

DESARROLLO DE UNA HERRAMIENTA NUMERICA BASADA EN TECNICAS DE VOLUMENES FINITOS PARA EL ESTUDIO DE FLUJOS EN UN AMPLIO RANGO DE NUMEROS DE MACH.

AUTORES: Gil Baez, P.; Chacartegui Ramírez.R.; Carvajal Trujillo, E.; Santana Hidalgo, A.; Muñoz Blanco, A.;

Grupo de Motores Térmicos. Dpto. Ingeniería Energética y Mecánica de fluidos
Escuela Superior de Ingenieros (Universidad de Sevilla)
Avda Camino de los descubrimientos , s/n 41092 SEVILLA
TLF: 95 448 72 42 / FAX: 95 448 72 43 / e-mail: ricardo@esi.us.es

RESUMEN

El presente trabajo describe la herramienta numérica para el estudio de problemas fluido-mecánicos bidimensionales, basada en técnicas de discretización mediante volúmenes finitos.

Esta herramienta plantea las ecuaciones de Navier-Stokes, sin simplificaciones en sus términos, buscando la máxima generalidad de la misma, permitiendo la posibilidad de abarcar un amplio abanico de problemas de muy diversa naturaleza.

Se presentan las técnicas y criterios empleados para el desarrollo de la herramienta, así como su validación con diferentes problemas fluido-mecánicos, relacionados con distintas características de flujo, mostrando la versatilidad del mismo.

Palabras clave: CFD, Volúmenes finitos, método PISO, método SIMPLE

1. INTRODUCCION

Siguiendo una línea de trabajo dedicada al estudio de fenómenos fluidomecánicos en el campo de las máquinas y motores térmicos, tales como son estudios de cascadas de álabes o flujos en conductos de admisión y escape en MCIA, se presenta el desarrollo de una aplicación para el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes en dominios bidimensionales y su validación con ejemplos clásicos en la bibliografía.

Se ha realizado una herramienta lo más genérica posible con objeto de su aplicación a estudio de flujos compresibles, viscosos o no, subsónicos, transónicos o supersónicos.

2. MODELIZACIÓN DEL PROBLEMA

Las ecuaciones que modelan el problema son las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho ds + \int_{\Omega} \rho v n ds = 0 \quad (1)$$

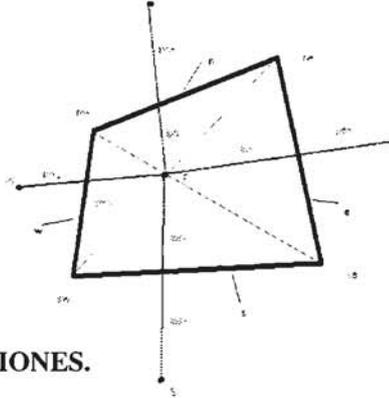
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\Omega + \int_s \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_s -p \vec{n} ds + \int_s \vec{\tau}_{ij} \cdot \vec{n} ds + \int_{\Omega} \rho f_m d\Omega \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho e d\Omega + \int_s \rho e \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_{\Omega} -p \operatorname{div}(\vec{v}) d\Omega + \int_s k \operatorname{grad}(T) \cdot \vec{n} ds + \int_{\Omega} (\phi_r + \phi_v + \phi_q) d\Omega \quad (3)$$

3. DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO

El dominio objeto de estudio ha sido discretizado mediante la yuxtaposición de volúmenes elementales cuadrilaterales (figura 1). Para ello se ha empleado un mallado de tipo centrado, en el cual todas las variables están definidas en los mismos nodos computacionales, en nuestro caso en el centro geométrico del volumen.

Figura 1. Volumen finito elemental cuadrilateral



4. DISCRETIZACIÓN DE ECUACIONES.

Las ecuaciones (1), (2) y (3) se han transformado en sistemas de ecuaciones lineales de forma genérica [1]:

$$A_p \phi|_p + \sum_K A_K \phi|_K = Q \quad (4)$$

En donde $\phi = \rho^p$ en (1), $\phi = u_i^p$ para la ecuación (2) y haciendo la hipótesis de gas perfecto. $\phi = c_v * T_p$ para la ecuación (3).

Los términos temporales se han discretizado mediante una aproximación de segundo orden:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \phi d\Omega \right)^{n+1} = \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \left(\frac{3}{2} \phi^{n+1} - 2\phi^n + \frac{1}{2} \phi^{n-1} \right) \quad (5)$$

Los términos convectivos se han discretizado:

$$\int_{s_k} \phi \bar{v} \bar{n} ds = \sum_k \bar{\phi}_k \bar{v}_{nk} S_k \quad (6)$$

Para evaluar esta expresión son necesarios los valores de las magnitudes en las caras. Estos valores se han estimado a partir de los valores en los nodos computacionales de los volúmenes adyacentes a cada cara mediante una combinación de dos interpolaciones diferentes una tipo Upwind y otra en diferencias centradas (CDS):

$$\text{Upwind: } \phi_e \begin{cases} \phi_P & \text{si } (v,n)_e > 0 \\ \phi_E & \text{si } (v,n)_e < 0 \end{cases} \quad (7) \quad \text{CDS: } \begin{cases} \phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e) \\ \lambda_e = \frac{lpk^+}{lpk^+ + lpk^-} \end{cases} \quad (8)$$

Se ha usado una combinación de los dos esquemas [1,2,3] buscando la precisión del CDS y la estabilidad del Upwind, empleando una corrección diferida, evaluando el esquema de interpolación de mayor orden explícitamente con valores de iteraciones previas:

$$F = F_{Upwind}^{n+1} + (F_{CDS}^n - F_{Upwind}^n) \quad (9)$$

Para discretizar los gradientes en las caras, se realiza una hipótesis similar para evitar oscilaciones debidas a campos no uniformes pero con iguales valores en los nodos computacionales [1]. Para ello se define un término implícito:

$$F_g^{imp} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \approx \frac{(\phi_{K^+} - \phi_P)}{lpk \bullet \bar{n}_k} \quad (10)$$

y un término explícito F_g^{exp} obtenido de evaluar los gradientes en los nodos computacionales con los valores hallados en la iteración previa. Se aplica una corrección diferida que evite el desarrollo de soluciones oscilantes a las que daría lugar el caso de calcular directamente el gradiente mediante diferencias centradas de gradientes en los nodos.

$$F_g = F_g^{exp, n+1} + (F_g^{imp} - F_g^{exp})^n \quad (11)$$

Asimismo dentro del término viscoso del momento:

$$(\tau_{ij} \bar{n} ds)_k = 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_k + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{s_x} \right] + \left(\mu_v - \frac{2}{3} \mu \right) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{s_x} \right]_k \quad (12)$$

el término subrayado se ha tratado en forma explícita evaluándolo con los valores de la iteración interior anterior.

5. MÉTODO DE RESOLUCIÓN. CORRECCIONES DE PRESIÓN, VELOCIDAD Y DENSIDAD

La metodología de resolución se basa en corregir los campos de densidad y velocidad, de manera que se cumpla la ecuación de balance de masa (1).

$$\rho^m = \rho^{m-1} + \rho'; v_n^m = v_n^{m*} + v_n' \quad (13) \quad n\dot{\xi}_k^m = (\rho^{m-1} + \rho')_k (v_n^{m*} + v_n')_k S_k \quad (14)$$

Las correcciones en densidad y velocidad se pueden poner en función de correcciones al campo de presiones (16):

$$u_{i,p}' = \frac{-\sum_k A_k'' u_{i,k}'}{A_p''} - \frac{\Delta\Omega}{A_p''} \frac{\partial p_p'}{\partial x_i} \quad (15) \quad \frac{\rho^m - \rho^{m-1}}{\Delta t} \Delta\Omega = \rho' \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} = C_{\rho,p}' \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \quad (16)$$

Introduciendo estas expresiones en la ecuación de continuidad se obtiene un sistema de ecuaciones lineales, con incógnitas las correcciones de presión en cada nodo.

$$\frac{(\rho^{m-1} - \rho'') \Delta\Omega}{\Delta t} + \sum_k n\dot{\xi}_k' = Q_m^* \quad (17)$$

Donde Q_m^* es la discrepancia con la continuidad. Resolviendo este sistema lineal se obtienen las p' en cada nodo y a partir de (15) y (16) las correcciones a los campos de velocidad y densidad.

Se han empleado dos esquemas de resolución [1]: el método "SIMPLE" supone nulo el primer término en (15), para simplificar el proceso de resolución; el método "PISO" trabajará en dos pasos, en un primer paso no tiene en cuenta ese término y en el segundo paso estimará el término anulado, de la primera iteración u_i' .

El esquema iterativo genérico seguido para un instante de resolución (n+1):

1. Tomar como estimación de los campos en (n+1), los del instante anterior.
2. Obtener u_i^{n+1} linealizando y resolviendo cantidad de movimiento, con estimaciones.
3. Forzar la continuidad corrigiendo los campos ρ , u_i , p . Volver a 1 hasta convergencia
4. Resolver temperatura y actualizar propiedades Volver a 1 hasta convergencia
5. Si todos los campos han convergido, son solución para instante (n+1)

6. APLICACIONES NUMÉRICAS.

- a) Canal con obstáculo circular, de altura 4 % de la anchura total [4], (figuras 2 a 5).

Las condiciones del flujo entrante por el Oeste son las siguientes:

Nº Mach	Presión (Pa)	Temperatura (K)
1.65	100000	293

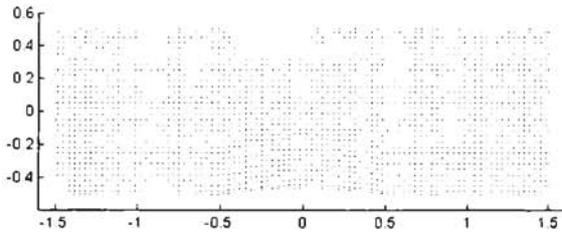


Fig. 2. Mallado del dominio
90 x 30 volúmenes

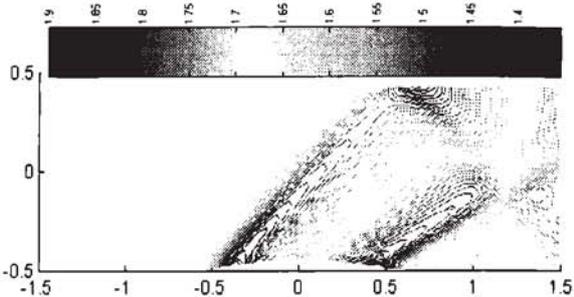


Fig. 3. Mapa del número de Mach
en el canal

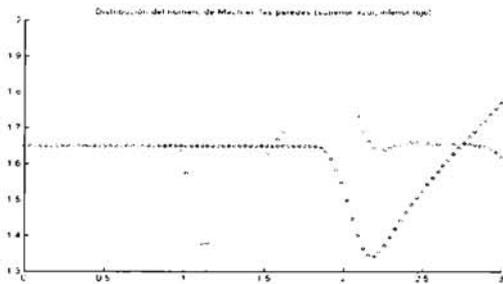


Fig. 4. Numero de Mach en las
paredes

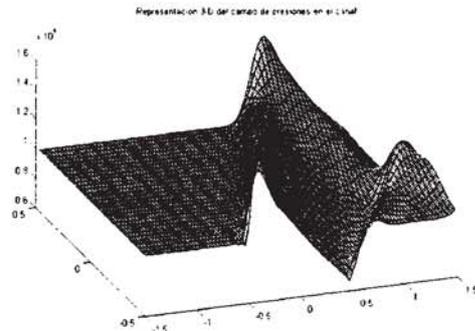


Fig. 5. Campo de presiones en el
canal

En [4] se pueden comparar las soluciones obtenidas.

b) Movimiento forzado en una recinto cerrado:

Recinto cuadrado en el cual existe aire en reposo a una presión determinada en el instante inicial $t=0$ arranca impulsivamente la pared superior con una velocidad constante de manera que el aire del interior comienza a ponerse en movimiento transmitiéndose cantidad de movimiento a todo el recinto mediante mecanismos de viscosidad hasta que el problema evolucione a un estado estacionario [4]. Las condiciones de contorno son de pared fija menos en el contorno superior que se impone una velocidad $V_x=16.02$ m/s , $V_y=0$ m/s.

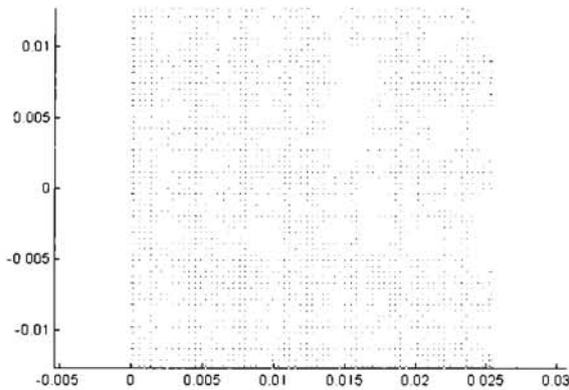


Fig. 6. Mallado del dominio
65 x 65 volúmenes

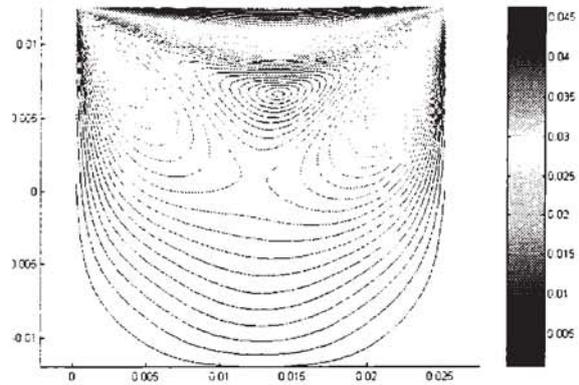


Fig. 7. Mapa del número de Mach

7. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado una aplicación para el estudio fluidomecánico de flujos compresibles la cual ha sido validada con múltiples ejemplos clásicos de la bibliografía, dos de los cuales se han mostrado en las aplicaciones numéricas. Los resultados obtenidos tanto en la precisión en la resolución de discontinuidades como en la forma en que evita soluciones oscilantes nos llevan a pensar en la idoneidad de su adaptación para modelos tridimensionales y su aplicación a componentes de turbomáquinas y MCIA.

8. BIBLIOGRAFÍA

1. J.H. Ferziger, M. Péric. (1999) "Computational Methods for Fluid Dynamics." Germany, Ed. Springer.
2. I. Demirdzic and Z. Lilek and M. Peric. (1993) "A collocated finite volume method for predicting flows at all speeds." *International journal for numerical methods in fluids*, vol16, pag. 1029-1050
3. P. K. Khosla and S. G. Rubin.(1973) "A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme.", *Computers and Fluids*, Vol.2, 207-209, Great Britain, Pergamon Press
4. National Project for Application-oriented Research in CFD
<http://www.arnold.af.mil/nparc>