesta es afirmativa en numerosas ocasiones; e.g., si Y es un espacio de Hilbert (véase [1]).

El siguiente ejemplo muestra una aplicación del Corolario 2.2.6. En él, se prueba la compacidad un operador muy particular.

Ejemplo 2.2.7. El operador

$$\begin{aligned} T\colon \ell^2 &\longrightarrow \ell^2 \\ x = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto Tx = \left\{\frac{\xi_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

es compacto. Para probarlo, la estrategia es comprobar que es límite de operadores de rango finito. Por ello, se define $T_n\colon \ell^2 \to \ell^2$ como

$$T_n x = \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \dots, \frac{\xi_n}{n}, 0, \dots\right).$$

Así, T_n es lineal y acotado, y como $\dim \operatorname{Im} T < \infty$, es también compacto. Además,

$$\|(T-T_n)x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\xi_k|^2}{k^2} \le \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2 \le \frac{\|x\|^2}{(n+1)^2},$$

luego

$$\|T - T_n\| \le \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Por tanto, T es compacto al ser límite de operadores de rango finito.

El espacio de los operadores compactos entre dos espacios de Banach posee una estructura algebraica muy valiosa. La siguiente proposición proporciona un relevante corolario donde se desvela.

Proposición 2.2.8. *Sean X, Y y Z tres espacios de Banach.*

I. *Si $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{K}(Y,Z)$, entonces $ST \in \mathcal{K}(X,Z)$*

II. *Si $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{B}(Y,Z)$, entonces $ST \in \mathcal{K}(X,Z)$.*

Demostración.

I. Por definición, basta comprobar que si $A \subseteq X$ es un conjunto acotado, entonces $ST(A)$ es un conjunto relativamente compacto. En efecto, como $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, entonces $T(A)$ es acotado. Por tanto, $ST(A) = S(T(A))$ es un conjunto relativamente compacto.

II. Nuevamente, si $A \subseteq X$ es un conjunto acotado, es suficiente probar que $S(T(A))$ es relativamente compacto. Esto es cierto, ya que los operadores lineales y continuos transforman conjuntos relativamente compactos en relativamente compactos.

$\square$

Corolario 2.2.9. *El espacio $\mathcal{K}(X,Y)$ es un ideal bilátero de $\mathcal{B}(X,Y)$.*

2.2.2. La teoría de Riesz-Fredholm

Se comienza con algunos resultados preliminares. El primero de ellos, conocido como el lema de Riesz, tendrá una presencia substancial en la mayoría de las pruebas que se desarrollarán en este apartado.

Lema 2.2.10 (Riesz). *Sea X un espacio vectorial normado y $M \subsetneq X$ un subespacio cerrado. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un elemento $x_\varepsilon \in X$ tal que*

$$\|x_\varepsilon\| = 1 \quad y \quad d(x_\varepsilon, M) = \inf_{w \in M} \|x_\varepsilon - w\| \geq 1 - \varepsilon.$$

Demostración. Supóngase $y \in X \setminus M$. Como M es cerrado, entonces $d := d(y, M) > 0$. Si se elige $m_0 \in M$ tal que

$$d \leq \|y - m_0\| \leq \frac{d}{1-\varepsilon}$$

entonces

$$x_\varepsilon = \frac{y - m_0}{\|y - m_0\|}$$

resuelve el problema.
En efecto, si $m \in M$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|x_\varepsilon - m\| &= \left\| \frac{y - m_0}{\|y - m_0\|} - m \right\| \\
&= \frac{1}{\|y - m_0\|} \Big\| y - m_0 - m\|y - m_0\| \Big\| \\
&= \frac{1}{\|y - m_0\|} \Big\| y - \underbrace{(m_0 + m\|y - m_0\|)}_{\in M} \Big\| \\
&\geq \frac{1-\varepsilon}{d} \cdot d = 1 - \varepsilon,
\end{aligned}$$

como se deseaba. $\square$

Teorema 2.2.11 (Riesz). *Sea X un espacio vectorial normado tal que B_X es compacta. Entonces* $\dim E < \infty$.

Demostración. Razónese por reducción al absurdo: va a tratarse de llegar a una contradicción usando la equivalencia entre compacidad y la compacidad secuencial en los espacios métricos.

Si X es de dimensión infinita, existe una sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subespacios de dimensión finita tales que $X_{n-1} \subsetneq X_n$. En virtud del lema de Riesz se puede construir una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $u_n \in X_n$, con $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$d(u_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

En particular, la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica que

$$\|u_n - u_m\| \geq \frac{1}{2}, \quad m < n.$$

Por tanto, se tiene que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que está contenida en un conjunto compacto B_X, no posee una subsucesión convergente, esto es una contradicción. En efecto, si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tuviese una subsucesión convergente $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} v,$$

se tendría

$$\frac{1}{2} \leq \|u_{n_j} - u_{n_k}\| \leq \|u_{n_j} - v\| + \|v - u_{n_k}\| \xrightarrow[j,k\to\infty]{} 0$$

lo cual es absurdo; esto contradice la hipótesis de ser B_X compacta. □

Se requiere el siguiente teorema-definición para poder enunciar el teorema de la alternativa de Fredholm.

Teorema 2.2.12 (Existencia y unicidad del operador adjunto)**.** *Sea H un espacio de Hilbert, y $T \in \mathcal{B}(H)$. Entonces, existe un único operador T^* tal que*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

A tal operador se le denomina el operador adjunto de T.

Teorema 2.2.13 (Alternativa de Fredholm)**.** *Sea $T \in \mathcal{K}(X)$. Entonces,*

i. $\dim\ker(I - T) < \infty$,

ii. $\mathrm{Im}\,(I - T)$ *es cerrado, y más exactamente* $\mathrm{Im}\,(I - T) = \ker(I - T^*)^{\perp}$,

iii. $\ker(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,(I - T) = X$,

iv. $\dim\ker(I - T) = \dim\ker(I - T^*)$.

Este teorema hace alusión a las posibles soluciones de la ecuación $u - Tu = x_0$, donde $x_0 \in X$ y $T \in \mathcal{K}(X)$ son dados y la incógnita es un elemento $u \in X$. Expresa que pueden ocurrir dos casos, dependiendo de si la dimensión de $\ker(I-T)$, que se sabe que es finita, sea nula o no.

1.$^{\underline{\text{er}}}$ Caso: $\dim\ker(I-T) = 0$. Para todo $x_0 \in X$ la ecuación $u - Tu = x_0$ posee una única solución.

Existencia Dado $x_0 \in X$, el hecho de que $\operatorname{Im}(I-T) = X$ implica que existe al menos un elemento $u \in X$ tal que $u - Tu = x_0$.

Unicidad Si u_1 y $u_2 \in X$ tales que $u_1 \neq u_2$ fueran soluciones de $u - Tu = x_0$, entonces

$$\left.\begin{array}{l} u_1 - Tu_1 = x_0 \\ u_2 - Tu_2 = x_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (I-T)(u_1 - u_2) = 0.$$

Por tanto, $u_1 - u_2 \in \ker(I-T)$, y en consecuencia $u_1 = u_2$.

2.$^{\underline{\text{o}}}$ Caso: $\dim\ker(I-T) = n > 0$. La ecuación homogénea $u - Tu = 0$ admite n soluciones linealmente independientes. En tal caso, la ecuación no homogénea $u - Tu = x_0$ tiene solución si y solo si x_0 verifica n *condiciones de ortogonalidad*, i.e. $x_0 \in \ker(I - T^*)^{\perp}$, tal y como asegura la segunda aserción.

Observación 2.2.14. La tercera propiedad resulta muy familiar en dimensión finita. Si $\dim X < \infty$, un operador de X en sí mismo es inyectivo si y solo si es sobreyectivo, ya que se verifica la identidad

$$\dim X = \dim\ker T + \dim\operatorname{Im} T.$$

Por el contrario, en dimensión infinita un operador lineal y acotado puede ser inyectivo sin ser sobreyectivo y viceversa.

Una manera de ilustrar esta situación es considerar los operadores desplazamiento (*unilateral shift* en inglés)

$$\begin{array}{rcl} R\colon \ell^2 & \longrightarrow & \ell^2 \\ x = (\xi_1, \xi_2, \dots) & \longmapsto & Rx = (0, \xi_1, \xi_2, \dots) \end{array}$$

a la derecha y

$$\begin{array}{rcl} L\colon \ell^2 & \longrightarrow & \ell^2 \\ x = (\xi_1, \xi_2, \dots) & \longmapsto & Lx = (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots) \end{array}$$

a la izquierda. Es claro que R es inyectivo pero no sobreyectivo y L es sobreyectivo pero no inyectivo. Por tanto, la tercera propiedad expresa una notoria característica de los operadores $I - T$ para $T \in \mathcal{K}(X)$.

2.2.3. Espectro de un operador compacto

En vista de exponer el teorema de Lomonosov para los operadores compactos, sería interesante conocer la estructura de su espectro. En esta subsección se pretende probar un teorema que desvela dicha cuestión.

Se parte definiendo el concepto de *valor propio* de un operador. Posteriormente se verá que el espectro de un operador compacto y su conjunto de valores propios son "casi" el mismo conjunto.

Definición 2.2.15. Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un *valor propio de* T, denotado por $\lambda \in \sigma_p(T)$, si

$$\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}.$$

El conjunto $\ker(T - \lambda I)$ es el *espacio propio asociado a* λ.
Se define la *resolvente de* T como el conjunto

$$\varrho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ es invertible}\} = \sigma(T)^c.$$

Nótese que si $\lambda \in \varrho(T)$ entonces $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$.

Observación 2.2.16. Es inmediato que $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$, puesto que si $\lambda \notin \sigma(T)$ entonces $\lambda \in \varrho(T)$ y, por ende, $\lambda \notin \sigma_p(T)$. En general, esta inclusión es estricta, salvo el caso excepcional de los espacios de dimensión finita. No obstante, en los espacios de dimensión infinita puede existir λ tal que

$$\ker(T - \lambda I) = \{0\} \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}(T - \lambda I) \neq X,$$

es decir, que pertenezca al espectro pero no sea un valor propio.

Un ejemplo que ilustra esta situación es, nuevamente, el desplazamiento a la derecha: se verifica que $0 \in \sigma(R)$ pero $0 \notin \sigma_p(R)$. En efecto, $R - 0 \cdot I = R$ no es invertible ya que no es sobreyectivo, e.g., los elementos de la forma $(\gamma, 0, \dots)$ con $\gamma \neq 0$ no están en $\operatorname{Im} R$. Sin embargo, $0 \notin \sigma_p(R)$ puesto que el desplazamiento a la derecha es claramente inyectivo, ya que si $x_1 = (\xi_1^1, \xi_2^1, \dots)$ y $x_2 = (\xi_1^2, \xi_2^2, \dots)$ con $x_1 \neq x_2$, se tiene

$$Rx_1 = (0, \xi_1^1, \xi_2^1, \dots) \neq (0, \xi_1^2, \xi_2^2, \dots) = Rx_2.$$

Teorema 2.2.17 (Espectro de un operador compacto)**.** *Sea* $T \in \mathcal{K}(X)$, *con* $\dim X = \infty$. *Entonces, se verifica*

I. $0 \in \sigma(T)$,

II. $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$,

III. *uno de los siguientes casos:*

  o bien $\sigma(T) = \{0\}$,

o bien $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *es finito,*

o bien $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *es una sucesión que tiende a* 0.

DEMOSTRACIÓN.

I. Razónese por reducción al absurdo, supóngase que $0 \notin \sigma(T)$. Entonces, T es biyectivo e $I = T^{-1}T$ es compacto. Por tanto, I es la composición de un operador compacto (T) y otro acotado (T^{-1}), y por ende, es compacto. Así, $I(B_X) = B_X = \overline{B_X}$ es compacta, y por el Teorema 2.2.11 se tiene que $\dim X < \infty$.

II. Basta comprobar la inclusión $\sigma(T) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(T) \setminus \{0\}$, ya que la contraria es siempre cierta. Sea $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Razónese por reducción al absurdo, suponiéndose que
$$\ker(T - \lambda I) = \{0\}.$$
Entonces, por el teorema de alternativa de Fredholm, ocurre que
$$\operatorname{Im}(T - \lambda I) = X,$$
y en consecuencia $T - \lambda I$ es invertible, lo que significa que $\lambda \in \varrho(T)$.

□

Para la tercera aserción, se usará el siguiente lema, que asegura que los puntos de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ son *aislados*.

Lema 2.2.18. *Sea* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números complejos distintos tal que*
$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$$
y
$$\lambda_n \in \sigma(T) \setminus \{0\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Entonces, $\lambda = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Se sabe, por la segunda aserción del Teorema 2.2.17, que $\lambda_n \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$. Entonces, $\ker(T - \lambda_n I) \neq \{0\}$. Por ello, existe $e_n \neq 0$ tal que
$$(T - \lambda_n I)e_n = 0, \tag{2.15}$$
o equivalentemente, que $Te_n = \lambda_n e_n$. Sea ahora
$$E_n = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle.$$
Prúebese que $E_n \subsetneq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ello, es suficiente probar, para todo n, que los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son linealmente independientes, y se hará por

inducción sobre n. Actuando por reducción al absurdo, admítase la afirmación para n y supóngase que

$$e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Entonces,

$$Te_{n+1} = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Te_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i. \tag{2.16}$$

La primera igualdad es por definición, la segunda por la linealidad de T y la última por la igualdad (2.15).

Por otra parte, un razonamiento análogo muestra que

$$Te_{n+1} = \lambda_{n+1} e_{n+1} = \lambda_{n+1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{n+1} e_i. \tag{2.17}$$

Ahora, de (2.16) y (2.17) se deduce

$$\alpha_i \lambda_i = \alpha_i \lambda_{n+1}, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Entonces, $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, ya que $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, por hipótesis. Pero esto es una contradicción ya que se había supuesto que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ eran linealmente independientes.

Por otra parte, es inmedianto que

$$(T - \lambda_n I)E_n \subset E_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.18}$$

En efecto, para $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ reales, se tiene

$$(T - \lambda_n I)(\gamma_1 e_1 + \cdots + \gamma_n e_n) = (T - \lambda_n I)(\gamma_1 e_1 + \cdots + \gamma_{n-1} e_{n-1}) \in E_{n-1},$$

al ser una combinación lineal de los $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$.
Puede aplicarse el lema de Riesz para los espacios E_n, que son cerrados al ser subespacios vectoriales y estar finitamente generados, se puede construir $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_n \in E_n$ con $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}, \quad n \geq 2.$$

Sean $2 \leq m < n$ de forma que

$$E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n. \tag{2.19}$$

Se verifica que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{Tu_n}{\lambda_n}-\frac{Tu_m}{\lambda_m}\right\| &= \left\|\frac{(Tu_n-\lambda_n u_n)}{\lambda_n}-\frac{(Tu_m-\lambda_m u_m)}{\lambda_m}+u_n-u_m\right\| \\
&= \left\|u_n-\left(u_m-\frac{(Tu_n-\lambda_n u_n)}{\lambda_n}+\frac{(Tu_m-\lambda_m u_m)}{\lambda_m}\right)\right\| \\
(*) &\geq d(u_n,E_{n-1}) \\
&\geq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

La primera igualdad resulta de sumar y restar u_n y u_m y operar. El paso $(*)$ se debe a que $u_m \in E_m$, por contrucción; además,

$$\frac{(Tu_n-\lambda_n u_n)}{\lambda_n}=\frac{1}{\lambda_n}(T-\lambda_n I)u_n \in E_{n-1},$$

como bien expresa la inclusión (2.18). Análogamente

$$\frac{(Tu_m-\lambda_m u_m)}{\lambda_m} \in E_{m-1} \subset E_{n-1}.$$

Por ello,

$$u_m-\frac{(Tu_n-\lambda_n u_n)}{\lambda_n}+\frac{(Tu_m-\lambda_m u_m)}{\lambda_m} \in E_{n-1},$$

ya que se tienen las inclusiones (2.19). Luego si $\lambda_n \to \lambda \neq 0$, se tiene

$$\frac{1}{|\lambda|}\|Tu_n-Tu_m\| \geq \frac{1}{2}.$$

Esto es una contradicción. En efecto, $\{Tu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debe contener una subsucesión convergente ya que está contenida en un conjunto secuencialmente compacto, esto es[1], $\{Tu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{T(B_X)}$. Pero es imposible, puesto que si existiese una subsucesión $\{Tu_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$Tu_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} v,$$

se tendría

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{|\lambda|}\|Tu_{n_j}-Tu_{n_k}\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\|Tu_{n_j}-v\|+\frac{1}{|\lambda|}\|v-Tu_{n_k}\| \xrightarrow[j,k\to\infty]{} 0,$$

lo cual es absurdo. □

[1] Recuérdese que en los espacios métricos la compacidad y la compacidad secuencial son propiedades equivalentes.

Con la ayuda del lema previo, se procede a finalizar la prueba del teorema central de la subsección.

DEMOSTRACIÓN. (TEOREMA 2.2.13, apartado III.) Para todo natural n, el conjunto

$$\sigma(T) \cap \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \frac{1}{n} \right\} \tag{2.20}$$

es vacío o finito, puesto que si contuviese una cantidad infinita de puntos distintos, formarían una sucesión de la cual se podría extraer una subsucesión (puesto que el conjunto (2.20) es compacto) cuyo límite sería 0, por el Lema 2.2.18. Pero esto es una contradicción, ya que

$$0 \notin \sigma(T) \cap \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \frac{1}{n} \right\},$$

lo que contradice el hecho de ser un conjunto cerrado (y por ende compacto).

En el caso de que $\sigma(T) \setminus \{0\}$ tenga infinitos puntos distintos $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se pueden ordenar

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots |\lambda_n| \geq \cdots$$

de manera que sea una sucesión que tienda a cero, por el lema previo. □

2.2.4. OPERADORES DIAGONALES

La teoría de operadores, como cualquiera de las ramas de la matemática, no puede ser estudiada y comprendida adecuadamente sin una larga variedad de ejemplos concretos que clarifiquen los conceptos expuestos. En este apartado se examinará el comportamiento de la norma, inversa y espectro de una clase de operadores particulares, los operadores diagonales.

Considérese H un espacio de Hilbert separable y denótese, como es habitual, por $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto de vectores que constituyen una base ortonormal para H. Un operador lineal y continuo D se dice que es un *operador diagonal* si

$$De_n = \alpha_n e_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.21}$$

A la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ suele llamársele la *diagonal de T*.

A veces es conveniente usar la notación

$$\operatorname{diag}\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \rangle$$

para describir el operador cuya diagonal es $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

En [4], se realiza una exposición generalizada de estos conceptos; considera la igualdad (2.21) para un índice arbitrario. La desventaja que proporciona aquella definición es la imposibilidad de usar, e.g., el principio de inducción. Por tanto, se considerá la definición dada previamente. Esta asunción permite entender, a grosso modo, un operador diagonal como una matriz diagonal infinita

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \alpha_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

De hecho, son sorprendentes las grandes similitudes que parecen tener, en algunas ocasiones, los espacios de dimensión finita e infinita.

Observación 2.2.19. La definición de un operador diagonal depende de la base ortonormal escogida. Para eliminar cualquier posible confusión, se entenderá que se definen a partir de la base fijada inicialmente, a menos que se indique explícitamente lo contrario.

Teorema 2.2.20 (Caracterización de un operador diagonal)**.** *Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea la diagonal de un operador diagonal es que esté acotada. En tal caso, entonces las ecuaciones*

$$De_n = \alpha_n e_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

determinan unívocamente al operador T, y

$$\|D\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|.$$

Demostración.
$\boxed{\Rightarrow}$ Sea D es un operador diagonal con $De_n = \alpha_n e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$|\alpha_n| = |\alpha_n| \cdot \|e_n\| = \|\alpha_n e_n\| = \|De_n\| \leq \|D\| \cdot \|e_n\| = \|D\|,$$

por lo que la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada y

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| \leq \|D\|.$$

Por otro lado, dado que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n, \quad \forall x \in H.$$

La descripción de cada elemento de H mediante su serie de Fourier permite usar la linealidad de D para obtener la desigualdad contraria. Esto es,

$$\begin{aligned}
\|Dx\|^2 &= \left\| D\left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n\right)\right\|^2 \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x, e_n\rangle e_n \right\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \langle x, e_n\rangle|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2 |\langle x, e_n\rangle|^2 \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2 \cdot \|x\|^2,
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\|D\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Dada una sucesión acotada $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si define D mediante

$$D\left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x, e_n\rangle e_n, \quad \forall x \in H,$$

los cálculos precedentes implican que, efectivamente, D es un operador lineal y continuo. Además, D es diagonal con diagonal $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ya que

$$De_n = \alpha_n e_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

por definición de D. La unicidad está implicita en la propia contrucción de D. En efecto, si D_1 y $D_2 \in \mathcal{B}(H)$ son tales que

$$D_1 e_n = \alpha_n e_n = D_2 e_n, \quad \text{para } n \in \mathbb{N},$$

entonces, para todo $x \in H$, se tiene

$$\begin{aligned} D_1 x &= D_1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle D_1 e_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle D_2 e_n \\ &= D_2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n\right) = D_2 x, \end{aligned}$$

lo que proporciona la unicidad. □

Un caso trascendente de operadores diagonales (sin exigir continuidad) son los inducidos por una sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números complejos. Basta considerar la transformación lineal A que parte de ℓ^2 hacia el espacio de todas las sucesiones complejas

$$A(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, \dots).$$

Una parte del Teorema 2.2.20 implica que si $A \in \mathcal{B}(\ell^2)$ es un operador lineal y continuo entonces la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha de estar necesariamente acotada. Pero, ¿qué ocurriría si la hipótesis de la continuidad de A es eliminada?[2] La respuesta la concede el siguiente resultado.

Proposición 2.2.21. *Si $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números complejos tal que*

$$\{\alpha_n\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$$

para toda $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, entonces la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada.

Demostración. Expresando el contrarrecíproco, la afirmación es equivalente a: si una sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada, entonces existe una sucesión $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2 < \infty$$

pero

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n\xi_n|^2 = \infty.$$

[2] La esencia de la pregunta recae sobre si ℓ^2 tiene *efecto regulador*, i.e. si $(\xi_1, \xi_2, \dots) \in \ell^2$ entonces $(\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, \dots) \in \ell^2$, para cualquier sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números complejos.

Se procede a dar la construcción de tal sucesión.

Si $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada, entonces $|\alpha_n|$ alcanza valores *grandes*. Por ello, se conoce que existe una sucesión de índices creciente

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_j < \cdots$$

tal que

$$\left|\alpha_{n_j}\right| \geq j, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Haciendo un abuso de notación, denótese por $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a esta nueva sucesión. Ahora bien, si se define

$$\xi_n = \frac{1}{\alpha_n}, \quad n \geq 1,$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

pero

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \xi_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty,$$

como se deseaba. □

El conjunto de todas las sucesiones acotadas de números complejos forman un álgebra de Banach con las operaciones usuales (suma, conjugación y producto puntuales), con elemento unidad ($\alpha_n = 1$ para todo n), con la conjugación ($\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \{\overline{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$) y con la norma

$$\|\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|.$$

Esto motiva a introducir el concepto de invertiblidad en este álgebra.

Definición 2.2.22. Una sucesión acotada $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dirá que es *invertible* si tiene un inverso en este álgebra. Esto es, si existe una sucesión acotada $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\alpha_n \beta_n = 1 \quad \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Una condición necesaria y suficiente para que esto ocurra es que la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ "esté alejada del cero", i.e., que exista una constante $\delta > 0$ tal que $|\alpha_n| \geq \delta$ para todo n natural.

Si H es un espacio de Hilbert con una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces es fácil verificar que la aplicación $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto D$ donde D es el operador diagonal tal que

$$De_n = \alpha_n e_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es una inmersión[3] del álgebra de sucesiones en el álgebra de operadores en H. Esta correspondencia preserva, además de las operaciones familiares y la norma, la conjugación. Esto es, si $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto D$ entonces $\{\overline{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto D^*$.

Teorema 2.2.23. *Un operador diagonal con diagonal $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es invertible si y solo si la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es invertible.*

Demostración.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si $D \in \mathcal{B}(H)$ es invertible con diagonal $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces existe $D^{-1} \in \mathcal{B}(H)$ tal que $D^{-1}(\alpha_n e_n) = e_n$. Así,

$$D^{-1}e_n = \frac{1}{\alpha_n}e_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nótese ahora que

$$\|D^{-1}e_n\| \leq \|D^{-1}\| \cdot \|e_n\| = \|D^{-1}\|, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

implica que

$$\frac{1}{|\alpha_n|} = \frac{1}{|\alpha_n|}\|e_n\| = \left\|\frac{1}{\alpha_n}e_n\right\| \leq \|D^{-1}\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, la sucesión $\{1/\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada y por tanto la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es invertible.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada tal que $\alpha_n\beta_n = 1$ para todo n, entonces basta definir $D^{-1}e_n := \beta_n e_n$ para todo n; que es un operador lineal, continuo y diagonal que actúa como la inversa de D. □

Corolario 2.2.24 (Espectro de un operador diagonal)**.** *El espectro de un operador diagonal es la clausura de los elementos de su diagonal. Esto es, si $D \in \mathcal{B}(H)$ es un operador con diagonal $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces*

$$\sigma(D) = \overline{\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Demostración. Es inmediata, ya que

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma(D) &\Leftrightarrow I - \lambda D \text{ no es invertible}\\ &\Leftrightarrow \alpha_n - \lambda \neq 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\\ &\Leftrightarrow \lambda \notin \overline{\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}},\end{aligned}$$

y esto prueba el resultado. □

Corolario 2.2.25. *Todo subconjunto compacto no vacío del plano complejo es el espectro de algún operador diagonal.*

[3]Una inmersión es un homeomorfismo sobre su imagen.

DEMOSTRACIÓN. Basta encontrar una sucesión que sea densa en dicho subconjunto compacto y formar el operador diagonal con tal sucesión como diagonal. $\square$

¿Es el operador identidad compacto? En los espacios de dimensión finita la respuesta es afirmativa, pues su rango, que es todo el espacio, tiene dimensión finita. Para los espacios de dimensión infinita, la respuesta no; la razón: la imagen de la bola unidad cerrada, que es la bola unidad cerrada, es compacta, y vía el teorema de Riesz se tendría que el espacio tiene dimensión finita.

Para el caso de los operadores diagonales, se conoce un criterio que caracteriza su compacidad. Pero antes, son necesarios dos lemas que esclarezcan la prueba del resultado.

Lema 2.2.26. *Sea (X, d) un espacio métrico, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión y $x \in X$. Son equivalentes:*

I. $x_n \to x$,

II. *de toda subsucesión $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puede extraerse una subsubsucesión $\{x_{n_{j_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que*
$$\lim_{k\to\infty} x_{n_{j_k}} = x.$$

DEMOSTRACIÓN.
$\boxed{\text{I.} \Rightarrow \text{II.}}$ Inmediata.
$\boxed{\text{II.} \Rightarrow \text{I.}}$ Por reducción al absurdo, supóngase que $x_n \nrightarrow x$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}$ existe un natural $n_j > j$ tal que

$$d(x_{n_j}, x) \geq \varepsilon$$

Tómese la sucesión $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, esta subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no posee ninguna subsubsucesión convergente. $\square$

Lema 2.2.27. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita, $T \in \mathcal{K}(X)$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \rightharpoonup 0$. Entonces, $Tx_n \to 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria de índices estrictamente creciente. Se tiene:

I. $Tx_{n_j} \rightharpoonup 0$, ya que por ser T continuo se satisface que
$$\langle x, Tx_{n_j}\rangle = \langle T^*x, x_{n_j}\rangle \to 0, \quad \forall x \in H.$$

II. El conjunto $\{Tx_{n_j} : j \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto al ser la imagen de una sucesión acotada por un operador compacto. Esto se debe a que la sucesión $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ vista como una familia de aplicaciones de X^*
$$\{\langle x, x_{n_j}\rangle\}_{j\in\mathbb{N}}$$

está puntualmente acotada (precisamente porque $x_n \rightharpoonup 0$), y por el teorema de Banach-Steinhaus, la sucesión está uniformemente acotada, i.e., existe una constante M tal que $\|x_{n_j}\| \leq M$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Por tanto, debe existir una subsubsucesión $\{Tx_{n_{j_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converga en norma, póngase, a un elemento $y \in X$.

Por otro lado, $Tx_{n_{j_k}} \rightharpoonup 0$. Ahora bien, dado que la convergencia en norma implica la débil, debe darse que $y = 0$. Esto permite concluir que para toda subsucesión de $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se ha encontrado una subsubsucesión convergente, y vía el Lema 2.2.26, $\|Tx_n\| \to 0$, o lo que es lo mismo, $Tx_n \to 0$, tal y como se deseaba probar. $\square$

Teorema 2.2.28 (Compacidad de un operador diagonal)**.** *Un operador diagonal con diagonal $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es compacto si y solo si $\alpha_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración.
$\boxed{\Rightarrow}$ Usando el Lema 2.2.27, como D es compacto por hipótesis y $e_n \rightharpoonup 0$[4] entonces

$$\|De_n\| = \|\alpha_n e_n\| = |\alpha_n| \cdot 1 \to 0,$$

como se quería demostrar.
$\boxed{\Leftarrow}$ Recíprocamente, supóngase que $D \in \mathcal{B}(H)$ es tal que

$$D = \operatorname{diag}\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \rangle.$$

Para cada natural n, considérese el operador D_n diagonal con diagonal

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0, 0, \ldots\}.$$

Así, el operador $D - D_n$ es un operador diagonal con diagonal

$$\{0, \ldots, 0, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots\},$$

y por ello

$$\|D - D_n\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_{n+k}|.$$

Entonces, si $\alpha_n \to 0$ ocurre que

$$\|D - D_n\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_{n+k}| \to 0.$$

En consecuencia, D es compacto, al ser límite de operadores de rango finito. $\square$

* * *

[4] La prueba de que $e_n \rightharpoonup 0$ se encuentra en el Apéndice A.

Capítulo 3

Subespacios invariantes. El teorema de Lomonosov

Analysis is the art of taming infinity.

Neil Falkne

En este capítulo se presenta una introducción a la teoría de los subespacios invariantes, por lo que se hará uso de la artillería expuesta en los capítulos anteriores. En la primera sección, se definirá el concepto de invarianza por un operador. Además, se mostrarán algunos ejemplos que esclarezcan este concepto. En la sección posterior, se probará el espectacular teorema de Lomonosov.

3.1. Definición. Ejemplos

Definición 3.1.1. Sea X un espacio de Banach sobre el cuerpo complejo, y $T \in \mathcal{B}(X)$.

Un *subespacio invariante por* T es un subespacio cerrado y propio M de X (i.e., $M \neq \{0\}$ y $M \neq X$) tal que

$$Tx \in M, \quad \forall x \in M.$$

Usualmente suele escribirse de manera abreviada como $T(M) \subseteq M$.

Se dirá que M es *hiperinvariante por* T si

$$S(M) \subseteq M$$

para todo operador S que conmute con T. El conjunto de operadores que conmuta con un operador T se denomina *el conmutante de* T y se denota por $\{T\}'$.

Conviene ilustrar este concepto con algunos ejemplos.

Ejemplo 3.1.2. Sea X un espacio de Banach sobre el cuerpo complejo con $\dim X = n < \infty$, y sea una operador $T \in \mathcal{B}(X)$ no nulo. Se conoce que las aplicaciones lineales entre espacios de dimensión finita poseen una representación matricial

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Entonces $\ker T$ es un subespacio invariante por T. En efecto,

$$T(\ker T) = \{0\} \subseteq \ker T,$$

al ser T un operador lineal.

El teorema fundamental del álgebra asegura que su polinomio característico tiene n raíces complejas, contando con sus multiplicidades. Póngase $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ las raíces complejas del polinomio

$$P(\lambda) := \det(T - \lambda I) = 0.$$

Entonces, los conjuntos

$$\{\ker(T - \lambda_i I) : i = 1, \ldots, n\}$$

son invariantes por T. En efecto, fijado i, si $x \in \ker(T - \lambda_i I)$,

$$T(Tx) = T(\lambda_i x) = \lambda_i (Tx).$$

Esto es, $Tx \in \ker(T - \lambda_i I)$. Además, son hiperinvariantes por T, es decir, si S es tal que $ST = TS$, entonces

$$T(Sx) = S(Tx) = S(\lambda_i x) = \lambda_i (Sx).$$

Luego $T(Sx) \in \ker(T - \lambda_i I)$.

Observación 3.1.3. En dimensión $2 \leq n < \infty$, si λ es un valor propio, el subespacio generado por su vector propio es un subespacio invariante, por lo que el problema del subespacio invariante está resuelto. El caso en el que $n = 1$, la solución es inmediata, pues los únicos subespacios invariantes por una recta son los triviales.

A partir del ejemplo anterior se obtiene el siguiente resultado, extendido para el caso de los espacios de dimensión infinita.

Proposición 3.1.4. *Sea X es un espacio de Banach con* $\dim X = \infty$*, $T \in \mathcal{B}(X)$ un operador lineal y acotado y $\lambda \in \sigma_p(T)$. Entonces el subespacio* $\ker(T - \lambda I)$ *es hiperinvariante por T.*

Ejemplo 3.1.5. El *operador de Volterra* se define como

$$\begin{aligned} V\colon L^2[0,1] &\longrightarrow L^2[0,1] \\ f &\longmapsto (Vf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Un clase de subespacios invariantes por V son los del tipo

$$M_{x_0} = \left\{ f \in L^2[0,1] : f(x) = 0 \text{ e.c.t. } x \in [0, x_0] \right\},$$

donde $x_0 \in [0,1]$. De hecho, en [7] se prueba un resultado que garantiza que son los únicos subespacios invariantes por V.

Fijado $x_0 \in [0,1]$, se procede a comprobar que, efectivamente, M_{x_0} es un subespacio invariante por V. En primer lugar, es inmediato que es un subespacio vectorial de $L^2[0,1]$, puesto que si $f_1, f_2 \in M_{x_0}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$f_1(x) + \alpha f_2(x) = 0 \qquad \text{en casi todo } x \in [0, x_0].$$

Además, es cerrado, puesto que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M_{x_0}$ con $f_n \to f$, entonces

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2[0,x_0]} &= \int_0^{x_0} |f(t)|^2 \, dt \\
&= \int_0^{x_0} |f_n(t) - f(t)|^2 \, dt \\
&= \|f_n - f\|^2_{L^2[0,x_0]} \\
&\leq \|f - f_n\|^2_{L^2[0,1]} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Luego, $\|f\|_{L^2[0,x_0]} = 0$ y, por tanto, $f(x) = 0$ en casi todo $x \in [0, x_0]$. También, se verifica que $V(M_{x_0}) \subseteq M_{x_0}$ ya que si $f \in M_{x_0}$, se tiene

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t) \, dt = 0 \quad \text{si } x \in [0, x_0].$$

Por tanto, M_{x_0} es invariante por V para cada $x_0 \in [0,1]$.

* * *

3.2. El teorema de Lomonosov

El teorema de Lomonosov aparece, cuanto menos, en un momento inesperado. Sus resultados, junto a los trabajos de Scott Brown son lo más relevantes en la teoría de los subespacios invariantes en las últimas cuatro décadas.

En lo que sigue, se procede a enunciar y probar el teorema de Lomonosov. La prueba está basada en la Hilden [6], y puede encontrarse en [9]. Como se verá, la demostración es desarrollada únicamente con herramientas básicas del análisis funcional, como son los contenidos expuestos en los Capítulos 1 y 2.

Teorema 3.2.1 (Lomonosov, 1973)**.** *Supóngase que X es un espacio de Banach complejo de dimensión infinita y que $T \in \mathcal{K}(X)$ con $T \neq 0$.*

Entonces, existe un subespacio cerrado M de X tal que $M \neq \{0\}, M \neq X$, y

$$S(M) \subseteq M \tag{3.1}$$

para todo $S \in \mathcal{B}(X)$ que conmute con T.

DEMOSTRACIÓN. Se introducen algunas notaciones: el conmutante de T

$$\Gamma = \{S \in \mathcal{B}(X) : ST = TS\},$$

y, para cada $y \in X$,

$$\Gamma(y) = \{Sy : S \in \Gamma\}.$$

Se verifica que Γ es una subálgebra cerrada de $\mathcal{B}(X)$. En efecto, es una subálgebra, ya que si $S_1, S_2 \in \Gamma$, entonces

$$(S_1 + S_2)T = S_1T + S_2T = TS_1 + TS_2 = T(S_1 + S_2)$$

y

$$(S_1S_2)T = S_1TS_2 = T(S_1S_2).$$

Además, es cerrada. Para comprobarlo, considérese una sucesión de operadores $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$ tal que $S_n \to S$. Entonces,

$$ST = \lim_{n\to\infty} S_nT = \lim_{n\to\infty} TS_n = TS,$$

hecho que se desprende de la continuidad de T. Por ende, $S \in \Gamma$.
Una consecuencia del hecho anterior es que $\overline{\Gamma(y)}$ es un subespacio vectorial cerrado[1] de X. Además, contiene a y, ya que el operador identidad conmuta con T, y de ahí se deduce que $\Gamma(y) \neq \{0\}$ si $y \neq 0$. Además, se satisfacen la inclusiones

$$S(\overline{\Gamma(y)}) \subseteq \overline{S(\Gamma(y))} \subseteq \overline{\Gamma(y)}, \quad \forall y \in X, \forall S \in \Gamma.$$

La primera surge gracias a la continuidad de S. La siguiente ocurre debido a que Γ es cerrada para la multiplicación y la clasura es monótona[2], esto es,

$$\begin{aligned} R(\Gamma(y)) &= \{RSy : S \in \Gamma\} \\ &\subseteq \{Sy : S \in \Gamma\} = \Gamma(y), \end{aligned}$$

siempre que $R \in \Gamma$. Por lo tanto, (3.1) se sostiene con $\overline{\Gamma(y)}$ para todo $y \neq 0$.

[1] Rudin en [9] comete un error tipográfico al exponer que $\Gamma(y)$ es cerrado, lo cual no ha de ser necesariamente cierto. En cambio, en esta demostración se ha considerado su clausura y el argumento sigue siendo válido.

[2] Si $A \subseteq B$ entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Si la conclusión del teorema fuese falsa, es decir, si no existiera tal M, entonces debe ocurrir que $\overline{\Gamma(y)} = X$ para todo $y \neq 0$; ya que en caso contrario, se tendría que el teorema es cierto, basta elegir $M = \overline{\Gamma(y)}$ para algún $y \neq 0$. En lo que sigue se asumirá que $\overline{\Gamma(y)} = X$ para todo $y \neq 0$. Se continúa con la prueba.

Sea $x_0 \in X$ tal que $Tx_0 \neq 0$, ya que $T \neq 0$. Entonces $x_0 \neq 0$. Por otro lado, dado que T es continuo, existe una bola abierta $B(x_0, r)$, con $r > 0$ por determinar, tal que

$$\|Tx\| \geq \frac{\|Tx_0\|}{2} \quad \text{y} \quad \|x\| \geq \frac{\|x_0\|}{2}, \quad \forall x \in B(x_0, r). \tag{3.2}$$

Se comprueba que, efectivamente, una elección del radio adecuada proporciona tales desigualdades.
En primer lugar, nótese que r debe satisfacer que

$$\begin{aligned} \Big| \|Tx\| - \|Tx_0\| \Big| &\leq \|Tx - Tx_0\| \\ &= \|T(x - x_0)\| \\ &\leq \|T\| \cdot \|x - x_0\| \leq \frac{\|Tx_0\|}{2} \end{aligned}$$

si

$$\|x - x_0\| < r \leq \frac{\|Tx_0\|}{2\|T\|}.$$

Esto proporcionaría una de las desigualdades, puesto que en particular la ecuación anterior desprende que

$$-\left(\|Tx\| - \|Tx_0\|\right) \leq \frac{\|Tx_0\|}{2} \Longleftrightarrow \|Tx\| \geq \frac{\|Tx_0\|}{2}. \tag{3.3}$$

Además, tal r debe verificar

$$r \leq \frac{\|x_0\|}{2},$$

para que el razonamiento usado en (3.3) conduzca a la otra desigualdad. Por tanto, una elección adecuada es

$$r = \text{mín}\left\{ \frac{\|x_0\|}{2}, \frac{\|Tx_0\|}{2\|T\|} \right\}.$$

La asunción sobre $\overline{\Gamma(y)}$ implica, por densidad, que para cada $y \neq 0$ debe existir un elemento de $\Gamma(y)$ en toda bola del espacio X. Es decir,

$$\text{existe } S \in \Gamma \quad \text{tal que} \quad Sy \in B(x_0, r).$$

La continuidad de S asegura que entonces existe un entorno abierto W de y tal que

$$S(W) \subseteq B(x_0, r).$$

Por otro lado, en virtud de que T es un operador compacto,

$$K := \overline{T(B(x_0, r))}$$

es un conjunto compacto.

Obsérvese ahora que $0 \notin K$, pues no satisface las desigualdades (3.2). Esto permite, junto al hecho de K es compacto, usar el razonamiento expuesto anteriormente sobre la densidad de $\Gamma(y)$ para garantizar la existencia de unos conjuntos abiertos $W_1, \ldots, W_n$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_i, \quad \text{con } W_i \subseteq X, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Además, existen unos operadores $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \Gamma$ tales que

$$S_i(W_i) \subseteq B(x_0, r), \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Sea ahora

$$C = \max\{\|S_1\|, \ldots, \|S_n\|\}.$$

Comenzando en x_0, se tiene

$$x_0 \in B(x_0, r) \Rightarrow Tx_0 \in K \Rightarrow \exists W_{i_1} \text{ tal que } Tx_0 \in W_{i_1} \Rightarrow S_{i_1}Tx_0 \in B(x_0, r)$$
$$S_{i_1}Tx_0 \in B(x_0, r) \Rightarrow TS_{i_1}Tx_0 \in K \Rightarrow \exists W_{i_2} \text{ tal que } TS_{i_1}Tx_0 \in W_{i_2} \Rightarrow S_{i_2}Tx_0 \in B(x_0, r)$$
$$\vdots$$

Continuando esta partida de ping-pong[3], se obtienen vectores de la forma

$$x_N = S_{i_N}T \cdots S_{i_1}Tx_0 = S_{i_N} \cdots S_{i_1}T^N x_0 \in B(x_0, r),$$

para $N \in \mathbb{N}$. Ya se conoce que el hecho de pertenecer a la bola $B(x_0, r)$ está condicionado a las desigualdades (3.2). Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\|x_0\|}{2} &\leq \|x_N\| \\ &\leq \|S_{i_N}\| \cdots \|S_{i_1}\| \cdot \|T^N\| \cdot \|x_0\| \leq C^N \|T^N\| \cdot \|x_0\|, \end{aligned}$$

para $N \in \mathbb{N}$. Esto es,

$$\frac{1}{2} \leq C^N \|T^N\|, \quad N \in \mathbb{N}.$$

La fórmula del radio espectral de Gelfand (véase el Teorema 2.1.16) proporciona

$$\rho(T) = \lim_{N \to \infty} \|T^N\|^{1/N} \geq \frac{1}{C} > 0.$$

[3] Se conoce que Rudin era muy aficionado a ese deporte, por lo que quizá de ahí provenga ese símil.

Por tanto, existe un número $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$; e invocando el Teorema 2.2.17, sobre el espectro de un operador compacto, se tiene que $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$.
El teorema de la alternativa de Fredholm asegura que si $T \in \mathcal{K}(X)$, entonces $\dim \ker(I - T) < \infty$. Si en lugar de considerar T, se considera el operador perturbado $\frac{1}{\lambda}T$, y multiplicando por $-\lambda$ se obtiene $T - \lambda I$. Por tanto, $\dim \ker(T - \lambda I) < \infty$. Por ello, el correspondiente subespacio asociado

$$\ker(T - \lambda I) = \{x \in X : (T - \lambda I)x = 0\}$$

es de dimensión finita; y por ende, $\ker(T - \lambda I) \neq X$. Es cerrado, puesto que es la imagen inversa de un conjunto cerrado, esto es, el conjunto $(T - \lambda I)^{-1}(\{0\})$.

Además, si $S \in \Gamma$ y $x \in \ker(T - \lambda I)$, entonces

$$T(Sx) = S(Tx) = S(\lambda x) = \lambda Sx,$$

luego $Sx \in \ker(T - \lambda I)$. Esto es,

$$S(\ker(T - \lambda I)) \subseteq \ker(T - \lambda I), \quad \forall S \in \Gamma.$$

Finalmente, $\ker(T - \lambda I)$ satisface la conclusión del teorema, incluso si se asume la condición de que $\overline{\Gamma(y)} = X$ para todo $y \neq 0$. $\square$

Corolario 3.2.2. *Todo operador $S \in \mathcal{B}(X)$ que conmute con un operador compacto no nulo posee un subespacio invariante.*

Demostración. Si S conmuta con algún operador compacto $T \neq 0$ entonces pertenece a su conmutante, y por ello, en virtud del teorema de Lomonosov, existe un subespacio cerrado y propio M de X tal que $S(M) \subseteq M$. $\square$

El teorema original es más general, su enunciado es el siguiente: Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, cualquier operador $T \in \mathcal{B}(X)$ no escalar (i.e., $T \neq \alpha I$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$) que conmute con un operador compacto $S \neq 0$ posee un subespacio invariante.

* * *

Apéndice A

Topología débil y fuerte. Convergencias

En este apéndice se pretende dar una breve presentación de la topología débil y, por consiguiente, el concepto de convergencia débil y su relación con la convergencia usual entre espacios normados.

Un espacio de Hilbert es un espacio métrico, y, como tal, es un espacio topológico. La topología métrica, i.e., la topología inducida por la norma, a menudo se denomina la topología *fuerte*. Es bien conocido (ver Sección 1.1) que una base para la topología fuerte es la colección de bolas abiertas, esto es, conjuntos de la forma

$$\{x \in H : \|x - x_0\| < r\},$$

donde x_0 es un elemento fijo sobre donde las bolas están centradas y $r > 0$ su radio.

Otra topología, denominada la topología *débil*, juega un papel fundamental en la teoría de los espacios de Hilbert.

Definición A.0.1. Sea un conjunto X, una colección de espacios topológicos $\{Y_i\}_{i \in I}$ y una colección de aplicaciones $\{f_i\}_{i \in I}$ tales que cada $f_i(X) = Y_i$. La topología *débil* en X, denotada por

$$\sigma\left(X, \{f_i\}_{i \in I}\right)$$

es la menor topología, en el sentido de la inclusión, tal que cada f_i es continua.

Además, en el caso en que X sea un espacio normado, la topología débil en X se define como

$$\sigma\left(X, X^*\right) := \sigma\left(X, \{f\}_{f \in X^*}\right).$$

La descripción de una base en una topología siempre ayuda a entender cómo son los abiertos en ésta.

Una subbase $\mathcal{S}$ (i.e., cualquier abierto puede escribirse como unión finita de elementos de $\mathcal{S}$) para la topología débil es

$$\mathcal{S} = \{x \in H : |\langle x - x_0, y_0 \rangle| < r\}.$$

Se sigue que una base para la topología débil es la colección de todos los conjuntos de la forma
$$\{x \in H : |\langle x - x_0, y_i\rangle| < r, i = 1, \dots, k\},$$
donde k es un entero positivo, $x_0, y_1, \dots, y_k$ son elementos fijados de H y $r > 0$ su radio.

Observación A.0.2. Los hechos sobre estas topologías serán descritos con el apropiado uso de los adjetivos "débil" y "fuerte". E.g., puede decirse que una función es débilmente continua, o que una sucesión converge fuertemente. En caso de no usar ningún adjetivo precedente se entenderá que se refiere a la topología fuerte.

Definición A.0.3. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge *fuertemente* (o *en norma*) a un elemento $x \in X$, denotado por $x_n \to x$, si
$$\|x_n - x\| \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$
Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge *débilmente* a un elemento $x \in X$, denotado por $x_n \rightharpoonup x$, si
$$\Lambda(x_n) \to \Lambda(x), \quad \forall \Lambda \in X^*.$$

A partir de esta asignación lingüítisca, cabe intuir que la convergencia fuerte implica la débil. En efecto, si $x_n \to x$, entonces
$$|\Lambda(x_n) - \Lambda(x)| = |\Lambda(x_n - x)| \le \|\Lambda\| \cdot \|x_n - x\| \to 0, \quad \forall \Lambda \in X^*. \tag{A.1}$$

Observación A.0.4. En el caso de que X sea un espacio de Hilbert, en virtud del teorema de representación de Riesz, $x_n \rightharpoonup x$ es equivalente a
$$\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle, \quad \forall y \in X. \tag{A.2}$$
Además, por la propiedad hermitiana del producto escalar, $x_n \rightharpoonup x$ es también equivalente a
$$\langle y, x_n\rangle \to \langle y, x\rangle, \quad \forall y \in X.$$

A pesar de haber definido la covergencia débil en un contexto más general (sobre cualquier espacio normado), es habitual relacionar esta topología con espacios de Hilbert. Así, para cada elemento fijado $x_0 \in H$, la aplicación
$$x \mapsto \langle x, x_0\rangle$$
es débilmente continua, por la propia definición de la topología débil. Además, esto implica de manera directa, por la propiedad hermitiana del producto escalar, que la aplicación
$$y \mapsto \langle y_0, y\rangle$$

donde $y_0 \in H$ está fijado, es también débilmente continua. Sería natural preguntarse ahora si la aplicación

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

es débilmente continua conjuntamente. Sin embargo, la respuesta es negativa, y un ingenioso ejemplo lo proporciona Halmos en [4], y se describe a continuación.

Si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal en H, se tiene que $e_n \rightharpoonup 0$ pero $\langle e_n, e_n \rangle = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El hecho de que $e_n \rightharpoonup 0$ se desprende de la identidad de Parseval, que asegura que en espacios de Hilbert separables

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2, \quad \forall x \in H.$$

La convergencia de esta serie implica, por la condición del resto, que $\langle x, e_n \rangle \to 0$ para todo $x \in H$. Esto es, $e_n \rightharpoonup 0$.

La siguiente proposición recoge una propiedad que relaciona a ambas convergencias.

Proposición A.0.5. *Si $x_n \rightharpoonup x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$ entonces $x_n \to x$.*

Demostración. Basta notar que

$$\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x \rangle = \langle x_n, x_n \rangle - \langle x, x_n \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x_n, x \rangle \longrightarrow 0.$$

pues

$$\langle x_n, x_n \rangle \to \|x\|^2, \quad \langle x, x_n \rangle \to \|x\|^2, \quad \text{y} \quad \langle x_n, x \rangle \to \|x\|^2.$$

□

Cuando se considera un conjunto en cierta topología, muchas son las cuestiones que demandan la atención. Sería conveniente que se pudiera conocer las conexiones entre la estructura usual y la nueva topología, ¿cuáles de ellos son compactos? ¿cuáles son cerrados? La siguiente proposición responde a una de estas cuestiones.

Proposición A.0.6. *Todo conjunto débilmente cerrado es fuertemente cerrado, pero el recíproco no es cierto.*

Demostración. La primera aserción es una consecuencia inmediata del hecho de que la convergencia fuerte implica la débil, probada en (A.1).
El recíproco es falso, i.e., que los conjuntos fuertemente cerrados no son necesariamente débilmente cerrrados. El contraejemplo lo muestra, nuevamente y en otro contexto, la observación de que si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal en X, entonces $e_n \rightharpoonup 0$ pero $e_n \nrightarrow 0$ pues $\|e_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Finalmente, se termina el capítulo con un conocido teorema. Este resultado es, tal y como sostiene Halmos, “tan difícil como importante”.

Teorema A.0.7. *La bola unidad cerrada en un espacio de Hilbert es débilmente compacta.*

Demostración. Sea H un espacio de Hilbert y B_H la bola unidad cerrada en H. Para cada $x \in H$, sea D_x el disco cerrado

$$D_x := \overline{D}(0, \|x\|) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\|\}$$

en el plano complejo, y sea

$$\mathcal{D} := \prod_{x \in H} D_x$$

su producto cartesiano con la topología producto usual.

Para cada $y \in B_H$, la aplicación $x \mapsto \langle x, y\rangle$ es un punto, dígase $\delta(y)$, en $\mathcal{D}$. Se puede entender $\delta \colon B_H \to \mathcal{D}$ como la aplicación tal que

$$y \mapsto \delta(y) := \prod_{x \in H} \langle x, y\rangle.$$

Obsérvese que δ está bien definida, pues $\langle x, y\rangle \in D_x$ debido a que

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \leq \|x\|$$

ya que $\|y\| \leq 1$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Esta aplicación define un homeomorfismo sobre su imagen, i.e. una aplicación biyectiva y bicontinua, de la bola unidad (con la topología débil) en $\delta(B_X) \subseteq \mathcal{D}$ (con la topología producto). En efecto, es continua pues

$$y_n \rightharpoonup y \quad \text{si y sólo si} \quad \langle x, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle,$$

para cada $x \in H$, por (A.2), y esto ocurre precisamente si y sólo si $\delta(y_n) \to \delta(y)$ en $\mathcal{D}$.

Por otra parte, es inyectiva, ya que si $\delta(y_1) = \delta(y_2)$, entonces $\langle x, y_1\rangle = \langle x, y_2\rangle$ para todo $x \in H$, lo que implica que $y_1 - y_2$ es un elemento ortogonal a todos los del espacio, y por tanto es el elemento nulo, esto es, $y_1 = y_2$.
El teorema de representación de Riesz proporciona la sobreyectividad; además, implica que la imagen de δ, $\delta(B_H)$, consiste exactamente en estos elementos de $\mathcal{D}$, que son, de hecho, operadores lineales y continuos de norma menor o igual a 1 en H. Esto es,

$$\delta(B_H) = \{T \in \mathcal{D} : T \text{ operador lineal con } \|T\| \leq 1\}.$$

Los siguientes hechos permitirán enunciar un resultado que ayudará a probar que δ es homeomorfismo.

- $\mathcal{D}$ es un espacio topológico compacto, pues el producto arbitrario de espacios topológicos compactos es compacto, en virtud de el teorema de Tychonoff.

- B_H es de Hausdorff puesto que el dual separa puntos, por el Corolario 1.5.2.

En estas condiciones, se tienen las hipótesis del siguiente resultado auxiliar.

Lema A.0.8. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua y biyectiva entre espacios métricos, X es compacto e Y es de Hausdorff, entonces f es un homemorfismo.*

La aplicación $\delta^{-1} \colon \mathcal{D} \to B_H$ es inyectiva y sobreyectiva sobre su imagen, esto es, es biyectiva. Además, parte de un espacio topológico compacto hacia un espacio de Hausdorff. Si se prueba su continuidad, se tendrá que δ es un homeomorfismo. Para ello, basta notar que si $A \subset B_H$ es abierto, entonces $\delta(A)$ también lo es. En efecto, la igualdad

$$\delta^{-1}(\delta(A)) = A$$

válida por ser δ inyectiva prueba que $\delta(A)$ es necesariamente un conjunto abierto.

Una vez establecido un homeomorfismo entre la bola unidad y el espacio compacto $\mathcal{D}$, el resto de la prueba se basa en argumentar que $\delta(B_H)$ es cerrado. Esta conclusión se debe a notar las siguientes observaciones:

I. $B_H = \delta^{-1}(\delta(B_H))$.

II. Las funciones continuas transforman compactos en compactos.

III. Todo subconjunto cerrado de un espacio topológico compacto es compacto.

Así, se deduce es suficiente probar que $\delta(B_H) \subset \mathcal{D}$ es un conjunto cerrado. Para comprobar que es cerrado, considérese $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \delta(B_H)$ con $T_n \to T$. Entonces, si $x, y \in H$, se tiene

$$\begin{aligned} T(x+y) &= \lim T_n(x+y) \\ &= \lim T_n(x) + \lim T_n(y) \\ &= T(x) + T(y), \end{aligned}$$

y

$$|T(x)| = |\lim T_n(x)| = \lim |T_n(x)| \leq \lim \underbrace{\|T_n\|}_{\leq 1} \|x\| \leq \|x\|.$$

Esto prueba que, efectivamente, $T \in \delta(B_H)$, y por tanto es cerrado. Por lo que se concluye que la bola unidad cerrada B_H es débilmente compacta. □

En el Teorema 2.2.11 se prueba que si en un espacio vectorial normado (en particular, de Hilbert) la bola unidad cerrada es fuertemente compacta, entonces es de dimensión finita. Sin embargo, en un espacio de Hilbert la bola unidad cerrada siempre es débilmente compacta. Esto muestra una gran diferencia entre la topología débil y fuerte.

* * *

Bibliografía

[1] Brezis, H. *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones.*, ed. cast.: alianza editorial, s. a., madrid, 1984 ed. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983.

[2] Diestel, J. *Sequences and series in Banach spaces*, vol. 92 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1984.

[3] Halmos, P. R. What does the spectral theorem say? *Amer. Math. Monthly 70* (1963), 241–247.

[4] Halmos, P. R. *A Hilbert space problem book*, second ed., vol. 19 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 17.

[5] Kolmogorov, A. N., and Fomin, S. V. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. "Mir", Moscow, 1982. Traducido del ruso por Carlos Vega.

[6] Michaels, A. J. Hilden's simple proof of Lomonosov's invariant subspace theorem. *Adv. Math. 25*, 1 (1977), 56–58.

[7] Radjavi, H., and Rosenthal, P. *Invariant subspaces*, second ed. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003.

[8] Rudin, W. *Real and complex analysis*, third ed. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[9] Rudin, W. *Functional analysis*, second ed. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.