# APLICACIONES DE LAS INVERSAS GENERALIZADAS

**Mª Montaña Blanco Guillén**

# APLICACIONES DE LAS INVERSAS GENERALIZADAS

Mª Montaña Blanco Guillén

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Prof. Tutor D. Manuel Jesús Gago Vargas

*"Ahora tendrás que pasar un infierno, peor que cualquiera de tus pesadillas, pero al final, sé que serás tú el que quede en pie."*
***Duke*** *en Rocky IV.*

# Agradecimientos

A mi esposo, que en todo momento, desde el primer día de esta andadura, comprendió mi pasión y nunca reclamó el tiempo que no pudimos compartir. Gracias por tu amor y paciencia, y, por creer en mi, por creer en esto.

A mi tutor, que me ha apoyado y guiado para realizar este trabajo, y sin el cual nada de esto hubiera sido posible. Gracias por su confianza, por todos los conocimientos que me ha transmitido, por su entera disposición y su infinita paciencia.

A mi familia, que aunque al principio les supuso un reto entender este nuevo camino que decidí tomar, me han hecho más fuerte aún y más incansable.

A mi otra familia, mi Antonia, por estar siempre ahí inquebrantable, dando lo mejor.

A mis compañeros, y a todos y cada uno de los han aportado su granito de arena para que este sueño vaya tomando cuerpo.

A mis amigas, que casi sin darse cuenta, me renuevan cada día, indispensables en este camino.

# Índice general

# English Abstract

In this paper we start out the study of the generalized inverse of a matrix and some of its applications. These applications appear in different areas where it is necessary the computation of an analogous object to the inverse of a matrix. Mainly, we set out two problems. The first one is to solve problems of system of linear equations with constraints, where it is used the Bott-Duffin inverse of a matrix. The second one is to give a closed formula for the solution of a system of linear differential equations, and the Drazin inverse is defined to express the solution. Some examples and bibliographical references are given for each problem.

# Introducción

Las aplicaciones de la inversa de una matriz son múltiples, entre ellas, la más conocida sin duda, es su aplicación para el cálculo de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

Con el paso de los años, numerosas áreas han necesitado algún tipo de matriz inversa de una matriz rectangular o bien de una matriz cuadrada singular, como es, por ejemplo, en el sector de la estadística, ingeniería, programación lineal, análisis numérico o ecuaciones diferenciales.

Fue en $1935$ cuando E. H. Moore introdujo el concepto de *inversa generalizada*, definiéndola a partir de ciertos proyectores. En el año $1955$, R. Penrose, quien aparentemente desconocía el trabajo de Moore, dio una nueva definición de la misma inversa generalizada, pero cambiando el enfoque. En esta ocasión se definía el concepto a partir de cuatro ecuaciones matriciales, una forma más sencilla de clasificar ese tipo de matrices. A partir de ese momento la inversa generalizada comenzó a conocerse con el nombre de *inversa de Moore-Penrose*. Esta inversa, que denotaremos $A^+$, siempre existe y es única. Su aplicación más notable es la de dar solución al problema de mínimos cuadrados. A partir de las ecuaciones que debe cumplir la inversa de Moore-Penrose, podemos definir otros conjuntos de matrices que cumplen alguna, o algunas, de las cuatro ecuaciones matriciales. Es el caso de las $\{1\}$- inversas, que se caracterizan por su uso en el cálculo de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales.

Un caso particular de $\{1, 2\}$-inversas es la llamada *inversa de Bott-Duffin*, que denotaremos por $A_{(L)}^{\{-1\}}$, y definiremos a partir de proyectores. La inversa de Bott-Duffin surgió en el año $1953$ como aplicación a la teoría de redes eléctricas, [BD53], con el propósito de resolver sistemas de ecuaciones en los que quedaba restringido el subespacio de soluciones. Al contrario que en el caso de la inversa de Moore-Penrose, su existencia está condicionada a la existencia de la inversa de otra matriz. Para hacer frente a este inconveniente, en el año $1990$, Chen Younglin, [Che90], introdujo el concepto de *inversa generalizada de Bott-Duffin.*

Se han utilizado parte de las ecuaciones matriciales que debía satisfacer la inversa de Moore-Penrose para definir otro tipo de inversas generalizadas, incorporando además alguna condición adicional. En $1958$ M. P. Drazin, [Dra58], introdujo el concepto de *inverso de Drazin* en anillos y semigrupos. Posteriormente, se desarrolló el estudio de la *inversa de Drazin* para matrices cuadradas. Esta inversa generalizada, que nosotros denotaremos $A^D$, posee algunas de las propiedades espectrales de la inversa de una matriz no singular, ese es el motivo por el que su utilización se reduce solamente a matrices cuadradas. Tal y como ocurre con la inversa de Moore-Penrose, la inversa de Drazin es única, pudiendo asegurar siempre su existencia. Para poder definirla tendremos que tener claro el concepto de *índice* de una matriz. Como aplicación más notable de la inversa de Drazin sobresale su empleo en el cálculo de soluciones de sistemas singulares de ecuaciones diferenciales. No nos debe suponer una desventaja que su uso se restrinja exclusivamente a matrices cuadradas, ya que, en $1980$, Cline y Greville, [CG80], introdujeron el concepto de *inversa de Drazin $W$-Ponderada*, ya extensible a matrices rectangulares.

Este trabajo está organizado como sigue. En el capítulo $1$, se darán algunos conceptos básicos y notaciones que serán de utilidad a lo largo de todo el trabajo, como por ejemplo la descomposición en valores singulares, la factorización de rango pleno o la forma canónica de Jordan. En el capítulo $2$, se introducirá el concepto de inversa generalizada, probaremos algunas de sus propiedades, y estudiaremos algunos de sus tipos, como es el caso de las $\{1\}$-inversas o las $\{1,2\}$-inversas. En el capítulo $3$, se introduciá, a partir del uso de proyectores ortogonales, el concepto de inversa de Bott-Duffin, se estudiarán algunas de sus propiedades y veremos su utilidad en la resolución de sistemas de ecuaciones con espacio de soluciones restringido. Se establecerá una relación entre la inversa de Bott-Duffin y un conjunto de $\{1,2\}$-inversas de ciertas matrices. Finalmente se dará paso al estudio de su aplicación en redes eléctricas, viendo, además, algunos resultados relacionados con el cálculo de valores estacionarios. En el capítulo $4$, se introducirá, a partir del concepto de índice de una matriz, la inversa de Drazin. La obtendremos como resultado de una forma canónica de Jordan. Para concluir, estudiaremos su aplicación más destacada en el cálculo de soluciones de sistemas singulares de ecuaciones diferenciales. Se hallarán ejemplos constructivos a lo largo de todos los capítulos.

En este trabajo el lector no solamente encontrará el seguimiento de algunas referencias que habrán servido de guía para su creación. Se ha realizado una búsqueda lo más exhaustiva posible dentro de la bibliografía actual sobre algunas de las inversas generalizadas que se definen y sobre sus aplicaciones. El estudio de este impacto no ha sido realizado exclusivamente a través de “Mathematical Reviews”. La razón es clara, el propósito de esta investigación no podía estar centrado en una base de datos exclusivamente matemática, debido a que algunas de las aplicaciones que han formado parte de esa búsqueda se salen fuera del ámbito de indexado de esa base de datos; artículos que por ejemplo se centraban en el campo de la física, la química o la biología, hubieran sido imposibles de encontrar. Por ese motivo se ha complementado con las aplicaciones "Web of Knowledge" y “Google Académico”.

# 1 | Preliminares

En este capítulo se darán una serie de conceptos y enunciados básicos que serán utilizados en capítulos posteriores. Para su realización se ha tomado como referencia [BIG03, capítulos 0,6], [MS09], [Mey00].

## 1.1 Escalares y vectores

*Nota* 1.1. Un **cuerpo genérico** será denotado por $\mathbb{F}$. Usualmente utilizaremos el cuerpo complejo $\mathbb{C}$, y en casos especiales el cuerpo real $\mathbb{R}$.

*Nota* 1.2. Los **escalares** en $\mathbb{F}$ se denotarán con letras minúsculas: $x$, $y$, $\lambda$, ...

*Nota* 1.3. El **espacio n-dimensional** sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ se denotará $\mathbb{F}^n$. En particular, $\mathbb{C}^n$ $[\mathbb{R}^n]$ denota el espacio vectorial complejo [real] $n$-dimensional.

*Nota* 1.4. Usaremos $\overline{1,n}$ para denotar al conjunto de índices $\{1, 2, \ldots, n\}$.

*Nota* 1.5. Los **vectores** vendrán denotados por letras en negrita: $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{\lambda}$, ... Un vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^n$ lo escribiremos en forma de columna

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{o} \quad \boldsymbol{x} = (x_i), \quad i \in \overline{1,n}, \quad x_i \in \mathbb{F}.$$

**Definición 1.1.** *Llamaremos **vector unitario $\boldsymbol{i}^{th}$** de $\mathbb{F}^n$ al vector n-dimensional $\boldsymbol{e}_i$ con componentes*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{si } i = j \\ 0, & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

**Definición 1.2.** *Denominaremos **base estándar** de $\mathbb{F}^n$ al conjunto $\varepsilon_n$ de vectores unitarios $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$.*

**Definición 1.3.** *Se define la* ***suma*** *de dos subespacios $L, M$ de $\mathbb{F}^n$, denotada $L+M$, como*

$$L + M = \{\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} : \ \boldsymbol{y} \in L, \ \boldsymbol{z} \in M\}.$$

*El conjunto $L + M$ también es un subespacio vectorial de $\mathbb{F}^n$.*

**Definición 1.4.** *Sean $L$ y $M$ dos subespacios de $\mathbb{F}^n$. Se dirá que $L+M$ es la* ***suma directa*** *de $L$ y $M$, y se denotará por $L \oplus M$, si $L \cap M = \{\mathbf{0}\}$, es decir, si el único vector en común de $L$ y $M$ es el vector cero.*

**Definición 1.5.** *Dado un subespacio vectorial $L$ de $\mathbb{F}^n$, llamaremos* ***subespacio complementario*** *de $L$ a cualquier subespacio $M$ verificando $L \oplus M = \mathbb{F}^n$. En este caso, cada vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^n$ puede ser expresado de forma única como una suma*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, \ \text{donde } \boldsymbol{y} \in L, \ \boldsymbol{z} \in M.$$

*Denominaremos a $\boldsymbol{y}$ la* ***proyección*** *de $\boldsymbol{x}$ en $L$ a lo largo de $M$.*

## 1.2 Producto escalar

**Definición 1.6.** *Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Un* ***producto escalar*** *en $V$ es una aplicación*

$$< , >: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

*que verifica las siguientes propiedades:*

1. $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= \overline{< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} >}; \ \forall \, \boldsymbol{u}, \ \boldsymbol{v} \in V.$
2. $< \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} >=< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} > + < \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} >; \ \forall \, \boldsymbol{u}, \ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V.$
3. $< \boldsymbol{u}, \alpha \boldsymbol{v} >= \alpha < \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >; \ \forall \, \alpha \in \mathbb{C}, \ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \in V.$
4. $\forall \, \boldsymbol{u} \in V, \ < \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} > \geq 0$ *y* $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} >= 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = 0.$

*El producto escalar canónico en $\mathbb{C}^n$ se define como:*

$$< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} v_i; \ \forall \, \boldsymbol{u} = (u_i), \boldsymbol{v} = (v_i).$$

**Ejemplo 1.2.1.-** Consideremos la aplicación

$$< , >: \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que}$$
$$< (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Se verifican fácilmente las propiedades del producto escalar.

---

**Definición 1.7.** *Sea $L$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$. Definimos el **complemento ortogonal** de $L$, y lo denotamos por $L^\perp$, como*

$$L^\perp := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n : \boldsymbol{x} \text{ es ortogonal a todo vector de } L\},$$

*o lo que es lo mismo,*

$$L^\perp := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n :< \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} >= 0, \ \forall \boldsymbol{y} \in L\},$$

*$L^\perp$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$, y además, se tiene que*

$$\mathbb{C}^n = L \oplus L^\perp,$$

*es decir, $L^\perp$ es un subespacio complementario a $L$.*

## 1.3 Norma vectorial

**Definición 1.8.** *Sea $V$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Se define una **norma** (o módulo) de un vector $\boldsymbol{u} \in V$ como una aplicación*

$$\| \ \| : V \longrightarrow \mathbb{R},$$

*que satisface:*

$$\|\boldsymbol{u}\| \geq 0, \ \|\boldsymbol{u}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = 0, \ \forall \boldsymbol{u} \in V. \tag{1.1}$$
$$\|\alpha \boldsymbol{u}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{u}\|; \ \ \forall \alpha \in \mathbb{C}, \ \boldsymbol{u} \in V. \tag{1.2}$$
$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|; \ \ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V. \tag{1.3}$$

*Observación* 1.1. $\|\boldsymbol{u}\|$ es interpretado como la longitud del vector $\boldsymbol{u}$. Por tanto, la desigualdad (1.3), en $\mathbb{R}^2$, establece que la longitud de cualquier lado de un triángulo no es mayor que la suma de los otros dos lados del triángulo.

*Proposición* 1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz). Sea $(V, <\ ,\ >)$ un espacio vectorial con producto escalar, y $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in V$. Entonces

$$| < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > | \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

La igualdad se da si y solamente si un vector es múltiplo del otro.

*Demostración.* Véase [BIG03, página 7, ejercicio 2]

**Definición 1.9.** *Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Se definen las siguientes aplicaciones:*

$$\|\ \|_1 : V \longrightarrow \mathbb{R},\ \textit{tal que}\ \|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \tag{1.4}$$

$$\|\ \|_2 : V \longrightarrow \mathbb{R},\ \textit{tal que}\ \|\boldsymbol{x}\|_2 = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2)^{1/2} \tag{1.5}$$

$$\|\ \|_\infty : V \longrightarrow \mathbb{R},\ \textit{tal que}\ \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \text{máx}\{|x_j| : j \in \overline{1, n}\} \tag{1.6}$$

*Proposición* 1.2. Las aplicaciones definidas anteriormente, (1.4), (1.5), (1.6), cumplen las propiedades (1.1), (1.2), (1.3), y por tanto, podemos afirmar que cada una de ellas es una norma vectorial. Son denominadas $l_1$-norma, $l_2$-norma o norma Euclídea, $l_\infty$-norma o norma de Tchebycheff, respectivamente.

**Definición 1.10.** *Dado un producto escalar $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >$ y la correspondiente norma $\|\boldsymbol{x}\| =< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >^{1/2}$, el ángulo entre dos vectores $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, denotado por $\angle\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$, está definido como*

$$\cos \angle\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} = \frac{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}$$

## 1.4 Matrices

*Nota* 1.6. Dado un cuerpo $\mathbb{F}$, una **matriz** de orden $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{F}$ es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

constituida por $mn$ elementos de $\mathbb{F}$ distribuidos en $m$ filas y $n$ columnas, de forma que $a_{ij}$ denotará al elemento situado en la fila $i$, columna $j$. De forma reducida:

$$A = (a_{ij})$$

*Nota* 1.7. Denotaremos $\mathbb{F}^{m\times n}$ al conjunto de matrices $m \times n$ con elementos en $\mathbb{F}$. En particular,

- $\mathbb{C}^{m\times n}$ $[\mathbb{R}^{m\times n}]$ denota la clase de $m \times n$ matrices complejas [reales].
- $\mathbb{C}_r^{m\times n}$ $[\mathbb{R}^{m\times n}]$ denota la clase de $m \times n$ matrices complejas [reales] de rango r.

**Definición 1.11.** *Se dice que $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ es una matriz* ***cuadrada*** *si $m = n$, es decir, si tiene igual número de filas que de columnas; en otro caso se dirá que $A$ es* ***rectangular****.*

**Definición 1.12.** *Dada una matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, los elementos $a_{ii}, i = 1, \ldots, p$; donde $p = \text{mín}\{m, n\}$, constituyen su* ***diagonal principal****.*

**Definición 1.13.** *La matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ será:*

- ***Diagonal*** *si todos sus elementos fuera de su diagonal principal son cero, es decir, si $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$.*
- ***Triangular superior*** *si todos los elementos por debajo de su diagonal principal son cero, es decir, si $a_{ij} = 0, \forall i > j$.*
- ***Triangular inferior*** *si todos los elementos por encima de su diagonal principal son cero, es decir, si $a_{ij} = 0, \forall i < j$.*

**Definición 1.14.** *Llamaremos* ***matriz identidad*** *de orden $n$ a la matriz cuadrada $I_n$ que tiene $1$ en los elementos de su diagonal principal y $0$ en las restantes posiciones, es decir,*

$$\delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \textit{si } i = j \\ 0, & \textit{en otro caso} \end{array} \right. , \; I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

**Definición 1.15.** *Dada una matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, llamaremos* ***matriz traspuesta*** *de $A$ a la matriz $B = A^t \in \mathbb{F}^{n\times m}$, donde $b_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$. Esto es, si $A$ es la matriz de orden $m \times n$*

$$A =; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

*entonces* $B = A^t$ *es la matriz de orden* $n \times m$

$$B =; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

*Proposición* 1.3. La trasposición de matrices verifica las siguientes propiedades:

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$; $\forall A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$.
2. $(AB)^t = B^t A^t$; $\forall A \in \mathbb{F}^{m\times p}$, $\forall B \in \mathbb{F}^{p\times n}$.
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$; $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall A \in \mathbb{F}^{m\times n}$.

*Demostración.* Véase [MS09, página 32].

**Definición 1.16.** *Dada una matriz* $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$*, llamaremos* ***matriz conjugada traspuesta*** *de* $A$ *a la matriz* $B = A^* \in \mathbb{F}^{n\times m}$*, donde* $b_{ij} = \overline{a_{ji}}, \forall i, j$

**Definición 1.17.** *Dada un matriz cuadrada* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$*, se dice que* $A$ *es* ***simétrica****, si* $A = A^t$*, es decir, si* $a_{ij} = a_{ji}$.

**Definición 1.18.** *Dada un matriz cuadrada* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$*, se dice que* $A$ *es* ***antisimétrica****, si* $A = -A^t$*, es decir, si* $a_{ij} = -a_{ji}$.

**Definición 1.19.** *Dada un matriz cuadrada* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$*, se dice que* $A$ *es* ***hermitiana****, si* $A = A^*$*, es decir, si* $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

**Definición 1.20.** *Dada un matriz cuadrada* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$*, se dice que* $A$ *es* ***antihermitiana****, si* $A = -A^*$*, es decir, si* $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$.

---

**Ejemplo 1.4.1.-**

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7+2i \\ 4 & 5 & 8-i \\ 7-2i & 8+i & 9 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que la matriz $A$ es simétrica, $B$ no es simétrica y $C$ es hermitiana.

**Definición 1.21.** *Dada un matriz cuadrada $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, se dice que $A$ es* ***normal****, si $AA^* = A^*A$.*

**Ejemplo 1.4.2.-**

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

La matriz $A$ es normal, ya que

$$AA^* = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 12 \\ 8 & 25 & 32 \\ 12 & 32 & 45 \end{pmatrix} = A^*A.$$

Sin embargo, $B$ no es una matriz normal, ya que

$$BB^* = \begin{pmatrix} 14 & 32 & 50 \\ 32 & 77 & 122 \\ 50 & 122 & 194 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 66 & 78 & 90 \\ 78 & 93 & 108 \\ 90 & 108 & 126 \end{pmatrix} = B^*B.$$

*Observación* 1.2. En general, toda matriz simétrica real, hermitiana o unitaria, es una matriz normal.

**Definición 1.22.** *Dada un matriz cuadrada $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, se dice que $A$ es* ***idempotente****, si $A = A^2$.*

**Ejemplo 1.4.3.-**

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

es idempotente, ya que $A = A^2$.

---

**Definición 1.23.** *Dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, se dice que $A$ es* ***nilpotente****, si existe un número entero positivo $p$ tal que $A^p = O$.*

**Definición 1.24.** *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ una matriz nilpotente. Denominaremos* ***índice de nilpotencia*** *de $A$ al menor entero positivo $k$ tal que $A^k = O$.*

---

**Ejemplo 1.4.4.-**

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego la matriz $A$ es una matriz nilpotente, con índice de nilpotencia igual a $3$.

---

**Definición 1.25.** *Dadas $A$ y $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, se dice que $B$ es la* ***matriz inversa*** *de $A$ si*

$$AB = BA = I_n.$$

*Diremos entonces que la matriz $A$ es* ***invertible****, o no singular, si existe una matriz inversa de $A$. Denotaremos $A^{-1}$ a la matriz inversa de $A$.*

**Definición 1.26.** *Dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, se dice que $A$ es* ***unitaria****, si $A^* = A^{-1}$ (si $A$ es real, $A^t = A^{-1}$, en este caso se dirá que $A$ es ortogonal).*

**Definición 1.27.** *Llamaremos* ***submatriz*** *de una matriz $A$ a cada matriz que se obtenga de ella suprimiendo algunas de sus filas y columnas.*

---

**Ejemplo 1.4.5.-**

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Una submatriz de $A$ es la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},$$

que se obtiene suprimiendo la última fila y la última columna de $A$.

---

## 1.5 Transformaciones lineales

**Definición 1.28.** *Dados dos espacios vectoriales $U, V$ sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, y una aplicación $T : U \longrightarrow V$; se dice que $T$ es* ***lineal****, o una* ***transformación lineal****, si verifica:*

$$T(\alpha \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha T\boldsymbol{x} + T\boldsymbol{y}, \ \forall \alpha \in \mathbb{F}, \ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U.$$

*El conjunto de transformaciones lineales de $U$ a $V$, denotado $\mathcal{L}(U,V)$, es un espacio vectorial con las operaciones $T_1+T_2$ y $\alpha T$ definidas por*

$$(T_1+T_2)\boldsymbol{u} = T_1\boldsymbol{u} + T_2\boldsymbol{u},\ (\alpha T)\boldsymbol{u} = \alpha(T\boldsymbol{u}),\ \forall \boldsymbol{u} \in U.$$

## 1.6 Imagen, contraimagen y espacio nulo

**Definición 1.29.** *Sea $T \in \mathcal{L}(U,V)$. Llamaremos **imagen** de $T$, denotada por $\operatorname{im}(T)$, al conjunto*

$$\operatorname{im}(T) = \{\boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{v} = T\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u} \in U\}.$$

**Definición 1.30.** *Sea $T \in \mathcal{L}(U,V)$. Para cualquier $\boldsymbol{v} \in \operatorname{im}(T)$, la **imagen inversa** $T^{-1}(\boldsymbol{v})$ es el conjunto*

$$T^{-1}(\boldsymbol{v}) = \{\boldsymbol{u} \in U :\ T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\}.$$

**Definición 1.31.** *Sea $T \in \mathcal{L}(U,V)$. Llamaremos **espacio nulo** (o núcleo) de $T$, denotado por $\operatorname{null}(T)$, a la imagen inversa del vector cero $\mathbf{0} \in V$, es decir,*

$$\operatorname{null}(T) = \{\boldsymbol{u} \in U :\ T\boldsymbol{u} = \mathbf{0}\}.$$

**Definición 1.32.** *Consideremos una transformación lineal $A \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ y dos bases $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ y $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ de $\mathbb{F}^n$ y $\mathbb{F}^m$, respectivamente. La **matriz representación** de $A$ con respecto a las bases $U$ y $V$ es la matriz $m \times n$ $A_{\{U,V\}} = [a_{ij}]$ determinada (únicamente) por*

$$A\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{u}_i,\ j \in \overline{1,n}.$$

*Nota* 1.8. En la práctica habitual se utilizará el mismo símbolo $A$ para denotar a la transformación lineal y a la matriz representación.

*Nota* 1.9. Al igual que para las transformaciones lineales, para cualquier matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ denotaremos:

- **Espacio de columnas** de $A$ al conjunto

$$\mathcal{C}(A) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{F}^m : \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \text{para algún } \boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^n\}. \tag{1.7}$$

- **Espacio nulo** de $A$ al conjunto

$$\operatorname{null}(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^n : A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}. \tag{1.8}$$

**Teorema 1.1.** *Para cualquier* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,

1. $\text{null}(A) = \mathcal{C}(A^*)^\perp$,
2. $\text{null}(A^*) = \mathcal{C}(A)^\perp$.

*Demostración.* Veamos la demostración de cada apartado:

1. Haremos la demostración por doble contención.
   $\boxed{\subset}$ Sea $\boldsymbol{x} \in \text{null}(A)$. Entonces
   $$< A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >=< \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} >= \boldsymbol{0}, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m.$$
   Como
   $$\begin{aligned} < A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > &= \boldsymbol{x}^* A^* \boldsymbol{y} \\ &=< \boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y} >, \end{aligned}$$
   se tiene que
   $$< \boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y} >= \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} \perp A^*\boldsymbol{y}, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m.$$
   Por tanto,
   $$\boldsymbol{x} \perp \mathcal{C}(A^*) \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(A^*)^\perp.$$
   $\boxed{\supset}$ Sea $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(A^*)^\perp$. Entonces
   $$< \boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y} >= \boldsymbol{0}, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m,$$
   luego
   $$< A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= \boldsymbol{0} \Rightarrow A\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m,$$
   Por lo tanto
   $$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \text{null}(A).$$
2. La demostración de este apartado es análoga a la del apartado anterior, tomando en este caso $A = A^*$.

## 1.7 Autovalores y autovectores

**Definición 1.33.** *Sean $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^n$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Se dice que $\lambda$ es un* ***autovalor*** *de $A$ asociado al* ***autovector*** *$\boldsymbol{x}$ si*

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

**Definición 1.34.** *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Llamaremos* ***espectro****, denotado por $\lambda(A)$, al conjunto de los autovalores de $A$.*

**Definición 1.35.** *Sean $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de $A$. Denotaremos por* ***subespacio propio*** *al conjunto*

$$V_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^n : A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}\}$$

*Denominaremos* ***multiplicidad geométrica*** *a la dimensión de este subespacio.*

**Definición 1.36.** *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Llamaremos* ***polinomio característico*** *de $A$, y lo denotaremos $p(\lambda)$, al determinante de la matriz $(A - \lambda I)$.*

*Observación 1.3.* Los autovalores de la matriz $A$ son las soluciones de la ecuación $p(\lambda) = 0$, es decir, las raíces del polinomio característico.

**Definición 1.37.** *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ los distintos autovalores de $A$. Llamaremos* ***multiplicidad algebraica*** *del autovalor $\lambda_j$ a la multiplicidad de $\lambda_j$ como raíz del polinomio característico.*

---

**Ejemplo 1.7.1.-** Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 20 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Su polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 18 = (\lambda - 3)^2(\lambda + 2)$, y por tanto, el espectro de $A$ es $\lambda(A) = \{3, -2\}$, en el que el autovalor $\lambda_1 = 3$ tiene una multiplicidad algebraica igual a 2, y el autovalor $\lambda_2 = -2$ tiene una multiplicidad algebraica igual a 1.

- Obtenemos los subespacios propios de la siguiente manera:
  - Para $\lambda_1 = 3$,
    $V_1(\lambda_1) = \text{null}(A - \lambda_1 I)$,

    $$(A - 3I) = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 20 & 0 & 10 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

    Aplicando Gauss-Jordan a la matriz $(A - 3I)$,

    $$(A{-}3I) = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 20 & 0 & 10 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\underline{G-J}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & -1/2\, x_3 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & x_3 \end{array} \right.$$

    Por tanto

    $$V_1(\lambda_1) =< \boldsymbol{v}_{11} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} > .$$

    Luego la multiplicidad geométrica asociada al autovalor $\lambda_1 = 3$ es $1$.
  - Para $\lambda_2 = 2$,
    $V_1(\lambda_2) = \text{null}(A - \lambda_2 I)$,

    $$(A + 2I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 20 & 5 & 10 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

    Aplicando Gauss-Jordan a la matriz $(A + 2I)$,

    $$(A{+}2I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 20 & 5 & 10 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\underline{G-J}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & -x_3 \\ x_2 & = & 2\, x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{array} \right.$$

    Por tanto

    $$V_1(\lambda_2) =< \boldsymbol{v}_{21} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

    Luego la multiplicidad geométrica asociada al autovalor $\lambda_2 = 2$ es $1$.

*Proposición* 1.4. Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Entonces $A$ es invertible si y solo si $0$ no es un autovalor de $A$.

*Demostración.* $\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $A$ es invertible.
En el caso de que $A$ no tuviera autovalores, entonces, evidentemente, $0$ no sería autovalor de $A$.
Supongamos que para un vector $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

Como $A$ es invertible

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \;&\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} && (\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}) \\ &\Rightarrow\; \lambda \neq 0. \end{aligned}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $0$ no es un autovalor de $A$.
Por reducción al absurdo, supongamos que $A$ no es invertible. Entonces

$$\det(A) = 0 = \det(A - 0I),$$

por tanto, $0$ sería un autovalor de $A$, lo que nos lleva a una contradicción, ya que por hipótesis $0$ no es autovalor de $A$.
Por consiguiente, $A$ es no singular.

∎

*Proposición* 1.5. Sean $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ una matriz no singular, $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de $A$ y $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^n$ un autovector de $A$ asociado al autovalor $\lambda$. Entonces $\boldsymbol{x}$ es también un autovector de $A^{-1}$ asociado al autovalor $\lambda^{-1}$.

*Demostración.* Por definición,

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

Como $A$ es invertible, podemos multiplicar a izquierda por $A^{-1}$,

$$A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\lambda\boldsymbol{x} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = \lambda A^{-1}\boldsymbol{x} \;\Rightarrow\; \lambda^{-1}\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{x}.$$

Por tanto, $\boldsymbol{x}$ es un autovector de $A^{-1}$ asociado al autovalor $\lambda^{-1}$.

∎

**Teorema 1.2.** *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ una matriz normal. Si $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ entonces $A^*\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\boldsymbol{x}$.*

*Demostración.* Supongamos que $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Como $A$ es una matriz normal, se tiene que:

$$(A - \lambda I)(A - \lambda I)^* = (A - \lambda I)(A^* - \overline{\lambda} I) = AA^* - \lambda A^* - \overline{\lambda} A + \lambda\overline{\lambda} I,$$

y

$$(A-\lambda I)^*(A-\lambda I) = (A^*-\overline{\lambda} I)(A-\lambda I) = A^*A-\overline{\lambda}A-\lambda A^*+\lambda\overline{\lambda}I = AA^*-\lambda A^*-\overline{\lambda}A+\lambda\overline{\lambda}I,$$

por tanto $(A - \lambda I)$ también es normal. Entonces,

$$\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} &\Rightarrow (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \\
&\Rightarrow \|(A - \lambda I)\boldsymbol{x}\| = \mathbf{0} && ((A - \lambda I)\text{ normal}) \\
&\Rightarrow \|(A - \lambda I)^*\boldsymbol{x}\| = \mathbf{0} \\
&\Rightarrow \|(A^* - \overline{\lambda} I)\boldsymbol{x}\| = \mathbf{0} \\
&\Rightarrow \|A^*\boldsymbol{x} - \overline{\lambda}\boldsymbol{x}\| = \mathbf{0} \\
&\Rightarrow A^*\boldsymbol{x} - \overline{\lambda}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \\
&\Rightarrow A^*\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

∎

*Proposición 1.6.* Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Entonces $A$ es invertible si y solo si $0$ no es un autovalor de $A$.

*Demostración.* $\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $A$ es invertible.
En el caso de que $A$ no tuviera autovalores, entonces, evidentemente, $0$ no sería autovalor de $A$.
Supongamos que para un vector $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

Como $A$ es invertible

$$\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} &\Rightarrow \boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} && (\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}) \\
&\Rightarrow \lambda \neq 0.
\end{aligned}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $0$ no es un autovalor de $A$.
Por reducción al absurdo, supongamos que $A$ no es invertible. Entonces

$$\det(A) = 0 = \det(A - 0I),$$

por tanto, $0$ sería un autovalor de $A$, lo que nos lleva a una contradicción, ya que por hipótesis $0$ no es autovalor de $A$.
Por consiguiente, $A$ es no singular.

## 1.8 Matriz definida positiva

**Definición 1.38.** *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ una matriz hermitiana. Decimos que $A$ es* ***definida positiva*** *si $\boldsymbol{v}^*A\boldsymbol{v} > 0$ para todo vector $\boldsymbol{v}$ no nulo perteneciente a $\mathbb{F}^n$.*

**Teorema 1.3 (Caracterización de matrices definidas positivas).** *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, una matriz hermitiana. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$A$ es definida positiva.*
2. *Todos los autovalores de $A$ son positivos.*
3. *La matriz $A$ puede ser expresada como $A = B^*B$, para alguna matriz $B$ no singular.*

*Demostración.* Véase [Mey00, capítulo 7, sección 6, páginas 558, 559]

**Definición 1.39.** *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, una matriz hermitiana, decimos que $A$ es* ***semidefinida positiva*** *si $\boldsymbol{v}^*A\boldsymbol{v} \geq 0$, para todo vector $\boldsymbol{v}$ no nulo perteneciente a $\mathbb{F}^n$.*

**Teorema 1.4 (Caracterización de matrices semidefinidas positivas).** *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, una matriz hermitiana. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$A$ es semidefinida positiva.*
2. *Todos los autovalores de $A$ son no negativos.*
3. *La matriz $A$ puede ser expresada como $A = B^*B$, para alguna matriz $B$ con $\operatorname{rango}(B) = \operatorname{rango}(A)$.*

*Demostración.* Véase [Mey00, capítulo 7, sección 6, páginas 566, 567]

**Definición 1.40.** *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, una matriz hermitiana, decimos que $A$ es* ***definida negativa*** *si $\boldsymbol{v}^*A\boldsymbol{v} < 0$, para todo vector $\boldsymbol{v}$ no nulo perteneciente a $\mathbb{F}^n$.*

**Teorema 1.5 (Caracterización de matrices definidas negativas).** *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, una matriz hermitiana. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$A$ es definida negativa.*
2. *Todos los autovalores de $A$ son negativos.*

*Demostración.* Partiendo de la demostración del teorema (1.3) y tomando $-A$ en lugar de $A$, obtendremos el resultado deseado. ∎

**Definición 1.41.** *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, una matriz hermitiana, decimos que $A$ es* ***semidefinida negativa*** *si $\boldsymbol{v}^* A\boldsymbol{v} \leq 0$, para todo vector $\boldsymbol{v}$ no nulo perteneciente a $\mathbb{F}^n$.*

**Teorema 1.6 (Caracterización de matrices semidefinidas negativas).** *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, una matriz hermitiana. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$A$ es semidefinida negativa.*
2. *Todos los autovalores de $A$ son no positivos.*

*Demostración.* Partiendo de la demostración del teorema (1.4)[página 22] y tomando $-A$ en lugar de $A$, obtendremos el resultado deseado. ∎

*Observación 1.4.* Si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ no es ninguno de los tipos anteriores, (definiciones (1.38)[página 22], (1.39)[página 22], (1.40)[página 22], (1.41)[página 23]), entonces se dice que $A$ es **indefinida**.

---

**Ejemplo 1.8.1.-**

1. Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
El espectro de la matriz $A$ es $\lambda(A) = \{5, 2, -1\}$. Por tanto, $A$ es indefinida.
2. La matriz identidad es definida positiva.

---

## 1.9 Descomposición en valores singulares

*Lema* 1.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, entonces

$$\text{rango}(AA^*) = \text{rango}(A) = \text{rango}(A^*A).$$

*Demostración.* Véase [BIG03, página 46].

*Observación* 1.5. Como consecuencia del lema anterior, tenemos que

$$\mathcal{C}(AA^*) = \mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A^*A).$$

**Definición 1.42.** *Sea $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ los autovalores no nulos de la matriz semidefinida positiva $A^*A$. Se definen los* ***valores singulares*** *de $A$, denotados por $\sigma_j(A)$, $j \in \overline{1,r}$, como*

$$\sigma_j(A) = +\sqrt{\lambda_j(A^*A)},\ j \in \overline{1,r}.$$

*Habitualmente, los valores singulares son ordenados en forma decreciente, es decir,*

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0.$$

**Teorema 1.7 (Descomposición en valores singulares (SVD)).** *Sean $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ y*

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$$

*los valores singulares de $A$.*
*Entonces existen matrices unitarias $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que la matriz*

$$\Sigma_{m\times n} = U^*AV = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sigma_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

*es diagonal.*

*Demostración.* Véase [BIG03, página 206]

---

**Ejemplo 1.9.1.-** Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculemos la descomposición en valores singulares de $A$.

- Calculamos $A^tA$:
$$A^tA = \begin{pmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{pmatrix}.$$
- Los autovalores de la matriz $A^tA$ son: $\lambda_1 = 360$, $\lambda_2 = 90$, $\lambda_3 = 0$.
- Determinamos los autovalores de $A^tA$ no nulos, y ordenamos. En nuestro caso, $r = 2$.
- Los espacios de autovectores de $A^tA$ correspondientes a cada autovalor son:
Para $\lambda_1 = 360$,
$V_1(\lambda_1) = \text{null}(A^tA - \lambda_1 I)$,
$$(A^tA - 360I) = \begin{pmatrix} -280 & 100 & 40 \\ 100 & -190 & 140 \\ 40 & 140 & -160 \end{pmatrix}$$
Aplicando Gauss-Jordan a la matriz $(A^tA - 360I)$,
$$(A^tA - 360I) \; \underrightarrow{G - J} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &= 1/2x_3 \\ x_2 &= x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{cases}$$
Por tanto
$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{w}_1\|}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$
Para $\lambda_2 = 90$,
$V_1(\lambda_2) = \text{null}(A^tA - \lambda_2 I)$,
$$(A^tA - 90I) = \begin{pmatrix} -10 & 100 & 40 \\ 100 & 80 & 140 \\ 40 & 140 & 110 \end{pmatrix}$$

Aplicando Gauss-Jordan a la matriz $(A^tA - 90I)$,

$$(A^tA{-}90I) = \begin{pmatrix} -10 & 100 & 40 \\ 100 & 80 & 140 \\ 40 & 140 & 110 \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & -x_3 \\ x_2 & = & 1/2\, x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{array} \right.$$

Por tanto

$$\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{w}_2\|}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_3 = 0$,
$V_1(\lambda_3) = \text{null}(A^tA - \lambda_3 I)$,

$$(A^tA - 0I) = \begin{pmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{pmatrix}$$

Aplicando Gauss-Jordan a la matriz $(A^tA - 0I)$,

$$(A^tA{-}0I) = \begin{pmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & 2\, x_3 \\ x_2 & = & -2\, x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{array} \right.$$

Por tanto

$$\boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{w}_3\|}\boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

- Una base ortonormal de autovectores de $A^tA$ es:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix},$$

con $\boldsymbol{v}_i$ asociado a $\lambda_i$.
- Los valores singulares de $A$ son:

$$\sigma_1 = \sqrt{360} = 6\sqrt{10},$$
$$\sigma_2 = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

- La matriz de valores singulares es:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Vamos a calcular $U$, para ello definimos:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{6\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{3\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

Donde $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ forman una base de $\mathbb{R}^2$, y por tanto

$$U = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

- La descomposición en valores singulares de $A$ es:

$$A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

---

## 1.10 Factorización de rango pleno

**Definición 1.43.** *Sea la matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Llamaremos* ***pivote*** *(o término líder) de una fila (o columna) de $A$, al primer elemento no nulo de dicha fila (o columna), si es que existe alguno.*

**Definición 1.44.** *Sea la matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se dice que $A$ está en* ***forma escalonada reducida por filas*** *si verifica:*

- *Si $A$ tiene una fila compuesta enteramente de ceros (fila nula), entonces todas las filas por debajo de ella son también nulas.*

- *Los elementos que aparecen en la misma columna que el pivote de una fila y debajo de él son todos nulos.*
- *El pivote de cada fila es* $1$.
- *Todas las entradas por encima del pivote son cero.*

*Nota* 1.10. De forma análoga a la definición (1.44)[página 27] se define el concepto de matriz en **forma escalonada reducida por columnas**.

---

**Ejemplo 1.10.1.-**

Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

La matriz $A$ no es escalonada reducida por filas, ya que el pivote de la segunda fila no es $1$. La matriz $B$ tampoco es escalonada reducida por filas, ya que en la tercera columna deberían ser cero todos los elementos salvo el pivote de la tercera fila. La matriz $C$ sí es una matriz escalonada reducida por filas.

---

**Definición 1.45.** *Sea la matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se dice que $A$ es de* ***rango pleno por filas*** *si* $\text{rango}(A) = m$*, o equivalentemente, si* $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}^m$.

*Análogamente, diremos que $A$ es de* ***rango pleno por columnas*** *si* $\text{rango}(A) = n$.

*Observación* 1.6. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, es decir, $A$ es una matriz cuadrada, entonces es equivalente ser de rango pleno por filas que ser de rango pleno por columnas.

**Definición 1.46.** *Sea la matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Llamaremos* ***factorización de rango pleno*** *de $A$ a una descomposición de $A$ en el producto de una matriz de rango pleno por columnas y una matriz de rango pleno por filas.*

*Lema 1.2.* Sea $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, $r > 0$. Entonces, existen matrices $F \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$ y $G \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$ tales que

$$A = FG.$$

*Demostración.* Véase [BIG03, página 26]

---

**Ejemplo 1.10.2.-**

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos una forma escalonada reducida por filas de $A$. Aplicamos Gauss-Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y, en consecuencia, $\operatorname{rango}(A) = 3$. Por tanto, la matriz $G$ es una matriz de rango pleno por filas. Y la matriz $F$ sería la matriz formada por las columnas básicas de $A$, es decir

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

donde $\operatorname{rango}(F) = 3$, y por consiguiente, $F$ es una matriz de rango pleno por columnas. Luego, obtenemos que, una factorización de rango pleno de $A$ es:

$$A = FG = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

## 1.11 Forma canónica de Jordan

**Definición 1.47.** *Un* ***bloque de Jordan*** *de orden $k$ es una matriz cuadrada con $k$ filas y $k$ columnas que tiene todos los elementos de la diagonal idénticos, la línea por encima de la diagonal está formada por unos y los restantes elementos son cero. Es decir, $B(\lambda) = (b_{ij})$ es un bloque de Jordan de orden $k$ si*

$$b_{ij} = \begin{cases} \lambda, & \textit{si } i = j \\ 1, & \textit{si } i+1 = j \\ 0, & \textit{en otro caso} \end{cases}, \quad B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

---

**Ejemplo 1.11.1.-**

Un bloque de Jordan de orden $1$ es un número.

Un bloque de Jordan de orden $2$ tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Y uno de orden $3$:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

---

**Definición 1.48.** *Un* ***segmento de Jordan****, $J(\lambda_1)$, es una matriz diagonal por bloques*

$$J(\lambda_1) = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{t_1}(\lambda_1) \end{pmatrix}$$

*donde cada caja $J_k(\lambda_1)$ es un bloque de Jordan de un cierto orden.*

**Definición 1.49.** *Una **matriz de Jordan** es una matriz diagonal por bloques de manera que cada bloque es un segmento de Jordan, es decir, una matriz $J$ es de Jordan si*

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & O & \dots & O \\ O & J(\lambda_2) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & J(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

*donde cada $J(\lambda_i)$ es un segmento de Jordan. Dicho de otro modo, una matriz de Jordan es una matriz diagonal por bloques, donde cada bloque es un bloque de Jordan.*

Una matriz de Jordan sería, por ejemplo

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

**Teorema 1.8 (Forma canónica de Jordan).** *Sean la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ el conjunto de los autovalores distintos de $A$. Entonces, $A$ es semejante a una matriz de Jordan, es decir, existe una matriz $P$ no singular tal que*

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & O & \dots & O \\ O & J(\lambda_2) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & J(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

*donde $J$ tiene un segmento de Jordan por cada autovalor $\lambda_j$, $j \in \overline{1, s}$*

*Demostración.* Véase [MS09, capítulo IV, sección 2.6]

**Ejemplo 1.11.2.-**

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$, con multiplicidades algebraicas $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$, respectivamente.

Siguiendo el proceso constructivo de la demostración del teorema, una matriz de Jordan asociada a la matriz $A$ sería:

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

con matriz de paso:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

**Definición 1.50.** *Llamaremos **índice** del autovalor $\lambda_i$, y lo denotaremos por $\nu_{\lambda_i}$ a la dimensión del bloque de Jordan más grande en el segmento de Jordan $J(\lambda_j)$.*

---

**Ejemplo 1.11.3.-**

Sea la matriz $J$ del ejemplo anterior (1.11.2, página 32)

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

En ella, el índice del autovalor $\lambda_1 = -1$ es 1, y el índice del autovalor $\lambda_2 = 1$ es 2.

---

# 2 Inversas Generalizadas

En el capítulo anterior se introdujo el concepto de matriz inversa respecto de una matriz dada, (véase definición (1.25)[página 15]). Para ello era necesario disponer de una matriz cuadrada. Sin embargo, para numerosas aplicaciones matemáticas se hace necesario el cálculo de la inversa de matrices singulares o incluso rectangulares, por ejemplo, para la resolución de ecuaciones matriciales lineales. Es aquí donde nace el concepto de inversa generalizada de una matriz. En este capítulo introduciremos dicho concepto como la única solución de un cierto conjunto de ecuaciones, estudiaremos algunos de los conjuntos de matrices derivados de la misma, varias de sus propiedades más importantes y sus métodos de construcción. Será necesario para el seguimiento de este capítulo los conceptos, resultados y notaciones del capítulo anterior. Las publicaciones [BIG03] y [CM09] han servido de guía para su realización.

## 2.1 Inversa de Moore-Penrose

**Definición 2.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ una matriz. Se llamará* ***inversa de Moore-Penrose*** *de $A$, y la denotaremos como $A^+$, a toda matriz $X$ que satisfaga las siguientes ecuaciones:*

$$AXA = A, \tag{1}$$
$$XAX = X, \tag{2}$$
$$(AX)^* = AX, \tag{3}$$
$$(XA)^* = XA. \tag{4}$$

*Observación* 2.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz. Si $A$ es no singular, entonces $X = A^{-1}$, satisfaciendo las cuatro ecuaciones anteriores.

*Nota* 2.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ una matriz. El conjunto $A\{i, j, \ldots, k\}$ denotará al conjunto de matrices $X \in \mathbb{F}^{n\times m}$ que satisfacen las ecuaciones $(i), (j), \ldots, (k)$. Una matrix

$X \in A\{i, j, \ldots, k\}$ es llamada **{ i, j,. . . , k }-inversa** de $A$, y también $A^{\{i,j,\ldots,k\}}$.

*Proposición* 2.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ una matriz. Si el conjunto $A\{1, 2, 3, 4\}$ es no vacío, entonces dicho conjunto está formado por un único elemento.

*Demostración.* Sean $X, Y \in A\{1, 2, 3, 4\}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
X &= XAX && \text{(por ecuación (3))}\\
&= X(AX)^* && \\
&= XX^*A^* && \text{(por ecuación (1))}\\
&= XX^*A^*Y^*A^* && \\
&= X(AX)^*(AY)^* && \text{(por ecuación (3))}\\
&= XAXAY && \text{(por ecuación (2))}\\
&= XAY && \text{(por ecuación (1))}\\
&= XAYAY && \text{(por ecuación (4))}\\
&= (XA)^*(YA)^*Y && \\
&= A^*X^*A^*Y^*Y && \text{(por ecuación (1))}\\
&= A^*Y^*Y && \\
&= (YA)^*Y && \text{(por ecuación (4))}\\
&= YAY && \text{(por ecuación (2))}\\
&= Y.
\end{aligned}
$$

∎

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, sabemos ya del carácter único de la $\{1, 2, 3, 4\}$-inversa de $A$. En las secciones siguientes comprobaremos que otros conjuntos $A\{i, j, \ldots, k\}$ no constarán de un único elemento.

---

**Ejemplo 2.1.1.-**

Consideremos la matriz $m \times n$

$$\Sigma = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \sigma_1 & & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sigma_r & & & \\ \hline & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

con $\sigma_i \neq 0$, $i \in \overline{1,r}$.
Entonces $\Sigma^+$ es una matriz $n \times m$ de la forma:

$$\Sigma^+ = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1/\sigma_1 & & & & & & \\ & 1/\sigma_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1/\sigma_r & & & \\ \hline & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

Se comprueba de manera muy sencilla que la matriz $\Sigma^+$ es la inversa de Moore-Penrose de la matriz $\Sigma$, mediante la multiplicación por bloques:

1. $\Sigma\Sigma^+\Sigma = \Sigma$,
2. $\Sigma^+\Sigma\Sigma^+ = \Sigma^+$,
3. $(\Sigma\Sigma^+)^* = \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix} = \Sigma\Sigma^+$,
4. $(\Sigma^+\Sigma)^* = \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix} = \Sigma^+\Sigma$.

---

*Observación 2.2.* Veremos en una sección posterior (sección 2.4[página 44]) algoritmos para el cálculo de la inversa de Moore-Penrose de una matriz dada.

*Proposición 2.2.* Sea $H$ una matriz hermitiana e idempotente, entonces

$$H^+ = H.$$

*Demostración.* Comprobemos que $H^+ = H$. Para ello veamos que $H$ satisface las ecuaciones (1)[página 33], (2)[página 33], (3)[página 33] y (4)[página 33]:

1. $HH^+H = HHH = H^2H = HH = H^2 = H$,
2. $H^+HH^+ = HHH = H^2H = HH = H^2 = H$,
3. $(HH^+)^* = (HH)^* = H^*H^* = HH$,
4. $(H^+H)^* = (HH)^* = H^*H^* = HH$.

Luego,

$$H^+ = H.$$

## 2.2 $\{1\}$-inversas

**Teorema 2.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ una matriz y sean $E \in \mathbb{C}_m^{m\times m}$ y $P \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ dos matrices tales que*

$$EAP = \begin{pmatrix} I_r & K \\ O & O \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

*Entonces, para cualquier matriz $L \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$, la matriz*

$$X = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & L \end{pmatrix} E \tag{2.2}$$

*es una $\{1\}$-inversa de $A$.*

*Demostración.* Reescribiendo la ecuación (2.1) como

$$A = E^{-1} \begin{pmatrix} I_r & K \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1},$$

verificamos que

$$AXA = E^{-1} \begin{pmatrix} I_r & K \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}\, P \begin{pmatrix} I_r & K \\ O & L \end{pmatrix} E\, E^{-1} \begin{pmatrix} I_r & K \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} =$$

$$= E^{-1} \begin{pmatrix} I_r & K \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} = A.$$

*Observación 2.3.* Al ser $P$ y $E$ matrices no singulares, teniendo en cuenta la expresión (2.2)[página 36], el rango de $X$ será igual al rango de

$$P \begin{pmatrix} I_r & K \\ O & L \end{pmatrix} E$$

Luego,

$$\begin{aligned} \text{rango}(X) &= \text{rango}(A) + \text{rango}(L) \qquad (2.3) \\ &= r + \text{rango}(L), \qquad (2.4) \end{aligned}$$

donde la matriz $L$ es arbitraria.

*Observación 2.4.* Dada una matriz $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$. Sea $E_A = EA$ la forma escalonada reducida por filas de $A$, donde $E$ son las transformaciones elementales por filas de $A$. Entonces, haciendo una permutación de las columnas de $E_A$ obtenemos una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} I_r & K \\ O & O \end{pmatrix}.$$

---

**Ejemplo 2.2.1.-** Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $\text{rango}(A) = 2$.

Sean

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que verifican

$$EAP = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos ahora,

$$L = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Por tanto, una $\{1\}$-inversa de $A$ es, por el teorema (2.1)[página 36]:

$$\begin{aligned} X = {} & P \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & L \end{pmatrix} E = \\ = {} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \\ = {} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha/2 & \alpha/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ \beta/2 & \beta/3 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En este punto observamos que el conjunto $A\{1\}$ no consta de un único elemento, y que además, está formado por matrices de distinto rango. A continuación, veamos un ejemplo:
Sean

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ambas matrices, $X_1$ y $X_2$, son $\{1\}$-inversas de $A$; siendo

$$\text{rango}(X_1) = 3 \neq 2 = \text{rango}(X_2).$$

---

**Definición 2.2.** *Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, denotaremos por $\lambda^+$ a*

$$\lambda^+ = \begin{cases} \lambda^{-1}, & si\ \lambda \neq 0 \\ 0, & si\ \lambda = 0 \end{cases}$$

*Lema* 2.1. Sea $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces:

1. $(A^{\{1\}})^* \in A^*\{1\}$.
2. Si la matriz $A$ es no singular, entonces $A^{\{1\}} = A^{-1}$.
3. $\lambda^+ A^{\{1\}} \in (\lambda A)\{1\}$.
4. $\mathrm{rango}(A^{\{1\}}) \geq \mathrm{rango}(A)$.
5. Si las matrices $S$ y $T$ son no singulares, entonces $T^{-1}A^{\{1\}}S^{-1} \in SAT\{1\}$.
6. $AA^{\{1\}}$ y $A^{\{1\}}A$ son idempotentes y tienen el mismo rango que $A$.

*Demostración.* Sea la matriz $X \in A\{1\}$,

1. $A^*X^*A^* = (AXA)^* = A^*$.
2. Sea ahora $A$ una matriz no singular, es decir, existe $A^{-1}$ tal que

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A.$$

   Entonces

$$AA^{-1}A = A.$$

3. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\lambda A \lambda^+ X \lambda A = \lambda \lambda^+ \lambda AXA = \lambda A.$$

4. Basta tener en cuenta que el rango de un producto de matrices no es superior al rango de cualquiera de los factores,

$$\mathrm{rango}(A) = \mathrm{rango}(AXA) \leq \mathrm{rango}(X)$$

5. Sean la matrices $S$ y $T$ no singulares. Entonces

$$SATT^{-1}XS^{-1}SAT = SAXAT = SAT.$$

6. Recordemos que una matriz $A$ se dice que es idempotente si $A = A^2$.

$$(AX)^2 = AXAX = AX,$$
$$(XA)^2 = XAXA = XA.$$

   Por otro lado,

$$\mathrm{rango}(XA) \leq \mathrm{rango}(A) = \mathrm{rango}(AXA) \leq \mathrm{rango}(XA),$$
$$\mathrm{rango}(AX) \leq \mathrm{rango}(A) = \mathrm{rango}(AXA) \leq \mathrm{rango}(AX).$$

   Por tanto, $\mathrm{rango}(AX) = \mathrm{rango}(XA) = \mathrm{rango}(A)$.

*Lema 2.2.* Sea $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$. Entonces:

1. $A^{\{1\}}A = I_n$ si y solo si $r = n$. En este caso se dice que $A^{\{1\}}$ es una $\{1\}$-inversa a izquierda de $A$.
2. $AA^{\{1\}} = I_m$ si y solo si $r = m$. En este caso se dice que $A^{\{1\}}$ es una $\{1\}$-inversa a derecha de $A$.

*Demostración.* Veamos la demostración de cada uno de los apartados del lema.

1. $\boxed{\Leftarrow}$ Si $r = n$, entonces $A^{\{1\}}A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, y por el lema (2.1)[apartado 6, página 39], $A^{\{1\}}A$ es idempotente.
Luego,

$$(A^{\{1\}}A)^2 = A^{\{1\}}A \Rightarrow A^{\{1\}}AA^{\{1\}}A(A^{\{1\}}A)^{-1} = A^{\{1\}}A(A^{\{1\}}A)^{-1}$$
$$\Rightarrow A^{\{1\}}A = I_n.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $A^{\{1\}}A = I_n$, entonces $\mathrm{rango}(A^{\{1\}}A) = n$, y por el lema (2.1)[apartado 6, página 39], $\mathrm{rango}(A) = n \Rightarrow r = n$.
De manera similar probamos el punto 2 del lema.

*Proposición 2.3.* Sean las matrices $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $A^{\{1\}} \in A\{1\}$. Entonces,

$$\mathcal{C}(AA^{\{1\}}) = \mathcal{C}(A), \mathrm{null}(A^{\{1\}}A) = \mathrm{null}(A) \text{ y } \mathcal{C}((A^{\{1\}}A)^*) = \mathcal{C}(A^*).$$

*Demostración.* Tenemos que

$$\mathcal{C}(A) \supset \mathcal{C}(AA^{\{1\}}) \supset \mathcal{C}(AA^{\{1\}}A) = \mathcal{C}(A),$$

luego todos las contenciones son igualdades, y tendríamos que

$$\mathcal{C}(AA^{\{1\}}) = \mathcal{C}(A).$$

Análogamente,

$$\mathrm{null}(A) \subset \mathrm{null}(A^{\{1\}}A) \subset \mathrm{null}(AA^{\{1\}}A) = \mathrm{null}(A),$$

y por tanto

$$\mathrm{null}(AA^{\{1\}}) = \mathrm{null}(A).$$

Finalmente, por el lema (2.1)[apartado 1, página 39],

$$\mathcal{C}(A^*) \supset \mathcal{C}(A^*(A^{\{1\}})^*) = \mathcal{C}((A^{\{1\}}A)^*) \supset \mathcal{C}(A^*(A^{\{1\}})^*A^*) = \mathcal{C}(A^*),$$

luego

$$\mathcal{C}((A^{\{1\}}A)^*) = \mathcal{C}(A^*).$$

∎

De forma más general:

*Proposición 2.4.* Para cualesquiera dos matrices $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{n\times s}$, se tiene que:

1. $\mathcal{C}(AB) = \mathcal{C}(A)$ si y solo si $\operatorname{rango}(AB) = \operatorname{rango}(A)$, y
2. $\operatorname{null}(AB) = \operatorname{null}(B)$ si y solo si $\operatorname{rango}(AB) = \operatorname{rango}(B)$.

*Demostración.* Veamos la demostración de cada apartado

1. En primer lugar, sabemos que $\mathcal{C}(AB) \subset \mathcal{C}(A)$.
   Sea ahora $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(AB)$. Entonces
   $$\boldsymbol{x} = AB\boldsymbol{u} = A(B\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u'},$$
   por tanto, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(A)$.
   Luego $\dim(\mathcal{C}(AB)) = \dim(\mathcal{C}(A))$, y en consecuencia, $\operatorname{rango}(AB) = \operatorname{rango}(A)$.
2. Primeramente, sabemos que $\operatorname{null}(B) \subset \operatorname{null}(AB)$.
   Por otro lado, tenemos que la dimensión del espacio de columnas de cualquier matriz es el número de columnas menos su rango. Entonces, como las matrices $AB$ y $B$ tienen el mismo número de columnas, deben tener el mismo rango para que $\operatorname{null}(AB) = \operatorname{null}(B)$.

∎

## 2.3 $\{1,2\}$-inversas

*Lema 2.3.* Sea la matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, y sean las matrices $Y, Z \in A\{1\}$, tales que

$$X = YAZ.$$

Entonces $X \in A\{1,2\}$.

*Demostración.* Vamos a comprobar que $X \in A\{1,2\}$. Para ello, primero veremos que cumple la propiedad (1) de la definición (2.1, página 33):

$$AXA = AYAZA = AZA = A.$$

Veamos que cumple la propiedad (2) de la definición (2.1)[página 33]:

$$XAX = YAZAYAZ = YAYAZ = YAZ = X.$$

Por tanto $X \in A\{1,2\}$.

**Teorema 2.2 (Bjerhammar).** *Sean las matrices* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *y* $X \in A\{1\}$. *Entonces* $X \in A\{1,2\}$ *si y solo si* $\operatorname{rango}(X) = \operatorname{rango}(A)$.

*Demostración.* Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ , tal que $X \in A\{1\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $\operatorname{rango}(X) = \operatorname{rango}(A)$.
Primeramente tenemos que $\mathcal{C}(XA) \subset \mathcal{C}(A)$. Y sabemos por el lema (2.1)[apartado 6, página 39], que $\operatorname{rango}(XA) = \operatorname{rango}(A)$. Por tanto, las dimensiones de $\mathcal{C}(XA)$ y $\mathcal{C}(A)$ coinciden, es decir, $\mathcal{C}(XA) = \mathcal{C}(A)$. Entonces, para alguna matriz $Y$, se cumple que

$$XAY = X.$$

Luego

$$AX = AXAY = AY,$$

y de ahí

$$XAX = X.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos ahora que $X \in A\{1,2\}$.
Como, en particular, $X \in A\{1\}$, por el lema (2.1)[apartados 6 y 4, página 39]:

$$\operatorname{rango}(X) \geq \operatorname{rango}(A), \text{ y } \operatorname{rango}(XA) = \operatorname{rango}(A).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\operatorname{rango}(X) = \operatorname{rango}(XAX) &\leq \operatorname{mín}\{\operatorname{rango}(XA), \operatorname{rango}(X)\} = \\ &= \operatorname{mín}\{\operatorname{rango}(A), \operatorname{rango}(X)\} = \\ &= \operatorname{rango}(A).\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathrm{rango}(X) = \mathrm{rango}(A)$.

∎

*Observación 2.5.* A partir del teorema (2.2)[página 42] y de la ecuación (2.3)[página 37], llegamos a que una $\{1\}$-inversa es una $\{1,2\}$-inversa si tomamos la matriz $L$ del teorema (2.1)[página 36], igual a la matriz nula. Es decir,

$$X = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} E,$$

donde las matrices $P$ y $E$ satisfacen las condiciones del teorema (2.1)[página 36].

---

**Ejemplo 2.3.1.-** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como comprobamos en el ejemplo (2.2.1)[página 37], la matriz

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es una $\{1\}$-inversa de $A$, con $\mathrm{rango}(X_2) = 2 = \mathrm{rango}(A)$, luego, por el teorema (2.2)[página 42], $X_2$ es una $\{1,2\}$-inversa de $A$. Cumpliéndose

$$X_2AX_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X_2.$$

---

## 2.4 $\{1,2,3\}$-, $\{1,2,4\}$-, $\{1,2,3,4\}$-inversas

Bjerhammar, véase teorema (2.2)[página 42], prueba que la existencia de una $\{1\}$-inversa de un matriz implica la existencia de una $\{1,2\}$-inversa de dicha matriz. Sin embargo, para la existencia de una $\{1,2,3\}$-inversa y una $\{1,2,4\}$-inversa de una matriz dada, deberemos utilizar la $\{1\}$-inversa de una matriz relacionada con ella.

**Teorema 2.3.** *Sea la matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, entonces*

$$Y = (A^*A)^{\{1\}}A^* \in A\{1,2,3\}, \text{ y}$$

$$Z = A^*(AA^*)^{\{1\}} \in A\{1,2,4\}.$$

*Demostración.*

- Probemos que $Y = (A^*A)^{\{1\}}A^* \in A\{1,2,3\}$: Sabemos que

$$\mathcal{C}(A^*A) = \mathcal{C}(A^*),$$

y por tanto, para alguna matriz $U$ tenemos que

$$A^* = A^*AU.$$

Si tomamos la traspuesta conjugada

$$(A^*)^* = (A^*AU)^*; A = U^*A^*A.$$

Luego, tomando $Y = (A^*A)^{\{1\}}A^*$,

$$AYA = U^*A^*A(A^*A)^{\{1\}}A^*U^*A^*A = U^*A^*A = A.$$

En consecuencia $Y \in A\{1\}$.

Por otra parte, tenemos que por el lemma (2.1)[apartado 4, página 39]

$$\text{rango}(Y) \geq \text{rango}(A).$$

Pero, por definición de la matriz $Y$, $\text{rango}(Y) \leq \text{rango}(A^*) = \text{rango}(A)$. Lo que nos lleva a que

$$\text{rango}(Y) = \text{rango}(A),$$

y por el teorema (2.2)[página 42],$Y \in A\{1,2\}$.
Veamos ahora que $Y \in A\{3\}$:

$$AY = U^*A^*A(A^*A)^{\{1\}}A^*A = U^*A^*AU, \text{ y}$$

$$(AY)^* = (U^*A^*A(A^*A)^{\{1\}}A^*)^* = U^*A^*AU.$$

Luego

$$Y = (A^*A)^{\{1\}}A^* \in A\{1,2,3\}.$$

- Comprobaremos a continuación que la matriz $Z = A^*(AA^*)^{\{1\}} \in A\{1,2,4\}$:
  Sabemos que
  $$\mathcal{C}(AA^*) = \mathcal{C}(A),$$
  y por tanto, para alguna matriz $U$ tenemos que
  $$A = AA^*U.$$
  Si tomamos la traspuesta conjugada
  $$A = AA^*U; A^* = (AA^*U)^*; A^* = U^*AA^*.$$
  Luego, tomando $Z = A^*(AA^*)^{\{1\}}$,
  $$AZA = AA^*(AA^*)^{\{1\}}AA^*U = AA^*U = A.$$
  En consecuencia $Z \in A\{1\}$.

  Por otra parte, tenemos que por el lemma (2.1)[apartado 4, página 39]
  $$\text{rango}(Z) \geq \text{rango}(A).$$
  Pero, por definición de la matriz $Z$, $\text{rango}(Z) \leq \text{rango}(A^*) = \text{rango}(A)$. Lo que nos lleva a que
  $$\text{rango}(Z) = \text{rango}(A),$$
  y por el teorema (2.2)[página 42], $Z \in A\{1,2\}$.
  Veamos ahora que $Z \in A\{4\}$:
  $$ZA = A^*(AA^*)^{\{1\}}AA^*U = U^*AA^*(AA^*)^{\{1\}}AA^*U = U^*AA^*U, \text{ y}$$
  $$\begin{aligned}(ZA)^* = (A^*(AA^*)^{\{1\}}AA^*U)^* = U^*AA^*((AA^*)^{\{1\}})^*A = \\ = U^*AA^*((AA^*)^{\{1\}})^*AA^*U = U^*AA^*U.\end{aligned}$$
  Luego
  $$Z = A^*(AA^*)^{\{1\}} \in A\{1,2,4\}.$$

∎

**Ejemplo 2.4.1.-** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ con } A^* = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$A^*A = \begin{pmatrix} 14 & 28 & -13 & -12 \\ 28 & 56 & -26 & -24 \\ -13 & -26 & 13 & 13 \\ -12 & -24 & 13 & 14 \end{pmatrix}, \text{ y } AA^* = \begin{pmatrix} 28 & -42 & -8 \\ -42 & 63 & 12 \\ -8 & 12 & 6 \end{pmatrix},$$

donde $\text{rango}(A^*A) = 2 = \text{rango}(AA^*)$.

- Calculemos una $\{1\}$-inversa de $(A^*A)$:
  Sean

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 14/13 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tales que

$$E(A^*A)P = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Tomemos ahora,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una $\{1\}$-inversa de $(A^*A)$ es, por el teorema (2.1)[página 36]:

$$X = P \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 14/13 & 0 \\ 0 & -1/2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cumpliendo

$$(A^*A)X(A^*A) = A^*A.$$

- Calculemos ahora una $\{1\}$-inversa de $(AA^*)$:
  Sean
$$E' = \begin{pmatrix} 3/52 & 0 & 1/13 \\ 1/13 & 0 & 7/26 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
  tales que
$$E'(AA^*)P' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
  Tomemos ahora,
$$L' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
  Por tanto, una $\{1\}$-inversa de $(AA^*)$ es, por el teorema (2.1)[página 36]:
$$X' = P' \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & L' \end{pmatrix} E' = \begin{pmatrix} 29/52 & 1/3 & 1/13 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/13 & 0 & 7/26 \end{pmatrix}.$$
  Cumpliendo
$$(AA^*)X'(AA^*) = AA^*.$$
- Por consiguiente, según el teorema (2.3)[página 44], una $\{1,2,3\}$-inversa de $A$ vendría dada por:
$$Y = (A^*A)^{\{1\}}A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/13 & -3/13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Por último, una $\{1,2,4\}$-inversa de $A$ sería:
$$Z = A^*(AA^*)^{\{1\}} = \begin{pmatrix} -27/26 & -2/3 & 3/26 \\ -27/13 & -4/3 & 3/13 \\ 29/26 & 2/3 & 2/13 \\ 31/26 & 2/3 & 11/26 \end{pmatrix}.$$

Claramente, una $\{1,2\}$-inversa de una matriz dada, $A$, es una $\{2\}$-inversa de $A$; de forma similar, una $\{1,2,3\}$-inversa de $A$, es una $\{1,3\}$-inversa de $A$ y una $\{2,3\}$-inversa de $A$. De este modo, si conseguimos demostrar la existencia de una $\{1,2,3,4\}$-inversa de $A$, tendremos demostrada la existencia de todas las posibles combinaciones de uno, dos o tres enteros del conjunto $\{1,2,3,4\}$.

**Teorema 2.4.** *Sea la matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, entonces*

$$A^{\{1,4\}}AA^{\{1,3\}} = A^{+}.$$

*Demostración.* Sea $X = A^{\{1,4\}}AA^{\{1,3\}}$. Por el lema (2.3)[página 41], tenemos que $X \in A\{1,2\}$.
Además, tenemos que:

$$\begin{aligned} AX &= AA^{\{1,4\}}AA^{\{1,3\}} = AA^{\{1,3\}}, \text{ y} \\ XA &= A^{\{1,4\}}AA^{\{1,3\}}A = A^{\{1,4\}}A. \end{aligned}$$

Pero, por definición, $AA^{\{1,3\}}$ y $A^{\{1,4\}}A$ son hermitianas. Luego

$$X \in A\{1,2,3,4\}.$$

---

**Ejemplo 2.4.2.-** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En el ejemplo (2.4.1)[página 46], construimos las matrices

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/13 & -3/13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } Z = \begin{pmatrix} -27/26 & -2/3 & 3/26 \\ -27/13 & -4/3 & 3/13 \\ 29/26 & 2/3 & 2/13 \\ 31/26 & 2/3 & 11/26 \end{pmatrix},$$

tales que $Y \in A\{1,3\}$ y $Z \in A\{1,4\}$.

Sea ahora la matriz

$$B = ZAY = \begin{pmatrix} -2/169 & 3/169 & 3/26 \\ -4/169 & 6/169 & 3/13 \\ 6/169 & -9/169 & 2/13 \\ 10/169 & -15/169 & 11/26 \end{pmatrix},$$

que cumple:

$$\begin{aligned} ABA &= A, \\ BAB &= B, \\ (AB)^* &= AB, \\ (BA)^* &= BA. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $B$ es una $\{1,2,3,4\}$-inversa de $A$.

---

**Teorema 2.5 (MacDuffee).** *Sea $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, con $r > 0$. Si $A$ tiene una factorización de rango pleno (véase lema (1.2)[página 29]), tal que*

$$A = FG,$$

*entonces*

$$A^+ = G^*(F^*AG^*)^{-1}F^*.$$

*Demostración.*

- En primer lugar, veamos que la matriz $F^*AG^*$ es no singular:

$$F^*AG^* = F^*FGG^*.$$

  Por el lema (1.1)[página 24], tenemos que las matrices $r \times r$, $(F^*F)$ y $(GG^*)$, son de rango $r$. Por tanto, $F^*AG^*$ es igual a producto de dos matrices no singulares y, en consecuencia, $F^*AG^*$ es no singular. Es más

$$(F^*AG^*)^{-1} = (F^*FGG^*)^{-1} = (GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}.$$

- Comprobemos ahora, que la matriz $X = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^* \in A\{1,2,3,4\}$:

1.
$$AXA = FGG^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*FG = FG = A.$$
Luego $X \in A\{1\}$.

2.
$$\begin{aligned} XAX &= G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*FGG^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^* = \\ &= G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^* = X. \end{aligned}$$
Luego $X \in A\{1, 2\}$.

3.
$$AX = FGG^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^* = (AX)^*.$$
Luego $X \in A\{1, 2, 3\}$

4.
$$XA = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*FG = (XA)^*.$$

Por tanto, $X \in A\{1, 2, 3, 4\}$, siendo única según la proposición (2.1)[página 34].

---

**Ejemplo 2.4.3.-** Consideremos la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

En el ejemplo (1.10.2)[página 29], calculamos las matrices $F$ y $G$ tales que $A = FG$:
$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \; G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con lo que
$$A^+ = G^*(F^*AG^*)^{-1}F^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/14 & -5/14 \\ 1/4 & -3/28 & 1/28 \\ -1/2 & 5/14 & 3/14 \\ 1/4 & -3/28 & 1/28 \end{pmatrix}.$$

**Teorema 2.6.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Si $A = U\Sigma V^*$ es una descomposición en valores singulares de $A$, por el teorema (1.7)[página 24], entonces*

$$A^+ = V\Sigma^+U^*.$$

*Demostración.* Comprobaremos que $A^+ = V\Sigma^+U^*$ es la $\{1,2,3,4\}$-inversa de $A$ viendo que satisface las ecuaciones de Moore-Penrose (definición 2.1)[página 33].

1. $$AA^+A = U\Sigma V^*V\Sigma^+U^*U\Sigma V^* = U\Sigma\Sigma^+\Sigma V^* = U\Sigma V^* = A.$$
2. $$A^+AA^+ = V\Sigma^+U^*U\Sigma V^*V\Sigma^+U^* = V\Sigma^+\Sigma\Sigma^+U^* = V\Sigma^+U^* = A^+.$$
3. $$\begin{aligned}(AA^+)^* &= (U\Sigma V^*V\Sigma^+U^*)^* = (U\Sigma\Sigma^+U^*)^* = U(\Sigma^+)^*\Sigma^*U^* = \\ &= U\Sigma\Sigma^+U^* = U\Sigma V^*V\Sigma^+U^* = AA^+.\end{aligned}$$
4. $$\begin{aligned}(A^+A)^* &= (V\Sigma^+U^*U\Sigma V^*)^* = (V\Sigma^+\Sigma V^*)^* = V\Sigma^*(\Sigma^+)^*V^* = \\ &= V\Sigma^+\Sigma V^* = V\Sigma^+U^*U\Sigma V^* = A^+A.\end{aligned}$$

Por tanto $A^+ = V\Sigma^+U^*$ es la $\{1,2,3,4\}$-inversa de $A$.

**Ejemplo 2.4.4.-**

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como vimos en el ejemplo (1.9.1)[página 25], la descomposición en valores singulares de $A$ es:

$$A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$A^+ = V\Sigma^+U^t = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 1/3\sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1/180 & 13/180 \\ 1/45 & 2/45 \\ 1/18 & -1/18 \end{pmatrix}.$$

## 2.5 $\{2\}$-inversa de rango prescrito

A partir del teorema (2.1)[página 36] sabemos cómo construir una $\{1\}$-inversa de una matriz $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ dada, teniendo ésta un rango entre $r$ y $\min\{m, n\}$, ambos inclusive.
También el lema (2.3)[página 41), nos da un método para construir una $\{1, 2\}$-inversa de una matriz $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ dada, que claramente, tendría un rango $\leq r$.
Destaquemos que una matriz nula $m \times n$ es una $\{2\}$-inversa de rango $0$, y recordemos que cualquier $A^{\{1,2\}}$ es una $\{2\}$-inversa de rango $r$, según el teorema (2.2)[página 42].
Luego, ¿sería posible encontrar una forma de construir una $\{2\}$-inversa de rango $s$, arbitrario, entre $0$ y $r$? La respuesta es afirmativa, y para ello haremos uso de la factorización de rango pleno.

Dada una matriz $X \in A\{1, 2\}$, podemos calcular una factorización de rango pleno de $X$, tal que

$$X = YZ,$$

donde $Y \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$ y $Z \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$, y además, como $X \in A\{2\}$

$$YZAYZ = YZ.$$

Si multiplicamos por $Y^{\{1\}}$ a la izquierda, y por $Z^{\{1\}}$ a la derecha; y teniendo en cuenta el lema (2.2)[página 40]

$$ZAY = I_r.$$

Notemos como $Y_s$ a la submatriz de $Y$ consistente en sus primeras $s$ columnas, y como $Z_s$ a la submatriz de $Z$ consistente en sus primeras $s$ filas. Entonces, $Y_s$ y $Z_s$ son de rango $s$, y por tanto

$$Z_s A Y_s = I_s.$$

Tomemos ahora

$$X_s = Y_s Z_s,$$

donde el rango de $X_s$ es $s$, y tendríamos

$$X_s A X_s = X_s.$$

*Nota* 2.2. El conjunto $A\{i,\ldots,j\}_s$ denotará el conjunto de todas las $\{i,\ldots,j\}$-inversas de $A$ de rango prescrito $s$.

---

**Ejemplo 2.5.1.-**

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calcularemos una $\{1\}$-inversa de $A$, (véase teorema (2.1)[página 36]), y posteriormente procederemos al cálculo de una $\{1,2\}$-inversa de $A$, (véase lema (2.3)[página 41]). Del mismo modo, también podríamos emplear los procedimientos descritos anteriormente para la construcción de $\{1,2,3\}$-inversas, $\{1,2,4\}$-inversas, y $\{1,2,3,4\}$-inversas (véase sección (2.4)[página 44]), ya que, en particular, todas ellas son $\{1,2\}$-inversas.

- Cálculo de una $\{1\}$-inversa de $A$:
  Tomemos las matrices
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$
  tales que
$$EAP = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
  Entonces la matriz
$$X = P \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
  es una $\{1\}$-inversa de $A$.
- Cálculo de una $\{1,2\}$-inversa de $A$:
  Tenemos que $\operatorname{rango}(X) = 3 = \operatorname{rango}(A)$, luego por el teorema (2.2)[página 42], la matriz $X$ es una $\{1,2\}$-inversa de $A$.

Ya tendríamos, por tanto, una $\{1,2\}$-inversa de $A$ de rango $3$. Veamos ahora como proceder para obtener una $\{1,2\}$-inversa de $A$ de rango $2$.

- Calculando una factorización de rango pleno de la matriz $X$ (veáse lema (1.2)[página 29]), obtenemos las matrices:
$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
  tales que $X = YZ$.
- Construyamos una $\{1,2\}$-inversa de $A$ de rango $2$:
  Tomando las $2$ primeras columnas de la matriz $Y$, y las dos primeras filas de la matriz $Z$, definimos las matrices
$$Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y } Z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde la matriz

$$X_2 = Y_2Z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es una $\{1,2\}$-inversa de $A$ de rango 2.
Se tiene que

$$X_2AX_2 = X_2.$$

## 2.6 Caracterización de $A\{1\}$

La principal aplicación de $\{1\}$-inversas es su utilización para el cálculo de la solución de sistemas lineales, en los que, habitualmente, son usadas del mismo modo que las inversas de matrices no singulares.

**Teorema 2.7.** *Sean las matrices $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$ y $D \in \mathbb{C}^{m\times q}$. Entonces, la ecuación matricial*

$$AXB = D, \tag{2.5}$$

*es compatible si y solo si para alguna $A^{\{1\}}$, $B^{\{1\}}$,*

$$AA^{\{1\}}DB^{\{1\}}B = D;$$

*en cuyo caso la solución general a la ecuación (2.5) es:*

$$X = A^{\{1\}}DB^{\{1\}} + Y - A^{\{1\}}AYBB^{\{1\}},$$

*para cualquier $Y \in \mathbb{C}^{n\times p}$.*

*Demostración.* $\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $AA^{\{1\}}DB^{\{1\}}B = D$. Si $X = A^{\{1\}}DB^{\{1\}}$, se tiene que

$$AXB = AA^{\{1\}}DB^{\{1\}}B,$$

de donde $X$ es solución de $AXB = D$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $X$ una solución del sistema $AXB = D$. Entonces

$$\begin{aligned} D &= AXB && (X = A^{\{1\}}DB^{\{1\}}) \\ &= AA^{\{1\}}AXBB^{\{1\}}B && (AXB = D) \\ &= AA^{\{1\}}DB^{\{1\}}B. \end{aligned}$$

Además, de $D = AA^{\{1\}}DB^{\{1\}}B$ y de la definición de $A^{\{1\}}$ y $B^{\{1\}}$, se deduce que la matriz $X$ de la forma:

$$X = A^{\{1\}}DB^{\{1\}} + Y - A^{\{1\}}AYBB^{\{1\}},$$

satisface $AXB = D$.

Por otro lado, sea $X$ cualquier solución de $AXB = D$. Entonces, claramente,

$$X = A^{\{1\}}DB^{\{1\}} + X - A^{\{1\}}AXBB^{\{1\}}.$$

∎

*Proposición 2.5.* Sean las matrices $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times p}$, $D \in \mathbb{C}^{p\times q}$ y $E \in \mathbb{C}^{n\times q}$. Entonces las ecuaciones matriciales

$$AX = B, \text{ y } XD = E, \tag{2.6}$$

tienen una solución común si y solo si cada ecuación tiene una solución por separado y

$$AE = BD.$$

*Demostración.* $\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que cada ecuación (2.6) tiene una solución por sí misma. Entonces, para el caso en el que $AE = BD$ y

$$AA^{\{1\}}B = B, \text{ y } ED^{\{1\}}D = E.$$

se tiene que, para cualesquiera $A^{\{1\}}$, $D^{\{1\}}$

$$X = A^{\{1\}}B + ED^{\{1\}} - A^{\{1\}}AED^{\{1\}},$$

es una solución común de ambas.

Por el teorema (2.7)[página 55], las dos últimas ecuaciones son equivalentes a la consistencia de las ecuaciones (2.6) consideradas separadamente.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $AX = B$ y $XD = E$ tienen una solución en común. Entonces, cada ecuación tiene por si misma al menos una solución (la común) y, además

$$AE = AXD = BD.$$

*Corolario 2.1.* Sean las matrices $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A^{\{1\}} \in A\{1\}$. Entonces

$$A\{1\} = \{A^{\{1\}} + Z - A^{\{1\}}AZAA^{\{1\}} \mid Z \in \mathbb{C}^{n\times m}\}.$$

*Demostración.* Si aplicamos el teorema (2.7)[página 55] a la ecuación matricial $AXA = A$, y sustituimos la matriz $Y$ por $A^{\{1\}} + Z$, obtendremos el conjunto descrito como el conjunto de soluciones de la ecuación $AXA = A$.

*Corolario 2.2.* Sea la matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y el vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$. Entonces la ecuación

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{2.7}$$

es compatible si y solo si, para alguna $A^{\{1\}}$,

$$AA^{\{1\}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b},$$

en cuyo caso la solución general de la ecuación (2.7) es

$$\boldsymbol{x} = A^{\{1\}}\boldsymbol{b} + (I - A^{\{1\}}A)\boldsymbol{y},$$

para algún $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ arbitrario.

*Demostración.* $\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $AA^{\{1\}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$. Entonces se tiene que

$$A\boldsymbol{x} = AA^{\{1\}}\boldsymbol{b},$$

luego

$$A^{\{1\}}\boldsymbol{b}, \text{ es una solución de } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $\boldsymbol{x}$ una solución de la ecuación $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Entonces

$$\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x} = AA^{\{1\}}A\boldsymbol{x} = AA^{\{1\}}\boldsymbol{b}.$$

Además, de $\boldsymbol{b} = AA^{\{1\}}\boldsymbol{b}$ y de la definición de $A^{\{1\}}$, se deduce que el vector $\boldsymbol{x}$ de la forma:

$$\boldsymbol{x} = A^{\{1\}}\boldsymbol{b} + (I - A^{\{1\}}A)\boldsymbol{y},$$

satisface $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Por otro lado, sea $\boldsymbol{x}$ cualquier solución de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Entonces,

$$\begin{aligned} A^{\{1\}}\boldsymbol{b} + (I - A^{\{1\}}A)\boldsymbol{x} &= A^{\{1\}}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} - A^{\{1\}}A\boldsymbol{x} \\ &= A^{\{1\}}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} \qquad\qquad (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}) \\ &= \boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

**Teorema 2.8.** *Sean las matrices $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Entonces $X \in A\{1\}$ si y solo si, para todo $\boldsymbol{b}$ tal que $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es compatible, $\boldsymbol{x} = X\boldsymbol{b}$ es una solución.*

*Demostración.* $\boxed{\Leftarrow}$ Denotemos por $\boldsymbol{a}_j$ a la columna $j$-ésima de $A$.
Tenemos que el sistema

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_j$$

es compatible, y $X\boldsymbol{a}_j$, es una solución del mismo:

$$AX\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}_j, \;\; j \in \overline{1,n}.$$

Por tanto,

$$AXA = A.$$

Y, como consecuencia, $X \in A\{1\}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $X \in A\{1\}$. Aplicando el corolario (2.2)[página 57], tenemos que:

$$AX\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

Luego $\boldsymbol{x} = X\boldsymbol{b}$ es una solución de la ecuación $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

## 2.7 Caracterización de $A\{1,3\}$

**Teorema 2.9.** *Sea la matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. El conjunto $A\{1,3\}$ consta de todas las soluciones $X$ de*

$$AX = AA^{\{1,3\}},$$

*donde $A^{\{1,3\}}$ es un elemento arbitrario de $A\{1,3\}$.*

*Demostración.* Si la matriz $X$ satisface $AX = AA^{\{1,3\}}$, entonces, claramente

$$AXA = AA^{\{1,3\}}A = A,$$

y, además, $AX$ es hermitiana, ya que $AA^{\{1,3\}}$ lo es por definición. Por tanto, $X \in A\{1,3\}$.

Por otro lado, si $X \in A\{1,3\}$, entonces

$$\begin{aligned} AA^{\{1,3\}} &= AXAA^{\{1,3\}} \\ &= (AX)^*AA^{\{1,3\}} \\ &= X^*A^*(A^{\{1,3\}})^*A^* \\ &= X^*A^* \\ &= AX, \end{aligned}$$

donde hemos usado el lema (2.1)[apartado 1, página 39].

*Corolario 2.3.* Sean las matrices $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $A^{\{1,3\}} \in A\{1,3\}$. Entonces

$$A\{1,3\} = \{A^{\{1,3\}} + (I - A^{\{1,3\}}A)Z \mid Z \in \mathbb{C}^{n\times m}\}.$$

*Demostración.* Aplicando el teorema (2.7)[página 55] a la ecuación $AX = AA^{\{1,3\}}$ y sustituyendo $Y$ por $Z + A^{\{1,3\}}$, obtenemos el resultado buscado.

## 2.8 Caracterización de $A\{1,4\}$

**Teorema 2.10.** *Sea la matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. El conjunto $A\{1,4\}$ consta de todas las soluciones $X$ de:*

$$XA = A^{\{1,4\}}A.$$

*Demostración.* Si la matriz $X$ satisface $XA = A^{\{1,4\}}A$, entonces, claramente

$$AXA = AA^{\{1,4\}}A = A,$$

y, además, por definición, $(A^{\{1,4\}}A)^* = A^{\{1,4\}}A$, luego $XA = (XA)^*$.
Por tanto $X \in A\{1,4\}$.

Por otro lado, si $X \in A\{1,4\}$

$$A^{\{1,4\}}A = A^{\{1,4\}}AXA = A^{\{1,4\}}A(XA)^* = A^*(A^{\{1,4\}})^*A^*X^* = A^*X^* = XA,$$

donde hemos usado el lema (2.1)[apartado 1, página 39].

*Corolario 2.4.* Sean las matrices $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $A^{\{1,4\}} \in A\{1,4\}$. Entonces

$$A\{1,4\} = \{A^{\{1,4\}} + Y(I - AA^{\{1,4\}}) \mid Y \in \mathbb{C}^{n\times m}\}.$$

*Demostración.* Si aplicamos el teorema (2.10)[página 59] a la ecuación $XA = A^{\{1,4\}}A$ sustituyendo $Y$ por $Y + A^{\{1,4\}}$, obtenemos el resultado deseado.

## 2.9 Caracterización de $A\{2\}_s$

Haremos notar primeramente, que siendo $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, los conjuntos $A\{2\}_0$, $A\{2,3\}_0$ y $A\{2,3,4\}_0$ (véase nota (2.2)[página 53]) están formados por un único elemento, que es la matriz $n \times m$ de ceros. Conociendo ya este hecho, para el resto de las secciones consideraremos $s > 0$.

**Teorema 2.11.** *Sea la matriz $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ y $0 < s \leq r$. Entonces*

$$A\{2\}_s = \{YZ \mid Y \in \mathbb{C}^{n\times s}, Z \in \mathbb{C}^{s\times m}, ZAY = I_s\}.$$

*Demostración.* Sea $X = YZ$, donde se satisface que $Y \in \mathbb{C}^{n\times s}$, $Z \in \mathbb{C}^{s\times m}$ y $ZAY = I_s$. Entonces $Y$ y $Z$ tienen rango $s$ y $X$ es de rango $s$. Además

$$XAX = YZAYZ = YZ = X.$$

Por otro lado, sea $X \in A\{2\}$ y sea $X = YZ$ una factorización de rango pleno de $X$. Entonces $Y \in \mathbb{C}_s^{n\times s}$, $Z \in \mathbb{C}_s^{s\times m}$ y

$$YZAYZ = YZ.$$

Además, si $Y^{\{1\}}$ y $Z^{\{1\}}$ son $\{1\}$-inversas de $A$, entonces, por el lema (2.2)[página 40]

$$Y^{\{1\}}Y = ZZ^{\{1\}} = I_s.$$

Por tanto, de $YZAYZ = YZ$ obtenemos, multiplicando a izquierda por $Y^{\{1\}}$ y a derecha por $Z^{\{1\}}$

$$Y^{\{1\}}YZAYZZ^{\{1\}} = Y^{\{1\}}YZZ^{\{1\}} \Rightarrow ZAY = I_s.$$

∎

*Proposición* 2.6. Sean las ecuaciones matriciales

$$\begin{aligned} AX &= B, \\ XA &= D, \\ XAX &= X. \end{aligned}$$

Entonces existe a lo sumo una matriz $X$ que satisface las $3$ ecuaciones.

*Demostración.* Tenemos ya, por el enunciado de la proposición, que $XAX = X$ luego $A \in X\{1\}$. Por tanto, por el lema (2.1)[apartado 6, página 39]

$$\text{rango}(XA) = \text{rango}(X), \text{ y } \text{rango}(AX) = \text{rango}(X).$$

En consecuencia,

$$\text{rango}(B) = \text{rango}(X) = \text{rango}(D).$$

∎

## 2.10 Caracterización de $A\{1, 2\}$

*Corolario* 2.5. Sea la matriz $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$. Entonces

$$A\{1, 2\} = \{YZ \mid Y \in \mathbb{C}^{n\times r}, Z \in \mathbb{C}^{r\times m}, ZAY = I_r\}.$$

*Demostración.* Por el teorema (2.2)[página 42]:

$$A\{1, 2\} = A\{2\}_r.$$

∎

## 2.11 Caracterización de $A\{2,3\}_s$

**Teorema 2.12.** *Sean* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *y* $0 < s \leq r$. *Entonces*

$$A\{2,3\}_s = \{Y(AY)^+ \mid AY \in \mathbb{C}_s^{m\times s}\}.$$

*Demostración.* Sea $X = Y(AY)^+$, donde $AY \in \mathbb{C}_s^{m\times s}$. Tenemos que

$$AX = AY(AY)^+. \tag{2.8}$$

$(AY(AY^+))^* = AY(AY^+)$, y, por tanto, $AX = (AX)^*$.

Además

$$XAX = Y(AY)^+AY(AY)^+ = Y(AY)^+ = X.$$

Luego $X \in A\{2,3\}$.

Finalmente, como $X \in A\{2\}$ y $A \in X\{1\}$, de la ecuación (2.8), y del lema (2.1)[apartado 6, página 39], obtenemos que

$$s = \text{rango}(AY) = \text{rango}(AX) = \text{rango}(X).$$

Por otro lado, sea $X \in A\{2,3\}_s$. Entonces $AX$ es hermitiana, y por el lema (2.1)[apartado 6, página 39] $AX$ es idempotente y de rango $s$, siendo $A \in X\{1\}$. Asimismo, por la proposición (2.2)[página 35]

$$(AX)^+ = AX.$$

De manera que

$$X(AX)^+ = XAX = X.$$

En consecuencia, la matriz $X$ es de la forma descrita en el teorema.

## 2.12 Caracterización de $A\{2,4\}_s$

**Teorema 2.13.** *Sean* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *y* $0 < s \leq r$. *Entonces*

$$A\{2,4\}_s = \{(AY)^+Y \mid YA \in \mathbb{C}_s^{s\times m}\}.$$

*Demostración.* Sea $X = (YA)^+Y$, donde $YA \in \mathbb{C}_s^{s\times m}$. Tenemos que

$$XA = (YA)^+YA. \tag{2.9}$$

$((YA)^+YA)^* = (YA)^+YA$, y, por tanto, $XA = (XA)^*$.

Además

$$XAX = (YA)^+YA(YA)^+Y = (YA)^+Y = X.$$

Luego $X \in A\{2,3\}$.

Finalmente, como $X \in A\{2\}$ y $A \in X\{1\}$, de la ecuación (2.9), y del lema (2.1)[apartado 6, página 39], obtenemos que

$$s = \text{rango}(YA) = \text{rango}(XA) = \text{rango}(X).$$

Por otro lado, sea $X \in A\{2,3\}_s$. Entonces $AX$ es hermitiana, y por el lema (2.1)[apartado 6, página 39] $AX$ es idempotente y de rango $s$, siendo $A \in X\{1\}$. Asimismo, por la proposición (2.2)[página 35]

$$(XA)^+ = XA.$$

De manera que

$$(XA)^+X = XAX = X.$$

En consecuencia, la matriz $X$ es de la forma descrita en el teorema.

∎

# 3 Inversa de Bott-Duffin

En este punto del trabajo estaríamos en disposición de hacer frente a un problema en el que se nos planteara el cálculo de la solución general de una ecuación matricial del tipo $AXB = D$, a partir de determinadas $\{1\}$-inversas que cumplieran ciertas condiciones (véase teorema (2.7)[página 55]). Sabríamos actuar, y de manera similar, si se nos planteara el cálculo de la solución general de una ecuación de tipo $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (véase corolario (2.2)[página 57]). Para ninguno de estos casos hemos impuesto que nuestra solución tuviera que pertenecer a algún subespacio en especial. ¿Y si tropezáramos con un problema de esta naturaleza, donde la solución debiera pertenecer a un subespacio determinado? ¿Vale la pena plantearnos esta cuestión?
Fue en $1953$ cuando Bott y Duffin, [BD53], introdujeron un nuevo concepto de inversa a partir del cual resolver sistemas de ecuaciones del tipo

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$$

en los que a las incógnitas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ se les impone la pertenencia a determinados subespacios complementarios entre sí. Este concepto, que definiremos más adelante en el capítulo como la *inversa de Bott-Duffin* de una matriz dada con respecto a un subespacio concreto, vendrá determinado por lo que denominaremos *proyector ortogonal* sobre dicho subespacio. La razón principal por la que apareció esta inversa fue para ser aplicada a estudios de sistemas eléctricos y mecánicos. Veremos más ampliamente, durante el desarrollo de este capítulo, cómo se generan este tipo de sistemas restringidos en la teoría de redes eléctricas y, de este modo, la aplicación de la inversa de Bott-Duffin a esta rama.

Nos ha servido de guía, en la realización de este capítulo, la publicación [BIG03].

## 3.1 Matrices idempotentes y proyectores

*Lema* 3.1. Sea $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz idempotente. Entonces:

1. Las matrices $E^*$ e $(I-E)$ son matrices idempotentes.
2. $E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ si y solo si $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(E)$.
3. $\text{null}(E) = \mathcal{C}(I-E)$.
4. $\text{null}(I-E) = \mathcal{C}(E)$.

*Demostración.* Sea $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ idempotente.

1. $(E^*)^2 = E^*E^* = (EE)^* = E^*$.
   $(I-E)^2 = I^2 - 2E + E^2 = I - 2E + E = I - E$.
2. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. Entonces, por definición,
   $$\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(E).$$
   $\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(E)$. Entonces, por definición,
   $$\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{y}.$$
   En consecuencia,
   $$\begin{aligned} E\boldsymbol{x} &= E^2\boldsymbol{y} && (E \text{ idempotente}) \\ &= E\boldsymbol{y} \\ &= \boldsymbol{x}. \end{aligned}$$
3. Si $\boldsymbol{x} \in \text{null}(E)$, entonces $E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ y
   $$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x} - E\boldsymbol{x} \\ &= (I-E)\boldsymbol{x}, \end{aligned}$$
   de donde $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(I-E)$.
   Recíprocamente, si existe $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ tal que $\boldsymbol{x} = (I-E)\boldsymbol{y}$, entonces
   $$\begin{aligned} E\boldsymbol{x} &= E\boldsymbol{y} - E^2\boldsymbol{y} && (E \text{ idempotente}) \\ &= E\boldsymbol{y} - E\boldsymbol{y} \\ &= \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

4. Si $\boldsymbol{x} \in \operatorname{null}(I-E)$, entonces $(I-E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x} - (I-E)\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} + E\boldsymbol{x} \\ &= E\boldsymbol{x}, \end{aligned}$$

de donde $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(E)$.
Recíprocamente, si existe $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ tal que $\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{y}$, entonces

$$\begin{aligned} (I-E)\boldsymbol{x} &= (I-E)E\boldsymbol{y} \\ &= E\boldsymbol{y} - E^2\boldsymbol{y} && (E \text{ idempotente}) \\ &= E\boldsymbol{y} - E\boldsymbol{y} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

*Lema* 3.2. Sea $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ idempotente con

$$E = FG, \tag{3.1}$$

una factorización de rango pleno de $E$.
Entonces $E$ es idempotente si y solo si $GF = I$.

*Demostración.* $\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $GF = I$, entonces, claramente

$$\begin{aligned} (FG)^2 &= FGFG && (GF = I) \\ &= FG. \end{aligned}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos ahora que $E$ es idempotente y que $E = FG$ es una factorización de rango pleno de $E$. Entonces $F$ es de rango pleno por columnas y $G$ es de rango pleno por filas, luego, por el lema (2.2)[página 40],

$$F^{\{1\}}F = GG^{\{1\}} = I. \tag{3.2}$$

Multiplicando la ecuación $FGFG = FG$ por $F^{\{1\}}$ a la izquierda y por $G^{\{1\}}$ a la derecha, y obtenemos que

$$\begin{aligned} FGFG = FG &\Leftrightarrow F^{\{1\}}FGFGG^{\{1\}} = F^{\{1\}}FGG^{\{1\}} && (F^{\{1\}}F = GG^{\{1\}} = I) \\ &\Leftrightarrow GF = I. \end{aligned}$$

**Definición 3.1.** *Dado un vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ y un subespacio $L$ de $\mathbb{C}^n$. Llamaremos* ***proyección ortogonal*** *de $\boldsymbol{x}$ sobre $L$, y lo denotaremos $\operatorname{proy}_L(\boldsymbol{x})$, al vector $\boldsymbol{u}$ tal que*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}', \boldsymbol{u} \in L, \boldsymbol{u}' \in L^{\perp}.$$

**Definición 3.2.** *Sea un vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ y un subespacio $L$ de $\mathbb{C}^n$. Llamaremos* ***proyector ortogonal*** *sobre $L$, y lo denotaremos $P_L$, a la transformación lineal que a cada vector $\boldsymbol{x}$ le asigna su proyección ortogonal sobre $L$.*

*Proposición* 3.1. Sea $L$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$ y sea $P_L$ el proyector ortogonal sobre $L$. Entonces la matriz representación de $P_L$ es una matriz idempotente.

*Demostración.* Si $\boldsymbol{u} \in L$, entonces

$$P_L\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}.$$

Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, de la forma $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}'$, con $\boldsymbol{u} \in L, \boldsymbol{u}' \in L^{\perp}$. Entonces

$$P_L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}.$$

Luego,

$$P_L^2\boldsymbol{x} = P_L\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} = P_L\boldsymbol{x}, \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n.$$

Por tanto, $P_L^2 = P_L$.

*Proposición* 3.2. Sea $L$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$, y sea $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l\}$ una base ortonormal de $L$. Entonces

$$P_L = \sum_{i=1}^{l} \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i^*.$$

*Demostración.* Sea $M = \sum_{i=1}^{l} \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i^*$.

Si $\boldsymbol{w} \in L$, entonces

$$\begin{aligned} M\boldsymbol{w} &= \sum_{i=1}^{l} \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i^*\boldsymbol{w} \qquad (\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l\}\text{base ortonormal de } L \text{ y } \boldsymbol{w} \in L) \\ &= \boldsymbol{w}. \end{aligned}$$

Si $\boldsymbol{z} \in L^{\perp}$, entonces

$$\begin{aligned} M\boldsymbol{z} &= \sum_{i=1}^{l} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^* \boldsymbol{z} \qquad (\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l\} \text{base ortonormal de } L \text{ y } \boldsymbol{z} \in L^{\perp}) \\ &= \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, que escribimos como $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{z},\ \boldsymbol{w} \in L,\ \boldsymbol{z} \in L^{\perp}$. Entonces

$$P_L\boldsymbol{x} = P_L\boldsymbol{w} + P_L\boldsymbol{z} = \boldsymbol{w} = M\boldsymbol{x}.$$

Luego $M$ es el proyector ortogonal sobre $L$.

---

**Ejemplo 3.1.1.-**

Sea el subespacio $L$ definido de la siguiente manera:

$$L = <\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2> = < \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} >$$

Entonces, mediante Gram-Schmidt, una base ortonormal de $L$ es:

$$\left\{ \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \right\}.$$

Y

$$P_L = \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^* = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

*Lema* 3.3. Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, y sea $S$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$. El sistema

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x} \in S, \tag{3.3}$$

es compatible si y solo si el sistema

$$AP_S\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b} \tag{3.4}$$

es compatible. En tal caso, $\boldsymbol{x}$ es una solución de (3.3) si y solo si

$$\boldsymbol{x} = P_S\boldsymbol{z},$$

donde $\boldsymbol{z}$ es una solución de (3.4).

*Demostración.* $\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $AP_S\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$ tiene solución. Entonces

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

con $\boldsymbol{x} = P_S\boldsymbol{z}$, y $\boldsymbol{z}$ cualquier solución de $AP_S\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que la ecuación $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{x} \in S$, tiene solución. Consideremos $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, donde $\boldsymbol{x} \in S$ e $\boldsymbol{y} \in S^{\perp}$. Entonces el proyector $P_S$ verifica

$$P_S\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}.$$

Por tanto, el sistema $AP_S\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$ es compatible.

## 3.2 Inversa de Bott-Duffin

**Teorema 3.1.** *Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ y $L$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$. El sistema restringido:*

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x} \in L, \ \boldsymbol{y} \in L^{\perp}, \tag{3.5}$$

*es compatible si y solo si el sistema*

$$(AP_L + P_{L^{\perp}})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b} \tag{3.6}$$

*es compatible.*

*En tal caso,* $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$ *es una solución de (3.5) si y solo si*

$$\boldsymbol{x} = P_L\boldsymbol{z},$$
$$\boldsymbol{y} = P_{L^{\perp}}\boldsymbol{z},$$

*donde $\boldsymbol{z}$ es una solución de (3.6).*

*Demostración.* $\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que la ecuación $(AP_L + P_{L^\perp})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$ tiene solución. Entonces $A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{x} = P_L\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{y} = P_{L^\perp}\boldsymbol{z}$ y $\boldsymbol{z}$ cualquier solución de $(AP_L + P_{L^\perp})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que la ecuación $A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{x} \in L$, $\boldsymbol{y} \in L^\perp$ tiene solución. Consideremos $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. Entonces los proyectores $P_L$ y $P_{L^\perp}$ verifican

$$P_L\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}, \quad P_{L^\perp}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y},$$

Luego el sistema $(AP_L + P_{L^\perp})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$ es compatible.

*Proposición 3.3.* Si la matriz $(AP_L + P_{L^\perp})$ es no singular, entonces el sistema (3.5) es compatible para todo $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, y la solución

$$\boldsymbol{x} = P_L(AP_L + P_{L^\perp})^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x},$$

es única.

*Demostración.* Supongamos que $(AP_L + P_{L^\perp})$ es no singular. Entonces, $\boldsymbol{z} = (AP_L + P_{L^\perp})^{-1}\boldsymbol{b}$, sería la solución del sistema (3.6).
Por tanto, el sistema (3.5) tendría solución

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= P_L\boldsymbol{z} = P_L(AP_L + P_{L^\perp})^{-1}\boldsymbol{b}, \\
\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{b} - AP_L\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1$ y $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2$, son soluciones de (3.5). Entonces

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1 &= P_L(AP_L + P_{L^\perp})^{-1}\boldsymbol{b} \\
&= \boldsymbol{x}_2, \\
\boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_1 && (\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2) \\
&= \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_2 \\
&= \boldsymbol{y}_2.
\end{aligned}$$

**Definición 3.3.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sea $L$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$. Si $(AP_L + P_{L^\perp})$ es no singular, la* ***inversa de Bott-Duffin*** *de $A$ con respecto a $L$, denotada $A^{\{-1\}}_{(L)}$, es definida como*

$$A^{\{-1\}}_{(L)} = P_L(AP_L + P_{L^\perp})^{-1}.$$

---

**Ejemplo 3.2.1.-**

Consideremos los vectores

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix},$$

que son ortogonales y unitarios.

Si $L = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$, entonces una base ortonormal de $L^\perp$ está formada por los vectores

$$\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Definimos los proyectores

$$P_L = \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^t + \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2^t = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$P_{L^\perp} = \boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_3^t + \boldsymbol{u}_4\boldsymbol{u}_4^t = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Si tomamos

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ -5 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces la matriz $AP_L + P_{L^\perp}$ es no singular y la inversa de Bott-Duffin de la matriz $A$ es

$$A_{(L)}^{-1} = P_L(AP_L + P_{L^\perp})^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{85} & -\frac{3}{85} & -\frac{2}{17} & -\frac{2}{17} \\ -\frac{3}{85} & -\frac{3}{85} & -\frac{2}{17} & -\frac{2}{17} \\ \frac{7}{85} & \frac{7}{85} & -\frac{1}{17} & -\frac{1}{17} \\ \frac{7}{85} & \frac{7}{85} & -\frac{1}{17} & -\frac{1}{17} \end{pmatrix}.$$

Observemos que la matriz $A$ es no singular y su inversa de Bott-Duffin no coincide con $A^{-1}$.

---

El siguiente teorema nos muestra alguna de las propiedades de $A_{(L)}^{\{-1\}}$.

**Teorema 3.2.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sea $L$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$. Si $(AP_L + P_{L^\perp})$ es no singular, entonces*

1. *La ecuación*

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \in L,\ \boldsymbol{y} \in L^\perp, \tag{3.7}$$

*tiene para cada $\boldsymbol{b}$, la única solución*

$$\boldsymbol{x} = A_{(L)}^{\{-1\}}\boldsymbol{b}, \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{y} = (I - AA_{(L)}^{\{-1\}})\boldsymbol{b}. \tag{3.9}$$

2. *$A$, $P_L$, y $A_{(L)}^{\{-1\}}$ satisfacen:*

$$P_L = A_{(L)}^{\{-1\}}AP_L = P_LAA_{(L)}^{\{-1\}}, \tag{3.10}$$

$$A_{(L)}^{\{-1\}} = P_LA_{(L)}^{\{-1\}} = A_{(L)}^{\{-1\}}P_L. \tag{3.11}$$

*Demostración.* Veamos la demostración de cada apartado:

1. Del resultado de la proposición (3.3)[página 71], tomando $P_L(AP_L + P_{L^\perp})^{-1} = A_{(L)}^{\{-1\}}$, se tiene que la única solución de la ecuación (3.7) es:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= A_{(L)}^{\{-1\}}\boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{b} - AA_{(L)}^{\{-1\}}\boldsymbol{b} = (I - AA_{(L)}^{\{-1\}})\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

2. 

$$\begin{aligned} P_L A_{(L)}^{\{-1\}} &= P_L P_L (AP_L + P_{L^\perp})^{-1} \qquad\qquad (P_L \text{ idempotente}) \\ &= P_L(AP_L + P_{L^\perp})^{-1} \\ &= A_{(L)}^{\{-1\}}. \end{aligned}$$

$$A_{(L)}^{\{-1\}}(AP_L + P_{L^\perp}) = P_L(AP_L + P_{L^\perp})^{-1}(AP_L + P_{L^\perp}) = P_L.$$

Si multiplicamos a derecha por $P_L$, nos queda

$$A_{(L)}^{\{-1\}}(AP_L + P_{L^\perp})P_L = A_{(L)}^{\{-1\}}(AP_L + P_{L^\perp})P_L = A_{(L)}^{\{-1\}}AP_L = P_L.$$

Por tanto, como $A_{(L)}^{\{-1\}}(AP_L + P_{L^\perp}) = P_L$ y $A_{(L)}^{\{-1\}}AP_L = P_L$

$$A_{(L)}^{\{-1\}}P_{L^\perp} = O, \; y \; A_{(L)}^{\{-1\}}P_L = A_{(L)}^{\{-1\}}.$$

Por otro lado, si multiplicamos (3.9) a izquierda por $P_L$

$$P_L\,\boldsymbol{y} = (P_L - P_L AA_{(L)}^{\{-1\}})\boldsymbol{b} \implies \boldsymbol{0} = (P_L - P_L AA_{(L)}^{\{-1\}})\boldsymbol{b}, \; \forall \boldsymbol{b}.$$

Luego,

$$(P_L - P_L AA_{(L)}^{\{-1\}}) = O \implies P_L = P_L AA_{(L)}^{\{-1\}}.$$

∎

*Proposición 3.4.* Sea $L$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$, y sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz tal que $< A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >\neq 0, \; \forall \boldsymbol{x} \in L,$ con $\boldsymbol{x} \neq 0$. Entonces, podemos afirmar que la matriz $A_{(L)}^{\{-1\}}$ existe, es decir, la matriz $(AP_L + P_{L^\perp})$ es no singular.

*Demostración.* Por reducción al absurdo, supongamos que la matriz $(AP_L + P_{L^\perp})$ es singular. Entonces, el sistema

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0},$$

tiene solución no trivial para algún $\boldsymbol{x} \in L$ e $\boldsymbol{y} \in L^{\perp}$. En consecuencia, $A\boldsymbol{x} \in L^{\perp}$ y

$$< A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >= 0.$$

Luego la matriz $(AP_L + P_{L^{\perp}})$ es no singular, y por consiguiente, $A_{(L)}^{\{-1\}}$ existe.

∎

Hasta el momento, no hemos dado ningún resultado que relacione de manera directa la inversa de Bott-Duffin con alguno de los conjuntos de $\{i, j, \ldots, k\}$-inversas de cierta matriz. Esto se debe, en mayor medida, a que no parece que exista una relación que pueda aportarnos nuevas ideas en el estudio de las redes eléctricas. Lo cierto es que algunos autores, [CM09], analizan las redes eléctricas a partir de inversas generalizadas sin hacer uso de la inversa de Bott-Duffin.
Al principio de este capítulo se nombró [BIG03] como referencia a seguir. Aunque en esta publicación se trabaja durante algunas secciones con la inversa de Bott-Duffin, no se presta realmente una atención importante a su uso práctico como inversa generalizada.
Nuestro próximo resultado establece que cuando la inversa de Bott-Duffin $A_{(L)}^{\{-1\}}$ existe, es la $\{1, 2\}$-inversa de ciertas matrices con espacio de columnas $L$ y espacio nulo $L^{\perp}$.

*Corolario* 3.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sea $L$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$. Si $(AP_L + P_{L^{\perp}})$ no singular, entonces:

$$A_{(L)}^{\{-1\}} = (AP_L)_{L,L^{\perp}}^{\{1,2\}} = (P_L A)_{L,L^{\perp}}^{\{1,2\}} = (P_L A P_L)_{L,L^{\perp}}^{\{1,2\}}.$$

*Demostración.*

- Veamos que $\mathcal{C}(A_{(L)}^{\{-1\}}) = L$ y $\operatorname{null}(A_{(L)}^{\{-1\}}) = L^{\perp}$:
  Por el teorema (3.2)[página 73], tenemos que

  $$P_L = A_{(L)}^{\{-1\}} A P_L = P_L A A_{(L)}^{\{-1\}},$$

  luego,

  $$\dim(L) = \operatorname{rango}(P_L) \leq \operatorname{rango}(A_{(L)}^{\{-1\}}).$$

  Del mismo modo, por el teorema (3.2)[página 73], tenemos que

  $$A_{(L)}^{\{-1\}} = P_L A_{(L)}^{\{-1\}} = A_{(L)}^{\{-1\}} P_L,$$

  luego,

  $$\operatorname{rango}(A_{(L)}^{\{-1\}}) \leq \operatorname{rango}(P_L) = \dim(L).$$

Dado que

$$\mathcal{C}(A_{(L)}^{\{-1\}}) \subset \mathcal{C}(P_L) = L, \text{ y} \operatorname{null}(A_{(L)}^{\{-1\}}) \supset \operatorname{null}(P_L) = L^{\perp},$$

obtenemos que

$$\operatorname{rango}(A_{(L)}^{\{-1\}}) = \dim(L) = \operatorname{rango}(P_L).$$

Luego, por la proposición (2.4)[página 41)], teniendo en cuenta que $\operatorname{rango}(A_{(L)}^{\{-1\}}) = \operatorname{rango}(P_L)$ y que $A_{(L)}^{\{-1\}} = P_L A_{(L)}^{\{-1\}} = A_{(L)}^{\{-1\}} P_L$, se tiene que

$$\mathcal{C}(A_{(L)}^{\{-1\}}) = L, \quad \operatorname{null}((A_{(L)}^{\{-1\}})) = L^{\perp}.$$

- Comprobemos que la matriz $A_{(L)}^{\{-1\}}$ es una $\{1,2\}$-inversa de $AP_L$:
  Por el teorema (3.2)[página 73], tenemos que

$$P_L = A_{(L)}^{\{-1\}} A P_L = P_L A A_{(L)}^{\{-1\}}$$

y

$$A_{(L)}^{\{-1\}} = P_L A_{(L)}^{\{-1\}} = A_{(L)}^{\{-1\}} P_L.$$

Luego,

$$\begin{aligned} A P_L A_{(L)}^{\{-1\}} P_L &= A P_L P_L && (P_L \text{ idempotente}) \\ &= A P_L. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{(L)}^{\{-1\}} A P_L A_{(L)}^{\{-1\}} &= P_L A_{(L)}^{\{-1\}} \\ &= P_L. \end{aligned}$$

Por tanto, $A_{(L)}^{\{-1\}}$ es una $\{1,2\}$-inversa de $AP_L$.

- Comprobemos que la matriz $A_{(L)}^{\{-1\}}$ es una $\{1,2\}$-inversa de $P_L A$:
  Por el teorema (3.2)[página 73], tenemos que

$$P_L = A_{(L)}^{\{-1\}} A P_L = P_L A A_{(L)}^{\{-1\}}$$

y

$$A_{(L)}^{\{-1\}} = P_L A_{(L)}^{\{-1\}} = A_{(L)}^{\{-1\}} P_L.$$

Luego,

$$P_L A A_{(L)}^{\{-1\}} P_L A = P_L P_L A \qquad (P_L \text{ idempotente})$$
$$= P_L A.$$

$$A_{(L)}^{\{-1\}} P_L A A_{(L)}^{\{-1\}} = A_{(L)}^{\{-1\}} P_L$$
$$= A_{(L)}^{\{-1\}}$$

Por tanto, $A_{(L)}^{\{-1\}}$ es una $\{1,2\}$-inversa de $P_L A$.

- Comprobemos que la matriz $A_{(L)}^{\{-1\}}$ es una $\{1,2\}$-inversa de $P_L A P_L$:
  Por el teorema (3.2)[página 73], tenemos que

$$P_L = A_{(L)}^{\{-1\}} A P_L = P_L A A_{(L)}^{\{-1\}}$$

y

$$A_{(L)}^{\{-1\}} = P_L A_{(L)}^{\{-1\}} = A_{(L)}^{\{-1\}} P_L.$$

Luego,

$$P_L A P_L A_{(L)}^{\{-1\}} P_L A P_L = P_L A A_{(L)}^{\{-1\}} P_L A P_L$$
$$= P_L A A_{(L)}^{\{-1\}} A P_L$$
$$= P_L A P_L.$$

$$A_{(L)}^{\{-1\}} P_L A P_L A_{(L)}^{\{-1\}} = A_{(L)}^{\{-1\}} P_L A A_{(L)}^{\{-1\}}$$
$$= A_{(L)}^{\{-1\}} P_L$$
$$= A_{(L)}^{\{-1\}}.$$

Por tanto, $A_{(L)}^{\{-1\}}$ es una $\{1,2\}$-inversa de $P_L A P_L$.

## 3.3 Aplicación de la inversa de Bott-Duffin a redes eléctricas

En la introducción a este capítulo nos planteamos si valía la pena, desde un punto de vista práctico, analizar sistemas de ecuaciones en los que se restringen los subespacios a los que deben pertenecer sus soluciones. Una vez que hemos estudiado este tipo de sistemas de ecuaciones, daremos respuesta a esta pregunta. Nos introduciremos de manera sutil en el mundo de las redes eléctricas y observaremos cómo durante ese recorrido van surgiendo sistemas que asociaremos rápidamente con el sistema que nos plantearon Bott y Duffin, y que seremos capaces de resolver a partir de los resultados que ya conocemos sobre la inversa de Bott-Duffin. Nuestro propósito final será, una vez conectada la red correctamente, poder calcular el voltaje y la corriente de cada elemento del sistema.

Una red eléctrica se describe, topológicamente, en terminos de su grafo consistente en nodos y aristas; y, eléctricamente, en términos de sus corrientes y sus voltajes.

**Definición 3.4.** *Un **grafo** queda definido por $m$ elementos llamados **nodos**, que denotaremos $n_i, i \in \overline{1,m}$ (gráficamente los representaremos por puntos), y $n$ pares de nodos no ordenados llamados **aristas**, que denotaremos $a_j, j \in \overline{1,n}$ (gráficamente los representaremos por segmentos uniendo nodos dos a dos).*

**Definición 3.5.** *Un grafo con $m$ nodos y $n$ aristas, puede ser representado por una matriz $m \times n$ llamada **matriz de incidencia**, que denotaremos por $M = [m_{ij}]$, y definiremos de la siguiente manera:*

1. *La $i$-ésima fila de $M$ corresponde al nodo $n_i, i \in \overline{1,m}$,*
2. *La $j$-ésima columna de $M$ corresponde a la arista $a_j, j \in \overline{1,n}$,*
3. *Si $a_j = \{n_k, n_l\}$, entonces*

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k \\ -1, & \text{si } i = l \\ 0, & \text{si } i \neq k, l. \end{cases}$$

**Definición 3.6.** *Sean $n_k$, $n_l$, dos nodos de un mismo grafo. Se dirá que están **directamente conectados** si $\{n_k, n_l\}$ o $\{n_l, n_k\}$ es una arista, es decir, si existe una columna de $M$ con sus entradas distintas de cero en las filas $k$ y $l$.*

**Definición 3.7.** *Sean $n_k$, $n_l$, dos nodos de un mismo grafo. Se dirá que están **conectados**, si existe una sucesión de nodos, $\{n_k, n_p, \ldots, n_q, n_l\}$, en la que cada dos nodos adyacentes están directamente conectados.*

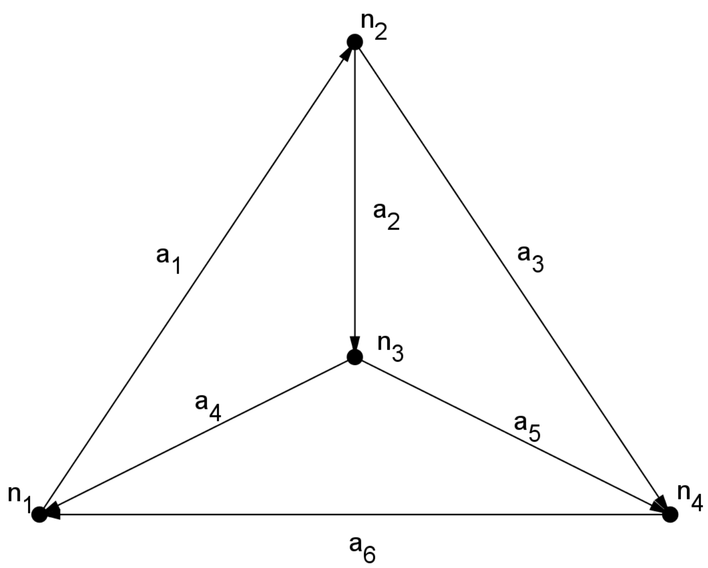
*Nota* 3.1. En el contexto de cadenas de Markov, a este tipo de grafos se los denominará grafos **fuertemente conexos**.

**Definición 3.8.** *Se dirá que un grafo es **conexo** si cada dos nodos están conectados.*

---

**Ejemplo 3.3.1.-**

Sea el grafo




representado por 4 nodos, $V = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$, y 6 aristas, $a_1 = \{n_1, n_2\}$, $a_2 = \{n_2, n_3\}$, $a_3 = \{n_2, n_4\}$, $a_4 = \{n_3, n_1\}$, $a_5 = \{n_3, n_4\}$, $a_6 = \{n_4, n_1\}$.

Su matriz de incidencia es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

donde, por ejemplo, la primera columna corresponde a la arista $a_1$, y la primera fila al nodo $n_1$.
En el grafo, todos sus nodos, dos a dos, están directamente conectados, ya que existe una arista que une cada par de nodos, y por tanto, el grafo es conexo.

En esta sección consideraremos únicamente las redes de corriente continua. Éstas son descritas en términos de dos variables reales, la **corriente eléctrica** y el **potencial eléctrico**. Cada una de ellas será definida, dentro de nuestra representación en el grafo, como los conjuntos de aristas y nodos, respectivamente.

**Definición 3.9.** *Llamaremos **intensidad de corriente** que circula por $a_j$, $j \in \overline{1,n}$, y la denotaremos por $y_j$, a la corriente eléctrica correspondiente a la arista $a_j$. Mediremos la intensidad de corriente en amperios. Su signo será positivo si circula en la dirección de $a_j$ y negativo si circula en dirección contraria.*

**Definición 3.10.** *Llamaremos **diferencia de tensión** entre el nodo $n_i$, $i \in \overline{1,m}$, y algún punto de referencia, el cual puede ser otro de los nodos, y lo denotaremos $p_i$, al potencial correspondiente al nodo $n_i$. Mediremos la diferencia de tensión en voltios.*

**Definición 3.11.** *Llamaremos **tensión** a través de la arista $a_j = \{n_k, n_l\}$, con $j \in \overline{1,n}$, $k,l \in \overline{1,m}$, y lo denotaremos por $x_j$, $j \in \overline{1,n}$, a la diferencia de potencial*

$$x_k = p_k - p_l$$

*Proposición 3.5.* Sean el grafo $G$ que define una red eléctrica y $M$ la matriz de incidencia que lo representa. Podemos establecer una relación entre el vector de tensiones de las aristas, $\boldsymbol{x} = [x_j], j \in \overline{1,n}$, y el vector de potenciales de los nodos, $\boldsymbol{p} = [p_i], i \in \overline{1,m}$, de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{x} = M^t \boldsymbol{p}. \tag{3.12}$$

**Ejemplo 3.3.2.-**

Consideremos la matriz de incidencia del ejemplo anterior (véase ejemplo (3.3.1)[página 79])

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El vector de tensiones $\boldsymbol{x}$ queda definido en función de las diferencias de potencial $p_i,\ i \in \overline{1,4}$ de la siguiente manera

$$\boldsymbol{x} = M^t\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{cases} x_1 & = p_1 - p_2 \\ x_2 & = p_2 - p_3 \\ x_3 & = p_2 - p_4 \\ x_4 & = -p_1 + p_3 \\ x_5 & = p_3 - p_4 \\ x_6 & = -p_1 + p_4 \end{cases},$$

donde, recordemos, $x_j,\ j \in \overline{1,6}$ es la tensión a través de la arista $a_j$.

---

Las corrientes eléctricas y las tensiones satisfacen las leyes de Kirchhoff ([TM10a, capítulo 25]).

*Lema* 3.4 (Primera ley de Kirchhoff). La suma algebraica de las variaciones de potencial a lo largo de cualquier bucle o malla del circuito debe ser igual a cero.

*Lema* 3.5 (Segunda ley de Kirchhoff). En un punto o nudo de ramificación de un circuito en donde puede dividirse la corriente, la suma de las corrientes que entran en el nudo debe ser igual a la suma de las corrientes que salen del mismo.

*Observación* 3.1. Sean el grafo $G$ que define una red eléctrica y $M$ la matriz de incidencia que lo representa. Sea $\boldsymbol{y} = [y_j], j \in \overline{1,n}$, el vector de intensidades de corriente que circula por las aristas del grafo. Entonces, la segunda ley de Kirchhoff puede ser escrita de la siguiente manera:

$$M\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}. \tag{3.13}$$

**Ejemplo 3.3.3.-**

Consideremos la matriz de incidencia del ejemplo (3.3.1)[página 79]

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la segunda la segunda ley de Kirchhoff, el vector $\boldsymbol{y}$ de intensidades de corrientes debe satisfacer la ecuación $M\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{cases} y_1 - y_4 - y_6 & = 0 \\ -y_1 + y_2 + y_3 & = 0 \\ -y_2 + y_4 + y_5 & = 0 \\ -y_3 - y_5 + y_6 & = 0 \end{cases},$$

donde, recordemos, $y_j,\ j \in \overline{1,6}$ es la intensidad de corriente que circula por la arista $a_j$.

**Definición 3.12.** *A partir de la proposición (3.5)[página 80] y la observación (3.1)[página 81], podemos definir los subespacios:*

$$\mathcal{C}(M^t) \text{ y } \operatorname{null}(M).$$

*Ambos subespacios son ortogonales y complementarios.*

*Observación* 3.2. A partir de las ecuaciones (3.12)[página 80] y (3.13)[página 81], se tiene que, por definición (véanse definiciones (1.7)[página 16] y (1.8)[página 16]), el vector de tensiones $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(M^t)$ y el vector de intensidades de corriente $\boldsymbol{y} \in \text{null}(M)$.

Por razones teóricas, algunas veces es conveniente introducir en el estudio de las redes eléctricas algunas restricciones más a parte de las originadas por las leyes de Kirchhoff. Siendo así, consideraremos que cada arista de nuestra red tiene un generador de voltaje en serie de $v_j$ voltios, y, un generador de corriente en paralelo de $w_j$ amperios. De esta manera, y a partir del siguiente resultado, estableceremos una relación entre la corriente que circula por las aristas y la tensión ([TM10a, capítulo 25]).

*Lema* 3.6 (Ley de Ohm). La corriente en un circuito eléctrico es directamente proporcional a la diferencia de potencial aplicada, e inversamente proporcional la resistencia del mismo (medida en ohmios). Podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$I = \frac{V}{R},$$

donde

$$\begin{aligned} I &= \text{Intensidad de corriente, medida en amperios,} \\ V &= \text{Diferencia de potencial, medida en voltios,} \\ R &= \text{Resistencia, medida en ohmios.} \end{aligned}$$

*Observación* 3.3. Sea el grafo $G$ que define una red eléctrica, y sean $y_j, x_j, v_j$ y $w_j$, correspondientes a la arista $a_j, j \in \overline{1,n}$. A partir de la ley de Ohm podemos establecer la siguiente relación:

$$k_j(x_j - v_j) + (y_j - w_j) = 0, j \in \overline{1,n},$$

donde $k_j > 0$ es la conductividad, medida en mhos (inversa de la resistencia), de la arista $a_j$.

*Observación* 3.4. Sean el grafo $G$ que define una red eléctrica y $M$ la matriz de incidencia que lo representa. Sean $\boldsymbol{v}$ el vector de tensiones generadas y $\boldsymbol{w}$ el vector de corrientes generadas.

Definimos la matriz $A$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}$$

donde $k_j > 0$ es la conductividad de la arista $a_j,\ j \in \overline{1,n}$.

Entonces, a partir del resultado anterior, podemos establecer el siguiente sistema restringido:

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(M^t),\ \boldsymbol{y} \in \text{null}(M).$$

*Nota* 3.2. A partir de ahora, y para lo que resta de esta sección, cuando nos refiramos a la matriz $A$ que representa las conductividades de las aristas, ésta será de la forma

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}$$

donde $k_j > 0$ es la conductividad de la arista $a_j,\ j \in \overline{1,n}$.

Con el siguiente resultado habremos logrado el objetivo que nos propusimos al comenzar esta sección. Estaremos capacitados para calcular el voltaje y la corriente de cada elemento de la red eléctrica con la que estemos trabajando.

**Teorema 3.3.** *Sean el grafo $G$ que define una red eléctrica, $M$ la matriz de incidencia que lo representa, $A$ la matriz que representa las conductividades de las aristas y $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, los vectores de tensiones y corrientes generadas en cada arista, respectivamente. Sea el sistema*

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(M^t),\ \boldsymbol{y} \in \text{null}(M). \tag{3.14}$$

*Entonces, la inversa de Bott-Duffin de $A$ con respecto a $\mathcal{C}(M^t)$ existe, es decir, la matriz $(AP_{\mathcal{C}(M^t)} + P_{\text{null}(M)})$ es no singular; y además, la única solución del sistema (3.14) es*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= A^{\{-1\}}_{(\mathcal{C}(M^t))}(A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}), \\ \boldsymbol{y} &= (I - AA^{\{-1\}}_{(\mathcal{C}(M^t))})(A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}). \end{aligned}$$

*Demostración.* La matriz $A$ es una matriz definida positiva, al ser todas las conductividades mayores que cero. Por tanto, aplicando la proposición (3.4)[página 74], tenemos la existencia de la inversa de Bott-Duffin de $A$.

Como $(AP_{\mathcal{C}(M^t)}+P_{\text{null}(M)})$ es no singular, por el teorema (3.2)[página 73], tenemos que la única solución para el sistema (3.14) es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= A^{\{-1\}}_{(\mathcal{C}(M^t))}(A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}), \\ \boldsymbol{y} &= (I - AA^{\{-1\}}_{(\mathcal{C}(M^t))})(A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}). \end{aligned}$$

**Definición 3.13.** *Llamaremos a la matriz* $A^{\{-1\}}_{(\mathcal{C}(M^t))}$ ***matriz transferencia de la red****, donde la entrada* $(i,j)$*-ésima de* $A^{\{-1\}}_{(\mathcal{C}(M^t))}$ *es la tensión que atraviesa la arista* $a_i$, $i \in \overline{1,n}$ *como resultado de introducir una fuente de corriente de* $1$ *amperio en la arista* $a_j$, $j \in \overline{1,n}$.

*Proposición 3.6.* Sea $A$ la matriz que representa las conductividades de las aristas. Entonces, el sistema (3.14)[página 84], puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$A^{-1}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{y} \in \operatorname{null}(M),\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(M^t). \tag{3.15}$$

En tal caso la única solución del sistema (3.15):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= (A^{-1})^{\{-1\}}_{(\operatorname{null}(M))}(A^{-1}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}), \\ \boldsymbol{x} &= (I - A^{-1}(A^{-1})^{\{-1\}}_{(\operatorname{null}(M))})(A^{-1}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}). \end{aligned}$$

*Demostración.* Tenemos que la matriz $A$ es una matriz con determinante distinto de $0$, al ser una matriz diagonal con sus elementos diagonales distintos de $0$. Por tanto, $A$ es invertible.
Sea el sistema

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(M^t),\ \boldsymbol{y} \in \operatorname{null}(M).$$

Multiplicando por $A^{-1}$ a izquierda tenemos que

$$A^{-1}A\boldsymbol{x} + A^{-1}\boldsymbol{y} = A^{-1}A\boldsymbol{v} + A^{-1}\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(M^t),\ \boldsymbol{y} \in \operatorname{null}(M).$$

Es decir,

$$\boldsymbol{x} + A^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v} + A^{-1}\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(M^t),\ \boldsymbol{y} \in \operatorname{null}(M).$$

Luego, por el teorema (3.2)[página 73], tenemos que la única solución del sistema es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= (A^{-1})^{\{-1\}}_{(\operatorname{null}(M))}(A^{-1}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}), \\ \boldsymbol{x} &= (I - A^{-1}(A^{-1})^{\{-1\}}_{(\operatorname{null}(M))})(A^{-1}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}). \end{aligned}$$

**Definición 3.14.** *Llamaremos a la matriz* $(A^{-1})^{\{-1\}}_{(\operatorname{null}(M))}$ ***matriz de transferencia dual****, donde su entrada* $(i,j)$*-ésima es la intensidad de corriente en la arista* $a_i$ *como resultado de introducir un generador en paralelo de* $1$ *voltio en la arista* $a_j$.

Llegado este punto, parece adecuado que realicemos un pequeño resumen de lo que hasta ahora hemos conseguido. Dado el grafo que define una red eléctrica, su matriz de incidencia, las conductividades de las aristas, que definen la matriz $A$, el vector $\boldsymbol{v}$ con los voltajes generados en cada arista y el vector $\boldsymbol{w}$ con las intensidades generadas en cada arista, calculamos las soluciones

$$\boldsymbol{x} : \text{vector de tensiones de las aristas},$$
$$\boldsymbol{y} : \text{vector de intensidades de corriente}.$$

## 3.4 Propiedad extrema de la inversa de Bott-Duffin con aplicación a redes eléctricas

En el estudio de las redes eléctricas es importante conocer cuando el sistema con el que estamos trabajando alcanza el régimen estacionario, es decir, el momento a partir del cual se mantienen constantes las tensiones y corrientes.

Al finalizar esta sección tendremos los conocimientos suficientes para conocer los valores de tensión y corriente con los que el sistema se encuentra en estado estacionario.

**Definición 3.15.** *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica, y sea $L$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Sean $\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}$ dos vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^n$. Definimos la forma cuadrática*

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v})^t A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{w}^t\boldsymbol{x}. \tag{3.16}$$

*Diremos que $\boldsymbol{x}$ es un **punto estacionario** de $q$ en $L$ si*

$$\nabla q(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} q(\boldsymbol{x})\right], j \in \overline{1,n}$$

*es ortogonal a $L$, es decir,*

$$\nabla q(\boldsymbol{x}) \in L^{\perp},$$

*donde $\nabla q(\boldsymbol{x})$ denota el gradiente de $q$ en $\boldsymbol{x}$.*
*El valor de $q$ en un punto estacionario es llamado **valor estacionario** de $q$.*

**Teorema 3.4.** *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica, y sea $L$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$ tal que $A^{\{-1\}}_{(L)}$ existe. Entonces, para cualesquiera dos vectores $\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$, la forma cuadrática*

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v})^t A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{w}^t\boldsymbol{x}, \tag{3.17}$$

*tiene un único valor estacionario en el subespacio $L$ cuando*

$$\boldsymbol{x} = A_{(L)}^{\{-1\}}(A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}). \tag{3.18}$$

*De forma recíproca, si la matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y el subespacio $L$ de $\mathbb{R}^n$ son tales que para cualesquiera vectores $\boldsymbol{v}, \ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$, la forma cuadrática (3.17) tiene un valor estacionario en $L$, entonces la matriz $A_{(L)}^{\{-1\}}$ existe y el punto estacionario es único para cualesquiera dos vectores $\boldsymbol{v}, \ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ dando (3.18).*

*Demostración.* Sea

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v})^t A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{w}^t\boldsymbol{x}.$$

Mediante la diferenciación de matrices, se tiene que (véase [Har08, página 299])

$$\begin{aligned}\nabla q(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}(A + A^t)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{w}\\ &= A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{w}.\end{aligned}$$

Por la definición (3.15), para que $\boldsymbol{x}$ sea un punto estacionario en $L, \ \nabla q(\boldsymbol{x}) \in L^{\perp}$.

Tomando

$$\boldsymbol{y} = -\nabla q(\boldsymbol{x}) = -A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = -A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}.$$

Concluimos que $\boldsymbol{x}$ es un punto estacionario de $q$ en $L$ si y solo si $\boldsymbol{x}$ es una solución de

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \ \boldsymbol{x} \in L, \ \boldsymbol{y} \in L^{\perp}. \tag{3.19}$$

Por tanto, la existencia de un valor estacionario de $q$ para cualesquiera dos vectores $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, es equivalente a que el sistema (3.19) sea compatible, es decir, a la existencia de $A_{(L)}^{\{-1\}}$, en cuyo caso,

$$\boldsymbol{x} = A_{(L)}^{\{-1\}}(A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$$

es el único punto estacionario en $L$.

∎

*Corolario* 3.2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva, y sea $L$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Entonces, para cualesquiera dos vectores $\boldsymbol{v}, \ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$, la función

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v})^t A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{w}^t\boldsymbol{x},$$

tiene un único mínimo en $L$ cuando

$$\boldsymbol{x} = A_{(L)}^{\{-1\}}(A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}).$$

*Demostración.* Tenemos que la matriz $A$ es definida positiva, por tanto, por la proposición (3.4)[página 74], existe $A_{(L)}^{\{-1\}}$. Aplicando ahora el teorema (3.4)[página 86], podemos afirmar que existe un único valor estacionario de $q$ en $L$, que, por ser nuevamente $A$ una matriz definida positiva, es un mínimo en $L$.

∎

Debemos recordar, para el siguiente resultado, que representamos las redes eléctricas mediante grafos consistentes en $m$ nodos y $n$ aristas, con

- $M$, matriz de incidencia;
- $x_j$, tensión que atraviesa la arista $a_j, j \in \overline{1,n}$;
- $\boldsymbol{x}$ vector de tensiones de las aristas;
- $y_j$, intensidad de corriente en la arista $a_j, j \in \overline{1,n}$;
- $\boldsymbol{y}$ vector de intensidades de corriente;
- $k_j$ $> 0,$ conductancia de la arista $a_j, j \in \overline{1,n}$;
- $A$, matriz diagonal cuyos elementos distintos de 0 son las conductancias $k_j, j \in \overline{1,n}$;
- $v_j$, voltaje generado por la fuente de tensión en serie con la arista $a_j, j \in \overline{1,n}$;
- $\boldsymbol{v}$ vector de tensiones generadas;
- $w_j$, corriente generada por la fuente en paralelo con la arista $a_j, j \in \overline{1,n}$; y
- $\boldsymbol{w}$ vector de corrientes generadas.

*Corolario 3.3.* Sean las matrices $A$, $M$, y los vectores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ definidos arriba. Entonces:

1. El vector $\boldsymbol{x}_0$ de tensiones en las aristas es el único que minimiza

   $$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v})^t A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{w}^t\boldsymbol{x}$$

   en $\mathcal{C}(M^t)$, y el vector $\boldsymbol{y}_0$ de intensidades de corriente en las aristas es

   $$\boldsymbol{y}_0 = -\nabla q(\boldsymbol{x}_0) = -A(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} \in \mathcal{C}(M^t)^\perp = \mathrm{null}(M).$$

2. El vector $\boldsymbol{y}_0$ es el único que minimiza

   $$p(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{w})^t A^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{w}) - \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{y}$$

   en $\mathrm{null}(M)$, y el vector $\boldsymbol{x}_0$ es

   $$\boldsymbol{x}_0 = -\nabla p(\boldsymbol{y}_0) = -A^{-1}(\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{v} \in \mathrm{null}(M)^\perp = \mathcal{C}(M^t).$$

*Demostración.* Veamos la demostración de cada apartado:

1. Recordemos que la matriz $A$ de conductancias es una matriz diagonal, cuyos elementos diagonales son mayores que cero, y por tanto, por el teorema (1.3)[página 22], $A$ es definida positiva.
   Utilizando el corolario (3.2)[página 87], tenemos, por el teorema (3.3)[página 84], que el vector $\boldsymbol{x}_0$ es el único que minimiza la función cuadrática $q(\boldsymbol{x})$ en $\mathcal{C}(M^t)$. Y, por el argumento realizado en la demostración del teorema (3.4)[página 86],
   $$\boldsymbol{y}_0 = -\nabla q(\boldsymbol{x}_0).$$
2. Sigue de la proposición (3.6)[página 85]

## 3.5 Recorrido bibliográfico

En esta sección se pretende hacer una breve incursión en la bibliografía actual con el propósito de investigar cuáles han podido ser los diferentes recorridos de la inversa de Bott-Duffin.
En secciones anteriores hemos visto como Bott-Duffin plantea, dados un subespacio $L$ de $\mathbb{C}^n$, y una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, una solución al sistema restringido

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \in L,\ \boldsymbol{y} \in L^{\perp},$$

siempre y cuando la matriz $(AP_L + P_{L^\perp})$ sea singular.
Pero, ¿qué ocurre con este sistema en el caso de que la matriz $(AP_L+P_L)$ sea singular?.
Las siguientes definiciones y resultados nos dan una visión más general de la inversa de Bott-Duffin:

**Definición 3.16.** *([Che90])*

*Sean la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y un subespacio $L$ de $\mathbb{C}^n$. Llamaremos* ***inversa generalizada de Bott-Duffin*** *de $A$ con respecto a $L$, a la matriz*

$$A_{(L)}^{\{+\}} = P_L(AP_L + P_{L^\perp})^+.$$

*Observación* 3.5. La matriz $A^{\{+\}}_{(L)}$ siempre existe, y, además, cuando $(AP_L + P_L)$ es no singular,

$$A^{\{+\}}_{(L)} = A^{\{-1\}}_{(L)}.$$

**Definición 3.17.** *([LWW09])*

*Sean la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, y $L$ y $K$ dos subespacios de $\mathbb{C}^n$ tales que $\dim(L) = \dim(K)$. Sean $P_L$ y $P_K$ los proyectores ortogonales sobre $L$ y $K$, respectivamente. Entonces, se define la **inversa generalizada de Bott-Duffin** de $A$ con respecto a $L$ y $K$, como*

$$A^{+}_{(L,K)} = (P_K A P_L)^+$$

*Observación* 3.6. Si $L = K$ y $(AP_L + P_{L^\perp})$ es no singular, entonces $A^{+}_{(L,K)} = A^{\{-1\}}_{(L)}$

Podemos establecer una relación entre ambas inversas generalizadas de Bott-Duffin, pero antes de ello, debemos tener en cuenta la siguiente definición

**Definición 3.18.** *([Che90])*

*Sean la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $L$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$. Si $A^* = A$, y satisface*

1. $\boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, $\forall \boldsymbol{x} \in L$,
2. $\boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, *y* $\boldsymbol{x} \in L$, *implica que* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

*entonces, diremos que $A$ es una matriz **$L$-semidefinida positiva**.*

*Lema* 3.7. ([LWW09])

Sean la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $L$ y $K$ dos subespacios de $\mathbb{C}^n$. Si $A$ es una matriz $L$-semidefinida positiva, entonces

$$A^{+}_{(L,K)} = A^{\{+\}}_{(L)}.$$

Veamos ahora algunas aplicaciones de la matriz $A^{+}_{(L,K)}$.

*Lema* 3.8. ([LWW09]) Consideremos el sistema

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \in L,\ \boldsymbol{y} \in L^\perp, \tag{3.20}$$

siendo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $L$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$.
Si el sistema (3.20) es compatible y la matriz $(AP_L + P_{L^\perp})$ es singular, entonces, la solución mínimo cuadrática del mismo es

$$\boldsymbol{x} = A^{+}_{(L,L)}\boldsymbol{b}$$

*Lema* 3.9. ([LWW09])

Sean ahora $L$ y $K$ dos subespacios de $\mathbb{C}^n$ tales que $\dim(L) = \dim(K)$, y $L \oplus K^{\perp} = \mathbb{C}^n$. Consideremos el sistema

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x} \in L, \ \boldsymbol{y} \in K^{\perp}. \tag{3.21}$$

Entonces, el sistema (3.21) tiene solución si y solo si

$$(AP_L + P_{K^{\perp}})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$$

tiene una solución.
Y, si el sistema (3.21) tiene una solución y la matriz $(AP_L + P_{L^{\perp}})$ es singular, entonces la solución mínimo cuadrática del mismo es:

$$\boldsymbol{x} = A^{+}_{(L,K)}\boldsymbol{b}, \ \ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - AA^{+}_{(L,K)}\boldsymbol{b}.$$

Hemos estudiado la inversa de Bott-Duffin, la hemos generalizado definiendo la inversa generalizada de Bott-Duffin, y hemos visto cómo pueden estar relacionadas entre ellas. Todo este estudio comenzó definiendo una inversa muy especial, la inversa de Moore-Penrose (véase definición (2.1)[página 33]) ¿Nos hemos olvidado ya de ella? El siguiente resultado nos puede ayudar a responder esta pregunta ([LWW09]). Sea $L$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$, y sea $B$ una matriz tal que $L = \mathcal{C}(B)^{\perp}$. Entonces, el sistema

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x} \in L, \ \boldsymbol{y} \in L^{\perp},$$

es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{y} = B\boldsymbol{y}_0$$

Este tipo de sistemas son conocidos como sistemas KKT (Karush-Kuhn-Tucker).
Consideremos ahora, un sistema más general ([LW07], [WZ04], [XW07], [XWD06]).

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{y} = B\boldsymbol{y}_0$$

donde $L = \mathcal{C}(C^*)^{\perp}$, $K = \mathcal{C}(B)$, e $\boldsymbol{y}_0 = B\boldsymbol{y}$. Este sistema sería equivalente al sistema

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_0 &= \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x} \in L, \ \boldsymbol{y}_0 \in K^{\perp}, \\ B\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y}_0. \end{aligned}$$

*Lema* 3.10. ([LWW09])

Sea la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, y sean $L$ y $K$ dos subespacios de $\mathbb{C}^n$. Si $AL \cap K^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, entonces

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} A^{+}_{(L,K)} & (I - A^{+}_{(L,K)}A)C^{+} \\ B^{+}(I - AA^{+}_{(L,K)}) & B^{+}(AA^{+}_{(L,K)}A - A)C^{+} \end{pmatrix}.$$

Se han realizado muchas investigaciones sobre sistemas KKT como en [KGW00]. Pero, aunque en [KGW00] se da la condición suficiente y necesaria sobre la compatibilidad de un sistema KKT, el resultado no es fácil de usar. El siguiente resultado nos da otra condición para determinar si un sistema KKT tiene solución.

**Teorema 3.5.** *([LWW09])*

*Sea el sistema KKT*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

*y sean $G_1, G_2$ tales que:*

$$G_1 = \begin{pmatrix} A \\ B^* \end{pmatrix}, \; G_2 = (I - P_{G_1}) \begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix},$$

*donde $P_{G_1} = G_1 G_1^{+}$. Entonces, el sistema (3.22) tiene una solución si y solo si*

$$P_{G_2}(I - P_{G_1}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = (I - P_{G_1}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix}.$$

*Cualquier solución del sistema (3.22) puede ser expresada como*

$$\boldsymbol{y} = G_2^{+}(I - P_{G_1}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix} + (I - G_2^{+}G_2)\boldsymbol{z}_1, \; \forall \boldsymbol{z}_1,$$

$$\boldsymbol{x} = G_1^{+} \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \right\} + (I - G_1^{+}G_1)\boldsymbol{z}_2, \; \forall \boldsymbol{z}_2.$$

**Teorema 3.6.** *([LWW09])*

*Si el sistema KKT*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix},$$

*tiene una solución, su solución mínimo cuadrática es:*

$$\boldsymbol{x} = (I - G_3 G_3^{+}) \left\{ G_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix} G_2^{+}(I - P_{G_1}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \right\}.$$

Hemos visto como la inversa de Bott-Duffin nos da resultados aplicados a la existencia y el cálculo de puntos estacionarios (sección (3.4)[página 86]) y para ello siempre es necesario que la matriz $(AP_L + AP_{L^\perp})$ sea invertible. Con respecto a esto, [Che90] añade un nuevo concepto para el que no importa si dicha matriz es singular o no, denominado *inversa generalizada de Bott-Duffin*, que, como vimos anteriormente, juega un papel principal en la resolución de problemas tipo

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \in L,\ \boldsymbol{y}_0 \in K^\perp, \\ B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0, \end{aligned}$$

en encontrar su conjunto de soluciones, y en su caso, la solución de norma mínima. [LACCG14] amplía estos resultados. Nos muestra cómo varios problemas de puntos estacionarios tienen solución en presencia de una propiedad, llamada *compatibilidad*, entre un operador lineal semidefinido positivo y un subespacio cerrado contenido en un espacio de Hilbert, y lo mismo sucede con ciertos problemas de splines abstractos.

La teoría de semigrupos también se vincula a la inversa de Bott-Duffin. [Dra14] establece un paralelismo entre el concepto de $(b, c)$-*pseudo-inversa* de un elemento de un anillo cualquiera, (definido en dicho artículo), y la inversa de Bott-Duffin. Además, [Dra12] generaliza la inversa de Bott-Duffin usando las operaciones de la suma y la diferencia en anillos, introduciendo conceptos como, por ejemplo, la $(e, f)$-*inversa de Bott-Duffin* de un elemento $a$ perteneciente a un semigrupo.

Incluso en el campo de la física y de la química encontramos referencia a la inversa de Bott-Duffin. [Kne08] y [Kne07] consideran un sistema de $n$ partículas, con posiciones $\boldsymbol{x}_n$ y masas $m_n$, las cuales se encuentran sujetas a $s$ restricciones de la forma

$$h_j(\boldsymbol{x}, t) = 0,\ \text{o}\ g_j(x, \dot{\boldsymbol{x}}) = 0,\ j \in \overline{1, s},$$

donde $\boldsymbol{x}$ son todas las posiciones $\boldsymbol{x}_n$, y $\dot{\boldsymbol{x}}$ son las correspondientes velocidades $\dot{\boldsymbol{x}}_n$. Si derivamos dos veces $h_j(\boldsymbol{x}, t) = 0$ y una vez $g_j(x, \dot{\boldsymbol{x}}) = 0$ con respecto al tiempo, obtenemos un conjunto de $s$ restricciones lineales para la aceleración de las partículas, de la forma

$$A\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}, \tag{3.23}$$

donde $A$ es una matriz $s \times 3n$, y $\boldsymbol{b}$ es un vector columna $s$-dimensional. En general, $A$ y $\boldsymbol{b}$, dependen de la posición y de la velocidad de las partículas.

Una solución a la ecuación (3.23), puede ser dada a partir de la inversa de Moore-Penrose

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = A^{+}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} \in \operatorname{null}(A),\ A^{+}\boldsymbol{b} \in P_{L^{\perp}},$$

donde $L$ es un subespacio de dimensión $s$ de $\mathbb{R}^{3n}$.
Esta relación presenta la descomposición del vector aceleración $\ddot{\boldsymbol{x}}$ en dos componentes, una ortogonal a $L$, que denotaremos $\ddot{\boldsymbol{x}}_{\perp}$, la cual es conocida ($\ddot{\boldsymbol{x}}_{\perp} = A^{+}\boldsymbol{b}$); y otra desconocida sobre $L$, que denotaremos $\ddot{\boldsymbol{x}}_{\|}$. Esta última puede ser determinada por la segunda ley de Newton ([TM10b, página 97])

$$M\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{z},$$

donde $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{z}$ son las fuerzas que actúan sobre las partículas. En particular, $\boldsymbol{f}$ constituyen las fuerzas externas (las cuales están aplicadas a partículas del sistema debidas a partículas o agentes que no pertenecen al sistema, como el peso y la normal), y $\boldsymbol{z}$ las fuerzas internas o de contacto (las cuales están aplicadas a las partículas del sistema debidas a las interacciones con otras partículas del mismo sistema, como la fuerza de rozamiento); y $M$ es una matriz diagonal $3n \times 3n$, cuyos elementos distintos de cero son las masas de cada partícula.
Descomponiendo $\ddot{\boldsymbol{x}}$ como $\ddot{\boldsymbol{x}} = \ddot{\boldsymbol{x}}_{\perp} + \ddot{\boldsymbol{x}}_{\|}$, obtenemos que

$$M(\ddot{\boldsymbol{x}}_{\perp} + \ddot{\boldsymbol{x}}_{\|}) = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{z}. \tag{3.24}$$

Sustituyendo $\ddot{\boldsymbol{x}}_{\perp}$ por $A^{+}\boldsymbol{b}$, el sistema (3.24) quedaría:

$$M\ddot{\boldsymbol{x}}_{\|} = MA^{+}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{z} + \boldsymbol{f}. \tag{3.25}$$

Este sistema, (3.25), conocido de Bott-Duffin, constituye un sistema de $3n$ ecuaciones lineales con $\ddot{\boldsymbol{x}}_{\|}$ y $\boldsymbol{z}$ como incógnitas, el cual tendrá solución siempre que

$$\boldsymbol{z} \perp \ddot{\boldsymbol{x}}_{\|}.$$

Se hace necesario el uso de la inversa de Bott-Duffin para el cálculo de la solución de este sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son dos vectores ortogonales.
Un planteamiento parecido se realiza en [Kne06] donde el objetivo fundamental es el de demostrar que la mecánica Hamiltoniana puede desarrollarse sobre la base de proyectores y matrices inversas generalizadas, usando, en particular, la inversa de Bott-Duffin.
De una manera similar, [HK09] muestra cómo la inversa de Bott-Duffin puede ser aplicada a las ecuaciones de movimiento que describen la evolución temporal de poblaciones biológicas o reacciones químicas.

Llama la atención el hecho de que todos los artículos mencionados relacionados con la física y la química, están redactados por el mismo autor.

A modo de curiosidad, [AS03], introduce el uso de la inversa de Bott-Duffin para el análisis de contactos dinámicos y estáticos que presentan las estructuras de mampostería.

Conocidas ya las referencias más actuales a la inversa de Bott-Duffin, aunque todas ellas sean interesantes, resulta corto el recorrido de la misma. No se ha encontrado apenas una evolución del concepto en sí, y esto es un poco decepcionante. En el año $1990$ Chen ([Che90]) introdujo el concepto de inversa generalizada de Bott-Duffin, dando un impulso a los sistemas de ecuaciones restringidos en los que no era posible el cálculo de la inversa de Bott-Duffin. Desde entonces hasta hoy, es todo lo que se puede contar. Sí que es cierto, que en la actualidad, el abanico de áreas en las que se requiere el uso de la inversa de Bott-Duffin, no solamente se encuentra limitado al análisis de sistemas eléctricos y mecánicos, que realmente fue para lo que Bott y Duffin la destinaron ([BD53]). Sin embargo, la finalidad siempre es la misma: llegar a un sistema de ecuaciones restringido a un subespacio de soluciones y aplicar la inversa de Bott-Duffin para su cálculo.

# 4 Inversa de Drazin

Dominamos ya los conceptos, propiedades y aplicaciones de la inversa de Moore-Penrose y la inversa de Bott-Duffin de una matriz dada. En este capítulo, introduciremos nuevas inversas generalizadas. Esta vez poseerán algunas propiedades espectrales de la inversa de una matriz no singular, es decir, relativas a autovalores y autovectores (véase sección (1.7)[página 18]). Por tanto, solo consideraremos, en este caso, matrices cuadradas, ya que solamente ellas poseen autovalores y autovectores.
Para el desarrollo de este capítulo hemos tomado como referencia [BIG03, capítulo 4], y [CMR76].
No está de más que recordemos las ecuaciones que debía satisfacer la inversa de Moore-Penrose de una matriz $A$,

$$
\begin{aligned}
AXA &= A, && (1)\\
XAX &= X, && (2)\\
(AX)^* &= AX, && (3)\\
(XA)^* &= XA. && (4)
\end{aligned}
$$

Son propiedades que podíamos aplicar a matrices rectangulares.
En el trascurso de este capítulo iremos poco a poco aumentando el número de estas ecuaciones, ahora, todas ellas, solamente aplicables a matrices cuadradas,

$$
\begin{aligned}
A^kXA &= A^k, && (1^k)\\
AX &= XA, && (5)\\
A^kX &= XA^k, && (5^k)\\
AX^k &= X^kA. && (6^k)
\end{aligned}
$$

## 4.1 Índice de una matriz

**Definición 4.1.** *Sea la matriz* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$*. Llamaremos* ***índice*** *de* $A$*, y lo denotaremos por* $\mathrm{Ind}(A)$*, al menor entero positivo* $k$ *para el cual se cumple que*

$$\mathrm{rango}(A^k) = \mathrm{rango}(A^{k+1}) \tag{4.1}$$

*Nota* 4.1. Consideraremos que dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A^0 = I_n$.

*Observación* 4.1. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz no singular, entonces $\mathrm{Ind}(A) = 0$.

---

**Ejemplo 4.1.1.-**

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{pmatrix},$$

donde $\mathrm{rango}(A) = 2$.

Sea

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

con $\mathrm{rango}(A^2) = 1$.

Sea

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con $\mathrm{rango}(A^3) = 0$.

Es evidente, que las potencias mayores o iguales a $3$ de $A$ serán igual a la matriz nula, y que por tanto, el rango de todas ellas será igual a $0$. En consecuencia, el menor entero positivo $k$ para el cual se cumple

$$\mathrm{rango}(A^{k+1}) = \mathrm{rango}(A^k),$$

es $3$, y, por consiguiente, el índice de $A$ es $3$.

*Observación* 4.2. Si $A$ es una matriz nilpotente, entonces, el índice de $A$ coincide con su índice de nilpotencia. (Véanse ejemplos (4.1.1) y (1.4.4)[página 14]).

*Proposición* 4.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, y sea $J$ una forma canónica de Jordan asociada a la matriz $A$. Entonces, el índice de $A$ coincide con el tamaño del mayor bloque de Jordan de $J$ asociado al autovalor $0$ de $A$.

*Demostración.* Sea $P$ una matriz invertible tal que

$$A = PJP^{-1} = P \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

donde $J_0$ y $J_1$ son las partes de la matriz $J$ correspondientes a los autovalores $0$ y distintos de cero de $A$, respectivamente. De este modo $J_1$ es una matriz no singular y $J_0$ es una matriz nilpotente.

Sea $k$ el tamaño del mayor bloque de $J_0$. Entonces

$$J_0^k = O \quad \text{y} \quad J_0^{k-1} \neq O.$$

De este modo,

$$A^k = P \begin{pmatrix} J_1^k & O \\ O & J_0^k \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} J_1^k & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}$$

y

$$A^{k+1} = P \begin{pmatrix} J_1^{k+1} & O \\ O & J_0^{k+1} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} J_1^{k+1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Por tanto,

$$\text{rango}(A^k) = \text{rango}(A^{k+1}).$$

Por otro lado,

$$A^{k-1} = P \begin{pmatrix} J_1^{k-1} & O \\ O & J_0^{k-1} \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ donde } J_0^{k-1} \neq O.$$

Luego,

$$\text{rango}(A^{k-1}) > \text{rango}(A^k).$$

En consecuencia, $\text{Ind}(A) = k$.

∎

**Ejemplo 4.1.2.-**

Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{pmatrix}.$$
El autovalor de $A$ es $\lambda_1 = 0$, con multiplicidad algebraica $3$.

Una matriz de Jordan asociada a la matriz $A$ es:
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
con matriz de paso:
$$P = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 0 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego el tamaño del mayor bloque de Jordan de $J$ asociado al autovalor $0$ es $3$, que coincide con el índice de $A$ calculado en el ejemplo (4.1.1)[página 98].

---

*Proposición 4.2.* Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Si existe una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que se cumple
$$A^{k+1}X = A^k, \tag{7}$$
para algún entero positivo $k$, entonces
$$\text{rango}(A^{k+1}) = \text{rango}(A^k). \tag{4.1}$$

*Demostración.* Tenemos que
$$A^{k+1} = A^k A \;\Rightarrow\; \text{rango}(A^{k+1}) \;\leq \text{rango}(A^k).$$
Por otro lado,
$$A^k = A^{k+1}X \;\Rightarrow\; \text{rango}(A^k) \;\leq \text{rango}(A^{k+1}).$$

Como consecuencia, $\text{rango}(A^k) = \text{rango}(A^{k+1})$.

∎

*Proposición 4.3.* Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Si existe una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que se cumple

$$A^{k+1}X = A^k, \tag{7}$$

para algún entero positivo $k$, entonces se cumple para todo entero $l > k$.

*Demostración.* Supongamos que se cumple la igualdad (7) para un entero positivo $k$. Sea $l = k+1$,

$$\begin{aligned} A^{l+1}X &= A^{k+1+1}X \\ &= AA^{k+1}X && \text{(por (7))} \\ &= AA^k \\ &= A^{k+1} \\ &= A^l. \end{aligned}$$

**Teorema 4.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

*a)* $\operatorname{Ind}(A) = k$.
*b) El exponente positivo más pequeño para el cual se cumple*

$$A^{k+1}X = A^k, \tag{7}$$

*es $k$.*

*Demostración.* Veamos la demostración de cada una de las implicaciones:
$\boxed{\text{a)} \Rightarrow \text{b)}}$ Supongamos que el índice de $A$ es $k$. Entonces, por definición, $k$ es el menor entero positivo para el cual se cumple

$$\operatorname{rango}(A^{k+1}) = \operatorname{rango}(A^k).$$

Es decir, existe una matriz $X$ tal que

$$A^{k+1}X = A^k,$$

ya que $\mathcal{C}(A^{k+1}) \subset \mathcal{C}(A^k)$ y la condición $\operatorname{rango}(A^{k+1}) = \operatorname{rango}(A^k)$ implica la igualdad.

Hay que probar que $k$ es el menor que cumple que $A^{k+1}X = A^k$.

Supongamos que $s$ es el menor entero positivo tal que

$$A^{s+1}X = A^s,$$

luego

$$\mathcal{C}(A^{s+1}) = \mathcal{C}(A^s),$$

y por tanto

$$\text{rango}(A^{s+1}) = \text{rango}(A^s),$$

pero $k$ es el menor entero que cumple esto. En consecuencia $s = k$.

$\boxed{\text{b)} \Rightarrow \text{a)}}$ Supongamos ahora que $s$ es el entero positivo más pequeño para el cual se cumple

$$A^{s+1}X = A^s,$$

para cierta matriz $X$.

Lo que nos lleva a que

$$\mathcal{C}(A^{s+1}) = \mathcal{C}(A^s),$$

y por tanto

$$\text{rango}(A^{s+1}) = \text{rango}(A^s),$$

En consecuencia, como $\text{Ind}(A)$ es el menor entero tal que $\text{rango}(A^{k+1}) = \text{rango}(A^k)$, $s = \text{Ind}(A) = k$.

∎

*Lema* 4.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sea $\text{Ind}(A) = k$. Entonces:

1. Todas las matrices $\{A^l : l \geq k\}$ tienen el mismo rango, el mismo espacio de columnas y el mismo espacio nulo.
2. Sus traspuestas $\{(A^l)^t : l \geq k\}$ tienen todas el mismo rango, el mismo espacio de columnas y el mismo espacio nulo.
3. Sus conjugadas traspuestas $\{(A^l)^* : l \geq k\}$ tienen todas el mismo rango, el mismo espacio de columnas y el mismo espacio nulo.
4. Además, no existe ningún entero $l$ menor que $k$ tal que $A^l$ y una potencia mayor de $A$ (o sus traspuestas o sus conjugadas traspuestas) tengan el mismo espacio de columnas o el mismo espacio nulo.

*Demostración.* Veamos la demostración de cada apartado:

1. Por ser $k$ el índice de $A$,

$$\text{rango}(A^k) = \text{rango}(A^{k+1}).$$

Como consecuencia, por la proposición (2.4)[página 41],

$$\mathcal{C}(A^{k+1}) = \mathcal{C}(A^k) \text{ y } \text{null}(A^{k+1}) = \text{null}(A^k).$$

Por otro lado, por la proposición (4.2)[página 100], como $\text{rango}(A^k) = \text{rango}(A^{k+1})$,

$$A^k = A^{k+1}X.$$

Multiplicando a izquierda por $A^{l-k}$,

$$A^{l-k}A^k = A^{l-k}A^{k+1}X \qquad (l \geq k),$$

o lo que es lo mismo:

$$A^l = A^{l+1}X \qquad (l \geq k).$$

Por tanto, todas las matrices del conjunto $\{A^l : l \geq k\}$ tienen el mismo rango, espacio de columnas y espacio nulo.
2. Partiendo de que $(A^t)^l = (A^l)^t$, y, aplicando el apartado a) a $A^t$, obtenemos el resultado buscado.
3. Al igual que en el apartado b), teniendo en cuenta que $(A^*)^l = (A^l)^*$, ahora aplicando el apartado a) a $A^*$, obtenemos el resultado deseado.
4. Supongamos que, para $l < k$, se cumple que

$$\mathcal{C}(A^l) = \mathcal{C}(A^{l+1}).$$

Luego, por la proposición (2.4)[página 41],

$$\text{rango}(A^l) = \text{rango}(A^{l+1}),$$

y por lo tanto,

$$A^{l+1}X = A^l.$$

Lo que es una contradicción, ya que por hipótesis, el índice de $A$ es $k$, es decir, $k$ es el menor entero positivo tal que

$$A^{k+1}X = A^k.$$

Por consiguiente, no existe $l < k$ tal que

$$\mathcal{C}(A^l) = \mathcal{C}(A^{l+1}).$$

Supongamos ahora que, para $l < k$, se tiene que

$$\text{null}(A^l) = \text{null}(A^{l+1}).$$

Luego, por la proposición (2.4)[página 41],

$$\text{rango}(A^l) = \text{rango}(A^{l+1}).$$

Por lo tanto,

$$A^{l+1}X = A^l.$$

Lo que es una contradicción, ya que por hipótesis, el índice de $A$ es $k$, es decir, $k$ es el menor entero positivo tal que

$$A^{k+1}X = A^k.$$

Por consiguiente, no existe $l < k$ tal que

$$\text{null}(A^l) = \text{null}(A^{l+1}).$$

∎

## 4.2 Inversa espectral de una matriz diagonal

Al principio de este capítulo ya mencionamos que ahora nuestro propósito iba a ser el de encontrar una inversa generalizada con ciertas propiedades espectrales de una matriz no singular. Consideremos una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalizable, siendo $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ el conjunto de sus autovalores. El objetivo es encontrar una matriz $X$ tal que cada autovector de $A$ asociado a un autovalor $\lambda_i \in \lambda(A), i \in \overline{1, n}$, sea también autovector de $X$ asociado al autovalor $\lambda^+$ (véase definición (2.2)[página 38]). El teorema de la forma canónica de Jordan (véase teorema (1.8)[página 31]) afirma que dada una matriz $A$ existe una matriz $P$ no singular tal que

$$AP = PJ,$$

siendo $J$ una matriz de Jordan, de tal forma que

$$J = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Luego necesitaremos encontrar $J$ para reemplazar los elementos de su diagonal, $\lambda_i, i \in \overline{1,n}$, por los elementos $\lambda_i^+, i \in \overline{1,n}$, y así obtener la matriz $X$. Es fácil comprobar (véase ejemplo (2.1.1)[página 34]) que la inversa de Moore-Penrose de $J$ es la matriz diagonal

$$J^+ = diag(\lambda_1^+, \lambda_2^+, \ldots, \lambda_n^+).$$

Por tanto, $X$ debe cumplir que

$$XP = PJ^+.$$

**Teorema 4.2.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz diagonalizable, tal que $\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, y sea $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ otra matriz diagonalizable, tal que $\lambda(X) = \{\lambda_1^+, \lambda_2^+, \ldots, \lambda_n^+\}$. Entonces $X \in A\{1,2,5\}$.*

*Demostración.* A partir del teorema de la forma canónica de Jordan, teorema (1.8)[página 31], podemos expresar las matrices $A$ y $X$ de la siguiente manera:

$$A = PJP^{-1}, \qquad X = PJ^+P^{-1},$$

donde $P$ es una matriz no singular, $J = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ y $J^+ = diag(\lambda_1^+, \lambda_2^+, \ldots, \lambda_n^+)$.

Comprobemos que la matriz $X$ es una $\{1,2,5\}$-inversa de $A$:

- Satisface $X$ la igualdad $AXA = A$:

$$AXA = PJP^{-1}PJ^+P^{-1}PJP^{-1} = PJJ^+JP^{-1} = PJP^{-1} = A.$$

- Satisface $X$ la igualdad $XAX = X$:

$$XAX = PJ^+P^{-1}PJP^{-1}PJ^+P^{-1} = PJ^+JJ^+P^{-1} = PJ^+P^{-1} = X.$$

- Satisface $X$ la igualdad $AX = XA$:

$$\begin{aligned} AX &= PJP^{-1}PJ^+P^{-1} \\ &= PJJ^+P^{-1} && (J \text{ y } J^+ \text{ conmutan por ser ambas diagonales}) \\ &= PJ^+JP^{-1} \\ &= PJ^+P^{-1}PJP^{-1} \\ &= XA. \end{aligned}$$

En consecuencia, $X \in A\{1,2,5\}$.

## 4.3 Inversa de Drazin

Estamos ya preparados para definir la inversa de Drazin de una matriz dada, y demostrar su existencia y unicidad.

**Definición 4.2.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Llamaremos **inversa de Drazin** de $A$ o $\{1^k, 2, 5\}$-inversa de $A$, y la denotaremos por $A^D$, a la matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que cumple las siguientes ecuaciones:*

$$A^k X A = A^k, \tag{$1^k$}$$

$$XAX = X, \tag{2}$$

$$AX = XA. \tag{5}$$

*donde $k$ es el índice de la matriz $A$.*

*Observación* 4.3. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz invertible, entonces la inversa de Drazin de $A$ coincide con la matriz $A^{-1}$.

---

**Ejemplo 4.3.1.-**

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con $\mathrm{Ind}(A) = 2$.

Entonces,

$$A^D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se comprueban fácilmente las propiedades $(1^k)$, (2) y (5).

---

*Proposición* 4.4. Sean las matrices $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces, las ecuaciones

$$A^kXA = A^k, k = \mathrm{Ind}(A), \tag{$1^k$}$$
$$XAX = X, \tag{2}$$
$$AX = XA, \tag{5}$$

son equivalentes al conjunto de ecuaciones

$$AX = XA, \tag{5}$$
$$A^{k+1}X = A^k, k = \mathrm{Ind}(A), \tag{7}$$
$$AX^2 = X. \tag{8}$$

*Demostración.* Veamos que de las igualdades ($1^k$), (2) y (5), podemos obtener (7) y (8):

$$\begin{aligned} A^{k+1}X &= A^kAX && \text{(por (5))} \\ &= A^kXA && \text{(por ($1^k$))} \\ &= A^k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AX^2 &= AXX && \text{(por (5))} \\ &= XAX && \text{(por (2))} \\ &= X. \end{aligned}$$

Veamos ahora, que si se cumplen las igualdades (5),(7) y (8), entonces, también se cumplen ($1^k$) y (2):

$$\begin{aligned} XAX &= AXX && \text{(por (5))} \\ &= AX^2 && \text{(por (8))} \\ &= X. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^kXA &= A^kAX && \text{(por (5))} \\ &= A^{k+1}A && \text{(por (7))} \\ &= A^k. \end{aligned}$$

∎

*Observación* 4.4. Si $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz con $\operatorname{Ind}(C) = 1$ entonces,

$$C^2C^D = C \quad \text{y} \quad C^DC^2 = C.$$

*Demostración.* Sea $C$ una matriz de índice $1$. De la propiedad (7) se tiene que

$$C^2C^D = C.$$

Además,

$$\begin{aligned} C &= C^2C^D \\ &= CCC^D && \text{(usando dos veces la propiedad (5))} \\ &= C^DCC \\ &= C^DC^2. \end{aligned}$$

Luego

$$C^DC^2 = C.$$

∎

**Teorema 4.3.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, y sea $\operatorname{Ind}(A) = k$. Si existe una matriz $X$ tal que $X \in A\{1^k, 2, 5\}$, entonces $X$ es la única $\{1^k, 2, 5\}$-inversa de $A$.*

*Demostración.* Sean $X$ e $Y \in A\{1^k, 2, 5\}$, y consideremos las matrices

$$\begin{aligned} E &= AX && \text{(por propiedad (5)} \\ &= XA \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} F &= AY && \text{(por propiedad (5)} \\ &= YA, \end{aligned}$$

Evidentemente, $E$ y $F$ son matrices idempotentes,

$$\begin{aligned} E^2 &= (AX)(AX) && (X \in A\{2\}) \\ &= AX \\ &= E, \\ F^2 &= (AY)(AY) && (Y \in A\{2\}) \\ &= AY \\ &= F. \end{aligned}$$

En primer lugar veamos que $E = F$:

$$\begin{aligned}
E &= AX && (E \text{ idempotente}) \\
&= A^k X^k && (Y \in A\{1^k\}) \\
&= A^k Y A X^k \\
&= A^{l-k} A Y A X^k && (Y \in A\{5\}) \\
&= A^{k-1} Y A A X^k \\
&= \dots && (\text{realizando el mismo proceso}) \\
&= A Y A^k X^k \\
&= F A^k X^k \\
&= F A X \\
&= F E.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= YA && (F \text{ idempotente}) \\
&= Y^k A^k && (X \in A\{1^k\}) \\
&= Y^k A^k X A \\
&= \dots && (\text{realizando el mismo proceso}) \\
&= Y A E \\
&= F E.
\end{aligned}$$

Luego $E = F$.

Por tanto,

$$\begin{aligned}
X &= XAX && (X \in A\{2\}) \\
&= EX \\
&= FX \\
&= YAX \\
&= YE \\
&= YF \\
&= YAY && (Y \in A\{2\}) \\
&= Y.
\end{aligned}$$

∎

**Teorema 4.4.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, y sea la forma de Jordan de $A$*

$$A = PJP^{-1} = P \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

*donde $J_0$ y $J_1$ son las partes de la matriz $J$ correspondientes a los autovalores $0$ y distintos de cero de $A$, respectivamente.*

*Entonces*

$$A^D = P \begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}.$$

*Demostración.* Sean las matrices

$$A = P \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ y } X = P \begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1},$$

y sea $k$ el índice de la matriz $A$. Recordemos que, por la proposición (4.1)[página 99], $J_0^k = O$.

- Comprobemos que $A^kXA = A^k$:

$$\begin{aligned} A^kXA &= P \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_0 \end{pmatrix}^k P^{-1}P \begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} J_1^k & O \\ O & J_0^k \end{pmatrix}^k P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} J_1^k & O \\ O & O \end{pmatrix}^k P^{-1} \\ &= A^k. \end{aligned}$$

- Veamos que $XAX = X$:

$$\begin{aligned} XAX &= P \begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= X. \end{aligned}$$

- Por último, verifiquemos que $AX = XA$:

$$AX = P \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} = I$$
$$XA = P \begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} P^{-1} = I.$$

En consecuencia, $X \in A\{1^k, 2, 5\}$.

---

**Ejemplo 4.3.2.-**

Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

El índice de $A$ es igual a 1, ya que
$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A^2).$$

Los autovalores de $A$ son $\lambda_1 = 0$, con multiplicidad algebraica 1, y $\lambda_2 = 1$, con multiplicidad algebraica 2.

Una matriz de Jordan asociada a la matriz $A$ sería:
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
con matriz de paso:
$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

siendo

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la inversa de Drazin de la matriz $A$ sería:

$$A^D = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A.$$

---

*Observación* 4.5. Los teoremas (4.3) y (4.4) garantizan la existencia y unicidad de la inversa de Drazin para una matriz dada.

**Teorema 4.5.** *Sea la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $\operatorname{Ind}(A) = k \geq 1$. Entonces $A$ puede expresarse como*

$$A = C + N,$$

*donde $C$ es una matriz de índice $1$, $N$ es una matriz nilpotente de índice $k$, de manera que*

$$C = A^2 A^D \quad \text{y} \quad N = A(I - A^D A),$$

*y además*

$$CN = NC = O.$$

*Esta descomposición se denomina **descomposición corenilpotente** de $A$.*

*Demostración.* Supongamos que el índice de $A$ es mayor o igual que $1$.
Sea $P$ una matriz no singular tal que

$$A = PJP^{-1} = P \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

donde $J$ es la forma canónica de Jordan asociada a la matriz $A$, $J_0$ y $J_1$ son las partes de la matriz $J$ correspondientes a los autovalores $0$ y distintos de cero de $A$, respectivamente. De este modo $J_1$ es una matriz no singular y $J_0$ es una matriz nilpotente.
Sean

$$C = P \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ y } N = P \begin{pmatrix} O & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

que verifican
$$A = C + N.$$

Es claro que el índice de la matriz $C$ es $1$, ya que es el tamaño del mayor bloque asociado al autovalor $0$ de $C$ (todos los bloques son de tamaño $1$).
$N$ es una matriz nilpotente de índice $k$, ya que el tamaño de su mayor bloque de Jordan asociado al autovalor $0$ coincide con el de $A$.
Además, se tiene que
$$CN = P\begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} O & O \\ O & J_0 \end{pmatrix}P^{-1} = O,$$
y
$$NC = P\begin{pmatrix} O & O \\ O & J_0 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1} = O.$$

Por último,
$$A^2A^D = P\begin{pmatrix} J_1^2 & O \\ O & J_0^2 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1} = C.$$

$$N = A - C = A - A^2A^D = A(I - AA^D).$$

∎

*Observación* 4.6. En las condiciones del teorema (4.5), si
$$A = P\begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_0 \end{pmatrix}P^{-1},$$
donde $A = C + N$, es la descomposición corenilpotente de $A$, entonces se tiene que
$$C = A^2A^D = P\begin{pmatrix} J_1^2 & O \\ O & J_0^2 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1},$$
$$N = A(I - AA^D) = A - A^2A^D = P\begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_0 \end{pmatrix}P^{-1} - P\begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} O & O \\ O & J_0 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

*Proposición* 4.5. En las condiciones del teorema anterior (4.5), se tiene que:

1. $C^DN = NC^D = O.$

2. $C^D = A^D$.
3. $C^D(I - A^D A) = O$.

*Demostración.* Sean las matrices

$$A = P \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad C = P \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} \text{ y } N = P \begin{pmatrix} O & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

tales que $A = C + N$.

Veamos la demostración de cada uno de los apartados:

1. 
$$C^D N = P \begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} O & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} P^{-1} = O$$
$$N C^D = P \begin{pmatrix} O & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} = O,$$
luego, $C^D N = N C^D = O$.
2. Por el teorema (4.4)[página 110], la expresión para la inversa de Drazin de la matriz $C$ es:
$$C^D = P \begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1},$$
que coincide con $A^D$.
3. 
$$\begin{aligned} C(I - A^D A) &= C - C A^D A && (A^D = C^D) \\ &= C - C C^D A && (C^D C = C C^D) \\ &= C - C^D C A && (A = C + N) \\ &= C - C^D C(C + N) \\ &= C - C^D C C + C^D C N && (CN = O,\ C^D C^2 = C) \\ &= C - C = O. \end{aligned}$$

∎

*Lema 4.2.* Sean las matrices $A,\ B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $\operatorname{Ind}(A) = k$, tal que $A = C + N$ es la descomposición corenilpotente de $A$. Si $AB = BA$, entonces la matriz $B$ es de la forma

$$B = P \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \end{pmatrix} P^{-1},$$

cumpliéndose las igualdades:

1. $A^D B = BA^D$,
2. $AB^D = B^D A$,
3. $A^D B^D = B^D A^D = (AB)^D$,
4. $C^D CB = BCC^D$, y
5. $N^s B = BN^s$, $\forall s \geq 0$.

Si además, $\mathrm{null}(A) \cap \mathrm{null}(B) = \{\mathbf{0}\}$, entonces $B_4$ es no singular y

$$(I - AA^D)BB^D = (I - AA^D).$$

*Demostración.* Sean las matrices:

$$A = P \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad C = P \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ y}$$

$$N = P \begin{pmatrix} O & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

donde $P$ es una matriz no singular, $J$ es la forma canónica de Jordan asociada a la matriz $A$, $J_0$ y $J_1$ son las partes de la matriz $J$ correspondientes a los autovalores $0$ y distintos de cero de $A$, respectivamente. De este modo $J_1$ es una matriz no singular y $J_0$ es una matriz nilpotente.
Podemos escribir la matriz $B$ de la forma

$$B = P \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P^{-1},$$

para ciertas matrices $B_i, i \in \overline{1,4}$.

Como $AB = BA$, se tiene:

$$AB = P \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} J_1 B_1 & J_1 B_2 \\ J_0 B_3 & J_0 B_4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

y

$$BA = P \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} B_1 J_1 & B_2 J_0 \\ B_3 J_1 & B_4 J_0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Luego debe cumplirse que:

$$J_1 B_1 = B_1 J_1, \quad J_1 B_2 = B_2 J_0, \quad J_0 B_3 = B_3 J_1, \quad J_0 B_4 = B_4 J_0. \tag{4.1}$$

Si $J_1B_2 = B_2J_0$, entonces por inducción, se tiene que

$$\begin{aligned} J_1^s B_2 &= J_1(J_1^{s-1}B_2) \\ &= J_1B_2J_0^{s-1} \\ &= B_2J_0J_0^{s-1} \\ &= B_2J_0^s. \end{aligned}$$

En particular, para $k$ se tiene que $J_1^kB_2 = B_2J_0^k$.

Como $J_0$ es una matriz nilpotente de índice $k$, es decir, $J_0^k = O$, entonces $B_2J_0^k = O$. Luego $J_1^kB_2 = O$, y como la matriz $J_1^k$ es invertible, se tiene que $B_2 = O$. De forma similar obtenemos que $B_3 = O$. Luego, la matriz $B$ es de forma:

$$B = P\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Probemos ahora las igualdades:

1. $A^DB = BA^D$:

   $$A^DB = P\begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} J_1^{-1}B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1}$$

   y

   $$BA^D = P\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} B_1J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1}$$

   Queda comprobar, por tanto, que $J_1^{-1}B_1 = B_1J_1^{-1}$.

   $$\begin{aligned} J_1^{-1}B_1 &= J_1^{-1}B_1J_1J_1^{-1} && \text{(por la ecuación (4.1))} \\ &= J_1^{-1}J_1B_1J_1^{-1} \\ &= B_1J_1^{-1}. \end{aligned}$$

   Se tiene, por tanto, que $A^DB = BA^D$.

2. $AB^D = B^DA$:
   Tomemos ahora

   $$B = P\begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_0 \end{pmatrix}P^{-1},$$

y

$$A = P \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_4 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Entonces

$$B^D A = P \begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_4 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} J_1^{-1} A_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}$$

y

$$AB^D = P \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_4 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} A_1 J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}$$

Queda comprobar, por tanto, que $J_1^{-1} A_1 = A_1 J_1^{-1}$.

$$\begin{aligned} J_1^{-1} A_1 &= J_1^{-1} A_1 J_1 J_1^{-1} && \text{(por la ecuación (4.1))} \\ &= J_1^{-1} J_1 A_1 J_1^{-1} \\ &= A_1 J_1^{-1}. \end{aligned}$$

Llegando así a que $AB^D = B^D A$.

3. $A^D B^D = B^D A^D = (AB)^D$:
Tenemos que

$$A^D B^D = P \begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} B_1^D & O \\ O & B_4^D \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} J_1^{-1} B_1^D & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1},$$

y

$$B^D A^D = P \begin{pmatrix} B_1^D & O \\ O & B_4^D \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} B_1^D J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Veamos que $J_1^{-1} B_1^D = B_1^D J_1^{-1}$. Hemos comprobado en la demostración de la igualdad (1) que $J_1^{-1} B_1 = B_1 J_1^{-1}$. Además, por el apartado (2) tenemos que si dos matrices $A$ y $B$ conmutan, entonces $AB^D = B^D A$. Como $J_1^{-1}$ y $B_1^D$ conmutan, entonces, tenemos que $J_1^{-1} B_1^D = B_1^D J_1^{-1}$. Obteniendo así que $A^D B^D = B^D A^D$.
Para finalizar este apartado nos queda probar que $A^D B^D = B^D A^D = (AB)^D$. Para ello verificaremos que la matriz $(A^D B^D)$ es la inversa de Drazin de $(AB)$. Sea $l$ el índice de la matriz $(AB)$.

$$(AB)^l (A^D B^D)(AB) = (AB)^l A^D A B^D B (\text{ por apartado (2) })$$

Quedando

$$\begin{aligned}
(AB)^l(A^DB^D)(AB) &= P\begin{pmatrix} (J_1B_1)^l & O \\ O & (J_0B_4)^l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1^DB_1 & O \\ O & B_4^DB_4 \end{pmatrix}P^{-1} \quad (\mathrm{Ind}(AB)=l) \\
&= P\begin{pmatrix} (J_1B_1)^l & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1^DB_1 & O \\ O & B_4^DB_4 \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} (J_1B_1)^lB_1^DB_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1}
\end{aligned}$$

Por la proposición (4.3)[página 101], como $l \geq k$, tenemos que $B_1^lB_1^DB_1 = B_1^l$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
(AB)^l(A^DB^D)(AB) &= P\begin{pmatrix} (J_1B_1)^l & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= (AB)^l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A^DB^D)AB(A^DB^D) &= A^DAB^DBA^DB^D && \text{(por apartado (2))} \\
&= A^DAB^DA^DBB^D && \text{(por apartado (1))} \\
&= A^DAA^DB^DBB^D && \text{(por apartado (3))} \\
&= A^DB^D
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
A^DB^DAB &= A^DAB^DB && \text{(por apartado (2))} \\
&= AA^DBB^D && \text{(por propiedad (5) de la inversa de Drazin)} \\
&= ABA^DB^D && \text{(por apartado (1))}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la matriz $A^DB^D$ es la inversa de Drazin de $(AB)$, o lo que es lo mismo, $A^DB^D = (AB)^D$.

4. $C^DCB = BCC^D$:

$$\begin{aligned}
C^DCB &= P\begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1}
\end{aligned}$$

y

$$BC^DC = P \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}$$
$$= P \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ O & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En consecuencia,

$$C^DCB = BCC^D.$$

5. $N^sB = BN^s$, $\forall s \geq 0$:

$$N^sB = P \begin{pmatrix} O & O \\ O & J_0^s \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} O & O \\ O & J_0^sB_4 \end{pmatrix} P^{-1},$$

y

$$BN^s = P \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} O & O \\ O & J_0^s \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} O & O \\ O & B_4J_0^s \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Para obtener la igualdad buscada nos quedaría demostrar que $J_0^sB_4 = B_4J_0^s$.

$$\begin{aligned} J_0^sB_4 &= J_0^{s-1}J_0B_4 && \text{(por la ecuación (4.1))} \\ &= J_0^{s-1}B_4J_0 && \text{(usando de nuevo la ecuación (4.1) } s-1 \text{ veces)} \\ &= B_4J_0^s. \end{aligned}$$

Obteniendo finalmente que $N^sB = BN^s$, $\forall s \geq 0$.

Supongamos ahora que $AB = BA$ y $\text{null}(A) \cap \text{null}(B) = \{\mathbf{0}\}$. Entonces

$$I - AA^D = I - P \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} J_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} = I - P \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}$$
$$= P \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1},$$

y

$$BB^D = P \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} B_1^D & O \\ O & B_4^D \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} B_1B_1^D & O \\ O & B_4B_4^D \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Luego

$$(I - AA^D)BB^D = P \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} B_1B_1^D & O \\ O & B_4B_4^D \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} O & O \\ O & B_4B_4^D \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Si la matriz $B_4$ fuera invertible, entonces $B_4^D = B_4^{-1}$, y en consecuencia, $B_4 B_4^D = I$. Por tanto, nos queda demostrar, para obtener la igualdad buscada, que $B_4$ es no singular.
Por un cambio de base asociado a la matriz $P$, podemos suponer:

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \text{y } B = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \end{pmatrix}.$$

Si $J_0 = O$, se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \text{y } B = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que $J_1$ y $B_1$ son matrices pertenecientes a $\mathbb{C}^{r\times r}$, por tanto, $B_4 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$.
Entonces

$$\text{null}(A) =< \boldsymbol{e}_{r+1}, \boldsymbol{e}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{e}_n >\subset \mathbb{C}^n.$$

Como $\text{null}(A) \cap \text{null}(B) = \{\mathbf{0}\}$, todo vector de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}, \text{con } \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^{n-r}, \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0},$$

no puede pertenecer a $\text{null}(B)$. Entonces

$$B \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{C}^n \Longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ B_4\boldsymbol{v} \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}.$$

En consecuencia, $\text{null}(B_4) = \{\mathbf{0}\} \in \mathbb{C}^{n-r}$, y, por tanto, la matriz $B_4$ es invertible.

Consideremos ahora el caso en el que $J_0 \neq O$. Supongamos que existe un vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, tal que

$$\boldsymbol{v} \in \text{null}(B_4).$$

Como $AB = BA$ se tiene, por la ecuación (4.1), que $J_0 B_4 = B_4 J_0$, y con ello se llega a que

$$J_0^p B_4 = B_4 J_0^p, \forall p \geq 0.$$

En consecuencia,

$$J_0^p B_4 \boldsymbol{v} = B_4 J_0^p \boldsymbol{v} = \mathbf{0},$$

y, por tanto,

$$J_0^p \boldsymbol{v} \in \text{null}(B_4).$$

Como $J_0$ es una matriz nilpotente de índice $k$, se tiene que:

$$J_0^{k-1}\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}, \quad \text{pero} \;\; J_0^k\boldsymbol{v} = \mathbf{0}.$$

Construimos un vector $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ J_0^{k-1}\boldsymbol{v} \end{pmatrix}, \text{ con } \boldsymbol{w} \neq \mathbf{0}.$$

De donde

$$A\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ J_0^{k-1}\boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ J_0^{k}\boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^n.$$

$$B\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ J_0^{k-1}\boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ B_4J_0^{k-1}\boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^n.$$

Y, como consecuencia, $\boldsymbol{w} \in \mathrm{null}(A) \cap \mathrm{null}(B)$, $\boldsymbol{w} \neq \mathbf{0}$, lo que es una contradicción, ya que, por hipótesis, $\mathrm{null}(A) \cap \mathrm{null}(B) = \{\mathbf{0}\}$. Por tanto, $\mathrm{null}(B_4) = \{\mathbf{0}\}$, y, por consiguiente, $B_4$ es invertible.

∎

## 4.4 Aplicaciones de la inversa de Drazin a sistemas de ecuaciones diferenciales

Durante todo el desarrollo de esta sección consideraremos $A$, $B$ y $G$ matrices pertenecientes a $\mathbb{C}^{n\times n}$, y $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{f}$ funciones diferenciables de valor vectorial de la variable real $t$.

Estudiado el concepto de inversa de Drazin para matrices cuadradas nos adentraremos ahora en una de sus aplicaciones más importantes. Llegaremos a resolver sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de la forma

$$A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}.$$

El lector quizás estará pensando que este resultado ya es estudiado por la teoría clásica de ecuaciones diferenciales, sin embargo, y aquí es donde entra en juego nuestra inversa de Drazin, para poder aplicar estos resultados es necesario que las matrices

$A$ y $B$ sean no singulares. La inversa de Drazin nos hará llegar más allá, resolviendo estos sistemas incluso cuando las matrices $A$ y $B$ sean singulares.
Llegaremos a conocer una forma cerrada para todas las soluciones de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales.

### 4.4.1 Ecuación $x' + Ax = f$

La teoría clásica de ecuaciones diferenciales estudia ecuaciones del tipo

$$\boldsymbol{x}' + A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}. \tag{4.2}$$

Ésta establece que la solución general del problema homogéneo asociado a (4.2) viene dada por

$$\boldsymbol{x} = e^{-At}\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^n. \tag{4.3}$$

Y que la expresión para la solución general del problema no homogéneo (4.2) es

$$\boldsymbol{x} = e^{-At}\boldsymbol{q} + e^{-At}\int_a^t e^{As}\boldsymbol{f}(s)\, ds,\ \boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^n,\ a \in \mathbb{R}.$$

Una primera aplicación de la inversa de Drazin sería, por ejemplo, el cálculo de $\int e^{At}\, dt$, como muestra el siguiente resultado.

**Teorema 4.6.** *Sea la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $\operatorname{Ind}(A) = k$. Entonces*

$$\int e^{At}\, dt = A^D e^{At} + (I - AA^D)t\left[I + \frac{A}{2}t + \frac{A^2}{3!}t^2 + \cdots + \frac{A^{k-1}}{k!}t^{k-1}\right] + G. \tag{4.4}$$

*Demostración.* Derivando el lado derecho de (4.4)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[A^D e^{At} + (I - AA^D)t\sum_{i=0}^{k-1}\frac{A^i t^i}{(i+1)!} + G\right] &= A^D A e^{At} + (I - AA^D)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(i+1)A^i t^i}{(i+1)!}\\ &= A^D A e^{At} + (I - AA^D)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(tA)^i}{i!}.\end{aligned}$$

Usando la serie de expansión para $e^{At}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[A^D e^{At} + (I - AA^D)t\sum_{i=0}^{k-1}\frac{A^i t^i}{(i+1)!} + G\right] &= AA^D e^{At} + (I - AA^D)e^{At}\\ &= e^{At}.\end{aligned}$$

∎

*Observación* 4.7. En el caso particular en el que $\boldsymbol{f}$ fuera una constante $\boldsymbol{b}$, la solución para la ecuación (4.2) vendría dada por un polinomio en $t$, siendo ésta

$$\boldsymbol{x} = \left\{ A^D + (I - AA^D)t \left[ I - \frac{A}{2}t + \frac{A^2}{3!}t^2 - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{A^{k-1}}{k!}t^{k-1} \right] \right\} \boldsymbol{b}.$$

Podemos verificar esto de manera sencilla sustituyendo $\boldsymbol{x}$ en la ecuación (4.2).

---

**Ejemplo 4.4.1.-**

Consideremos la siguiente ecuación diferencial no homogénea:

$$\boldsymbol{x}' + A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f},$$

donde

$$\boldsymbol{x} = (x_1 \;\; x_2)^t, \; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{f} = (1 \;\; 1)^t.$$

Quedando:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se ha procedido, primeramente, a resolver este problema a partir del software matemático Maple 2015.1, dándonos la solución general del sistema. El procedimiento ha sido el siguiente:

```
sistema := diff(x1(t), t) = -x1(t)-x2(t)+1, diff(x2(t), t) = x1(t)+x2(t)+1;
dsolve(sistema);
                {x1(t) = _C1*t-t^2+_C2,
                x2(t) = -_C1*t+t^2-_C1-_C2+2*t+1}
```

Determinemos nuestra solución particular del sistema haciendo uso de la inversa de Drazin:

- Calculemos $A^D$:
  Una matriz de Jordan asociada a la matriz $A$ sería:
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
  con matriz de paso:
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
  siendo
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
  Por tanto, la inversa de Drazin de la matriz $A$ sería:
$$A^D = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Calculemos el índice de $A$:
$$\begin{aligned} \text{rango}(A) &= 1 \\ \text{rango}(A^2) &= 0 \\ \text{rango}(A^3) &= 0, \end{aligned}$$
  luego $\mathrm{Ind}(A) = 2$.
- Estamos en disposición ya de resolver el sistema:
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t/2 & t/2 \\ -t/2 & -t/2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (1-t/2)t & -t^2/2 \\ t^2/2 & (1+t/2)t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
  Por tanto,
$$\begin{aligned} x_1 &= (1-t/2)t - t^2/2 = t - t^2 \\ x_2 &= t^2/2 + (1+t/2)t = t + t^2. \end{aligned}$$

Observamos que nuestra solución particular corresponde a la solución general devuelta por Maple para $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$

### 4.4.2 Ecuación $Ax' + Bx = f$ cuando $AB = BA$

Daremos un paso más y estudiaremos ahora ecuaciones direnciales de la forma

$$A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}. \tag{4.5}$$

Si la matriz $A$ fuera no singular, entonces, (4.5) podría escribirse en la forma de (4.2). Sin embargo, en nuestro estudio permitiremos que las matrices $A$ y $B$ sean singulares. Existen diferentes métodos para resolver (4.5) cuando $A$ y $B$ son singulares (véase [Gan64]), pero en nuestro caso, y como queremos llegar a una forma cerrada, haremos uso de la inversa de Drazin.
Asociada a la ecuación (4.5) se encuentra la ecuación homogénea

$$A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{4.6}$$

Asumiremos en este apartado que las matrices $A$ y $B$ conmutan, es decir

$$AB = BA.$$

¿Qué ocurre si las matrices $A$ y $B$ no conmutan? En el siguiente apartado veremos que si las condiciones iniciales consistentes determinan soluciones únicas, entonces (4.6) puede reducirse al caso cuando $A$ y $B$ conmutan.

**Teorema 4.7.** *Sean las matrices $A,\ B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tales que $AB = BA$, y sea $A = C + N$ la descomposición corenilpotente de $A$. Entonces, el sistema lineal de ecuaciones diferenciales*

$$A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}.$$

*es equivalente a*

$$C\boldsymbol{x}_1' + B\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{f}_1 \tag{4.7}$$

*y*

$$N\boldsymbol{x}_2' + B\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{f}_2, \tag{4.8}$$

*donde $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{f}_1 = C^DC\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{f}_2 = (I - C^DC)\boldsymbol{f}$.*

*Demostración.* Sea el sistema

$$A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}.$$

Observemos que si existe una solución de las ecuaciones (4.7) y (4.8), entonces, sumando ambas, se tiene que existe una solución de $A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$.

Consideremos $\boldsymbol{x}_1 = A^D A\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x}_2 = (I - A^D A)\boldsymbol{x}$, que verifican $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}$. Tomando la descomposición corenilpotente de $A$, $A = C + N$, y $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, se tiene que $A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$ es equivalente a:

$$(C + N)(\boldsymbol{x}_1' + \boldsymbol{x}_2') + B(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{f}.$$

a) Veamos primeramente que $C\boldsymbol{x}_1' + B\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{f}_1$:
Multiplicando la ecuación

$$(C + N)(\boldsymbol{x}_1' + \boldsymbol{x}_2') + B(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{f}$$

por $(C^D C)$ a izquierda, se obtiene:

$$C^D C(C + N)(\boldsymbol{x}_1' + \boldsymbol{x}_2') + C^D CB(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = C^D C\boldsymbol{f}.$$

Operando

$$(C^D CC + C^D CN)(\boldsymbol{x}_1' + \boldsymbol{x}_2') + C^D CB\boldsymbol{x}_1 + C^D CB\boldsymbol{x}_2 = C^D C\boldsymbol{f}.$$

Por otro lado, como $C^D C^2 = C$, por la observación (4.4)[página 108], y $CN = O$, por el teorema (4.5)[página 112], se llega a

$$C\boldsymbol{x}_1' + C\boldsymbol{x}_2' + C^D CB\boldsymbol{x}_1 + C^D CB\boldsymbol{x}_2 = C^D C\boldsymbol{f}.$$

Comprobemos que $C\boldsymbol{x}_2' = \boldsymbol{0}$, $C^D CB\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ y $C^D CB\boldsymbol{x}_1 = B\boldsymbol{x}_1$:

$$\begin{aligned} C\boldsymbol{x}_2' &= C(I - A^D A)\boldsymbol{x}' \\ &= (C - CA^D A)\boldsymbol{x}' && (A^D = C^D) \\ &= (C - CC^D A)\boldsymbol{x}' && (A = C + N) \\ &= (C - CC^D C - CC^D N)\boldsymbol{x}'. \end{aligned}$$

Por proposición (4.5)[página 113], y observación (4.4)[página 108]:

$$C\boldsymbol{x}_2' = (C - C)\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}.$$

Para lo que viene a continuación, cuando hagamos referencia a la propiedad (5), estaremos haciendo alusión a la propiedad (5) de la definición de inversa de Drazin.

$$\begin{aligned} C^D CB\boldsymbol{x}_2 &= C^D CB(I - A^D A)\boldsymbol{x} \\ &= (C^D CB - C^D CBA^D A)\boldsymbol{x} && \text{(por el lema (4.2, página 114))} \\ &= (C^D CB - BCC^D A^D A)\boldsymbol{x} && (A^D = C^D, \text{y la propiedad (5)}) \\ &= (C^D CB - BC^D CC^D A)\boldsymbol{x} && (A = C + N) \\ &= (C^D CB - BC^D C - BC^D N)\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Por el lema (4.2)[página 114], y la proposición (4.5)[página 113]:

$$C^D CB\boldsymbol{x}_2 = (C^D CB - C^D CB)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

$$\begin{aligned} C^D CB\boldsymbol{x}_1 &= C^D CBA^D A\boldsymbol{x} && \text{(por el lema (4.2)[página 114])} \\ &= BCC^D A^D A\boldsymbol{x} && (A^D = C^D, \text{ y propiedad } (5)) \\ &= BC^D CC^D A\boldsymbol{x} \\ &= BC^D A\boldsymbol{x} && (C^D = A^D) \\ &= BA^D A\boldsymbol{x} \\ &= B\boldsymbol{x}_1. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$C\boldsymbol{x}_1' + B\boldsymbol{x}_1 = C^D C\boldsymbol{f}.$$

b) Verifiquemos, por último, que $N\boldsymbol{x}_2' + B\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{f}_2$.
Multiplicando la ecuación

$$(C+N)(\boldsymbol{x}_1' + \boldsymbol{x}_2') + B(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{f}$$

por $(I - C^D C)$ a izquierda, obtenemos:

$$(I - C^D C)(C+N)(\boldsymbol{x}_1' + \boldsymbol{x}_2') + (I - C^D C)B(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = (I - C^D C)\boldsymbol{f}.$$

Operando:

$$C\boldsymbol{x}_1' + C\boldsymbol{x}_2' - C^D CC\boldsymbol{x}_1' - C^D CC\boldsymbol{x}_2' + N\boldsymbol{x}_1' + N\boldsymbol{x}_2' - C^D CN\boldsymbol{x}_1' - C^D CN\boldsymbol{x}_2' +$$
$$+ B\boldsymbol{x}_1 + B\boldsymbol{x}_2 - C^D CB\boldsymbol{x}_1 - C^D CB\boldsymbol{x}_2 = (I - C^D C)\boldsymbol{f}.$$

Usando la proposición (4.5)[página 113], el teorema (4.5)[página 112] y el desarrollo del apartado anterior, resulta:

$$C\boldsymbol{x}_1' + C\boldsymbol{x}_2' - C\boldsymbol{x}_1' - C\boldsymbol{x}_2' + N\boldsymbol{x}_1' + N\boldsymbol{x}_2' + B\boldsymbol{x}_1 + B\boldsymbol{x}_2 - B\boldsymbol{x}_1 = (I - C^D C)\boldsymbol{f}.$$

o lo que es lo mismo

$$N\boldsymbol{x}_1' + N\boldsymbol{x}_2' + B\boldsymbol{x}_2 = (I - C^D C)\boldsymbol{f}.$$

Nos queda comprobar que $N\boldsymbol{x}_1' = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} N\boldsymbol{x}_1' &= NA^D A\boldsymbol{x}' && (A^D = C^D) \\ &= NC^D A\boldsymbol{x}' && \text{(por la proposición (4.5)[página 113])} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$N\boldsymbol{x}_2' + B\boldsymbol{x}_2 = (I - C^D C)\boldsymbol{f}.$$

*Corolario* 4.1. En las condiciones del teorema anterior, la ecuación

$$C\boldsymbol{x}_1' + B\boldsymbol{x}_1 = C^D C\boldsymbol{f}$$

es equivalente a la ecuación

$$\boldsymbol{x}_1' + C^D B\boldsymbol{x}_1 = C^D\boldsymbol{f}. \tag{4.9}$$

*Demostración.* Multiplicando la ecuación $C\boldsymbol{x}_1' + B\boldsymbol{x}_1 = C^D C\boldsymbol{f}$ por $C^D$ a izquierda se obtiene:

$$C^D C\boldsymbol{x}_1' + C^D B\boldsymbol{x}_1 = C^D C^D C\boldsymbol{f}.$$

Por la propiedad (5) de la definición de inversa de Drazin tenemos que $C^D C^D C\boldsymbol{f} = C^D C C^D\boldsymbol{f}$, y aplicando la propiedad (2) de la misma definición se sigue que $C^D C C^D\boldsymbol{f} = C^D\boldsymbol{f}$.

Nos quedaría probar que $C^D C\boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{x}_1'$. Sea $\boldsymbol{x}_1 = A^D A\boldsymbol{x}$,

$$\begin{aligned}
C^D C\boldsymbol{x}_1' &= C^D C A^D A\boldsymbol{x}' && (A^D = C^D)\\
&= C^D C C^D A\boldsymbol{x}' && \text{(por la propiedad (2) de la definición de inversa de Drazin)}\\
&= C^D A\boldsymbol{x}' && (C^D = A^D)\\
&= A^D A\boldsymbol{x}'\\
&= \boldsymbol{x}_1'.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\boldsymbol{x}_1' + C^D B\boldsymbol{x}_1 = C^D\boldsymbol{f}.$$

De manera recíproca, si multiplicamos la ecuación $\boldsymbol{x}_1' + C^D B\boldsymbol{x}_1 = C^D\boldsymbol{f}$ por $C$ a izquierda obtenemos

$$C\boldsymbol{x}_1' + CC^D B\boldsymbol{x}_1 = CC^D\boldsymbol{f}.$$

Por la propiedad (5) de la definición de la inversa de Drazin tenemos que $CC^D\boldsymbol{f} = C^D C\boldsymbol{f}$.

Nos queda probar que $CC^D B\boldsymbol{x}_1 = B\boldsymbol{x}_1$. Sea $\boldsymbol{x}_1 = A^D A\boldsymbol{x}$ (para lo que viene a continuación, cuando hagamos referencia a las propiedades (2) y (5), estaremos haciendo alusión a las propiedades (2) y (5) de la definición de inversa de Drazin),

$$\begin{aligned}
CC^DB\boldsymbol{x}_1 &= CC^DBA^DA\boldsymbol{x} && (BA^D = A^DB)\\
&= CC^DA^DBA\boldsymbol{x} && (AB = BA)\\
&= CC^DA^DAB\boldsymbol{x} && (A^D = C^D)\\
&= CC^DC^DAB\boldsymbol{x} && \text{(por las propiedades (2) y (5))}\\
&= C^DAB\boldsymbol{x} && (C^D = A^D)\\
&= A^DAB\boldsymbol{x} && (AB = BA \text{ y } A^DB = BA^D)\\
&= BA^DA\boldsymbol{x}\\
&= B\boldsymbol{x}_1.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$C\boldsymbol{x}_1' + B\boldsymbol{x}_1 = C^DC\boldsymbol{f}.$$

**Teorema 4.8.** *Sea el sistema lineal de ecuaciones diferenciales*

$$A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \tag{4.4}$$

*Supongamos que las matrices $A$ y $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ conmutan. Entonces $\boldsymbol{y} = e^{-A^DBt}AA^D\boldsymbol{q}$ es una solución del sistema para todo vector columna $\boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^n$.*

*Demostración.* Sea $\boldsymbol{y} = e^{-A^DBt}AA^D\boldsymbol{q}$. Entonces

$$\begin{aligned}
A\boldsymbol{y}' &= -AA^DBe^{-A^DBt}AA^D\boldsymbol{q}\\
&= -Be^{-A^DBt}AA^DAA^D\boldsymbol{q}\\
&= -Be^{-A^DBt}AA^D\boldsymbol{q}\\
&= -B\boldsymbol{y}.
\end{aligned}$$

---

**Ejemplo 4.4.2.-**

Consideremos la siguiente ecuación diferencial homogénea:

$$A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

donde

$$\boldsymbol{x} = (x_1 \;\; x_2)^t, \; A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

y, además, se tiene que:

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = BA.$$

Nos queda, por tanto, el sistema:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se ha procedido, al igual que en el ejemplo anterior, a resolver este problema a partir del software matemático Maple $2015.1$, dándonos la solución general del sistema. El procedimiento ha sido el siguiente:

```
A := Matrix([[-3, -2], [2, 1]]);
B := Matrix([[1, 1], [-1, -1]]);
xx := Vector([x1(t), x2(t)]);
sistema := A.map(diff, xx, t)) + B.xx;
sistemaH := [sistema[1] = 0, sistema[2] = 0];
dsolve(sistemaH);
   {x1(t) = _C1*t+_C2,
   x2(t) = -_C1*t+_C1-_C2}
```

Para calcular una solución haciendo uso de la inversa de Drazin, aplicaremos el teorema (4.8)[página 129].

- Calculemos primeramente la inversa de Drazin de $A$:
  Como la matriz $A$ es invertible, $A^D = A^{-1}$, por tanto,

$$A^D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- Calculamos la matriz exponencial $e^{-A^D Bt}$:

$$-A^D B = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

  El autovalor de la matriz $-A^D B$ es $\lambda_1 = 0$ con multiplicidad algebraica $2$. Una matriz de Jordan asociada a $-A^D B$ es:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  con matriz de paso

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Por tanto,

$$e^{-A^D Bt} = Pe^{Jt}P^{-1} = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ t-1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Luego una solución del sistema es, para cualquier vector $\boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^2$:

$$\boldsymbol{y} = e^{-A^D Bt} A A^D \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ t-1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{q}.$$

  Tomando

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \text{ con } q_1, q_2 \in \mathbb{C},$$

  se tiene que:

$$\begin{aligned} y_1 &= -tq_1 + q_2 \\ y_2 &= tq_1 - q_1 - q_2, \end{aligned}$$

  con $q_1,\ q_2 \in \mathbb{C}$.

---

El siguiente teorema será fundamental para los resultados que veremos más adelante. Conseguiremos dar una forma cerrada para la solución general del problema $A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$ añadiendo la condición de que los espacios nulos de $A$ y $B$ tengan intersección trivial.

**Teorema 4.9.** *Sean las matrices $A,\ B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Supongamos que $A$ y $B$ conmutan y $\text{null}(A) \cap \text{null}(B) = \{\mathbf{0}\}$. Entonces*

$$\boldsymbol{x} = e^{-A^D B t} A A^D \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^n, \tag{4.10}$$

*es la solución general de $A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.*

*Demostración.* Por el teorema (4.8)[página 129], se tiene que $e^{-A^D B t} A A^D \boldsymbol{q}$ es una solución para todo $\boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^n$. Para probar que $\boldsymbol{x} = e^{-A^D B t} A A^D \boldsymbol{q}$ es la solución general, necesitamos probar que para toda solución $\boldsymbol{x}$, existe un vector $\boldsymbol{q}$ tal que (4.10) se cumpla.
Sea $k$ el índice de la matriz $A$. Si $\boldsymbol{x}$ es una solución de $A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$, entonces las ecuaciones (4.8)[página 125] y (4.9)[página 128] se cumplen para $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$. Es decir,

$$N\boldsymbol{x}_2' + B\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0} \tag{4.11}$$

y

$$\boldsymbol{x}_1' + C^D B\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}. \tag{4.12}$$

Multiplicando la ecuación (4.11) por $N^{k-1}$ a izquierda, se obtiene que:

$$N^{k-1}N\boldsymbol{x}_2' + N^{k-1}B\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0},$$

o lo que es lo mismo,

$$N^{k}\boldsymbol{x}_2' + N^{k-1}B\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0},$$

Como $N$ es una matriz nilpotente de índice $k$, es decir, $N^k = O$, entonces

$$N^{k-1}B\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0},$$

que por el lema (4.2)[página 114], es equivalente a

$$BN^{k-1}\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}.$$

Como $AB = BA$ y $\text{null}(A) \cap \text{null}(B) = \{\mathbf{0}\}$, tenemos, por el lema (4.2)[página 114], que $B_4$ es invertible, y por tanto

$$N^{k-1}\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}.$$

Del mismo modo, si multiplicamos ahora por $k-2$, llegamos a que:

$$N^{k-2}\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}.$$

Siguiendo este proceso, obtenemos que:

$$N\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}.$$

Por lo tanto, de la ecuación inicial

$$N\boldsymbol{x}_2' + B\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}, \tag{4.10}$$

obtenemos que:

$$B\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}.$$

En consecuencia, $\boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{null}(B)$.

Por otro lado, sea $\boldsymbol{x}_2 = (I - AA^D)\boldsymbol{x}$, se tiene:

$$\begin{aligned}(I - AA^D)\boldsymbol{x}_2 &= (I - AA^D)(I - AA^D)\boldsymbol{x} \\ &= P \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}\boldsymbol{x} \\ &= P \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{x}_2.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$A\boldsymbol{x}_2 = A(I - AA^D)\boldsymbol{x}_2 = N\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}.$$

Por tanto, $\boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{null}(A)$. Pero, $\boldsymbol{x}_2$ también pertenece a $\mathrm{null}(B)$, luego, como $\mathrm{null}(A) \cap \mathrm{null}(B) = \{\mathbf{0}\}$, tenemos que $\boldsymbol{x}_2 = \{\mathbf{0}\}$. Y, como $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, entonces

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1.$$

Finalmente, de

$$\boldsymbol{x}_1' + C^D B\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}, \tag{4.11}$$

obtenemos, por la expresión (4.3)[página 122] dada para la solución general de un problema homogéneo del tipo $\boldsymbol{x}' + A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_1 &= e^{-C^D Bt}\boldsymbol{q} && (C^D = A^D) \\ &= e^{-A^D Bt}\boldsymbol{q}, \;\; \boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^n.\end{aligned}$$

Luego

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 = AA^D\boldsymbol{x} = AA^D\boldsymbol{x}_1 = AA^D e^{-A^D Bt}\boldsymbol{q}, \;\; \boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^n$$

∎

**Teorema 4.10.** *Sean las matrices $A,\ B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Supongamos que $A$ y $B$ conmutan, y* $\operatorname{null}(A) \cap \operatorname{null}(B) = \{\mathbf{0}\}$. *Sea* $\operatorname{Ind}(A) = k$. *Si $\boldsymbol{f}$ es una función vectorial $k$-veces continuamente diferenciable, entonces*

$$A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}. \tag{4.3}$$

*tiene solución, y una solución particular está dada por*

$$\boldsymbol{x} = A^D e^{-A^D Bt} \int_a^t e^{A^D Bs} \boldsymbol{f} ds + (I - AA^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (AB^D)^n B^D \boldsymbol{f}^{(n)}, \tag{4.3}$$

*donde $a \in \mathbb{R}$ es arbitrario.*

*Demostración.* Supongamos que $AB = BA$ y $\operatorname{null}(A) \cap \operatorname{null}(B) = \{\mathbf{0}\}$. Sean

$$\boldsymbol{x}_1 = A^D e^{-A^D Bt} \int_a^t e^{A^D Bs} \boldsymbol{f} ds,\ a \in \mathbb{R}$$

y

$$\boldsymbol{x}_2 = (I - AA^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (AB^D)^n B^D \boldsymbol{f}^{(n)}.$$

Probaremos que

$$A\boldsymbol{x}_1' + B\boldsymbol{x}_1 = AA^D \boldsymbol{f} \tag{4.13}$$

y

$$A\boldsymbol{x}_2' + B\boldsymbol{x}_2 = (I - AA^D)\boldsymbol{f}. \tag{4.14}$$

con lo que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ es una solución de $A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$.
Verificaremos primero (4.13):

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x}_1' &= A(-A^D B\boldsymbol{x}_1 + A^D e^{-A^D Bt} e^{A^D Bt} \boldsymbol{f}) \\ &= -AA^D B\boldsymbol{x}_1 + AA^D \boldsymbol{f} \\ &= -B\boldsymbol{x}_1 + AA^D \boldsymbol{f}. \end{aligned}$$

Ahora probaremos (4.14):

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x}_2' &= A(I - AA^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (AB^D)^n B^D \boldsymbol{f}^{(n+1)} \qquad (AA^D = A^D A) \\ &= (I - AA^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (AB^D)^{n+1} \boldsymbol{f}^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Del desarrollo de la demostración del lema (4.2)[página 114], se tiene, para el término $(k-1)$ que:

$$(I-AA^D)A^k(B^D)^k = P\begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} J_1^k & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1}(B^D)^k = O,$$

quedando:

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x}_2' &= (I-AA^D)\sum_{n=0}^{k-2}(-1)^n(AB^D)^{n+1}\boldsymbol{f}^{(n+1)} \\ &= -(I-AA^D)\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^n(AB^D)^n\boldsymbol{f}^{(n)}. \end{aligned}$$

Por el lema (4.2)[página 114] sabemos que $(I-AA^D)=(I-AA^D)BB^D$, luego

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x}_2' &= -(I-AA^D)BB^D\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^n(AB^D)^n\boldsymbol{f}^{(n)} \qquad (AB^D=B^DA) \\ &= -(I-AA^D)B\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^n(AB^D)^nB^D\boldsymbol{f}^{(n)} \\ &= -(I-AA^D)B\left(\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n(AB^D)^nB^Df^{(n)} - B^D\boldsymbol{f}\right) \\ &= -(I-AA^D)B\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n(AB^D)^nB^Df^{(n)} + (I-AA^D)BB^D\boldsymbol{f}. \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned} -(I-AA^D)B &= -B+AA^DB \qquad (AB=BA \text{ y } A^DB=BA^D) \\ &= -(B-BAA^D) \\ &= -B(I-AA^D), \end{aligned}$$

obtenemos

$$A\boldsymbol{x}_2' = -B(I-AA^D)\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n(AB^D)^nB^D\boldsymbol{f}^{(n)} + (I-AA^D)BB^D\boldsymbol{f}.$$

Como

$$\boldsymbol{x}_2 = (I-AA^D)\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n(AB^D)^nB^D\boldsymbol{f}^{(n)},$$

se tiene que

$$A\boldsymbol{x}_2' = -B\boldsymbol{x}_2 + (I - AA^D)BB^D\boldsymbol{f}.$$

Volviendo a usar el lema (4.2)[página 114] tenemos que $(I - AA^D) = (I - AA^D)BB^D$, se sigue finalmente que

$$A\boldsymbol{x}_2' = -B\boldsymbol{x}_2 + (I - AA^D)\boldsymbol{f}.$$

Por lo tanto, (4.13) y (4.14) se cumplen.

Si combinamos los resultados de los teoremas (4.9)[página 132], que nos da la forma de la solución general para el problema homogéneo, y (4.10)[página 134], que nos da la forma de la solución particular del problema no homogéneo, obtendremos el siguiente resultado.

**Teorema 4.11.** *Sean las matrices $A,\ B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Supongamos que $A$ y $B$ conmutan, y $\operatorname{null}(A) \cap \operatorname{null}(B) = \{\mathbf{0}\}$. Entonces la solución general de $A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$ viene dada por*

$$\boldsymbol{x} = e^{-A^DBt}AA^D\boldsymbol{q} + A^De^{-A^DBt}\int_a^t e^{A^DBs}\boldsymbol{f}ds + (I - AA^D)\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n(AB^D)^nB^D\boldsymbol{f}^{(n)},$$

*donde $\boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^n$ es un vector constante arbitrario, $k$ es el índice de $A$, y $a \in \mathbb{R}$ es arbitrario.*

Un resultado inmediato del teorema anterior (4.11) es una caracterización de las condiciones iniciales consistentes cuando $AB = BA$ y $\operatorname{null}(A) \cap \operatorname{null}(B) = \{\mathbf{0}\}$.

*Corolario 4.2.* Sean las matrices $A,\ B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Supongamos que $A$ y $B$ conmutan, y $\operatorname{null}(A) \cap \operatorname{null}(B) = \{\mathbf{0}\}$. Entonces existe una solución para $A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, si y solo si $\boldsymbol{x}_0$ es de la forma

$$\boldsymbol{x}_0 = A^DA\boldsymbol{q} + (I - AA^D)\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n(AB^D)^nB^D\boldsymbol{f}^{(n)}(0),$$

para algún vector $\boldsymbol{q}$. Además, la solución es única.

En particular, si $\boldsymbol{f}$ es idénticamente cero, entonces $\boldsymbol{x}_0 = A^DA\boldsymbol{x}_0$ caracteriza las condiciones iniciales consistentes.

Se observa que si $B$ fuera una matriz invertible en $A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$, entonces el teorema (4.11)[página 136] puede aplicarse a $B^{-1}A\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x} = B^{-1}\boldsymbol{f}$, con lo que las técnicas que contaremos seguidamente no serían necesarias.

### 4.4.3 Ecuación $Ax' + Bx = f$

En este apartado daremos solución a la ecuación diferencial

$$A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f},$$

sin ser necesario imponer, como en el apartado anterior, que las matrices $A$ y $B$ conmuten. Para ello haremos uso de las matrices $\hat{A}_c$ y $\hat{B}_c$ , tales que

$$\hat{A}_c = (cA + B)^{-1}A, \quad \hat{B}_c = (cA + B)^{-1}B,$$

donde $c \in \mathbb{C}$ es tal que la matriz $(cA + B)$ es invertible; y el siguiente lema nos mostrará el porqué.

*Lema* 4.3. Sean las matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Supongamos que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que la matriz $(cA + B)$ es invertible. Entonces $(cA + B)^{-1}A$ y $(cA + B)^{-1}B$ conmutan.

*Demostración.* Supongamos que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $(cA + B)$ es invertible. Denotemos $\hat{A}_c = (cA + B)^{-1}A$ y $\hat{B}_c = (cA + B)^{-1}B$. Entonces

$$\begin{aligned} c\hat{A}_c + \hat{B}_c &= c(cA + B)^{-1}A + (cA + B)^{-1}B \\ &= (cA + B)^{-1}(cA + B) \\ &= I. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \hat{B}_c\hat{A}_c &= (I - c\hat{A}_c)\hat{A}_c \\ &= \hat{A}_c - c(\hat{A}_c)^2 \\ &= \hat{A}_c - \hat{A}_c c\hat{A}_c \\ &= \hat{A}_c(I - c\hat{A}_c) \\ &= \hat{A}_c\hat{B}_c. \end{aligned}$$

▮

**Teorema 4.12.** *Sean las matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. La ecuación diferencial homogénea*

$$A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

*tiene solución única para condiciones iniciales compatibles si y solo si existe $c \in \mathbb{C}$ tal que la matriz $(cA + B)$ es invertible.*

*Demostración.* $\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que la matriz $(cA + B)$ es invertible. Entonces $\mathrm{null}(cA + B) = \{\mathbf{0}\}$.
Sea el vector $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$A\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \ \text{ y } \ B\boldsymbol{u} = \mathbf{0}.$$

Entonces

$$cA\boldsymbol{u} + B\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \ \text{ y } \ (cA + B)\boldsymbol{u} = \mathbf{0},$$

de lo que deducimos que $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. Por tanto,

$$\mathrm{null}(A) \cap \mathrm{null}(B) = \{\mathbf{0}\}.$$

Pero

$$\mathrm{null}(A) = \mathrm{null}((cA + B)^{-1}A) \ \text{ y } \ \mathrm{null}(B) = \mathrm{null}((cA + B)^{-1}B).$$

Por consiguiente,

$$\mathrm{null}((cA + B)^{-1}A) \cap \mathrm{null}((cA + B)^{-1}B) = \{\mathbf{0}\}.$$

Además, por el lema (4.3)[página 137], tenemos que $(cA + B)^{-1}A$ y $(cA + B)^{-1}B$ conmutan. Como consecuencia, por el teorema (4.9)[página 132],

$$(cA + B)^{-1}A\boldsymbol{x}' + (cA + B)^{-1}B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

tiene solución única para una condición inicial compatible. Y, claramente, el sistema

$$(cA + B)^{-1}A\boldsymbol{x}' + (cA + B)^{-1}B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

es equivalente al sistema

$$A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos ahora que el sistema

$$A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

tiene solución única para una condición inicial compatible. Tenemos que probar que existe un $c \in \mathbb{C}$ tal que $(cA + B)$ es invertible. Supongamos que no existe ningún $c \in \mathbb{C}$ tal que $(cA + B)$ es invertible. Entonces, para todo $c \in \mathbb{C}$ existe un vector $\boldsymbol{\phi}_c \in \mathbb{C}^n$ distinto de $\mathbf{0}$ tal que

$$(cA + B)\boldsymbol{\phi}_c = \mathbf{0}.$$

Pero, entonces, $\boldsymbol{x}_c = e^{tc}\boldsymbol{\phi}_c$ es una solución de

$$A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

ya que

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x}_c' &= Ace^{tc}\boldsymbol{\phi}_c \\ &= e^{tc}cA\boldsymbol{\phi}_c && ((cA + B)\boldsymbol{\phi}_c = \mathbf{0}) \\ &= -e^{tc}B\boldsymbol{\phi}_c \\ &= -B\boldsymbol{x}_c. \end{aligned}$$

Como no pueden existir mas de $n$ vectores $\boldsymbol{\phi}_c$ linealmente independientes, tomaremos un conjunto finito de vectores $\boldsymbol{\phi}_c$

$$\{\boldsymbol{\phi}_{c_i}\}_{i=1}^{l},\ c_i \neq 0,$$

los cuales son linealmente dependientes, es decir, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{C}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \boldsymbol{\phi}_{c_i} = \mathbf{0},$$

donde no todos los $\alpha_i = 0$, con $i = \overline{1, l}$.
Definimos

$$\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i e^{tc_i} \boldsymbol{\phi}_{c_i} \neq \mathbf{0}.$$

Observamos que $\boldsymbol{z}$ es una solución de $A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, ya que

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{z}' + B\boldsymbol{z} &= A\sum_{i=1}^{l} \alpha_i c_i e^{tc_i}\boldsymbol{\phi}_{c_i} + B\sum_{i=1}^{l} \alpha_i e^{tc_i}\boldsymbol{\phi}_{c_i} \\ &= \sum_{i=1}^{l} \alpha_i (c_i A + B) e^{tc_i}\boldsymbol{\phi}_{c_i} \\ &= \sum_{i=1}^{l} \alpha_i e^{tc_i} (c_i A + B)\boldsymbol{\phi}_{c_i} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}(0) &= \sum_{i=1}^{l} \alpha_i e^{0c_i}\boldsymbol{\phi}_{c_i}\\ &= \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \boldsymbol{\phi}_{c_i}\\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

En consecuencia existen dos soluciones que satisfacen $A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \boldsymbol{x}(0) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{z}$ y $\mathbf{0}$, siendo $\boldsymbol{z} \neq \mathbf{0}$. Por lo tanto, la ecuación $A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ no tiene soluciones únicas para condiciones iniciales consistentes, lo cual, contradice nuestra hipótesis, y por consiguiente, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $(cA + B)$ es invertible.

A partir de los teoremas (4.9)[página 132], (4.10)[página 134], (4.11)[página 136], (4.12)[página 138] y del lema (4.3)[página 137], teniendo que cuenta que las matrices $\hat{A}_c$ y $\hat{B}_c$ conmutan y que $\mathrm{null}(\hat{A}_c) \cap \mathrm{null}(\hat{B}_c) = \{\mathbf{0}\}$, obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.13.** *Supongamos que $A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tiene soluciones únicas para condiciones iniciales consistentes. Sea $c \in \mathbb{C}$ tal que la matriz $(cA + B)$ es invertible. Sean $\hat{A}_c = (cA + B)^{-1}A$, $\hat{B}_c = (cA + B)^{-1}B$ y $\hat{\boldsymbol{f}}_c = (cA + B)^{-1}\boldsymbol{f}$. Sea $k = \mathrm{Ind}(\hat{A}_c)$. Entonces*

$$\left\{\begin{array}{rcl} A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} &=& \boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{x}(0) &=& \boldsymbol{x}_0\end{array}\right.$$

*tiene una solución si y solo si $\boldsymbol{x}_0$ es de la forma*

$$\boldsymbol{x}_0 = \hat{A}_c\hat{A}_c^D\boldsymbol{q} + (I - \hat{A}_c\hat{A}_c^D)\sum_{n=0}^{k-1}(\hat{A}_c\hat{B}_c^D)^n\hat{\boldsymbol{f}}_c^{(n)}(0), \tag{4.15}$$

*para cualquier vector $\boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^n$.*
*Una solución particular de $A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$ es:*

$$\boldsymbol{x} = \hat{A}_c^D e^{-\hat{A}_c^D\hat{B}_c t}\int_a^t e^{\hat{A}_c^D\hat{B}_c s}\hat{\boldsymbol{f}}_c(s)ds + (I - \hat{A}_c\hat{A}_c^D)\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n(\hat{A}_c\hat{B}_c^D)^n\hat{B}_c^D\hat{\boldsymbol{f}}_c^{(n)}, \tag{4.16}$$

*donde $a \in \mathbb{R}$ es arbitrario.*

*La solución general de $A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$ es:*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= e^{-\hat{A}_c^D \hat{B}_c t} \hat{A}_c \hat{A}_c^D \boldsymbol{q} + \hat{A}_c^D e^{-\hat{A}_c^D \hat{B}_c t} \int_a^t e^{\hat{A}_c^D \hat{B}_c s} \hat{\boldsymbol{f}}_c(s) ds \\ &+ (I - \hat{A}_c \hat{A}_c^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (\hat{A}_c \hat{B}_c^D)^n \hat{B}_c^D \hat{\boldsymbol{f}}_c^{(n)},\end{aligned} \tag{4.17}$$

*para cualquier vector $\boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^n$ y $a \in \mathbb{R}$ arbitrario.*
*La solución que satisface $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ la encontramos tomando $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{x}_0$ y $a = 0$ en la ecuación (4.17).*

*Demostración.* Supongamos que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que la matriz $(cA + B)^{-1}$ existe. Entonces se tiene que el sistema

$$A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$$

es equivalente al sistema

$$\hat{A}_c \boldsymbol{x}' + \hat{B}_c \boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{f}}_c,$$

donde $\hat{A}_c = (cA + B)^{-1} A$, $\hat{B}_c = (cA + B)^{-1} B$ y $\hat{\boldsymbol{f}}_c = (cA + B)^{-1} \boldsymbol{f}$.
Aplicando los teoremas citados anteriormente se llega al resultado deseado.

En este punto de la sección hemos conseguido ya resolver ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo $A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$, aún cuando la matriz de coeficientes que acompaña a la derivada es una matriz singular. Se han distinguido dos casos. El primer caso que hemos considerado ha sido cuando las matrices $A$ y $B$ conmutan, obteniendo una expresión de la solución para el problema homogéneo asociado. Si además, la intersección de los espacios nulos de $A$ y $B$ es la trivial, se ha dado una expresión de la solución general del problema no homogéneo. El segundo caso que se ha planteado ha sido cuando las matrices $A$ y $B$ no conmutan. En esta ocasión se ha llegado una ecuación equivalente a la del problema que se planteaba, ecuación que cumplía las condiciones del primer caso.

El siguiente resultado es meramente una cuestión técnica. Se trata de destacar que las ecuaciones (4.15), (4.16), (4.17) son independientes del escalar $c$ que se utilice.

**Teorema 4.14.** *Sean las matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Supongamos que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que la matriz $(cA + B)$ es invertible. Entonces, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ para los cuales las* *matrices* $(\alpha A+B)^{-1}$ *y* $(\beta A+B)^{-1}$ *existen, se cumplen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned}
\hat{A}_\alpha{}^D\hat{A}_\alpha &= \hat{A}_\beta{}^D\hat{A}_\beta\\
\hat{A}_\alpha{}^D\hat{B}_\alpha &= \hat{A}_\beta{}^D\hat{B}_\beta\\
\hat{A}_\alpha\hat{B}_\alpha{}^D &= \hat{A}_\beta\hat{B}_\beta{}^D\\
\hat{A}_\alpha{}^D(\alpha A+B)^{-1} &= \hat{A}_\beta{}^D(\beta A+B)^{-1}\\
\hat{B}_\alpha{}^D(\alpha A+B)^{-1} &= \hat{B}_\beta{}^D(\beta A+B)^{-1}\\
\mathrm{Ind}(\hat{A}_\alpha) &= \mathrm{Ind}(\hat{A}_\beta)
\end{aligned}$$

*Demostración.* Probaremos cada una de las igualdades.

$$\begin{aligned}
\hat{A}_\alpha{}^D\hat{A}_\alpha &= [(\alpha A+B)^{-1}A]^D\hat{A}_\alpha\\
&= [(\alpha A+B)^{-1}(\beta A+B)(\beta A+B)^{-1}A]^D\hat{A}_\alpha\\
&= [((\beta A+B)^{-1}(\alpha A+B))^{-1}\hat{A}_\beta]^D\hat{A}_\alpha\\
&= [(\alpha(\beta A+B)^{-1}A+(\beta A+B)^{-1}B)^{-1}\hat{A}_\beta]^D\hat{A}_\alpha\\
&= [(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^{-1}\hat{A}_\beta]^D\hat{A}_\alpha
\end{aligned}$$

Se tiene que las matrices $(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^{-1}$ y $\hat{A}_\beta$ conmutan, ya que:

$$\begin{aligned}
(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^{-1}\hat{A}_\beta = \hat{A}_\beta(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^{-1} &\Leftrightarrow \hat{A}_\beta = (\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)\hat{A}_\beta(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^{-1}\\
&\Leftrightarrow \hat{A}_\beta(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta) = (\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)\hat{A}_\beta\\
&\Leftrightarrow \alpha\hat{A}_\beta\hat{A}_\beta+\hat{A}_\beta\hat{B}_\beta = \alpha\hat{A}_\beta\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta\hat{A}_\beta \quad (\hat{A}_\beta\hat{B}_\beta=\hat{B}_\beta\hat{A}_\beta)\\
&\Leftrightarrow \alpha\hat{A}_\beta\hat{A}_\beta+\hat{A}_\beta\hat{B}_\beta = \alpha\hat{A}_\beta\hat{A}_\beta+\hat{A}_\beta\hat{B}_\beta.
\end{aligned}$$

Por tanto, aplicando el lema (4.2)[página 114], se tiene que:

$$\hat{A}_\alpha{}^D\hat{A}_\alpha = \hat{A}_\beta{}^D[(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^{-1}]^D\hat{A}_\alpha$$

Como $(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)$ es invertible, sabemos que $(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^{-1}=(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^D$, luego

$$\begin{aligned}
\hat{A}_\alpha{}^D\hat{A}_\alpha &= \hat{A}_\beta{}^D(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)\hat{A}_\alpha\\
&= \hat{A}_\beta{}^D(\alpha(\beta A+B)^{-1}A+(\beta A+B)^{-1}B)\hat{A}_\alpha\\
&= \hat{A}_\beta{}^D(\beta A+B)^{-1}(\alpha A+B)\hat{A}_\alpha\\
&= \hat{A}_\beta{}^D(\beta A+B)^{-1}(\alpha A+B)(\alpha A+B)^{-1}A\\
&= \hat{A}_\beta{}^D(\beta A+B)^{-1}A\\
&= \hat{A}_\beta{}^D\hat{A}_\beta.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{\hat{A}_\alpha}^D \hat{B}_\alpha &= [(\alpha A + B)^{-1} A]^D \hat{B}_\alpha \\
&= [(\alpha A + B)^{-1}(\beta A + B)(\beta A + B)^{-1} A]^D \hat{B}_\alpha \\
&= [((\beta A + B)^{-1}(\alpha A + B))^{-1} \hat{A}_\beta]^D \hat{B}_\alpha \\
&= [(\alpha(\beta A + B)^{-1} A + (\beta A + B)^{-1} B)^{-1} \hat{A}_\beta]^D \hat{B}_\alpha \\
&= [(\alpha \hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)^{-1} \hat{A}_\beta]^D \hat{B}_\alpha
\end{aligned}$$

Las matrices $(\alpha \hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)^{-1}$ y $\hat{A}_\beta$ conmutan, y por el lema (4.2)[página 114] se tiene que:

$$ {\hat{A}_\alpha}^D \hat{B}_\alpha = {\hat{A}_\beta}^D [(\alpha \hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)^{-1}]^D \hat{B}_\alpha $$

Como $(\alpha \hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)$ es invertible, sabemos que $(\alpha \hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)^{-1} = (\alpha \hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)^D$, luego

$$\begin{aligned}
{\hat{A}_\alpha}^D \hat{B}_\alpha &= {\hat{A}_\beta}^D (\alpha \hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta) \hat{B}_\alpha \\
&= {\hat{A}_\beta}^D (\alpha(\beta A + B)^{-1} A + (\beta A + B)^{-1} B) \hat{B}_\alpha \\
&= {\hat{A}_\beta}^D (\beta A + B)^{-1}(\alpha A + B) \hat{B}_\alpha \\
&= {\hat{A}_\beta}^D (\beta A + B)^{-1}(\alpha A + B)(\alpha A + B)^{-1} B \\
&= {\hat{A}_\beta}^D (\beta A + B)^{-1} B \\
&= {\hat{A}_\beta}^D \hat{B}_\beta.
\end{aligned}$$

Aplicando los lemas (4.3)[página 137] y (4.2)[página 114], tenemos que

$$ \hat{A}_\alpha {\hat{B}_\alpha}^D = {\hat{B}_\alpha}^D \hat{A}_\alpha. $$

Luego,

$$\begin{aligned}
\hat{A}_\alpha {\hat{B}_\alpha}^D &= {\hat{B}_\alpha}^D \hat{A}_\alpha \\
&= [(\alpha A + B)^{-1} B]^D \hat{A}_\alpha \\
&= [(\alpha A + B)^{-1}(\beta A + B)(\beta A + B)^{-1} B]^D \hat{A}_\alpha \\
&= [((\beta A + B)^{-1}(\alpha A + B))^{-1} \hat{B}_\beta]^D \hat{A}_\alpha \\
&= [(\alpha(\beta A + B)^{-1} A + (\beta A + B)^{-1} B)^{-1} \hat{B}_\beta]^D \hat{A}_\alpha \\
&= [(\alpha \hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)^{-1} \hat{B}_\beta]^D \hat{A}_\alpha
\end{aligned}$$

Las matrices $(\alpha\hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)^{-1}$ y $\hat{A}_\beta$ conmutan, y por el lema (4.2)[página 114], se tiene que:

$$\hat{A}_\alpha\hat{B}_\alpha{}^D = \hat{B}_\beta{}^D[(\alpha\hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)^{-1}]^D\hat{A}_\alpha$$

Como $(\alpha\hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)$ es invertible, sabemos que $(\alpha\hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)^{-1} = (\alpha\hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)^D$, luego

$$\begin{aligned}
\hat{A}_\alpha\hat{B}_\alpha{}^D &= \hat{B}_\beta{}^D(\alpha\hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)\hat{A}_\alpha \\
&= \hat{B}_\beta{}^D(\alpha(\beta A + B)^{-1}A + (\beta A + B)^{-1}B)\hat{A}_\alpha \\
&= \hat{B}_\beta{}^D(\beta A + B)^{-1}(\alpha A + B)\hat{A}_\alpha \\
&= \hat{B}_\beta{}^D(\beta A + B)^{-1}(\alpha A + B)(\alpha A + B)^{-1}A \\
&= \hat{B}_\beta{}^D(\beta A + B)^{-1}A \\
&= \hat{B}_\beta{}^D\hat{A}_\beta.
\end{aligned}$$

Volviendo a utilizar los lemas (4.3)[página 137] y (4.2)[página 114],

$$\hat{A}_\alpha\hat{B}_\alpha{}^D = \hat{A}_\beta\hat{B}_\beta{}^D.$$

$$\begin{aligned}
\hat{A}_\alpha{}^D(\alpha A + B)^{-1} &== [(\alpha A + B)^{-1}A]^D(\alpha A + B)^{-1} \\
&= [(\alpha A + B)^{-1}(\beta A + B)(\beta A + B)^{-1}A]^D(\alpha A + B)^{-1} \\
&= [((\beta A + B)^{-1}(\alpha A + B))^{-1}\hat{A}_\beta]^D(\alpha A + B)^{-1} \\
&= [(\alpha(\beta A + B)^{-1}A + (\beta A + B)^{-1}B)^{-1}\hat{A}_\beta]^D(\alpha A + B)^{-1} \\
&= [(\alpha\hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)^{-1}\hat{A}_\beta]^D(\alpha A + B)^{-1}
\end{aligned}$$

Las matrices $(\alpha\hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)^{-1}$ y $\hat{A}_\beta$ conmutan, y por el lema (4.2)[página 114], se tiene que:

$$\hat{A}_\alpha{}^D(\alpha A + B)^{-1} = \hat{A}_\beta{}^D[(\alpha\hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)^{-1}]^D(\alpha A + B)^{-1}$$

Como $(\alpha\hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)$ es invertible, sabemos que $(\alpha\hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)^{-1} = (\alpha\hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)^D$, luego

$$\begin{aligned}
\hat{A}_\alpha{}^D(\alpha A + B)^{-1} &= \hat{A}_\beta{}^D(\alpha\hat{A}_\beta + \hat{B}_\beta)(\alpha A + B)^{-1} \\
&= \hat{A}_\beta{}^D(\alpha(\beta A + B)^{-1}A + (\beta A + B)^{-1}B)(\alpha A + B)^{-1} \\
&= \hat{A}_\beta{}^D(\beta A + B)^{-1}(\alpha A + B)(\alpha A + B)^{-1} \\
&= \hat{A}_\beta{}^D(\beta A + B)^{-1}(\alpha A + B)(\alpha A + B)^{-1} \\
&= \hat{A}_\beta{}^D(\beta A + B)^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{B_\alpha}^D(\alpha A+B)^{-1} &== [(\alpha A+B)^{-1}B]^D(\alpha A+B)^{-1}\\
&= [(\alpha A+B)^{-1}(\beta A+B)(\beta A+B)^{-1}B]^D(\alpha A+B)^{-1}\\
&= [((\beta A+B)^{-1}(\alpha A+B))^{-1}\hat{B}_\beta]^D(\alpha A+B)^{-1}\\
&= [(\alpha(\beta A+B)^{-1}A+(\beta A+B)^{-1}B)^{-1}\hat{B}_\beta]^D(\alpha A+B)^{-1}\\
&= [(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^{-1}\hat{B}_\beta]^D(\alpha A+B)^{-1}
\end{aligned}$$

Las matrices $(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^{-1}$ y $\hat{A}_\beta$ conmutan, y por el lema (4.2)[página 114], se tiene que:

$$\hat{B_\alpha}^D(\alpha A+B)^{-1} = \hat{B_\beta}^D[(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^{-1}]^D(\alpha A+B)^{-1}$$

Como $(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)$ es invertible, sabemos que $(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^{-1}=(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^D$, luego

$$\begin{aligned}
\hat{B_\alpha}^D(\alpha A+B)^{-1} &= \hat{B_\beta}^D(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)(\alpha A+B)^{-1}\\
&= \hat{B_\beta}^D(\alpha(\beta A+B)^{-1}A+(\beta A+B)^{-1}B)(\alpha A+B)^{-1}\\
&= \hat{B_\beta}^D(\beta A+B)^{-1}(\alpha A+B)(\alpha A+B)^{-1}\\
&= \hat{B_\beta}^D(\beta A+B)^{-1}(\alpha A+B)(\alpha A+B)^{-1}\\
&= \hat{B_\beta}^D(\beta A+B)^{-1}.
\end{aligned}$$

Por último, probemos que $\mathrm{Ind}(\hat{A}_\alpha)=\mathrm{Ind}(\hat{A}_\beta)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rango}(\hat{A_\alpha}^k) &= \mathrm{rango}(((\alpha A+B)^{-1}A)^k) && \text{(siguiendo el desarrollo de las igualdades anteriores)}\\
&= \mathrm{rango}(((\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^{-1}\hat{A}_\beta)^k) && ((\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^{-1}\hat{A}_\beta=\hat{A}_\beta(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^{-1})\\
&= \mathrm{rango}((\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^{-k}\hat{A_\beta}^k),
\end{aligned}$$

luego

$$\mathrm{rango}(\hat{A_\alpha}^k)\leq \mathrm{rango}(\hat{A_\beta}^k).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rango}(\hat{A_\beta}^k) &= \mathrm{rango}(((\beta A+B)^{-1}A)^k) && \text{(siguiendo el desarrollo de las igualdades anteriores)}\\
&= \mathrm{rango}(((\beta\hat{A}_\alpha+\hat{B}_\alpha)^{-1}\hat{A}_\alpha)^k) && ((\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^{-1}\hat{A}_\beta=\hat{A}_\beta(\alpha\hat{A}_\beta+\hat{B}_\beta)^{-1})\\
&= \mathrm{rango}((\beta\hat{A}_\alpha+\hat{B}_\alpha)^{-k}\hat{A_\alpha}^k),
\end{aligned}$$

luego

$$\text{rango}(\hat{A}_\alpha{}^k) \geq \text{rango}(\hat{A}_\beta{}^k).$$

Por tanto,

$$\text{rango}(\hat{A}_\alpha{}^k) = \text{rango}(\hat{A}_\beta{}^k).$$

Y por consiguiente, $\text{Ind}(\hat{A}_\alpha) = \text{Ind}(\hat{A}_\beta)$.

---

**Ejemplo 4.4.3.-**

Sea la ecuación diferencial homogénea

$$A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \tag{4.18}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observamos que las matrices $A$ y $B$ son no invertibles, y además no conmutan, ya que

$$AB = \begin{pmatrix} -19 & -8 & -2 \\ 22 & 9 & 31 \\ -17 & -7 & -24 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & -6 & -9 \\ 6 & -11 & -17 \\ 9 & -17 & -26 \end{pmatrix} = BA.$$

Tomando $c = 1$, tenemos que la matriz $(cA + B)$ es invertible. Siendo

$$(cA + B)^{-1} = (A + B)^{-1} \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & -1/10 \\ 4/5 & 2/5 & -7/10 \\ -11/20 & -3/20 & 9/20 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos la ecuación (4.18) por $(A + B)^{-1}$ a izquierda, obteniendo

$$(A + B)^{-1}A\boldsymbol{x}' + (A + B)^{-1}B\boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

utilizando la notación habitual,

$$\hat{A}\boldsymbol{x}' + \hat{B}\boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

donde

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/10 & -3/5 \\ 1/2 & 13/10 & 4/5 \\ -1/2 & -3/10 & 1/5 \end{pmatrix} \text{ y } \hat{B} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/10 & 3/5 \\ -1/2 & -3/10 & -4/5 \\ 1/2 & 3/10 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

La solución general para (4.18) viene dada por (teorema (4.13)[página 140]):

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{-\hat{A}^D\hat{B}t}\hat{A}\hat{A}^D\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^3.$$

Tomando $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{x}(0)$, $\boldsymbol{x}(0)$ vector inicial, tenemos que

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{-\hat{A}^D\hat{B}t}\hat{A}\hat{A}^D\boldsymbol{x}(0).$$

Por el teorema (4.13)[página 140], la ecuación diferencial (4.18) tendrá una única solución si y solo si el vector inicial $\boldsymbol{x}(0)$ satisface:

$$\boldsymbol{x}(0) = \hat{A}\hat{A}^D\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^3.$$

Tomando $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{x}(0)$

$$\boldsymbol{x}(0) = \hat{A}\hat{A}^D\boldsymbol{x}(0),$$

o lo que es lo mismo

$$(I - \hat{A}\hat{A}^D)\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}.$$

- Calculamos $\hat{A}^D$ a partir del resultado del teorema (4.4)[página 110]:

  El índice de $A$ es igual a $1$, ya que:

  $$\text{rango}(\hat{A}) = 2 = \text{rango}(\hat{A}^2).$$

  Los autovalores de la matriz $\hat{A}$ son $\lambda_1 = 1$, con multiplicidad algebraica $2$, y $\lambda_2 = 0$, con multiplicidad algebraica $1$.
  Una matriz de Jordan asociada a la matriz $\hat{A}$ sería:

  $$J_{\hat{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  con matriz de paso

  $$P_{\hat{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & -11 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\hat{A}^D = P_{\hat{A}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_{\hat{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/10 & -4/5 \\ 1/2 & 11/10 & 3/5 \\ -1/2 & -1/10 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

- Calculamos $\hat{B}^D$ a partir del mismo resultado:

  El índice de $B$ es igual a 2, ya que:

$$\text{rango}(\hat{B}) = 2 \neq 1 = \text{rango}(\hat{B}^2)$$
$$\text{rango}(\hat{B}^2) = 1 = \text{rango}(\hat{B}^3).$$

  Los autovalores de la matriz $\hat{B}$ son $\lambda_1 = 1$, con multiplicidad algebraica 1, y $\lambda_2 = 0$, con multiplicidad algebraica 2.
  Una matriz de Jordan asociada a la matriz $\hat{B}$ sería:

$$J_{\hat{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  con matriz de paso

$$P_{\hat{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -1 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Por tanto,

$$\hat{B}^D = P_{\hat{B}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_{\hat{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/5 & 7/10 \\ -1/2 & -1/5 & -7/10 \\ 1/2 & 1/5 & 7/10 \end{pmatrix}.$$

- Calculamos la matriz exponencial $e^{-\hat{A}^D \hat{B} t}$:

$$-\hat{A}^D \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1/10 & 1/10 \\ 0 & 1/10 & 1/10 \\ 0 & -1/10 & -1/10 \end{pmatrix}.$$

  Los autovalores de la matriz $-\hat{A}^D \hat{B}$ son $\lambda_1 = 0$, con multiplicidad algebraica 3.

Una matriz de Jordan asociada a $-\hat{A}^D\hat{B}$ sería:

$$J_{-\hat{A}^D\hat{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con matriz de paso

$$P_{-\hat{A}^D\hat{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1/10 & 0 \\ 1 & 1/10 & 0 \\ -1 & -1/10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$e^{-\hat{A}^D\hat{B}t} = P_{-\hat{A}^D\hat{B}}\, e^{J_{-\hat{A}^D\hat{B}}t}\, P^{-1}_{-\hat{A}^D\hat{B}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{10} & \frac{t}{10} \\ 0 & 1+\frac{t}{10} & \frac{t}{10} \\ 0 & -\frac{t}{10} & 1-\frac{t}{10} \end{pmatrix}.$$

- Calculamos la matriz $\hat{A}\hat{A}^D$:

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{A}^D &= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/10 & -3/5 \\ 1/2 & 13/10 & 4/5 \\ -1/2 & -3/10 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -3/10 & -4/5 \\ 1/2 & 11/10 & 3/5 \\ -1/2 & -1/10 & 2/5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/5 & -7/10 \\ 1/2 & 6/5 & 7/10 \\ -1/2 & -1/5 & 3/10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, la solución de la ecuación (4.18) viene dada por:

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{-\hat{A}^D\hat{B}t}\hat{A}\hat{A}^D\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{t}{10}-\frac{1}{5} & \frac{t}{10}-\frac{7}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{t}{10}+\frac{6}{5} & \frac{t}{10}+\frac{7}{10} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{t}{10}-\frac{1}{5} & -\frac{t}{10}+\frac{3}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix},$$

y debe satisfacer la condición inicial $\boldsymbol{x}(0)$:

$$(I-\hat{A}\hat{A}^D)\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/5 & 7/10 \\ -1/2 & -1/5 & -7/10 \\ 1/2 & 1/5 & 7/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Queda una sola ecuación como condición:

$$\frac{1}{2}x_1(0) + \frac{1}{5}x_2(0) + \frac{7}{10}x_3(0) = 0.$$

Despejamos una de las $x_i(0), i = 1, 2, 3$, por ejemplo, $x_3(0)$:

$$x_3(0) = \frac{-10}{7}\left(\frac{1}{2}x_1(0) + \frac{1}{5}x_2(0)\right),\ x_1(0),\ x_2(0) \in \mathbb{C}.$$

Simplificando:

$$x_3(0) = -\frac{5}{7}x_1(0) - \frac{2}{7}x_2(0),\ x_1(0),\ x_2(0) \in \mathbb{C}.$$

Por consiguiente, la solución de la ecuación diferencial homogénea (4.18), es:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{t}{10} - \frac{1}{5} & \frac{t}{10} - \frac{7}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{t}{10} + \frac{6}{5} & \frac{t}{10} + \frac{7}{10} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{t}{10} - \frac{1}{5} & -\frac{t}{10} + \frac{3}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ -\frac{5}{7}x_1(0) - \frac{2}{7}x_2(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1(0) - \frac{t}{14}x_1(0) + \frac{t}{14}x_2(0) \\ -\frac{t}{14}x_1(0) + x_2(0) + \frac{t}{14}x_2(0) \\ -\frac{5}{7}x_1(0) + \frac{t}{14}x_1(0) - \frac{2}{7}x_2(0) - \frac{t}{14}x_2(0) \end{pmatrix},\ x_1(0), x_2(0) \in \mathbb{C}.$$

Ha parecido interesante, comprobar si, como en los ejemplos anteriores de ecuaciones diferenciales, el software matemático Maple $2015.1$ es capaz de darnos una solución general a este problema. El proceso y el resultado es el siguiente:

```
A := Matrix([[2, -3, -5], [-1, 4, 5], [1, -3, -4]]);
B := Matrix([[1, 0, 1], [2, 1, 3], [3, 1, 4]]);
xx := Vector([x1(t), x2(t), x3(t)]);
sistema := A.map(diff, xx, t)) + B.xx;
```

```
sistemaH := [sistema[1] = 0, sistema[2] = 0, sistema[3] = 0];
dsolve(sistemaH);
   {x1(t) = _C1*t+_C2,
   x2(t) = _C1*t+14*_C1+_C2,
   x3(t) = -_C1*t-4*_C1-_C2}
```

**Ejemplo 4.4.4.-**

Sea la ecuación diferencial no homogénea

$$A\boldsymbol{x}' + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{4.19}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Observamos, al igual que el ejemplo anterior, que las matrices $A$ y $B$ son no invertibles, y además no conmutan. Tomaremos también, como en el anterior ejemplo, $c = 1$, y la matriz $(cA + B)$ es invertible. Nos queda

$$(cA + B)^{-1} = (A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & -1/10 \\ 4/5 & 2/5 & -7/10 \\ -11/20 & -3/20 & 9/20 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos la ecuación (4.19) por $(A + B)^{-1}$ a izquierda, obteniendo

$$(A + B)^{-1} A\boldsymbol{x}' + (A + B)^{-1} B\boldsymbol{x} = (A + B)^{-1}\boldsymbol{b},$$

utilizando la notación habitual, podemos reescribirla de la siguiente manera:

$$\hat{A}\boldsymbol{x}' + \hat{B}\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{b}},$$

donde

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/10 & -3/5 \\ 1/2 & 13/10 & 4/5 \\ -1/2 & -3/10 & 1/5 \end{pmatrix}, \hat{B} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/10 & 3/5 \\ -1/2 & -3/10 & -4/5 \\ 1/2 & 3/10 & 4/5 \end{pmatrix} \text{ y } \hat{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ -3/5 \\ 7/20 \end{pmatrix}.$$

La solución general para la ecuación diferencial (4.19) viene dada por (teorema (4.13)[página 140]:

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{-\hat{A}^D\hat{B}t}\hat{A}\hat{A}^D\boldsymbol{q} + \hat{A}^D e^{-\hat{A}^D\hat{B}t}\int_a^t e^{\hat{A}^D\hat{B}s}\,\hat{\boldsymbol{b}}\,ds$$
$$+ (I - \hat{A}\hat{A}^D)\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n(\hat{A}\hat{B}^D)^n\hat{B}^D\hat{\boldsymbol{b}}^{(n)},$$

para cualquier vector $\boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^3$ y $a \in \mathbb{R}$ arbitrario.
Como $\operatorname{Ind}(\hat{A}) = k = 1$, tomando $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{x}(0)$, con $\boldsymbol{x}(0)$ condición inicial, y $a = 0$, resulta:

$$\boldsymbol{x}(t) = \underbrace{e^{-\hat{A}^D\hat{B}t}\hat{A}\hat{A}^D\boldsymbol{x}(0)}_{S_1}$$
$$+ \underbrace{\hat{A}^D e^{-\hat{A}^D\hat{B}t}\int_0^t e^{\hat{A}^D\hat{B}s}\,\hat{\boldsymbol{b}}\,ds}_{S_2}$$
$$+ \underbrace{(I - \hat{A}\hat{A}^D)\hat{B}^D\hat{\boldsymbol{b}}}_{S_3}.$$

Vamos a calcular cada una de las expresiones $S_1, S_2, S_3$ anteriores.

Del ejemplo anterior conocemos el valor de $S_1$. En concreto,

$$\hat{A}^D = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/10 & -4/5 \\ 1/2 & 11/10 & 3/5 \\ -1/2 & -1/10 & 2/5 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B}^D = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/5 & 7/10 \\ -1/2 & -1/5 & -7/10 \\ 1/2 & 1/5 & 7/10 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}\hat{A}^D = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/5 & -7/10 \\ 1/2 & 6/5 & 7/10 \\ -1/2 & -1/5 & 3/10 \end{pmatrix}, \quad e^{-\hat{A}^D\hat{B}t} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{10} & \frac{t}{10} \\ 0 & 1 + \frac{t}{10} & \frac{t}{10} \\ 0 & -\frac{t}{10} & 1 - \frac{t}{10} \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
S_1 &= e^{-\hat{A}^D\hat{B}t}\hat{A}\hat{A}^D\boldsymbol{x}(0)\\
&= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{10}t & \frac{1}{10}t \\ 0 & 1+\frac{1}{10}t & \frac{1}{10}t \\ 0 & -\frac{1}{10}t & 1-\frac{1}{10}t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & -\frac{7}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{7}{10} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(0)\\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{5}+\frac{1}{10}t & -\frac{7}{10}+\frac{1}{10}t \\ \frac{1}{2} & \frac{6}{5}+\frac{1}{10}t & \frac{7}{10}+\frac{1}{10}t \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{5}-\frac{1}{10}t & \frac{3}{10}-\frac{1}{10}t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Para obtener el valor de

$$S_2 = \hat{A}^D e^{-\hat{A}^D\hat{B}t}\int_0^t e^{\hat{A}^D\hat{B}s}\,\hat{\boldsymbol{b}}\,ds,$$

comenzamos por la integral $\int_0^t e^{\hat{A}^D\hat{B}s}\,\hat{\boldsymbol{b}}\,ds$. Dado que

$$e^{\hat{A}^D\hat{B}s} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{10}s & -\frac{1}{10}s \\ 0 & 1-\frac{1}{10}s & -\frac{1}{10}s \\ 0 & \frac{1}{10}s & 1+\frac{1}{10}s \end{bmatrix},$$

se tiene que

$$\int_0^t e^{\hat{A}^D\hat{B}s}\,\hat{\boldsymbol{b}}\,ds = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}t+\frac{1}{80}t^2 \\ -\frac{3}{5}t+\frac{1}{80}t^2 \\ \frac{7}{20}t-\frac{1}{80}t^2 \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$S_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{80}t^2 \\ -\frac{7}{20}t - \frac{1}{80}t^2 \\ \frac{1}{10}t + \frac{1}{80}t^2 \end{bmatrix}.$$

Para $S_3$,

$$S_3 = (I - \hat{A}\hat{A}^D)\hat{B}^D\hat{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \frac{9}{40} \\ -\frac{9}{40} \\ \frac{9}{40} \end{bmatrix}.$$

Unimos todo lo anterior para obtener la solución general

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} + \frac{1}{10}t & -\frac{7}{10} + \frac{1}{10}t \\ \frac{1}{2} & \frac{6}{5} + \frac{1}{10}t & \frac{7}{10} + \frac{1}{10}t \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{5} - \frac{1}{10}t & \frac{3}{10} - \frac{1}{10}t \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(0) + \begin{bmatrix} -\frac{1}{80}t^2 + \frac{9}{40} \\ -\frac{7}{20}t - \frac{1}{80}t^2 - \frac{9}{40} \\ \frac{1}{10}t + \frac{1}{80}t^2 + \frac{9}{40} \end{bmatrix}.$$

Por el teorema (4.13)[página 140], para que la ecuación diferencial (4.19) tenga una única solución, la condición inicial $\boldsymbol{x}(0)$ debe satisfacer

$$\boldsymbol{x}(0) = \hat{A}\hat{A}^D\boldsymbol{q} + (I - \hat{A}\hat{A}^D)\hat{B}^D\hat{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^3.$$

Si $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{x}(0)$, resulta

$$(I - \hat{A}\hat{A}^D)(\boldsymbol{x}(0) - \hat{B}^D\hat{\boldsymbol{b}}) = \boldsymbol{0},$$

de donde

$$(I - \hat{A}\hat{A}^D)(\boldsymbol{x}(0) - \hat{B}^D\hat{\boldsymbol{b}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1(0) + \frac{1}{5}x_2(0) + \frac{7}{10}x_3(0) - \frac{9}{40} \\ -\frac{1}{2}x_1(0) - \frac{1}{5}x_2(0) - \frac{7}{10}x_3(0) + \frac{9}{40} \\ \frac{1}{2}x_1(0) + \frac{1}{5}x_2(0) + \frac{7}{10}x_3(0) - \frac{9}{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos queda una única ecuación como condición:

$$\frac{1}{2}\,x_1(0)+\frac{1}{5}\,x_2(0)+\frac{7}{10}\,x_3(0)-\frac{9}{40}=0.$$

Despejamos una de las $x_i(0), i=1,2,3$, por ejemplo, $x_3(0)$:

$$x_3(0)=\frac{10}{7}\left(-\frac{1}{2}\,x_1(0)-\frac{1}{5}\,x_2(0)+\frac{9}{40}\right),\ x_1(0),\ x_2(0)\in\mathbb{C}.$$

Simplificando:

$$x_3(0)=-\frac{5}{7}\,x_1(0)-\frac{2}{7}\,x_2(0)+\frac{9}{28},\ x_1(0),\ x_2(0)\in\mathbb{C}.$$

Como consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial (4.19) es

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(0)+\frac{1}{14}\,x_2(0)\,t-\frac{1}{14}\,tx_1(0)+\frac{9}{280}\,t-\frac{1}{80}\,t^2 \\ x_2(0)+\frac{1}{14}\,x_2(0)\,t-\frac{1}{14}\,tx_1(0)-\frac{89}{280}\,t-\frac{1}{80}\,t^2 \\ -\frac{5}{7}\,x_1(0)-\frac{2}{7}\,x_2(0)-\frac{1}{14}\,x_2(0)\,t+\frac{9}{28}+\frac{1}{14}\,tx_1(0)+\frac{19}{280}\,t+\frac{1}{80}\,t^2 \end{bmatrix},\ x_1(0),\ x_2(0)\in\mathbb{C}.$$

Al igual que hicimos en el ejemplo anterior, comprobamos si el software matemático Maple 2015.1 es capaz de darnos una solución general a este problema. El proceso y el resultado ha sido el siguiente:

```
A := Matrix([[2, -3, -5], [-1, 4, 5], [1, -3, -4]]);
B := Matrix([[1, 0, 1], [2, 1, 3], [3, 1, 4]]);
b := Vector([1, 0, 2]);
xx := Vector([x1(t), x2(t), x3(t)]);
sistema := A.map(diff, xx, t)) + B.xx;
sistemaNH := [sistema[1] = b[1], sistema[2] = b[2], sistema[3] = b[3]];
dsolve(sistemaNH);
   {x1(t) = -(1/80)*t^2+_C1*t+_C2,
   x2(t) = -(7/20)*t+14*_C1-(1/80)*t^2+_C1*t+_C2-9/20,
   x3(t) = (1/80)*t^2-_C1*t-_C2+9/20+(1/10)*t-4*_C1}
```

## 4.5 Impacto del artículo de ecuaciones diferenciales

Comentamos, nada más comenzar este capítulo, que una parte del desarrollo del mismo, en particular la referente a la aplicación de la inversa de Drazin para el cálculo de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales, se iba a fundamentar en [CMR76]. Se ha tratado de realizar un estudio de las referencias encontradas en la aplicación "web of knowledge", disponible en `https://fama.us.es//`, a partir de la búsqueda de dicho artículo. De las 134 referencias que se han obtenido, se ha considerado comentar los siguientes temas.

### 4.5.1 Ecuaciones diferenciales

El lector podría preguntarse por qué, habiendo visto ya toda una sección referente a la aplicación de la inversa de Drazin como medio para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, volvemos a referirnos a ello. Pues bien, no es excesivo decir que ésta es la aplicación más relevante de la inversa de Drazin. Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales son utilizados en una gran variedad de ámbitos en la vida real, modelizando problemas de física, biología, ingeniería o, inclusive, problemas de ciencias sociales. Pero no todos son capaces de ser resueltos mediante la teoría clásica de ecuaciones diferenciales. Es el caso de los sistemas diferenciales singulares, en los que la matriz constituida por los coeficientes que acompañan a las derivadas no posee inversa, y por ello, no pueden ser resueltos por los métodos convencionales. La inversa de Drazin nos ayuda en la obtención de resultados con los que vamos a ser capaces de encontrar soluciones para tales sistemas. Parte de estos resultados es lo que hemos visto hasta ahora, el cálculo de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales singulares de primer orden a partir del uso de la inversa de Drazin.
Técnicas numéricas fundamentadas en la formulación basada en la inversa de Drazin para la solución de sistemas singulares diferenciales son propuestas por [CGST12] para aproximar la solución de problemas de valor inicial asociados a un sistema singular.
La incorporación de la inversa de Drazin a la solución de sistemas homogéneos de ecuaciones diferenciales singulares de segundo de orden tiene su origen en [Cam83], el cual nos propone, mediante un cambio de variable, reducir el sistema diferencial singular de segundo orden a un sistema diferencial singular de primer orden, que ya estaríamos en condiciones de resolver a partir de los resultados conocidos. El mayor inconveniente que se presenta es el cálculo de la inversa de Drazin de este último sis-

tema. [XSL15] trata de obtener, a partir del sistema diferencial de segundo orden que poseíamos inicialmente, una ecuación matricial cuadrática que simplifique el cálculo de dicha inversa de Drazin. Como aplicación, [XSL15], nos describe una solución particular de un sistema basado en el modelo físico de una varilla uniforme de 2 unidades de longitud.

No solo vamos a encontrarnos referencias relacionadas con la resolución de sistemas diferenciales singulares; [FWC13] se basa en el uso de la inversa de Drazin para establecer condiciones necesarias y suficientes en el estudio de la estabilidad de sistemas singulares multiagentes de orden superior e invariantes en el tiempo (LTI). Nos encontramos aquí con un nuevo concepto que hasta ahora no habíamos introducido, el de sistemas multiagentes. Se trata de sistemas que están compuestos a nivel individual por entidades (agentes) que tienen un comportamiento autónomo y proactivo e interactúan con el medio ambiente. Como resultado de todas estas actuaciones se obtiene un comportamiento global del sistema. Estos sistemas han sido considerados por biólogos, físicos e ingenieros; un ejemplo son los llamados MASS (multi-agent supporting systems), como se muestran en [Ben94] y [Dif12], sistemas desarrollados para configuraciones formadas por muchos agentes que deben mantenerse incluso cuando existen alteraciones desconocidas. Es el caso de la prevención de daños producidos por terremotos en edificios, control de la estabilidad de plantas flotantes, control de antenas parabólicas de gran diámetro o telescopios.

Por último, cabe destacar una de las referencias más recientes, [Muh16], que incorpora la inversa de Drazin con la finalidad de realizar una primera toma de contacto en la detección de la existencia de una realimentación a un sistema lineal de ecuaciones algebraicas diferenciales tal que el sistema resultante sea positivo y estable.

### 4.5.2 Inversa de Drazin $W$-Ponderada (WDI)

El origen de un nuevo concepto es introducido por [CG80], el cual define, dadas dos matrices cualesquiera $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$, la inversa de Drazin $W$-Ponderada de $B$, y la denota por $X = B_{d,W}$, como la matriz $X = B[(WB)^D]^2$. A partir de este momento, ampliamos el concepto de inversa de Drazin que conocíamos hasta ahora, y, exclusivamente aplicable a matrices cuadradas, al concepto de inversa de Drazin $W$-Ponderada, aplicable incluso a matrices rectangulares. [SKM17], una de las referencias más actuales, nos muestra diversos métodos de cálculo de la inversa de Drazin $W$-Ponderada.

La mayoría de los artículos encontrados referidos a la (WDI), tienen como única finalidad la de presentar diferentes métodos para el cálculo de la misma, sin aparecer el desarrollo de ninguna aplicación que emplee la inversa de Drazin $W$-Ponderada para algún propósito. Aunque, varios de ellos, como [Son13], [Wei02] y [WS04], desarrollan una regla de Cramer con el fin de resolver ciertos sistemas de ecuaciones mediante la (WDI), apareciendo también una expresión para la (WDI) a partir de determinantes. Esta representación de la (WDI) es utilizada además, en [Kyr13], con el objetivo de obtener una fórmula para la solución parcial de ciertas ecuaciones matriciales diferenciales del tipo $X' + AX = B$ o $X' + XA = B$, donde la matriz $A$ es singular.

### 4.5.3 Cálculo simbólico

El cálculo simbólico es aplicado en [SS16] para reducir el cálculo de la inversa de Drazin sobre ciertos cuerpos al cálculo de la inversa de Drazin de matrices cuyos coeficientes son funciones racionales. La pregunta que tocaría hacerse ahora sería: ¿conocido ya un método para el cálculo de la inversa de Drazin de una matriz, qué utilidad nos aporta este nuevo método? El peso de la respuesta recae sobre el concepto propiamente dicho del cálculo simbólico. Se definen, en nuestro caso, las variables de entrada de la matriz como objetos simbólicos; objetos, que permanecerán en el resultado obtenido por el método, pudiendo ser así sustituidos por las variables que disponíamos, y obteniendo la inversa de Drazin de la matriz inicial; o sustituidos por nuevas variables, y obteniendo la inversa de Drazin de una nueva matriz. Esto es una ventaja importante sobre el cálculo numérico descrito en el método desarrollado en el capítulo, que es único para cada matriz.
Un algoritmo disponible para ello se muestra en [SRS15], aplicando bases de Gröbner, tan importantes en la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas. Lo deficiente del método es la complejidad del cálculo de las bases de Gröbner, que en general, es doble exponencial; aunque, en el caso que se trata, como el ideal es cero dimensional, la complejidad del cálculo es exponencial. En dicho artículo, se extiende además este método a la (WDI) comentada anteriormente. Y se demuestra, mediante la realización de tres experimentos (en cada uno de ellos la matriz a calcular la inversa de Drazin presenta diferente orden, y en cada uno de ellos se fijan diferente número de variables) realizados con el software matemático Maple 18, que el método tiene un buen tiempo de ejecución.

# Bibliografía


[AS03] T Aoki and T Sato, *Application of Bott-Duffin inverse to static and dynamic analysis of masonry structures*, Structural studies, repairs and maintenance of heritage architecture VIII (Brebbia, CA, ed.), Advances in architecture series, vol. 16, 2003, pp. 277–286.

[BD53] R. Bott and R. J. Duffin, *On the algebra of networks*, Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 99–109.

[Ben94] Shugen Ma; S. Hackwood; G. Beni, *Multi-agent supporting systems (mass): control with centralized estimator of disturbance*, IEEE Conference Publications: International Conference on Intelligent Robots and Systems **1** (1994).

[BIG03] Adi Ben-Israel and Thomas N. E. Greville, *Generalized inverses*, second ed., CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, vol. 15, Springer-Verlag, New York, 2003, Theory and applications.

[Cam83] S.L. Campbell, *The drazin inverse and systems of second order linear differential equations*, Linear and Multilinear Algebra **14** (1983), 195–198.

[CG80] Randall E. Cline and T. N. E. Greville, *A Drazin inverse for rectangular matrices*, Linear Algebra Appl. **29** (1980), 53–62.

[CGST12] C. Coll, D. Ginestar, E. Sanchez, and N. Thome, *Drazin inverse based numerical methods for singular linear differential systems*, Advances in Engineering Software **50** (2012), 37–43.

[Che90] Yong Lin Chen, *The generalized Bott-Duffin inverse and its applications*, Linear Algebra Appl. **134** (1990), 71–91.

[CM09] Stephen L. Campbell and Carl D. Meyer, *Generalized inverses of linear transformations*, Classics in Applied Mathematics, vol. 56, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2009.

[CMR76] S.L. Campbell, C.D. Meyer, and N.J. Rose, *Applications of drazin inverse to linear-systems of differential equations with singular constant coefficients*, SIAM Journal on Applied Mathematics **31** (1976), no. 3, 411–425.

[Dif12] *Admissible consensus and consensualization of high-order linear time-invariant singular swarm systems*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **391** (2012), no. 23, 5839 – 5849.

[Dra58] M. P. Drazin, *Pseudo-inverses in associative rings and semigroups*, The American Mathematical Monthly **65** (1958), no. 7, 506–514.

[Dra12] Michael P. Drazin, *A class of outer generalized inverses*, Linear Algebra and its Applications **436** (2012), no. 7, 1909–1923.

[Dra14] ______, *Generalized inverses: Uniqueness proofs and three new classes*, Linear Algebra and its Applications **449** (2014), 402–416.

[FWC13] Mingyu Fu, Shimin Wang, and Yirui Cong, *Swarm stability analysis of high-order linear time-invariant singular multiagent systems*, Math. Probl. Eng. (2013), Art. ID 469747, 11.

[Gan64] F.R. Gantmacher, *The theory of matrices*, vol. Two, Chelsea Publishing Company, 1964.

[Har08] D.A. Harville, *Matrix algebra from a statisticianś perspective*, Springer, 2008.

[HK09] Denis Horvath and Gerald R. Kneller, *A least-constraint principle for population dynamics and reaction kinetics: Modeling entropy-controlled chemical hypercycles*, Journal of Chemical Physics **131** (2009), no. 17.

[KGW00] C Keller, NIM Gould, and AJ Wathen, *Constraint preconditioning for indefinite linear systems*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications **21** (2000), no. 4, 1300–1317.

[Kne06] G. R. Kneller, *Hamiltonian formalism for semiflexible molecules in Cartesian coordinates*, Journal of Chemical Physics **125** (2006), no. 11.

[Kne07] Gerald R. Kneller, *Projection formalism for constrained dynamical systems: From Newtonian to Hamiltonian mechanics*, Journal of Chemical Physics **127** (2007), no. 16.

[Kne08] ———, *Eckart axis conditions, Gauss' principle of least constraint, and the optimal superposition of molecular structures*, Journal of Chemical Physics **128** (2008), no. 19.

[Kyr13] Ivan Kyrchei, *Explicit formulas for determinantal representations of the Drazin inverse solutions of some matrix and differential matrix equations*, Appl. Math. Comput. **219** (2013), no. 14, 7632–7644.

[LACCG14] M. Laura Arias, Gustavo Corach, and M. Celeste Gonzalez, *Saddle point problems, Bott-Duffin inverses, abstract splines and oblique projections*, Linear Algebra and its Applications **457** (2014), 61–75.

[LW07] Yiqin Lin and Yimin Wei, *A note on constraint preconditioners for nonsymmetric saddle point problems*, Numerical Linear Algebra with Applications **14** (2007), no. 8, 659–664.

[LWW09] Xin-Guo Liu, Wei-Guo Wang, and Yi-Min Wei, *A generalization of the Bott-Duffin inverse and its applications*, Numer. Linear Algebra Appl. **16** (2009), no. 3, 173–196.

[Mey00] Carl Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000.

[MS09] Luis Merino and Evangelina Santos, *Álgebra lineal con métodos elementales*, Paraninfo, 2009.

[Muh16] Muhafzan, *Positive Stabilization of Linear Differential Algebraic Equation System*, International Journal of Differential Equations (2016).

[SKM17] Predrag S. Stanimirovic, Vasilios N. Katsikis, and Haifeng Ma, *Representations and properties of the W-Weighted Drazin inverse*, Linear Multilinear Algebra **65** (2017), no. 6, 1080–1096.

[Son13] Guang Jing Song, *Characterization of the W-weighted Drazin inverse over the quaternion skew field with applications*, Electron. J. Linear Algebra **26** (2013), 1–14.

[SRS15] Juana Sendra and J. Rafael Sendra, *Gröbner basis computation of Drazin inverses with multivariate rational function entries*, Appl. Math. Comput. **259** (2015), 450–459.

[SS16] J. Rafael Sendra and Juana Sendra, *Symbolic computation of Drazin inverses by specializations*, J. Comput. Appl. Math. **301** (2016), 201–212.

[TM10a] Paul A. Tipler and Gene Mosca, *Física para la ciencia y la tecnología*, vol. 2A: electricidad y magnetismo, Editorial Reverté, 2010.

[TM10b] ———, *Física para la ciencia y la tecnología*, vol. 1A: mecánica, Editorial Reverté, 2010.

[Wei02] Yimin Wei, *A characterization for the $W$-weighted Drazin inverse and a Cramer rule for the $W$-weighted Drazin inverse solution*, Appl. Math. Comput. **125** (2002), no. 2-3, 303–310.

[WS04] Guo-rong Wang and Jie Sun, *A Cramer rule for solution of the general restricted matrix equation*, Appl. Math. Comput. **154** (2004), no. 2, 415–422.

[WZ04] YM Wei and NM Zhang, *Further note on constraint preconditioning for nonsymmetric indefinite matrices*, Applied Mathematics and Computation **152** (2004), no. 1, 43–46.

[XSL15] Qingxiang Xu, Chuanning Song, and Xiaofang Liu, *General exact solutions of the second-order homogeneous algebraic differential equations*, Linear Multilinear Algebra **63** (2015), no. 2, 244–263.

[XW07] Hua Xiang and Yimin Wei, *On normwise structured backward errors for*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications **29** (2007), no. 3, 838–849.

[XWD06] Hua Xiang, Yimin Wei, and Huaian Diao, *Perturbation analysis of generalized saddle point systems*, Linear Algebra and its Applications **419** (2006), no. 1, 8–23.