



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Aproximación de Hélices mediante Curvas Polinomiales

Memoria realizada por Mónica Collin Goth

Dirigido por:
VºBº

Dra. M. Carmen Márquez García

Abstract

In this work we study two different methods to approximate the helix by Bézier curves. The first one approximation is by cubic rational Bézier curves, simple and composite, and we analyze the error committed.

The second one is by quadratic polynomial and rational Bézier curves. We also calculate the error bound with the Hausdorff distance between the helix and each approximate curve. Finally, we show both methods in some examples.

Índice general

Introducción	7
1. Preliminares	9
1.1. Conceptos previos	9
1.2. Arco de circunferencia como curva racional	17
2. Aproximación cúbica de hélice	25
2.1. Idea básica de la aproximación	25
2.2. Optimización de la aproximación	27
2.3. Continuidad C^2 en las uniones	33
3. Aproximación cuadrática de hélice	47
3.1. Idea básica de la aproximación	47
3.2. Cálculo del error	52
3.3. Ejemplos	56
Bibliografía	61

Introducción

La hélice es una curva en el espacio que se origina por el movimiento de traslación de un punto que gira entorno a un eje. La hélice circular puede observarse habitualmente en numerosas disciplinas científicas. Destacamos por su belleza la estructura del ADN y la escalera de doble hélice del castillo de Chambord en Francia.

El objetivo de este trabajo es aproximar una hélice circular mediante curvas polinomiales, en particular, curvas de Bézier. Las curvas de Bézier, concepto fundamental para esta memoria, fueron desarrolladas por primera vez por Paul Casteljau en 1959, usando el algoritmo que lleva su nombre, sin embargo, fue Pierre Bézier quien las publicó 3 años más tarde, en 1962, de quien tomaron el nombre. Estas curvas fueron un sistema que se desarrolló para el trazado de dibujos técnicos, en el diseño aeronáutico y en el de automóviles.

Pierre Bézier nació en París en 1910. Su padre era ingeniero y su madre fue una persona muy interesada en la criptografía y el análisis combinatorio. Obtuvo el título de ingeniero mecánico en la Escuela Nacional Superior de Artes y Oficios y un año después el de ingeniero eléctrico en la Escuela Superior de Electricidad. Salió al mercado laboral en 1931 y dos años más tarde entró en la casa Renault, llegando a la dirección general en 1960. Dedicó mucho tiempo a la enseñanza y sus trabajos, más allá del sector del automóvil, resonarían en toda la industria. Con la aparición de los primeros ordenadores hizo uso de la informática para el diseño de carrocería. Así en 1968 presentó un prototipo del sistema Unisurf que fue uno de los pioneros sistemas de diseño geométrico asistido por ordenador. Esta modelización matemática se apoya en las curvas que llevan su nombre y que protagonizan su tesis de Doctorado en Matemáticas que defendió en 1977. Finalmente, falleció en 1999 siendo enterrado en Gallardon, Francia.

Paul de Casteljau nació en 1930 en Besançon, Francia. Estudió física y

matemáticas y trabajó para la casa Citroën, donde en 1959 desarrolló un algoritmo conocido actualmente como algoritmo de De Casteljaou con el que se puede evaluar cálculos en una cierta familia de curvas polinómicas. El algoritmo de De Casteljaou es todavía ampliamente usado, aunque con algunas modificaciones, ya que es el método más robusto y numéricamente estable para evaluar polinomios. Finalmente, murió en 1999.

Este trabajo está dividido en tres capítulos. El primero comienza introduciendo algunos conceptos previos que consideramos necesarios para la comprensión del mismo y de los que haremos uso a lo largo de la memoria. Expondremos la definición de curvas de Bézier y sus propiedades, centrándonos en las curvas racionales. También parametrizaremos un arco de circunferencia sobre el plano (X, Y) mediante curvas de Bézier racionales cuadráticas y veremos la elevación del grado.

En el segundo capítulo presentaremos y desarrollaremos el método introducido por I. Juhász en el artículo de investigación [6]. Se trata de un método para aproximar la hélice circular mediante una curva de Bézier racional cúbica. Está dividido en dos secciones: en la primera aproximaremos la hélice utilizando curvas de Bézier racionales simples y calcularemos una cota del error que se comete analíticamente, mientras que en la segunda sección lo haremos con curvas de Bézier racionales cúbicas compuestas y veremos el error cometido visualmente.

En el tercer y último capítulo, expondremos el método introducido por Young Joon Ahn en el artículo [1]. En él vamos a dar otro método para aproximar la hélice circular, en este caso, mediante curvas de Bézier cuadráticas polinomiales y racionales. Además, estudiamos una cota del error cometido utilizando la distancia de Hausdorff para cada una de las curvas. Finalmente, el capítulo concluye con unos ejemplos.

A lo largo de esta memoria, aparecen varias imágenes, éstas han sido elaboradas utilizando los programas Maple 17 y Geogebra.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo expondremos todas las definiciones y resultados que vamos a necesitar para desarrollar la aproximación de un arco de hélice circular de eje OZ y radio r mediante curvas de Bézier racionales.

Comenzamos con una primera sección de conceptos previos en la que definimos y enunciamos todas las nociones básicas que vamos a necesitar para la comprensión de esta memoria.

Continuamos con otra sección en la que desarrollamos la parametrización de un arco de circunferencia centrado en el origen de coordenadas de ángulo 2α , con $\alpha \in (0, \pi/2)$, y radio r sobre el plano (X, Y) como curva de Bézier racional cuadrática. Y por último, en esta misma sección, veremos cómo se realiza la elevación del grado de una curva de Bézier racional cuadrática a una curva de Bézier racional cúbica.

1.1. Conceptos previos

En esta sección vamos a enunciar algunos conceptos relativos a la teoría de Bézier que van a ser necesarios para la comprensión de esta memoria. También definiremos conceptos muy básicos de la geometría local de curvas para fijar la notación que seguiremos.

Definición 1.1.1 (Serie de Taylor) La *serie de Taylor* de una función f real o compleja infinitamente diferenciable en el entorno de un número real o complejo a es la siguiente serie de potencias:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a). \quad (1.1.1)$$

Si se centra sobre el punto cero, $a = 0$, se obtiene la siguiente expresión:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0). \quad (1.1.2)$$

Definición 1.1.2 (Curva regular) Una *curva parametrizada regular alabeada* de clase C^k es una aplicación

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), \end{aligned}$$

donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto ($I = \mathbb{R}$ es posible), que verifica las siguientes condiciones:

1. α es diferenciable de clase C^k , para algún $k \geq 1$.
2. $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq 0, \forall t \in I$.

Definición 1.1.3 (Triedro de Frenet) Dada una curva parametrizada $\alpha(t)$, con t un parámetro cualquiera, se define:

1. El *vector tangente* como:

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}.$$

2. El *vector binormal* se define por:

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}.$$

3. El *vector normal* se define por:

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t).$$

Definición 1.1.4 (Plano osculador) El *plano osculador de una curva en un punto* es el plano que contiene el vector tangente y el vector normal de la curva en dicho punto.

Definición 1.1.5 (Curvatura) Sea $\alpha(t)$ una curva parametrizada regular, la *curvatura* de esta curva en cualquier punto, $\alpha(t)$, se define como:

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Definición 1.1.6 (Continuidad geométrica de orden 1) Una curva $\alpha(t)$ se dice que posee *continuidad geométrica de orden 1* en $I \subseteq \mathbb{R}$ y diremos que es G^1 en I , si la dirección del vector tangente, $\alpha'(t)$, es continua en I .

Definición 1.1.7 (Continuidad geométrica de orden 2) Una curva $\alpha(t)$ se dice que posee *continuidad geométrica de orden 2* en $I \subseteq \mathbb{R}$ y diremos que es de clase G^2 en I , si el vector curvatura, $V(t) = k(t)\mathbf{n}(t)$, es continuo en I .

Definición 1.1.8 (Polinomios de Bernstein) Fijado $n \in \mathbb{N}$, existen $n+1$ *polinomios de Bernstein* de grado n :

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad 0 \leq i \leq n,$$

definidos generalmente para $t \in [0, 1]$.

Una de las propiedades destacables de los polinomios de Bernstein es que $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$ y además forman una base del espacio vectorial de los polinomios de grado n con coeficientes reales.

Definición 1.1.9 (Curva de Bézier) Llamamos *curva de Bézier* de grado n simple o de un tramo a la curva en forma paramétrica donde cada coordenada es expresada como combinación lineal de la base de Bernstein:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1],$$

con $b_i = (x_i, y_i)$ si es una curva en \mathbb{R}^2 ó $b_i = (x_i, y_i, z_i)$ si es una curva en \mathbb{R}^3 . Los coeficientes b_i , $0 \leq i \leq n$, se denominan *puntos de control* de la curva de Bézier y la poligonal que forman estos puntos se conoce como *polígono de control* de la curva de Bézier.

Estas curvas cumplen algunas propiedades a tener en cuenta, como que la curva está contenida en la envolvente convexa del polígono de control, es invariante bajo transformaciones afines, puede reparametrizarse mediante

una transformación afín del intervalo, es simétrica, es decir, si invertimos el polígono de control la gráfica de la curva es la misma sólo que recorrida en sentido inverso, interpola los puntos de control extremos siendo $B(0) = b_0$, $B(1) = b_n$ y es tangente al polígono de control en sus extremos, de modo que $B'(0) = n(b_1 - b_0)$, $B'(1) = n(b_n - b_{n-1})$.

Ejemplo 1.1.10 Curva de Bézier de 2º grado o cuadrática:

$$B(t) = (1-t)^2 b_0 + 2t(1-t)b_1 + t^2 b_2, \quad t \in [0, 1].$$

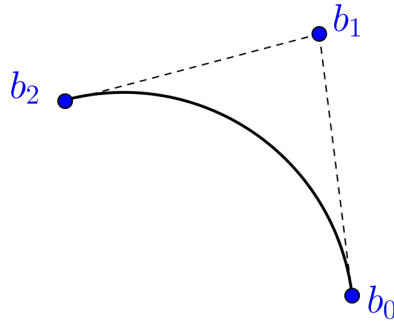


Figura 1.1: Ejemplo de una curva de Bézier cuadrática.

Definición 1.1.11 (Reparametrización) Aunque las curvas de Bézier simples $B(t)$ están definidas para $t \in [0, 1]$, es posible reparametrizarlas para que su intervalo de definición sea cualquier $[a, b]$ mediante un cambio de variable afín $t = \frac{s-a}{b-a}$:

$$\bar{B}(s) = \sum_{k=0}^n b_k B_k^n \left(\frac{s-a}{b-a} \right), \quad s \in [a, b].$$

Definición 1.1.12 (Curva compuesta) Sean $r_1(u)$ con $u \in [u_0, u_1]$ y $r_2(u)$ con $u \in [u_1, u_2]$ dos curvas de Bézier simples. Se define la *curva de Bézier compuesta* $r(u)$ parametrizada por $u \in [u_0, u_2]$ como

$$r(u) = \begin{cases} r_1(u) & u \in [u_0, u_1] \\ r_2(u) & u \in [u_1, u_2] \end{cases}$$

Se verifica que:

- $r(u)$ es de clase C^0 en $[u_0, u_2]$ si se verifica $r_1(u_1) = r_2(u_1)$.
- $r(u)$ es de clase C^1 en $[u_0, u_2]$ si además se tiene $r_1'(u_1) = r_2'(u_1)$.
- $r(u)$ es de clase C^2 en $[u_0, u_2]$ si además se cumple $r_1''(u_1) = r_2''(u_1)$.

Definición 1.1.13 (Curva de Bézier racional) Se define una *curva de Bézier racional* de grado n como

$$\gamma(t) = \frac{\omega_0 b_0 B_0^n(t) + \cdots + \omega_n b_n B_n^n(t)}{\omega_0 B_0^n(t) + \cdots + \omega_n B_n^n(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

donde los $\omega_i \in \mathbb{R}$ con $\omega_i > 0$ son los *pesos* y los $b_i \in \mathbb{R}^2$ ó \mathbb{R}^3 son los puntos de control, que forman el polígono de control.

Para una mejor interpretación de esta definición veamos que las curvas de Bézier racionales en el plano afín son una proyección de una curva de Bézier simple en el espacio proyectivo.

Consideremos una curva polinómica, $\gamma(t) = (\gamma_0(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t)), t \in [0, 1]$, en \mathbb{R}^3 y que no pase por el origen. Sabemos que la podemos ver como representante de una curva en el plano proyectivo, que se proyecta sobre el plano afín con una parametrización $\gamma(t) = (\gamma_1(t)/\gamma_0(t), \gamma_2(t)/\gamma_0(t))$. Así pues, a partir de una curva paramétrica polinómica en el espacio, hemos obtenido una parametrización racional de la misma en el plano. Obviamente, los polos de la parametrización, es decir, los valores de t para los cuales el denominador $\gamma_0(t)$ se anula, aunque son puntos legítimos del plano proyectivo, corresponden a puntos del infinito, fuera del plano afín.

Haciendo uso de los polinomios de Bernstein, en \mathbb{R}^3 podemos representar una curva de grado n por medio de un polígono de control $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1],$$

y luego proyectar sobre el plano afín. Sin embargo, esta manera de proceder no nos proporciona intuición sobre la curva plana, ya que los puntos de control del polígono están en el espacio.

Por ello, descompondremos, en su lugar, las coordenadas de los puntos de control en dos partes, $\mathbf{b}_i = (\omega_i, \omega_i b_i)$, donde ω_i es la primera componente del i -ésimo punto y $\omega_i b_i$ son las restantes. A primera vista, esta forma de proceder rompe la simetría de la expresión, pero es práctica, ya que $b_i \in \mathbb{R}^2$ es precisamente la proyección de \mathbf{b}_i sobre el plano afín.

Por tanto, estamos describiendo las curvas racionales por medio de un polígono de control $\{b_0, \dots, b_n\}$, al modo de las curvas polinómicas, y unos parámetros adicionales, $\{\omega_0, \dots, \omega_n\}$, que denominaremos pesos. La parametrización de la curva vendrá dada por

$$\gamma(t) = \left(\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t), \sum_{i=0}^n \omega_i b_i B_i^n(t) \right) \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, 1],$$

cuya proyección en el plano afín es

$$\gamma(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i b_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, 1], \quad (1.1.3)$$

lo que muestra claramente que los pesos son los parámetros que controlan el denominador de la parametrización racional.

Si todos los pesos son iguales, $\omega = \omega_i$, $i = 0, \dots, n$, el denominador desaparece pues

$$\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t) = \omega \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = \omega$$

y recuperamos una curva polinómica

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t),$$

de polígono de control $\{b_0, \dots, b_n\}$.

Para un mismo polígono de control $\{b_0, \dots, b_n\}$, los conjuntos de pesos $\{\omega_0, \dots, \omega_n\}$, $\{\lambda\omega_0, \dots, \lambda\omega_n\}$ corresponden a una misma parametrización y, por tanto, a una misma curva racional. Por ello, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que el primer peso sea la unidad, ya que basta escoger $\lambda = 1/\omega_0$.

Propiedades de las curvas racionales

Muchas de las propiedades de las curvas de Bézier simples se trasladan a las curvas racionales de manera inmediata, incluso de manera manifiestamente mejorada.

Para comenzar, seguimos empleando combinaciones baricéntricas de los vértices del polígono de control, ya que, sumando los coeficientes de cada b_i obtenemos la unidad:

$$\sum_{i=0}^n \frac{\omega_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n \omega_j B_j^n(t)} = 1.$$

Esto implica que las propiedades que se derivaban de este hecho para las curvas de Bézier, tales como que la curva está contenida en la envolvente convexa del polígono de control o que sea invariante bajo transformaciones afines, se siguen manteniendo.

Otras propiedades, como que la curva interpole los vértices extremos b_0, b_n o ser simétrica, se cumplen también. Por ejemplo, lo comprobamos para el punto inicial de la curva,

$$\gamma(0) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i b_i B_i^n(0)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(0)} = \frac{\omega_0 b_0}{\omega_0} = b_0, \quad (1.1.4)$$

y del mismo modo

$$\gamma(1) = b_n. \quad (1.1.5)$$

A lo largo del desarrollo de esta memoria, vamos a necesitar la primera y segunda derivada de una curva de Bézier racional cúbica en los puntos extremos y por ello, vamos a obtenerlas:

Consideramos una curva racional cúbica con los pesos $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$:

$$r(t) = \frac{(1-t)^3 \omega_0 b_0 + 3t(1-t)^2 \omega_1 b_1 + 3t^2(1-t) \omega_2 b_2 + t^3 \omega_3 b_3}{(1-t)^3 \omega_0 + 3t(1-t)^2 \omega_1 + 3t^2(1-t) \omega_2 + t^3 \omega_3} = \frac{N(t)}{D(t)}.$$

Sabemos que la expresión de la primera derivada de la curva $r(t)$ es la siguiente:

$$r'(t) = \frac{N'(t)D(t) - D'(t)N(t)}{D(t)^2},$$

donde

$$\begin{aligned} N'(t) &= 3(\omega_1 b_1 - \omega_0 b_0)(1-t)^2 + 3(\omega_2 b_2 - \omega_1 b_1)t(1-t) + 3(\omega_3 b_3 - \omega_2 b_2)t^2 \\ D'(t) &= 3(\omega_1 - \omega_0)(1-t)^2 + 3(\omega_2 - \omega_1)t(1-t) + 3(\omega_3 - \omega_2)t^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ya podemos expresar la primera derivada de la curva $r(t)$ en los puntos extremos, siendo:

$$r'(0) = \frac{N'(0)D(0) - D'(0)N(0)}{D(0)^2} = 3\frac{\omega_1}{\omega_0}(b_1 - b_0) \quad (1.1.6)$$

$$r'(1) = \frac{N'(1)D(1) - D'(1)N(1)}{D(1)^2} = 3\frac{\omega_2}{\omega_3}(b_3 - b_2). \quad (1.1.7)$$

Por otro lado, vamos a expresar el desarrollo del cálculo de la segunda derivada de dicha curva de Bézier racional, que también vamos a necesitar. La expresión de la segunda derivada de la curva $r(t)$ es la siguiente:

$$r''(t) = \frac{(N''(t)D(t) - D''(t)N(t))D(t)^2 - (N'(t)D(t) - D'(t)N(t))2D(t)D'(t)}{D(t)^4},$$

donde

$$\begin{aligned} N''(t) &= -6(\omega_1 b_1 - \omega_0 b_0)(1-t) + 6(\omega_2 b_2 - \omega_1 b_1)(1-2t) + 6(\omega_3 b_3 - \omega_2 b_2)t \\ D''(t) &= -6(\omega_1 - \omega_0)(1-t) + 6(\omega_2 - \omega_1)(1-2t) + 6(\omega_3 - \omega_2)t. \end{aligned}$$

La segunda derivada de la curva $r(t)$ en los puntos extremos será:

$$\begin{aligned} r''(0) &= \frac{(N''(0)D(0) - D''(0)N(0))D(0)^2 - (N'(0)D(0) - D'(0)N(0))2D(0)D'(0)}{D(0)^4} \\ r''(1) &= \frac{(N''(1)D(1) - D''(1)N(1))D(1)^2 - (N'(1)D(1) - D'(1)N(1))2D(1)D'(1)}{D(1)^4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$r''(0) = 6\frac{\omega_2}{\omega_0}(b_2 - b_0) - 18\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}(b_1 - b_0) + 6\frac{\omega_1}{\omega_0}(b_1 - b_0) \quad (1.1.8)$$

$$r''(1) = 6\frac{\omega_1}{\omega_3}(b_1 - b_3) + 18\frac{\omega_2^2}{\omega_3^2}(b_3 - b_2) - 6\frac{\omega_2}{\omega_3}(b_3 - b_2). \quad (1.1.9)$$

Proposición 1.1.14 *Dos curvas de Bézier racionales de grado n con los mismos puntos de control y con distintos pesos $\{\omega_0, \dots, \omega_n\}$, $\{\omega'_0, \dots, \omega'_n\}$ son la misma curva si se verifica:*

$$\frac{\omega'_0/\omega_0}{\omega'_1/\omega_1} = \frac{\omega'_1/\omega_1}{\omega'_2/\omega_2} = \dots = \frac{\omega'_{n-1}/\omega_{n-1}}{\omega'_n/\omega_n}.$$

Demostración: La demostración de esta proposición no la incluimos en esta memoria por ser demasiado técnica y no aportar ningún concepto relevante al desarrollo de este trabajo, pero se puede encontrar en [7].

Definición 1.1.15 (Distancia de Hausdorff) Sean $\alpha(s)$ y $\beta(t)$ dos curvas definidas para $s, t \in [0, 1]$. Se llama *distancia de Hausdorff* entre α y β a

$$d_H(\alpha, \beta) = \max(d_1(\alpha, \beta), d_2(\alpha, \beta)),$$

donde d_1 y d_2 son no simétricas, es decir, se miden solo en un sentido y están dadas por:

$$d_1(\alpha, \beta) = \max_{t \in [0, 1]} \min_{s \in [0, 1]} |\alpha(s) - \beta(t)|$$

y

$$d_2(\alpha, \beta) = \max_{s \in [0, 1]} \min_{t \in [0, 1]} |\alpha(s) - \beta(t)|.$$

1.2. Parametrización de arco de circunferencia por curvas racionales

En este apartado vamos a parametrizar un arco de circunferencia en el plano (X, Y) como una curva de Bézier racional de grado 2:

$$r(t) = \frac{(1-t)^2\hat{\omega}_0a_0 + 2\hat{\omega}_1t(1-t)a_1 + t^2\hat{\omega}_2a_2}{(1-t)^2\hat{\omega}_0 + 2\hat{\omega}_1t(1-t) + t^2\hat{\omega}_2}. \quad (1.2.1)$$

con $t \in [0, 1]$. Siendo a_0, a_1 y a_2 los puntos de control de dicha curva y $\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1$ y $\hat{\omega}_2$ sus pesos.

Consideramos el arco de circunferencia $c(s) = (r \cos(s), r \sin(s))$, de amplitud 2α , con $0 < \alpha < \pi/2$, centrado en el origen y de radio r . Los

puntos extremos de este arco serán $c(-\alpha) = (r \cos \alpha, -r \operatorname{sen} \alpha)$ y $c(\alpha) = (r \cos \alpha, r \operatorname{sen} \alpha)$.

Teniendo en cuenta la parametrización de la curva de Bézier racional dada en (1.2.1) y la propiedad interpolatoria de los puntos extremos (1.1.4) y (1.1.5), se tiene que $r(0) = a_0 = c(-\alpha) = (r \cos \alpha, -r \operatorname{sen} \alpha)$ y $r(1) = a_2 = c(\alpha) = (r \cos \alpha, r \operatorname{sen} \alpha)$. Debido a la simetría, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\hat{\omega}_0 = \hat{\omega}_2 = 1$. Por tanto, para determinar $r(t)$ sólo nos queda calcular la primera coordenada del punto de control $a_1 = (x, 0)$ y el peso $\hat{\omega}_1 > 0$.

En la Figura 1.2 se representa el arco $c(s)$, $s \in [-\alpha, \alpha]$ y los puntos de control de la curva racional de grado 2, $r(t)$.

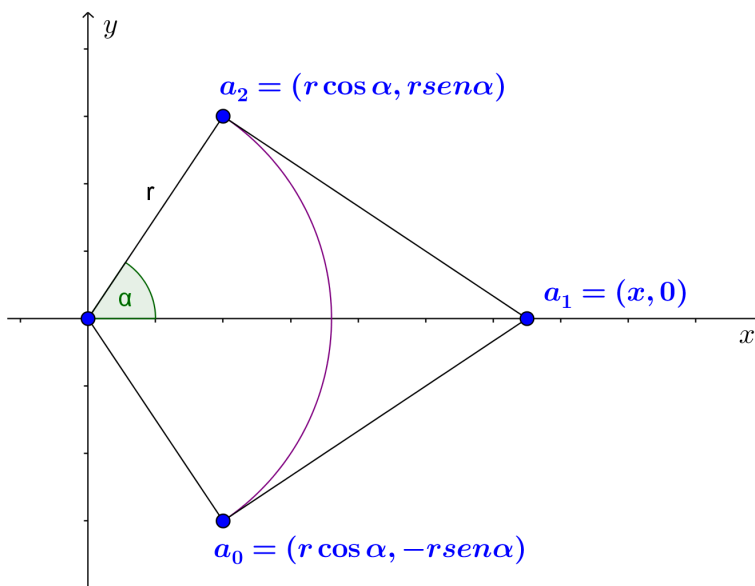


Figura 1.2: Arco circunferencia como curva racional cuadrática.

Primero vamos a calcular x : teniendo en cuenta que en cualquier punto de una circunferencia la recta tangente es ortogonal al vector de posición de dicho punto, vamos a imponer esta misma condición sobre la curva $r(t)$ en el punto $r(1) = a_2$. La dirección de la recta tangente a $r(t)$ en a_2 es $r'(1) = 2 \frac{\hat{\omega}_1}{\hat{\omega}_2} (a_2 - a_1)$ (esta expresión se ha obtenido sin más que derivar la expresión (1.2.1)). Así pues, el triángulo que hemos extraído en la Figura 1.3 debe ser un triángulo rectángulo.

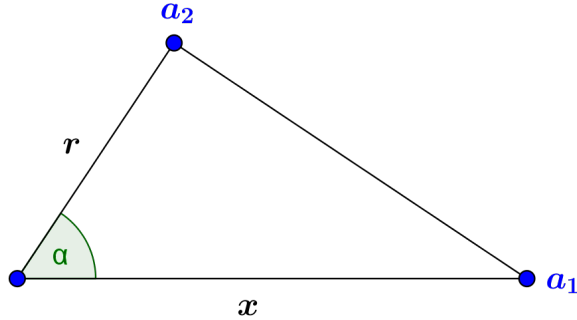


Figura 1.3: Triángulo extraído de la Figura 1.2

Por tanto, $\cos \alpha = \frac{r}{x}$ y tenemos que:

$$x = \frac{r}{\cos \alpha}.$$

Lo siguiente que vamos a calcular es $\hat{\omega}_1$: consideramos $m = (r \cos \alpha, 0)$ el punto medio de a_0 y a_2 , y c que es el punto de corte entre el arco de circunferencia y el eje OX , escribiremos c como $c = m(1 - u) + a_1u$ ya que c es un punto del segmento que une m con a_1 , para un valor $u \in [0, 1]$ y podemos escribir $u = \frac{\hat{\omega}_1}{1 + \hat{\omega}_1}$.

Por otro lado, tenemos que $c = (r, 0)$ y tomando la primera coordenada de las dos expresiones de c , llegamos a la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} r &= (r \cos \alpha)(1 - u) + \frac{r}{\cos \alpha}u \quad \Rightarrow \quad r \cos \alpha = r \cos^2 \alpha + u(r - r \cos^2 \alpha) \\ \Rightarrow \quad u &= \frac{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que:

$$\hat{\omega}_1 = \cos \alpha.$$

Se puede ver que a partir del punto de control y el peso que acabamos de obtener, se verifica que $r_1^2(t) + r_2^2(t) = r^2$, donde $r(t) = (r_1(t), r_2(t))$.

Efectivamente, de la ecuación (1.2.1) llegamos a que

$$r(t) = \frac{(1-t)^2(r \cos \alpha, -r \sin \alpha) + 2 \cos \alpha t(1-t)\left(\frac{r}{\cos \alpha}, 0\right) + t^2(r \cos \alpha, r \sin \alpha)}{(1-t)^2 + 2t(1-t) \cos \alpha + t^2}. \quad (1.2.2)$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} r_1^2(t) + r_2^2(t) &= \frac{((1-t)^2 r \cos \alpha + 2 \cos \alpha t(1-t)\frac{r}{\cos \alpha} + t^2 r \cos \alpha)^2}{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos \alpha + t^2)^2} + \\ &\quad + \frac{(-(1-t)^2 r \sin \alpha + t^2 r \sin \alpha)^2}{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos \alpha + t^2)^2} = \\ &= \frac{(1-t)^4 r^2 + t^4 r^2 + 2r^2 t^2 (1-t)^2 (2 \cos^2 \alpha + 1)}{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos \alpha + t^2)^2} + \\ &\quad + \frac{4 \cos \alpha r^2 t(1-t)^3 + 4 \cos \alpha r^2 t^3 (1-t)}{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos \alpha + t^2)^2} = \\ &= r^2 \frac{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos \alpha + t^2)^2}{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos \alpha + t^2)^2} = r^2. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Luego la curva racional $r(t)$ es una parametrización del arco de circunferencia de partida $c(s)$.

Elevación del grado de la curva de Bézier racional

Mediante la elevación del grado, dada una curva racional de grado n , vamos a poder parametrizarla como una curva de Bézier racional de grado $n+1$. Después de describir este procedimiento, aplicaremos la elevación del grado a la curva racional de grado 2 que acabamos de calcular y que describe un arco de circunferencia para parametrizar este arco por una curva racional cúbica o de grado 3.

Empezamos describiendo el caso general, consideremos

$$r(t) = \frac{\sum_{j=0}^n a_j \binom{n}{j} \hat{\omega}_j t^j (1-t)^{n-j}}{\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \hat{\omega}_j t^j (1-t)^{n-j}},$$

curva racional de grado n con puntos de control a_i y pesos $\hat{\omega}_i$, $i = 0, \dots, n$. Queremos calcular los nuevos puntos de control y pesos que denotamos b_i y

ω_i , respectivamente, con $i = 0, \dots, n+1$, de tal forma que la nueva curva sea una reparametrización de la curva $r(t)$.

Si multiplicamos $r(t)$ por $\frac{(t + (1-t))}{(t + (1-t))}$, tenemos:

$$r(t) = \frac{\sum_{j=0}^n a_j \binom{n}{j} \hat{\omega}_j t^{j+1} (1-t)^{n-j} + \sum_{j=0}^n a_j \binom{n}{j} \hat{\omega}_j t^j (1-t)^{n+1-j}}{\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \hat{\omega}_j t^{j+1} (1-t)^{n-j} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \hat{\omega}_j t^j (1-t)^{n+1-j}}.$$

El siguiente paso es hacer el cambio $j+1 \rightarrow j$ en el índice de sumación del primer sumando, tanto del numerador como del denominador, y la nueva expresión será:

$$r(t) = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} \binom{n}{j-1} \hat{\omega}_{j-1} t^j (1-t)^{n+1-j} + \sum_{j=0}^n a_j \binom{n}{j} \hat{\omega}_j t^j (1-t)^{n+1-j}}{\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} \hat{\omega}_{j-1} t^j (1-t)^{n+1-j} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \hat{\omega}_j t^j (1-t)^{n+1-j}}.$$

Para calcular los puntos y pesos de la curva racional de grado $n+1$, imponemos que:

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} \binom{n}{j-1} \hat{\omega}_{j-1} t^j (1-t)^{n+1-j} + \sum_{j=0}^n a_j \binom{n}{j} \hat{\omega}_j t^j (1-t)^{n+1-j}}{\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} \hat{\omega}_{j-1} t^j (1-t)^{n+1-j} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \hat{\omega}_j t^j (1-t)^{n+1-j}} = \\ & = \frac{\sum_{j=0}^{n+1} b_j \binom{n+1}{j} \omega_j t^j (1-t)^{n+1-j}}{\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \omega_j t^j (1-t)^{n+1-j}}. \end{aligned}$$

Como la base de Bernstein es base de polinomios, igualamos los coeficientes de los términos $t^j(1-t)^{n+1-j}$ de los denominadores y numeradores, y obtenemos las siguientes ecuaciones para $j = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{j} \omega_j &= \binom{n}{j-1} \hat{\omega}_{j-1} + \binom{n}{j} \hat{\omega}_j \\ b_j \binom{n+1}{j} \omega_j &= a_{j-1} \binom{n}{j-1} \hat{\omega}_{j-1} + a_j \binom{n}{j} \hat{\omega}_j \end{aligned}$$

Para $j = 0$ y $j = n + 1$, obtenemos: $\omega_0 = \hat{\omega}_0$, $\omega_{n+1} = \hat{\omega}_n$, $b_0 \omega_0 = a_0 \hat{\omega}_0$ y $b_{n+1} \omega_{n+1} = a_n \hat{\omega}_n$.

Así, a partir de estas igualdades, para nuestro caso, $n = 2$ y $j = 0, 1, 2, 3$, partiendo de la curva $r(t)$ dada por la expresión (1.2.2), se tiene que los pesos de la curva de Bézier racional cúbica son:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \hat{\omega}_0 = 1. \\ 3\omega_1 &= \hat{\omega}_0 + 2\hat{\omega}_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{3}(1 + 2 \cos \alpha). \\ 3\omega_2 &= \hat{\omega}_1 + 2\hat{\omega}_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{3}(1 + 2 \cos \alpha). \\ \omega_3 &= \hat{\omega}_2 = 1. \end{aligned}$$

Podemos apreciar que $\omega_1 = \omega_2$. A este valor lo denotamos ω .

Por otro lado, los puntos de control son los siguientes para $j = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} b_0 \omega_0 &= a_0 \hat{\omega}_0 \Rightarrow b_0 = a_0. \\ 3b_1 \omega_1 &= a_0 \hat{\omega}_0 + 2a_1 \hat{\omega}_1 \Rightarrow b_1 = \frac{a_0 + 2 \cos \alpha a_1}{3\omega}. \\ 3b_2 \omega_2 &= 2a_1 \hat{\omega}_1 + a_2 \hat{\omega}_2 \Rightarrow b_2 = \frac{a_2 + 2 \cos \alpha a_1}{3\omega}. \\ b_3 \omega_3 &= a_2 \hat{\omega}_2 \Rightarrow b_3 = a_2. \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto, } r(t) = \frac{\sum_{i=0}^3 \omega_i b_i B_i^3(t)}{\sum_{i=0}^3 \omega_i B_i^3(t)} = (r_1(t), r_2(t)), \text{ donde:}$$

$$\begin{aligned}
 r_1(t) &= r \frac{(2t^2 - 2t + 1) \cos \alpha + 2t(1 - t)}{2t(1 - t) \cos \alpha + 2t^2 - 2t + 1} \\
 r_2(t) &= r \operatorname{sen} \alpha \frac{2t - 1}{2t(1 - t) \cos \alpha + 2t^2 - 2t + 1}.
 \end{aligned}
 \tag{1.2.4}$$

Se verifica que $r_1^2(t) + r_2^2(t) = r^2$ como se vio en (1.2.3).

La curva de Bézier cúbica de ecuaciones paramétricas $(r_1(t), r_2(t))$ se representa en la Figura 1.4.

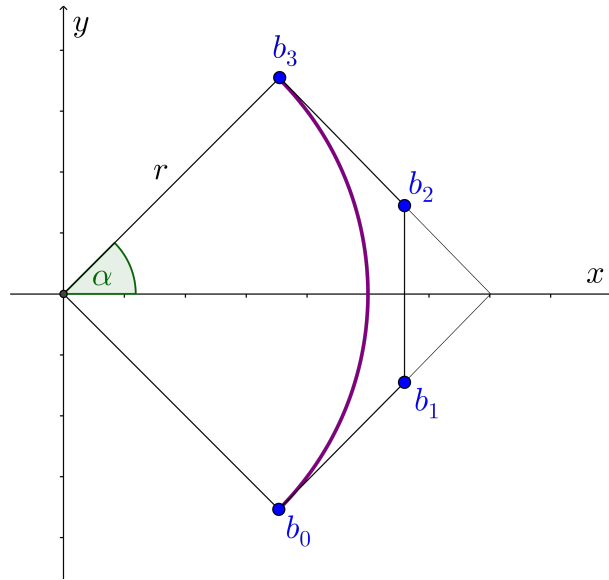


Figura 1.4: Arco de circunferencia como curva racional cúbica.

Capítulo 2

Aproximación de hélice circular por curvas de Bézier cúbicas

Este capítulo está compuesto por 3 secciones, en la primera sección, a partir del arco de circunferencia parametrizado por la curva de Bézier racional cúbica vista en el capítulo anterior, vamos a exponer la idea básica de la aproximación de la hélice circular.

En las dos secciones siguientes, vamos a desarrollar dos métodos diferentes entre sí para aproximar la hélice circular mediante curvas de Bézier racionales cúbicas. Estos métodos se pueden encontrar en [6].

2.1. Idea básica de la aproximación

La hélice circular se describe como una curva espacial trazada en la superficie de un cilindro que va formando un ángulo constante con sus generatrices. Puede parametrizarse por:

$$h(v) = (r \cos v, r \operatorname{sen} v, pv), \quad v \in \mathbb{R}. \quad (2.1.1)$$

A lo largo de esta memoria vamos a exponer varios métodos para aproximar el arco de hélice circular con $v \in [-\alpha, \alpha]$ con $0 < \alpha < \pi/2$. Para ello, proyectamos dicho arco de hélice sobre el plano (X, Y) y obtenemos un arco de circunferencia que, como vimos en el capítulo anterior, parametrizamos como una curva de Bézier racional cúbica plana (1.2.4).

Una vez que ya tenemos parametrizado el arco de circunferencia mediante una curva de Bézier racional cúbica en el plano (X, Y) , desplazamos los puntos de control sobre rectas paralelas al eje OZ . Por simetría, ver Figura 1.4,

elevamos los puntos b_2 y b_3 ; y por otro lado, descendemos b_0 y b_1 . Abusando de la notación, a estos puntos de control desplazados los vamos a denotar de la misma forma b_0, b_1, b_2, b_3 . Nuestro objetivo es calcular estos puntos de control b_i tales que la curva racional cúbica alabeada que se genera con los mismos pesos que la curva cúbica que parametriza el arco de circunferencia (1.2.4), se aproxime al arco de hélice $h(v)$ con $v \in [-\alpha, \alpha]$.

Teniendo en cuenta la propiedad interpolatoria de las curvas de Bézier racionales, el primer y último punto de control, b_0 y b_3 , se encuentran sobre la hélice, $b_0 = h(-\alpha)$ y $b_3 = h(\alpha)$, así que la coordenada z de b_0 y de b_3 son:

$$\begin{aligned} b_{0z} &= -\alpha p \\ b_{3z} &= \alpha p. \end{aligned}$$

Nos queda ver qué ocurre con b_1 y b_2 . Por simetría, los desplazamos paralelamente al eje OZ la misma distancia pero con diferente signo. Luego las coordenadas z de estos puntos son:

$$\begin{aligned} b_{1z} &= -b \\ b_{2z} &= b. \end{aligned}$$

Finalmente, las coordenadas x e y de los puntos de control coinciden con las coordenadas x e y de los puntos de control de la curva racional cúbica que parametriza el arco de circunferencia sobre el plano (X, Y) (1.2.4). Así, obtenemos:

$$\begin{aligned} b_0 &= (r \cos \alpha, -r \sin \alpha, -\alpha p) \\ b_1 &= \left(r \frac{2 + \cos \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}, -r \frac{\sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}, -b \right) \\ b_2 &= \left(r \frac{2 + \cos \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}, r \frac{\sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}, b \right) \\ b_3 &= (r \cos \alpha, r \sin \alpha, \alpha p). \end{aligned}$$

Por tanto, la curva de Bézier racional cúbica que aproxima el arco de hélice, $r(t) = (r_x(t), r_y(t), r_z(t))$, queda parametrizada por:

$$\begin{aligned} r_x(t) &= r \frac{(2t^2 - 2t + 1) \cos \alpha + 2t(1 - t)}{2t(1 - t) \cos \alpha + 2t^2 - 2t + 1}, \\ r_y(t) &= r \sin \alpha \frac{2t - 1}{2t(1 - t) \cos \alpha + 2t^2 - 2t + 1}, \\ r_z(t) &= \frac{\alpha p(t^3 - (1 - t)^3) + b(1 + 2 \cos \alpha)t(1 - t)(2t - 1)}{2t(1 - t) \cos \alpha + 2t^2 - 2t + 1}. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

2.2. Optimización de la aproximación

En la sección anterior hemos visto que las coordenadas de la curva de Bézier racional cúbica (2.1.2) solo dependen del parámetro b y del ángulo $\alpha \in (0, \pi/2)$.

El parámetro b se puede determinar mediante varios métodos. En esta sección determinaremos el parámetro b imponiendo que el ángulo entre la recta tangente de la curva de Bézier y el plano (X, Y) sea igual al ángulo entre la recta tangente de la hélice y el mismo plano, en los puntos extremos de ambas curvas.

Para reducir los cálculos, en lugar de imponer la igualdad entre los ángulos, lo haremos imponiendo la igualdad entre la tangente de estos ángulos.

Como se puede apreciar en la Figura 2.1, si $v = (v_1, v_2, v_3)$ es el vector de posición de un punto arbitrario de \mathbb{R}^3 y β es el ángulo que forma este vector con el plano (X, Y) se tiene que

$$\tan \beta = \frac{\text{sen } \beta}{\text{cos } \beta} = \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}. \quad (2.2.1)$$

Utilizamos esta expresión para imponer la igualdad entre los dos ángulos que necesitamos.

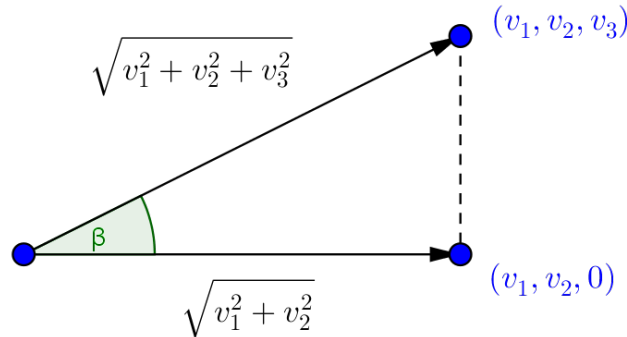


Figura 2.1: Ángulo β .

- 1.- Tangente del ángulo entre la recta tangente de la curva de Bézier $r(t)$ (2.1.2) y el plano (X, Y) en el punto $b_3 = r(1)$:

Por las propiedades de las curvas de Bézier racionales (1.1.6), sabemos que $r'(1) = 3\omega(b_3 - b_2) = 3\omega\left(r \cos \alpha - r \frac{2 + \cos \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}, r \sin \alpha - r \frac{\sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}, \alpha p - b\right)$. Así que:

$$\tan(r'(1), z = 0) = \frac{\alpha p - b}{r \sqrt{\left(\cos \alpha - \frac{2 + \cos \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}\right)^2 + \left(\sin \alpha - \frac{\sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}\right)^2}}.$$

2.- Tangente del ángulo entre la recta tangente de la hélice y el plano (X, Y) en el punto $b_3 = h(\alpha)$:

Como $h'(v) = (-r \sin v, r \cos v, p)$, se tiene que:

$$\tan(h'(\alpha), z = 0) = \frac{p}{r}.$$

De esta forma, al imponer la igualdad de las tangentes de los ángulos, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{p}{r} &= \frac{\alpha p - b}{r \sqrt{\left(\cos \alpha - \frac{2 + \cos \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}\right)^2 + \left(\sin \alpha - \frac{\sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}\right)^2}} \\ \Rightarrow \quad \alpha p - b &= p \sqrt{\left(\cos \alpha - \frac{2 + \cos \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}\right)^2 + \left(\sin \alpha - \frac{\sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}\right)^2} \\ &\Rightarrow \quad b = p \left(\alpha - \frac{2 \sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha} \right). \end{aligned}$$

De forma análoga, al imponer que las tangentes a la hélice y a la curva de Bézier en el punto b_0 formen el mismo ángulo con el plano (X, Y) , llegamos a la misma expresión para el parámetro b .

Según esta elección del parámetro b , la curva de Bézier racional cúbica $r(t)$ cumple las siguientes propiedades:

Propiedad 1: Todos los puntos de la curva $r(t)$ están en el cilindro de la hélice.

Demostración. Por ser el cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = r^2\}$, basta ver que $r_x^2(t) + r_y^2(t) = r^2$. Esta igualdad se tiene trivialmente al comprobar

que la parametrización de la curva $r(t)$ (2.1.2) que aproxima el arco de hélice tiene las mismas funciones paramétricas en las coordenadas x e y que la curva de Bézier racional cúbica que describe un arco de circunferencia en el plano (X, Y) , como vimos en (1.2.4).

Propiedad 2: Los puntos $r(0)$, $r(1)$ y $r(\frac{1}{2})$ son puntos de la hélice.

Demostración. Tal como hemos tomado los puntos de control en la sección anterior, $b_0 = r(0) = h(-\alpha)$ y $b_3 = r(1) = h(\alpha)$, queda ver que $\exists v_0 \in (-\alpha, \alpha)$ tal que $h(v_0) = r(\frac{1}{2})$.

$$r\left(\frac{1}{2}\right) = \left(r \frac{\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2}}, r \operatorname{sen} \alpha \frac{1 - 1}{\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2}}, 0\right) = (r, 0, 0) = h(0).$$

Propiedad 3: Las rectas tangentes a la curva de Bézier racional cúbica en los puntos extremos coincide con las rectas tangentes a la hélice en esos puntos.

Demostración. Es obvio, pues hemos impuesto esta condición para determinar el parámetro b .

La diferencia entre la aproximación por la curva de Bézier racional y la hélice existe solo en términos de la coordenada z . Para poder comparar mejor estas curvas, teniendo en cuenta que el arco de hélice está parametrizada por $v \in [-\alpha, \alpha]$ y la aproximación por la curva de Bézier $r(t)$ está parametrizada por $t \in [0, 1]$, vamos a realizar la siguiente reparametrización regular de la curva $r(t)$, transformando su dominio de $[0, 1]$ a $[-\alpha, \alpha]$:

$$t = \frac{u + \alpha}{2\alpha}, \quad u \in [-\alpha, \alpha].$$

Con el fin de buscar una relación entre los parámetros u y v , imponemos que $h_y(v) = r_y(u)$.

$$\begin{aligned} r \operatorname{sen} v &= r \operatorname{sen} \alpha \frac{\frac{u + \alpha}{\alpha} - 1}{\frac{u + \alpha}{\alpha} \left(1 - \frac{u + \alpha}{2\alpha}\right) \cos \alpha + \frac{(u + \alpha)^2}{2\alpha^2} - \frac{u + \alpha}{\alpha} + 1} \\ \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} v}{\operatorname{sen} \alpha} &= \frac{2u\alpha}{u^2(1 - \cos \alpha) + \alpha^2(1 + \cos \alpha)}. \end{aligned}$$

De aquí llegamos a una ecuación de segundo grado en u :

$$u^2(1 - \cos \alpha) \sin v - 2\alpha u \sin \alpha + \alpha^2 \sin v(1 + \cos \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow u = \frac{\alpha \sin \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 \sin^2 \alpha - \alpha^2 \sin^2 v(1 - \cos^2 \alpha)}}{\sin v(1 - \cos \alpha)} = \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \frac{1 \pm \cos v}{\sin v}.$$

En la Figura 2.2 podemos observar que si tomamos la solución positiva, $u \notin [-\alpha, \alpha]$ con $\alpha \in (0, \pi/2)$. Por otro lado, vemos claramente que al tomar la solución negativa, $u \in [-\alpha, \alpha]$; por ello, escogemos dicha raíz:

$$u = \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \frac{1 - \cos v}{\sin v}. \quad (2.2.2)$$

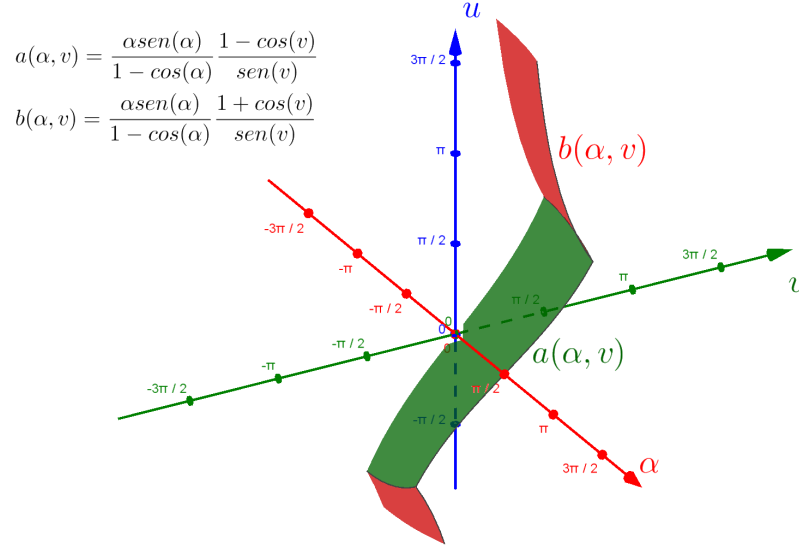


Figura 2.2: Representación de ambas raíces de u .

Así podemos parametrizar la función error que cometemos al aproximar la hélice por la curva de Bézier racional solo por dos parámetros. La función error viene dada por:

$$\delta(\alpha, v) = r_z(v) - h_z(v) = p \frac{u^3(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + u\alpha^2(2\alpha + \alpha \cos \alpha - \sin \alpha)}{u^2(\alpha - \alpha \cos \alpha) + \alpha^3(1 + \cos \alpha)} - v. \quad (2.2.3)$$

donde

$$u = \frac{\alpha \operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha} \frac{1 - \cos v}{\operatorname{sen} v}, \quad \alpha \in (0, \pi/2), \quad v \in [-\alpha, \alpha]$$

Esta función error es proporcional a p , pero es independiente del radio del cilindro. Además, $\delta(\alpha, -\alpha) = 0$, $\delta(\alpha, 0) = 0$, $\delta(\alpha, \alpha) = 0$ y $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \delta(\alpha, v) = 0$. En la Figura 2.3, está representada esta función error.

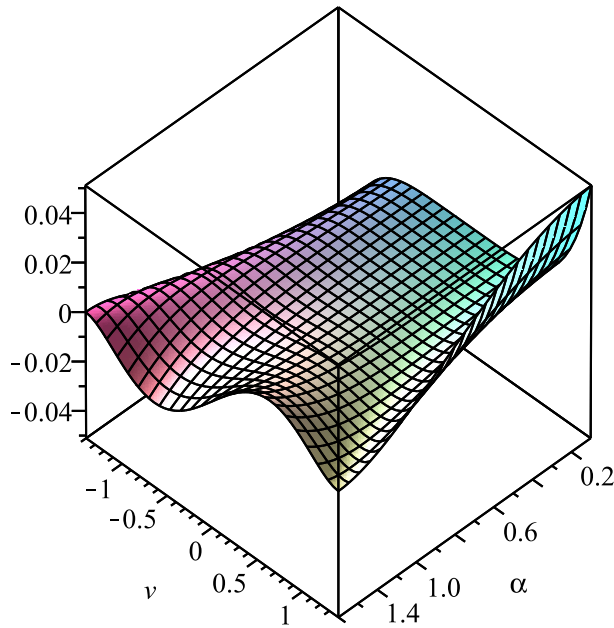


Figura 2.3: Función error $\delta(\alpha, v)$.

Para cualquier valor de α , se puede calcular v de forma que nos dé el máximo error de esta función $\delta(\alpha, v)$. Es decir, fijado α , podemos determinar el valor del parámetro v para el cual la diferencia entre las coordenadas z de los puntos $r(v)$ y $h(v)$ sea máxima. Así, por razones de simetría, se puede considerar $\alpha \in (0, \pi/2)$, $v \in [0, \alpha]$.

Si imponemos

$$\frac{\partial \delta(\alpha, v)}{\partial v} = 0,$$

obtenemos la igualdad:

$$\cos v \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha + \alpha \cos \alpha \sin \alpha - \cos v - 2 + \alpha \sin \alpha + \alpha \cos v \sin \alpha = 0,$$

de donde

$$\cos v = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \alpha(1 + \cos \alpha)}{\alpha - \operatorname{sen} \alpha}.$$

Por tanto, el valor de v para el que se obtiene la máxima distancia entre $h(v)$ y $r(v)$ es:

$$v(\alpha) = \arccos \left(\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \alpha(1 + \cos \alpha)}{\alpha - \operatorname{sen} \alpha} \right).$$

Para cada $\alpha \in (0, \pi/2)$ podemos considerar la función máximo error que viene definida como $\delta(\alpha, v(\alpha))$.

Ahora vamos a probar que la función error, $\delta(\alpha, v)$, es monótona creciente en α , en el dominio especificado. Para ello, se tiene que verificar la siguiente desigualdad:

$$\frac{\partial \delta(\alpha, v)}{\partial \alpha} \geq 0.$$

Vamos a verlo:

$$\frac{\partial \delta(\alpha, v)}{\partial \alpha} = p \frac{(1 - \cos v)(\cos \alpha - \cos v)(\alpha(1 + 2 \cos \alpha) - \operatorname{sen} \alpha(2 + \cos \alpha))}{(1 + \cos \alpha)(\cos \alpha - 1)^2 \operatorname{sen} v}.$$

Para $\alpha \in (0, \pi/2)$, $v \in [0, \alpha]$ el denominador es positivo. De los factores del numerador se tiene que $(1 - \cos v) > 0$ y $(\cos \alpha - \cos v) \leq 0$, por tanto, es suficiente ver que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\alpha(1 + 2 \cos \alpha) \leq \operatorname{sen} \alpha(2 + \cos \alpha).$$

Para ello, utilizamos el desarrollo de Taylor de las funciones trigonométricas en $\alpha = 0$:

$$\operatorname{sen} \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots,$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots,$$

tenemos que las siguientes desigualdades son válidas:

$$\operatorname{sen} \alpha \geq \alpha - \frac{\alpha^3}{6},$$

$$\operatorname{cos} \alpha \geq 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

$$\operatorname{cos} \alpha \leq 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \alpha(1 + 2 \operatorname{cos} \alpha) &\leq \alpha \left(1 + 2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} \right) \right) = 3\alpha - \alpha^3 + \frac{\alpha^5}{12} = \\ &= \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} \right) \left(3 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \leq \operatorname{sen} \alpha (2 + \operatorname{cos} \alpha). \end{aligned}$$

Como consecuencia, dado que $v(\alpha) \in [0, \pi/2]$ para $\alpha \in (0, \pi/2)$, la función máximo error es monótona decreciente cuando α decrece a 0 y que fijado un $\epsilon > 0$, es posible encontrar un valor de α tal que ϵ/p acote la función máximo error. Para lo cual fijado $\epsilon > 0$, debemos encontrar α tal que la función máximo error sea ϵ/p :

$$\delta(\alpha, v(\alpha)) = \frac{\epsilon}{p}.$$

En la Figura 2.4 se muestra la gráfica de la función máximo error como función de α .

2.3. Continuidad C^2 en las uniones

En la sección anterior hemos desarrollado un método para aproximar la hélice circular $h(v)$ mediante curvas de Bézier racionales cúbicas, pero también hemos visto al final de dicha sección que el error $\delta(\alpha, v)$ aumenta cuando el ángulo α crece.

Por ello, en esta nueva sección vamos a introducir un nuevo método de aproximación de hélices circulares mediante curvas de Bézier racionales cúbicas considerando curvas de Bézier compuestas ya que en la práctica, para aproximar un arco de hélice suficientemente amplio, lo haremos aproximando

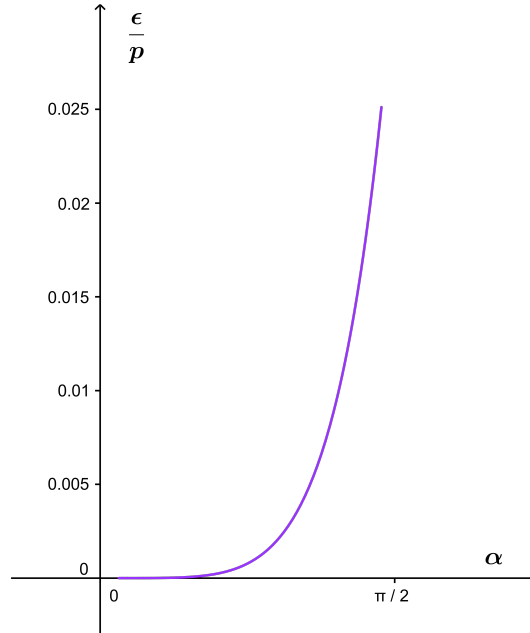


Figura 2.4: Valor óptimo de α .

arcos más pequeños y los uniremos haciendo reparametrizaciones (véase las Definiciones 1.1.11 y 1.1.12). Así obtendremos una curva de Bézier compuesta por varios tramos, constituidos todos ellos por curvas de Bézier simples, que aproxima el arco de hélice de partida.

Consideramos la curva de Bézier cúbica $r(t)$, $t \in [0, 1]$ vista en la Sección 2.1 que aproxima $h(v)$, $v \in [-\alpha, \alpha]$, y determinada por los puntos de control b_0, b_1, b_2, b_3 y por los pesos $\omega_0 = 1, \omega_1 = \omega_2 = \omega, \omega_3 = 1$. Por otro lado, vamos a considerar la curva de Bézier cúbica reparametrizada $\tilde{r}(t)$, con $t \in [1, 2]$, siendo $\tilde{b}_0 = b_3, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ y \tilde{b}_3 sus puntos de control y $\tilde{\omega}_0 = \omega_0, \tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 = \omega$ y $\tilde{\omega}_3 = \omega_3$ sus pesos que aproxima el arco de hélice $h(v)$ con $v \in [\alpha, 3\alpha]$. La curva $\tilde{r}(t)$ viene dada a través de $r(t)$ mediante un movimiento helicoidal, de eje OZ y paso p , girando los puntos de control de la curva $r(t)$ con ángulo 2α .

En la Figura 2.5 están representados los puntos de control de $r(t)$ y $\tilde{r}(t)$ vistos desde un punto que está sobre el eje OZ y la curva de Bézier racional compuesta por estos dos tramos parametrizada por $t \in [0, 2]$. Para $t \in [0, 1]$ la curva compuesta se define como $r(t)$ y para $t \in [1, 2]$ la curva compuesta

se define como $\tilde{r}(t)$.

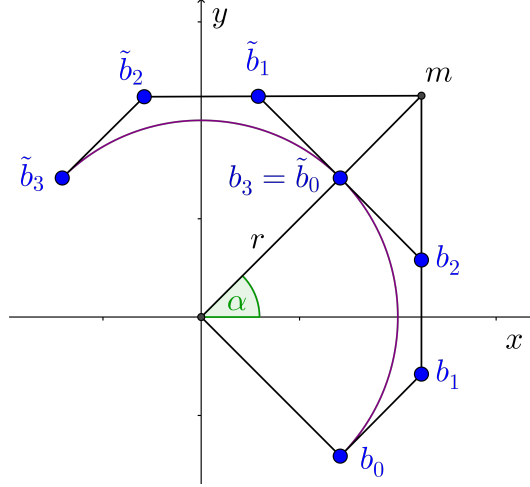


Figura 2.5: Vista vertical de los puntos de control y de la curva compuesta.

En el método anterior, cada uno de estos trozos varía en función del ángulo α y de b que habíamos calculado al imponer la igualdad entre el ángulo de la recta tangente de la curva de Bézier y el plano (X, Y) , y el ángulo entre la recta tangente de la hélice y el mismo plano en los puntos extremos del arco considerado. En esta nueva sección, vamos a proponer un nuevo método para calcular el parámetro b . En esta ocasión vamos a imponer que en los puntos de unión de tramos los planos osculadores coincidan. Más adelante veremos que se tiene continuidad de clase C^1 en las uniones y también vamos a ver qué ocurre al imponer continuidad de clase C^2 .

Las dos curvas $r(t)$ y $\tilde{r}(t)$ tienen el mismo plano osculador en el punto de unión $b_3 = \tilde{b}_0$ si y solo si los puntos $b_1, b_2, b_3, \tilde{b}_0, \tilde{b}_1$ y \tilde{b}_2 son coplanarios.

Sea

$$r(t) = \frac{(1-t)^3\omega_0b_0 + 3t(1-t)^2\omega_1b_1 + 3t^2(1-t)\omega_2b_2 + t^3\omega_3b_3}{(1-t)^3\omega_0 + 3t(1-t)^2\omega_1 + 3t^2(1-t)\omega_2 + t^3\omega_3}, \quad t \in [0, 1].$$

Sabemos que $r(1) = b_3$ y, también por (1.1.7) que $r'(1) = 3\frac{\omega_2}{\omega_3}(b_3 - b_2)$.

De igual forma, la segunda curva de la curva compuesta es

$$\tilde{r}(u) = \frac{(1-u)^3\tilde{\omega}_0\tilde{b}_0 + 3u(1-u)^2\tilde{\omega}_1\tilde{b}_1 + 3u^2(1-u)\tilde{\omega}_2\tilde{b}_2 + u^3\tilde{\omega}_3\tilde{b}_3}{(1-u)^3\tilde{\omega}_0 + 3u(1-u)^2\tilde{\omega}_1 + 3u^2(1-u)\tilde{\omega}_2 + u^3\tilde{\omega}_3}, \quad u \in [0, 1].$$

Haciendo el cambio $u = t - 1$, se tiene:

$$\tilde{r}(t) = \frac{\tilde{\omega}_0 \tilde{b}_0 (2-t)^3 + 3\tilde{\omega}_1 \tilde{b}_1 (t-1)(2-t)^2 + 3\tilde{\omega}_2 \tilde{b}_2 (t-1)^2(2-t) + \tilde{\omega}_3 \tilde{b}_3 (1-t)^3}{\tilde{\omega}_0 (2-t)^3 + 3\tilde{\omega}_1 (t-1)(2-t)^2 + 3\tilde{\omega}_2 (t-1)^2(2-t) + \tilde{\omega}_3 (t-1)^3},$$

con $t \in [1, 2]$.

$$\text{Así, } \tilde{r}'(1) = \left. \frac{d\tilde{r}}{dt} \right|_{t=1} = \left. \frac{d\tilde{r}}{du} \right|_{u=0} = 3 \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_0} (\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0), \text{ según vimos en (1.1.6).}$$

Por otro lado, por (1.1.9) se tiene que $r''(1) = 6 \frac{\omega_1}{\omega_3} (b_1 - b_3) + 18 \frac{\omega_2^2}{\omega_3^2} (b_3 - b_2) - 6 \frac{\omega_2}{\omega_3} (b_3 - b_2)$, y teniendo en cuenta que $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ y $\omega_3 = 1$, obtenemos que $r''(1) = 6\omega[(3\omega - 1)(b_3 - b_2) - (b_3 - b_1)]$.

Volviendo a realizar el cambio de parámetro $u = t - 1$ con $u \in [0, 1]$ en la segunda curva $\tilde{r}(t)$, tenemos que $\tilde{r}''(1) = \left. \frac{d^2\tilde{r}}{dt^2} \right|_{t=1} = \left. \frac{d^2\tilde{r}}{du^2} \right|_{u=0} = \tilde{r}''(0) = 6 \frac{\omega_2}{\omega_0} (\tilde{b}_2 - \tilde{b}_0) - 18 \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} (\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0) + 6 \frac{\omega_1}{\omega_0} (\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0)$ según (1.1.8).

Ahora bien, como $r'(1) = 3\omega(b_3 - b_2)$, entonces sabemos que $r'(1)$ es paralelo al vector $b_3 - b_2$. Del mismo modo, como $\tilde{r}(1) = 3\omega(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0)$, entonces $\tilde{r}'(1)$ es paralelo al vector $\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0$. Esto implica que $r'(1)$ es paralelo a $\tilde{r}(1)$ ya que $b_3 - b_2 = \tilde{b}_1 - \tilde{b}_0$ por el movimiento helicoidal que hemos realizado al obtener la curva de $\tilde{r}(t)$, de hecho, $\tilde{r}'(1) = r'(1)$.

Si tomamos Π como un plano que contiene al punto $b_3 = \tilde{b}_0$ y al vector $b_3 - b_2 = \tilde{b}_1 - \tilde{b}_0$, entonces se tiene que los puntos b_2 y \tilde{b}_1 pertenecen a Π .

Por otro lado, también hemos visto que $r''(1) = (18\omega^2 - 6\omega)(b_3 - b_2) - 6\omega(b_3 - b_1)$ y $\tilde{r}''(1) = 6\omega(\tilde{b}_2 - \tilde{b}_0) + (6\omega - 18\omega^2)(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0)$.

Así que, los puntos b_1 y \tilde{b}_2 pertenecen al plano Π si y solo si $r''(1)$ y $\tilde{r}''(1)$ están en Π , y esto sucede si y solo si Π es el plano osculador en $t = 1$ de $r(t)$ y $\tilde{r}(t)$.

Por tanto, ambas curvas tienen el mismo plano osculador en $t = 1$ si y solo si los puntos $b_3 = \tilde{b}_0$, \tilde{b}_1 , \tilde{b}_2 , b_2 y b_1 son coplanarios.

Por ello, vamos a imponer que los puntos $b_3 = \tilde{b}_0$, \tilde{b}_1 , \tilde{b}_2 , b_2 y b_1 sean coplanarios. Si estos 5 puntos se encuentran en el mismo plano, entonces vamos a ver que las rectas que unen b_1 con b_2 y \tilde{b}_2 con \tilde{b}_1 se intersectan en un punto al que llamaremos m , y la distancia entre m y el plano (X, Y) es igual a la distancia entre el punto de control $b_3 = \tilde{b}_0$ con dicho plano.

Sea $S_1(\lambda) = b_1 + \lambda(b_2 - b_1)$ la recta que une b_1 con b_2 , y sea $S_2(\mu) = \tilde{b}_2 + \mu(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2)$ la recta que une \tilde{b}_1 con \tilde{b}_2 .

Considerando las coordenadas z de los puntos de control que quedan representadas en el Figura 2.6, se tiene que las coordenadas z de los puntos de las rectas son:

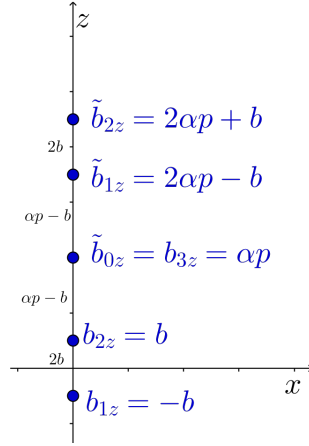


Figura 2.6: Puntos de control proyectados sobre el eje OZ .

$$S_{1z}(\lambda) = -b + 2b\lambda$$

$$S_{2z}(\mu) = 2\alpha p + b + \mu(-2b).$$

Ahora igualamos ambas expresiones para determinar la coordenada z del punto intersección:

$$-b + 2b\lambda = 2\alpha p + b - 2b\mu \quad \Rightarrow \quad 2\alpha p + 2b - 2b(\lambda + \mu) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\alpha p + 2b(-\lambda - \mu + 1) = 0.$$

Por simetría, sabemos que $b_3 - b_2 = \tilde{b}_1 - \tilde{b}_0$ y que, los módulos de los vectores que forman b_1 con b_2 y \tilde{b}_2 con \tilde{b}_1 también son iguales, por tanto, el punto de intersección se obtiene para el mismo valor de los parámetros de las curvas, es decir, $\lambda = \mu$. Así que de la expresión anterior se sigue:

$$2b(-2\lambda + 1) = -2\alpha p \quad \Rightarrow \quad -2\lambda + 1 = -\frac{\alpha p}{b}$$

$$\Rightarrow \quad -2\lambda = -\frac{\alpha p}{b} - 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\alpha p}{2b} + \frac{1}{2}.$$

Sustituimos este valor de λ en $S_1(\lambda)$ para determinar el valor de la coordenada z del punto de intersección entre ambas rectas, el punto m .

$$-b + 2b \left(\frac{\alpha p}{2b} + \frac{1}{2} \right) = -b + \alpha p + b = \alpha p,$$

que coincide con la coordenada z del punto \tilde{b}_0 como queríamos demostrar.

En la Figura 2.7 hemos considerado las proyecciones de m y b_2 sobre el plano (X, Y) y las hemos denotado por (m) y (b_2) , respectivamente para no confundirlos con m y b_2 . Si extraemos de esta figura las proyecciones de estos

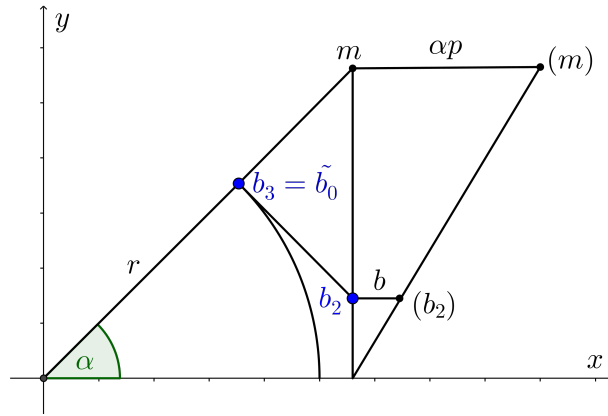


Figura 2.7: Representación de los puntos m y b_2 .

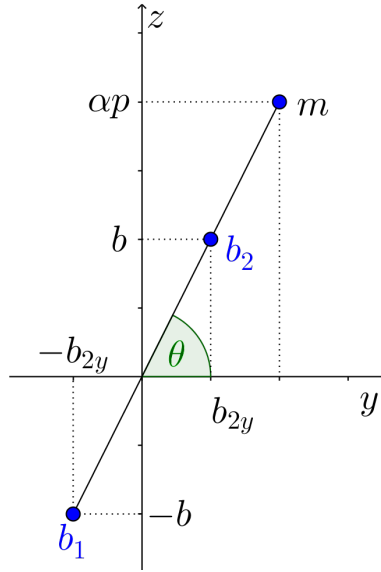
puntos y los representamos en el plano (Y, Z) obtenemos la Figura 2.8, donde se puede apreciar la siguiente relación:

$$\tan \theta = \frac{b}{b_{2y}} = \frac{\alpha p}{m_y}.$$

Entonces:

$$b = \frac{b_{2y} \alpha p}{m_y} = r \frac{\sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha} \frac{\alpha p}{m_y}. \quad (2.3.1)$$

Si l es la longitud del segmento que une el origen con el punto m , podemos observar en la Figura 2.7 que $\cos \alpha = \frac{m_x}{l} = \frac{b_{2x}}{l}$ y que $\sin \alpha = \frac{m_y}{l}$; por tanto, tenemos la siguiente relación:

Figura 2.8: Proyección sobre el plano (Y, Z) .

$$l = \frac{b_{2x}}{\cos \alpha} = \frac{m_y}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{m_y}{b_{2x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m_y = b_{2x} \tan \alpha = \frac{2r + r \cos \alpha \sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (2.3.2)$$

De este modo, a partir de las igualdades (2.3.1) y (2.3.2), podemos determinar el valor de b que era nuestro objetivo en esta sección:

$$b = \alpha p \frac{\cos \alpha}{2 + \cos \alpha}. \quad (2.3.3)$$

La curva de Bézier racional compuesta calculada con el parámetro b obtenido tiene el mismo plano osculador en la unión, es decir, en $t = 1$. Veamos las condiciones que se tienen que verificar para poder asegurar continuidad en el punto de unión de las curvas de Bézier simples.

Como vimos en la Definición 1.1.12, tendremos continuidad de clase C^1 en la unión si se verifica que $r'(1) = \tilde{r}'(1)$.

Entonces la condición para que la continuidad sea C^1 es:

$$r'(1) = 3\frac{\omega_2}{\omega_3}(b_3 - b_2) = \tilde{r}'(1) = 3\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_0}(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0), \quad (2.3.4)$$

que se verifica claramente pues según hemos tomado las curvas $r(t)$ y $\tilde{r}(t)$, $\omega_2 = \tilde{\omega}_1 = \omega = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\alpha)$, $\omega_3 = \tilde{\omega}_0 = 1$ y $b_3 - b_2 = \tilde{b}_1 - \tilde{b}_0$ por el movimiento helicoidal que hemos realizado para obtener la curva $\tilde{r}(t)$.

Ahora buscaremos la condición sobre los parámetros fijados para que la curva compuesta tenga continuidad de clase C^2 . Para ello, tenemos que comprobar que $\tilde{r}''(1) = r''(1)$.

Como se verifica que $\tilde{b}_0 = b_3$, al sustituir los valores de los pesos de la condición $\tilde{r}''(1) = r''(1)$, llegamos a que

$$(3\omega - 1)(b_3 - b_2) + b_1 = (1 - 3\omega)(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0) + \tilde{b}_2.$$

Además, considerando que $\omega = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\alpha)$, se obtiene:

$$(\tilde{b}_2 - \tilde{b}_0) - 2\cos\alpha(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0) = (b_1 - b_3) + 2\cos\alpha(b_3 - b_2). \quad (2.3.5)$$

En la Figura 2.9 se puede ver una representación gráfica en \mathbb{R}^3 de los puntos de control de la curva compuesta. Con el fin de entender mejor la relación (2.3.5) que hemos obtenido, consideramos la proyección de estos puntos sobre el eje OZ que ya representamos en la Figura 2.6.

Si denotamos $U = (b_1 - b_3) + 2\cos\alpha(b_3 - b_2)$ y $V = (\tilde{b}_2 - \tilde{b}_0) - 2\cos\alpha(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0)$, considerando sus correspondientes coordenadas z , tenemos que se verifica:

$$\begin{aligned} U_z &= (-1 - 2\cos\alpha)b + (2\cos\alpha - 1)\alpha p \leq 0 \\ V_z &= (1 + 2\cos\alpha)\alpha p + (1 - 2\cos\alpha)b > 0. \end{aligned}$$

como se puede apreciar en la Figura 2.10.

Llegamos entonces a que al imponer la igualdad (2.3.5), obtenemos una contradicción, pues $U_z \neq V_z$.

Por lo que para estos puntos y estos pesos no podemos asegurar una continuidad C^2 en las uniones.

Sin embargo, vamos a seguir analizando las características de la curva compuesta. Denotamos a la curvatura de $r(t)$ como $k(t)$, y a la curvatura de $\tilde{r}(t)$ como $\tilde{k}(t)$, a partir de la Definición 1.1.5, tenemos:

$$k(1) = \frac{|r'(1) \times r''(1)|}{|r'(1)|^3}.$$

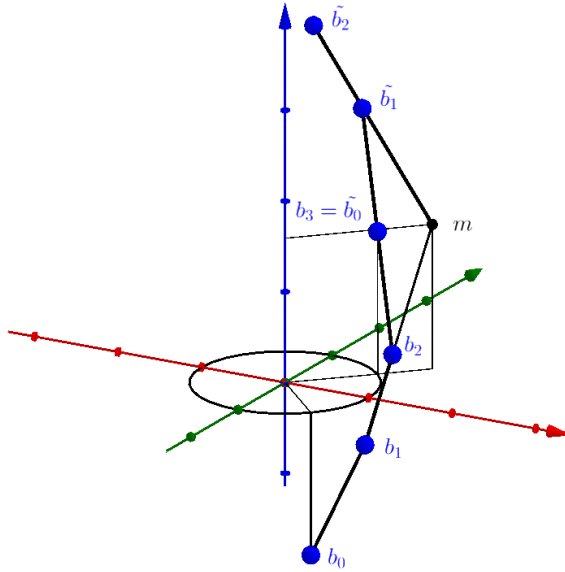


Figura 2.9: Puntos de control de la curva de Bézier compuesta.

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas en (1.1.7) y (1.1.9), llegamos a que:

$$k(1) = \frac{2\omega_3\omega_1}{3\omega_2^2} \frac{|(b_3 - b_2) \times (b_3 - b_1)|}{|b_3 - b_2|^3}. \quad (2.3.6)$$

Si reparametrizamos la curva $\tilde{r}(t)$ por $u = t - 1$, tenemos la curva $\tilde{r}(u)$, $u \in [0, 1]$ y el valor de la curvatura de $\tilde{r}(t)$ en $t = 1$ es el mismo que el valor de la curvatura de la curva $\tilde{r}(u)$ en $u = 0$. Teniendo en cuenta la Definición 1.1.5, (1.1.6) y (1.1.9) obtenemos que:

$$\tilde{k}(1) = \frac{2\omega_0\omega_2}{2\omega_1^2} \frac{|(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0) \times (\tilde{b}_2 - \tilde{b}_0)|}{|\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0|^3}. \quad (2.3.7)$$

Así, se tiene $k(1) = \tilde{k}(1)$ pues $\omega_0 = \omega_3 = 1$, $\omega_2 = \omega_1 = \omega$ y $b_3 - b_2 = \tilde{b}_1 - \tilde{b}_0$. Además sabemos que $|(b_3 - b_2) \times (b_3 - b_1)| = |b_3 - b_2||b_3 - b_1| \sin \rho$ siendo ρ el ángulo que forman los vectores $b_3 - b_2$ y $b_3 - b_1$, pero $|\tilde{b}_2 - \tilde{b}_0| = |b_3 - b_1|$ y ρ también es el ángulo que forma $\tilde{b}_2 - \tilde{b}_0$ con $\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0$ pues la curva $\tilde{r}(t)$ se ha obtenido de la curva $r(t)$ mediante un movimiento helicoidal. Por tanto,

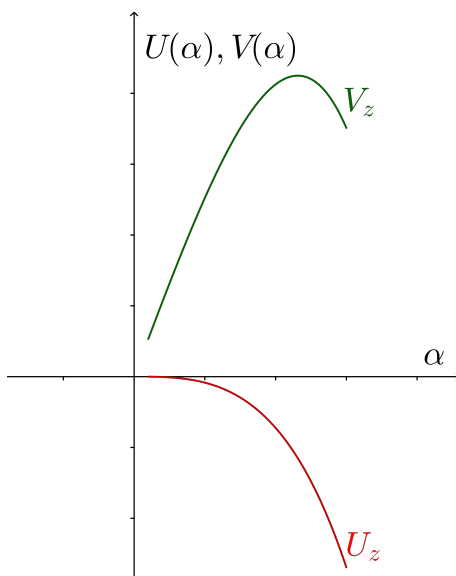


Figura 2.10: Representación de U_z y V_z , $\alpha \in (0, \pi/2)$.

$|(b_3 - b_2) \times (b_3 - b_1)| = |(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0) \times (\tilde{b}_2 - \tilde{b}_0)|$ y esto significa que dichas curvas además de tener el mismo plano osculador en las uniones, tienen la misma curvatura.

Como consecuencia, con la elección de $b = \alpha p \frac{\cos \alpha}{2 + \cos \alpha}$ que hemos hecho en esta sección, podemos ver que la curva de Bézier cúbica compuesta racional aproximada $r(t)$ tiene las siguientes propiedades:

Propiedad 1: Todos los puntos de la curva están en el cilindro de la hélice.

Demostración: Al igual que vimos en la demostración de la Propiedad 1 de la sección anterior.

Propiedad 2: Los puntos $r(0)$, $\tilde{r}(2)$ y $r(1)$ pertenecen a la hélice.

Demostración: Al igual que vimos en la demostración de la Propiedad 2 de la sección anterior.

Propiedad 3: Hay continuidad geométrica de segundo orden, G^2 , en las uniones.

Demostración: Se verifica por la propia definición de continuidad geométri-

ca de segundo orden, Definición 1.1.7, pues acabamos de ver que la curvatura de ambas curvas coinciden en $t = 1$ y además, vamos a ver que $\mathbf{n}(t)$ es continua, para ello, tenemos que probar que $\mathbf{n}_r(1) = \mathbf{n}_{\tilde{r}}(1)$.

Por definición, sabemos que $\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t)$. Trivialmente, se tiene que $\mathbf{t}_r(1) = \mathbf{t}_{\tilde{r}}(1)$ ya que hemos visto que $b_3 - b_2 = \tilde{b}_1 - \tilde{b}_0$. Por otro lado, como ambas curvas tienen el mismo plano osculador en $t = 1$, después de algunos cálculos, se ve que $\mathbf{b}_r(1) = \mathbf{b}_{\tilde{r}}(1)$, así que tenemos la igualdad $\mathbf{n}_r(1) = \mathbf{n}_{\tilde{r}}(1)$, y por tanto el vector curvatura de la curva compuesta $V(t) = k(t)\mathbf{n}(t)$ es continuo en $[0, 2]$.

Con el objetivo de conseguir una continuidad de clase C^2 , llevamos a cabo una transformación proyectiva de las curvas, que consiste en la transformación de los pesos dejando fijos los puntos de control. De este modo, tanto la curva de Bézier racional generada por los puntos de control b_i y los pesos ω_i ($i = 0, \dots, 3$) como la curva determinada por los mismos puntos y los pesos $c^i \omega_i$ ($i = 0, \dots, 3$), $0 < c \in \mathbb{R}$, son dos representaciones distintas de la misma curva, según la Proposición 1.1.14.

Aplicamos una transformación proyectiva para obtener una reparametrización de la curva de Bézier cúbica racional compuesta. Consideramos la curva de Bézier racional cúbica $r(t)$, $t \in [0, 1]$, determinada por los puntos de control b_0, b_1, b_2, b_3 y los pesos $\omega_0 = c^3, \omega_1 = c^2\omega, \omega_2 = c\omega, \omega_3 = 1$, y por otro lado, la curva $\tilde{r}(t)$, con $t \in [1, 2]$, siendo determinada por los puntos de control $\tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ y \tilde{b}_3 y los pesos $\tilde{\omega}_0 = 1, \tilde{\omega}_1 = \omega/\tilde{c}, \tilde{\omega}_2 = \omega/\tilde{c}^2$ y $\tilde{\omega}_3 = 1/\tilde{c}^3$. Abusando de la notación, estas curvas $r(t)$ y $\tilde{r}(t)$ son reparametrizaciones diferentes de las curvas $r(t)$ y $\tilde{r}(t)$ que estábamos considerando hasta ahora pero las vamos a denotar igual. Vamos a examinar si existen constantes positivas c y \tilde{c} que garanticen la continuidad C^2 de las curvas $r(t)$ y $\tilde{r}(t)$ en $t = 1$.

Para tener continuidad C^0 , $b_3 = \tilde{b}_0$, lo cual se tiene trivialmente. Y para tener continuidad C^1 , la condición es:

$$\frac{3\omega_2}{\omega_3}(b_3 - b_2) = \frac{3\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_0}(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0) \Rightarrow (3c\omega)(b_3 - b_2) = \frac{3\omega}{\tilde{c}}(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0).$$

De aquí se deduce que $\frac{1}{c} = \tilde{c}$, ya que $b_3 - b_2 = \tilde{b}_1 - \tilde{b}_0$ por la elección que hemos hecho de los puntos de control. A partir de esto, tenemos que los pesos son $\omega_0 = c^3, \omega_1 = c^2\omega, \omega_2 = c\omega, \omega_3 = 1$, y $\tilde{\omega}_0 = 1, \tilde{\omega}_1 = \omega c, \tilde{\omega}_2 = c^2\omega$ y $\tilde{\omega}_3 = c^3$.

Por último, falta ver la condición para tener continuidad C^2 , dicha condición es:

$$r''(1) = \frac{3\omega_2^2 - \omega_2\omega_3}{\omega_3^2}(b_3 - b_2) - \frac{\omega_1}{\omega_3}(b_3 - b_1) = \frac{\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_0 - 3\tilde{\omega}_1^2}{\tilde{\omega}_0^2}(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0) + \frac{\tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_0}(\tilde{b}_2 - \tilde{b}_0) = \tilde{r}''(1).$$

Teniendo en cuenta los valores de los pesos:

$$\begin{aligned} (3c^2\omega^2 - c\omega)(b_3 - b_2) - c^2\omega(b_3 - b_1) &= (c\omega - 3c^2\omega^2)(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0) + c^2\omega(\tilde{b}_2 - \tilde{b}_0) \\ c^2\omega(\tilde{b}_2 - \tilde{b}_0) &= 2(3c^2\omega^2)(b_3 - b_2) - c^2\omega(b_3 - b_1) \\ c^2\omega(\tilde{b}_2 - \tilde{b}_0 + b_3 - b_1) &= 2(3c^2\omega^2 - c\omega)(b_3 - b_2) \\ c(\tilde{b}_2 - b_1) &= 2(3c\omega - 1)(b_3 - b_2) \\ c|\tilde{b}_2 - b_1| &= 2|3c\omega - 1||b_3 - b_2| \\ \frac{|\tilde{b}_2 - b_1|}{2|b_3 - b_2|} &= \frac{1}{c}|3c\omega - 1|. \end{aligned}$$

Entonces obtenemos que:

$$\frac{1}{c} = 3\omega - \frac{|\tilde{b}_2 - b_1|}{2|b_3 - b_2|}, \quad (2.3.8)$$

siempre que

$$3c\omega - 1 > 0 \Leftrightarrow c(1 + 2\cos\alpha) > 1 \Leftrightarrow c > \frac{1}{3}.$$

Para poder terminar de asegurar la continuidad de clase C^2 en las uniones, ya solo nos falta determinar el valor de c , lo haremos utilizando algunos triángulos semejantes que se pueden observar en las Figuras 2.11 y 2.12.

Por semejanza de triángulos, sabemos que se cumple:

$$\frac{2|b_3 - b_2|}{|\tilde{b}_2 - b_1|} = \frac{|b_2 - m|}{|b_1 - m|} = \frac{m_z - b_{2z}}{m_z - b_{1z}} = \frac{\alpha p - b}{\alpha p + b} = \frac{1}{1 + \cos\alpha}.$$

Por tanto, sustituyendo en (2.3.8), se tiene que:

$$\frac{1}{c} = 1 + 2\cos\alpha - 1 - \cos\alpha = \cos\alpha \Rightarrow c = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

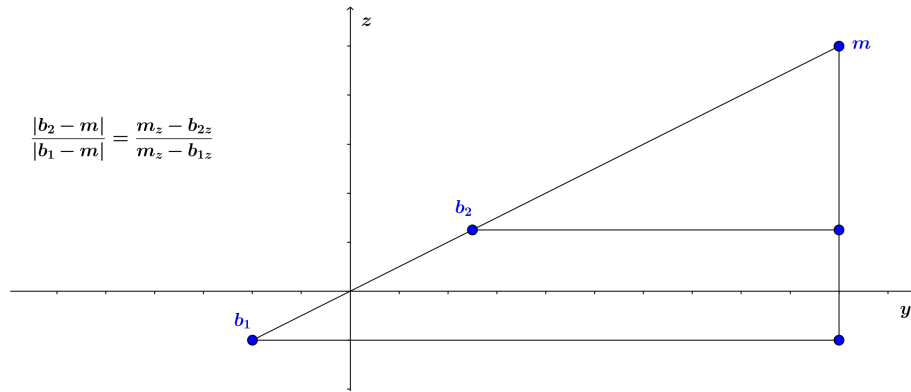


Figura 2.12: Proyección sobre el plano (Y, Z) de algunos triángulos obtenidos de la Figura 2.11.

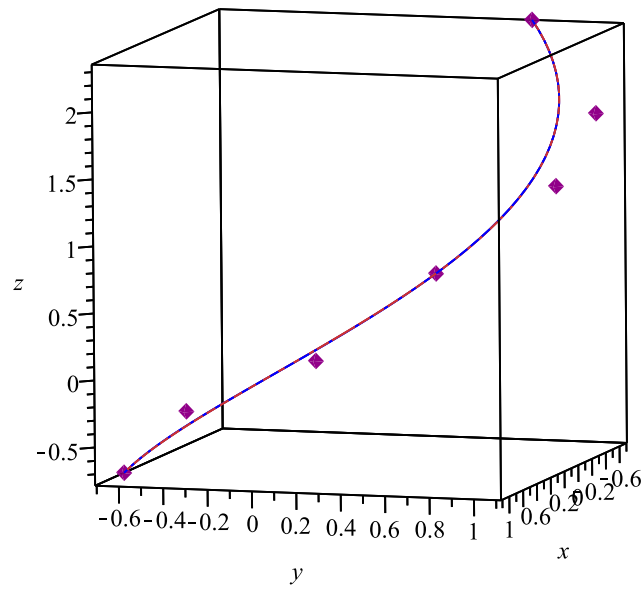


Figura 2.13: Representación de un arco de hélice, curva de Bézier racional cúbica compuesta y los puntos de control.

Capítulo 3

Aproximación de hélice circular por curvas de Bézier cuadráticas

En este capítulo, ofrecemos otro método para parametrizar la hélice circular, cuya idea queda expuesta en la primera sección. La parametrizaremos utilizando curvas de Bézier racionales cuadráticas y curvas de Bézier simples cuadráticas.

En la segunda sección, calcularemos una cota del error que se comete al aproximar la hélice circular con estos tipos de curvas utilizando la distancia de Hausdorff. Este nuevo método se puede encontrar en [1].

3.1. Idea básica de la aproximación

En este capítulo, al igual que en el anterior, la hélice circular se describe como una curva espacial trazada en la superficie de un cilindro que va formando un ángulo constante con sus generatrices. Está parametrizada por:

$$h(v) = (r \cos v, r \sin v, pv), \quad v \in [-\alpha, \alpha]. \quad (3.1.1)$$

En la Figura 3.1 queda representada la hélice $h(v)$ con $v \in [-\alpha, \alpha]$ y su proyección en el plano (X, Y) , denotada como $h_0(v)$.

Vamos a aproximar un arco de hélice para $0 < \alpha < \pi/2$ mediante curvas de Bézier racionales cuadráticas y curvas de Bézier simples cuadráticas. Por un lado, proyectamos el arco de hélice sobre el plano (X, Y) obteniendo un

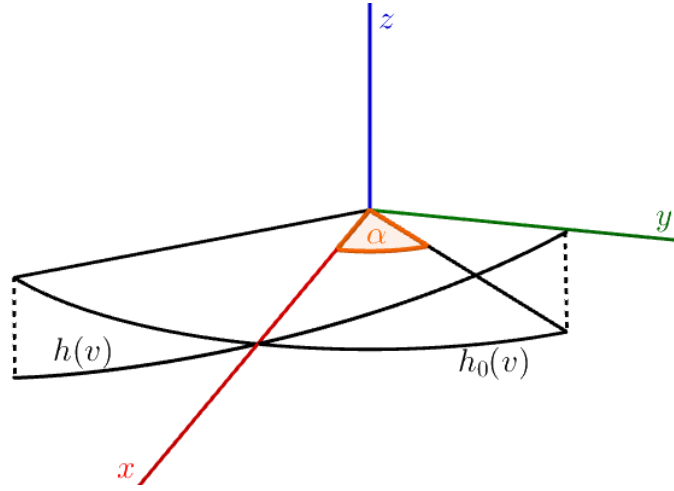


Figura 3.1: Representación de la hélice $h(v)$ y su proyección en el plano (X, Y) , $h_0(v)$.

arco de circunferencia. Como vimos en el primer capítulo, se pueden obtener los puntos de control y pesos de una curva de Bézier racional cuadrática que parametriza el arco de circunferencia, donde los puntos de control eran:

$$a_0 = (r \cos \alpha, -r \sin \alpha).$$

$$a_1 = \left(\frac{r}{\cos \alpha}, 0 \right).$$

$$a_2 = (r \cos \alpha, r \sin \alpha).$$

Sin embargo, en este capítulo, no la vamos a reparametrizar como una curva de Bézier racional cúbica mediante la elevación del grado. Así que, una vez que ya tenemos parametrizado el arco de circunferencia como una curva de Bézier racional cuadrática en el plano (X, Y) , teniendo en cuenta los a_i ya calculados, vamos a desplazar los puntos de control sobre rectas paralelas al eje OZ . Por simetría, elevamos el punto a_2 y descendemos el punto a_0 . A estos puntos de control desplazados los vamos a denotar b_0 , b_1 y b_2 .

Teniendo en cuenta la propiedad interpolatoria de una curva de Bézier racional, el primer y último punto, b_0 y b_2 , se encuentran sobre la hélice, $b_0 = h(-\alpha)$ y $b_2 = h(\alpha)$, así que la coordenada z de b_0 y b_2 es:

$$b_{0z} = -\alpha p,$$

$$b_{2z} = \alpha p.$$

Por ello, los puntos de control de la curva de Bézier racional cuadrática son:

$$\begin{aligned} b_0 &= (x_0, y_0, z_0) = (r \cos \alpha, -r \operatorname{sen} \alpha, -p\alpha). \\ b_1 &= (x_1, y_1, z_1) = (r \operatorname{sec} \alpha, 0, 0). \\ b_2 &= (x_2, y_2, z_2) = (r \cos \alpha, r \operatorname{sen} \alpha, p\alpha). \end{aligned}$$

Y los pesos son los mismos que calculamos en el primer capítulo, $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = \cos \alpha$ y $\omega_2 = 1$. Así que la curva de Bézier racional cuadrática con dichos puntos de control y pesos es de la forma:

$$r(t) = \frac{(x(t), y(t), z(t))}{\omega(t)}, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.1.2)$$

donde:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=0}^2 \omega_i x_i B_i(t) = r(\cos \alpha(1-t)^2 + 2t(1-t) + \cos \alpha t^2), \\ y(t) &= \sum_{i=0}^2 \omega_i y_i B_i(t) = r \operatorname{sen} \alpha(2t-1), \\ z(t) &= \sum_{i=0}^2 \omega_i z_i B_i(t) = p\alpha(2t-1), \\ \omega(t) &= \sum_{i=0}^2 \omega_i B_i = (1-t)^2 + 2 \cos \alpha t(1-t) + t^2. \end{aligned}$$

En el primer capítulo, vimos que $r_1^2(t) + r_2^2(t) = r^2$, por ello, la curva de Bézier racional cuadrática que acabamos de aproximar, se encuentra sobre el cilindro de la hélice. Por otro lado, tenemos que $r(0)$, $r(\frac{1}{2})$ y $r(1)$ son puntos de la hélice circular, ya que $r(0) = b_0 = h(-\alpha)$, $r(1) = b_2 = h(\alpha)$ y queda ver que $\exists v_0 \in (-\alpha, \alpha)$ tal que $h(v_0) = r(\frac{1}{2})$:

$$r\left(\frac{1}{2}\right) = \left(r \frac{\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2}}, 0, 0\right) = (r, 0, 0) = h(0).$$

En la Figura 3.2 representamos la curva de Bézier racional cuadrática $r(t)$ y su proyección sobre el plano (X, Y) , denotada por $r_0(t)$.

Por otro lado, como ya hemos mencionado, también vamos a aproximar el arco de hélice como una curva de Bézier simple cuadrática que se define

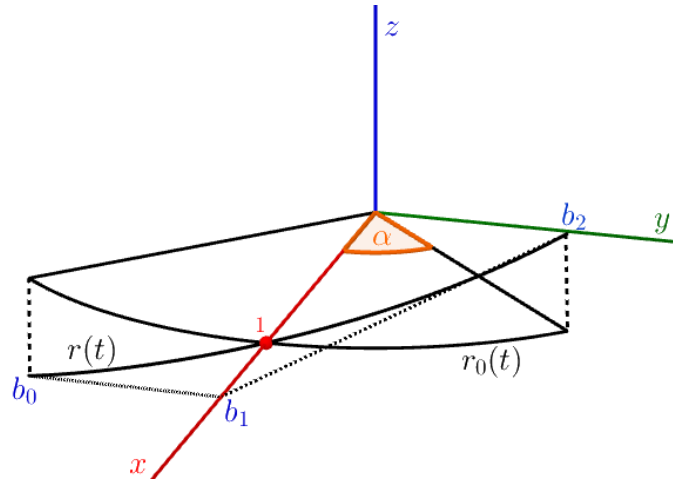


Figura 3.2: Representación de la curva de Bézier $r(t)$ y su proyección $r_0(t)$.

de la siguiente forma:

$$q(u) = \sum_{i=0}^2 b_i B_i^2(u), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad (3.1.3)$$

donde $B_i^2(u)$ son los polinomios de Bernstein y cuyos puntos de control son los mismos que hemos calculado para la curva de Bézier racional cuadrática.

Los puntos extremos de la curva de Bézier simple cuadrática, $q(0)$ y $q(1)$, son puntos de la hélice circular ya que $q(0) = b_0 = h(-\alpha)$ y $q(1) = b_2 = h(\alpha)$; por tanto, se encuentran sobre el cilindro de la hélice. Sin embargo, no todos los puntos de la curva de Bézier cuadrática se encuentran sobre el cilindro de

la hélice, esto vamos a demostrarlo viendo que $q_1^2(u) + q_2^2(u) \neq r^2$:

$$\begin{aligned}
 q_x^2(u) + q_y^2(u) &= ((1-u)^2 r \cos \alpha + 2u(1-u) \frac{r}{\cos \alpha} + u^2 r \cos \alpha)^2 + \\
 &\quad + (-(1-u)^2 r \sin \alpha + u^2 r \sin \alpha)^2 = \\
 &= (1-u)^4 r^2 + u^4 r^2 + 2r^2 u^2 (1-u)^2 \left[-\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \frac{2}{\cos^2 \alpha} \right] + \\
 &\quad + 4u(1-u)^3 r^2 + 4u^3(1-u)r^2 = \\
 &= r^2 \left[1 + 2u^2(1-u)^2 \left(-1 + 2\cos^2 \alpha + \frac{2}{\cos^2 \alpha} \right) - 6u^2(1-u)^2 \right] = \\
 &= r^2 \left[1 - 4u^2(1-u)^2 \frac{(\cos^2 \alpha - 1)}{\cos^2 \alpha} \right] \neq r^2.
 \end{aligned}$$

En la Figura 3.3 está representada la curva de Bézier simple cuadrática $q(u)$ y su proyección en el plano (X, Y) , a la que vamos a denotar por $q_0(u)$.

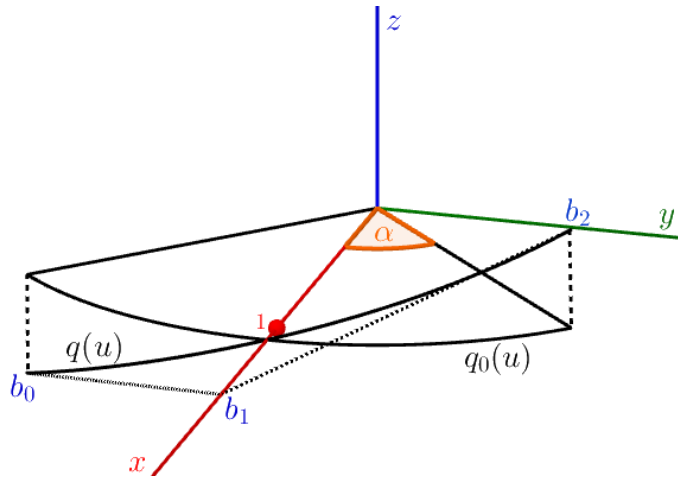


Figura 3.3: Representación de la curva de Bézier $q(u)$ y su proyección $q_0(u)$.

Notar que si dividimos un arco de hélice en subarcos de igual longitud y aproximamos cada uno de los subarcos por curvas de Bézier simples o racionales de orden 2, obtendremos una curva de Bézier polinómica compuesta y una curva de Bézier racional compuesta, ambas de clase G^1 .

Observación 3.1.1 Se tiene que $h_0(v)$ y $r_0(t)$ son el mismo arco de circunferencia con ángulo 2α en el plano (X, Y) .

3.2. Cálculo del error utilizando la distancia de Hausdorff

Proposición 3.2.1 *Sea $r(t)$ una cónica y $q(t)$ una curva de Bézier cuadrática que tienen los mismos puntos de control p_0, p_1, p_2 , y $r(t)$ tiene los pesos $1, \omega, 1$, respectivamente. Entonces hay una reparametrización $t(u)$ tal que $r(t(u)) - q(u)$ es paralelo a $p_0 - 2p_1 + p_2$ y se verifica:*

$$|r(t(u)) - q(u)| \leq \frac{|1 - \omega|}{4(1 + \omega)} |p_0 - 2p_1 + p_2|.$$

Demostración. Aunque en la Proposición 2.1 y el Corolario 2.2 en [4] se puede encontrar esta demostración para curvas planas que se encuentran en el plano (X, Y) , también se tiene el resultado cuando $r(t)$ y $q(u)$ son curvas planas situadas en el mismo plano.

Proposición 3.2.2 *Para cada α, p y r , la aproximación de la hélice mediante curvas racionales cuadráticas y curvas simples cuadráticas tienen la siguiente cota de error:*

$$d_H(h, r) \leq pE(\alpha), \quad (3.2.1)$$

$$d_H(h, q) \leq \sqrt{(pE(\alpha))^2 + (rF(\alpha))^2}, \quad (3.2.2)$$

donde

$$t_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1 + \cos \alpha)(\alpha - \operatorname{sen} \alpha)}{(1 - \cos \alpha)(\alpha + \operatorname{sen} \alpha)}},$$

$$E(\alpha) = \arctan \frac{y(t_A)}{x(t_A)} - \frac{z(t_A)}{p\omega(t_A)},$$

$$F(\alpha) = 2 \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha}{4} \sec \alpha.$$

Demostración. Por la Definición 1.1.15 sabemos que :

$$\begin{aligned} d_H(h, r) &= \max \left(\max_{t \in [0,1]} \min_{v \in [0,1]} |h(v) - r(t)|, \max_{v \in [0,1]} \min_{t \in [0,1]} |h(v) - r(t)| \right) \leq \\ &\leq \max \left(\max_{t \in [0,1]} |h(v(t)) - r(t)|, \max_{t \in [0,1]} |h(v(t)) - r(t)| \right). \end{aligned}$$

siendo $h(v(t))$ una reparametrización de $h(v)$.

Por lo tanto, se verifica la siguiente desigualdad:

$$d_H(h, r) \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |h(v(t)) - r(t)|. \quad (3.2.3)$$

Utilizando la reparametrización $v = v(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$, obtenemos que la diferencia entre la ecuación de la hélice (3.1.1) y la ecuación de la cónica (3.1.2) es la siguiente:

$$h(v(t)) - r(t) = \left(\frac{rx(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}, \frac{ry(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}, p \arctan \frac{y(t)}{x(t)} \right) - \left(\frac{x(t)}{\omega(t)}, \frac{y(t)}{\omega(t)}, \frac{z(t)}{\omega(t)} \right).$$

Como ya hemos visto que la hélice y la curva racional de Bézier cuadrática están sobre el cilindro, entonces sabemos que $x(t)^2 + y(t)^2 = r\omega(t)^2$, por lo tanto, podemos escribir la diferencia anterior como:

$$h(v(t)) - r(t) = \left(0, 0, p \arctan \frac{y(t)}{x(t)} - \frac{z(t)}{\omega(t)} \right). \quad (3.2.4)$$

De esta forma, a la tercera componente de la expresión anterior la vamos a denotar como $\epsilon(t)$, $\epsilon(t) = p \arctan \frac{y(t)}{x(t)} - \frac{z(t)}{\omega(t)}$, cuya derivada es la siguiente:

$$\begin{aligned} \epsilon'(t) &= p \frac{y(t)'x(t) - y(t)x(t)'}{x(t)^2 + y(t)^2} - \frac{z(t)'\omega(t) - z(t)\omega(t)'}{\omega(t)^2} = \\ &= \frac{p(y(t)'x(t) - y(t)x(t)') - r^2(z(t)'\omega(t) - z(t)\omega(t)')}{r^2\omega(t)^2}. \end{aligned}$$

A continuación, vamos a ver que el numerador de $\epsilon'(t)$ se puede escribir como una curva polinomial cuadrática, para ello primero vamos a determinar las derivadas de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ y $\omega(t)$, que son:

$$\begin{aligned} x'(t) &= r(-2 \cos \alpha(1-t) + 2(1-2t) + 2 \cos \alpha t), \\ y'(t) &= 2r \sin \alpha, \\ z'(t) &= 2p\alpha, \\ \omega'(t) &= -2(1-t) + 2 \cos \alpha(1-2t) + 2t. \end{aligned}$$

Con esto se tiene que el numerador de $\epsilon'(t)$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
& p(y'x - yx') - r^2(z'\omega - z\omega) = \\
& = 2r^2p\{\text{sen } \alpha (\cos \alpha(1 - t)^2 + 2t(1 - t) + t^2 \cos \alpha) - \\
& \quad - \text{sen } \alpha(2t - 1)(-\cos \alpha + 2t \cos \alpha + 1 - 2t) - \\
& \quad - \alpha((1 - t)^2 + 2 \cos \alpha t(1 - t) + t^2) + \\
& \quad + \alpha(2t - 1)(-1 + 2t + \cos \alpha(1 - 2t))\} = \\
& = 2r^2p\{-\text{sen } \alpha(-2t^2 + 2t^2 \cos \alpha - 2t \cos \alpha - 1) + \\
& \quad + \alpha(2t^2 - 2t^2 \cos \alpha + 2t \cos \alpha - 2t - \cos \alpha)\} = \\
& = 2r^2p\{t^2(2 \text{sen } \alpha - 2 \cos \alpha \text{sen } \alpha + 2\alpha - 2\alpha \cos \alpha) + \\
& \quad + t(2 \text{sen } \alpha \cos \alpha - 2 \text{sen } \alpha + 2\alpha \cos \alpha - 2\alpha) + \\
& \quad + (\text{sen } \alpha - \alpha \cos \alpha)\} = \\
& = 2r^2p\{2(t^2 - t)(\alpha - \alpha \cos \alpha + \text{sen } \alpha - \text{sen } \alpha \cos \alpha) + \\
& \quad + (\text{sen } \alpha - \alpha \cos \alpha)\} = \\
& = 2pr^2\{2(\alpha + \text{sen } \alpha)(1 - \cos \alpha)(t^2 - t) + (\text{sen } \alpha - \alpha \cos \alpha)\}.
\end{aligned}$$

En la Figura 3.4, quedan representadas ambas raíces de la curva polinomial cuadrática anterior con $\alpha \in (0, \pi/2)$, que son:

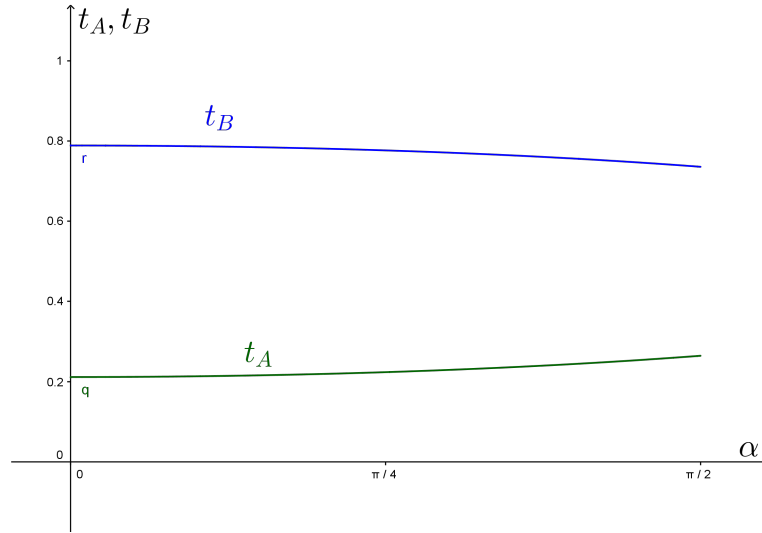


Figura 3.4: Representación de t_A y t_B para $\alpha \in (0, \pi/2)$.

$$t_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1 + \cos \alpha)(\alpha - \operatorname{sen} \alpha)}{(1 - \cos \alpha)(\alpha + \operatorname{sen} \alpha)}},$$

$$t_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1 + \cos \alpha)(\alpha - \operatorname{sen} \alpha)}{(1 - \cos \alpha)(\alpha + \operatorname{sen} \alpha)}}.$$

y se puede apreciar que ambas se encuentran en el intervalo $(0, 1)$ para $\alpha \in (0, \pi/2)$.

Por otro lado, como $\epsilon(t) = 0$ para $t = 0, 1/2, 1$, y $\epsilon'(t) > 0$ en $(0, t_A)$ y $(t_B, 1)$, entonces $\epsilon(t)$ tiene un máximo local $\epsilon(t_A)$, un mínimo local en $\epsilon(t_B)$ y $\epsilon(t_A) = -\epsilon(t_B)$ es el máximo global de $\epsilon(t)$ en el intervalo cerrado $[0, 1]$, como se muestra en la Figura 3.5.

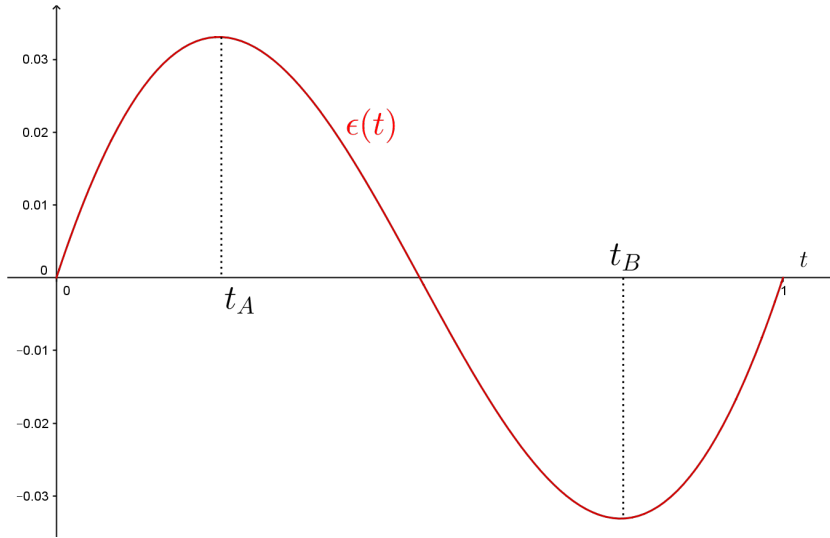


Figura 3.5: Representación de $\epsilon(t)$ para $t \in [0, 1]$ cuando $\alpha = \pi/4$.

Por tanto, como el vector que se describe en (3.2.4) es paralelo al eje OZ , podemos acotar su módulo de la siguiente forma:

$$|h(v(t)) - r(t)| = \sqrt{\epsilon(t)^2} = \epsilon(t) \leq \epsilon(t_A),$$

porque hemos demostrado que $\epsilon(t_A)$ es el máximo global de $\epsilon(t)$.

Así que ya podemos ver que la desigualdad (3.2.1) es cierta:

$$d_H(h, r) \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |h(v(t)) - r(t)| \leq \epsilon(t_A) = p \left(\arctan \frac{y(t_A)}{x(t_A)} - \frac{z(t_A)}{p\omega(t_A)} \right) = pE(\alpha)$$

para todo $0 \leq t \leq 1$.

Ahora vamos a probar que se verifica la desigualdad (3.2.2), es decir, vamos a buscar una cota de error superior utilizando la distancia de Hausdorff $d_H(h, q)$ entre la hélice $h(v)$ y la curva de Bézier cuadrática aproximada $q(u)$. $q(u)$ y $r(t)$ tienen los mismos puntos de control b_0, b_1, b_2 , así que por la Proposición 3.2.1, tenemos que existe una reparametrización $t = t(u)$ tal que $r(t(u)) - q(u)$ es paralelo a $b_0 - 2b_1 + b_2$ y, además:

$$|r(t(u)) - q(u)| \leq \frac{1 - \cos \alpha}{4(1 + \cos \alpha)} |b_0 - 2b_1 + b_2|.$$

Para poder aplicar esta desigualdad, primero vamos a calcular el módulo del vector $b_0 - 2b_1 + b_2 = -2r(\sin^2 \alpha \sec \alpha, 0, 0)$ que como es paralelo al eje OX , entonces su módulo es $|b_0 - 2b_1 + b_2| = 2r \sin^2 \alpha \sec \alpha$. Así que la desigualdad anterior se acota de la siguiente forma:

$$|r(t(u)) - q(u)| \leq \frac{(1 - \cos \alpha)}{4(1 + \cos \alpha)} \times 2r \sin^2 \alpha \sec \alpha = 2r \sin^4 \frac{\alpha}{2} \sec \alpha = rF(\alpha).$$

Por último, habíamos visto que $h(v(t(u))) - r(t(u)) = (0, 0, \epsilon(t))$ donde $\epsilon(t) \leq pE(\alpha)$. Por otro lado, también hemos visto que $r(t(u)) - q(u) = (\epsilon_2(t), 0, 0)$ donde $\epsilon_2(t) = -2r \sin^2 \alpha \sec \alpha$ tal que $\epsilon_2(t) \leq rF(\alpha)$.

Por ello, para todo $u \in [0, 1]$, con la reparametrización $v = v(t(u))$, tenemos:

$$\begin{aligned} |h(v) - q(u)| &= |(h(v(t(u))) - r(t(u)) + (r(t(u)) - q(u)))| = \\ &= |(\epsilon(t), 0, \epsilon_2(t))| = \sqrt{\epsilon(t)^2 + \epsilon_2(t)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{p^2 E(\alpha)^2 + r^2 F(\alpha)^2}. \end{aligned}$$

Con esto ya queda probada la desigualdad (3.2.2).

En la Figura 3.6 están representadas las dos cotas de error que hemos demostrado, $pE(\alpha)$ y $\sqrt{E(\alpha)^2 + F(\alpha)^2}$, con $\alpha \in [0, \pi/4]$ y $p = r = 1$.

3.3. Ejemplos

En este capítulo, hemos aproximado la hélice dada por (3.1.1) como una curva de Bézier racional cuadrática, $r(t)$, dada por (3.1.2) y una curva de

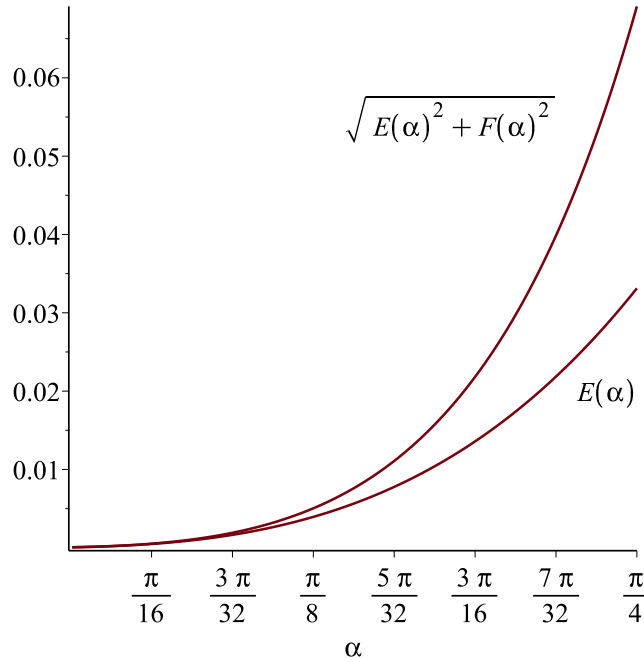


Figura 3.6: Representación de $\epsilon(t)$ para $t \in [0, 1]$ cuando $\alpha = \pi/4$.

Bézier simple cuadrática, $q(u)$, dada por (3.1.3). Además, hemos obtenido una cota de error utilizando la distancia Hausdorff para ambas aproximaciones que han sido demostradas en la Proposición 3.2.2.

A continuación vamos a mostrar mediante gráficas las curvas obtenidas por estos métodos que aproximan a la hélice de partida.

Ejemplo 3.3.1 En primer lugar vamos a aproximar una vuelta completa de la hélice $h(v)$ con $r = p = 1$ y $v \in (-\pi/4, 7\pi/4)$ dividiéndola en 4 arcos de igual amplitud. Cada uno de estos 4 arcos tendrán como puntos extremos $h(-\pi/4)$ y $h(\pi/4)$, $h(\pi/4)$ y $h(3\pi/4)$, $h(3\pi/4)$ y $h(5\pi/4)$, y por último $h(5\pi/4)$ y $h(7\pi/4)$. Cada arco será aproximado por una curva de Bézier racional cuadrática y una curva de Bézier simple cuadrática según el método que hemos visto en este capítulo. El resultado lo podemos ver en la Figura 3.7. En esta Figura podemos comparar visualmente el error de aproximación que comete cada curva que hemos estudiado en este capítulo, donde la curva de Bézier simple cuadrática aparece en verde, la curva de

Bézier racional cuadrática en rojo y la hélice en azul.

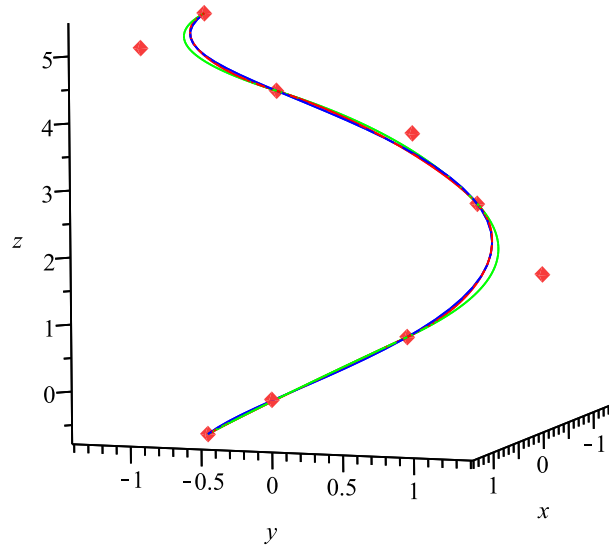


Figura 3.7: Representación de una vuelta de la hélice $h(v)$, la curva de Bézier compuesta racional cuadrática $r(t)$ y la curva de Bézier compuesta cuadrática $q(u)$.

Además, en la siguiente tabla aparece la cota de error calculada para $r = p = 1$ y $k = 4, 8, 16, 32$, siendo k el número de tramos de la curva compuesta que aproxima la vuelta completa de hélice.

Número de tramos	$d_H(h, r)$	$d_H(h, q)$
4	$3,31 \times 10^{-2}$	$6,91 \times 10^{-2}$
8	$3,95 \times 10^{-3}$	$5,04 \times 10^{-3}$
16	$4,87 \times 10^{-4}$	$5,23 \times 10^{-4}$
32	$6,08 \times 10^{-5}$	$6,18 \times 10^{-5}$

Podemos apreciar en esta tabla que el error depende de α . Así, a menor número de tramos mayor será α , y si el ángulo α crece, el error también crece.

Ejemplo 3.3.2 En esta memoria hemos aproximado la hélice como curvas de Bézier utilizando varios métodos, así que en este último ejemplo vamos a comparar tres de ellos. Vamos a aproximar el arco de hélice $h(v)$ con $v \in (-\pi/4, 3\pi/4)$, dividiendo en 2 subarcos: $h(v)$ con $v \in (-\pi/4, \pi/4)$ y $h(v)$ con $v \in (\pi/4, 3\pi/4)$. En la Figura 3.8 están representadas para $p = r = 1$ tres

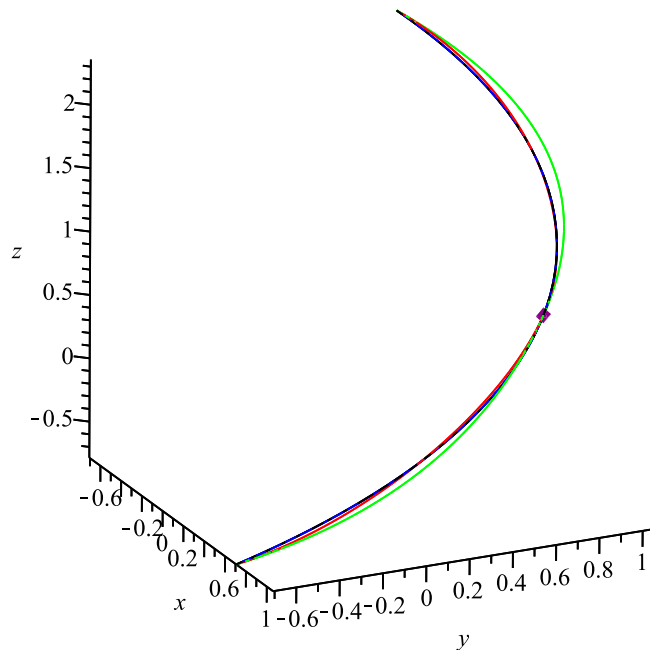


Figura 3.8: Representación de dos tramos de la curva de Bézier racional cuadrática $r(t)$, la curva de Bézier simple cuadrática $q(u)$ y la curva de Bézier racional cúbica que calculamos en el capítulo anterior.

curvas de Bézier compuestas: la curva de Bézier racional cúbica que estudiamos en el capítulo anterior (en azul) y las dos curvas de Bézier cuadráticas (simple y racional) que hemos estudiado en este capítulo, en verde y rojo, respectivamente; el arco de hélice (en negro) y los punto de control que unen ambos tramos de las tres curvas compuestas.

Medimos el error entre ambas curvas de manera visual ya que de forma analítica no tiene sentido pues en los capítulos 2 y 3 el error se determina de

forma diferente. El error de la aproximación por las dos curvas que hemos estudiado en este capítulo se mide con la distancia de Hausdorff y el error de la curva cúbica que estudiamos en el capítulo anterior se mide estudiando la diferencia entre dicha curva y la hélice $h(v)$. Notar que como se puede apreciar claramente, la curva $q(u)$ es la peor aproximación de las tres.

Bibliografía

- [1] Young Joon Ahn. Helix approximations with conic and quadratic Bézier curves. *Computer Aided Geometric Design* **22** (2005) 551-565.
- [2] Juan M. Cordero, José Cortés Parejo. *Curvas y Superficies para modelado geométrico*. Ra-Ma, Madrid, 2002.
- [3] Gerald Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, San Diego, 1988.
- [4] Michael S. Floater. High order approximation of conic sections by quadratic splines. *Computer Aided Geometric Design* **12** (1995) 617-637.
- [5] Michael S. Floater. An $\mathcal{O}(h^{2n})$ Hermite approximation for conic sections. *Computer Aided Geometric Design* **14** (1997) 135-151.
- [6] Imre Juhász. Approximating the helix with rational cubic Bézier curves. *Computer-Aided Design* **27**, 8 (1995) 587-593.
- [7] Richard R. Patterson. Projective Transformations of the Parameter of a Bernstein-Bézier Curve. *ACM Transactions on Graphics* **4**, 4 (1985) 276-290.