

TRABAJO FIN DE GRADO. CURSO 2016/17.

SISTEMAS DINÁMICOS NO AUTÓNOMOS

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis
Numérico

María del Carmen Camacho Núñez

Dirigido por José Antonio Langa Rosado

Universidad de Sevilla

Facultad de Matemáticas



Abstract

This work shows the attractors theory like a continuation of the differential equations studies we have seen in the subjects “EDP” and “AED”.

We are going to analyse the existence and uniqueness of attractors in autonomous and non-autonomous systems. We will describe some sufficient conditions for the attractors existence. Main results will be applied to Lorenz equations and logistic equation.

Resumen

Este trabajo muestra la teoría de atractores como una continuación del estudio de ecuaciones diferenciales que hemos visto en las asignaturas de “EDP” y “AED”.

Vamos a analizar la existencia y unicidad de atractores en sistemas autónomos y no autónomos. Describiremos algunas condiciones suficientes para la existencia de atractores. Los principales resultados se aplicarán a las ecuaciones de Lorenz y a la ecuación logística.

Índice general

1. Introducción	9
2. Atractores globales y problemas autónomos	15
2.1. Sistemas dinámicos y disipación	15
2.2. Existencia del atractor global	20
2.2.1. Semigrupos asintóticamente compactos y atractores globales	22
2.2.2. Un ejemplo: Las ecuaciones de Lorenz.	26
2.3. Estructura del atractor global	27
3. Procesos de evolución y atractores pullback	33
3.1. Introducción.	33
3.2. Dinámica pullback	36
3.3. Resultados de existencia	42
3.3.1. Procesos asintóticamente compactos en sentido pullback	43
3.4. Bases de atracción	46
4. Continuidad, estructura y dimensión de los atractores	53
4.1. Semicontinuidad superior de atractores	53
4.2. Semicontinuidad inferior de atractores	54
4.3. Dimensión de atractores	57
5. Aplicaciones	61
5.1. Atractores pullback en la ecuación logística no autónoma	61
5.2. Continuidad de atractores autónomos	64
Bibliografía	85

Capítulo 1

Introducción

Las ecuaciones en derivadas parciales de evolución consiguen modelar muchas de las realidades que describimos como sistemas dinámicos, por ejemplo, fenómenos de la mecánica celeste, de crecimiento de poblaciones o de turbulencias de fluidos. Pretenden informarnos de la evolución del sistema a medida que transcurre el tiempo. En forma abstracta, podemos expresar una ecuación de evolución de la forma:

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = F(u(t)),$$

donde $u(t) \in X$ es la incógnita cuyo desarrollo en el tiempo se quiere conocer.

Generalmente complementaremos esta ecuación con ciertas condiciones iniciales que, desde el punto de vista matemático, nos permitirán abordar el problema de existencia y unicidad de soluciones y, desde otro punto de vista, nos servirá de elemento de referencia en la evolución del sistema.

Un modelo de este tipo tendrá más éxito cuanto mejor describa la realidad a la que se refiere. La mayor parte de los modelos que pueden abordarse bien suelen ser lineales, es decir, del tipo $au + b$ siendo u la incógnita (con a, b constantes muy distintas si estamos en el caso de EDOs o en el caso de EDPs). La dinámica de cualquier modelo lineal está perfectamente estudiada, siendo conocidos gran cantidad de resultados acerca de las soluciones, su comportamiento, su estabilidad, etc. Un modelo cuya forma sea lineal tiene todas las garantías de poder ser estudiado y entendido en profundidad.

El problema es que la realidad es mucho más compleja. A poco que nos adentremos en un problema del que queramos obtener algunas ecuaciones que gobiernen su comportamiento, observamos que, en muchos casos, son modelos no lineales los que mejor describen la realidad que estamos estudiando.

Sin embargo, de los sistemas no lineales podemos extraer muy pocas consideraciones o resultados generales. Cada problema debe ser tratado como una

realidad cerrada cuyo desarrollo aporta, en general, poca información a otro tipo de problemas también no lineales.

Uno de los temas más importantes a tratar en cualquier sistema de ecuaciones diferenciales es el comportamiento de las soluciones cuando $t \rightarrow +\infty$. No obstante, cuando el sistema es no lineal, la evolución del mismo obedece a complicadas leyes que hacen difícil la predicción de hacia dónde evolucionará el sistema.

Parece que en esta situación nuestro modelo no va a ser capaz de darnos información del comportamiento de las soluciones cuando $t \rightarrow +\infty$. Sin embargo, en muchos de estos casos, no es esto lo que va a ocurrir, sino que las trayectorias del sistema convergen a un conjunto, bastante extraño en ocasiones, al que llamaremos *atractor* del sistema.

De esta forma, el comportamiento caótico de ciertos sistemas dinámicos (nosotros sólo estudiaremos sistemas disipativos) puede ser explicado por la existencia de un (a veces complicado) conjunto atrayente compacto hacia el que convergen las trayectorias del sistema cuando $t \rightarrow +\infty$. En este sentido es en el que podemos hablar de los atractores como explicación del caos (ver Gleik [7]).

La existencia de atractores en ciertos sistemas no es nueva. Son muy conocidos puntos y órbitas cíclicas que, a lo largo de su *dominio de atracción*, ejercen una tendencia a converger en ellos de todas las trayectorias que comienzan en dichos dominios. La diferencia radica en que para los sistemas dinámicos disipativos en general, los atractores que encontramos van a ser conjuntos de tal complejidad que a veces generan estructuras *fractales*.

Por otro lado, una de las propiedades que hacen interesante el estudio de los atractores es el hecho de que, en ciertas condiciones, puede probarse que tienen dimensión finita, aunque el sistema al que están asociados sea infinito-dimensional, lo cual nos lleva al resultado de describir sistemas disipativos de dimensión infinita con un número finito de grados de libertad (ver Robinson [17]).

El estudio de la existencia de atractores para ciertos sistemas (tanto de dimensión finita como infinita) es el objetivo principal de este trabajo. La manera en que lo haremos es a partir de la teoría de semigrupos de operadores. Para ello, partimos de un problema de valores iniciales para una ecuación de evolución (en forma abstracta):

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t)}{\partial t} = F(u(t)) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Conocida la existencia y unicidad de soluciones, podemos trabajar, para todo $t \geq 0$, con los operadores $T(t)$

$$\begin{aligned} T(t) &: X \rightarrow X \\ T(t)u_0 &= u(t) \end{aligned}$$

siendo X el espacio de fases donde evoluciona el sistema y $u(t)$ la solución del mismo. Será fácil comprobar que $T(t)$ constituye un semigrupo de operadores. Observemos que $T(t)u_0$, cuando t recorre $[0, +\infty)$ y u_0 recorre X , describe todos los puntos de todas las trayectorias del sistema para cualquier tiempo y cualquier dato inicial. Por ello, es a partir de los semigrupos de operadores de donde vamos a extraer la información sobre los atractores del sistema.

Sin embargo, son comunes los modelos que necesitan incorporar la dependencia temporal en los términos de la ecuación, de manera que el modelo puede ser descrito por un término no lineal dependiente del tiempo

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = F(u(t), t).$$

La familia de operadores que describe la solución es un proceso de evolución $\{S(t, s) : t \geq s\}$ (ver Definición 3.2.1)

$$\begin{cases} S(t, s) : X \rightarrow X \\ S(t, s)u_0 = u(t, s; u_0) \\ S(s, s)u_0 = u_0. \end{cases}$$

En este caso, tanto el tiempo final t como el inicial s desempeñan un papel importante en la dinámica de las soluciones, la cual no puede ser descrita sólo a partir del tiempo transcurrido $t - s$. Esto ha conducido a la introducción de diferentes conceptos de atracción y conjuntos atrayentes para los sistemas no autónomos o procesos de evolución.

En este trabajo, adoptaremos el concepto de *attractor pullback* que viene dado como una familia $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de conjuntos compactos de X verificando que

1. $S(t, s)\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(t)$ (invarianza).
2. $\text{dist}(S(t, s)D, \mathcal{A}(t)) \xrightarrow{s \rightarrow -\infty} 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $D \subset X$ acotado (atracción pullback).
3. Es mínimo en el sentido de que si existe otra familia de cerrados $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de X que atrae acotados en sentido pullback, entonces $\mathcal{A}(t) \subset C(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Vamos a desarrollar los conceptos y resultados básicos en relación a la teoría de atractores pullback.

En el Capítulo 2 mostraremos los resultados más relevantes sobre atractores globales para problemas autónomos. Entre ellos, dos resultados sobre existencia

de atractores basados en compactos atrayentes o en semigrupos asintóticamente compactos.

Teorema 1.0.1 *Supongamos que el semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ es disipativo acotado, siendo $K \subseteq X$ un conjunto absorbente. Si K es compacto, entonces existe el atractor global \mathcal{A} que viene dado por $\mathcal{A} = \omega(K)$. Además, si K es conexo \mathcal{A} también es conexo.*

Teorema 1.0.2 *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo en X . Entonces $\{T(t) : t \geq 0\}$ posee atractor global \mathcal{A} si y sólo si es asintóticamente compacto y disipativo. Además, en ese caso, si B denota la colección de todos los subconjuntos acotados no vacíos de X , entonces el atractor viene dado por*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B)$$

En el Capítulo 3 estableceremos los conceptos básicos y resultados de existencia para los atractores pullback dentro del marco de los procesos de evolución. Estos resultados estarán basados en familias de conjuntos absorbentes compactos o en procesos de evolución asintóticamente compactos en sentido pullback. Entre ellos, cabe destacar los dos siguientes.

Teorema 1.0.3 *Sea $\{S(t, s) : t \geq s\}$ un proceso de evolución en un espacio métrico X . Sea $\{K(t) : t \in \mathbb{R}\}$ una familia de conjuntos compactos de X tal que es absorbente en sentido pullback. Entonces existe el atractor pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$, el cual se expresa como*

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup \{\omega(B, t) : B \subseteq X, B \text{ acotado}\}}$$

Teorema 1.0.4 *Supongamos que el proceso de evolución $\{S(t, s) : t \geq s\}$ es fuertemente disipativo en sentido pullback y asintóticamente compacto en sentido pullback. Entonces la familia $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ dada en (3.6) es el atractor pullback. Además*

$$\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s) \text{ es acotado para cada } t \in \mathbb{R}.$$

De hecho, si $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es la familia que absorbe fuertemente acotados de X en sentido pullback, $\mathcal{A}(t) = \omega(C(t), t)$ y

$$\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s) \subseteq \overline{C(t)}.$$

En el Capítulo 4 se mostrarán los resultados de semicontinuidad superior e inferior de atractores. Veremos en qué consisten estos conceptos a partir de las siguientes definiciones.

Definición 1.0.5 Sea $B_0 \subseteq X$ un conjunto acotado y $\{B_{\mathcal{D}}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ una familia de conjuntos del espacio X que dependen del parámetro $\eta \in [0, \eta_0]$. Diremos que dicha familia es semicontinua superiormente al conjunto B_0 si

$$\text{dist}(B_{\eta}(t), B_0) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Definición 1.0.6 Sea $B_0 \subseteq X$ un conjunto acotado y consideremos la familia $\{B_{\eta}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de conjuntos del espacio X que dependen del parámetro $\eta \in [0, \eta_0]$. Diremos que dicha familia es semicontinua inferiormente al conjunto B_0 si, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\text{dist}(B_0, B_{\eta}(t)) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0.$$

Finalmente, en el Capítulo 5 se mostrarán ejemplos concretos sobre existencia de atractores globales para ecuaciones diferenciales ordinarias, tratando de ilustrar con más detalle la teoría que se mostrará en capítulos anteriores.

Capítulo 2

Atractores globales y problemas autónomos

En este capítulo vamos a mostrar los resultados más relevantes sobre atractores globales para los problemas autónomos. Estos resultados se engloban dentro de la teoría de los semigrupos asociados a las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales o ecuaciones en derivadas parciales. La Sección 2.1 nos muestra los conceptos básicos sobre sistemas dinámicos autónomos y atractores globales. En la Sección 2.2 mostraremos los resultados clásicos de existencia de atractores, así como un ejemplo concreto como es el atractor de Lorenz. La Sección 2.3 está dedicada a la estructura del atractor. Todos estos resultados son clásicos y se encuentran en textos como Hale [8], Henry [9], Langa & Robinson [11], Ladyzhenskaya [12], Raugel [14], Robinson [17], Sell & You [18], Temam [20].

2.1. Sistemas dinámicos y disipación

Las ecuaciones autónomas son aquellas en las cuales no aparece una dependencia explícita del tiempo, es decir, podemos expresarlas como $\frac{\partial}{\partial t}u(t) = F(u(t))$. En este tipo de ecuaciones la dinámica del problema viene dada por el tiempo transcurrido, no por los tiempos inicial y final. Por tanto, si $u(t, s; x_s)$ es una solución que empieza en u_s en el tiempo s y evoluciona hasta el tiempo t , su dinámica es la misma que la de la solución $u(t - s, 0; x_s)$.

Consideremos, por ejemplo, el siguiente sistema

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) \\ x(s) = x_s. \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $x_s \in \mathbb{R}$.

La solución explícita de esta ecuación es $x(t, s; x_s) = x_s e^{-(t-s)}$ donde podemos observar como el valor de la solución sólo depende del dato inicial y del tiempo transcurrido. En la Figura 2.1 vemos que la dinámica del sistema con un transcurso de tiempo fijado es la misma para distintos tiempos iniciales. También podemos observar cómo todas las soluciones tienden hacia la solución $x(t, s; 0) \equiv 0$ cuando el tiempo transcurrido va aumentando. Basándonos en estas ideas vamos a desarrollar en este capítulo la teoría de atractores globales para sistemas autónomos (descritos por semigrupos), estableciendo las definiciones y conceptos necesarios para ello.

Definición 2.1.1 Sea X un espacio métrico. La familia de aplicaciones $\{T(t) : t \geq 0\}$ de X en sí mismo se denomina semigrupo si verifica:

1. $T(0) = Id$,
2. $T(t)T(s) = T(s)T(t) = T(t+s)$, para todo $t, s \geq 0$,
3. $(t, x) \in \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\} \times X \mapsto T(t)x \in X$ es continuo.

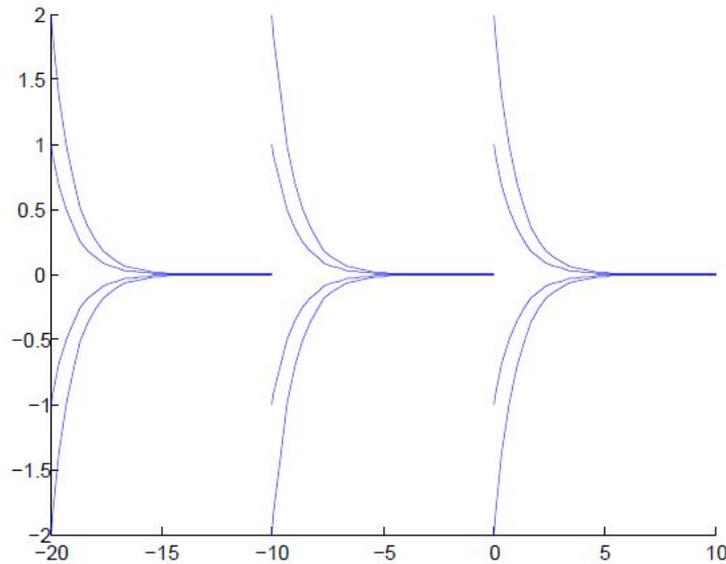


Figura 2.1: Solución de la ecuación (2.1) con datos iniciales $x_s = -2, -1, 1, 2$ y un intervalo temporal de longitud 10 para datos iniciales $s = 0, -10, -20$.

Así, al considerar un problema autónomo

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = F(u(t))$$

con unicidad de solución y denotando como solución $u(t; u_0)$ a aquella que comienza con valor inicial u_0 en $t = 0$, podemos identificar la solución con el semigrupo $T(t)u_0 = u(t; u_0)$, es decir, el semigrupo representa la solución que comenzó en u_0 cuando ha transcurrido un tiempo t .

Dentro de este marco vamos a considerar la semidistancia de Hausdorff para conjuntos.

Definición 2.1.2 Sea (Y, d_Y) un espacio métrico y $A, B \subseteq Y$ dos subconjuntos de dicho espacio. La semidistancia de Hausdorff entre A y B , denotada por $\text{dist}(A, B)$, se define como

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d_Y(a, b)$$

o, equivalentemente,

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(B, \varepsilon)\},$$

donde $N(B, \varepsilon) = \{y \in Y : d_Y(y, B) < \varepsilon\}$ denota un ε -entorno de B .

Esta distancia no define una métrica ya que si $\text{dist}(A, B) = 0$ sólo podemos asegurar que $A \subseteq \overline{B}$. La distancia de Hausdorff se define como

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(A, B) = \max\{\text{dist}(A, B), \text{dist}(B, A)\}$$

Algunas propiedades de esta semidistancia son:

1. $\text{dist}(\emptyset, Y) = 0$, mientras que $\text{dist}(X, \emptyset)$ no está definida;
2. $\text{dist}(X, Y) = \text{dist}(\overline{X}, Y)$;
3. Si $Y_1 \subseteq Y_2$, entonces $\text{dist}(X, Y_1) \geq \text{dist}(X, Y_2)$;
4. Si $X_1 \subseteq X_2$, entonces $\text{dist}(X_1, Y) \leq \text{dist}(X_2, Y)$;

Definición 2.1.3 Sean A y B subconjuntos de X y $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo en X . Diremos que A atrae a B si

$$\text{dist}(T(t)B, A) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

El concepto de atractor global está muy relacionado con el concepto de disipatividad. Un sistema es disipativo si las soluciones de éste convergen al interior de un conjunto acotado dentro del espacio X , es decir, las soluciones no van a explotar en tiempo finito, si no que están acotadas en todo tiempo.

Definición 2.1.4 Diremos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ es disipativo acotado si existe un conjunto acotado $B \subset X$ tal que para todo $D \subseteq X$ acotado, existe $t_0 = t_0(D)$ tal que $T(t)D \subseteq B$ para todo $t \geq t_0$.

Definición 2.1.5 Diremos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ es disipativo compacto si existe un conjunto acotado $B \subset X$ tal que para todo compacto $K \subseteq X$ existe $t_0 = t_0(K)$ tal que $T(t)K \subseteq B$ para todo $t \geq t_0$.

Definición 2.1.6 Diremos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ es disipativo puntual si existe un conjunto acotado $B \subset X$ tal que para todo punto $x \in X$ existe $t_0 = t_0(x)$ tal que $T(t)x \in B$ para todo $t \geq t_0$.

El concepto de invarianza es muy importante dentro del marco de los atractores globales, ya que son conjuntos que no varían una vez les hemos aplicado el semigrupo.

Definición 2.1.7 Diremos que un conjunto D es invariante bajo el semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ si $T(t)D = D$ para todo $t \geq 0$.

Ahora ya estamos en disposición de dar la definición de atractor global.

Definición 2.1.8 El conjunto $\mathcal{A} \subseteq X$ es el atractor global para el semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ si

1. es compacto,
2. atrae acotados de X ,
3. es invariante bajo $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Veamos ahora el concepto de conjunto ω -límite.

Definición 2.1.9 Dado un subconjunto B de X , definimos su conjunto ω -límite, y lo denotamos por $\omega(B)$, como

$$\omega(B) := \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} T(s)B} = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)} \quad (2.2)$$

donde, denotamos por $\gamma_t^+(B)$ la **semiórbita positiva** de B respecto del semigrupo $T(\cdot)$, o sea,

$$\gamma_t^+(B) := \{T(t)x : t \geq 0, x \in B\} = \bigcup_{x \in B} \gamma^+(x).$$

Desde el punto de vista práctico, es decir, para la demostración de resultados, esta definición no es muy útil, pero se puede cambiar por otra más manejable en términos de límites de sucesiones, como nos muestra la siguiente caracterización, donde por el símbolo \mathbb{R}_0^+ estamos indicando el conjunto de los números reales no negativos $[0, +\infty)$:

Lema 2.1.10 *El conjunto ω -límite de un subconjunto $B \subset X$ está caracterizado por*

$$\omega(B) = \{x \in X : \text{existen sucesiones } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ en } \mathbb{R}_0^+ \text{ con } t_n \rightarrow \infty \text{ y } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ en } B, \text{ tales que } T(t_n)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x\}. \quad (2.3)$$

Demostración: En efecto, sea $\omega'(B)$ el conjunto definido por el término derecho de (2.3). Por una parte, dado $x \in \omega(B)$, para cada natural n se tiene que $x \in \overline{\gamma_n^+(B)}$. Luego, para cada n debe existir $z_n \in \gamma_n^+(B)$ tal que $d(x, z_n) < \frac{1}{n}$, pero, por la definición de $\gamma_n^+(B)$, existen $t_n \geq n$ y $x_n \in B$ de manera que $z_n = T(t_n)x_n$. Así, se tiene evidentemente que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n$ con $t_n \rightarrow \infty$, es decir, $x \in \omega'(B)$.

Por otra parte, sea $x \in \omega'(B)$, entonces $x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n$, para ciertas sucesiones $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{R}_0^+ , con $t_n \rightarrow \infty$, y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en B .

Ahora, dado $t \geq 0$ cualquiera, escogiendo un natural $n(t)$ de modo que $t_n \geq t$ para $n \geq n(t)$, se ve fácilmente que $T(t_n)x_n \in \gamma_t(B)$ toda vez que $n \geq n(t)$, de donde resulta que $x \in \overline{\gamma_t(B)}$, y de la arbitrariedad con la que fue tomado $t \geq 0$, concluimos que $x \in \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}$, es decir, $x \in \omega(B)$ y el lema queda demostrado. □

Proposición 2.1.11 *Sea $B \subseteq X$. Si para algún $t_0 > 0$ el conjunto*

$$\bigcup_{t \geq t_0} \overline{T(t)B}$$

es compacto, entonces $\omega(B)$ es no vacío, compacto e invariante.

Demostración: Para $t \geq t_0$ tenemos que los conjuntos

$$B(t) = \bigcup_{s \geq t} \overline{T(s)B}$$

son una familia de compactos encajados, por tanto, tienen intersección no vacía y compacta. Así, $\omega(B)$ es no vacío y compacto si usamos la caracterización (2.2).

Para demostrar la invarianza del conjunto, usaremos la caracterización en (2.3). Sea $T(t)y \in T(t)\omega(B)$ con $y \in \omega(B)$. Como $y \in \omega(B)$, existen dos sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ y $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ de modo que $T(t_n)x_n$ converge a y . Basta aplicar ahora el semigrupo, obteniendo

$$T(t)T(t_n)x_n = T(t + t_n)x_n = T(\tau_n)x_n.$$

Como $T(t_n)x_n$ converge a y , tenemos que $T(\tau_n)x_n$ converge a $T(t)y$ y, por tanto, está en $\omega(B)$. Con lo que hemos probado que $T(t)\omega(B) \subseteq \omega(B)$.

Tomemos ahora un elemento $y \in \omega(B)$. Por definición, existirán unos t_n que convergen a infinito y unos $x_n \in B$ tales que $T(t_n)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Sea ahora $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t + t_0$, para todo $n > n_0$. Por tanto,

$$\{T(t_n - t)x_n\} \subseteq \overline{\bigcup_{s \geq t_0} T(s)B}$$

Al ser este conjunto compacto por hipótesis, existe una subsucesión convergente (que denotaremos igual) a un punto z , el cual está en $\omega(B)$ por (2.3). Por continuidad del semigrupo,

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t)T(t_n - t)x_n = T(t)z.$$

Por tanto, tenemos que $y \in T(t)\omega(B)$, y por consiguiente el doble contenido. □

2.2. Existencia del atractor global

A continuación, mostraremos dos resultados sobre existencia de atractores basados en compactos atrayentes o en semigrupos asintóticamente compactos.

Proposición 2.2.1 Sean $A, B \subseteq X$ con A acotado que atrae a B . Entonces $\omega(B) \subseteq \bar{A}$.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$. Como A atrae a B , existe un tiempo $T = T(\epsilon, B)$ tal que $T(t)B \subseteq \bar{N}(A, \epsilon)$. Por tanto,

$$\overline{\bigcup_{t \geq T} T(t)B} \subseteq \bar{N}(A, \epsilon).$$

Por (2.2),

$$\omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} T(s)B} \subseteq \bigcap_{\epsilon > 0} \bar{N}(A, \epsilon) \subseteq \bar{A}.$$

□

Teorema 2.2.2 *Supongamos que el semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ es disipativo acotado, siendo $K \subseteq X$ un conjunto absorbente. Si K es compacto, entonces existe el atractor global \mathcal{A} que viene dado por $\mathcal{A} = \omega(K)$. Además, si K es conexo \mathcal{A} también es conexo.*

Demostración: Veamos que el conjunto $\mathcal{A} = \omega(K)$ está bien definido. Como K es un conjunto absorbente, y es compacto (y, por tanto, cerrado y acotado) tenemos que existe un tiempo t_0 de modo que para tiempos superiores a él, el conjunto $T(t)K \subseteq K$. Por tanto

$$\overline{\bigcup_{t \geq t_0} T(t)K} \subseteq K.$$

Como K es compacto, tenemos que el conjunto $\omega(K)$ es no vacío, invariante y compacto por la Proposición 2.1.11.

Para demostrar que atrae acotados razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que no es así, es decir, existe un conjunto B acotado, un $\delta > 0$ y unos $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ de forma que $\text{dist}(T(t_n)B, \mathcal{A}) \geq \delta$. Sean $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$, por tanto, $\text{dist}(T(t_n)x_n, \mathcal{A}) \geq \delta$. Como K es un conjunto absorbente, existe un tiempo t_B de forma que $T(t)B \subseteq K$, para todo $t \geq t_B$, y, por tanto, existe un n_0 suficientemente grande a partir del cual $\{T(t_n)x_n : n > n_0\} \subseteq K$. Por compacidad, existe una subsucesión que converge dentro del conjunto a un valor que llamaremos β . Por la continuidad del semigrupo, $\text{dist}(\beta, \mathcal{A}) \geq \delta$. Por otro lado,

$$\beta = \lim_{j \rightarrow \infty} T(t_{n_j})x_{n_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} T(t_{n_j} - t_B)T(t_B)x_{n_j}.$$

Como $t_{n_j} - t_B$ converge a ∞ y $T(t_B)x_{n_j} \in K$, tenemos que $\beta \in \omega(K) = \mathcal{A}$, lo que es una contradicción.

Probemos ahora que el atractor es conexo, también por reducción al absurdo. Supongamos que existen dos abiertos \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 tales que $N(\omega(K), \varepsilon) \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, con $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ y $N(\omega(K), \varepsilon) \cap \mathcal{O}_i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2$. Como $\omega(K)$ atrae a K , entonces $N(\omega(K), \varepsilon)$ atrae a K . Luego, $T(t)K \subseteq N(\omega(K), \varepsilon)$, y por tanto, $T(t)K \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$. Sabemos que $T(t)K$ es conexo, entonces $T(t)K \subset \mathcal{O}_1, \forall t \geq 0$, por ejemplo. Concluimos que $\omega(K) \subset \mathcal{O}_1, \forall t \geq 0$, llegando a contradicción.

□

2.2.1. Semigrupos asintóticamente compactos y atractores globales

Como hemos visto, el resultado anterior sobre la existencia del atractor global exigía la compacidad del conjunto absorbente. A continuación, vamos a ver cómo sustituir esta condición por la propiedad, más débil, de compacidad asintótica del semigrupo.

Definición 2.2.3 *Diremos que el semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ es asintóticamente compacto si para cualesquiera sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ acotada y $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ existe una subsucesión convergente a un punto de X de la sucesión $\{T(t_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.*

Esta definición de compacidad asintótica nos permite caracterizar los compactos por poseer subsucesiones convergentes sin necesidad de estar en uno de ellos. De esta forma, hemos pedido más al semigrupo y menos a los conjuntos.

Proposición 2.2.4 *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo en X . Entonces,*

1. *Si $\{T(t) : t \geq 0\}$ es asintóticamente compacto, para todo acotado B de X , $\omega(B)$ es no vacío, compacto, invariante y atrae a B .*
2. *Si $\{T(t) : t \geq 0\}$ es asintóticamente compacto, para cada acotado B de X , existe un tiempo $\tau = \tau(B) \geq 0$ tal que $T(\tau + t)B$ es acotado para todo $t \geq 0$. Además, si B es conexo, $\omega(B)$ también lo es.*

Demostración:

1. Por la Definición 2.2.3. $\omega(B)$ es no vacío. Tomando $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \omega(B)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un u_n en B y un tiempo $t_n > 0$ tales que

$$\text{dist}(v_n, T(t_n)u_n) \leq \frac{1}{n}. \quad (2.4)$$

En primer lugar, vamos a probar la compacidad. Como $\{T(t) : t \geq 0\}$ es asintóticamente compacto, podemos encontrar dos subsucesiones, que llamaremos de nuevo $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de manera que $T(t_n)u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$, para cierto $u \in \omega(B)$. Usando (2.4) deducimos que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$. Por tanto, $\omega(B)$ es compacto.

Probemos ahora la invarianza por doble contención. Tomemos $T(t)y \in T(t)\omega(B)$. Tenemos que existen sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en B y $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ tal que $T(t_n)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Entonces,

$$T(t)T(t_n)x_n = T(t + t_n)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T(t)y,$$

y $T(t)y \in \omega(B)$.

Sea ahora $x \in \omega(B)$. Como en el caso anterior, existen unos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en B y $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ de manera que $T(t_n)x_n$ converge a x . Por compacidad, $\{T(t_n - t)x_n : t_n > t\}_{n \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente, que llamaremos igual, a cierto $y \in \omega(B)$. Entonces, $T(t)T(t_n - t)x_n = T(t_n)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Como tenemos que $T(t_n)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T(t)y$, $x = T(t)y \in T(t)\omega(B)$, lo que prueba la invarianza.

Finalmente, veamos que atrae a B . Para ello, supongamos que existe un $\epsilon > 0$, una sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ y unos tiempos $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ tales que $\text{dist}(T(t_n)u_n, \omega(B)) > \epsilon$. Gracias a la compacidad asintótica, podemos tomar una subsucesión convergente a un punto $y \in X$, pero esto es imposible porque, por construcción, $\text{dist}(y, \omega(B)) > \epsilon$ y, por otro lado, y está en $\omega(B)$. Con esto llegamos a que $\omega(B)$ atrae a B .

2. Supongamos que existe una sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ y unos tiempos $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ de manera que $\text{dist}(u_0, T(t_n)u_n)$ diverge a infinito para todo $u_0 \in X$. Sin embargo, esto contradice la propia definición de semigrupo asintóticamente compacto. La demostración de que el conjunto $\omega(B)$ es conexo es análoga a la demostración del Teorema 2.2.2.

□

Teorema 2.2.5 *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo en X . Entonces, $\{T(t) : t \geq 0\}$ posee atractor global \mathcal{A} si y sólo si es asintóticamente compacto y disipativo. Además, en ese caso, si \mathcal{B} denota la colección de todos los subconjuntos acotados no vacíos de X , entonces el atractor viene dado por*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B). \quad (2.5)$$

Demostración: Supongamos primeramente que exista el atractor global \mathcal{A} para $\{T(t) : t \geq 0\}$. Entonces, necesariamente $\{T(t) : t \geq 0\}$ es disipativo. Para ver que también es asintóticamente compacto, sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada de puntos de X y $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números no negativos con $t_n \rightarrow \infty$.

Por un lado, considerando el conjunto acotado $B := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(T(t_n)B, \mathcal{A}) = 0,$$

y, en particular, para todo $x' \in B$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(T(t_n)x', \mathcal{A}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(T(t_n)B, \mathcal{A}) = 0 \quad (2.6)$$

Entonces, aplicando simplemente la definición de límite de sucesiones en (2.6), para cada $j \in \mathbb{N}$ se puede encontrar un punto $z_j \in \mathcal{A}$ de manera que

$$d(T(t_{n_j})x_{n_j}, z_j) < \frac{1}{j}. \quad (2.7)$$

Ahora, como A es un conjunto compacto, la sucesión $(z_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente. Denotando dicha subsucesión de la misma manera, sea $x \in \mathcal{A}$ su límite. Entonces, por (2.7),

$$d(T(t_{n_j})x_{n_j}, x) \leq d(T(t_{n_j})x_{n_j}, z_j) + d(z_j, x) < \frac{1}{j} + d(z_j, x)$$

es decir, $T(t_{n_j}x_{n_j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x$, probando la compacidad asintótica de $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Recíprocamente, supongamos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ es asintóticamente compacto y disipativo. Sea $\mathcal{A} := \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B)$ el conjunto definido en (2.5) y probemos que \mathcal{A} es, efectivamente, el atractor global de $\{T(t) : t \geq 0\}$.

En primer lugar, notemos que para cada $B \in \mathcal{B}$, el conjunto $\omega(B)$ es no vacío, compacto, invariante y atrae a B por la acción de $T(\cdot)$. De ahí, vemos que \mathcal{A} es invariante, por ser unión de conjuntos invariantes, y además, atrae a todos los acotados de X por medio de $T(\cdot)$. Luego, el teorema quedará demostrado en cuanto probemos la compacidad de \mathcal{A} , lo que haremos usando la disipatividad de $\{T(t) : t \geq 0\}$.

En efecto, sea $D \subset X$ un subconjunto acotado que absorbe a todos los subconjuntos acotados de X por medio de $T(\cdot)$. Tomando la clausura de D , si hiciera falta, podemos suponer que D es cerrado, entonces su propiedad de absorción junto con el hecho de que $\omega(B)$ es el menor conjunto cerrado de X que atrae a B , nos dicen que $\omega(B) \subset D$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Luego $\mathcal{A} \subset D$ y por tanto $\overline{\mathcal{A}} \subset D$ lo que implica que $\omega(\overline{\mathcal{A}}) \subset \omega(D)$. Como \mathcal{A} es invariante se tiene que $\mathcal{A} \subset \omega(\overline{\mathcal{A}})$ y así se puede concluir la cadena de inclusiones

$$\mathcal{A} \subset \omega(\overline{\mathcal{A}}) \subset \omega(D) \subset \mathcal{A},$$

y consecuentemente $\omega(D) = \mathcal{A}$, concluyendo la compacidad de \mathcal{A} .

□

Teorema 2.2.6 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo acotado, es decir, dado un conjunto acotado B en X , el conjunto $\{T(t)B : t \geq 0\}$ es acotado. Supongamos que $T(t)$ se puede descomponer en dos semigrupos de la forma $T(t) = W(t) + U(t)$ donde:*

1. $\{W(t) : t > 0\}$ es una familia de operadores de X tales que para todo $B \subseteq X$ acotado se tiene que

$$\|W(t)B\|_X \leq m_1(t)m_2(t)(\|B\|_X)$$

con

$$m_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} m_1(t) = 0$$

donde definimos $\|B\|_X = \sup\{\|b\|_X : b \in B\}$.

2. $\{U(t) : t > 0\}$ son tales que para todo $B \subseteq X$ acotado, existe un tiempo $T(B) > 0$ de forma que el conjunto $\{U(t)B : t \geq T(B)\}$ es relativamente compacto, es decir, dada una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ y $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, existe una subsucesión convergente de $\{U(t_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Entonces el semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ es asintóticamente compacto.

Demostración: Sea $B \subseteq X$ acotado. Por hipótesis, tenemos que $\{T(t)B : t \geq 0\}$ es acotado. Veamos que el conjunto $B_1 = \{T(t_n)x_n : n \geq 1\}$ con $x_n \in B$ y $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ posee una subsucesión convergente. Para ello bastará con que el conjunto sea relativamente compacto por medio de la existencia de una ε -malla finita, siendo $\varepsilon > 0$ cualquiera.

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos un $l > T(B)$ de forma que

$$m_1(l) \leq \frac{\varepsilon}{2m_2(\|\cup_{t \geq 0} T(t)B\|_X)},$$

lo cual es cierto por la condición de que la función $m_1(t)$ vaya a cero cuando el tiempo va a infinito. Descomponemos B_1 en dos conjuntos

$$B'_1 = \{T(t_k)x_k\}_{k=1}^{k_1}, \quad B''_1 = \{T(t_k)x_k\}_{k=k_1+1}^{\infty}$$

con $t_{k_1} < l \leq t_{k_1+1}$.

Tenemos que el conjunto B''_1 es un subconjunto del conjunto acotado $T(l)(\{T(t)B : t \geq 0\})$. Aplicando ahora la descomposición del semigrupo a dicho conjunto obtenemos que el conjunto $U(l)(\{T(t)B : t \geq 0\})$ es relativamente compacto por hipótesis. Por tanto, podemos recubrirlo con una $\frac{\varepsilon}{2}$ -malla finita. Por otro lado, la norma del operador $W(t)$ queda como

$$\begin{aligned} \|W(l)(\cup_{t \geq 0} T(t)B)\|_X &\leq m_1(l)m_2(l)(\|\cup_{t \geq 0} T(t)B\|_X) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2m_2(\|\cup_{t \geq 0} T(t)B\|_X)} m_2(\|\cup_{t \geq 0} T(t)B\|_X) \\ &= \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por consiguiente podemos recubrir al conjunto B_1 por una ε -malla finita, llegando a la conclusión de que es precompacto. \square

2.2.2. Un ejemplo: Las ecuaciones de Lorenz.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x' = -\sigma x + \sigma y \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz, \end{cases} \quad (2.8)$$

con σ, r y b constantes positivas. Estas ecuaciones, denominadas *ecuaciones de Lorenz*, son un ejemplo clásico de existencia de atractor.

Como estamos en \mathbb{R}^3 los conjuntos cerrados y acotados son compactos, por lo tanto sólo necesitamos encontrar un conjunto cerrado, acotado y absorbente para probar la existencia del atractor global. Veamos que existe una bola centrada en $(0, 0, r + \sigma)$ suficientemente grande que absorbe cualquier solución del sistema (2.8).

Consideramos la función $V(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2$. Si consideramos ahora $V(t) = V(x(t), y(t), z(t))$ donde $(x(t), y(t), z(t))$ es una solución de la ecuación de Lorenz, su derivada temporal es

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2xx' + 2yy' + 2(z - r - \sigma)z' \\ &= 2x(-\sigma x + \sigma y) + 2y(rx - y - xz) + 2(z - r - \sigma)(xy - bz) \\ &= -2\sigma x^2 - 2y^2 - 2bz^2 + 2b(r + \sigma)z \\ &\leq -\alpha V + b(r + \sigma)^2 \end{aligned}$$

donde $\alpha = \min(2\sigma, b, 2)$.

Aplicando la desigualdad de Gronwall,

$$\begin{aligned} V(t) &\leq \left(V_0 - \frac{b(r + \sigma)^2}{\alpha} \right) e^{-\alpha t} + \frac{2b(r + \sigma)^2}{\alpha} \\ &\leq V_0 e^{-\alpha t} + \frac{2b(r + \sigma)^2}{\alpha}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

siendo $V_0 = V(x_0, y_0, z_0)$ los datos iniciales del problema. Tenemos que si $|z| < r + \sigma$, entonces $\|(x, y, z)\|_{\mathbb{R}^3} \leq V(x, y, z)$, por lo tanto

$$\|x(t), y(t), z(t)\|_{\mathbb{R}^3} \leq V_0 e^{-\alpha t} + \frac{2b(r + \sigma)^2}{\alpha}.$$

Por consiguiente, si consideramos la bola B de centro $(0, 0, r + \sigma)$ y radio $\varepsilon + \frac{2b(r + \sigma)^2}{\alpha}$ (con $\varepsilon > 0$), tenemos que cuando una solución entra en esta bola, permanece en ella para todo tiempo posterior. Por otro lado, si la solución comienza fuera de dicha bola, debido a (2.9), el valor de $V(t)$ irá disminuyendo hasta que la solución entre de nuevo en B .

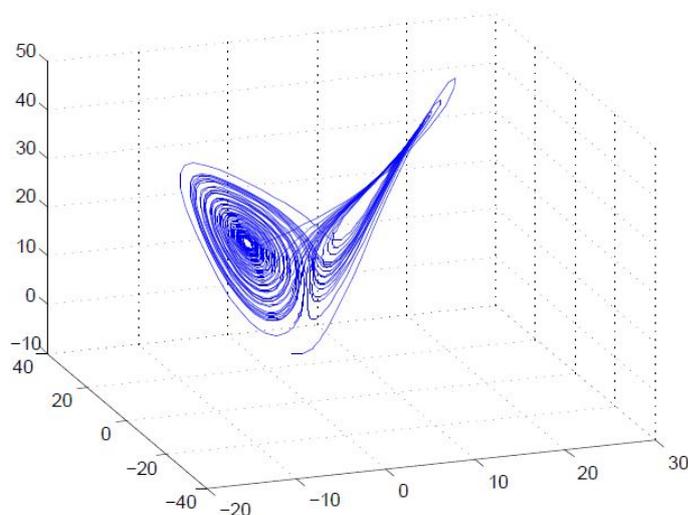


Figura 2.2: Atractor de Lorenz para el sistema (2.8) con valores $\sigma = 10$, $r = 28$ y $b = \frac{8}{3}$ y con valor inicial $(-1, 3, -1)$. Podemos observar la clásica estructura de alas de mariposa (ver Lorenz [13]).

2.3. Estructura del atractor global

En este apartado veremos cómo relacionar el atractor global con las variedades inestables de los puntos de equilibrio del sistema. Pero antes veamos que todas las soluciones globales acotadas están en el atractor. Llamaremos *solución global para el semigrupo* $\{T(t) : t \geq 0\}$ en X (o también órbita completa) a toda familia $\{\xi(t) : t \in \mathbb{R}\}$ tal que para cualquier $t \in \mathbb{R}$, $\xi(t) = T(t+s)\xi(s)$ para todo $s < t$.

Corolario 2.3.1 *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo de X y supongamos que posee atractor global \mathcal{A} . Entonces, \mathcal{A} es la unión de todas las soluciones globales acotadas.*

Veamos la definición de variedades estables e inestables del sistema y su relación con el atractor.

Definición 2.3.2 *Sea $x \in X$. Llamaremos variedad inestable de x al conjunto*

$$W^u(x) = \{y \in X : \text{existe una solución global } \xi(\cdot) \text{ y un } t_0 \in \mathbb{R} \\ \text{tal que } \xi(t_0) = y, \xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} x\}$$

De la misma forma definimos la variedad estable de x como el conjunto

$$W^s(x) = \{y \in X : T(t)y \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x\}$$

Sea el conjunto $D \subseteq X$, variedad inestable del conjunto D se define como

$$W^u(D) = \{y \in X : \text{existe una solución global } \xi(\cdot) \text{ y un } t_0 \in \mathbb{R} \\ \text{tal que } \xi(t_0) = y, \text{dist}(\xi(t), D) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0\}$$

La variedad estable del conjunto D es

$$W^s(D) = \{y \in X : \text{dist}(T(t)y, D) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0\}$$

Teorema 2.3.3 Sea $K \subseteq X$ un compacto invariante, entonces tenemos que $W^u(K) \subseteq \mathcal{A}$.

Demostración: Sea $x \in W^u(K)$. Por definición, x está en una solución global acotada que llamaremos $\xi(t)$. Sabemos que $\text{dist}(\xi(-t), K)$ y $\text{dist}(\xi(t), \mathcal{A})$ tienden a cero cuando $t \rightarrow \infty$, por tanto la órbita es acotada y, por el Corolario 2.3.1, la solución global $\xi(t)$ está en el atractor.

□

Las funciones de Lyapunov juegan un papel importante a la hora de caracterizar la estructura del atractor.

Definición 2.3.4 Sea $D \subseteq X$ un conjunto positivamente invariante, es decir, $T(t)D \subseteq D$ para todo $t \geq 0$. Llamaremos función de Lyapunov de $\{T(t) : t \geq 0\}$ en D a toda función $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple,

1. Para cada $x \in D$ a función $t \mapsto \Phi(T(t)x)$ es no creciente.
2. Si $\Phi(T(\tau)x) = \Phi(x)$ para todo $\tau > 0$ entonces x es un punto fijo, es decir, $T(t)x = x$ para todo $t > 0$.

Teorema 2.3.5 Sea \mathcal{E} el conjunto de los puntos fijos del semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ y supongamos que dicho semigrupo posee una función de Lyapunov en un conjunto \tilde{B} que es positivamente invariante y absorbente. Entonces $\omega(u_0) \subseteq \mathcal{E}$, para todo $u_0 \in X$. En particular, si X es conexo y \mathcal{E} es discreto, $\omega(u_0) \in \mathcal{E}$.

Demostración: Para cada $u_0 \in X$, existe un t_0 de modo que $u_1 = T(t_0)u_0 \in \tilde{B}$. Como $\omega(u_0) = \omega(u_1)$, consideramos la trayectoria que

empieza en u_1 , $u(t) = T(t)u_1$. Esto implica que $u(t) \in \tilde{B}$, para todo $t \geq 0$ y que

$$\omega(u_0) = \bigcap_{s>0} \{T(t)u_0 : t \geq s\}$$

es no vacío, compacto e invariante (Proposición 2.1.11).

Por otro lado, Φ es constante en el conjunto $\omega(u_0)$ ya que, por (1),

$$\Phi|_{\omega(u_0)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(T(t)u_0) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \Phi(T(t)u_0).$$

Este límite existe porque Φ es acotada inferiormente al ser $T(t)u_0$ un subconjunto acotada y Φ no creciente. Por la condición (2) de la Definición 2.3.4, el conjunto $\omega(u_0)$ consiste sólo en puntos fijos de $\{T(t) : t \geq 0\}$, es decir, $\omega(u_0) \subseteq \mathcal{E}$. Si suponemos que X es conexo (por lo tanto lo es también el conjunto ω -límite de u_0) y \mathcal{E} discreto, entonces $\omega(u_0)$ sólo puede ser un punto.

□

El siguiente teorema muestra cuál es la estructura del atractor cuando exista una función de Lyapunov.

Teorema 2.3.6 *Supongamos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ tiene una función de Lyapunov Φ en \mathcal{A} . Entonces*

$$\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E}). \quad (2.10)$$

Si, además, \mathcal{A} es conexo y \mathcal{E} discreto, se tiene que

$$\mathcal{A} = \bigcup_{z \in \mathcal{E}} W^u(z). \quad (2.11)$$

Demostración: Para empezar demostraremos que $W^u(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$. Gracias al Teorema 2.3.3, tenemos que $W^u(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$. Para el recíproco, sea $u \in \mathcal{A}$, por tanto podemos definir una solución global $\{\xi(t) : t \in \mathbb{R}\}$ en la que se encuentre u . Como toda la solución está en el atractor tenemos que $\text{dist}(\xi(-t)u, \mathcal{E}) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, por tanto $u \in W^u(\mathcal{E})$.

Asumamos ahora que \mathcal{E} es discreto y que \mathcal{A} es conexo. De esto se deduce que $\gamma(u)$ es conexo (al serlo \mathcal{A}). Como $\gamma(u) \subseteq \mathcal{E}$ sólo puede ser un punto, obtenemos (2.11).

□

Conocer la dinámica del atractor es importante pues nos dará información sobre la dinámica global. El siguiente resultado muestra cómo las trayectorias fuera del atractor se acercan tanto como queramos a ciertas “trayectorias globales”.

Proposición 2.3.7 *Dada una trayectoria $u(t) = T(t)u_0$, un $\mathcal{E} > 0$ y un tiempo $T_0 > 0$, existe un tiempo $\tau = \tau(\mathcal{E}, T_0) > 0$ y un punto $v_0 \in \mathcal{A}$ tales que*

$$\|u(\tau + t) - T(t)v_0\|_X \leq \mathcal{E}$$

para todo tiempo t que verifica $0 \leq t \leq T_0$.

Demostración: Como las trayectorias dependen de forma continua de los datos iniciales, dado un ε y un T_0 positivos, existe un $\delta(\varepsilon, T_0)$ de forma que dado un $u_0 \in X$ y un $v_0 \in \mathcal{A}$ con $\|u_0 - v_0\|_X < \delta$, $\|u(t) - v(t)\|_X \leq \varepsilon$. Como \mathcal{A} es compacto y atractor, existe un tiempo τ y un $v_0 \in \mathcal{A}$ de forma que $\text{dist}(u(\tau), \mathcal{A}) = \|u(\tau) - v_0\| < \delta$. Como la trayectoria $v(t) = T(t)v_0$ está en el atractor para todo tiempo, tenemos que $\|u(\tau + t) - T(t)v_0\|_X \leq \varepsilon$ con $t \in [0, T_0]$. □

Corolario 2.3.8 *Dada una trayectoria $u(t) = T(t)u_0$, existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ que tiende a cero, una sucesión de tiempos $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $t_{n+1} - t_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ y una sucesión de puntos del atractor \mathcal{A} , $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ de modo que*

$$\|u(t) - T(t - t_n)v_n\|_X \leq \varepsilon_n,$$

para todo $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Además, los saltos $\|v_{n+1} - T(t_{n+1} - t_n)v_n\|_X$ decaen hacia cero.

Demostración: Sabemos por el teorema anterior que dado un ε_1 y un tiempo T_0 , existe un tiempo t_1 y un elemento $v_1 \in \mathcal{A}$ de forma que

$$\|u(t_1 + t) - T(t)v_1\|_X \leq \varepsilon_1,$$

para todo $t \in [0, T_0]$.

Definimos $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{2}$. Por tanto, para ε_2 y $2T_0$, existe un punto $v_2 \in \mathcal{A}$ que verifique que

$$\|u(t_2 + t) - T(t)v_2\|_X \leq \varepsilon_2,$$

para todo $t \in [0, 2T_0]$.

Podemos iterar este proceso tantas veces como queramos. Como desde $u(t_1)$ hasta $u(t_2)$ podemos llegar con una serie finita de intervalos de longitud T_0 y en cada intervalo ocurre lo mismo, al hacer el cambio de variable $t' = t_n + t$ tenemos que se cumple (2.10) (con abuso de notación).

Veamos que los errores decaen a cero:

$$\|v_{k+1} - T(t_{k+1} - t_k)v_k\|_X \leq \|v_{k+1} - u(t_{k+1})\|_X + \|u(t_{k+1}) - T(t_{k+1} - t_k)v_k\|_X.$$

El primer sumando del lado derecho es menor que ε_{k+1} ya que estamos en la situación en la que $t = t_{k+1}$. Análogamente el segundo sumando es menor que ε_k , por lo que tenemos que los saltos tienden a cero.

□

Capítulo 3

Procesos de evolución y atractores pullback

En este capítulo vamos a establecer las definiciones, conceptos básicos y resultados de existencia para los atractores pullback dentro del marco de los procesos de evolución. Nuestro objetivo será generalizar los resultados ya mostrados en la primera sección del Capítulo 2, así como los resultados de existencia de atractores globales basados en conjuntos absorbentes compactos y semigrupos asintóticamente compactos. En la Sección 3.1 motivaremos el estudio de los atractores pullback por medio de ejemplos concretos que nos servirán para fijar ideas dentro de este marco. En la Sección 3.2 se incluirán las definiciones necesarias para la generalización a los procesos de evolución para, posteriormente en la Sección 3.3, mostrar los resultados básicos de existencia de estos atractores. Finalmente, en la Sección 3.4 introduciremos otro tipo de atracción en sentido pullback por medio de las bases de atracción. Todos, o parte de estos resultados pueden estudiarse en Caraballo et al. [1], Carvalho et al. [2], Cheban [4], Cheban et al. [5], Chepyzhov & Vishik [6], Kloeden & Rasmussen [10], Rivero [16], Sell [19], Wang et al. [21].

3.1. Introducción.

Los problemas no autónomos son aquellos en los que aparece la acción de las fuerzas externas o coeficientes variables a lo largo del tiempo en el modelo. Esto provoca una dependencia temporal directa de las soluciones tanto del tiempo final como del inicial. Dicha variabilidad puede aparecer tanto en el término lineal como en la parte no lineal.

A continuación, vamos a considerar un caso sencillo para fijar algunas ideas sobre las cuales se basarán las nuevas definiciones. Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + t \\ x(s) = x_s. \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $x_s \in \mathbb{R}$.

Resolvemos dicho problema de valores iniciales y observamos que su única solución viene dada por

$$x(t, s; x_s) = (x_s + 1 - s)e^{-(t-s)} + t - 1. \quad (3.2)$$

Si hacemos tender el tiempo final t hacia infinito, la solución, la cual existe para todo $t \in \mathbb{R}$, crece de manera indefinida; es decir, no existe ningún conjunto absorbente. Aunque se sabe que la presencia del término $-x(t)$ da cierta disipatividad al sistema, la teoría clásica no proporciona información alguna sobre cómo influye esta disipatividad en el comportamiento asintótico del sistema. Si efectuamos la diferencia entre dos soluciones $x(t), y(t)$ correspondientes a diferentes datos iniciales x_s, y_s , obtenemos que

$$\frac{d}{dt}(x(t) - y(t)) = -(x(t) - y(t))$$

y

$$x(t) - y(t) = e^{-(t-s)}(x_s - y_s)$$

Esto pone de manifiesto que, aunque las soluciones crecen de manera indefinida, ambas se acercan entre ellas, ya que la diferencia $|x(t) - y(t)|$ converge a cero cuando $t \rightarrow \infty$. De esta forma, se puede apreciar el efecto disipativo que produce el primer término de la ecuación. Consideremos ahora la familia de conjuntos dependientes del tiempo

$$\mathcal{A}(t) = \{t - 1 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces, tenemos que

1. $x(t, s; \mathcal{A}(s)) = \mathcal{A}(t)$
2. $\text{dist}(x(t, s, x_0), \mathcal{A}(t)) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$.

Esta es la idea de atractor para sistemas no autónomos: una familia de conjuntos, no necesariamente acotada, que atrae a las soluciones en algún sentido. En este caso, la familia $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es el resultado de hacer tender el tiempo inicial s hacia $-\infty$ en la solución $x(t, s; x_s)$ de (3.1). Esto es lo que vamos a definir como dinámica en sentido pullback. En la Figura 3.1 podemos ver la dinámica de este sistema cuando consideramos tiempos iniciales cada vez más alejados con el mismo dato inicial.

Para estudiar esta dinámica se necesitará una generalización del concepto de semigrupo, visto anteriormente, ya que nuestras soluciones dependen explícitamente del tiempo inicial y final. Es lo que vamos a denominar **procesos de evolución**, que son familias de operadores que van a representar

la solución del sistema no autónomo asociado. También vamos a definir la dinámica hacia adelante o forward, siendo ésta la dinámica cuando fijamos el tiempo inicial s y desplazamos el tiempo final t hacia infinito. Pero estas dos dinámicas, aunque en el caso autónomo son iguales, no tienen por qué estar relacionadas.

Consideremos los dos siguientes problemas,

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -2ty_1(t) + 2t^2, \\ y_2'(t) &= 2ty_2(t) + 2t^2. \end{aligned}$$

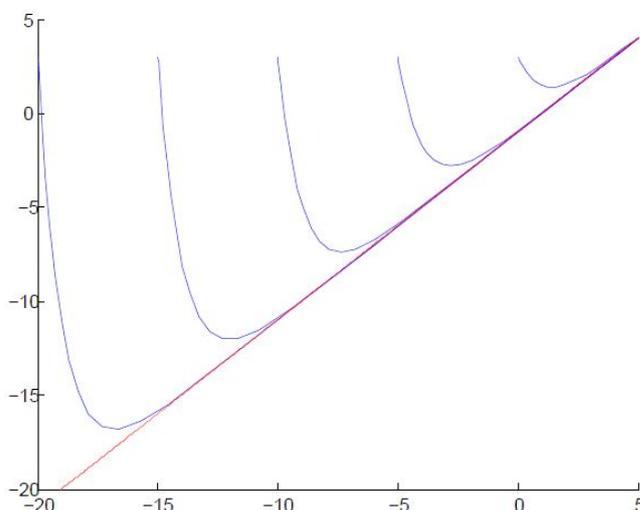


Figura 3.1: Solución del sistema (3.1) con dato inicial $x_s = 3$ para distintos tiempos iniciales s . Podemos observar cómo las soluciones están cada vez más cerca de la familia $\{t - 1 : t \in \mathbb{R}\}$ cuanto más alejado está el tiempo inicial s del tiempo final $t = 5$.

Ambos pueden resolverse de manera explícita con dato inicial $y_0 \in \mathbb{R}$ y tiempo inicial $s \in \mathbb{R}$, obteniendo como soluciones

$$\begin{aligned} y_1(t, s) &= (y_0 - s)e^{-(t^2 - s^2)} + t - e^{-t^2} \int_s^t e^{r^2} dr, \\ y_2(t, s) &= (y_0 - s)e^{t^2 - s^2} - t + e^{t^2} \int_s^t e^{-r^2} dr. \end{aligned}$$

En el primer caso, se puede observar cómo las soluciones se aproximan a la familia $\mathcal{A}_1(t) = t - e^{-t^2} \int_0^t e^{r^2} dr$ cuando $t \rightarrow \infty$, mientras que en el segundo caso, cuando $s \rightarrow \infty$, las soluciones se acercan a la familia

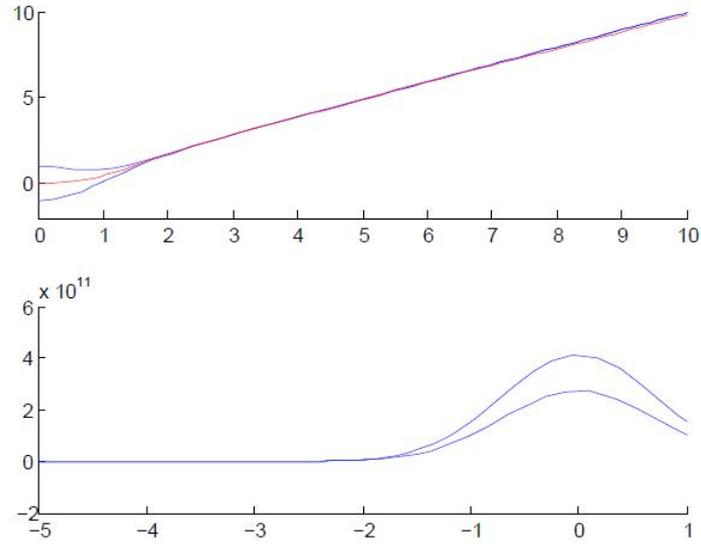


Figura 3.2: En la primera gráfica vemos cómo las soluciones se acercan a la familia $\{\mathcal{A}_1(t) : t \in \mathbb{R}\}$ cuando las soluciones avanzan en tiempo. Sin embargo, en la segunda podemos ver cómo las soluciones crecen exponencialmente cuando nos acercamos a $t = 0$ si el dato inicial está cada vez más alejado.

$\mathcal{A}_2(t) = -t + e^{t^2} \int_{-\infty}^t e^{-r^2} dr$, esto es, en el primer caso tenemos atracción forward y en el segundo atracción pullback. En las Figuras 3.2 y 3.3 tenemos representados estos fenómenos.

3.2. Dinámica pullback

El marco en el que vamos a trabajar para desarrollar la teoría sobre la existencia de atractores pullback es el de los procesos de evolución, los cuales son una generalización del concepto de semigrupo.

Definición 3.2.1 *Sea X un espacio métrico. La familia de aplicaciones $\{S(t, s) : t \geq s\}$ de X en sí mismo se denomina proceso de evolución si verifica*

1. $S(s, s) = Id_X$,
2. $S(t, \tau)S(\tau, s) = S(t, s)$ para todo $s \leq \tau \leq t \in \mathbb{R}$,
3. $(t, s, x) \in \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t \geq s\} \times x \mapsto S(t, s)x \in X$ es continua.

De manera general, se tendrá que $S(t, s)u_s = u(t, s; u_s)$, con $u(t, s; u_s)$ es solución de un sistema no autónomo, el cual comienza u_s en el instante s y

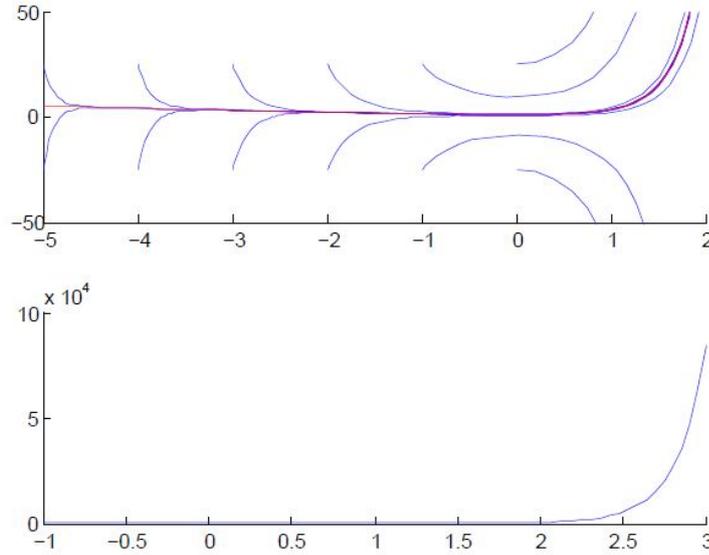


Figura 3.3: En la primera gráfica apreciamos la convergencia a la familia $\{\mathcal{A}_2(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de las soluciones con tiempo final $t = 2$ tomando tiempos iniciales cada vez más alejados. Por otro lado, en la figura inferior vemos que a medida que avanza el tiempo, hay soluciones que se alejan de esta familia si los tiempos iniciales son superiores a -1 .

que evoluciona hasta el tiempo t . Ya que en el caso no autónomo se tiene que el tiempo inicial no interviene de manera implícita en la solución (sólo el tiempo transcurrido), tenemos que $u(t, s; u : s) = u(t - s, 0; u_s)$. Al verlo como un sistema dinámico podemos hacer la equivalencia entre ambos como $S(t, s) = S(t - s; 0) = T(\tau)$ con $\tau = t - s$ y $t \geq s$, por lo que los semigrupos pueden considerarse un caso particular de los procesos de evolución. A estos procesos les denominaremos *procesos autónomos*.

Los conceptos (en sentido pullback) de atracción y disipación son definidos para cada tiempo t , ya que vamos a desplazar el tiempo inicial t a tiempos cada vez anteriores.

Definición 3.2.2 Un conjunto $B(t) \subseteq X$ atrae al conjunto C en tiempo t en sentido pullback bajo el proceso $\{S(t, s) : t \geq s\}$ si

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(t, s)C, B(t)) = 0$$

Una familia $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ atrae conjuntos acotados de X bajo el proceso $\{S(t, s) : t \geq s\}$ si $B(t)$ atrae acotados de X en tiempo t en sentido pullback bajo $\{S(t, s) : t \geq s\}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

La distancia que empleamos, de nuevo, es la semidistancia de Hausdorff. Al variar el tiempo inicial, estamos cambiando de solución, pues ésta depende fuertemente de dicho tiempo, obteniendo distintas configuraciones en el espacio X .

La disipación en sentido pullback también está definida para cada tiempo $t \in \mathbb{R}$. No obstante, vamos a necesitar unas definiciones más fuertes para dar resultados de existencia de atractores pullback tanto en el caso de disipatividad de acotados como en el de disipatividad puntual.

Definición 3.2.3 Sea $\{S(t, s) : t \geq s\}$ un proceso de evolución.

1. Una familia $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ absorbe acotados de X en sentido pullback si $B(t)$ absorbe acotados de X para cada tiempo t , esto es, dado un acotado $C \subseteq X$, existe un tiempo $s_0 = s_0(C, t)$ tal que, para todo $s \leq s_0$, $S(t, s)C \subseteq B(t)$.
2. Si existe una familia de conjuntos acotados $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ que absorbe acotados de X , diremos que el proceso $\{S(t, s) : t \geq s\}$ es disipativo acotado en sentido pullback.
3. Una familia $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ absorbe fuertemente acotados de X en sentido pullback si $B(t)$ absorbe acotados de X para cada tiempo $\tau \leq t$, esto es, para cada $\tau \leq t$ y cada acotado C de X , existe un tiempo $s_0 = s_0(C, \tau)$ tal que para todo $s \leq s_0$, $S(\tau, s)C \subseteq B(t)$.
4. Si existe una familia de conjuntos acotados $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ que absorbe fuertemente acotados de X , diremos que el proceso $\{S(t, s) : t \geq s\}$ es fuertemente disipativo acotado en sentido pullback.

De manera análoga podemos definir los conceptos de proceso (fuertemente) disipativo compacto en sentido pullback y (fuertemente) disipativo puntual en sentido pullback.

Definición 3.2.4 Un proceso de evolución es (fuertemente) acotado en sentido pullback si el conjunto

$$\bigcup_{s \leq t} S(t, s)B \quad \left(\bigcup_{\tau \leq t} \bigcup_{s \leq \tau} S(\tau, s)B \right)$$

es acotado para cualquier conjunto acotado $B \subseteq X$ y para cada $t \in \mathbb{R}$.

El concepto de invarianza desempeña un papel importante a la hora de definir el atractor pullback.

Definición 3.2.5 Sea $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ una familia de conjuntos del espacio X . Dicha familia es invariante bajo el proceso $\{S(t, s) : t \geq s\}$ si $S(t, s)B(s) = B(t)$ para todo $s \leq t \in \mathbb{R}$.

Vamos a ilustrar este concepto usando el siguiente ejemplo. Consideremos la ecuación

$$\begin{cases} x' &= (t^2 + 1) - x^2, t \in \mathbb{R} \\ x(s) &= x_s \in \mathbb{R}, s \leq t. \end{cases} \quad (3.3)$$

Esta es una ecuación de tipo Ricatti, cuya solución de manera explícita viene dada por

$$x(t, s; x_s) = t + \frac{(x_s - s)e^{s^2 - t^2}}{(x_s - s) \int_s^t e^{s^2 - \theta^2} d\theta}$$

Este problema presenta dos soluciones globales, que son

$$x_1(t) = t + \frac{e^{-t^2}}{\int_{-\infty}^t e^{-\theta^2} d\theta} \quad x_2(t) = t.$$

Como se puede apreciar en la Figura 3.4, la familia $\{[x_1(t), x_2(t)] : t \in \mathbb{R}\}$ es invariante ya que toda solución que empieza en su interior, permanece siempre en ella.

Una vez fijado el concepto de familia invariante, estamos ya en las condiciones necesarias para definir el atractor pullback.

Definición 3.2.6 Una familia $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de conjuntos compactos de X se denomina atractor pullback para el proceso de evolución $\{S(t, s) : t \geq s\}$ si verifica que

1. es invariante,
2. atrae conjuntos acotados de X en sentido pullback bajo $\{S(t, s) : t \geq s\}$,
3. es minimal en el sentido de que si existe otra familia de conjuntos cerrados $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de X que atrae acotados en sentido pullback, entonces $A(t) \subseteq C(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

La minimalidad impuesta para el atractor pullback garantiza la unicidad del mismo. Hemos de notar que esta condición no es necesaria en el caso de semigrupos autónomos, donde la minimalidad es una consecuencia de las propiedades de invarianza y atracción de acotados. En el caso de procesos de evolución no autónomos, debido a que, en general, la familia de todos los atractores pullback puede ser no acotada, debemos imponer dicha condición.

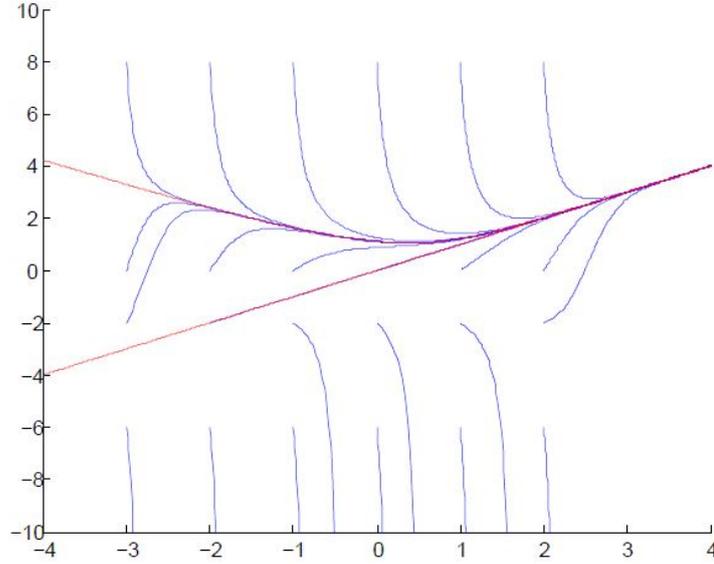


Figura 3.4: Figura correspondiente a las soluciones de (3.3) para tiempo final $t = 4$, tiempos iniciales $s = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ y datos iniciales $x_s = -6, -2, 0, 8$.

Veamos la siguiente definición que generaliza el concepto de conjunto ω -límite que vimos en el caso autónomo.

Definición 3.2.7 Dado un conjunto $B \subseteq X$, llamaremos conjunto ω -límite de B en sentido pullback al conjunto

$$\omega(B, t) = \{y \in X : \text{existen } \{s_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ con } s_k \rightarrow -\infty \text{ y } \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ tal que } y = \lim_{k \rightarrow \infty} S(t, s_k)x_k\} \quad (3.4)$$

Equivalentemente, podemos definir el conjunto ω -límite como

$$\omega(B, t) := \overline{\bigcup_{\sigma \leq t} S(t, s)B}. \quad (3.5)$$

Estos conjuntos representan todos los puntos límite en sentido pullback del proceso $\{S(t, s) : t \geq s\}$ para el conjunto B . Si el conjunto B fuese un conjunto puntual, es decir, $B = \{b\}$, el conjunto $\omega(b, t)$ de b en el tiempo t estaría formado por todos los puntos de acumulación determinados por el límite de $S(t, s)b$ cuando $s \rightarrow -\infty$.

Diremos que $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ es una *órbita o solución global* para $\{S(t, s) : t \geq s\}$ si para todo par de números reales $s \leq t$, $\xi(t) = S(t, s)\xi(s)$, donde entendemos

como órbita desde s hasta t que comienza en $x \in X$ a la función $\xi : [s, t] \rightarrow X$ con $\xi(t) = S(\tau, s)x$, $\tau \in [s, t]$.

Proposición 3.2.8 *Sea $B \subseteq X$ un conjunto acotado. Si para cada $t \in \mathbb{R}$ los conjuntos $\omega(B, t)$ son compactos y atraen a B en sentido pullback, entonces la familia $\{\omega(B, t) : t \in \mathbb{R}\}$ es invariante.*

Demostración: Sea $B \subseteq X$ un conjunto no vacío, entonces, gracias a la continuidad del proceso de evolución y a (3.4), tenemos que $S(t, s)\omega(B, s) \subseteq \omega(B, t)$. Si además $\omega(B)$ es compacto y atrae a B en sentido pullback en el tiempo s , entonces obtenemos la igualdad entre ambos conjuntos, $S(t, s)\omega(B, s) = \omega(B, t)$. Para obtener esta segunda inclusión, por definición tenemos que dado un $x \in \omega(B, t)$, existen sucesiones $\sigma_k \rightarrow \infty$ con $\sigma_k \leq t$ y $x_k \in B$ tales que $S(t, \sigma_k)x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$. Como $\sigma_k \rightarrow -\infty$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma_k \leq s$ para todo $k \geq k_0$. Por la compacidad de $\omega(B, s)$ y gracias a que atrae a B en tiempo s , la distancia entre $S(s, \sigma_k)x_k$ y el conjunto $\omega(B, s)$ converge a 0 cuando $s \rightarrow -\infty$. Es fácil ver que $\{S(s, \sigma_k)x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente (que llamaremos $S(s, \sigma_k)x_k$ para cierto $y \in \omega(B, s)$). De nuevo, por la continuidad del proceso $S(t, s)y = x$, obteniendo la igualdad que buscamos.

□

Lema 3.2.9 *Si $\omega(B, t)$ atrae en sentido pullback al conjunto C de X en tiempo t y C es un conjunto conexo que contiene a $\bigcup_{s \leq t} \omega(B, s)$, entonces $\omega(B, t)$ es también conexo.*

Demostración: Supongamos que $\omega(B, t)$ no es conexo, entonces $\omega(B, t)$ es unión disjunta de dos conjuntos cerrados y, al estar dentro de un compacto, compactos (por tanto, están separados por una distancia positiva). Pero $\omega(B, t)$ atrae a C , lo que es imposible por el hecho de que $S(t, s)C$ es conexo y contiene a $\omega(B, t)$.

□

La medida de no-compacidad de Kuratowski es un concepto que necesitaremos para las demostraciones de los resultados de existencia.

Definición 3.2.10 *Sea M un espacio métrico y $A \subseteq M$. Definimos la medida de no-compacidad de Kuratowski de A como el ínfimo de los valores de los diámetros de los conjuntos que recubren a A de manera finita, esto es*

$$\gamma(A) = \inf\{\delta > 0 : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i, \text{diam}(B_i) \leq \delta\}.$$

siendo $\text{diam}(B)$ el diámetro del conjunto B bajo la norma inducida en M .

Lema 3.2.11 *Sea M un espacio métrico completo y γ la medida de no-compacidad de Kuratowski. Entonces,*

1. $\gamma(B) = 0$ si y sólo si \overline{B} es compacto;
2. Si M es un espacio de Banach y $B_1, B_2 \subseteq M$, entonces tenemos $\gamma(B_1 + B_2) \leq \gamma(B_1) + \gamma(B_2)$;
3. Si $B_1 \subseteq B_2$, entonces $\gamma(B_1) \leq \gamma(B_2)$;
4. $\gamma(B_1 \cup B_2) \leq \max\{\gamma(B_1), \gamma(B_2)\}$;
5. $\gamma(\overline{B}) = \gamma(B)$;
6. $\gamma(\kappa B) = |\kappa|\gamma(B)$ para todo $\kappa \in \mathbb{R}$.

3.3. Resultados de existencia

El objetivo de esta sección es mostrar resultados de existencia que generalicen los aparecidos en el capítulo anterior, pero para los atractores pullback.

El siguiente resultado muestra la existencia del atractor pullback condicionada a la existencia de una familia de conjuntos compactos que absorbe en sentido pullback a los conjuntos acotados de nuestro espacio de fases X .

Teorema 3.3.1 *Sea $\{S(t, s) : t \geq s\}$ un proceso de evolución en un espacio métrico X . Sea $\{K(t) : t \in \mathbb{R}\}$ una familia de conjuntos compactos de X tal que es absorbente en sentido pullback. Entonces existe el atractor pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$, el cual se expresa como*

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup\{\omega(B, t) : B \subseteq X, B \text{ acotado}\}} \quad (3.6)$$

Demostración: Gracias a (3.4), tenemos que para todo conjunto acotado B de X , $\omega(B, t) \subseteq K(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, lo que nos garantiza la compacidad de estos conjuntos.

Supongamos ahora que $\omega(B, t)$, no atrae al conjunto B . Por tanto, existe un $\varepsilon > 0$ y unas sucesiones $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $s_n \rightarrow -\infty$, y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en B tales que

$$\text{dist}(S(t, s_n)x_n, \omega(B, t)) > \varepsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Al tener que $S(t, s)B \subseteq K(t)$ para todo tiempo $s < s_0$ para cierto $s_0 \leq t$, tenemos que la sucesión $\{S(t, s_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión que converge a un punto x_0 que está, por definición, en $\omega(B, t)$, lo que es una contradicción. Esto nos asegura que $S(t, s)\omega(B, s) = \omega(B, t)$ y,

por tanto, la compacidad y la invarianza de los conjuntos $\mathcal{A}(t)$ y que la familia definida en (3.6) atrae a los acotados de X en sentido pullback.

Supongamos ahora que existe otra familia de cerrados $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ tales que atraen a los acotados de X . Sea $x \in \omega(B, t)$, por tanto existe unas sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como las anteriores tales que $S(t, s_n)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Como $C(t)$ atrae acotados y es cerrado, llegamos a la conclusión de que $x \in C(t)$, por tanto, $\overline{\omega(B, t)} \subseteq C(t)$ para todo B acotado. Obviamente, esto implica que $\mathcal{A}(t) \subseteq C(t)$.

□

3.3.1. Procesos asintóticamente compactos en sentido pullback

Definición 3.3.2 *Se dice que el proceso de evolución $\{S(t, s) : t \geq s\}$ es asintóticamente compacto en sentido pullback si para cada tiempo $t \in \mathbb{R}$, cada sucesión $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en $(-\infty, t]$ y cada sucesión acotada $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en X tales que*

- $s_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -\infty$ y
- $\{S(t, s_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ es acotada,

la sucesión $\{S(t, s_k)x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente.

Este concepto es la generalización natural del concepto de compacidad asintótica de semigrupos para procesos de evolución, ya que si tenemos un proceso autónomo dicha definición es la clásica para semigrupos asintóticamente compactos, y nos va a permitir obtener ciertas propiedades de los conjuntos ω -límite de los conjuntos acotados de nuestro espacio X .

Lema 3.3.3 *Si $\{S(t, s) : t \geq s\}$ es asintóticamente compacto en sentido pullback y $B \subseteq X$ es un conjunto acotado y no vacío tal que el conjunto*

$$\overline{\bigcup_{\tau \leq s_0} S(t, \tau)B}$$

es acotado para cierto $s_0 \in (-\infty, t]$, entonces $\omega(B, t)$ es no vacío, compacto, atrae a B en sentido pullback en el tiempo t y la familia $\{\omega(B, t) : t \in \mathbb{R}\}$ es invariante.

Demostración: La prueba de que el conjunto $\omega(B, t)$ es no vacío es trivial, por lo que veamos que este conjunto es compacto y atrae a B .

Sea $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Por definición, para cada y_k , podemos encontrar un x_k y un s_k tales que $\text{dist}(S(t, s_k)x_k, y_k) < \frac{1}{k}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $s_k > s_{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, y que $s_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -\infty$. Como $\{S(t, s) : t \geq s\}$ es asintóticamente compacto en sentido pullback, existe una subsucesión de $\{S(t, s_k)x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, que denotaremos de la misma forma, convergente a un punto y_0 . Así,

$$\text{dist}(y_k, y_0) \leq \text{dist}(y_k, S(t, s_k)x_k) + \text{dist}(S(t, s_k)x_k, y_0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

lo que prueba la compacidad del conjunto ω -límite.

Supongamos que $\omega(B, t)$ no atrae a B en sentido pullback. Por tanto, existe un $\delta > 0$ y unas sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ y $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{R} con $s_n \rightarrow -\infty$ de manera que $\text{dist}(S(t, s_n)x_n, \omega(B, t)) > \delta$. Por otra parte, existe una subsucesión de $\{S(t, s_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que es convergente a un punto x_0 que están en $\omega(B, t)$ por definición, lo que es imposible.

Gracias a la compacidad y la atracción en sentido pullback, la invarianza de la familia $\{\omega(B, t) : t \in \mathbb{R}\}$ es inmediata. □

En el caso de los procesos de evolución, necesitamos suponer la disipación fuerte en sentido pullback para poder obtener la compacidad de cada conjunto del atractor pullback, ya que, aunque el resultado anterior nos muestra la compacidad de cada conjunto ω -límite, no nos asegura la compacidad de cada conjunto del atractor pullback en (3.6). Lo que podemos asegurar es que son cerrados, atraen a los acotados de X , y que la familia $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es invariante. En el caso finito dimensional, al tener que cada conjunto es cerrado y acotado, obtenemos la compacidad, pero no así en el caso infinito dimensional. Esto muestra una primera diferencia entre la teoría dentro del marco de los procesos de evolución y el marco de los semigrupos.

Teorema 3.3.4 *Supongamos que el proceso de evolución $\{S(t, s) : t \geq s\}$ es fuertemente disipativo en sentido pullback y asintóticamente compacto en sentido pullback. Entonces la familia $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ dada en (3.6) es el atractor pullback. Además*

$$\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s) \text{ es acotado para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

De hecho, si $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es la familia que absorbe fuertemente acotados de X en sentido pullback, $\mathcal{A}(t) = \omega(C(t), t)$ y

$$\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s) \subseteq \overline{C(t)}.$$

Demostración: Por el lema anterior, tenemos que los conjuntos $\mathcal{A}(t)$ son no vacíos, atraen a los acotados del espacio X y la familia $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es invariante respecto del proceso. Supongamos que existe una familia de cerrados $\{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$ que atrae acotados en sentido pullback. Como tenemos que $\omega(B, t) \subseteq D(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo B acotado, tenemos que $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es minimal en el sentido de la definición (3.2.6).

Veamos ahora la compacidad de cada conjunto del atractor. Al estar bajo las condiciones del Lema 3.3.3, tenemos que los conjuntos $\omega(C(t), t)$ son compactos y atraen a $C(t)$ (visto como un conjunto fijo del espacio X). Probemos que $\omega(D, t) \subseteq \omega(C(t), t)$ para cualquier conjunto acotado D del espacio X . Sea $x \in \omega(D, t)$, por tanto existen sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$ y $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ tales que $S(t, s_n)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Sea una sucesión $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{R}}$ con $s_n \leq \tau_n \leq t$ y tal que $\tau_n \rightarrow -\infty$. Como el proceso es fuertemente disipativo en sentido pullback, para cada τ_n existe un s_{n_k} de manera que $S(\tau_n, s)D \subseteq C(t)$ para todo $s \leq s_{n_k}$. Así obtenemos,

$$S(t, s_{n_k})x_{n_k} = S(t, \tau_n)S(\tau_n, s_{n_k})x_{n_k} = S(t, \tau_n)y_n,$$

con $y_n = S(\tau_n, s_{n_k})x_{n_k} \in C(t)$. Con lo que $x \in \omega(C(t), t)$. Como, obviamente, $\omega(C(t), t) \subset \mathcal{A}(t)$, obtenemos que $\mathcal{A}(t) = \omega(C(t), t)$.

Finalmente probemos la acotación en (3.7). Tomemos un punto $y \in \omega(D, \tau)$ con D conjunto acotado de X . Por definición, sabemos que el punto y es el límite de la sucesión $\{S(\tau, s_n)y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para ciertos $y_n \in D$ y $s_n \rightarrow -\infty$. Por otro lado tenemos que para un n_0 suficientemente grande, $S(\tau, s_n)D \subseteq \overline{C(t)}$ para todo $n > n_0$ con $\tau \leq t$, por lo que $y \in \overline{C(t)}$. Esto implica que $\mathcal{A}(t) \subseteq \overline{C(t)}$ para todo $\tau < t$.

□

Teorema 3.3.5 *Sea X un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_X$. Sea $\{S(t, s) : t \geq s\}$ un proceso de evolución fuertemente acotado en sentido pullback tal que se puede descomponer en la suma $S(t, s) = T(t, s) + U(t, s)$, donde $U(t, s)$ es un proceso compacto y existe una función*

$$k : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $k(\sigma, r) \rightarrow 0$ cuando $\sigma \rightarrow \infty$, de manera que para todo $s \leq t$ y $x \in X$ con $\|x\|_X \leq r$, $\|T(t, s)x\|_X \leq k(t - s, r)$. Entonces $\{S(t, s) : t \geq s\}$ es asintóticamente compacto en sentido pullback.

Demostración: Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ con B un conjunto acotado de X y $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$. Sea el conjunto B_t

$$B_t = \bigcup_{s \leq t} \bigcup_{\tau \leq s} S(s, \tau)B, \quad (3.8)$$

el cual es acotado ya que $\{S(t, s) : t \geq s\}$ es fuertemente acotado en sentido pullback. Sea $r > 0$ tal que para todo $x \in B_t, \|x\|_X \leq r$. Definimos ahora los conjuntos

$$J_i = \{S(t, s_n)x_n : n \geq i\}.$$

Para cada x_n tenemos que

$$S(t, s_n)x_n = S(t, \tau_n)S(\tau_n, s_n)x_n \subseteq S(t, \tau_n)B_t,$$

$$\text{con } \tau_n = \frac{t-s_n}{2}.$$

Usando las propiedades de la medida de no-compacidad de Kuratowski (ver Lema 3.2.11) sobre estos conjuntos J_i obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha(J_i) &\leq \alpha(\{T(t, \tau_n)B_r + U(t, \tau_n)B_r : n \geq i\}) \\ &\leq \alpha(\{T(t, \tau_n)B_r : n \geq i\}) \\ &\leq k(t - \tau_i, r) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Como $\alpha(J_1) = \alpha(J_j)$ obtenemos que $\{S(t, s_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto precompacto de X .

□

3.4. Bases de atracción

El estudio de los atractores pullback está muy relacionado con los procesos de evolución estocásticos y los atractores aleatorios. El marco de las bases de atracción trata a los atractores como familias que poseen características afines a las familias de conjuntos que son atraídas en sentido pullback.

Denotemos como \mathcal{M} al conjunto de las aplicaciones desde \mathbb{R} a 2^X (conjunto que representa las partes de X). Por tanto, la aplicación D estará en \mathcal{M} si

$$\begin{aligned} D : \mathbb{R} &\rightarrow 2^X \\ t &\mapsto D(t), \end{aligned}$$

obteniendo la familia de conjuntos $\mathcal{D} = \{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Sean D_1 y D_2 en \mathcal{M} . Entenderemos que $D_1 \subseteq D_2$ si $D_1(t) \subseteq D_2(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Un

subconjunto de D de M se denomina *de inclusión cerrada* si para cualquier $D \in \mathcal{D}$ y $\tilde{D} \in \mathcal{M}$ tales que $\tilde{D} \subseteq D$, se tiene que $\tilde{D} \in \mathcal{D}$.

Definición 3.4.1 *Un subconjunto $\mathcal{D} \in M$ es una base de atracción o universo si es de inclusión cerrada y para todo $D \in \mathcal{D}$ tenemos que $D(t) \neq \emptyset$*

La base de atracción más simple es aquélla en que las familias están formadas por subconjuntos de un mismo conjunto acotado ($D(t) \subseteq B$ de X , para todo $t \in \mathbb{R}$). Sin embargo, en el caso estocástico es común encontrar familias formadas por conjuntos acotados que son distintos unos de otros, incluso familias de conjuntos que no están acotados.

Definición 3.4.2 *Sea $\{S(t, s) : t \geq s\}$ un proceso de evolución en X . Dado un tiempo $t \in \mathbb{R}$, diremos que el conjunto $B(t) \subseteq X$ es \mathcal{D} -atrayente en sentido pullback para $\{S(t, s) : t \geq s\}$ en tiempo t si para toda familia $\{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$ en \mathcal{D} ,*

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(t, s)D(s), B(t)) = 0$$

Una familia $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ se denomina \mathcal{D} -atrayente en sentido pullback para $\{S(t, s) : t \geq s\}$ si el conjunto $B(t)$ lo es para todo $t \in \mathbb{R}$.

De la misma manera podemos definir conceptos como \mathcal{D} -absorción o \mathcal{D} -disipatividad para las bases de atracción.

Definición 3.4.3 *Consideremos el proceso $\{S(t, s) : t \geq s\}$ y sea \mathcal{D} una base de atracción. Se dice que la familia $\{A_{\mathcal{D}}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de X es el \mathcal{D} -atractor pullback para la base de atracción \mathcal{D} si:*

1. *es invariante,*
2. *es \mathcal{D} -atrayente en sentido pullback,*
3. *es minimal en el sentido de que si existe otra familia $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$ que es \mathcal{D} -atrayente en sentido pullback, entonces $A_{\mathcal{D}}(t) \subseteq C(t)$.*

Definición 3.4.4 *Sea $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ una familia en \mathcal{D} . Definimos el conjunto \mathcal{D} - ω -límite pullback como*

$$\omega(B(\cdot), t) = \{x \in X : \text{existen sucesiones } \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ con } s_n \rightarrow -\infty, \\ \text{y } x_n \in B(s_n), \text{ tales que } S(t, s_n)x_n \xrightarrow{s_n \rightarrow -\infty} x\}, \quad (3.9)$$

o equivalentemente como sucesiones

$$\omega(B(\cdot), t) = \bigcap_{\tau \leq t} \bigcup_{s \leq \tau} \overline{S(t, s)B(s)}. \quad (3.10)$$

Definición 3.4.5 Diremos que el proceso $\{S(t, s) : t \geq s\}$ es \mathcal{D} -asintóticamente compacto en sentido pullback si para toda familia $\{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$ y todo tiempo $t \in \mathbb{R}$ tenemos que para cualesquiera $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $s_n \rightarrow -\infty$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D(s_n)$, la sucesión $\{S(t, s_n)x_n\}$ posee alguna subsucesión convergente.

Los siguientes resultados previos son análogos a los establecidos en las secciones anteriores.

Lema 3.4.6 Supongamos que existe un conjunto compacto \mathcal{D} -Datrayerente $K(t)$ en tiempo $t \in \mathbb{R}$. Entonces los conjuntos $\omega(B(\cdot), t)$ son compactos y no vacíos para toda familia $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$. Además $\omega(B(\cdot), t)$ \mathcal{D} -atrae en sentido pullback a $B(t)$.

Demostración: Sea $s_n \rightarrow -\infty$ y $x_n \in B(s_n)$. Veamos que la sucesión $\{S(t, s_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene límite. Como $K(t)$ es \mathcal{D} -atrayerente en tiempo t , existe un n_0 de forma que para cada x_n con $n \geq n_0$ existe un $y_n \in K(t)$ tal que

$$\text{dist}(S(t, s_n)x_n, y_n) < \frac{1}{n}.$$

Al ser $K(t)$ compacto, existe una subsucesión convergente de $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (que denotaremos igual), a un punto $y \in K(t)$. Por tanto

$$\text{dist}(S(t, s_n)x_n, y) \leq \text{dist}(S(t, s_n)x_n, y_n) + \text{dist}(y_n, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ya que ambos sumandos tienden a cero, por lo que $\omega(B(\cdot), t) \neq \emptyset$.

Veamos la compacidad por subsucesiones. Sea $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \omega(B(\cdot), t)$. Por definición, para cada y_n existe un $x_k \rightarrow -\infty$ y $x_k \in B(s_k)$ tales que $S(t, s_k)x_k$ converge a y_n . Como $K(t)$ es \mathcal{D} -atrayerente en tiempo t , para cierto $k_0 \in \mathbb{N}$ existe un punto $x_n^k \in K(t)$ que verifica que $\text{dist}(S(t, s_k)x_k, x_n^k) < \frac{1}{n}$ si $s_k \leq s_{k_0}$. Al estar la sucesión en un compacto, existe una subsucesión convergente (que denotaremos igual) a un punto y en el conjunto. Así

$$\text{dist}(y_n, y) \leq \text{dist}(y_n, S(t, s_k)x_k) + \text{dist}(S(t, s_k)x_k, x_n^k) + \text{dist}(x_n^k, y) \rightarrow 0,$$

con k suficientemente grande. Con lo que obtenemos la compacidad de $\omega(B(\cdot), t)$.

Supongamos a continuación que existe un $\delta > 0$, una sucesión $s_n \rightarrow -\infty$ y unos $x_n \in B(s_n)$ tales que $\text{dist}(S(t, s_n)x_n, \omega(B(\cdot), t)) > \delta$. Como $K(t)$ es \mathcal{D} -atrayerente en tiempo t , existen unos $y_n \in K(t)$ de modo que $\text{dist}(S(t, s_n)x_n, y_n)$ converge a 0 cuando $n \rightarrow \infty$. Por compacidad, existe una subsucesión convergente, que llamaremos igual que la original, a un punto $y \in K(t)$. Por construcción de la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tenemos que $S(t, s_n)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in \omega(B, t)$, pero, por otro lado, $\text{dist}(y, \omega(B, t)) > \delta$, lo que es absurdo.

□

Proposición 3.4.7 *Sea $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ una familia de conjuntos \mathcal{D} -absorbentes en sentido pullback para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces para toda familia $\{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$ tenemos que*

$$\omega(D(\cdot), t) \subseteq \omega(B(\cdot), t).$$

Demostración: Sea $y \in \omega(D(\cdot), t)$. Usando (3.9), existe una sucesión $s_n \rightarrow -\infty$ y unos y_n en $D(s_n)$ de modo que $S(t, s_n)y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Dado un $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 1$ podemos encontrar un s_k tal que $s_k + k < s_0 \leq t$, siendo s_0 tal que $S(t, s)D(s) \subseteq B(t)$ para todo $s < s_0$. Así, $s_k < s_0 - k = s_1 \leq t - k$, por tanto

$$S(t - k, s_k)D(s_k) \subseteq B(t - k),$$

por ser $B(t - k)$ \mathcal{D} -absorbente en tiempo $t - k$. Sea $y_k \in D(s_k)$, entonces $\tilde{y}_k = S(t - k, s_k)y_k \in B(t - k)$. Gracias a las propiedades de $\{S(t, s) : t \geq s\}$

$$S(t, s_k)y_k = S(t, t - k)S(t - k, s_k)y_k = S(t, t - k)\tilde{y}_k.$$

Por otra parte, $S(t, s_k)y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$, por lo que tenemos que y pertenece al conjunto $\omega(B(\cdot), t)$.

□

Proposición 3.4.8 *Sea $\{S(t, s) : t \geq s\}$ \mathcal{D} -asintóticamente compacto en sentido pullback. Entonces para cualquier familia $\{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$ en el universo \mathcal{D} , el conjunto $\omega(D(\cdot), t)$ es no vacío, compacto y \mathcal{D} -atrae a $\{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$.*

Demostración: El conjunto $\omega(D(\cdot), t)$ es obviamente no vacío por hipótesis. Por (3.10) sabemos que $\omega(D(\cdot), t)$ es un conjunto cerrado.

Consideremos la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dentro de $\omega(D(\cdot), t)$. Para cada y_n existe un $s_n \in \mathbb{R}$ y un $x_n \in D(s_n)$ de manera que $\text{dist}(S(t, s_n)x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$. Como $\{S(t, s) : t \geq s\}$ es \mathcal{D} -asintóticamente compacto en sentido pullback, existe una subsucesión, que etiquetaremos como la original, tal que $S(t, s_n)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Así,

$$\text{dist}(y_n, y) \leq \text{dist}(y_n, S(t, s_n)x_n) + \text{dist}(S(t, s_n)x_n, y),$$

por lo que hemos probado que $\omega(D(\cdot), t)$ es compacto.

Supongamos ahora que el conjunto $\omega(D(\cdot), t)$ no \mathcal{D} -atrae en tiempo t a la familia $\{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Por tanto, dados unos $s_n \rightarrow -\infty$ y $x_n \in D(s_n)$ existe

un $\delta > 0$ de forma que $\text{dist}(S(t, s_n)x_n, \omega(D(\cdot), t)) > \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, por la \mathcal{D} -compacidad asintótica, existe una subsucesión convergente de $\{S(t, s_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a un punto x , que, por construcción, está en $\omega(D(\cdot), t)$, lo que es absurdo ya que $\text{dist}(x, \omega(D(\cdot), t)) \geq \delta$.

□

Proposición 3.4.9 *Si el proceso es \mathcal{D} -asintóticamente compacto en sentido pullback, entonces para cualquier familia $\{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$, el conjunto $\omega(D(\cdot), t)$ es invariante.*

Demostración: Es sencillo mostrar que

$$S(t, s)\omega(D(\cdot), s) \subseteq \omega(D(\cdot), t),$$

por lo que probaremos la inclusión recíproca. Sea $y \in \omega(D(\cdot), t)$, por lo que existe una subsucesión $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ y unos $y_n \in D(s_n)$ de manera que $S(t, s_n)y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Por las propiedades del proceso, $S(t, s_n)y_n = S(t, s)S(s, s_n)y_n$, tomando n suficientemente grande para que $s_n \leq s \leq t$. Como el proceso es \mathcal{D} -asintóticamente compacto en sentido pullback, existe una subsucesión de $\{S(s, s_n)y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que denotaremos igual, convergente a un punto $x \in \omega(D(\cdot), s)$. Por tanto,

$$S(t, s_n)y_n = S(t, s)S(s, s_n)y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S(t, s)x.$$

Por otro lado

$$S(t, s_n)y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y,$$

con lo que obtenemos que $y = S(t, s)x$ y $S(t, s)\omega(D(\cdot), s) \subseteq \omega(D(\cdot), t)$.

A continuación vamos a mostrar los resultados análogos de existencia para \mathcal{D} -atractores pullback basados en la existencia de una familia \mathcal{D} -absorbente de conjuntos compactos o un proceso \mathcal{D} -asintóticamente compacto en sentido pullback.

□

Teorema 3.4.10 *Sea el proceso de evolución $\{S(t, s) : t \geq s\}$ definido en el espacio métrico X . Sea $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$ una familia de conjuntos compactos y \mathcal{D} -absorbentes, con \mathcal{D} la base de atracción. Entonces la familia*

$$\{\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) : t \in \mathbb{R}\} = \{\omega(B(\cdot), t) : t \in \mathbb{R}\},$$

es el \mathcal{D} -atractor pullback.

Demostración: Por el Lema 3.4.6 sabemos que $\omega(B(\cdot), t)$ es un conjunto no vacío y compacto para todo $t \in \mathbb{R}$.

Veamos que la familia $\{\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es invariante. Para ello bastará con comprobar que el conjunto $\omega(B(\cdot), t)$ está contenido en $S(t, s)\omega(B(\cdot), s)$. El recíproco es inmediato y obviaremos su demostración. Sea $y \in \omega(B(\cdot), t)$, por tanto existe una sucesión $s_n \rightarrow -\infty$ y unos $y_n \in B(s_n)$ tales que $S(t, s_n)y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Ya que $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es \mathcal{D} -absorbente en sentido pullback, existe un tiempo τ de modo que $S(t, s_n)y_n \in B(t)$ para todo $s_n \leq \tau$. Tomando aquellos s_n menores que s y que τ obtenemos que $S(t, s_n)y_n S(t, s)S(s, s_n)y_n \in B(t)$. Por la compacidad de $B(t)$, existe una subsucesión convergente $S(s, s_n)y_n$ (usando la misma notación) a un punto $x \in \omega(B(\cdot), s)$. Entonces,

$$S(t, s)S(s, s_n)y_n = S(t, s_n)y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y,$$

pero

$$S(t, s)S(s, s_n)y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S(t, s)x.$$

Por tanto $y = S(t, s)x \in S(t, s)\omega(B(\cdot), s)$.

Sea ahora la familia $\{D(t) : t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$. Queremos probar que los $D(t)$ son \mathcal{D} -atraídos por $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t)$ para un $t \in \mathbb{R}$ arbitrario. Como $B(t)$ es \mathcal{D} -absorbente en sentido pullback, existe un tiempo $\tau = \tau(D(\cdot), t)$ de modo que $S(t, s)D(s) \subseteq B(t)$ para todo $s \leq \tau$. Gracias al Lema 3.4.6, $\omega(B(\cdot), t)$ atrae a $B(t)$ y por tanto a $\{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$ en el universo \mathcal{D} .

Supongamos que existe otra familia $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de cerrados que es \mathcal{D} -atrayerente y sea $y \in \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t)$. Por definición tenemos que existen unos $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ y unos $y_n \in B(s_n)$ tales que $S(t, s_n)y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Como $C(t)$ es \mathcal{D} -atrayerente en sentido pullback en tiempo t obtenemos que $\text{dist}(S(t, s_n)y_n, C(t))$ tiende a cero. Gracias a la invarianza de la familia $\{\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) : t \in \mathbb{R}\}$, concluimos que $y \in C(t)$ y, por tanto, $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) \subseteq C(t)$.

□

Teorema 3.4.11 *Sea $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ una familia \mathcal{D} -absorbente pullback. Si el proceso $\{S(t, s) : t \geq s\}$ es \mathcal{D} -asintóticamente compacto en sentido pullback, entonces existe el \mathcal{D} -atractor definido como*

$$\{\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) : t \in \mathbb{R}\} = \{\omega(B(\cdot), t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Demostración: Gracias a las Proposiciones 3.4.8 y 3.4.9, los conjuntos $\omega(B(\cdot), t)$ son compactos, no vacíos y la familia $\{\omega(B(\cdot), t) : t \in \mathbb{R}\}$ es invariante.

Supongamos ahora que existen un tiempo $t \in \mathbb{R}$, una familia $\{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$ y un $\delta > 0$ de modo que $\text{dist}(S(t, s)D(s), \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t)) > \delta$, para todo $s < t$. Sea $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ y $x_n \in D(s_n)$ de modo que la distancia $\text{dist}(S(t, s)x_n, \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t)) > \delta$. Al ser el proceso \mathcal{D} -asintóticamente compacto en sentido pullback, existe una subsucesión convergente de $\{S(t, s_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a un punto $x \in \omega(D(\cdot), t)$. Sin embargo, $\text{dist}(x, \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t)) \geq \delta$, lo que es imposible. Por tanto la familia es \mathcal{D} -atractora en sentido pullback.

Sea la familia $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de cerrados tal que es \mathcal{D} -atrayente en sentido pullback. Sea $y \in \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t)$. Por definición, $S(t, s_n)y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ con $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ e $y_n \in B(s_n)$. Como $C(t)$ es \mathcal{D} -atrayente en tiempo t , $\text{dist}(S(t, s_n)y_n, C(t))$ tiende a cero, por lo que se puede deducir que $y \in C(t)$. Entonces $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t)$ está contenido en $C(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Capítulo 4

Continuidad, estructura y dimensión de los atractores

En este capítulo mostraremos resultados de semicontinuidad superior e inferior de atractores. En la Sección 4.1 probamos resultados de “no explosión” de atractores globales bajo perturbaciones no autónomas, lo que denominamos como semicontinuidad superior. En la Sección 4.2 se tratará la semicontinuidad inferior, que garantiza la “no implosión” de los atractores cuando el semigrupo está afectado por pequeñas oscilaciones de naturaleza no autónoma. En la Sección 4.3 trataremos la propiedad de los atractores de poseer dimensión fractal finita. Finalmente, la Sección 4.4 muestra cómo podemos encontrar una copia de la dinámica de todo el sistema en el interior del atractor (ver Carvalho et al. [2], Carvalho et al. [3], Rivero [16]).

4.1. Semicontinuidad superior de atractores

Sea $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo continuo en un espacio de Banach X , el cual tiene asociado un atractor global \mathcal{A}_0 . Supongamos que tenemos dada una familia de procesos de evolución sobre el mismo espacio X , denotados por $\{S_\eta(t, s) : t \geq s\}$, que verifican las propiedades habituales de los procesos de evolución de la Definición 3.2.1 y, que converge a $T_0(t)$ en el sentido de que

$$\sup_{u_0 \in D} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|S_\eta(t + s, s)u_0 - T_0(t)u_0\|_X \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0, \quad (4.1)$$

uniformemente en $t \in [0, T]$ y $u_0 \in D$ y donde $D \subseteq X$ es cualquier conjunto acotado. Esta convergencia la denotaremos por $S_\eta \rightarrow T_0$. Supongamos también que cada S_η con η suficientemente pequeño posee un atractor pullback $\{\mathcal{A}_\mathcal{D}(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Definición 4.1.1 *Sea $B_0 \subseteq X$ un conjunto acotado y $\{B_\mathcal{D}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ una familia de conjuntos del espacio X que depende del parámetro $\eta \in [0, \eta_0]$.*

Diremos que dicha familia es semicontinua superiormente al conjunto B_0 si

$$\text{dist}(B_\eta(t), B_0) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

La semicontinuidad superior de los atractores pullback no es difícil de probar, y sigue la misma línea argumental que en el caso autónomo.

Teorema 4.1.2 *Supongamos que existe un conjunto acotado B y un parámetro $\eta_0 > 0$ tal que $\mathcal{A}_\eta(t) \subseteq B$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \eta < \eta_0$. Entonces, si $S_\eta \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} T_0$ en el sentido de (4.1), tenemos la semicontinuidad superior del atractor.*

Demostración: Denotemos por $N(U, \varepsilon)$ el ε entorno de U , es decir,

$$N(U, \varepsilon) = \{x \in X : \text{dist}(x, U) < \varepsilon\}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\tau > 0$ tal que

$$T_0(t)B \subseteq N(\mathcal{A}_0, \frac{\varepsilon}{2}) \text{ para todo } t \geq \tau$$

Elegimos η_0 tal que, para todo $u_0 \in B$,

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \|S_\eta(\tau + s, s)u_0 - T_0(\tau)u_0\|_X < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, dado $u \in \mathcal{A}_\eta(t)$ tenemos que $u = S_\eta(t, t - \tau)v$, donde $v \in \mathcal{A}_\eta(t - \tau)$. Como $v \in B$, concluimos que

$$T_0(\tau)v \in N(\mathcal{A}_0, \frac{\varepsilon}{2}), \quad \|S_\eta(t, t - \tau)v - T_0(\tau)v\|_X < \frac{\varepsilon}{2},$$

y, por tanto, $u \in N(\mathcal{A}_0, \varepsilon)$, de donde se concluye el resultado. □

4.2. Semicontinuidad inferior de atractores

Definimos la variedad inestable de una trayectoria completa $x(t)$, $W^u(x(\cdot))(t)$, como

$$W^u(x(\cdot))(s) = \{v \in X : \text{existe una solución global } \xi(\cdot) \text{ y un } t_0 \in \mathbb{R} \\ \text{tal que } \xi(t_0) = v, \xi(t) \text{ dist}(\xi(t), x(t)) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0\}.$$

El siguiente resultado, que garantiza que las variedades inestables de trayectorias acotadas en el pasado deben ser parte del atractor pullback, nos ofrece una primera estructura para el atractor pullback.

Lema 4.2.1 *Supongamos que $x(t)$ es una trayectoria completa y que existe un $M > 0$ de forma que $\|x(t)\|_X \leq M$ para todo $t \leq t_0$ para cierto $t_0 \in \mathbb{R}$. Entonces se tiene que $W^u(x(\cdot))(t) \in \mathcal{A}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Tomemos $v \in W^u(x(\cdot))(s)$. Por definición tenemos que

$$\|S(t, s)v - x(t)\|_X \leq M \text{ para todo } t \leq t_1(s, v),$$

y, por tanto, $\|S(t, s)v\|_X \leq 2M$. Así, para todo $t \leq t^* = \min\{t_0, t_1\}$, $S(t, s)v$ está contenido en el conjunto acotado

$$B = \{x \in X : \|x\|_X \leq 2M\}.$$

Como $\text{dist}(S(s, t)B, \mathcal{A}(s)) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$, se sigue que $v \in \mathcal{A}(s)$.

Al igual que en el caso autónomo, la semicontinuidad inferior para perturbaciones no autónomas de semigrupos necesita de una estructura específica del atractor del problema no perturbado. Supongamos, por tanto, que estamos ante un atractor de tipo gradiente, es decir, un atractor que viene dado como la unión de variedades inestables de un conjunto finito de equilibrios $\{e_j\}_{j=1}^n$,

$$\mathcal{A}_0 = \bigcup_{j=1}^n W^u(e_j). \quad (4.2)$$

La base de nuestro argumento, al igual que en el caso autónomo, es la persistencia de equilibrios y variedades inestables bajo perturbaciones. Estas hipótesis se tienen tanto en el caso autónomo como en el no autónomo.

□

Definición 4.2.2 *Sea $B_0 \subseteq X$ un conjunto acotado y consideremos la familia $\{B_\eta(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de conjuntos del espacio X que dependen del parámetro $\eta \in [0, \eta_0]$. Diremos que dicha familia es semicontinua inferiormente al conjunto B_0 si, para todo $t \in \mathbb{R}$,*

$$\text{dist}(B_0, B_\eta(t)) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0.$$

Probaremos a continuación condiciones suficientes para que los atractores globales sean semicontinuos inferiormente bajo perturbaciones no autónomas.

Teorema 4.2.3 *Supongamos que \mathcal{A}_0 es de tipo gradiente como en (4.2) y que $S_\eta \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} T_0$. Supongamos que los equilibrios $\{e_j\}_{j=1}^n$ de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ y sus variedades inestables varían continuamente, en el sentido de que existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un η_0 de manera que para todo $0 < \eta < \eta_0$ existe una trayectoria completa $e_j^\eta(\cdot)$ de $\{S_\eta(t, s) : t \geq s\}$ con*

$$\sup_{j=1,\dots,n} \|e_j^\eta(t) - e_j\|_X < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

y las variedades inestables se comportan continuamente en un δ entorno de e_j , es decir,

$$\sup_{j=1,\dots,n} \text{dist}_{\mathcal{H}}(W^u(e_j) \cap B(e_j, \delta), W^u(e_j^\eta(\cdot)) \cap B(e_j, \delta)) < \varepsilon,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_\eta(t), \mathcal{A}_0) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0,$$

donde $\text{dist}_{\mathcal{H}}(\cdot, \cdot)$ representa la distancia de Hausdorff.

Demostración: Fijemos $\varepsilon > 0$. Como el Teorema 4.1.2 nos garantiza semicontinuidad superior, sólo tenemos que probar la semicontinuidad inferior, es decir que existe η_0 tal que

$$\text{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta(t)) < \varepsilon \text{ para todo } \eta < \eta_0.$$

Como \mathcal{A}_0 es compacto podemos encontrar un número finito de puntos $\{x_j\}_{j=1}^M \subset \mathcal{A}_0$ tal que

$$\mathcal{A}_0 \subseteq \bigcup_{j=1}^M B(x_j, \frac{\varepsilon}{4}).$$

Es suficiente probar que para cada $j = 1, \dots, M$, cada $\eta < \eta_0$ y cada $t \in \mathbb{R}$, podemos encontrar un punto $y_j(t) \in \mathcal{A}_\eta(t)$ tal que

$$\|x_j - y_j(t)\|_X < \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Como $x_j \in \mathcal{A}_0$ y

$$\mathcal{A}_0 = \overline{\bigcup_{j=1}^n W^u(e_j)}.$$

para algún k existe un punto $z_j \in W^u(e_k)$ tal que $\|x_j - z_j\|_X \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Puesto que $z_j \in W^u(e_k)$, existe $t_j > 0$ y $\epsilon_j \in W^u(e_k) \cap B(e_k, \frac{\epsilon}{2})$ tal que $z_j = T_0(t_j)\epsilon_j$. Como sólo hay un número finito de x_k existe un tiempo fijo τ tal que $t_k \leq \tau$ para todo k . Observemos que la elección de ϵ_j, t_j y τ dependen sólo del sistema autónomo, es decir, son independientes de t y η .

Como $T_0(t)$ es continuo y \mathcal{A}_0 es compacto existe $\mu > 0$ tal que

$$\sup_{t \in [0, \tau]} \|T_0(t)z - T_0(t)u\|_X < \frac{\varepsilon}{4}$$

para todo $u \in \mathcal{A}_0$ y todo z con $\|z - u\|_X < \mu$.

Sea $\delta_j > 0$ de manera que los equilibrios y las variedades inestables asociadas a una perturbación de e_j permanecen cerca, y tomemos $\delta = \min_{j=1,\dots,n} \{\delta_j\}$. Escribiremos e_j^η para la trayectoria completa, y

$$W_{loc}^u(e_j^\eta) = W^U(e_j^\eta(\cdot)) \cap B(e_j, \delta)$$

para su variedad inestable asociada (lo mismo para $e_j^0 = e_j$). Entonces existe $\eta_1 > 0$ tal que para cada j y cada $\eta < \eta_1$ existe una trayectoria completa $e_j^\eta(\cdot)$ tal que $W_{loc}^u(e_j^\eta)$ está en un entorno de $W_{loc}^u(e_j)$. Así, para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $\eta < \eta_1$ existe $\xi_j(t) \in W_{loc}^u(e_j^\eta)$ verificando que, para cierto $\mu > 0$,

$$\|\xi_j^\eta(t) - \xi_j\|_X < \mu.$$

Sabemos además que $S_\eta \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} T_0$, de manera que como \mathcal{A}_0 está acotado también lo está $N(\mathcal{A}_0, \mu)$, y por tanto existe $\eta_2 > 0$ tal que

$$\sup_{u_0 \in N(\mathcal{A}_0, \mu)} \sup_{0 \leq t-s \leq T} \|S_\eta(t, s)u_0 - T_0(t-s)u_0\|_X < \frac{\varepsilon}{4}$$

para todo $\eta < \eta_2$. Sea $\eta_0 = \min(\eta_1, \eta_2)$.

Nuestro candidato en $\mathcal{A}_\eta(t)$ cercano a x_j es claramente $y_j(t) = S_\eta(t, t-t_j)\xi_j(t-t_j)$. Este punto está en el conjunto $\mathcal{A}_\eta(t)$ pues $\xi_j(t-t_j) \in W^U(e_j^\eta(t-t_j))$ y $W^U(e_j^\eta(\cdot))$ es positivamente invariante, es decir, $S(t, s)W^U(e_j^\eta(s)) \subseteq W^U(e_j^\eta(t))$.

Puesto que $t_j \in [0, \tau]$, para todo j y para $\eta < \eta_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|y_j(t) - z_j\|_X &= \|S_\eta(t, t-t_j)\xi_j(t-t_j) - T_0(t_j)\xi_j\|_X \\ &\leq \|S_\eta(t, t-t_j)\xi_j(t-t_j) - T_0(t_j)\xi_j(t-t_j)\|_X \\ &\quad + \|T_0(t_j)\xi_j(t-t_j) - T_0(t_j)\xi_j\|_X \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

y como $\|x_j - z_j\|_X < \frac{\varepsilon}{4}$ concluimos (4.2). □

4.3. Dimensión de atractores

Una de las propiedades más interesantes de los atractores globales para EDPs es que, en muchos casos, como en las ecuaciones de Navier-Stokes (ver Temam [20]), se trata de conjuntos de dimensión fractal y, por tanto, de dimensión de Hausdorff finita. Esto es, aunque el espacio de fases es un espacio infinito-dimensional, lo que determina el comportamiento asintótico es un conjunto, que aunque muy complejo en ciertas ocasiones, pero puede ser descrito por un número finito de variables o grados de libertad.

Definición 4.3.1 *Definimos la dimensión fractal de un conjunto compacto $K \subseteq X$ como la función $d_f(\cdot)$ definida*

$$d_f(K) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(K)}{\log(1/\varepsilon)}$$

siendo $N_\varepsilon(K)$ el número mínimo de bolas de radio ε necesarias para cubrir K .

Supongamos que nuestro proceso $S(t, s)$ posee atractor pullback $\mathcal{A}(t)$ y satisface la siguiente *propiedad de aplastamiento (PA)*: existe un proyector finito-dimensional $P_N = P(Q = I - P)$ en el espacio X , una función continua $c(\cdot)$ con

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \int_t^0 c(s) ds = k < +\infty, \quad (4.3)$$

y un $0 < \delta < 1$, con $k < \ln(\frac{1}{\delta})$, tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\|P(S(t+1, t)u - S(t+1, t)v)\|_X \leq \exp\left(\int_0^1 c(t+s) ds\right) \|u - v\|_X \quad (4.4)$$

y

$$\|Q(S(t+1, t)u - S(t+1, t)v)\|_X \leq \delta \exp\left(\int_0^1 c(t+s) ds\right) \|u - v\|_X, \quad (4.5)$$

para todo $u, v \in K(t)$, con $K(\cdot)$ un conjunto absorbente compacto asociado al atractor pullback. Para este conjunto, suponemos que está incluido en la bola $B(0, r(\cdot))$ con radio $r(\cdot)$ satisfaciendo (4.3).

Proposición 4.3.2 *Supongamos que se tienen (4.4) y (4.5). Entonces*

$$d_f(\mathcal{A}(0)) < +\infty$$

Demostración: Por el Teorema 1.2 en Debussche [22] tenemos que

$$S(1, 0)(B(u, r) \cap \mathcal{A}(0)), \quad u \in \mathcal{A}(0)$$

puede ser recubierta por k_0 bolas de radio

$$3\delta \exp\left(\int_0^1 c(s) ds\right) r,$$

con $k_0 \leq (16\sqrt{N} + 1)^N$. En particular, para $n \in \mathbb{N}$ fijo,

$$3\delta \exp\left(\int_0^1 c(s-n) ds\right) r(-n) = 3\delta \exp\left(\int_{-n}^{-n+1} c(s) ds\right) r(-n),$$

donde $r(s)$ proviene de la bola absorbente $K(s)$. Por la invarianza del atractor, para todo $n \in \mathbb{N}$, $S(0, -n)\mathcal{A}(-n) = \mathcal{A}(0)$, y, por otra parte,

$$S(0, -n)\mathcal{A}(-n) = S(0, -1) \circ S(-1, -2) \circ \cdots \circ S(-n+1, -n)\mathcal{A}(-n).$$

Así, aplicando iterativamente los recubrimientos anteriores, obtenemos que $\mathcal{A}(0)$ puede ser recubierta por k_0^n bolas de radio

$$(3\delta)^n \exp\left(\int_{-n}^0 c(s) ds\right) r(-n).$$

Pero observemos que δ puede ser tomada tan pequeña como queramos (aunque incrementando el número N elegido), de manera que, en particular, podemos suponer que existe $\delta_0 \in (0, 1)$ con $3\delta < \delta_0$ y $0 < k < \log(\frac{1}{\delta_0})$. Así, de (4.3) y $r(s)$, obtenemos, para n suficientemente grande, que

$$\begin{aligned} & (3\delta)^n \exp\left(\int_{-n}^0 c(s) ds\right) r(-n) \\ & \leq \delta_0^n \exp((k + \gamma)n) r(-n) \\ & \leq \exp(-n(\log(\frac{1}{\delta_0}) - \rho)) \exp((k + \gamma)n) e^{\frac{-\rho}{2}n} e^{\frac{-\rho}{2}n} r(-n) \\ & \leq \exp \frac{-\rho}{2} n, \end{aligned}$$

donde γ y δ los tomamos de manera que $0 < k + \gamma < \log(\frac{1}{\delta_0}) - \rho$.

Así, está claro que podemos concluir

$$d_f(\mathcal{A}(0)) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(K)}{\log(1/\varepsilon)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(k_0^n)}{\log(e^{\frac{\rho}{2}n})} = \frac{\log(k_0)}{\frac{\rho}{2}} < +\infty.$$

Gracias a (4.4), (4.5), el hecho de haber probado que la dimensión del atractor es finita para $t = 0$ no supone una restricción, pudiendo probarse de la misma forma que $d_f(\mathcal{A}(t)) < +\infty$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$.

□

Capítulo 5

Aplicaciones

La finalidad de este capítulo es mostrar ejemplos concretos sobre la existencia de atractores globales para ecuaciones diferenciales ordinarias, tratando de ilustrar con más detalle la teoría mostrada en los capítulos anteriores. En la Sección 5.1 se muestra la existencia del atractor pullback para una ecuación logística donde los coeficientes muestran una dependencia temporal. Se trata de tres casos distintos para dichos coeficientes, dependiendo del orden de crecimiento de cada uno de los mismos, mostrando un caso donde el atractor pullback es una familia no acotada. La Sección 5.2 está dedicada a la continuidad de problemas autónomos bajo pequeñas perturbaciones de carácter no autónomo. Se mostrarán dos ejemplos distintos: una ecuación logística y una ecuación con una estructura algo más compleja. Los resultados se pueden ver en Caraballo et al. [1], Rivero & Langa [15]).

5.1. Atractores pullback en la ecuación logística no autónoma

En esta sección vamos a tratar una ecuación diferencial concreta importante en la dinámica de poblaciones como es la ecuación logística.

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda(t)x(t) - \alpha(t)x^2(t), & t \in \mathbb{R}, \\ x(s) = x_s \in \mathbb{R}, & x_s > 0, s \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Este modelo fue introducido por el matemático belga Pierre F. Verhulst en 1838 para intentar describir el crecimiento autolimitado de una población biológica tras el estudio de la obra de Thomas R. Malthus, el cual proponía un crecimiento exponencial de la población.

En este caso podemos obtener una expresión explícita de la solución del sistema al tratarse de una ecuación de tipo Bernouilli:

$$x(t, s; x_s) = \frac{x_s e^{\int_s^t \lambda(\theta) d\theta}}{1 + x_s \int_s^t \alpha(\theta) e^{\int_s^\theta \lambda(\varepsilon) d\varepsilon} d\theta}. \quad (5.2)$$

Al ser la solución $x(t, s; 0) \equiv 0$ una solución del sistema, toda solución con un dato inicial positivo siempre es positiva y viceversa, toda solución inicial con un dato inicial negativo siempre es negativa. Vamos a considerar sólo valores iniciales positivos ya que no tiene sentido biológico considerar poblaciones iniciales negativas.

Supongamos que la función $\lambda(t) \equiv \lambda$, por tanto la solución anterior la podemos ver como

$$x(t, s; x_s) = \frac{1}{(x_s e^{\lambda(t-s)})^{-1} + \int_s^t \alpha(\theta) e^{-\lambda(t-\theta)} d\theta}, \quad (5.3)$$

Si además consideramos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\alpha(s)}{e^{\lambda s}} = 0, \quad (5.4)$$

obtenemos que toda solución del problema (5.1) converge a la función

$$x_1^*(t) = \frac{e^{\lambda t}}{\int_{-\infty}^t \alpha(\theta) e^{\lambda \theta} d\theta}, \quad (5.5)$$

cuando movemos el tiempo inicial $s \leq t$ hacia menos infinito. Definiendo como $x_2^*(t) = 0$ la otra solución global del problema, tenemos que el atractor pullback, en este caso, está formado por el intervalo que encierran ambas soluciones globales, siempre y cuando nos restrinjamos a valores positivos de los datos iniciales; es decir, el atractor pullback es $\{\mathcal{A}(t) = [0, x_1^*(t)] : t \in \mathbb{R}\}$, el cual también muestra atracción forward. En este problema no autónomo no tenemos un punto de equilibrio estable, pero tenemos una solución global que presenta el mismo comportamiento dinámico.

Veamos algunos ejemplos:

1. Valores constantes (caso autónomo)

Cuando consideramos valores constantes para las funciones λ y α , tenemos un problema autónomo en el cual tanto la dinámica forward como la dinámica pullback es la misma. En este caso, la función límite en (5.5) es una función constante con valor $x_1^*(t) = \frac{\lambda}{\alpha}$, con lo que tenemos un punto de equilibrio del sistema. Claramente, este punto de equilibrio es estable (al igual que $x_2^*(t) = 0$ es inestable) y la convergencia de la solución a dicho punto se da tanto si el tiempo final tiende a infinito o el tiempo inicial tiende a menos infinito. Por lo tanto, en este caso el atractor pullback coincide con el atractor global y es un conjunto fijo, $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}[0, \frac{\lambda}{\alpha}]$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

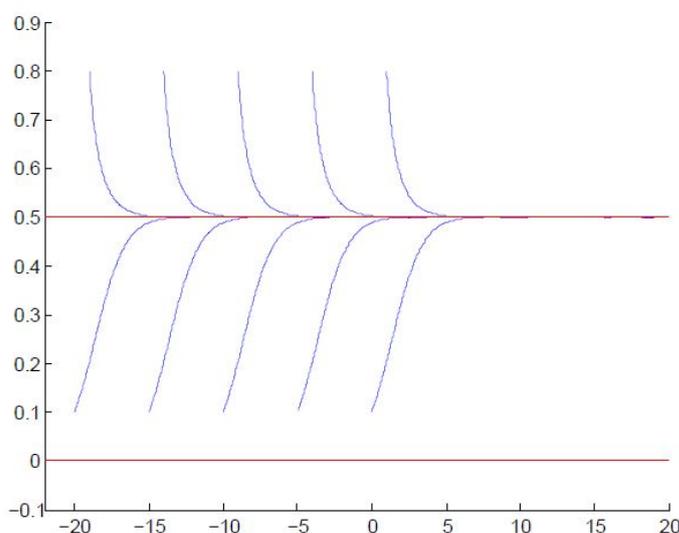


Figura 5.1: Ecuación logística con coeficientes constantes $\lambda = 1, \alpha = 2$.

2. Términos subexponenciales

En este ejemplo vamos a estudiar el caso en el cual la función $\alpha(\cdot)$ verifica la condición (5.4). Al ser la competición de la especie consigo misma superior a la tasa de crecimiento, cabe esperar que la población acabe extinguiéndose para tiempos muy grandes.

Si tomamos como $\alpha(t) = t^2 + 1$, podemos dar una expresión exacta para $x_1^*(t)$:

$$x_1^*(t) = \frac{\lambda^3}{\lambda^2(t^2 + 1) + 2(1 - \lambda t)},$$

donde observamos como $x_1^*(t) \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} 0$, siendo $x_2^*(t) = 0$ de nuevo. Podemos ver en la Figura 5.2 cómo, aunque la solución no es idénticamente nula, tenemos que toda solución tiende a cero en sentido forward. En sentido pullback, sin embargo, tenemos que, dado un tiempo cualquiera $t_0 \in \mathbb{R}$, las soluciones nunca van a tender a cero cuando el tiempo inicial $s \rightarrow -\infty$. Esto es debido a que $x_1^*(t)$ nunca es cero y atrae en sentido pullback, por lo que, por muy cerca que esté $x_1^*(t_0)$ de cero, toda solución convergerá a este valor positivo, es decir, dado un dato inicial $x_s > 0$,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} x(t_0, s; x_s) = x_1^*(t_0) > 0.$$

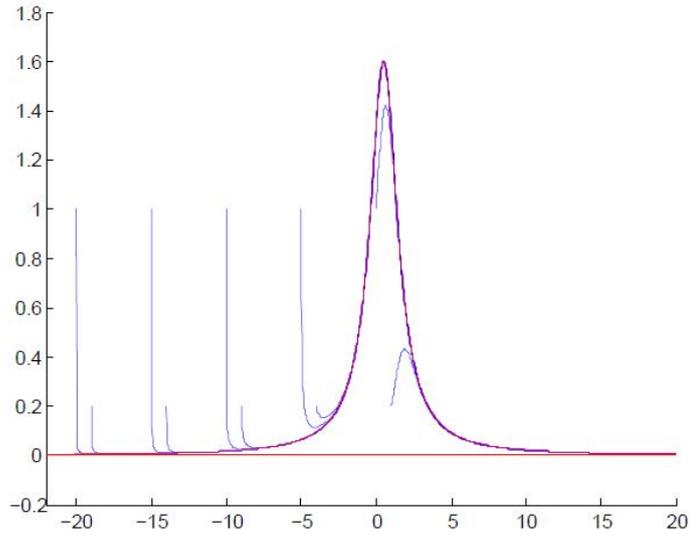


Figura 5.2: Ecuación logística con $\lambda = 2$, $\alpha(t) = t^2 + 1$.

3. Términos exponenciales

Consideremos ahora una función $\alpha(t)$ de manera que no verifique la condición (5.4), concretamente vamos a considerar la función $\alpha(t) = e^{\lambda_0 t}$. En este ejemplo podemos ver cómo la dinámica pullback nos aporta más información acerca del comportamiento de la población. Para esta función tenemos

$$x_1^*(t) = (\lambda + \lambda_0)e^{-\lambda_0 t}.$$

Por tanto encontramos que la dinámica de la población se comporta como una exponencial de exponente negativo, siendo el atractor pullback una familia no acotada en el pasado. Si nos fijáramos exclusivamente en la dinámica forward, solamente podríamos concluir que la población se extingue y que sólo decae si tomamos tiempos iniciales positivos, pero cuanto más atrás comience la solución, tenemos que la población crece exponencialmente antes de decaer, por lo que esta población presenta, en realidad, un crecimiento muy alto en un primer momento (ver Figura 5.3).

5.2. Continuidad de atractores autónomos

En esta sección se estudiarán casos de convergencia cuando nos encontramos ante una perturbación no autónoma de un problema autónomo. Esto nos

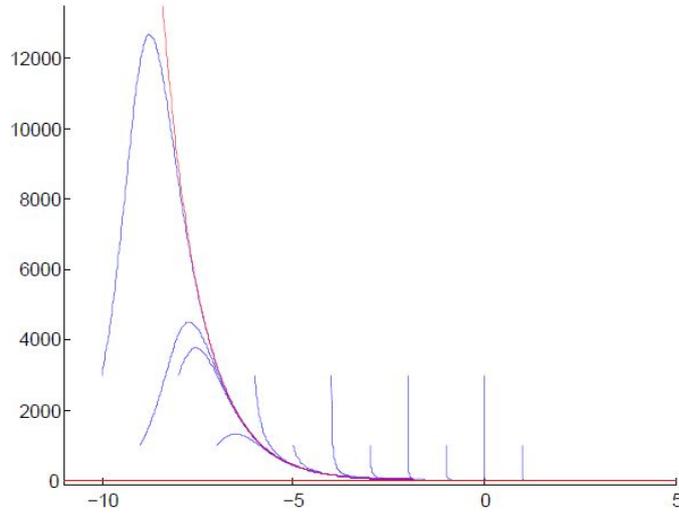


Figura 5.3: Ecuación logística con coeficientes $\lambda = 2, \alpha = e^t$.

mostrará cómo el concepto de atractor pullback puede relacionar la teoría clásica de los atractores globales mediante perturbaciones que no distan mucho de los problemas autónomos.

Primero vamos a considerar de nuevo una ecuación logística no autónoma. Consideremos la ecuación

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) - \alpha_\varepsilon(t)x^2(t), t \in \mathbb{R}, \\ x(s) = x_s \in \mathbb{R}, x_s > 0, s \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.6)$$

donde $\lambda > 0$ es una constante y la función $\alpha_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función continua y de clase \mathcal{C}^1 . Supongamos además que para cada $\varepsilon > 0$ existen dos constantes positivas $0 < a_\varepsilon < A_\varepsilon$ tales que $a_\varepsilon < \alpha_\varepsilon(t) < A_\varepsilon$ para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$ y que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon = \alpha_0, \quad (5.7)$$

para cierta constante $\alpha_0 > 0$ con $a_\varepsilon < \alpha_0 < A_\varepsilon$ para cada ε . Es claro que esto implica que $\alpha_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_0$, uniformemente en $t \in \mathbb{R}$.

Al igual que ocurre en (5.5), para cada $\varepsilon > 0$ existe una solución global $x_\varepsilon^*(t)$ que atrae en sentido pullback, y cuya expresión es

$$x_\varepsilon^*(t) = \frac{e^{\lambda t}}{\int_{-\infty}^t \alpha_\varepsilon(\theta) e^{\lambda \theta} d\theta}, \quad (5.8)$$

por lo que tenemos una familia de atractores pullback que dependen de ε y que pueden expresarse como $\{\mathcal{A}_\varepsilon(t) : t \in \mathbb{R}\} = \{[0, x_\varepsilon^*(t)] : t \in \mathbb{R}\}$.

Para probar la convergencia de este problema vamos a definir la función $l_\varepsilon(t) = \frac{\lambda}{\alpha_\varepsilon(t)}$. Esta función no es una solución del sistema, pero nos indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las soluciones, ofreciendo una información similar a la que ofrecen los equilibrios del problema límite autónomo

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) - \alpha_0 x^2(t), & t \in \mathbb{R}, \\ x(s) = x_s \in \mathbb{R}, & x_s > 0, s \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Dada una solución $x_0(t, s; x_s)$ del problema anterior y denominando como $x_1^* = \frac{\lambda}{\alpha_0}$ y $x_2^* = 0$ los equilibrios del problema, tenemos que

- si $x_0(t, s; x_s) \in (0, x_1^*)$, entonces $x'(t) > 0$ y la solución crece,
- si $x_0(t, s; x_s) > x_1^*$, entonces $x'(t) < 0$ y la solución decrece.

Como los equilibrios son soluciones del problema y tenemos unicidad de solución, realmente basta con fijarnos en los datos iniciales para ver el crecimiento y decrecimiento de las soluciones, al igual que la estabilidad de éstos.

Del mismo modo podemos relacionar $l_\varepsilon(t)$ con la dinámica de la familia de problemas (5.6). Así, dada $x_\varepsilon(t, s; x_s)$ una solución de dicha familia,

- si $x_\varepsilon(t, s; x_s) \in (0, l_\varepsilon(t))$, entonces $x'_\varepsilon(t) > 0$ y la solución crece,
- si $x_\varepsilon(t, s; x_s) > l_\varepsilon(t)$, entonces $x'_\varepsilon(t) < 0$ y la solución decrece,
- si $x_\varepsilon(t, s; x_s) = l_\varepsilon(t)$, entonces $x'_\varepsilon(t) = 0$, presentando la solución un cambio de monotonía.

El siguiente resultado nos relaciona la función $l_\varepsilon(t)$ con la solución global $x_1^*(t)$.

Lema 5.2.1 *Dado un $\varepsilon > 0$, sea $x_\varepsilon^*(t)$ solución global definida en (5.8) y $l_\varepsilon(t) = \frac{\lambda}{\alpha_\varepsilon(t)}$. Entonces la solución global verifica que*

$$L_\varepsilon < x_\varepsilon^*(t) < l_\varepsilon, \text{ donde } l_\varepsilon = \frac{\lambda}{a_\varepsilon}, \quad L_\varepsilon = \frac{\lambda}{A_\varepsilon}$$

Demostración: Basta observar que, por comparación, tenemos las siguientes desigualdades

$$\lambda x - A_\varepsilon x^2 \leq \lambda x - \alpha_\varepsilon(t)x^2 \leq \lambda x - a_\varepsilon x^2.$$

Si, dado t fijo, tomamos límite cuando $s \rightarrow -\infty$, teniendo en cuenta que ello es equivalente a tomar límite cuando $t \rightarrow +\infty$ en los problemas autónomos, obtenemos el resultado.

Ya que tenemos que $l_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\alpha_0} = x_1^*$ gracias a (5.7) y al resultado anterior, llegamos a la conclusión de que $\sup_{t \in \mathbb{R}} |x_\varepsilon^*(t) - x_1^*| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ teniendo, por tanto, una continuidad de los equilibrios del problema autónomo bajo la perturbación que estamos considerando. Al ser el conjunto $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{A}_\varepsilon(t)$ compacto, podemos concluir que el atractor global del problema autónomo (5.4) se comporta de manera continua bajo la perturbación que estamos considerando.

En la Figura 5.4 se muestra un caso particular para tener una visión gráfica de esta continuidad de los atractores. En este caso tenemos que $\lambda = 1$, $\alpha_\varepsilon(t) = \varepsilon \sin(t) + 2$, $a_\varepsilon = 2 - \varepsilon$, $A_\varepsilon = 2 + \varepsilon$. Así, el problema queda como

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - (\varepsilon \sin(t) + 2)x^2(t), & t \in \mathbb{R}, \\ x(s) = x_s \in \mathbb{R}, & x_s > 0, s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En este caso podemos dar una expresión explícita para las soluciones. Así, dado un dato inicial $x_s > 0$, la solución sería

$$x_\varepsilon(t, s; x_s) = \frac{x_s e^{t-s}}{\frac{\varepsilon x_s}{2} e^{t-s} (\sin(t) - \cos(t) + \frac{4}{\varepsilon}) - \frac{\varepsilon x_s}{2} (\sin(s) - \cos(s) + \frac{4}{\varepsilon}) + 1},$$

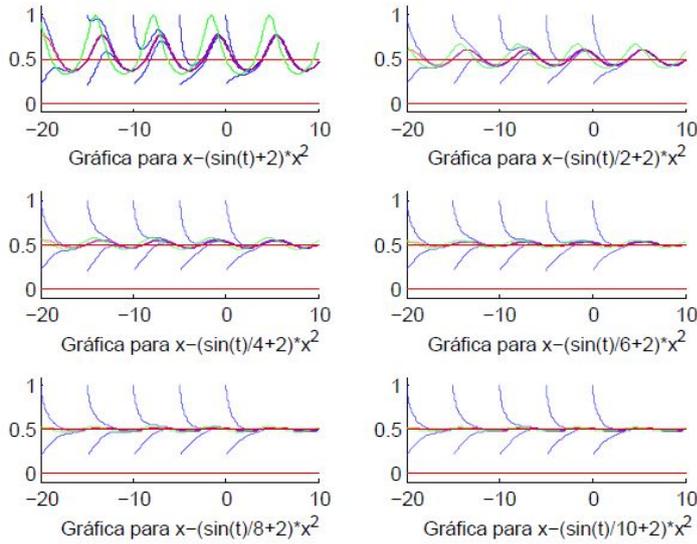


Figura 5.4: Diferentes problemas en ε pertenecientes a la familia de problemas (5.6) con $\alpha_\varepsilon(t) = \varepsilon \sin(t) + 2$.

siendo la solución global

$$x_\varepsilon^*(t) = \frac{2}{\varepsilon(\sin(t) - \cos(t) + \frac{4}{\varepsilon})}.$$

Para cada valor del parámetro, podemos comprobar cómo las soluciones convergen a $x_\varepsilon^*(t)$ tanto en sentido pullback como en sentido forward, así como también podemos ver cómo esta solución global está acotada por el máximo y el mínimo de $l_\varepsilon(t) = (\varepsilon \sin(t) + 2)^{-1}$. De hecho podemos ver cómo está acotado de manera más exacta por el máximo y el mínimo de los cortes de la solución global con dicha función $l_\varepsilon(t)$. Si denotamos como $x_1^* = \frac{1}{2}$ como el equilibrio estable del problema límite, al ir convergiendo a dicho valor el máximo y el mínimo de la función, tenemos que la ecuación global también converge a x_1^* , así como el atractor pullback al atractor global del problema límite autónomo.

Consideremos ahora la siguiente ecuación

$$\begin{cases} x'(t) = (x - \alpha_\varepsilon(t) + 2)(x - \alpha_\varepsilon(t))(\alpha_\varepsilon(t) + 2 - x) + \alpha'_\varepsilon(t), & t \in \mathbb{R}, \\ x(s) = x_s \in \mathbb{R}, & x_s, s \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.10)$$

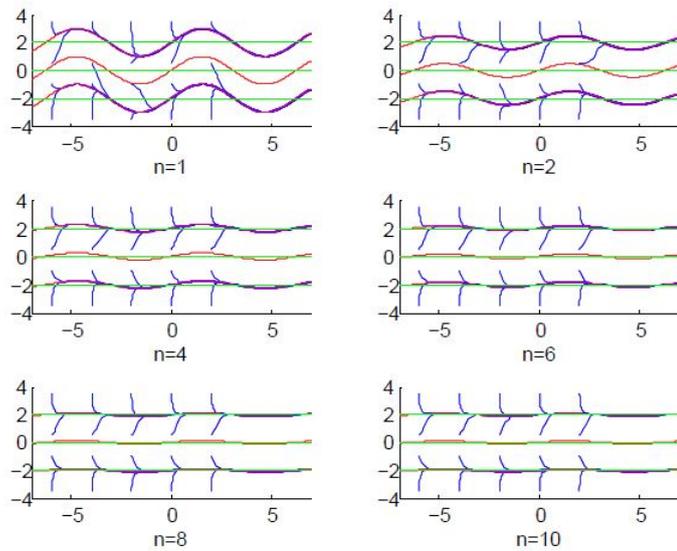


Figura 5.5: Representación del atractor pullback para (5.10) donde $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

donde $\alpha_\varepsilon(t) = \varepsilon \sin(t)$ y $\varepsilon > 0$ es una constante que tiende a cero. En este problema tenemos que, para cada $\varepsilon > 0$ que tomemos existen tres soluciones globales $x_1^*(t) = \varepsilon \sin(t) - 2$, $x_2^*(t) = \varepsilon \sin(t)$ y $x_3^*(t) = \varepsilon \sin(t) + 2$. Podemos comprobar como toda solución que está por debajo de -3 tiene derivada positiva y las que empiezan por encima de 3 tienen derivada negativa, pero una vez que entran en el intervalo $[-3, 3]$ no salen de él. Por lo tanto tenemos que dicho intervalo es atrayente en sentido pullback y, por tanto, el atractor pullback $\{\mathcal{A}_\varepsilon(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset [-3, 3]$. Como podemos observar en la Figura 5.6, este atractor tiene una estructura muy concreta ya que está delimitado por las

soluciones globales $x_1^*(t)$ y $x_3^*(t)$. También podemos observar cómo en el caso no autónomo, la convergencia depende no sólo del valor del dato inicial, sino también del tiempo inicial. Si tomamos el valor $x_s = 0$, podemos ver que dependiendo de dónde empecemos, las soluciones convergen a $x_1^*(t)$ a $x_3^*(t)$ o forma parte de $x_2^*(t)$. Por tanto, el conjunto $\omega(0, t) = \{x_1^*(t), x_3^*(t)\}$, como se aprecia en la Figura 5.6.

Definamos ahora el problema límite autónomo

$$\begin{cases} x'(t) = x(x+2)(2-x), & t \in \mathbb{R}, \\ x(s) = x_s \in \mathbb{R}, & x_s, s \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.11)$$

En este problema tenemos tres puntos de equilibrio $x_1^* = -2, x_1^* = 0, x_1^* = 2$, los cuales son estable, inestable y estable respectivamente. Podemos ver cómo la perturbación considerada conserva esta estabilidad para las soluciones globales de (5.10). Por muy pequeño que sea el valor del parámetro ε , siempre tenemos el efecto de la Figura 5.6, ya que sólo deja de ocurrir cuando estamos en el problema límite y la solución idénticamente nula es solución del sistema. En la Figura 5.5 podemos ver cómo las soluciones globales convergen a los equilibrios y, por tanto, el atractor pullback converge al atractor global. Aunque en este caso no tenemos un argumento como en el caso logístico, tenemos que las propias soluciones dependen de manera explícita del parámetro, lo que hace que converjan a los puntos de equilibrio.

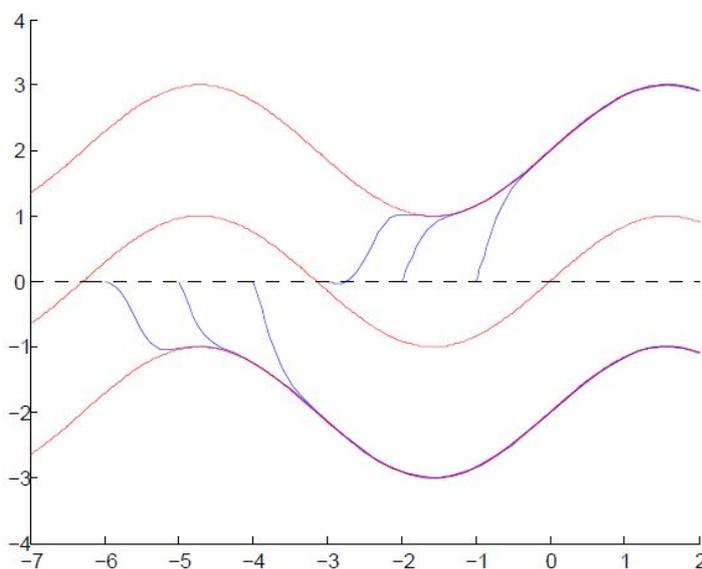


Figura 5.6: Atractor pullback para la ecuación (5.10).

Anexo. Códigos en MATLAB

En este anexo se encuentran todos los códigos de las gráficas que aparecen a lo largo del trabajo. Todos los códigos han sido programados en MATLAB.

- **Figura 2.1, página 16.** Esta figura consta de un archivo único guardado como una función sin argumentos de entrada y que muestra directamente la figura del problema autónomo que ilustra que la dinámica sólo depende del tiempo transcurrido. El archivo es `logistica.m`

```
function logistica
f = @(t,x) -x
hold on
for s = -20:10:0
[t,y] = ode23(f,[s,s+10],-2);
plot(t,y)
[t,y] = ode23(f,[s,s+10],-1);
plot(t,y)
[t,y] = ode23(f,[s,s+10],1);
plot(t,y)
[t,y] = ode23(f,[s,s+10],2);
plot(t,y)
end
t = linspace(-20,10,100);
y = zeros(1,length(t));
plot(t,y,'r')
axis([-20,10,-2,2])
end
```

- **Figura 2.2, página 27.** Esta figura consta de dos archivos guardados como funciones. El primero de ellos `lorenzEQ.m`, es la propia ecuación de Lorenz que será llamada desde el otro archivo `atrLorenz.m`, el cual realiza la gráfica en sí del atractor global.

```
function dxdt = lorenzEQ(t,x)
sigma = 10;
r = 28;
b = 8/3;
dxdt = [sigma*(x(2)-x(1));
```

```

r*x(1)-x(2)-x(1)*x(3);
x(1)*x(2)-b*x(3)];
end

function atrLorenz
t = linspace(0,50,3000)';
y0 = [-1;3;-1];
[t,Y] = ode45(@lorenzEQ,t,y0);
plot3(Y(:,1),Y(:,2),Y(:,3));
grid on;
end

```

- **Figura 3.1, página 35.** El archivo `AtrPullEj1.m` es una función sin argumentos que muestra la gráfica de este ejemplo de atractor pullback.

```

function AtrPullEj1
f = @(t,x) -x + t;
hold on
for s = -20:5:0
[t,y] = ode23(f,[s,5],3);
plot(t,y)
end
t = linspace(-20,5,1000);
y = t-1;
plot(t,y,'r')
axis([-20,5,-20,5])
end

```

- **Figura 3.2, página 36.** El siguiente código corresponde al archivo `ejemploAP.m`, siendo una función sin argumentos que muestra dos gráficas correspondientes a la atracción forward pero no pullback.

```

function ejemploAP f1 = @(t,y) -2*t*y+2*t*t;
subplot(2,1,1)
hold on
[t1,y1] = ode23(f1,[0,10],1);
plot(t1,y1)
[t1,y1] = ode23(f1,[0,10],-1);
plot(t1,y1)
for i = 1:length(t1)
integ = quadv('exp(x*x)',0,t1(i));
at1(i) = t1(i) - exp(-t1(i)*t1(i))*integ;
end
plot(t1,at1,'r')
axis([0,10,-2,10])
hold off

```

```

subplot(2,1,2)
hold on
[t1,y1] = ode23(f1,[-5,1],1);
plot(t1,y1)
[t1,y1] = ode23(f1,[-5,1],-1);
plot(t1,y1)
hold off
end

```

- **Figura 3.3, página 37.** El archivo `ejemploAP2.m`, es una función sin argumentos que, al igual que el caso anterior, muestra dos gráficas correspondientes a la atracción pullback, pero no forward.

```

function ejemploAP2
f2 = @(t,y) 2*t*y + 2*t*t;
subplot(2,1,1)
hold on
for s=-5:1:0
[t2,y2] = ode23(f2,[s,2],25);
plot(t2,y2)
[t2,y2] = ode23(f2,[s,2],-25);
plot(t2,y2)
end
t2 = linspace(-5,2,100);
at2 = -t2+(sqrt(pi)/2)*exp(t2.*t2).*(erf(t2)+1);
plot(t2,at2,'r')
axis([-5,2,-50,50])
hold off
subplot(2,1,2)
hold on
[t2,y2] = ode23(f2,[-1,3],25)
plot(t2,y2)
[t2,y2] = ode(f2,[-1,3],-25);
plot(t2,y2)
axis([-1,3,-1000,1000])
end

```

- **Figura 3.4, página 40.** Para obtener esta figura que muestra una familia invariante dentro del marco de procesos de evolución, el programa `familiaInv.m` es una función sin argumentos que al ejecutarlo muestra dicha familia.

```

function familiaInv
hold off
f = @(t,x) (t*t+1)-x*x;
hold on

```

```

for s = -3:1:2
[t,y] = ode23(f,linspace(s,4,500),0);
plot(t,y)
[t,y] = ode23(f,linspace(s,4,500),8);
plot(t,y)
[t,y] = ode23(f,linspace(s,4,500),-6);
plot(t,y)
[t,y] = ode23(f,linspace(s,4,200),-2);
plot(t,y)
end
t1 = linspace(-4,4,1000);
plot(t1,t1,'r')
g2 = t1 + (2*exp(-t1.*t1))./(sqrt(pi)*(erf(t1)+1));
plot(t1,g2,'r')
axis([-4,4,-10,10])
end

```

- **Figura 5.1, página 63.** Esta gráfica muestra la evolución de una ecuación logística autónoma y el programa usado ha sido el archivo `logisticaNA1.m`, una función sin argumentos que muestra la gráfica como salida.

```

function logisticaNA1
f = @(t,x) 1*x-2*x*x;
hold on
for s = -20:5:0
[t,y] = ode23(f,linspace(s,20,1000),0.1);
plot(t,y)
[t,y] = ode23(f,linspace(s+1,20,1000),0.8);
plot(t,y)
end
t = linspace(-22,20,1000);
plot(t,zeros(1,1000),'r');
plot(t,zeros(1,1000)+0.5,'r');
axis([-22,20,-0.1,0.9])
hold off
end

```

- **Figura 5.2, página 64.** El archivo `logisticaNA2.m` es una función sin argumentos que devuelve la gráfica de la función logística que muestra un crecimiento a tiempo $t = 0$.

```

function logisticaNA2
f = @(t,x) 2*x-(t*t+1)*x*x
hold on
for s = -20:5:0
[t,y] = ode23(f,linspace(s,20,1000),1);
plot(t,y)

```

```

[t,y] = ode23(f,linspace(s+1,20,1000),0.2);
plot(t,y)
end
t=linspace(-22,20,1000);
plot(t,zeros(1,1000),'r')
g=2*2*2./(2*2.*(t.*t+1)+2.*(1-2.*t));
plot(t,g,'r')
axis([-22,20,-0.2,1.8])
hold off
end

```

- **Figura 5.3, página 65.** El archivo `logisticaNA3.m` muestra, como en los dos programas anteriores, la dinámica de una ecuación logística con un atractor pullback no acotado.

```

function logisticaNA3
f = @(t,x) 2*x-exp(t)*x*x;
hold on
for s = -10:2:0
[t,y] = ode23(f,linspace(s,5,1000),3000);
plot(t,y)
[t,y] = ode23(f,linspace(s+1,5,1000),1000);
plot(t,y)
end
t=linspace(-11,5,1000);
plot(t,zeros(1,1000),'r')
g=3*exp(-t);
plot(t,g,'r')
axis([-11,5,-100,13500])
hold off
end

```

- **Figura 5.4, página 67.** El código del programa `logisticaNAConv.m` es una función sin argumentos que muestra en una gráfica múltiple la convergencia de una ecuación logística no autónoma a un problema límite autónomo.

```

function logisticaNAConv
t1 = linspace(-20,10,1000);
f1 = 0.5*ones(1,1000);
f0 = zeros(1,1000);

subplot(3,2,1)
hold on
f = @(t,x) x - (sin(t)+2)*x*x;
for s = -20:5:0

```

```

[t,y] = ode23(f,linspace(s,10,1000),0.2);
plot(t,y)
end
for s = -20:5:0
[t,y] = ode23(f,linspace(s,10,1000),1);
plot(t,y)
end
solg = 2./(sin(t1)-cos(t1)+4);
plot(t1,solg,'r')
plot(t1,f1,'r')
l = 1./(sin(t1)+2);
plot(t1,l,'g')
plot(t1,f0,'r')
axis([-20,10,-0.05,1])
xlabel('Gráfica para x-(sin(t)+2)*x*x')
axis([-20,10,-0.1,1.1])
hold off

subplot(3,2,2)
hold on
f = @(t,x) x - (sin(t)/2+2)*x*x;
for s = -20:5:0
[t,y] = ode23(f,linspace(s,10,1000),0.2);
plot(t,y)
end
for s = -20:5:0
[t,y] = ode23(f,linspace(s,10,1000),1);
plot(t,y)
end
solg = 2*2./((sin(t1)-cos(t1)+4*2));
plot(t1,solg,'r')
l = 1./(sin(t1)/2+2);
plot(t1,l,'g')
plot(t1,f1,'r')
plot(t1,f0,'r')
axis([-20,10,-0.05,1])
xlabel('Gráfica para x-(sin(t)/2+2)*x*x')
axis([-20,10,-0.1,1.1])
hold off

subplot(3,2,3)
hold on
f = @(t,x) x - (sin(t)/4+2)*x*x;
for s = -20:5:0

```

```
[t,y] = ode23(f,linspace(s,10,1000),0.2);
plot(t,y)
end
for s = -20:5:0
[t,y] = ode23(f,linspace(s,10,1000),1);
plot(t,y)
end
solg = 2*4./((sin(t1)-cos(t1)+4*4));
plot(t1,solg,'r')
l = 1./(sin(t1)/4+2);
plot(t1,l,'g')
plot(t1,f1,'r')
plot(t1,f0,'r')
axis([-20,10,-0.05,1])
xlabel('Gráfica para x-(sin(t)/4+2)*x*x')
axis([-20,10,-0.1,1.1])
hold off
```

```
subplot(3,2,4)
hold on
f = @(t,x) x - (sin(t)/6+2)*x*x;
for s = -20:5:0
[t,y] = ode23(f,linspace(s,10,1000),0.2);
plot(t,y)
end
for s = -20:5:0
[t,y] = ode23(f,linspace(s,10,1000),1);
plot(t,y)
end
solg = 2*6./((sin(t1)-cos(t1)+4*6));
plot(t1,solg,'r')
l = 1./(sin(t1)/6+2);
plot(t1,l,'g')
plot(t1,f1,'r')
plot(t1,f0,'r')
axis([-20,10,-0.05,1])
xlabel('Gráfica para x-(sin(t)/6+2)*x*x')
axis([-20,10,-0.1,1.1])
hold off
```

```
subplot(3,2,5)
hold on
f = @(t,x) x - (sin(t)/8+2)*x*x;
for s = -20:5:0
```

```

[t,y] = ode23(f,linspace(s,10,1000),0.2);
plot(t,y)
end
for s = -20:5:0
[t,y] = ode23(f,linspace(s,10,1000),1);
plot(t,y)
end
solg = 2*8./((sin(t1)-cos(t1)+4*8));
plot(t1,solg,'r')
l = 1./(sin(t1)/8+2);
plot(t1,l,'g')
plot(t1,f1,'r')
plot(t1,f0,'r')
axis([-20,10,-0.05,1])
xlabel('Gráfica para  $x-(\sin(t)/8+2)*x*x$ ')
axis([-20,10,-0.1,1.1])
hold off

subplot(3,2,6)
hold on
f = @(t,x) x - (sin(t)/10+2)*x*x;
for s = -20:5:0
[t,y] = ode23(f,linspace(s,10,1000),0.2);
plot(t,y)
end
for s = -20:5:0
[t,y] = ode23(f,linspace(s,10,1000),1);
plot(t,y)
end
solg = 2*10./((sin(t1)-cos(t1)+4*10));
plot(t1,solg,'r')
l = 1./(sin(t1)/10+2);
plot(t1,l,'g')
plot(t1,f1,'r')
plot(t1,f0,'r')
axis([-20,10,-0.05,1])
xlabel('Gráfica para  $x-(\sin(t)/10+2)*x*x$ ')
axis([-20,10,-0.1,1.1])
hold off
end

```

- Figura 5.5, página 68.** El programa `convNA.m` es muy similar al código del programa `logisticaNAConv.m` ya que nos muestra en una gráfica múltiple la convergencia de un problema no autónomo a un problema

límite autónomo.

```

f = @(t,x) (x-(sin(t)))*((sin(t)+2)-x)*(x-(sin(t)-2))
+cos(t);
subplot(3,2,1)
hold on
for s = 2:-2:-6
[t,x] = ode23(f,[s,7],3.5);
plot(t,x)
[t,x] = ode23(f,[s,7],0.5);
plot(t,x)
[t,x] = ode23(f,[s,7],-1);
plot(t,x)
[t,x] = ode23(f,[s,7],-3.5);
plot(t,x)
end
t = linspace(-7,7,1000);
l1 = sin(t);
l2 = sin(t)+2;
l3 = sin(t)-2;
plot(t,l1,'r')
plot(t,l2,'r')
plot(t,l3,'r')
plot(t,zeros(1,1000),'g')
plot(t,zeros(1,1000)+2,'g')
plot(t,zeros(1,1000)-2,'g')
axis([-7,7,-4,4])
xlabel('n=1')
hold off

f = @(t,x) (x-(sin(t))/2)*((sin(t)/2+2)-x)*(x-(sin(t)/2-2))
+cos(t)/2;
subplot(3,2,2)
hold on
for s = 2:-2:-6
[t,x] = ode23(f,[s,7],3.5);
plot(t,x)
[t,x] = ode23(f,[s,7],0.5);
plot(t,x)
[t,x] = ode23(f,[s,7],-1);
plot(t,x)
[t,x] = ode23(f,[s,7],-3.5);
plot(t,x)
end
t = linspace(-7,7,1000);

```

```

l1 = sin(t)/2;
l2 = sin(t)/2+2;
l3 = sin(t)/2-2;
plot(t,l1,'r')
plot(t,l2,'r')
plot(t,l3,'r')
plot(t,zeros(1,1000),'g')
plot(t,zeros(1,1000)+2,'g')
plot(t,zeros(1,1000)-2,'g')
axis([-7,7,-4,4])
xlabel('n=2')
hold off

f = @(t,x) (x-(sin(t))/4)*((sin(t)/4+2)-x)*(x-(sin(t)/4-2))
+cos(t)/4;
subplot(3,2,3)
hold on
for s = 2:-2:-6
[t,x] = ode23(f,[s,7],3.5);
plot(t,x)
[t,x] = ode23(f,[s,7],0.5);
plot(t,x)
[t,x] = ode23(f,[s,7],-1);
plot(t,x)
[t,x] = ode23(f,[s,7],-3.5);
plot(t,x)
end
t = linspace(-7,7,1000);
l1 = sin(t)/4;
l2 = sin(t)/4+2;
l3 = sin(t)/4-2;
plot(t,l1,'r')
plot(t,l2,'r')
plot(t,l3,'r')
plot(t,zeros(1,1000),'g')
plot(t,zeros(1,1000)+2,'g')
plot(t,zeros(1,1000)-2,'g')
axis([-7,7,-4,4])
xlabel('n=4')
hold off

f = @(t,x) (x-(sin(t))/6)*((sin(t)/6+2)-x)*(x-(sin(t)/6-2))
+cos(t)/6;
subplot(3,2,4)

```

```

hold on
for s = 2:-2:-6
[t,x] = ode23(f,[s,7],3.5);
plot(t,x)
[t,x] = ode23(f,[s,7],0.5);
plot(t,x)
[t,x] = ode23(f,[s,7],-1);
plot(t,x)
[t,x] = ode23(f,[s,7],-3.5);
plot(t,x)
end
t = linspace(-7,7,1000);
l1 = sin(t)/6;
l2 = sin(t)/6+2;
l3 = sin(t)/6-2;
plot(t,l1,'r')
plot(t,l2,'r')
plot(t,l3,'r')
plot(t,zeros(1,1000),'g')
plot(t,zeros(1,1000)+2,'g')
plot(t,zeros(1,1000)-2,'g')
axis([-7,7,-4,4])
xlabel('n=6')
hold off

f = @(t,x) (x-(sin(t))/8)*((sin(t)/8+2)-x)*(x-(sin(t)/8-2))
+cos(t)/8;
subplot(3,2,5)
hold on
for s = 2:-2:-6
[t,x] = ode23(f,[s,7],3.5);
plot(t,x)
[t,x] = ode23(f,[s,7],0.5);
plot(t,x)
[t,x] = ode23(f,[s,7],-1);
plot(t,x)
[t,x] = ode23(f,[s,7],-3.5);
plot(t,x)
end
t = linspace(-7,7,1000);
l1 = sin(t)/8;
l2 = sin(t)/8+2;
l3 = sin(t)/8-2;
plot(t,l1,'r')

```

```

plot(t,l2,'r')
plot(t,l3,'r')
plot(t,zeros(1,1000),'g')
plot(t,zeros(1,1000)+2,'g')
plot(t,zeros(1,1000)-2,'g')
axis([-7,7,-4,4])
xlabel('n=8')
hold off

f = @(t,x) (x-(sin(t))/10)*((sin(t)/10+2)-x)*(x-(sin(t)/10-2))
+cos(t)/10;
subplot(3,2,6)
hold on
for s = 2:-2:-6
[t,x] = ode23(f,[s,7],3.5);
plot(t,x)
[t,x] = ode23(f,[s,7],0.5);
plot(t,x)
[t,x] = ode23(f,[s,7],-1);
plot(t,x)
[t,x] = ode23(f,[s,7],-3.5);
plot(t,x)
end
t = linspace(-7,7,1000);
l1 = sin(t)/10;
l2 = sin(t)/10+2;
l3 = sin(t)/10-2;
plot(t,l1,'r')
plot(t,l2,'r')
plot(t,l3,'r')
plot(t,zeros(1,1000),'g')
plot(t,zeros(1,1000)+2,'g')
plot(t,zeros(1,1000)-2,'g')
axis([-7,7,-4,4])
xlabel('n=10')
hold off
end

```

- **Figura 5.6, página 69.** Esta gráfica muestra el conjunto ω -límite de 0 en el caso de un problema no autónomo concreto. El archivo `omegapull.m` es una función sin argumentos que muestra dicho fenómeno.

```

function omegapull
f = @(t,x) (x-(sin(t)))*((sin(t)+2)-x)*(x-(sin(t)-2))+cos(t);
hold on

```

```
for s = -1:-1:-6
    [t,x] = ode23(f,[s,2],0);
    plot(t,x)
end
t = linspace(-7,2,1000);
l1 = sin(t);
l2 = sin(t) + 2;
l3 = sin(t) - 2;
plot(t,l1,'r')
plot(t,l2,'r')
plot(t,l3,'r')
plot(t,zeros(1,1000),'k--')
hold off
end
```


Bibliografía

- [1] T. Caraballo, P.E. Kloeden, J.A. Langa, Atractores globales para sistemas diferenciales no autónomos. *CUBO, Matemática Educacional* 5 (2003) 305-329.
- [2] A.N. Carvalho, J.A. Langa & J.C. Robinson, (2013) *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, Applied Mathematical Sciences 182, Springer.
- [3] Carvalho, A.N., Langa, J.A., & Robinson, J.C. On the continuity of pull-back attractors for evolution processes. *Nonlin. Anal.* **71**, (2009) 1812-1824.
- [4] D.N. Cheban (2004) *Global Attractors of Non-Autonomous Dissipative Dynamical Systems*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [5] D.N. Cheban, P.E. Kloeden & B. Schmalfuss, The relationship between pullback, forwards and global attractors of nonautonomous dynamical systems. *Nonlinear Dynamics & Systems Theory*, 2 (2), (2002), 125-144.
- [6] V.V. Chepyzhov & M.I. Vishik (2002) *Attractors for Equations of Mathematical Physics*. Colloquium Publications, Vol. 49. America Mathematical Society.
- [7] J. Gleik (1988) *CAOS: la creación de una ciencia*, Seix Barral.
- [8] J.K. Hale (1988) *Asymptotic Behavior of Dissipative System*. American Mathematical Society.
- [9] D. Henry, D. (1981) *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Lecture Notes in Mathematics Vol. **840**, Springer.
- [10] P.E. Kloeden & M. Rasmussen (2011) *Nonautonomous Dynamical Systems* Mathematical Surveys and Monographs, AMS.
- [11] J.A. Langa & J.C. Robinson, Determining asymptotic behavior from the dynamics on attracting sets. *J. Dynam. Differential Equations* 11, no. 2, (1999) 319-331.

-
- [12] O. Ladyzhenskaya (1991) *Attractors for semigroups and evolution equations*. Cambridge University Press.
- [13] E. N. Lorenz (1995) *The Essence of Chaos*, University of Washington Press.
- [14] G. Raugel (2002) *Global Attractor in Partial Differential Equations*, Handbook of dynamical systems, Vol. 2, 885-982, North-Holland, Amsterdam.
- [15] F. Rivero & J.A. Langa *Introducción a los sistemas dinámicos no-autónomos* (2014), Servicio de publicaciones de la Universidad de Sevilla.
- [16] F. Rivero, Forward and pullback attraction on pullback attractors. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.*, 51, (2010) 155-161.
- [17] J.C. Robinson (2001) *Infinite-Dimensional Dynamical System. An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*. Cambridge Text in Applied Mathematics.
- [18] G.R. Sell & Y. You (2002) *Dynamics of evolutionary equations*. Applied Mathematical Sciences, 143. Springer-Verlag.
- [19] G.R. Sell, Nonautonomous differential equations and dynamical systems. *Trans. Amer. Math. Soc.* 27, (1967) 241-283.
- [20] R. Temam (1988) *Infinite-Dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics*. Springer-Verlag.
- [21] Y. Wang, Ch. Zhong & S. Zhou, Pullback attractors of nonautonomous dynamical systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 16 (3), (2006) 587-614.