Este artículo nace de la reflexión sobre la propia práctica docente con estudiantes adolescentes durante más de veinticinco años, sobre todo con estudiantes de 3º E.S.O., donde las dificultades en el paso de la aritmética al álgebra se hacen más notables.
En nuestra experiencia, la metodología cooperativa es una herramienta eficaz para ayudar a los estudiantes a dar este paso tan decisivo en su aprendizaje de las Matemáticas escolares.
Aportamos brevemente el punto de vista histórico, lo que facilita una perspectiva de lo que ha supuesto el inicio y desarrollo del álgebra. Analizamos las dificultades propias del álgebra y las que encuentran los estudiantes a la hora de emplear el lenguaje algebraico. Finalmente vemos cómo el Aprendizaje Cooperativo ayuda a los estudiantes a la adquisición y empleo del lenguaje algebraico y al aprendizaje del álgebra escolar.

PALABRAS CLAVE: *Dificultades en el álgebra escolar; Paso de aritmética a álgebra; Lenguaje algebraico; Aprendizaje cooperativo; Interacción entre iguales.*

Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿puede ayudar el Aprendizaje Cooperativo?

pp. 95-108

Paloma Gavilán Bouzas*

Universidad de Alcalá de Henares.

Introducción

Aunque la incorporación del álgebra al currículo escolar es relativamente reciente –se puede situar a finales del siglo pasado, para los niveles de secundaria, en los países de Europa y América– parece haber una tendencia en la forma de entender el álgebra escolar como la parte de las Matemáticas que trata de la simbolización de las relaciones numéricas, interpretándola como una *aritmética generalizada*. Este enfoque presenta algunos inconvenientes, ya que el álgebra no es sólo una generalización de la aritmética: aprender álgebra es algo más que hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética.

El álgebra supone un cambio en el pensamiento del estudiante. El paso de la aritmética al álgebra es un cambio cualitativo en la forma de pensar. Los enfoques aritmético y algebraico se diferencian en términos de estrategias globales de resolución de problemas. El enfoque aritmético de un problema matemático supone la descomposición del mismo en subproblemas más sencillos, hasta que la solución llega a imponerse por sí misma. Por el contrario, según Bodanskii (1991), el enfoque algebraico de un problema implica la identificación de las va-

* Departamento de Matemáticas. Campus Universitario. Ctra. Madrid-Barcelona, Km. 33,600.
Correo electrónico: paloma.gavilan@uah.es

✉ Artículo recibido el 9 de marzo de 2009 y aceptado el 28 de octubre de 2010.

riables intervinientes y de los parámetros para, posteriormente, buscar las relaciones entre ellos y conseguir expresarlas en términos algebraicos, dando lugar a una o varias ecuaciones que aún deben ser resueltas.

El presente artículo, en su primera parte, resume el proceso histórico de la aparición del álgebra, con sus dificultades y hallazgos; en este recorrido quedan patentes las dificultades que ha entrañado el salto cualitativo hacia el álgebra. En la segunda, se reseñan los problemas que encuentra el alumnado de secundaria al introducirse en el mundo del álgebra, que no se corresponden cronológicamente con las dificultades que se han ido superando a lo largo de los siglos, sin pretender establecer un paralelismo entre las dificultades que encuentra el alumnado y los conflictos que han ido apareciendo a lo largo del tiempo. Finalmente, se destaca el aprendizaje cooperativo como una metodología eficaz para facilitar a los estudiantes su tránsito de la aritmética al álgebra.

Desde una perspectiva histórica

Una vía poco trabajada habitualmente en nuestras aulas consiste en atender a una visión didáctica de la Historia de las Matemáticas. Ello puede proporcionar un conocimiento más contextualizado de los conceptos generales que se presentan al alumnado. La perspectiva histórica ayuda como elemento motivador y pone a disposición del alumnado y profesorado los procesos históricos de formación y adquisición de conceptos así como los obstáculos que a lo largo de la historia se han tenido que ir superando.

En este sentido es significativo que la simbolización algebraica, como actualmente la entendemos hoy y como aparece en los libros de texto, haya aparecido en la época del Renacimiento, es decir, unos treinta siglos después de que las primeras ideas algebraicas aparecieran en la cultura babilónica.

El paso de la aritmética al álgebra se produjo históricamente a través de la resolución de problemas, concretamente, tratando de buscar una solución generalizada a los problemas aritméticos de los clásicos griegos.

Es preciso conocer las etapas y aportaciones decisivas que se han hecho a lo largo de la historia para poder entender la dificultad que entrañó en su época la aceptación de los números negativos como soluciones de una ecuación, o la complejidad que supuso el proceso de simbolización de expresiones matemáticas.

En el desarrollo del álgebra, Nesselman (1811-1881) diferenció tres etapas: a) primitiva o retórica, en la que todo se escribía en lenguaje ordinario; se extiende desde los babilonios (1700 a.C.) hasta Diofanto (250 d.C.); b) etapa intermedia o sincopada, en la que se comenzó a introducir algunas abreviaturas como las que desarrolló el propio Diofanto; se prolonga hasta comienzos del siglo XVI; c) etapa simbólica o actual, donde aparece con todo su simbolismo, rigor y lenguaje formal; Vieta, en el siglo XVI, marca el inicio de esta etapa.

Si nos situamos en el siglo XV, a finales de la etapa sincopada, encontramos el primer libro de álgebra del Renacimiento, que fue escrito por el francés Nicolás Chuquet (1445-1488) bajo el título "Triparty en la science des nombres". Es un texto dividido en tres partes de las cuales la tercera es la principal; en ella trata del álgebra propiamente dicha. Aparece por primera vez un número negativo aislado en una ecuación y las operaciones de suma y resta aparecen representadas por las letras p y m respectivamente.

Avanzando en los siglos XV y XVI, vemos cómo las álgebras germánicas fueron imponiéndose en Europa con la publicación de numerosos libros de álgebra donde la nueva notación iba consolidándose. Se introducen los signos + y –, que desplazan a las letras p y m introducidas por Chuquet. Stifel (1487-1567) en su obra "Arithmetica integra" hace ya uso de las fracciones decimales y emplea nuestro actual símbolo de raíz; aunque la importancia de su obra se debe realmente al tratamiento de los números negativos, las raíces y las potencias. No obstante, no admite los números negativos como solución de ecuaciones, llamándoles "numeri absurdi".

Hasta la segunda mitad del siglo XIX, con el desarrollo del álgebra abstracta –momento en que esta disciplina llega a ser un objeto matemático en sí mismo– el álgebra se ocupó fundamentalmente de la resolución de ecuaciones. Basta recordar que fue en el siglo XVI, concretamente en 1545, cuando Cardano (1501-1576) publicó en su obra "Ars Magna" la solución general de la ecuación cúbica y cuártica (aunque como es sabido, no fue Cardano quien llegó a ninguna de ellas). Su publicación causó un impacto tan fuerte que ese año se considera como el comienzo del periodo moderno en las Matemáticas. Cardano, como buen discípulo de Al-Khowarizmi, usa poca sincopación y sigue la costumbre de razonar geométricamente. La resolución de la cúbica y la cuártica se puede considerar la mayor contribución al álgebra desde los babilonios, hace cuatro milenios. La importancia de la obra "Ars Magna" se centra en el estímulo que dio a la investigación algebraica, ya que enseguida se encaminó a la resolución de la quíntica. Pero tuvieron que pasar más de dos siglos y medio tratando de resolver este problema para finalmente concluir que es irresoluble.

Durante años, los números irracionales fueron aceptados sin dificultad, pero los negativos eran más cuestionados. Con la solución algebraica de la cúbica cambió la situación: había que aceptar los números imaginarios, incluso para la búsqueda de raíces reales (siempre que las tres raíces de una ecuación cúbica sean reales y no nulas, la fórmula de Cardano-Tartaglia conduce a raíces cuadradas de números negativos).

En esta situación entra en escena Bombelli (1526- 1573) quien, según él mismo dice, tuvo una "idea loca", imaginándose que los radicales podrían estar relacionados entre sí de la misma manera que lo están los radicandos (complejos conjugados cuya suma es un número real). Los libros IV y VI de Bombelli están repletos de problemas geométricos, resueltos de manera algebraica.

Viajando a Inglaterra nos encontramos con Robert Recode (1510-1558) quien introdujo el signo de igualdad que actualmente usamos; Recode consideró que no hay dos cosas que puedan ser más iguales que un par de paralelas. Este signo no triunfó hasta un año después.

Finalmente, fue el francés Franciscus Vieta (1540 -1603) quien llevó al álgebra a su tercera fase, exclusivamente simbólica, a pesar de no ser matemático profesional -era jurista y abogado y dedicaba sus ratos de ocio a las matemáticas-. En aritmética defendió rotundamente el uso de las fracciones decimales y el abandono de las sexagesimales; pero su mayor aportación la hizo en el campo del álgebra, dándose cuenta de que lo importante no era tratar casos particulares sino generales. Empleó letras mayúsculas latinas: vocales para las magnitudes no conocidas y consonantes para las conocidas. Por primera vez hay una distinción clara entre parámetro e incógnita, aunque sólo para los números positivos. Utilizó la raya de fracción, los paréntesis, corchetes, signos + y -, aunque aún quedaban residuos de etapas anteriores, como las potencias a las que siguió denominando con palabras. En su obra "Isagoge" distinguió el cálculo numérico concreto, "logística numerosa", del cálculo literal o "logística speciosa", trazando la línea divisoria entre aritmética –numerosa– y álgebra –speciosa–.

Los matemáticos de los siglos posteriores trataron de seguir el mismo camino que Cardano y encontrar la forma de resolver, también por radicales, las ecuaciones de grado superior a cuatro. No fue hasta principios del siglo XIX cuando Abel (1802-1829) en el mismo intento de resolver ecuaciones de grado superior a cuatro, llegó a demostrar que estas ecuaciones no son resolubles por radicales.

Posteriormente, Galois (1811-1832) estudió bajo qué condiciones son resolubles por radicales las ecuaciones polinómicas, convirtiendo la estructura de grupo en el centro de la teoría de ecuaciones algebraicas. Es así como se abre camino el álgebra abstracta o álgebra moderna, que será ampliamente desarrollada por la escuela inglesa y, en la segunda mitad del XIX, también por la escuela alemana. El estudio de esta nueva álgebra escapa a todas luces de los contenidos desarrollados en el álgebra escolar, que se centra, como lo ha hecho el álgebra a lo largo de tantos siglos, en la resolución de ecuaciones.

La consolidación del lenguaje algebraico ha supuesto un largo y difícil recorrido. Con esta perspectiva de fondo, vamos a destacar las dificultades que encuentra el alumnado de la ESO cuando se inicia en su estudio.

Dificultades propias del aprendizaje del álgebra

El rechazo hacia las matemáticas que manifiestan muchos estudiantes, nace o se agrava precisamente cuando se inician en el álgebra. Los resultados académicos que se derivan de las dificultades propias del álgebra, son desalentadores. Precisamente en los niveles en los que se inicia el estudio más formal del álgebra, es donde se encuentra mayor fracaso escolar (Grupo Azarquiel, 1991). Muchos estudiantes manifiestan sentimientos de tensión y miedo, que pueden estar asociados al desfase existente entre lo que realmente pueden hacer y lo que se les pide que hagan. Los procesos cognitivos que pueden poner en funcionamiento están relacionados con los estadios generales de su desarrollo intelectual; cada estadio se caracteriza por un modo particular de razonamiento que les posibilita realizar determinado tipo de tareas algebraicas. Cuando la tarea propuesta no se corresponde con el desarrollo intelectual, surgen los problemas tanto en la comprensión como en los sentimientos y actitudes hacia las Matemáticas. Desde una perspectiva psicológica, aparece, en los trabajos desarrollados por Piaget e Inhelder (1984) y posteriormente por Collis (1975a, 1975b, 1980), la relación que existe entre el desarrollo cognitivo y el aprendizaje del álgebra. Collis (1980) identifica cinco estadios en el proceso evolutivo, que reciben el nombre de: a) preoperatorio (cuatro a seis años); b) temprano de operaciones concretas (siete a nueve años); c) final de operaciones concretas (diez a doce años); d) de generalización concreta o formal temprano (trece a quince años) y e) de operaciones formales (dieciséis años en adelante). Y analiza cómo actúan los estudiantes en distintas operaciones algebraicas, como la sustitución de letra por números, la resolución de ecuaciones y la comprensión del álgebra abstracta.

En cuanto a la sustitución de letras por números, Collis (1975b) descubrió que la capacidad para trabajar con letras dependía de lo que los estudiantes consideran como real. En el estadio d) los estudiantes tenían un concepto de número generalizado, en que una letra tenía entidad propia y le atribuían las mismas propiedades que a cualquier número; sólo en el último estadio podían contemplar la letra como variable. En cuanto a la resolución de ecuaciones, es en los dos últimos estadios cuando la noción de inversa no constituye un problema. Y en relación con el álgebra abstracta, en el estadio d) no manifestaban un dominio suficiente como para controlar las operaciones pedidas; sin embargo, en el último estadio ya sí eran capaces de operar correctamente en el sistema definido.

Los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra han sido también estudiados por autores como Kieran y Filloy (1989), Puig (2003), Filloy, Puig y Rojano (2008), tratando de identificar los factores más significativos que atañen a este proceso.

La mayor parte de los símbolos empleados en el álgebra ya han sido utilizados por los estudiantes en la aritmética, por lo que tienen previamente asignado un significado que puede entrar en conflicto con el que se les atribuye ahora. Un interesante estudio de investigación para descubrir los errores más comunes que cometen los estudiantes en su aprendizaje del álgebra escolar, es el llevado a cabo por el grupo de álgebra del proyecto *Strategies and Errors in Scondary Mathematics* (S.E.S.M.) en el Reino Unido entre 1980 y 1983 (Booth, 1984). Los estudiantes que participaron oscilaban entre trece y dieciséis años. Las conclusiones más relevantes ponen de manifiesto que los distintos tipos de errores se relacionan con: a) la naturaleza y significado de números y letras; b) la naturaleza de las respuestas en álgebra; c) la comprensión de la aritmética; d) el uso inapropiado de fórmulas y reglas de procedimientos. Si desgranamos estos apartados la luz de los trabajos anteriormente citados (Pimm, 1990;

Puig, 2003; y Filloy, Puig y Rojano, 2008), encontramos las siguientes dificultades:

– Las diferentes interpretaciones del uso de las letras (a veces consideradas como incógnitas, otras como variables o como número generalizado). Küchemann, (1981) describe seis categorías diferentes de interpretación y uso de las letras: letras evaluadas, letras ignoradas, letras como objeto, letras como incógnita específica, letras generalizando números, letras como variables. Es evidente la gran dificultad que entraña entender cada uno de estos conceptos y saber en cada caso cómo hay que interpretar las letras que participan en una expresión.

– Por otro lado, el mismo concepto de variable entraña una gran dificultad. Adquirir este concepto supone la integración de dos procesos: generalización, que permite pasar de situaciones concretas a aspectos comunes en todas las situaciones; y simbolización, que permite expresar de forma abreviada lo que tienen en común todas las situaciones. Ambos, generalización y simbolización, son difíciles de asimilar por los estudiantes que, hasta el momento de iniciarse en el álgebra, han trabajado con números concretos.

– Los signos de operación también adquieren en el álgebra un significado diferente. Mientras que en aritmética indican la acción que se tiene que realizar para obtener un resultado numérico, en álgebra son representaciones que indican operaciones que no siempre se tienen que realizar. En ocasiones, ni siquiera es posible hacerlas.

– Del mismo modo, el signo igual adquiere diferentes significados según el contexto en que aparece. Mientras en aritmética el signo igual indica que se ha hecho una operación y tenemos su resultado, es decir, su interpretación es unidireccional, en álgebra es bidireccional; es un símbolo de equivalencia entre lo que hay a su derecha y a su izquierda. Además sirve para indicar restricciones, como en el caso de las ecuaciones. El signo igual aparece en distintos contextos algebraicos refiriéndose a conceptos diferentes como ecuaciones, identidades, fórmulas o funciones. Estos diferentes usos que se hace del signo igual en el lenguaje algebraico añaden nuevas dificultades para los estudiantes.

– En un paso posterior nos encontramos con las dificultades que aparecen a la hora de codificar el lenguaje ordinario para expresarlo en lenguaje matemático. En ocasiones son capaces de resolver problemas de forma verbal, pero no saben escribir ni resolver las ecuaciones que reflejan las relaciones entre los datos y la incógnita.

– El planteamiento y resolución de ecuaciones se convierte en la parte central del álgebra escolar (al igual que ocurrió durante tantos siglos de historia). En la resolución de ecuaciones se enfrentan en primer lugar con un nuevo significado del signo igual, que coexiste con el significado puramente aritmético; en segundo, con la relación entre una operación y su inversa a la hora de transponer términos; y en tercero, con los obstáculos provenientes del manejo del signo menos y sus diferentes significados: como indicativo del signo de una cantidad o como operación indicada, ante la cual muchas veces no ven la necesidad de emplear paréntesis por atribuirle las mismas propiedades que al signo más. Además, continúan las dificultades aritméticas relacionadas con el uso de los paréntesis y la jerarquía de las operaciones.

– Si pasamos a la resolución de sistemas de ecuaciones, nos encontramos con la dificultad que supone la necesidad de aceptar informaciones independientes, cada una de las cuales viene representada en una ecuación del sistema; el proceso de resolución conlleva la comprensión del concepto de equivalencia, al transformar un sistema en otro más sencillo. En el paso que se da de la resolución de ecuaciones a la de sistemas, aparece una nueva dificultad: las incógnitas se perciben como valores particulares de unas variables sometidas a más de una condición.

Nuestra experiencia de casi treinta años de docencia nos muestra que muchos estudiantes de ESO, en algún momento, inventan nuevos significados personales que sustituyen a los auténticos, y tratan de operar las expresiones algebraicas como lo harían con las aritméticas, y en caso de no ser posible, simplifican erróneamente las operaciones haciendo, por ejemplo, $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, o cualquier otra simplificación desafortunada. Incluso los más aventajados pueden entender que el álgebra es algo así como una máquina de cálculo; pero difícilmente dan el paso de considerar el álgebra como una herramienta capaz de expresar relaciones estructurales.

Dificultades en el uso del lenguaje algebraico

A lo largo de las últimas décadas, está produciéndose un giro en la educación matemática que lleva a entender el álgebra como el lenguaje básico de las Matemáticas, enfatizándose los aspectos semánticos y sintácticos (Pimm, 1990; Kieran, 1989). En el nivel semántico, el conocimiento del significado de los símbolos, sus propiedades y relaciones es lo que les va a permitir distinguir entre las transformaciones permitidas y las que no los son; en el nivel sintáctico, existe un conjunto de reglas manipulativas que pueden operar, simplificando expresiones, sin atender al significado concreto del objeto manipulado.

Tradicionalmente se ha puesto el énfasis en salvar las dificultades que provienen del nivel sintáctico, ejercitando a los estudiantes en el trabajo y operaciones con símbolos, prescindiendo de su significado. En la década de los 80 hay una tendencia a potenciar los aspectos semánticos (Filloy y Rojano, 1988; Filloy, 1991; Bell, 1981; Kieran, 1989, 1992), acentuando la necesidad de presentar diferentes contextos como modelos de una misma situación para favorecer la traslación de unos a otros y conseguir que los estudiantes se den cuenta de que las situaciones concretas son casos particulares de una misma situación general. De este modo, el tratamiento sintáctico sería un paso posterior, para completar el semántico.

Parte de los problemas se deben a problemas propios del uso y comprensión de nuestro lenguaje; dificultad que se agrava al emplear palabras que en el contexto matemático tienen diferente significado que en el lenguaje habitual, como raíz, potencia, primo, diferencia, matriz, etc.; al tiempo que se crean otras, específicamente matemáticas, como hipotenusa, coeficiente, polinomio, isósceles, etc. Todo ello acentúa las dificultades en la adquisición del lenguaje algebraico, que a continuación se exponen:

– La dificultad de percibir las estructuras subyacentes a las expresiones algebraicas. Kieran (1989) reconoce dos tipos de estructuras, superficial, que se refiere a la forma de la expresión algebraica (la ordenación de sus términos y jerarquía de sus operaciones), y sistémica, que se refiere a las propiedades de sus operaciones. Los estudiantes, en general, tienen dificultades en la percepción de estos dos tipos de estructuras.

Mientras en el lenguaje ordinario se pueden comunicar significados sin necesidad de una precisión sintáctica, el lenguaje algebraico es preciso, obedece a unas reglas exactas y carece de significado si no se interpretan rigurosamente sus símbolos. Con él no se pueden comunicar emociones, sentimientos, juicios o valores. Es un lenguaje nuevo que permite manejar como conocidas las cosas desconocidas. La potencia del lenguaje algebraico frente al ordinario es su capacidad para expresar lo general empleando símbolos. Y esa es precisamente su dificultad.

Muchas veces el propio lenguaje de los docentes dificulta la construcción adecuada del significado algebraico en el alumnado. Cuando decimos, por ejemplo, “lo que está sumando pasa restando”, damos a entender que efectivamente desaparece de un miembro de la ecuación y sin saber cómo ni por qué, aparece en el otro. De manera que es muy posible que incluso alumnos que son capaces de resolver adecuadamente complicadas ecuaciones matemáticas, no sepan a qué se deben los pasos que dan cuando van buscando la solución y más bien piensen que sólo se trata de aplicar las reglas que tantas veces han oído en clase. Prueba de ello es la dificultad que tienen en general para mostrar que una solución es incorrecta. El camino preferido consiste en volver a resolver la ecuación dada, sin darse cuenta que basta con sustituir la solución en la ecuación para que, si es incorrecta, dé lugar a valores diferentes en la derecha y en la izquierda.

– La tarea de codificar un mensaje dado en lenguaje coloquial implica procesos más complejos que los involucrados en una simple traducción. El lenguaje matemático trata de expresar estructuras por medios exclusivamente formales. Ello implica, como procesos intermedios, identificar las variables que intervienen, los parámetros, las incógnitas, y comprender las relaciones que existen entre todas ellas; asimismo, supone el manejo de conceptos tales como la proporcionalidad o la igualdad, para poder expresar, respetando las reglas sintácticas del álgebra, el mensaje codificado. Mención especial requiere la resolución de los llamados "problemas de enunciado"; en ellos se enuncia una situación en la que aparecen varios datos y se pide el hallazgo de algún valor desconocido. Resolver este tipo de problemas requiere la conjunción de numerosas habilidades matemáticas como establecer relaciones entre datos e incógnitas, emplear adecuadamente los signos, traducir el enunciado a una ecuación o sistema de ecuaciones, resolverlo, etc. En este sentido, según Blais (1988), los problemas de enunciado siempre esconden igualdades, por lo que su lectura inicial debe provocar una abstracción. El énfasis debemos ponerlo no en que los estudiantes lean cuidadosamente o de forma literal, sino que lean de una forma tal que después ignoren lo accesorio, filtrando los detalles que contiene la esencia del problema.

Para poder resolver problemas de enunciado es preciso haber asumido una forma de pensar basada en la comprensión del significado de las operaciones y las consecuencias que tienen sobre los números que actúan, así como el significado del signo igual en el contexto de una ecuación. Las dificultades en la transformación de un problema de enunciado a una ecuación provienen, por un lado, de la interpretación de las propias expresiones algebraicas y, por otro, de la búsqueda de una expresión algebraica adecuada que represente el contenido del problema, para lo cual es necesario un conocimiento adecuado de la estructura y sintaxis algebraica. Para que los estudiantes puedan aceptar como resultado de este proceso una expresión con operaciones indicadas, pero sin efectuar, tienen que haber superado la fase de las operaciones aritméticas, para asumir el significado de las operaciones algebraicas, que representan la simbolización de un proceso. Por ello es aconsejable que realicen numerosas actividades de traducción antes de enfrentarse con la resolución de estos problemas.

– Las Matemáticas tienen un vocabulario y una sintaxis propia que, en el caso del álgebra, conduce a numerosas equivocaciones al tratar de aplicar los mismos significados que en la aritmética. Así es frecuente observar entre los estudiantes la consideración $4x - x = 4$, error que claramente proviene de una desafortunada interpretación de la expresión $4x - x$.

El estudio de la enseñanza y aprendizaje del álgebra ha ocupado un lugar preferente entre los trabajos de investigación didáctica. La comunidad internacional, en la década de los noventa, dio algunas recomendaciones para hacer más significativo el aprendizaje del álgebra, como son la resolución de ecuaciones dentro de un contexto concreto, la generalización de secuencias numéricas y modelos geométricos, y la resolución de problemas (Bednarz y otros, 1996).

Para ayudar a los estudiantes a usar correctamente este lenguaje, son decisiones importantes tanto los materiales didácticos empleados como el tipo de actividades que se planteen y, sobre todo, la metodología. En la superación de los errores cometidos es necesario que el estudiante asuma un papel activo viéndose involucrado en un conflicto a través del cual sustituya sus concepciones erróneas por otras adecuadas, enfrentándose a la contradicción que existe entre ambas. El significado se alcanza cuando se pone en contacto la nueva comprensión con los esquemas previos y, de este contacto, surgen nuevos esquemas modificados y ampliados, que pueden reestructurarse dando lugar a otros esquemas de orden superior. La construcción del conocimiento es un proceso de cambio y de reestructuración del modelo conceptual, no de acumulación (Ausubel, 1977). Un modo particularmente efectivo para superar estas dificultades consiste en generar discusiones en clase donde se muestren los conceptos falsos de los estudiantes y traten de superarlos mediante sus propias interacciones (Socas, y otros, 1991: 110). Fomentar la interacción entre los estudiantes, de modo que las dificultades personales se expongan y se debatan en pequeños grupos, así como los significados personales, puede ayudar, atendiendo a la teoría de Vygotsky (1988) sobre la zona de desarrollo próximo, a paliar las dificultades anteriormente señaladas. Así, aparece el Aprendizaje Cooperativo como un método particularmente interesante para que se generen este tipo de discusiones enriquecedoras entre los estudiantes, entendiendo que el aprendizaje es un proceso de construcción con una clara dimensión social.

El Aprendizaje Cooperativo: una ayuda eficaz para superar las dificultades

En una misma aula conviven los estudiantes que ya han adquirido ciertas formas de pensamiento concreto y se han iniciado en el pensamiento formal con otros estudiantes que están en una banda intermedia y necesitan continuar con el esfuerzo de consolidar sus esquemas mentales para dar el paso a esta nueva forma de pensamiento y poder acceder a los contenidos algebraicos; y aquellos cuyos esquemas mentales no son capaces, de momento, de soportar el paso al pensamiento formal.

El Aprendizaje Cooperativo, basado en el trabajo en pequeños grupos, aporta elementos que nos parecen muy valiosos para el fin que perseguimos. La correcta estructuración de los cinco pilares en los que se sustenta esta metodología, que a continuación reseñamos, facilita a todos los estudiantes un importante soporte para aprender (Johnson y Johnson, 1994):

– Interdependencia positiva: está asegurada cuando todos los miembros del grupo son conscientes de que no pueden alcanzar el éxito a menos que también lo alcancen sus compañeros. Del esfuerzo que realiza cada persona se beneficia ella misma y los demás. El mero hecho de pertenecer a un grupo no garantiza el aprendizaje de sus miembros. Es necesario saber que el trabajo individual va a afectar al éxito o fracaso de los demás compañeros del grupo, provocando esa doble responsabilidad: individual y de grupo.

Para lograrlo es necesario; a) asignar al grupo una tarea clara y concreta que debe ser realizada entre todos sus componentes: tarea interdependiente; b) asegurar que nadie puede alcanzar la meta a menos que todos los componentes la alcancen: meta interdependiente; c) garantizar una recompensa para todos los miembros del grupo, que se verá modificada por la calidad de sus esfuerzos individuales. Con ello conseguimos que se den cuenta que todos sus esfuerzos son necesarios para el éxito del grupo: recompensa interdependiente.

Cuanto mejor esté establecida la interdependencia positiva con más facilidad se producirá el conflicto cognitivo. Esta situación les lleva a la búsqueda activa de información, a la necesidad de razonar y justificar sus posturas, al cuestionamiento de lo ya sabido, a la reconceptualización del conocimiento. Como consecuencia, aumenta su dominio y retención de la materia discutida y se observa el empleo de estrategias de razonamiento de nivel superior (Gavilán, 2001).

– Interacción que promociona: se caracteriza por los esfuerzos que hace cada persona para que las demás alcancen la meta prevista. La finalidad de las interacciones entre los estudiantes es mejorar su aprendizaje. Para ello deben dar y recibir ayuda y mantener actitudes de confianza hacia los demás. Sólo apoyándose entre ellos podrán conseguir el objetivo que tienen como grupo.

– Doble responsabilidad: individual y grupal. El grupo es una plataforma que les va a facilitar la construcción de su aprendizaje, del que son los únicos responsables. En el aprendizaje cooperativo además de asumir esta responsabilidad, asumen la del aprendizaje de los demás compañeros de su grupo. Deben aprender juntos para poder actuar después individualmente.

– Aprendizaje de habilidades sociales: para el buen funcionamiento del grupo cooperativo es necesario enseñar al alumnado determinadas habilidades sociales, como las habilidades de comunicación, de confianza, de liderazgo, de resolución de conflictos.

– Revisión del proceso del grupo: periódicamente es necesario ofrecer diferentes cuestionarios a los estudiantes para que, de forma individual, reflexionen sobre su actitud y trabajo en su grupo. Las conclusiones de las investigaciones llevadas a cabo por Stuart Yager sobre las revisiones de grupo indican que los resultados académicos y los no académicos mejoran en los grupos en que se discute el funcionamiento y la efectividad de sus miembros (Johnson y Johnson, 1994).

Los resultados que obtienen los estudiantes que trabajan cooperativamente, han sido extensamente estudiados por distintos autores (Kagan, 1985; Slavin, 1980; 1983a y b; Sharan y Shaulov, 1990), siendo, probablemente, el más completo, el trabajo desarrollado en el Cooperative Learning Center de Minessota por los hermanos Johnson, Maruyama, Nelson y Skon entre otros, que consistió en la realización de cinco meta-análisis revisando los resultados arrojados por los trabajos de investigación previos. Reseñamos aquí los más significativos y que son avalados por nuestra experiencia de aula (Gavilán, 2002b, 2004):

1. Cuando los estudiantes trabajan cooperativamente, en pequeños grupos heterogéneos, se encuentran con la ayuda facilitada por sus compañeros más aventajados, lo que les proporciona una indudable situación de andamiaje (Bruner, 1986). La ayuda prestada por estudiantes que están cercanos a su Zona de Desarrollo Próximo (en términos de Vigotsky), y recientemente acaban de superar las dificultades con las que ellos se encuentran, les hace más asequibles los contenidos.

2. Numerosos autores han tratado el importante papel del conflicto sociocognitivo y del lenguaje en el desarrollo intelectual (Vygotsky, 1977; Luria y otros, 1973; Levina, 1981; Webb, 1984; Palincsar y Brown, 1988; Perret-Clermont, 1984). El contraste con los demás y la necesidad de llegar a acuerdos provoca inevitables discusiones y conflictos sociocognitivos cuya resolución mejora el aprendizaje. La oportunidad que brinda el método para expresar y defender las propias ideas y opiniones y contrastarlas con las de las demás personas del grupo, viendo así cómo piensan y razonan sus compañeros, hace que escuchen los pensamientos ajenos, que son formulados en voz alta, ampliando así su abanico de posibilidades al conocer las estrategias que emplean otras personas y la forma que tienen de resolver sus dificultades en este campo. Las repeticiones de una misma cuestión desde distintas perspectivas, hasta que las dudas en torno a ella desaparecen, facilitan la comprensión y la retención de lo que se aprende. En la justificación y verbalización de las respuestas encuentran pistas de solución para sus propios problemas. De este modo los estudiantes se ven impulsados a avanzar en su forma de pensar y se van aproximando al pensamiento abstracto.

El conflicto creado por las interacciones sociales aparece así como un lugar privilegiado de desarrollo intelectual, que será tanto más fructífero en la medida en que los niveles de dominio de lo tratado guarden un óptimo grado de divergencia entre los participantes (Gavilán, 2009).

3. Los estudiantes, cuando trabajan cooperativamente, asumen un papel protagonista, tanto en lo que se refiere a su aprendizaje como a la gestión del trabajo del grupo. Desempeñan distintos papeles en el grupo, entre los que podemos destacar los siguientes: a) iniciar el debate o análisis, aunque las ideas aportadas no resulten siempre adecuadas; b) aportar distintas ideas y contrastarlas; c) cuestionar y debatir las ideas aportadas; d) sintetizar las ideas surgidas de los debates; e) poner en práctica y ejecutar las decisiones. Este protagonismo que asumen provoca una implicación más intensa en su aprendizaje, dando lugar a una mejor comprensión de los nuevos conceptos algebraicos.

4. Cuando trabajan cooperativamente, los estudiantes perciben que, cuando necesitan ayuda, ésta siempre está a mano y llega en el momento en que la solicitan, pudiendo aplicarla a continuación en el contexto que están trabajando.

5. Concretamente, cuando se trabajan problemas algebraicos conocidos como "problemas de enunciado", los estudiantes pasan por distintos momentos o episodios que a continuación relatamos, confiriendo a la resolución de problemas una estructura típica, diferente de la que se produce cuando los estudiantes resuelven los mismos problemas en otro tipo de enseñanza (Gavilán, 2002a).

Cuando inician una nueva tarea se producen numerosos episodios de adquisición y evaluación de la comprensión, dirigidos por uno de los componentes del grupo, el que asume el papel de líder de la gestión del grupo. A medida que avanzan, se van produciendo numerosos episodios de petición de ayuda, seguidos de otros de adquisición. Ante una petición de ayuda bien formulada, sigue una respuesta –episodio de adquisición– donde se facilita la información solicitada. Avanzando más en la tarea, aumenta el número de episodios de planificación, ejecución y evaluación, pero no siguen una trayectoria lineal. El avance hacia la meta en el proceso de resolución de un problema se ajusta más a un modelo que podríamos llamar espiral, donde recorren varias veces distintas secuencias de estrategias en un avance progresivo. Así, tras una secuencia repetida de episodios de adquisición y evaluación de la comprensión, puede aparecer la reiteración de otra, formada por episodios de petición de ayuda y adquisición. A continuación, episodios de planificación, ejecución, evaluación y evaluación local y, de nuevo y más próximos a la meta, se vuelven a repetir las secuencias iniciales. Este modelo espiral se complementa con otro que podemos llamar de "dientes de sierra", donde se producen avances y retrocesos continuos, en una línea de progreso hacia la solución del problema. Los episodios de evaluación global no son frecuentes. Las evaluaciones locales sí ocurren a menudo en esas secuencias espirales, donde se detienen a valorar cada resultado parcial.

6. Por otro lado, la facilidad para saber si los resultados están bien o no, contrastándolos con los de los compañeros y detectando entre todos los fallos de cada uno, hace que los errores sean visibles en el momento en que se producen y, por lo tanto, puedan ser corregidos.

7. El tiempo en que permanecen activos, implicados en su aprendizaje, analizando, explorando, debatiendo, es comparativamente superior al tiempo de escucha (activa o pasiva) que emplean en otros tipos de aprendizaje por lo que el aprovechamiento del tiempo real de aprendizaje de las clases cooperativas puede considerarse superior.

8. La resolución cooperativa de problemas de álgebra beneficia tanto a los estudiantes más aventajados como a los que tienen más dificultades. Éstos, evidentemente, reciben una ayuda a su nivel, expresada con su propio lenguaje y dada por un compañero que ha pasado recientemente por unas dificultades similares; al aprender cooperativamente, aprenden de los ejemplos que los demás proporcionan, apareciendo ante un mismo problema distintos puntos de vista; por su parte, los estudiantes más aventajados tienen que verbalizar lo que saben, justificándolo y afianzando y profundizando así en sus conocimientos; de este modo, aumenta también su retención de la materia. La ventaja que supone recibir explicaciones de otros compañeros, en virtud del lenguaje común empleado hace que, algunos estudiantes consideren que sus compañeros más aventajados les traducen a su propio idioma lo que el profesor o el libro de texto dicen y ellos no entienden (Gavilán, 2003).

El Aprendizaje Cooperativo supone una ayuda para superar las dificultades con que gran parte de nuestro alumnado se enfrenta cuando se inicia en el estudio del álgebra escolar. Se trata de una poderosa herramienta a disposición del profesorado con la que podemos facilitar el aprendizaje de nuestros estudiantes y ayudarles a avanzar con mayor rapidez, a consolidar unos esquemas mentales más sólidos y maduros con los que poder afrontar las dificultades que supone el paso de la aritmética al álgebra.

REFERENCIAS

AUSUBEL, D. P. (1977). The Facilitation of Meaningful Verbal Learning in the Classroom, *Educational Psychologist*, 12: 162-178.

BEDNARZ, N.; KIERAN, C y LEE, L. (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

BELL, A. (1981). *Diagnostic Teaching. Teaching For Long Term Learning.* Shell Center for Mathematical Education: University of Nottingham.

BLAIS, D. M. (1988). Constructivism a Theoretical Revolution for Algebra. *Mathematics Teacher* 81(8), 624-631.

BODANSKII, F. (1991). The Formation of an Algebraic Method of Problem-solving in Primary School Children. En V. Davidov (Ed.). *Soviet Studies in Mathematics Education: Psychological Abilities of Primary School Children in Learning Mathematics.* Reston: N.C.T.M.

BOOTH, L. R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors.* Londres: Nfer-Nelson

BRUNER, J. (1986). *Realidad mental y mundos posibles.* Barcelona: Gedisa.

COLLIS, K. F. (1975a). A Study of Concrete and Formal Operations in School Mathematics: a Piagetian Viewpoint. *A.C.E.R. Research Series*, 95, Melbourne.

– (1975b). *The Development of Formal Reasoning.* University of Newcastle, Australia.

– (1980). School Mathematics and Stages of Development. En S. Modgil, y C. Modgil (Eds.). *Towards an Theory of Psychological development.* NFER, Windsor. Traducido al castellano en Infancia y Aprendizaje, 1982, 19-20: 39-74.

FILLOY, E. (1991). Cognitive Tendencies and Abstraction Processes in Algebra Learning. En F. Furinghetti (ed.). *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2.

FILLOY, E. y ROJANO, T. (1988). Obstructions to the Acquisition of Elemental Algebraic Concepts and Teaching Strategies. En S. Damarin (ed.). *Proceeding of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1.

FILLOY, E.; PUIG, L. y ROJANO, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias* 26(3), 327-340.

GAVILÁN, P. (2001). *Aprendizaje Cooperativo en Matemáticas en el Nivel de Educación Secundaria Obligatoria. Proceso Global de Aprendizaje.* Tesis doctoral, UNED.

- (2002a). Comparación de modelos de resolución de problemas en una clase tradicional y en una clase cooperativa. Una experiencia con estudiantes de 3º de ESO. *UNO,* 31, 34-43.

- (2002b). Repercusión del aprendizaje cooperativo sobre el rendimiento y desarrollo personal y social de los estudiantes. *Revista de Ciencias de la Educación,* 192, 505-521.

- (2003). Ventajas e inconvenientes de trabajar cooperativamente. Una experiencia en tercero de E.S.O. *Aula,* 121, 66-69.

- (2004). *Materiales 12-16 para educación secundaria: Álgebra en secundaria. Trabajo cooperativo en matemáticas.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia: Ed. Narcea.

- (2009). Aprendizaje cooperativo. Papel del conflicto sociocognitivo en el desarrollo intelectual. Consecuencias pedagógicas. *Revista española de pedagogía* 242, 131-148.

GRUPO AZARQUIEL (1991). *Ideas y actividades para enseñar algebra.* Madrid: Síntesis.

JOHNSON, D. W. y JOHNSON, R. (1994). *Learning together and alone: Cooperation, competition and individualization.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall.

KAGAN, S. (1985), Dimensions of Cooperative Classroom Structures. En R. E. Slavin; S. Sharan; S. Kagan; R. Hertz-Lazarowitz; C. Webb y R. Schmuck, *Learning to Cooperate, Cooperating to Learn*, New York, Plenum Press.

KIERAN, C. (1989). The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra.* NCTM.

– (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En D. A. Grows (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan Publishing Company.

KIERAN, C y FILLOY, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias* 3 (7), 229-240.

KÜCHEMANN, D. E. (1981). Algebra. En K. M. Hart (Ed.). *Children´s Understading of Mathematics: 11-16.* Londres: John Murray.

LEVINA, R. E. (1981). L. S. Vygotski´s Ideas About the Planning Function of Speech in Children. En J. V. Wertsch (ed.). *The Concept of Activity in Soviet Psychology*. Nueva York: Sharpe.

LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. y VIGOTSKY, L. S. (1973). *Psicología y pedagogía*. Madrid: Akal.

PALINCSAR, A. S. y BROWN, A. L. (1988). Teaching and Prating Thinking Skills to Promote Comprehension in the Context of Group Problem Solving. *Remedial and Special Education* 9(1), 35-39.

PERRET-CLERMONT, A. N. (1984). *La construcción de la inteligencia en la interacción social. Aprendiendo entre los compañeros*. Madrid: Visor Libros.

PIAGET, J.; INHELDER, B. (1984). *Psicología del niño*. Madrid: Ediciones Morata.

PIMM, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: MEC, Morata.

PUIG, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro y otros (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 97-108. Granada: Universidad de Granada.

SHARAN, S. y SHAULOV, A. (1990). Cooperative Learning, Motivation to Learn, and Academic Achievement. En S. Sharan (ed.), *Cooperative Learning*. Theory and Research, New York: Praeger Publishers.

SLAVIN, R. E. (1980). Cooperative Learning. *Review of Educational Research*, 50(2): 315-342.

– (1983a), *Cooperative Learning*. New York: Longman.

– (1983b). When Does Cooperative Learning Increase Students Achievement? En *Psychological Bulletin*, 49: 429-455.

SOCAS, M.; CAMACHO, M.; PALAREA, M. y HERNÁNDEZ J. (1991). *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Síntesis.

VYGOTSKY, L. S. (1977). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires: La Pléyade.

– (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. México: Grijalbo, (original, 1930).

WEBB, N. (1984). Interacción entre estudiantes y aprendizaje en pequeños grupos. *Infancia y aprendizaje*, 27/28, 159-183.

ABSTRACT

Difficulties in the transition from arithmetic to school algebra: Cooperative Learning can help?

This article comes from the reflection on the personal practice teaching with teenage students for over twenty-five years, especially with students from 3rd year ESO, where difficulties in the transition from arithmetic to algebra become more noticeable.
In our experience, a cooperative method is an effective tool in helping students to make this decisive step in their learning of scholastic mathematics.
In an attempt to help to gain perspective, we briefly show the historical point of view of the start and development of algebra. We analyze the inherent difficulties of algebra that students discover when learning to use algebraic language. And finally we see how Cooperative Learning helps students acquire and use algebraic language and learn scholastic algebra.

Key Words: *Difficulties in school algebra; Step arithmetic to algebra; Algebraic language; Cooperative learning; Peer interaction.*

RÉSUMÉ

Les difficultés de la transition de l'arithmétique à l'algèbre l'école: l'apprentissage coopératif peut aider?

Cet article naît de la réflexion sur la propre pratique enseignante avec des adolescents étudiants, pendant plus de vingt-cinq ans, surtout avec étudiants de *3º E.S.O.*, où les difficultés dans le pas de l'arithmétique à l'algèbre deviennent plus remarquables.
Dans notre expérience, la *méthodologie coopérative* est un outil efficace pour aider les étudiants à donner ce pas si décisif dans son apprentissage des Mathématiques scolaires.
Nous apportons brièvement le point de vue historique, ce qui facilite une perspective de ce qui a supposé le commencement et un développement de l'algèbre. Nous analysons les propres difficultés de l'algèbre et celles que les étudiants trouvent à l'heure d'employer le langage algébrique. Nous voyons finalement comment *l'Apprentissage Coopératif* aide les étudiants à l'acquisition et l'emploi du langage algébrique et à l'apprentissage de l'algèbre scolaire.

Mots-Clé: *Difficultés dans l'algèbre scolaire; Pas de l´arithmétique à l´algèbre; Langage algébrique; Apprentissage coopératif; Interaction entre égaux.*