Boletín de Estadística e Investigación Operativa
Vol. 31, No. 2, Julio 2015, pp. 137-149

Investigación Operativa

Generalized convexity: Their applications to variational problems

Gabriel Ruiz-Garzón
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Cádiz
✉ gabriel.ruiz@uca.es

Beatriz Hernández-Jiménez
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e H. Económica
Universidad Pablo de Olavide
✉ mbherjim@upo.es

Rafaela Osuna-Gómez and Antonio Rufián-Lizana
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Sevilla
✉ rafaela@us.es , ✉ rufian@us.es

Abstract

The aim of this paper is to show one of the generalized convexity applications, generalized monotonicity particularly, to the variational problems study. These problems are related to the search of equilibrium conditions in physical and economic environments. If convexity plays an important role in mathematical programming problems, monotonicity will play a similar role in variational problems. This paper shows some recent results about this topic.

Keywords: Invexity, Monotonicity, Variational Problems.
AMS Subject classifications: 52A01, 65K10.

1. La importancia de la convexidad en los problemas de programación matemática

La formulación clásica del Problema de Programación Matemática escalar sin restricciones consiste en:

$$(MP) \qquad \min \theta(x)$$
$$\text{sujeto a} \quad x \in X$$

donde $\theta : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Es conocida la importancia de disponer de la convexidad del modelo (MP), esto es, que $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sea un conjunto convexo y que la función objetivo θ sea convexa en X, ya que entonces se pueden asegurar importantes resultados, como por ejemplo:

1. El conjunto de soluciones es convexo.
2. Un mínimo local es global.
3. Si θ es estrictamente convexa entonces el mínimo, si existe, es único.

Aunque la definición de función convexa fue dada en 1905 por un ingeniero danés llamado Jensen, no sería hasta 1954 cuando Bruno de Finetti formuló un concepto más general, el concepto de función cuasi convexa.

Definición 1.1. *Sea C un conjunto abierto y convexo. La función diferenciable $\theta : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es cuasi convexa (QCX) si*

$$\theta(y) \leq \theta(x) \Rightarrow (y-x)^t \nabla\theta(x) \leq 0, \quad \forall x, y \in C$$

Las funciones cuasi convexas comparten con las funciones convexas propiedades como que sus conjuntos de nivel inferior son conjuntos convexos. En economía, existen funciones de gran importancia que son cuasi convexas (ó cuasi cóncavas, si -f es cuasi convexa). Por ejemplo, la función de producción de Coob-Douglas (veáse Figura 1) dada por

$$y = AL^{\alpha_1}K^{\alpha_2},\ A > 0,\ L, K > 0,\ \alpha_i > 0,\ i = 1, 2$$

es cuasi cóncava si y solo si $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$.

Esta función nos da $y =$"la producción total", en función de $L =$"la cantidad de trabajo" y $K =$"el capital", siendo $A =$"un factor de productividad total" y α_1 y $\alpha_2 =$"los coeficientes de elasticidad del trabajo y del capital", respectivamente. Estos coeficientes miden los efectos que tienen sobre la productividad un cambio en los niveles de la cantidad de trabajo o capital.

También, la función de Producción de Leontief

$$y = (\min_i \{\frac{x_i}{a_i}\})^\alpha,\ x_i > 0,\ a_i > 0,\ i = 1, 2,\ \alpha > 0,$$

es cuasi cóncava si y solo si $\alpha \leq 1$, donde y es la cantidad producida, x_i son las cantidades de los inputs y las a_i son constantes. Vasily Leontief fue un economista

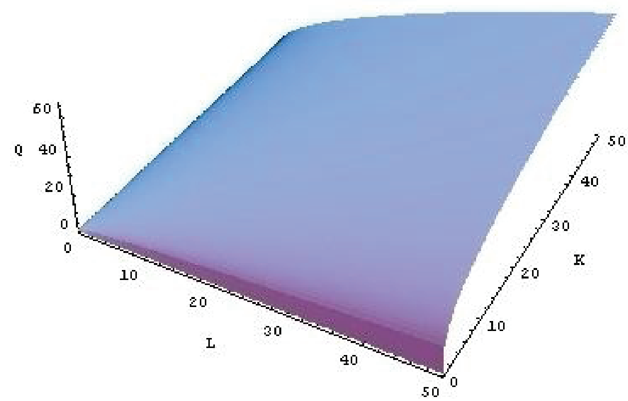

Figura 1: Función de producción de Coob-Douglas

estadounidense que destacó por sus estudios teóricos y desarrolló la metodología input-output de análisis económico, por la que se le concedió el premio Nobel de Economía en 1973.

Pero con todo, existen funciones cuasi convexas, como la $y = x^3$ con propiedades no del todo deseables, como que presente un punto crítico que no se corresponda con un óptimo de la función.

Esto se resolvió, en parte, con la definición en 1965, debida a Mangasarian, de las funciones pseudo convexas.

Definición 1.2. *La función diferenciable* $\theta : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es pseudo convexa* (PCX) *si* $(y-x)^t\nabla\theta(x) \geq 0 \Rightarrow \theta(y) - \theta(x) \geq 0, \quad \forall x, y \in C.$

Decimos en parte, porque si bien con la pseudo convexidad todo punto crítico es óptimo, esta propiedad no caracteriza a las funciones pseudo convexas.

$$\boxed{\text{PCX} \Longrightarrow [CP \Leftrightarrow \text{óptimo}\,(PM)]}$$

No sería hasta comienzo de los 80, cuando Hanson (1981) y Craven (1981), definirían las funciones invex como aquellas funciones para las cuales todos sus puntos críticos son óptimos. Esta propiedad caracteriza a las funciones invex.

Definición 1.3. *Sea* Γ *un conjunto abierto. Una función* $\theta : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable, se dice que es:*

- *invex* (IX) *si,* $\exists\, \eta : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\theta(y) - \theta(x) - \eta(y,x)^t\nabla\theta(x) \geq 0;$$

- *pseudo invex* (PIX) *si,* $\exists\, \eta : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$*,*

$$\eta(y,x)^t \nabla\theta(x) \geq 0 \Rightarrow \theta(y) - \theta(x) \geq 0;$$

- *cuasi invex* (QIX) *si,* $\exists\, \eta : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$*,*

$$\theta(y) - \theta(x) \leq 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t \nabla\theta(x) \leq 0.$$

Craven demuestra que la siguiente composición $f = h \circ \phi$, con h convexa, ϕ diferenciable, destruye la convexidad pero no la invexidad, de ahí que las denominara **invex**="**in**variant con**vex**". Las funciones invex liberan a las funciones convexas de la rigidez que supone tener que considerar únicamente el vector $y - x$. También se demuestra que, en el caso escalar, dichas funciones invex coinciden con las pseudo invex. Algunas veces la mera extensión de un concepto no conlleva la creación de clases de funciones diferentes.

$$\boxed{\text{(IX)}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\text{(PIX)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{(QIX)}}$$

A diferencia de las funciones pseudo convexas, con las invex sí logramos una caracterización de este tipo de funciones.

$$\boxed{\text{IX} \Leftrightarrow [CP \Leftrightarrow \text{óptimo}\,(PM)]}$$

Obviamente, funciones sin puntos estacionarios, como la función logarítmica, pertenecen a la clase de funciones invex.

2. La importancia de la monotonicidad en los problemas de desigualdad variacional

En Karamardian (1969), se extiende el clásico concepto de monotonicidad de una función real de variable real,

$$x \leq y \Rightarrow \theta(x) \leq \theta(y), \quad \text{o sea, } (x - y)(\theta(x) - \theta(y)) \geq 0$$

al de una función $F : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, vector valuada.

Definición 2.1. *Sea* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y convexo.* $F : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es monótona* (M) *en* C *si,* $\forall x, y \in C$*,* $(y - x)^t (F(y) - F(x)) \geq 0$*.*

Karamardian (1969) demuestra el siguiente teorema:

Teorema 2.1 (Teorema Central de la Monotonicidad)**.** *Sea* $\theta : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable sobre un conjunto abierto y convexo,* C*. Entonces,* θ *es convexa* (CX) *sobre* $C \iff \forall x, y \in C$*,* $(y - x)^t\, [\nabla\theta(y) - \nabla\theta(x)] \geq 0$*.*

Mediante esta caracterización, la convexidad de una función escalar se puede trasladar a la monotonicidad de su gradiente. Este teorema conlleva que la monotonicidad juegue un papel similar al de la convexidad en los problemas de programación matemática, pero en los llamados problemas variacionales.

Sea X un subconjunto no vacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $F : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, una aplicación vector valuada de X en $\mathbb{R}^n$. El Problema de Desigualdad Variacional clásico (VIP) consiste en encontrar un vector $\bar{x} \in X$, tal que,

$$(y - \bar{x})^t F(\bar{x}) \geq 0, \quad \forall y \in X.$$

Si $\theta : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable convexa real valuada y C es un conjunto abierto y convexo, entonces el problema (VIP) definido para F y C donde $F = \nabla\theta$, es equivalente al problema de optimización (MP).

En el Problema de Desigualdad Variacional (VIP) la monotonicidad de F, asegura importantes resultados, tales como que si F es una función monótona, entonces el conjunto de soluciones es convexo.

Las Desigualdades Variacionales se pueden presentar de dos formas, bien en la forma dada por Stampacchia en los años 60 o en la forma introducida por Minty a finales de dicha década.

La Desigualdad Variacional Vectorial de tipo Minty (MVVI) asociada con F y X consiste en encontrar un $y \in X$ tal que

$$F(x)(y - x) \leq 0, \quad \forall x \in X.$$

A y la llamaremos solución Minty con respecto a F y X. Algunos autores, llaman a este problema, "problema de desigualdad variacional dual" para indicar que está relacionado de una manera muy estrecha con el clásico "problema primal de desigualdad vectorial" de tipo Stampacchia (SVVI) asociado con F y X que consiste en encontrar un $y \in X$ tal que

$$F(y)(x - y) \geq 0, \quad \forall x \in X.$$

Uno de los problemas que admite una formulación como problema variacional es la búsqueda del Tráfico Equilibrado en el problema del Transporte. Partamos de la siguiente notación:

- $G = (N, A)$, donde G es un grafo en que A representa el conjunto de arcos y N el conjunto de nodos;
- W el conjunto de orígenes-destino (O-D);
- R^w el conjunto de caminos que conectan la pareja O-D $w \in W$;
- R representa el conjunto de todos los caminos, r representa un camino $r \in R$;
- d_w la demanda del par O-D $w \in W$; d el vector de demandas de W;

- f_r^w el flujo del camino r que conecta el par O-D w; f es el vector de flujos de los caminos;

- x_a el flujo de la sección a; x el vector de flujos de las secciones;

- c_a el coste del viaje de la sección a; c el vector de coste del viaje;

- C_r^w el coste del viaje del camino r conectando el par O-D w; C el vector de costes de los caminos;

- λ_w^* el coste del viaje mínimo del par O-D;

- $\delta_{ar}^w = \begin{cases} 1, & \text{si el camino } r \in R \text{ atraviesa el arco } a \in A; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Para este problema, las condiciones de equilibrio de Wardrop exigen que para cada pareja origen-destino, los caminos utilizados tengan menor o igual coste que los caminos no utilizados. La formulación matemática de estas condiciones son:

$$C_r^w \begin{cases} = \lambda_w^*, & f_w^* > 0; \\ \\ \geq \lambda_w^*, & f_w^* = 0; \end{cases} \quad \forall r \in R_w,\ \forall w \in W, \text{donde}\, C_r^{w^*} = \textstyle\sum_{a\in A} c_a^* \delta_{ar}^w,$$

donde f satisface las siguientes condiciones:

(1) $\sum_{r\in R_w} f_r^w = d_w$, $\forall w \in W$,

(2) $f_r^w \geq 0$, $r \in R_w$,

(3) $x_a = \sum_{w\in W} \sum_{r\in R_w} f_r^w \delta_{ar}^w$, $\forall a \in A$.

El problema del equilibrio en el transporte es equivalente a encontrar un f_r^{w*} tal que se cumpla la desigualdad:

$$(C_r^{w*} - \lambda_w^*)(f_r^{w*} - f_r^w) \leq 0,\ \forall f \in \Omega,$$

donde $\Omega = \{f|\text{satisface: (1)-(3)}\}$ es el conjunto de caminos de flujos factibles.

Para una demanda fija, esto es, $d_w = d_w^*$, se trataría de encontrar un $f^* \in \Omega$, tal que:

$$C(f^*)(f - f^*) \leq 0,\ \forall f \in \Omega.$$

Luego efectivamente, vemos como este problema admite una formulación en forma de desigualdad variacional.

3. Extensiones en ambientes de invexidad

Podemos pensar en extender el concepto de monotonicidad al igual que históricamente ha ocurrido con el concepto de convexidad. Así en Ruiz-Garzón, Osuna-Gómez y Rufián-Lizana (2003) se define:

Definición 3.1. *$F : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice que es:*

a) invex monotona (IM) sobre X si, $\exists\, \eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ tal que $\forall x, y \in X$,

$$\eta(y,x)^t(F(y) - F(x)) \geq 0;$$

b) pseudo invex monotona (PIM) sobre X si, $\exists\, \eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ tal que $\forall x, y \in X,\ \eta(y,x)^t F(x) \geq 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t F(y) \geq 0$;

c) cuasi invex monótona (QIM) sobre X si, $\exists\, \eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ tal que $\forall x, y \in X$, $\eta(y,x)^t F(x) > 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t F(y) \geq 0$.

Ejemplo 3.1.

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ si\ x \leq 0 \\ x \ si\ x > 0 \end{cases}$$

es pseudo invex monótona (PIM), con respecto a $\eta(y,x) = e^y - e^x$ en el conjunto $X = \mathbb{R}$, ya que se verifica que $\exists\, \eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ tal que $\forall x, y \in X$,

$$\eta(y,x)^t F(x) \geq 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t F(y) \geq 0$$

Ejemplo 3.2.

$$F(x) = \begin{cases} -x \ si\ x \leq 0 \\ 0 \ si\ x > 0 \end{cases}$$

es cuasi invex monótona (QIM) con respecto a $\eta(y,x) = e^y - e^x$ sobre el conjunto $X = \mathbb{R}$, ya que se verifica que $\exists\, \eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ tal que $\forall x, y \in X$,

$$\eta(y,x)^t F(x) > 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t F(y) \geq 0$$

Cumpliéndose ahora que:

$$\boxed{\text{(IM)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{(PIM)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{(QIM)}}$$

La pregunta que nos podemos hacer es ver si es posible obtener un teorema similar al dado en el Teorema 2.1 de Karamardian (1969), que fije una relación biunívoca entre invexidad e invex monotonicidad generalizada.

Desgraciadamente, al contrario que con la convexidad y la monotonicidad, no es tan fácil conseguir condiciones necesarias y suficientes que relacionen invexidad e invex monotonicidad. Necesitamos imponer condiciones al vector η, que hagan que este tipo de vector tenga propiedades similares al clásico $y - x$. En Ruiz-Garzón, Osuna-Gómez y Rufián-Lizana (2003) nos podemos encontrar los siguientes resultados:

Teorema 3.1. *Si la función $\theta : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es invex (IX) con respecto a η antisimétrica ($\eta(y,x) + \eta(x,y) = 0$, $\forall x, y \in \Gamma$), entonces $\nabla\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es pseudo invex monótona (PIM) sobre Γ con respecto al mismo η.*

Teorema 3.2. *Si la función $\theta : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es cuasi invex (QIX) sobre Γ con respecto a η antisimétrica, entonces $\nabla\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es cuasi invex monótona (QIM) sobre Γ con respecto al mismo η.*

La pseudo invex monotonicidad es también el puente que nos permite pasar de soluciones de desigualdades de tipo Stampacchia a desigualdades de tipo Minty, convirtiendo a estos problemas en algo así como problemas duales:

Lema 3.1 (Tipo Minty)**.** *Sea C un conjunto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que:*

1. *$F : C \to \mathbb{R}^n$ es pseudo invex monótona (PIM) con respecto a η y hemicontinua (continua sobre segmentos lineales),*
2. *$\eta : C \times C \to \mathbb{R}^n$ es antisimétrica y afín en el primer argumento.*

Entonces $u \in C$ satisface:

$\eta(v,u)^t F(u) \geq 0 \quad \forall v \in C$ *(Desigualdad Cuasi-Variacional de tipo Stampacchia)*

si y sólo si satisface

$\eta(v,u)^t F(v) \geq 0 \quad \forall v \in C$ *(Desigualdad Cuasi-Variacional de tipo Minty).*

La pseudo monotonicidad, caso particular de la pseudo invex monotonicidad con $\eta(v,u) = v - u$, juega un papel relevante en la búsqueda de situaciones de equilibrio, como ocurre en economía, donde se buscan puntos en que la oferta y la demanda se encuentren igualadas. Dafermos (1990) utiliza el concepto que definió el economista francés del siglo XIX, Léon Walras.

Definición 3.2. *Sea $E : P \to \mathbb{R}^l$ la función de exceso de demanda agregada, $E(p) = D(p) - O(p)$ definida sobre un conjunto de precios $P = \mathbb{R}^l_+$. Por la ley de Walras, tenemos en particular $pE(p) = 0$, $p \in P$. Un vector de precios $p^* \in \mathbb{R}^l_+$ es llamado de Equilibrio Walrasiano si $E(p^*) \leq 0$.*

Teorema 3.3. *Sea $E : P \to \mathbb{R}^l$ una función continua y $-E(p)$ pseudo monotona entonces $p^* \in P$ es un vector de precios de equilibrio Walrasiano si y sólo si p^* es una solución del Problema variacional de tipo Minty,*

$$(p^* - p)E(p) \geq 0,\ p \in P.$$

La pseudo invex monotonicidad también juega un papel relevante en la demostración de existencia de soluciones de los problemas cuasi variacionales, como vemos en Ruiz-Garzón, Osuna-Gómez y Rufián-Lizana (2003).

Teorema 3.4. *Sea M un conjunto no vacío, compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$, tal que*

1. *$F : M \to \mathbb{R}^n$ es pseudo invex monótona (PIM) con respecto a η y hemicontinua,*
2. *$\eta : M \times M \to \mathbb{R}^n$ es una función continua y antisimétrica,*
3. *η es afín en el primer argumento.*

Entonces hay un $u_0 \in M$, tal que $\eta(v, u_0)^t F(u_0) \geq 0$, $\forall v \in M$.

Podemos preguntarnos también por las relaciones existentes entre desigualdades variacionales y problemas de optimización vectoriales $(WVOP)$ entre espacios de Banach infinito dimensionales.

$$\begin{array}{ll}(WVOP) & W - \text{mín}\, f(x) \\ & \text{sujeto a} \quad x \in X\end{array}$$

donde denotaremos por E_1, E_2 dos espacios de Banach, por $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ el espacio de todos los operadores lineales continuos de E_1 a E_2, y sea $f : X \to E_2$ una función donde X es un subconjunto no vacío de E_1. Sea $Q \subset E_2$, un cono convexo, cerrado y apuntado con interior no vacío y diferente de E_2. La definición de eficiencia débil para (WVOP) sería:

Definición 3.3. *Diremos que $\overline{x} \in X$ es débilmente eficiente si no existe otro $y \in X$ tal que $f(y) - f(\overline{x}) \in -int\ Q$, donde $int\ Q$ denota el interior del conjunto Q.*

Seguidamente, sean $\eta : X \times X \to E_1$ y $F : X \to \mathcal{L}(E_1, E_2)$ dos funciones y consideramos los siguientes problemas:

- El Problema Cuasi-Variacional Vectorial Débil Stampacchia (SWVVLIP): Consiste en encontrar un punto $y \in X$ tal que

  $$F(y)\eta(x, y) \notin -\text{int}\ Q, \forall x \in X$$

  donde por $F(y)\eta(x, y)$ denotamos el valor del operador $F(y)$ aplicado sobre el vector $\eta(x, y)$.

- El Problema Cuasi-Variacional Vectorial Débil de tipo Minty (MWVVLIP): Consiste en encontrar un punto $y \in X$ tal que

$$F(x)\eta(y,x) \notin \text{int } Q, \forall x \in X.$$

El concepto de pseudo invexidad, introducido por Osuna-Gómez et al. (1998) en el caso finito dimensional para funciones vectoriales (en este caso se demuestra que la pseudo invexidad no coincide con la invexidad), verificaba corresponder a la clase de funciones más amplia para las cuales todos los puntos críticos vectoriales eran soluciones débilmente eficientes del problema multiobjetivo asociado. Dicha definición se puede generalizar de la siguiente manera para el caso infinito dimensional:

Definición 3.4. *Sea X un subconjunto no vacío de E_1 y sea $f : X \to E_2$ una función Fréchet diferenciable (o simplemente, diferenciable) en $x \in int\, X$, con derivada $Df(x)$. Diremos que f es pseudo invex (PIX) en $x \in X$ si y sólo si, existe una función vectorial $\eta : X \times X \to E_1$ tal que*

$$f(y) - f(x) \in -int\, Q \Rightarrow Df(x)\eta(y,x) \in -int\, Q, \quad \forall y \in X.$$

En Santos et al. (2008) se demuestra que la pseudoinvexidad también garantiza que todas las soluciones del (SWVVLIP) son soluciones débilmente eficientes.

Teorema 3.5. *Sea $f : X \subset E_1 \to E_2$ una función diferenciable en $\overline{x} \in int\, X$ y $F \equiv Df$. Si $\overline{x}$ es un punto débilmente eficiente (WVOP) entonces $\overline{x}$ es una solución del (SWVVLIP).*

Si f es una función pseudoinvex en $\overline{x}$ y $\overline{x}$ es una solución del (SWVVLIP) entonces $\overline{x}$ es un punto débilmente eficiente (WVOP).

Luego, bajo condiciones de pseudo invexidad, se pueden identificar soluciones de problemas vectoriales cuasi variacionales débiles con puntos débilmente eficientes. También podemos extender el concepto de punto crítico clásico:

Definición 3.5. *Diremos que $\overline{x} \in X$ es un punto crítico vectorial (VCP) de f si hay un $\lambda^* \in Q^* \setminus \{0\}$ tal que $\lambda^* \circ Df(\overline{x}) = 0$.*

Y probar que:

Teorema 3.6. *Supongamos que Γ es un subconjunto abierto y $F \equiv Df$. Si f es pseudo invex entonces los puntos críticos vectoriales (VCP), los puntos débilmente eficientes del (WVOP) y las soluciones del problema (SWVVLIP) coinciden.*

Este resultado ha sido recientemente generalizado por Gutiérrez et al. (2015), llegándose a caracterizar la pseudo invexidad de funciones Lipschitz en el caso no diferenciable utilizando jacobianos generalizados.

4. Nuevas líneas de trabajo

El concepto de conjunto convexo se puede generalizar al de conjunto invex, conjunto donde se exige únicamente que los caminos que partan de un punto x estén dentro del conjunto, sin exigirles que el punto final sea y, eso sólo ocurre si el conjunto es convexo (ver Mohan y Neogy (1995)):

Definición 4.1. *Sea $x \in S$. Entonces, el conjunto S se dice invex en x con respecto a η, si, para cada $y \in S$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $x + \lambda\eta(y,x) \in S$. S se dirá que es un conjunto invex con respecto a η, si S es invex en cada $x \in S$.*

Y extendiendo el concepto de pseudo monotonicidad:

Definición 4.2. *Sea $S \in E_1$ un conjunto invex con respecto a η, $f : S \subset E_1 \to E_2$ una funcion diferenciable. Diremos que $F \equiv Df$ es pseudo invex monótona con respecto a η en S si, para cada par distintos de puntos $x, y \in S$,*

$$F(x)\eta(y,x) \in int\ Q \Rightarrow F(y)\eta(y,x) \in int\ Q.$$

Podemos conseguir resultados como el dado en Ruiz-Garzón et al. (2010):

Teorema 4.1. *Sea S un conjunto no vacío invex con respecto a η y η es una función antisimétrica satisfaciendo la Condición C y $f : S \subset E_1 \to E_2$ es una función diferenciable. Supongamos que $F \equiv Df$ es pseudo invex monótona. Toda solución del (SWVVLIP) es una solución del (MWVVLIP) y viceversa.*

Es decir, podemos llegar a identificar soluciones de problemas cuasi variacionales de tipo Minty, Stampacchia, puntos de eficiencia débil y puntos críticos, bajo el paraguas de la pseudoinvexidad y pseudoinvex monotonicidad, generalizando resultados previos de Ruiz-Garzón, Osuna-Gómez y Rufián-Lizana (2004) y Gang y Liu (2008), para espacios finito dimensionales.

$$\boxed{\text{(MWVVLIP)}} \iff \boxed{\text{(SWVVLIP)}} \iff \boxed{\text{(WVOP)}} \iff \boxed{\text{(VCP)}}$$

Diremos que $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$, cumple la Condición C si para cualquier $x, y \in \mathbb{R}^n$ y para cualquier $\lambda \in [0,1]$, se satisfacen:

- $\eta(y, y + \lambda(x,y)) = -\lambda\eta(x,y)$
- $\eta(x, y + \lambda(x,y)) = (1-\lambda)\eta(x,y)$

Esta condición C conlleva que el vector η, verdadero núcleo de la definición de invexidad, quede dotado de propiedades muy cercanas a las del vector $x - y$. El abuso de este tipo de condiciones por parte de algunos autores ha provocado críticas, como podemos ver en Zalinescu (2014).

Sin embargo, la invexidad se está abriendo camino en otro tipo de campos como son los ambientes fuzzy, donde justamente la versatilidad del vector η favorece la obtención de resultados interesantes relacionados con la convexidad, los problemas de programación matemática y los problemas variacionales (ver Nanda y Kar (1989) y Rufián-Lizana et al. (2012)).

Referencias

[1] Craven B.D. (1981). Invex Functions and Constrained local minima. *Bulletin Australian Mathematical Society*, **24**, 357-366.

[2] Dafermos, S. (1990). Exchange price equilibrium and variational inequalities, *Math. Program.*, **46**, 391-402.

[3] Gang X. and Liu S. (2008). On Minty vector variational-like inequality, *Comput. Math. Appl.*, **56**, 311-323.

[4] Gutiérrez C, Jiménez B., Novo V. and Ruiz-Garzón, G. (2015). Vector critical points and efficency in vector optimization with Lipschitz functions, *Optim. Lett.*, DOI: 10.1007/s11590-015-0850-2.

[5] Hanson, M.A. (1981). On sufficiency of Khun-Tucker conditions, *J. Math. Anal. Appl.*, **261**, 545-550.

[6] Karamardian, S. (1969). The nonlinear complementarity problem with applications, Part 2, *J. Optim. Theory Appl.*, **4** (3), 167-181.

[7] Mohan S.R. and Neogy, K. (1995). On invex sets and preinvex functions, *J. Math. Anal. Appl.*, **189**, 901-908.

[8] Nanda, S. and Kar K. (1989). Convex fuzzy mappings, *Fuzzy Sets Syst*, **32**, 359-367.

[9] Osuna-Gómez R., Rufián-Lizana A. and Ruiz-Canales, P. (1998). Invex functions and generalized convexity in multiobjective programming, *J. Optim. Theory Appl.*, **98**, 651-661.

[10] Rufián-Lizana A, Chalco-Cano Y., Osuna-Gómez R. and Ruiz-Garzón G. (2012). On invex fuzzy mappings and fuzzy variational-like inequalities, *Fuzzy Sets Syst*, **200**, 84-98.

[11] Ruiz-Garzón G., Osuna-Gómez R. and Rufián-Lizana A. (2003). Generalized invex monotonicity, *European J. Oper. Res.*, **144**, 501-512.

[12] Ruiz-Garzón G., Osuna-Gómez R. and Rufián-Lizana A. (2004) Relationships between vector variational-like inequality and optimization problems, *European J. Oper. Res.*, **157**, 113-119.

[13] Ruiz-Garzón G., Santos L.B., Rufián-Lizana A. and Arana-Jiménez, M. (2010). Some relations between Minty variational-like inequality problems and vectorial optimization problems in Banach spaces, *Comput. Math. Appl.*, **60**, 2679-2688.

[14] Santos L.B., Ruiz-Garzón G., Rojas-Medar M. and Rufián-Lizana A. (2008). Some relations between variational-like inequality problems and vectorial optimization problems in Banach spaces, *Comput. Math. Appl.*, **55**, 1808-1814.

[15] Zalinescu, C. (2014). A critical view on invexity. *J. Optim. Theory Appl.*, **162**, 695-704.

Acerca de los autores

Gabriel Ruiz Garzón es Profesor Titular de Universidad en la Universidad de Cádiz en la Facultad de Ciencias Sociales y de la Comunicación del Campus de Jerez de la Frontera. Es licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada y doctor por la Universidad de Sevilla. Sus líneas principales de investigación son la programación matemática, el estudio de la convexidad generalizada y la Historia de la Estadística y la Probabilidad.

Beatriz Hernández Jiménez es Profesora Contratada Doctora en la Universidad Pablo de Olavide de Sevilla, adscrita a la Escuela Politécnica Superior. Es Licenciada en Matemáticas y en Ciencias Técnicas Estadísticas por la Universidad de Sevilla y doctora en Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Sus líneas principales de investigación son la programación matemática, el estudio de la convexidad generalizada y los problemas no regulares.

Rafaela Osuna Gómez es Profesora Titular de Universidad adscrita al Departamento de Estadística e I.O. de la Universidad de Sevilla. Es licenciada y Doctora en Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Sus trabajos de investigación se engloban en el campo de la programación matemática, centrándose en los problemas con objetivos múltiples, los problemas variacionales y los problemas de control, desarrollando aspectos tales como la no regularidad de los problemas y el papel jugado por las condiciones de convexidad.

Antonio Rufián Lizana es profesor Titular de la Universidad de Sevilla en el departamento de Estadística e I.O. Sus principales líneas de investigación están relacionadas con problemas de optimización y sus condiciones de optimalidad, tanto en problemas clásicos como entornos difusos.