



TRABAJO FIN DE MASTER

ESTUDIO DE MODELOS DEA CON VARIABLES NO MONÓTONAS: ESTADO DEL ARTE Y APLICACIONES.

Autor: **Juan Ignacio García Mesas**

Tutor: **Gabriel Villa Caro**

**Máster en Organización Industrial
y Dirección de Empresas**

Universidad de Sevilla

Sevilla, 30 de Noviembre de 2016

TABLA DE CONTENIDOS

| | |
|---|-----|
| INDICE DE FIGURAS | 3 |
| INDICE DE TABLAS | 4 |
| 1.OBJETIVO DEL PRESENTE TRABAJO..... | 5 |
| 2.INTRODUCCIÓN..... | 7 |
| 3.ESTADO DEL ARTE..... | 9 |
| 3.1.ESTADO DEL ARTE DEA CON VARIABLES FLEXIBLES | 9 |
| 3.2.ESTADO DEL ARTE EN AGRICULTURA Y OLIVAR..... | 56 |
| 4.MODELO DEA CON VARIABLES NO MONÓTONAS..... | 68 |
| 4.1.MODELO DEA CON VARIABLES FUERA DEL RANGO DESEABLE | 79 |
| 5.APLICACIÓN DEL MODELO PROPUESTO A FINCAS DE OLIVAR..... | 83 |
| 5.1.PARÁMETROS IMPORTANTES DEL CULTIVO..... | 86 |
| 5.2.DESCRIPCIÓN DEL CASO PRÁCTICO..... | 92 |
| 6.RESUMEN Y CONCLUSIONES..... | 111 |
| 7.BIBLIOGRAFÍA..... | 114 |
| 7.1.BIBLIOGRAFÍA DEA VARIABLES FLEXIBLES..... | 114 |
| 7.2.BIBLIOGRAFÍA ESPECÍFICA AGRICULTURA..... | 116 |
| 8.ANEXOS..... | 124 |
| 8.1.CÓDIGO LINGO..... | 124 |

INDICE DE FIGURAS

| | |
|---|-----|
| Figura 1. Función de pertenencia para input (x), output (y) y variables no monótonas..... | 70 |
| Figura 2. Representación un único output/una única variable no monótona..... | 72 |
| Figura 3. Otros ejemplos (a, b, c, d) de único output, y única variable no monótona..... | 73 |
| Figura 4. Eficiencia en el cultivo del olivar..... | 95 |
| Figura 5. Función de pertenencia para variables consideradas en 2014..... | 97 |
| Figura 6. Función de pertenencia para variables consideradas en 2015. | 98 |
| Figura 7. Representación gráfica en 3D del análisis de sensibilidad..... | 110 |

INDICE DE TABLAS

| | |
|--|-----|
| Tabla 1. Clasificación de la información relevante de variables agrícolas..... | 60 |
| Tabla 2. Clasificación de modelos DEA aplicados en distintos cultivos por diferentes autores.. | 63 |
| Tabla 3. Valores observados y resultados para el ejemplo mostrado en Figura 1 | 77 |
| Tabla 4. Datos de fincas y parámetros extraídos de encuestas realizadas..... | 94 |
| Tabla 5. Valores observados y resultados para Campaña 2014 | 102 |
| Tabla 6. Valores observados y resultados para Campaña 2015 | 103 |
| Tabla 7. Puntuaciones de eficiencia anual y media..... | 104 |
| Tabla 8. Resultados de eficiencia ordenados por tipo de olivar, densidad, y superficie..... | 107 |
| Tabla 9. Resultados de eficiencia ordenados por tipo de olivar, y eficiencia anual..... | 108 |
| Tabla 10. Análisis de sensibilidad al disminuir el valor ideal de K (80 y 60 UFK)..... | 109 |

1. OBJETIVO DEL PRESENTE TRABAJO

Este Trabajo Final de Master (TFM) realiza una profundización dentro de la materia Data Envelopment Analysis (DEA), para concretar un modelo que sea de aplicación a determinados sistemas físicos, como pueden ser determinados cultivos permanentes como el olivar, en los que algunas variables tienen una doble faceta al comportarse en determinadas ocasiones como inputs y en otras como outputs. En la literatura este tipo de variables se conocen como variables flexibles o dual-role-factor. Como veremos, este tipo de variables no es lo que más se acaban ajustando a nuestro caso, por lo que tendremos que desarrollar el trabajo en la dirección de un nuevo concepto conocido como variables no-monótonas. En esta última línea, evaluaremos la eficiencia de este cultivo teniendo en cuenta determinadas variables de importancia en dicho cultivo, pero no desde el punto de vista económico sino desde el punto de vista exclusivamente técnico.

A continuación se enumeran los objetivos que se pretenden alcanzar con este TFM:

- Análisis introductorio de la evaluación de eficiencia mediante DEA.
- Revisión del estado del arte de DEA respecto al empleo de variables con esta doble vertiente input/output en particular, así como revisión del estado del arte de eficiencia en el sector agrario y más concretamente en el olivar mediterráneo y Andaluz. Igualmente, revisión del estado del arte en cuanto a los inputs/outputs (sus medidas, sus unidades, y su vertiente input/output) tenidos en cuenta por algunos investigadores agrarios.
- Estudio a fondo del modelo que mejor cumpla nuestros objetivos propuestos, y diseño e implementación de nuestro modelo particular para la resolución del problema planteado y determinar la eficiencia de un cultivo de olivar.
- Aplicación del modelo implementado a un caso particular de un número determinado de fincas, y determinación de la eficiencia técnica de cada una de ellas. Para ello, previamente habremos diseñado un modelo de encuesta que trasladamos a diferentes interlocutores y especialistas del sector, y trataremos de recopilar durante varios meses a través de un exhaustivo trabajo de campo, datos reales de dos campañas consecutivas (2014 y 2015) de diferentes sistemas de cultivo.
- Determinación de líneas abiertas y posibles extensiones, o mejoras y cambios a realizar en el trabajo realizado de cara a perfeccionar una herramienta que permita determinar mejor la eficiencia de determinados cultivos, en base a las potencialidades o dificultades encontradas en la realización de este trabajo.

La estructura de este trabajo está desarrollada de la siguiente manera: se comenzará con una breve introducción a la metodología DEA, seguida de una revisión del estado del arte de la metodología DEA con variables flexibles así como de los trabajos que hasta la fecha han aplicado DEA al sector agrario. Posteriormente se realizará un planteamiento del modelo general con variables no monótonas, su adaptación al caso particular que se pretende analizar y una aplicación práctica al caso de 32 fincas de olivar. El documento finaliza con un capítulo de resumen y conclusiones.

2. INTRODUCCIÓN

La metodología DEA o Análisis por Envolvente de Datos, Data Envelopment Analysis, es una metodología no paramétrica para evaluar el grado de eficiencia relativa (no productividad o eficiencia absoluta) de una serie de Unidades Productivas similares o Decision Making Units (DMUs) que se comparan entre ellas. Se dice que DEA es un método no paramétrico puesto que no se requiere conocer la función de producción para estimar la frontera eficiente.

Se asume que estas Unidades Productivas consumen inputs o variables de entrada (recursos) y generan outputs o variables de salida (bienes y/o servicios).

La metodología DEA convencional considera que cuanto menor sea el nivel de entradas utilizadas (inputs) y/o mayor el nivel de las salidas generadas (outputs), más eficiente será la DMU.

Sin embargo, en algunas ocasiones es difícil discernir si una variable se comporta como entrada o como salida, porque su comportamiento no está perfectamente definido como para encuadrarlo como recurso (entrada) o como producto (salida). Esto suele suceder en determinados sistemas físicos, en las que variables como la temperatura, la presión, deben mantenerse en un determinado intervalo para que el sistema alcance su rendimiento más alto.

En caso contrario, si estas variables se encuentran fuera del intervalo óptimo, el rendimiento del sistema empeora. Del mismo modo, el valor de determinados parámetros de las analíticas de sangre que deben estar en un determinado rango de valores para considerar que los resultados son aceptables para determinar que una persona está saludable. Igualmente, cuanto más se alejen del rango de valores normales, peores condiciones de salud tendrá la persona.

Este nuevo caso ha hecho que estudios recientes en DEA consideren una nueva clasificación: variables monótonas – variables no monótonas. Así, las entradas y salidas convencionales pueden considerarse monótonas en el sentido de que cuanto menos (en el caso de los inputs) o más (en el caso de los outputs) mayor eficiencia. En contraposición a lo anterior, las variables donde sus niveles óptimos se encuentran en determinados intervalos, se consideran no monótonas en el sentido que ante menores o mayores valores de dichas variables la eficiencia no crece o decrece de forma indefinida.

Una aplicación potencial donde aparece esta distinción es el caso de cultivos permanentes, en el que algunas variables son monótonas, como el input tierra/parcela, y el output cantidad producida, pero otras (como la precipitación acumulada, el agua aplicada, o la fertilización) se comportan como no monótonas, puesto que deben estar dentro de un rango de valores. Esto es fácilmente comprensible, dado que económicamente y fisiológicamente son desfavorables

tanto la ausencia de estas variables mencionadas (falta de calibre, defectos morfológicos, caída de producción) como el exceso de estas variables (asfixia radicular por encharcamiento, percolación del exceso de agua de riego, lixiviación de nutrientes y contaminación por nitratos del suelo).

3. ESTADO DEL ARTE

El estado del arte se divide en dos secciones. Por un lado, se realiza una revisión del estado del arte de la herramienta DEA en presencia de variables flexibles, es decir, aquellas variables que por algún motivo no se comportan como entradas o salidas convencionales. Por otro lado, y dado que en este trabajo se va a realizar una aplicación DEA relacionada con cultivos, se revisa adicionalmente el estado del arte de aplicaciones DEA en el ámbito agrario.

3.1. ESTADO DEL ARTE EN DEA CON VARIABLES FLEXIBLES

La herramienta DEA fue introducida por *Charnes et al. (1978)* para servir como mecanismo para evaluar eficiencias relativas de un grupo de unidades productivas similares. DEA proporciona una metodología no paramétrica para evaluar eficiencias de cada unidad productiva (de entre un conjunto de Unidades Productivas) con respecto a las demás. En el modelo original de *Charnes et al. (1978)*, la eficiencia está representada por el ratio salidas ponderadas respecto entradas ponderadas. Una característica importante de DEA es la capacidad de proporcionar puntuaciones de eficiencia mientras se tienen en cuenta múltiples entradas y salidas. En la aplicación de DEA convencional, se asume que dada una colección de medidas disponibles, uno puede claramente especificar cuál actúa como inputs y cual como outputs.

Cook et al (2000, 2001) exponen un estudio convencional de eficiencia de operaciones de sucursales bancarias. Las salidas utilizadas son operaciones típicas como extracciones y depósitos, y las entradas diversos tipos de personal. Sin embargo, si se quisiera evaluar la eficiencia de cada sucursal para atraer inversiones, un factor como el número de clientes de “alto valor” podría actuar como entrada (factor ambiental que ayuda a la sucursal generando su actual cartera), o como salida (aproximación a una medida para futuras inversiones).

Para el caso de medidas como los depósitos, puede ser una salida (fuente de ingresos para la sucursal), pero al mismo tiempo, existen argumentos para considerar el tiempo de los empleados en procesar operaciones de depósitos o aperturas de cuentas con depósitos como ventaja para vender productos más rentables a los mismos.

Otros autores posteriores (*Zhu, 2002; Färe and Grosskopf, 2004*) han ido investigando en la misma línea planteada por DEA tradicional como metodología no paramétrica para evaluar la eficiencia de un número homogéneo de DMUs

Por otro lado, una de las cuestiones más importantes a tener en cuenta cuando se aplican aproximaciones DEA es la selección adecuada de los inputs y los outputs. Como indicó *Cooper et al (2006)*, los inputs y outputs seleccionados deberían reflejar el interés de un experto de

manera que la inclusión de estas variables en el análisis debería tener sentido en términos de evaluar la eficiencia. En los modelos DEA, las unidades de medida de los distintos inputs y outputs no necesitan ser análogos (Kg, €, nº árboles o personas), *Cooper et al (2006)*.

Como ya hemos visto, existen situaciones en las que un determinado número de variables no pueden ser consideradas como entradas o salidas clásicas de un sistema, sino que se mueven en distintos grados, de modo que actúan como entradas en un rango de valores (la eficiencia aumenta cuanto menor es la variable), y actúan como salidas en otro rango de valores (la eficiencia aumenta cuando aumenta la variable).

El planteamiento aquí expuesto es totalmente diferente a lo ya existente en la literatura técnica, sin embargo, hemos descubierto que está íntimamente relacionado con el concepto existente en DEA de variables flexibles o "dual-role factor". Es decir, variables que pueden ser consideradas tanto como entradas o como salidas; pero como veremos, son esencialmente diferentes. Por tanto, dado que no existe en la actualidad nada más parecido, hacemos la revisión del estado del arte en este sentido.

El primer autor que trata (no sin grandes dudas) esta doble vertiente de una variable como entrada o salida (Ingresos de Investigación) es *Beasley (1990)*, que presenta un modelo cuantitativo para comparar departamentos de investigación de Universidades del Reino Unido para una misma disciplina. El autor se plantea que, para decidir si una medida de entrada/salida se puede usar para comparar departamentos, primero tiene que estudiar conceptualmente cuáles son las entradas y cuáles las salidas, y luego considerar los datos que están realmente disponibles de cada una de esas medidas.

En este sentido, toma como aproximación que las únicas medidas de entradas relevantes para un departamento son las de índole Financiera, dado que a mayor presupuesto tendrá mejor equipamiento técnico y mayor número de investigadores. Igualmente, la primera salida de un departamento será el Incremento de Conocimiento General (libros, publicaciones, patentes) obviando el incremento de conocimiento específico de cada persona, que no sería medible fácilmente.

Expone un modelo DEA básico con respecto a la eficiencia general de departamentos universitarios, en el que las medidas de entrada de índole financiera son:

- Gastos generales (la mayor parte son salarios)
- Gasto en equipamiento
- Ingresos de investigación (en trabajos previos fue considerado medida de salida).

Su planteamiento es que los ingresos de investigación corregidos por el tamaño del departamento (ya sea ingresos de investigación/académico o ingresos/gasto en equipamiento), es una medida del reconocimiento/estima de un departamento y su trabajo llevado a cabo.

Mientras que la evaluación del éxito de un departamento en la captación de ingresos de investigación puede ser importante, *Beasley (1990)* considera igualmente importante evaluar cómo de efectivo es el departamento en convertir esa entrada de dinero en salidas (Incremento del Conocimiento). Entre las medidas de salidas considera el nº de graduados (UGs), el nº de postgraduados (PGs T), el nº de doctorandos (PGs R), los ingresos de investigación, además de la clasificación investigadora del departamento en base a su nivel investigador (Star, A+, A, A-).

El autor expone que no aboga por el doble uso de la medida ingresos de investigación como medida de entrada y de salida simultáneamente, sino que la utiliza como aproximación de una medida de salida de resultados de investigación (cantidad de datos relativos a publicaciones y citas de departamentos de química y física) de la que no existen datos disponibles, en términos de cantidad del actual montante de Ingresos de Investigación.

En el artículo se propone una eficiencia e_p de la DMUp que se calcula a través del siguiente modelo

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } e_p \\
 & S(a, b, k) = \left(\sum_{i=a}^v u_i y_{ik} \right) \quad 1 \leq a \leq b \leq s \quad e_k = S(1, s, k)/T(1, t, k) \quad k = 1, \dots, n \\
 & S(a, b, -) = \sum_{k=1}^n S(a, b, k) \quad 1 \leq a \leq b \leq s \quad 0 \leq e_k \leq 1 \quad k = 1, \dots, n \\
 & T(a, b, k) = \left(\sum_{j=a}^b v_j x_{jk} \right) \quad 1 \leq a \leq b \leq t \quad u_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, s \\
 & T(a, b, -) = \sum_{k=1}^n T(a, b, k) \quad 1 \leq a \leq b \leq t \quad v_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, t \\
 & F = \left(\sum_{k=1}^n x_{2k} \right) / \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^3 x_{jk} \right) \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

Donde e_p es la suma ponderada de los outputs dividida por la suma ponderada de los inputs (estando las eficiencias entre 0 y 1, y los coeficientes ponderadores positivos), igualmente emplea una notación simplificada que se indica al lado.

Posteriormente, el mismo autor *Beasley (1995)*, en un nuevo modelo basado en DEA sobre la eficiencia en enseñanza e investigación (simultáneamente) de departamentos universitarios para una misma disciplina, vuelve a recurrir a la misma consideración. La clave en este modelo

es maximizar la eficiencia de un departamento ($\max e_k$) mediante una aproximación (*Charnes and Cooper (1962)*) en la que se convierte en lineal un programa no lineal del reparto de los dos recursos compartidos: enseñanza e investigación.

$$\begin{aligned} u_i &\geq \epsilon & i = 1, \dots, 8 \\ v_j &\geq \epsilon & j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

(B.1)

En este artículo se indica que para aplicar DEA a los departamentos universitarios hay que:

- Determinar las medidas de entradas y salidas para cada departamento.
- Definir la eficiencia para cada departamento como una suma ponderada de salidas, dividida por la suma ponderada de entradas, donde todas las eficiencias están restringidas entre 0 y 1,
- Determinar un valor numérico de eficiencia para un departamento en particular, maximizando su eficiencia mediante la selección de valores apropiados de los pesos.

En este caso, vuelve a considerar las mismas medidas de entradas y salidas de su anterior trabajo, entre ellos encontramos de nuevo los ingresos de investigación como salida por aproximación a las salidas de investigación en términos de cantidad (publicaciones y/o citas), y a la vez como entrada.

Para evaluar la eficiencia de un departamento hay que seleccionar los valores adecuados de los pesos que maximizan su eficiencia comparado con el resto de sus compañeros.

El modelo DEA básico propuesto proporciona un valor de la eficiencia general de cada departamento. Sin embargo, ¿cómo se puede determinar la eficiencia de cada departamento en cada una de sus funciones básicas (eficiencias de enseñanza e investigación)?

Para ello, el autor discierne de nuevo qué medidas de entrada y salida están asociadas a cada función de enseñanza o investigación. En este sentido, indica que excepto el nº de graduados y el nº post graduados que están asociados a medidas de salida en enseñanza, el resto de medidas de salida están asociadas a investigación (nº de doctorandos, Ingresos de Investigación, y la clasificación investigadora).

En el caso de las medidas de entrada, llega a la conclusión que los ingresos de investigación están asociados a la función de Investigación. Igualmente, la entrada de gastos generales y gastos de equipamiento, se deben ponderar entre las dos actividades de enseñanza e investigación.

Para determinar esa ponderación, aplica DEA para medir la eficiencia en la enseñanza, planteada como la suma ponderada de sus salidas (graduados y postgraduados de enseñanza) dividida por la suma ponderada de los inputs (gastos generales y gastos equipamiento) achacables exclusivamente a enseñanza. De igual modo, se plantearía la eficiencia de investigación (suma ponderada de sus salidas en nº de doctorandos, Ingresos de Investigación y la clasificación investigadora, dividida por la suma ponderada de los inputs –gastos generales y gastos en equipamiento- achacables a investigación).

Adicionalmente, propone la aproximación de que ambas eficiencias (enseñanza e investigación) están ligadas vía variables q_1 y q_2 que representan el prorrateo de las medidas de entrada (gastos generales, gastos equipamiento) asociadas a enseñanza y a investigación, respectivamente.

q_1 – proporción de gastos generales asociada a enseñanza

q_2 – proporción de gastos equipamiento asociada a enseñanza

$(1-q_1)$ – proporción de gastos generales asociada a investigación

$(1-q_2)$ – proporción de gastos equipamiento asociada a investigación.

Igualmente, propone un límite superior $(1-\epsilon)$ e inferior (ϵ) para q_1 y q_2 , para asegurar que una proporción no nula de gastos de equipamiento y gastos generales se asocie con enseñanza e investigación.

$$\begin{aligned} \epsilon &\leq q_1 \leq 1 - \epsilon \\ \epsilon &\leq q_2 \leq 1 - \epsilon \end{aligned} \quad (B.2)$$

Por tanto, la eficiencia de enseñanza (t_k) y la eficiencia de investigación (r_k) están expresadas según DEA en base a las entradas o salidas asociadas a enseñanza o investigación, pero con la diferencia que ambas eficiencias están ligadas por la relación entre q_1 y q_2 . Por tanto, con esta aproximación no se requiere a priori dividir los gastos (generales o equipamiento) en gastos de enseñanza o gastos de investigación.

$$\begin{aligned} t_k &= \left(\sum_{i=1}^2 u_i y_{ik} \right) / \left(\sum_{j=1}^2 q_j v_j x_{jk} \right) & k = 1, \dots, n & \quad \begin{aligned} 0 &\leq t_k \leq 1 & k = 1, \dots, n \\ 0 &\leq r_k \leq 1 & k = 1, \dots, n. \end{aligned} \\ r_k &= \left(\sum_{i=3}^8 u_i y_{ik} \right) / \left(\sum_{j=1}^2 (1 - q_j) v_j x_{jk} + v_3 x_{3k} \right) & k = 1, \dots, n & \end{aligned} \quad (B.3)$$

Parece lógico pensar que se debería maximizar cada una de esas eficiencias separadamente, pero el autor propone una aproximación en la que λ es la fracción del total inputs ponderados de enseñanza

$$\lambda = \left(\sum_{j=1}^2 q_j v_j x_{jp} \right) / \left(\sum_{j=1}^3 v_j x_{jp} \right) \quad (\text{B.4})$$

Esta fracción λ es convertida en output ponderados con la eficiencia t_p . Igualmente la fracción ponderada del total de input debidos a investigación para ese departamento p es $(1-\lambda)$, y es convertida a output ponderados con la eficiencia r_p . Por tanto, la eficiencia conjunta al convertir input ponderados a outputs ponderados:

$$\lambda t_p + (1 - \lambda) r_p \quad (\text{B.5})$$

$$\left[\left(\sum_{j=1}^2 q_j v_j x_{jp} \right) / \left(\sum_{j=1}^3 v_j x_{jp} \right) \right] \left[\left(\sum_{i=1}^2 u_i y_{ip} \right) / \left(\sum_{j=1}^2 q_j v_j x_{jp} \right) \right] + \left[1 - \left(\sum_{j=1}^2 q_j v_j x_{jp} \right) / \left(\sum_{j=1}^3 v_j x_{jp} \right) \right] \left[\left(\sum_{i=3}^8 u_i y_{ip} \right) / \left(\sum_{j=1}^2 (1 - q_j) v_j x_{jp} + v_3 x_{3p} \right) \right]$$

que tras simplificar quedaría e_p , por tanto para determinar conjuntamente la eficiencia de enseñanza e investigación, sólo hay que maximizar la eficiencia conjunta e_p

$$\left(\sum_{i=1}^8 u_i y_{ip} \right) / \left(\sum_{j=1}^3 v_j x_{jp} \right) \quad (\text{B.6})$$

En el modelo completo, a diferencia de la anterior aproximación, para determinar eficiencias de enseñanza e investigación de un departamento, hay que maximizar la eficiencia del departamento mediante un programa no lineal de $2n+14$ variables y $2n+16$ restricciones.

Por otro lado *Cook et al (2006)* proponen una metodología para modelar este tipo de variables que pueden actuar como entradas o salidas (Dual Role Factor). Tratando estas variables como entradas no discrecionales, desarrollan un modelo que puede ser usado para determinar qué estado de esa variable predomina dentro de cada Unidad Productiva DMU (entrada, salida, o equilibrio). Concretamente, el modelo determina en qué DMU la variable se comporta como entrada (cuanto menor sea el valor de la variable más beneficioso para la DMU), y en cuáles como salida (cuanto mayor sea la variable más rentable para la DMU).

Asumiendo que un factor particular (p.ej. RI, ingresos de investigación) está retenido por cada DMU en la cantidad ω_k y sirve tanto como factor input/output. Adoptando el modelo CRS (Constant Return to Scale) de *Charnes et al (1978)*, para evaluar la eficiencia de una DMU se resuelve el problema siguiente

$$\begin{aligned}
& \max \left(\sum_{r=1}^R \mu_r y_{r0} + \gamma w_0 \right) / \left(\sum_{t=1}^I v_t x_{t0} + \beta w_0 \right), \\
\text{subject to: } & \sum_{r=1}^R \mu_r y_{rk} + \gamma w_k - \sum_{t=1}^I v_t x_{tk} - \beta w_k \leq 0, \\
& k = 1, \dots, K, \\
& \mu_r, v_t, \gamma, \beta \geq 0.
\end{aligned} \tag{C.1}$$

Este problema es básicamente el propuesto por *Beasley (1990,1995)*, aunque en esta presentación, w_k representa el nivel de ingresos de investigación. Este modelo tiene el defecto de que en ausencia de restricciones para los multiplicadores μ_r y v_t , cada DMU será 100% eficiente.

Posteriormente presenta el “Dual Factor Problem” como una modificación del anterior:

$$\begin{aligned}
& \max \left(\sum_{r=1}^R \mu_r y_{r0} + \gamma w_0 - \beta w_0 \right) / \left(\sum_{t=1}^I v_t x_{t0} \right) \\
\text{subject to: } & \sum_{r=1}^R \mu_r y_{rk} + \gamma w_k - \beta w_k - \sum_{t=1}^I v_t x_{tk} \leq 0, \\
& k = 1, \dots, K, \\
& \mu_r, v_t, \gamma, \beta \geq 0.
\end{aligned} \tag{C.2}$$

Hay variables no discretionales que tienen un impacto en la eficiencia pero no pueden ser controlados por la autoridad de la DMU, por lo que en la optimización no interesa reducirlos como los inputs discretionales, por lo que el medio adecuado es modelar estos inputs moviéndolos al lado de los outputs con signo negativo. Por tanto, linealizando el problema anterior, obtenía:

$$\begin{aligned}
e_0^* &= \max \sum_{r=1}^R \mu_r y_{r0} + \gamma w_0 - \beta w_0, \\
\text{subject to: } & \sum_{t=1}^I v_t x_{t0} = 1, \\
& \sum_{r=1}^R \mu_r y_{rk} + \gamma w_k - \beta w_k - \sum_{t=1}^I v_t x_{tk} \leq 0, \\
& k = 1, \dots, K \\
& \mu_r, v_t, \gamma, \beta \geq 0.
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Desarrolla un modelo para reasignar tan sólo uno de estos dual-role factor entre las DMUs de manera que se optimice la eficiencia agregada de todas las DMUs. En otros casos, donde no hay

ninguna autoridad que decida el estado del factor, el modelo puede servir para colocar en una mejor ubicación que la existente.

El autor plantea dos modelos para reasignar los dual-role factor, pero para ello primero define 3 conjuntos de DMU en función del comportamiento input/output del factor en estudio en cada DMU, así el conjunto de DMUs K_1 ($\gamma - \beta < 0$, por lo que se comporta como input), K_2 ($\gamma - \beta > 0$, por lo que se comporta como output), y K_3 ($\gamma - \beta = 0$, por lo que está en equilibrio).

El primer modelo, consiste en reasignar basándose en una perturbación de una asignación existente, y que tras linealizar el problema obtiene:

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{k \in K_1} \left[\sum_r \mu_r y_{rk} + \delta_k \right] + \sum_{k \in K_2} \left[\sum_r \mu_r y_{rk} - \delta_k \right] \\
& \quad + \sum_{k \in K_3} \left[\sum_r \mu_r y_{rk} \right], \\
\text{subject to: } & \sum_k \sum_l v_l x_{lk} = 1, \\
& \sum_r \mu_r y_{rk} + \delta_k - \sum_l v_l x_{lk} \leq 0, \quad k \in K_1, \\
& \sum_r \mu_r y_{rk} - \delta_k - \sum_l v_l x_{lk} \leq 0, \quad k \in K_2, \\
& \sum_r \mu_r y_{rk} - \sum_l v_l x_{lk} \leq 0, \quad k \in K_3, \quad (10) \\
& \sum_{k \in K_1 \cup K_2} \delta_k = \alpha \bar{W}, \\
& \alpha \bar{w}_k \leq \delta_k \leq \alpha w_k^U, \quad k \in K_1, \\
& \alpha w_k^L \leq \delta_k \leq \alpha \bar{w}_k, \quad k \in K_2, \\
& \mu_r, v_l, \alpha, \delta_k \geq 0.
\end{aligned} \tag{C.4}$$

El segundo modelo, consiste en una asignación cero-base del dual role factor, que tras linealizar, obtiene:

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{k \in K} \sum_r \mu_r y_{rk} + 2 \sum_{k \in K} \phi_k - \sum_{k \in K} \delta_k, \\
\text{subject to: } & \sum_{k \in K} \sum_l v_l x_{lk} = 1, \\
& \sum_r \mu_r y_{rk} + 2\phi_k - \delta_k - \sum_l v_l x_{lk} \leq 0, \quad k \in K, \\
& \sum_{k \in K} \delta_k = \alpha W, \quad (14) \\
& \alpha w^L \leq \delta_k \leq \alpha w^U, \quad k \in K, \\
& \phi_k \leq M d_k, \\
& \phi_k \leq \delta_k, \\
& \delta_k \leq \phi_k + M(1 - d_k), \\
& \mu_r, v_l, \alpha, \delta_k, \phi_k \geq 0, \quad d_k \in \{0, 1\},
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Ejemplos de variables que actúan como dual-role factor son: aprendices de organizaciones (como enfermeras, estudiantes de medicina, y doctorandos), y becarios de departamentos de universidad. En el caso de los hospitales, a la hora de evaluar la eficiencia de un hospital es importante el número de aprendices de enfermería incluidos en el personal. El número de aprendices de enfermería es un factor claro de medida de salida del hospital, pero a la vez es un componente del personal total, por lo que también es un factor de entrada.

En otro ejemplo, los estudiantes de grado pueden ser vistos con capacidad para actuar como Dual Role Factor, actuando simultáneamente como input (el nº de estudiantes de grado participantes como asistentes del programa de investigación) y output (el nº total de estudiantes de grado que están siendo entrenados) a la vez. El autor aplica el modelo al análisis departamentos de universidad (con los datos de *Beasley (1990, 1995)*), pero critica que su posición no es enteramente correcta.

Igualmente *Cook and Zhu (2007)* proponen una metodología para modelar este tipo de problemas DEA en los que algunas medidas de rendimiento pueden actuar como input o como output (conocidas como medidas flexibles), concretamente proponen una modificación de Modelo CRS (Constant Returns to Scale) para adaptarlo a estas medidas flexibles.

En algunas situaciones, el estatus de algunas medidas puede ser considerado como entrada o salida de manera flexible. Esta flexibilidad está presente en recursos que también representan un producto tangible de la organización como (enfermeras en prácticas, MIR, estudiantes de grado, financiación de investigación). Asumen que los únicos candidatos para variables flexibles son aquellas cuyo estatus puede ser claramente entrada o salida. Variables como costes, que son inputs, nunca podrán ser sometidos a este tipo de análisis.

En este caso los autores se basan en la investigación previa de *Cook and Bala (2003)* que proponían examinar información adicional para decidir el estado apropiado (salida o entrada) para cada medida. En concreto, investigaron la información adicional proporcionada por consultores bancarios que clasificaban las oficinas bancarias en buenas o malas. Se trataría de asignar un estado a cada variable flexible de manera que proporcione puntuaciones de eficiencia acordes con la opinión de los expertos.

La modificación propuesta del modelo Constant Return to Scale (CRS) permite la inclusión de medidas flexibles en el análisis.

$$\begin{aligned}
\max \quad & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}} \\
\text{s.t.} \quad & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
& \mu_r, v_i \geq 0, \quad \forall r, i
\end{aligned} \tag{D.1}$$

Suponiendo que existan L medidas flexibles (w_{lj}), para cada medida l , introducimos una variable binaria d_l que cuando es igual a 1 es un output y cuando es igual a cero es un input, y γ_l que es el peso de cada medida l .

$$\begin{aligned}
\max \quad & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro} + \sum_{l=1}^L d_l \gamma_l w_{lo}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + \sum_{l=1}^L (1 - d_l) \gamma_l w_{lo}} \\
\text{s.t.} \quad & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + \sum_{l=1}^L d_l \gamma_l w_{lj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{l=1}^L (1 - d_l) \gamma_l w_{lj}} \leq 1, \\
& j = 1, 2, \dots, n \\
& d_l \in \{0, 1\}, \quad \forall l \quad \mu_r, v_i, \gamma_l \geq 0, \quad \forall r, i, l
\end{aligned} \tag{D.2}$$

El modelo determina una asignación, ya sea entrada o salida para cada una de estas variables. En este sentido, se proporcionan dos aproximaciones del modelo para llevar a cabo la determinación, un modelo denominado individual DMU que se aplica a cada DMU por separado, obteniendo un conjunto de soluciones óptimas, y tomando como criterio para decidir el estado general como input o como output, el que tenga la mayoría de los casos.

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro} + \sum_{l=1}^L d_l \gamma_l w_{lo} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + \sum_{l=1}^L d_l \gamma_l w_{lj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \\
& \quad - \sum_{l=1}^L (1 - d_l) \gamma_l w_{lj} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n; \\
& \sum_{i=1}^m v_i x_{io} + \sum_{l=1}^L (1 - d_l) \gamma_l w_{lo} = 1 \\
& d_l \in \{0, 1\}, \quad \mu_r, v_i, \gamma_l \geq 0, \quad \forall r, i, l
\end{aligned} \tag{D.3}$$

El modelo obtenido es no lineal, y se hace lineal cambiando algunas variables $\delta_l = d_l \gamma_l$ ($l=1,2,\dots,L$) e imponiendo la siguientes restricciones que incluyen un número M positivo muy grande.

$$\begin{aligned}
0 & \leq \delta_l \leq M d_l, \\
\delta_l & \leq \gamma_l \leq \delta_l + M(1 - d_l),
\end{aligned} \tag{D.4}$$

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro} + \sum_{l=1}^L \delta_l w_{lo} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + 2 \sum_{l=1}^L \delta_l w_{lj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \\
& - \sum_{l=1}^L \gamma_l w_{lj} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n; \\
& \sum_{i=1}^m v_i x_{io} + \sum_{l=1}^L \gamma_l w_{lo} - \sum_{l=1}^L \delta_l w_{lo} = 1 \\
& 0 \leq \delta_l \leq M d_l \\
& \delta_l \leq \gamma_l \leq \delta_l + M(1 - d_l) \\
& d_l \in \{0, 1\}, \quad \delta_l, \gamma_l \geq 0, \quad \forall l; \quad \mu_r, v_i \geq 0, \quad \forall r, i
\end{aligned} \tag{D.5}$$

El otro modelo, viéndolo desde la perspectiva de quien gestiona un grupo de DMU, para cada variable flexible, optimiza la eficiencia agregada de un grupo de DMUs, de modo que decide entre entrada/salida para el caso en que la eficiencia agregada es mayor. La designación óptima de una variable flexible como entrada o como salida, será la creada por el modelo que optimice el agregado o el ratio medio de salidas respecto a entradas.

$$\begin{aligned}
\max \quad & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r \left(\sum_{j=1}^n y_{rj} \right) + \sum_{l=1}^L d_l \gamma_l \sum_{j=1}^n w_{lj}}{\sum_{i=1}^m v_i \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right) + \sum_{l=1}^L (1 - d_l) \gamma_l \sum_{j=1}^n w_{lj}} \\
\text{s.t.} \quad & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + \sum_{l=1}^L d_l \gamma_l w_{lj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{l=1}^L (1 - d_l) \gamma_l w_{lj}} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
& d_l \in \{0, 1\}, \quad \mu_r, v_i, \gamma_l \geq 0, \quad \forall r, i, l
\end{aligned} \tag{D.6}$$

El problema agregado es equivalente a un problema de programación lineal entera.

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{r=1}^s \mu_r \tilde{y}_r + \sum_{l=1}^L \delta_l \tilde{w}_l \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + 2 \sum_{l=1}^L \delta_l w_{lj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \\
& - \sum_{l=1}^L \gamma_l w_{lj} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\
& \sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_i + \sum_{l=1}^L \gamma_l \tilde{w}_l - \sum_{l=1}^L \delta_l \tilde{w}_l = 1 \\
& 0 \leq \delta_l \leq M d_l \\
& \delta_l \leq \gamma_l \leq \delta_l + M(1 - d_l) \\
& d_l \in \{0, 1\}, \quad \mu_r, v_i, \gamma_l \geq 0, \quad \forall r, i, l
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Ambos modelos (individual y agregado) pueden reducir el poder discriminador del modelo DEA resultante, con respecto al número de DMU eficientes generadas. Desde el punto de vista de la optimización es lógico que esto ocurra. Es un problema la suficiente discriminación entre

las puntuaciones de eficiencia en cualquier análisis DEA. En estos casos, tal discriminación se consigue imponiendo restricciones en las variables multiplicadoras.

Igualmente, aplican los dos modelos obtenidos a los datos de dos casos conocidos. Por un lado, a los datos de *Beasley (1990, 1995)* para determinar la clasificación apropiada de los “ingresos de investigación” (individual DMU), concluyendo que en la mayoría de los casos (30 de los 50 estudiados) se trata como un input. Cuando emplean el modelo agregado, el óptimo se obtiene cuando se tratan los “ingresos de investigación” como salida, esto es debido a que esa preferencia por el estado salida en 20 casos de 50, es más fuerte que la preferencia existente en los 30 casos de 50, que se prefiere como entrada. Del mismo modo, el modelo agregado es demasiado sensible con las DMUs extremas o más grandes

Posteriormente, aplican los dos modelos al caso de datos de múltiples factores de sucursales bancarias de *Cook et al (2000)* y *Cook et al (2001)*.

Por su parte, *Toloo (2009)* indica que el modelo de *Cook and Zhu (2007)* que proponía un método para determinar dónde una medida se comportaba como input y dónde como output, reflejaba valores incorrectos de eficiencia debido a algunos problemas computacionales en la aproximación realizada al introducir un número positivo muy grande (M) en el modelo.

Por tanto en su revisión, empiezan exponiendo la eficiencia de DMU_0 usando el modelo CCR ratio.

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0}}{\sum_{l=1}^m v_l x_{l0}} \\
 \text{s.t.} \quad & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj}}{\sum_{l=1}^m v_l x_{lj}} \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 & \mu_r, v_l \geq 0 \quad \forall r, l.
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

En el modelo estándar CCR ratio el estado input/output de las variables es conocido. Sin embargo, algunas “medidas flexibles” pueden ser incluidas en el modelo como inputs o como outputs.

Para determinar el estado entrada/salida de una medida flexible (L), *Cook and Zhu (2007)* proponían una mezcla de un programa entero mixto no lineal fraccional,

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} + \sum_{l=1}^L d_l \gamma_l \omega_{l0}}{\sum_{l=1}^m v_l x_{l0} + \sum_{l=1}^L (1 - d_l) \gamma_l \omega_{l0}} \\
 \text{s.t.} \quad & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + \sum_{l=1}^L d_l \gamma_l \omega_{lj}}{\sum_{l=1}^m v_l x_{lj} + \sum_{l=1}^L (1 - d_l) \gamma_l \omega_{lj}} \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 & d_l \in \{0, 1\} \quad \forall l, \\
 & \mu_r, v_l, \gamma_l \geq 0 \quad \forall r, l.
 \end{aligned} \tag{E.2}$$

que finalmente transformaban en un programa lineal entero al cambiar $\delta_l = d_l \gamma_l$ ($l=1,2,\dots, L$) e imponiendo la siguiente restricciones que incluyen un número M positivo muy grande.

Por lo que el modelo se re $\begin{matrix} 0 \leq \delta_l \leq Md_l, \\ \delta_l \leq \gamma_l \leq \delta_l + M(1 - d_l), \end{matrix}$) mixto así: (E.3)

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} + \sum_{l=1}^L \delta_l \omega_{l0} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} + \sum_{l=1}^L \gamma_l \omega_{l0} - \sum_{l=1}^L \delta_l \omega_{l0} = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + 2 \sum_{l=1}^L \delta_l \omega_{lj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{l=1}^L \gamma_l \omega_{lj} \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 & 0 \leq \delta_l \leq Md_l, \\
 & \delta_l \leq \gamma_l \leq \delta_l + M(1 - d_l), \\
 & d_l \in \{0, 1\}, \delta_l, \gamma_l \geq 0 \quad \forall l, \\
 & \mu_r, v_i \geq 0 \quad \forall r, i.
 \end{aligned} \tag{E.4}$$

Sin embargo, *Toloo (2009)* calculando para dos casos (ingresos de investigación (RI) como variable de entrada, y otro en que RI actúa como variable de salida), obtiene que 5 de las 21 universidades que *Cook and Zhu (2007)* habían obtenido como eficientes, no lo eran.

De este modo propone un modelo revisado, en el que cuando $d^*=1$, entonces RI es una medida de salida y los resultados son correctos. El problema surge cuando es igual a cero, dado que no es un cero absoluto sino una “machine zero” que al multiplicarla por un número M positivo y grande, no es necesariamente cero. Para evitarlo, elimina el M del modelo y plantea varios modelos LP equivalentes que acaban terminando en un programa entero lineal (siendo t un número positivo):

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 & \mu_r, v_i \geq 0 \quad \forall r, i, \\
 \text{and} \\
 \max \quad & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = t, \\
 & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 & \mu_r, v_i \geq 0 \quad \forall r, i,
 \end{aligned} \tag{E.5}$$

Plantea el Teorema nº 1, de modo que existe un parámetro positivo “l” que hace que el modelo del Teorema nº 1, sea equivalente al problema entero lineal inicial, y lo demuestra con soluciones óptimas.

Plantea otro Teorema nº 2, de modo que existe al menos un parámetro positivo “l” que hace el nuevo modelo planteado equivalente al modelo estándar CCR, y lo demuestra indicando que prácticamente no es necesario determinar el “l” planteado (como ocurría con el modelo que incluía el número M grande).

Plantea un segundo modelo, indicando que es equivalente al modelo inicial, de modo que existe una escala de datos que hace éste equivalente al anterior, y lo prueba con soluciones óptimas.

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} + \sum_{l=1}^L d_l \gamma_l \omega_{l0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} + \sum_{l=1}^L (1 - d_l) \gamma_l \omega_{l0}} \\
 \text{s.t.} \quad & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + \sum_{l=1}^L d_l \gamma_l \omega_{lj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{l=1}^L (1 - d_l) \gamma_l \omega_{lj}} \leq l \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 & d_l \in \{0, 1\} \quad \forall l, \\
 & 0 \leq \mu_r, v_i, \gamma_l \leq 1 \quad \forall r, i, l.
 \end{aligned} \tag{E.6}$$

Finalmente, llega al siguiente modelo indicando que es equivalente al inicialmente planteado:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} + \sum_{l=1}^L \delta_l \omega_{l0} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} + \sum_{l=1}^L \gamma_l \omega_{l0} - \sum_{l=1}^L \delta_l \omega_{l0} = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + 2 \sum_{l=1}^L \delta_l \omega_{lj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{l=1}^L \gamma_l \omega_{lj} \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 & 0 \leq \delta_l \leq d_l, \\
 & \delta_l \leq \gamma_l \leq \delta_l + (1 - d_l), \\
 & d_l \in \{0, 1\}, 0 \leq \delta_l, \gamma_l \leq 1 \quad \forall l, \\
 & 0 \leq \mu_r, v_i \leq 1 \quad \forall r, i.
 \end{aligned} \tag{E.7}$$

Tras aplicar el nuevo modelo obtenido a las 50 universidades conocidas, devuelve un valor no eficiente para las 5 universidades ya detectadas, demostrando que *Toloo (2009)* estaba equivocado.

Posteriormente, *Amirteimoori and Emrouznejad (2012)*, indican que ambos modelos *Toloo (2009)* y *Cook and Zhu (2007)*, determinan valores de eficiencia similares, pero muy altos, siempre mejores que los obtenidos por CCR, tanto cuando se considera RI variable de entrada como cuando se considera salida. Sugieren que el caso de *Toloo (2009)* es un caso particular revisado del modelo de *Cook and Zhu (2007)*, a la hora de determinar el estado de medidas flexibles en modelos DEA, y en casos reales es inseguro. *Cook and Zhu (2007)* utilizan un

número positivo grande M , y *Toloo (2009)* indica que el uso de ese número M inadecuado es el causante de las incorrectas puntuaciones de eficiencia.

Para determinar la eficiencia de varias DMU_j ($j=1, \dots, n$), se emplean varios inputs x_{ij} ($i=1, \dots, m$), y se producen varios outputs y_{rj} ($r=1, \dots, s$). Se asume que existen L medidas flexibles w_{lj} ($l=1, \dots, L$) cuyo estado es desconocido (entrada o salida). *Cook and Zhu (2007)* propusieron un problema mixto entero no lineal fraccional:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } \bar{e}_0 &= \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} + \sum_{l=1}^L d_l \gamma_l w_{l0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} + \sum_{l=1}^L (1 - d_l) \gamma_l w_{l0}} \\
 \text{s.t. } &\frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + \sum_{l=1}^L d_l \gamma_l w_{lj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{l=1}^L (1 - d_l) \gamma_l w_{lj}} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 &\mu_r, v_i, \gamma_l \geq 0, \quad \text{for all } i, r, l, \quad d_l \in \{0, 1\}, \quad l = 1, 2, \dots, L.
 \end{aligned} \tag{F.1}$$

Que luego transformaron en un problema mixto entero lineal:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } \bar{e}_0 &= \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} + \sum_{l=1}^L \delta_l w_{l0} \\
 \text{s.t. } &\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} + \sum_{l=1}^L \gamma_l z_{l0} - \sum_{l=1}^L \delta_l w_{l0} = 1, \\
 &\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + 2 \sum_{l=1}^L \delta_l w_{lj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{l=1}^L \gamma_l w_{lj} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 &0 \leq \delta_l \leq M d_l, \quad l = 1, 2, \dots, L, \\
 &\delta_l \leq \gamma_l \leq \delta_l + M(1 - d_l), \quad l = 1, 2, \dots, L, \\
 &\mu_r, v_i, \gamma_l, \delta_l \geq 0, \quad \text{for all } i, r, l, \quad d_l \in \{0, 1\}, \quad l = 1, 2, \dots, L.
 \end{aligned} \tag{F.2}$$

Siendo los inputs: gastos generales (x_1) y gastos de equipamiento (x_2), y las salidas: estudiantes de grado (y_1), investigadores postgrado (y_2) y profesores postgrado (y_3). La medida flexible son los ingresos de investigación (z_1).

El modelo propuesto por *Toloo (2009)* que evita el número M positivo grande, es un problema entero lineal.

$$\begin{aligned}
\text{Max } \bar{e}_o &= \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro} + \sum_{l=1}^L \delta_l w_{lo} \\
\text{s.t. } \sum_{i=1}^m v_i x_{io} + \sum_{l=1}^L \gamma_l z_{lo} - \sum_{l=1}^L \delta_l w_{lo} &= 1, \\
\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + 2 \sum_{l=1}^L \delta_l w_{lj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{l=1}^L \gamma_l w_{lj} &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
0 \leq \delta_l \leq d_l, \quad l &= 1, 2, \dots, L, \\
\delta_l \leq \gamma_l \leq \delta_l + (1 - d_l), \quad l &= 1, 2, \dots, L, \\
0 \leq \gamma_l, \quad \delta_l \leq 1, \quad \text{for all } l, \\
0 \leq \mu_r, \quad v_i \leq 1, \quad \text{for all } i, r, d_l \in \{0, 1\}, \quad l &= 1, 2, \dots, L.
\end{aligned} \tag{F.3}$$

Los autores desarrollan un teorema en el que demuestran que existe una escala de datos tal que el modelo lineal de *Cook and Zhu (2007)* es equivalente al de *Toloo (2009)*, dado que dividiendo todos los datos por el número M grande (y $\bar{\mu}_r = \frac{\mu_r}{M}$, $\bar{\delta}_l = \frac{\delta_l}{M}$, $\bar{v}_i = \frac{v_i}{M}$ and $\bar{\gamma}_l = \frac{\gamma_l}{M}$). Por lo que ambos modelos son equivalentes.

$$\begin{aligned}
\text{Max } \bar{e}_o &= \sum_{r=1}^s \bar{\mu}_r y_{ro} + \sum_{l=1}^L \bar{\delta}_l w_{lo} \\
\text{s.t. } \sum_{i=1}^m \bar{v}_i x_{io} + \sum_{l=1}^L \bar{\gamma}_l z_{lo} - \sum_{l=1}^L \bar{\delta}_l w_{lo} &= 1, \\
\sum_{r=1}^s \bar{\mu}_r y_{rj} + 2 \sum_{l=1}^L \bar{\delta}_l w_{lj} - \sum_{i=1}^m \bar{v}_i x_{ij} - \sum_{l=1}^L \bar{\gamma}_l w_{lj} &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
0 \leq \bar{\delta}_l \leq d_l, \quad l &= 1, 2, \dots, L, \\
\bar{\delta}_l \leq \bar{\gamma}_l \leq \bar{\delta}_l + (1 - \bar{d}_l), \quad l &= 1, 2, \dots, L, \quad \bar{\gamma}_l, \bar{\delta}_l \leq 1 \\
\bar{\mu}_r, \bar{v}_i, \bar{\gamma}_l, \bar{\delta}_l \geq 0, \quad \text{for all } i, r, l, & \quad 0 \leq \bar{\mu}_r, \bar{v}_i \leq 1. \\
d_l \in \{0, 1\}, \quad l &= 1, 2, \dots, L.
\end{aligned} \tag{F.4}$$

Concluye que en el caso de *Cook and Zhu (2007)*, los valores incorrectos de eficiencia se deben a una mala elección del valor M positivo grande.

Otro inconveniente de *Cook and Zhu (2007)* es que es demasiado optimista y sobreestima la eficiencia. Para demostrarlo expone otro segundo teorema. Pero antes desarrolla el modelo CCR con las medidas flexibles como input y otro CCR con las medidas flexibles como salidas.

$$\begin{aligned}
\text{Max } \check{e}_o &= \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro} \\
\text{s.t. } \sum_{i=1}^m v_i x_{io} + \sum_{l=1}^L \gamma_l z_{lo} &= 1, \\
\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{l=1}^L \gamma_l z_{lj} &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
\mu_r, v_i, \gamma_l &\geq 0, \quad \text{for all } i, r, l.
\end{aligned} \tag{F.5}$$

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \bar{e}_o = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro} + \sum_{l=1}^L \delta_l z_{lo} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1, \\
& \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + \sum_{l=1}^L \delta_l z_{lj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
& \mu_r, v_i, \delta_l \geq 0, \quad \text{for all } i, r, l.
\end{aligned} \tag{F.6}$$

El segundo teorema es que, tanto *Cook and Zhu (2007)*, como *Toloo (2009)* los valores de eficiencia son mayores que aquellos calculados con el modelo CCR input y/o CCR output.

Sin embargo, *Toloo (2014)*, prueba en su nuevo artículo, que al contrario de lo que sugiere *Armirtemoori and Emrouznejad (2012)*, su modelo de *Toloo (2009)* no hace sobreestimación alguna en esta aproximación.

$$\begin{aligned}
\text{max} \quad & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro} + \sum_{l=1}^L \delta_l \omega_{lo} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{io} + \sum_{l=1}^L \gamma_l \omega_{lo} - \sum_{l=1}^L \delta_l \omega_{lo} = 1 \\
& \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + 2 \sum_{l=1}^L \delta_l \omega_{lj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{l=1}^L \gamma_l \omega_{lj} \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\
& 0 \leq \delta_l \leq d_l \\
& \delta_l \leq \gamma_l \leq \delta_l + (1 - d_l) \\
& d_l \in \{0, 1\}, \quad 0 \leq \delta_l, \gamma_l \leq 1 \quad \forall l \\
& 0 \leq \mu_r, v_i \leq 1 \quad \forall r, i
\end{aligned} \tag{F.6}$$

En este sentido, expone que no reclama que su modelo desarrollado en 2009 es siempre ajustable para todo tipo de datos, pero si prueba que existe una escala de datos en la que su modelo es equivalente al de *Cook and Zhu (2007)*.

$$\begin{aligned}
\text{max} \quad & \bar{e}_o = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro} + \sum_{l=1}^L \delta_l \omega_{lo} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{io} + \sum_{l=1}^L \gamma_l \omega_{lo} - \sum_{l=1}^L \delta_l \omega_{lo} = 1 \\
& \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + 2 \sum_{l=1}^L \delta_l \omega_{lj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{l=1}^L \gamma_l \omega_{lj} \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\
& 0 \leq \delta_l \leq M d_l \\
& \delta_l \leq \gamma_l \leq \delta_l + M(1 - d_l) \\
& d_l \in \{0, 1\}, \quad \delta_l, \gamma_l \geq 0 \quad \forall l \\
& \mu_r, v_i \geq 0 \quad \forall r, i
\end{aligned} \tag{F.7}$$

Aprovechando lo ya demostrado en su lema nº 2 de 2009, se puede hacer un cambio de variable para obtener una escala adecuada de datos:

$$\begin{aligned}\bar{x}_j &= \frac{x_{1j}}{\min_j\{x_{1j} > 0\}} = \frac{x_{1j}}{0.031} & \bar{y}_j &= \frac{y_{1j}}{\min_j\{y_{1j} > 0\}} = \frac{y_{1j}}{0.002318} \\ \bar{w}_j &= \frac{w_{1j}}{\min_j\{w_{1j} > 0\}} = \frac{w_{1j}}{0.0022803}\end{aligned}\tag{F.8}$$

Demuestra mediante las tablas de datos, que con este cambio de variable sus valores coinciden con los de *Armarteimoori and Emrouznejad (2012)*. Dice que en general hay 2^L combinaciones para L medidas flexibles, siendo e_k ($k= 1, 2, \dots, 2^L$) el valor de eficiencia obtenida por CCR para cada combinación. Armarteimoori sólo tenía en cuenta 2 de las 2^L posibilidades.

Expone otro Teorema en el que partiendo de la solución óptima $(\mu_r^*, v_i^*, \delta_l^*, \gamma_j^*, d_l^*)$ de su modelo de partida, llega a demostrar que su modelo de 2009 determina el estatus de medidas flexibles sin sobreestimación.

$$\begin{aligned}\max \quad e_p &= \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} + \sum_{l \in OUT} \bar{u}_l \omega_{lo} \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{io} + \sum_{l \in IN} \bar{v}_l \omega_{lo} &= 1 \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + \sum_{l \in OUT} \bar{u}_l \omega_{lj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{l \in IN} \bar{v}_l \omega_{lj} &\leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ u_r, \bar{u}_l, v_i, \bar{v}_l &\geq 0 \quad \forall r, i, l\end{aligned}\tag{F.9}$$

Amirteimoori and Emrouznejad (2011), proponen un modelo alternativo en el que cada medida flexible es tratada como input o como output para maximizar la eficiencia técnica de cada DMU bajo análisis. En la sección 2 desarrollan el modelo DEA básico, tanto el CCR como el CRS. En la sección 3, plantean una aproximación basada en DEA para modelar procesos productivos en presencia de medidas flexibles. En la sección 4 comparan su modelo con el de *Cook and Zhu (2007)*. Finalmente en la sección 5 aplica su modelo al caso de las universidades de Reino Unido ya conocidas.

Supone que existen n-DMU expresadas como DMU_j , m-inputs expresados como x_{ij} , s-outputs como y_{rj} , y t-flexibles medidas como z_{kj} cuyo estado no es conocido (input/output). La unidad bajo evaluación se denomina $DMU_0(x_0, y_0)$.

Sugiere que sin perder generalidad, se puede asumir que sólo se estudian tres variables x,y,z en el modelo, siendo T el conjunto de posibilidades de producción PPS de la tecnología en consideración. Postula cinco axiomas: factibilidad de los datos observados, ilimitados (x,y,z), convexidad, libre disponibilidad, mínima extrapolación; y demuestra que T cumple los 5 Axiomas y que es el conjunto mínimo.

Respecto al modelo DEA con medidas flexibles, ofrece una aproximación para medir la eficiencia de DMU_o, con un modelo con orientación de entrada, en el que cada DMU fijará el estado de la variable flexible Z en interés de su nivel de eficiencia (se mantiene la numeración de los autores):

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \theta \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq \theta x_o, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y_o, \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \text{either} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \leq \theta z_o, \\ \text{or} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \geq z_o, \end{array} \right. \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{G.1}$$

Que no es un programa lineal, por lo que al transformarlo en un programa lineal mixto entero se obtiene lo siguiente, aunque hay que destacar sólo una de las dos restricciones que afectan a las medidas flexibles se debe mantener para la variable z. Siendo M un número positivo grande:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \leq \theta z_o + M \delta_1 \\
 & - \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \leq -z_o + M \delta_2 \\
 & \delta_1 + \delta_2 = 1, \\
 & \delta_1, \delta_2 \in \{0, 1\}.
 \end{aligned} \tag{G.2}$$

De manera que si seleccionamos $\delta_1=0$ entonces $\delta_2=1$, y una restricción es redundante, por tanto z_0 es seleccionado como input para DMU_0 . En caso contrario, $\delta_1=1$ entonces $\delta_2=0$, y z_0 , sería output para DMU_0 . Quedando el programa lineal como sigue:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \theta \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq \theta x_o \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y_o \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \leq \theta z_o + M \delta_1 \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \leq -z_o + M \delta_2 \\
 & \delta_1 + \delta_2 = 1 \\
 & \delta_1, \delta_2 \in \{0, 1\} \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{G.3}$$

Posteriormente, ya no considera sólo 3 variables x,y,z , siendo el estado de la variable z determinado por el modelo, sino que pasa a generalizar considerando multi-inputs (x_{ij}), multi-outputs (y_{rj}) y multi-variables flexibles (z_{kj}). Igualmente permite que cada DMU seleccione el estado de cada variable flexible, para asegurar la mejor eficiencia posible. El modelo propuesto para orientación de entrada:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \theta \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{io}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{kj} \leq \theta z_{ko} + M \delta_{1k}, \quad k = 1, 2, \dots, t, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{kj} \leq -z_{ko} + M \delta_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots, t, \\
 & \delta_{1k} + \delta_{2k} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, t, \\
 & \delta_{1k}, \delta_{2k} \in \{0, 1\}, \quad k = 1, 2, \dots, t, \\
 & \lambda_i \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{G.4}$$

Y formulado para orientación de salida, sería.

$$\begin{aligned}
& \text{Max } \phi \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{io}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \phi y_{ro}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{kj} \leq z_{ko} + M \delta_{1k}, \quad k = 1, 2, \dots, t, \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{kj} \leq -\phi z_{ko} + M \delta_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots, t, \\
& \delta_{1k} + \delta_{2k} = 1, \\
& \delta_{1k}, \delta_{2k} \in \{0, 1\}, \quad k = 1, 2, \dots, t, \\
& \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{G.5}$$

El autor concluye que desgraciadamente el modelo CRS, tanto en el modelo con orientación de salida como el modelo con orientación de entrada, producen diferentes resultados de eficiencia. Esto es obvio ya que cada DMU puede tener una misma variable flexible como input en un modelo y como output en el otro.

Por otro lado también, compara su modelo con el de *Cook and Zhu (2007)*, que es un problema entero lineal, en el que cada DMU utiliza diferentes inputs, obteniendo varios outputs, y con varios valores de medidas flexibles z_{kj} ($k=1 \dots t$)

$$\begin{aligned}
& \text{Max } \bar{e}_o = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro} + \sum_{k=1}^t \delta_k z_{ko} \\
& \text{s.t.} \sum_{i=1}^m v_i x_{io} + \sum_{k=1}^t \gamma_k z_{ko} - \sum_{k=1}^t \delta_k z_{ko} = 1, \\
& \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + 2 \sum_{k=1}^t \delta_k z_{kj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{k=1}^t \gamma_k z_{kj} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
& 0 \leq \delta_k \leq M d_k, \quad k = 1, 2, \dots, t, \\
& \delta_k \leq \gamma_k \leq \delta_k + M(1 - d_k), \quad k = 1, 2, \dots, t, \\
& \mu_r, v_i, \gamma_k, \delta_k \geq 0, \quad \text{for all } i, r, k, \\
& d_k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, 2, \dots, t.
\end{aligned} \tag{G.6}$$

Para demostrar que el modelo de *Cook and Zhu (2007)* sobreestima la eficiencia, plantea el modelo CCR asumiendo que todas las variables flexibles actúan como input y el modelo CCR con las variables flexibles como output

$$\begin{aligned}
\text{Max } \hat{e}_o &= \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro} \\
\text{s.t. } &\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + \sum_{k=1}^t \gamma_k z_{ko} = 1, \\
&\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{k=1}^t \gamma_k z_{kj} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
&\mu_r, v_i, \gamma_k \geq 0, \quad \text{for all } i, r, k.
\end{aligned} \tag{G.7}$$

$$\begin{aligned}
\text{Max } \hat{e}_o &= \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro} + \sum_{k=1}^t \delta_k z_{ko} \\
\text{s.t. } &\sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1, \\
&\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + \sum_{k=1}^t \delta_k z_{kj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
&\mu_r, v_i, \delta_k \geq 0, \quad \text{for all } i, r, k.
\end{aligned} \tag{G.8}$$

Plantea 2 teoremas, y los prueba empleando la formulación dual de la relajación continua.

En la última sección, aplica el modelo al conocido caso de las 50 Universidades de Reino Unido en el que Research Income (z_1) es considerado variable flexible, con una tabla de varias columnas de datos de eficiencia (RI como input, RI como output, RI como flexible), δ_1 , δ_2 , y eficiencia según *Cook and Zhu (2007)*, y d. Los valores óptimos de δ_1 , δ_2 , son los que indican que RI debe ser considerado como input u output (25 universidades en cada caso)

Con el modelo de *Cook and Zhu (2007)* se obtenían 21 universidades eficientes, sin embargo con éste se obtienen sólo 7, por tanto el modelo de Cook and Zhu sobrevalora la eficiencia. Igualmente comparan las eficiencias de Cook con el modelo CCR (tanto RI como input o como output) y también falla el modelo de Cook.

Con anterioridad, *Tone (2001)*, propuso una medida de eficiencia basada en holguras en DEA (Slacks-Based Measure, SBM). Esta medida escalar (0, 1) trabaja directamente con los excesos de inputs y los defectos de outputs de la DMU, al contrario que los modelos CCR y BCC que se basan en la reducción proporcional (aumento) de input (output) de los vectores y que no tiene en cuenta las holguras.

Aunque el modelo aditivo tiene la suma ponderada de holguras como su objetivo y puede discriminar entre DMUs eficientes e ineficientes, no tiene medios para medir la cuantía de ineficiencia. El modelo SBM satisface propiedades como ser invariante en unidades, y monótona decreciente con respecto a las holguras. Esta medida es determinada solamente consultando el conjunto de referencia de la DMU y no es afectada por estadísticas sobre el conjunto de datos completo. También, el modelo puede ser modificado para hacer frente a la

orientación input/orientación output como casos especiales, que son los mismos que los usados en el modelo de Russell para medir la eficiencia técnica.

Esta medida tiene conexión directa con otras medidas propuestas hace tiempo como Charnes-Cooper-Rhodes (CCR), Banker-Charnes-Cooper (BCC) y Russell. La versión dual de este modelo se puede interpretar como una maximización del beneficio virtual, en contraste con la maximización del ratio de los outputs virtuales sobre los inputs virtuales del modelo CCR.

d_i propuesta en la sección nº 2 de su artículo, siendo holguras los excesos de inputs y los defectos de outputs, demostrando que SBM puede ser interpretado como el producto de las ineficiencias de inputs y outputs.

Trabaja con DMUs con matrices input y output, $X = (x_{ij})$ e $Y = (y_{ij})$, asume que el conjunto de datos es positivo, y define el PPS (Production Possibility Set como P), donde λ es un vector no negativo:

$$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq \mathbf{0}\}, \quad (\text{H.1})$$

Considera una expresión para describir una determinada DMU (x_o, y_o) ,

$$\begin{aligned} x_o &= X\lambda + s^-, \\ y_o &= Y\lambda - s^+, \end{aligned} \quad (\text{H.2})$$

siendo mayores o iguales que cero tanto λ , s^- (holgura por exceso de input), s^+ (holgura por defecto de output). Posteriormente define un índice ρ comprendido entre 0 y 1, que tiene las propiedades de invariante en unidades y monótono.

$$\rho = \frac{1 - (1/m) \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{io}}{1 + (1/s) \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{ro}}. \quad (\text{H.3})$$

Por tanto, para estimar la eficiencia de DMU (x_o, y_o) , se puede formular el siguiente programa fraccional SBM

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \rho = \frac{1 - (1/m) \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{io}}{1 + (1/s) \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{ro}} \\ \text{subject to} \quad & x_o = X\lambda + s^-, \\ & y_o = Y\lambda - s^+, \\ & \lambda \geq \mathbf{0}, \quad s^- \geq \mathbf{0}, \quad s^+ \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{H.4})$$

Que puede ser transformado en un programa lineal usando la transformación de Charnes-Cooper como en el modelo CCR, para ello multiplica por una variable escalar $t > 0$ de manera

que el denominador sea 1, se mueve ese término a las restricciones, y resulta como objetivo minimizar el numerador

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && \tau = t - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m ts_i^- / x_{io} \\
 &\text{subject to} && 1 = t + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s ts_r^+ / y_{ro}, \\
 &&& \mathbf{x}_o = X\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{s}^-, \\
 &&& \mathbf{y}_o = Y\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{s}^+, \\
 &&& \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{s}^- \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{s}^+ \geq \mathbf{0}, \quad t > 0.
 \end{aligned} \tag{H.5}$$

Como sigue siendo un problema no lineal porque contiene términos no lineales, se puede transformar en problema lineal LP como sigue

$$\mathbf{S}^- = t\mathbf{s}^-, \quad \mathbf{S}^+ = t\mathbf{s}^+ \quad \text{and} \quad \mathbf{A} = t\boldsymbol{\lambda}.$$

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && \tau = t - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i^- / x_{io} \\
 &\text{subject to} && 1 = t + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s S_r^+ / y_{ro}, \\
 &&& t\mathbf{x}_o = X\mathbf{A} + \mathbf{S}^-, \\
 &&& t\mathbf{y}_o = Y\mathbf{A} - \mathbf{S}^+, \\
 &&& \mathbf{A} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{S}^- \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{S}^+ \geq \mathbf{0}, \quad t > 0.
 \end{aligned} \tag{H.6}$$

La solución óptima del problema LP sería $(\tau^*, t^*, \mathbf{A}^*, \mathbf{S}^{-*}, \mathbf{S}^{+*})$, por lo que la solución óptima del SBM sería:

$$\begin{aligned}
 \rho^* &= \tau^*, \quad \boldsymbol{\lambda}^* = \mathbf{A}^* / t^*, \quad \mathbf{s}^{-*} = \mathbf{S}^{-*} / t^*, \\
 \mathbf{s}^{+*} &= \mathbf{S}^{+*} / t^*.
 \end{aligned} \tag{H.7}$$

Por tanto, basándonos en ambas la DMU eficiente según SBM sería cuando $\rho^* = 1$, por tanto no debe tener holguras, excesos de inputs $\mathbf{s}^{-*} = 0$ y defectos de outputs $\mathbf{s}^{+*} = 0$, sin embargo una DMU ineficiente en SBM sería

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_o &= X\boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{s}^{-*}, \\
 \mathbf{y}_o &= Y\boldsymbol{\lambda}^* - \mathbf{s}^{+*}.
 \end{aligned} \tag{H.8}$$

por lo que para que sea eficiente se eliminan los excesos de input y se incrementan los outputs, mediante una proyección SBM

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_o &\leftarrow \mathbf{x}_o - \mathbf{s}^{-*}, \\
 \mathbf{y}_o &\leftarrow \mathbf{y}_o + \mathbf{s}^{+*}.
 \end{aligned} \tag{H.9}$$

por tanto basados en $\boldsymbol{\lambda}^*$, el conjunto de referencia (x_o, y_o) y los índices j correspondientes a los λ_j^* positivos, podemos expresarlo (no estando ρ^* afectado por los valores de otras DMUs no incluidas en el conjunto de referencia)

$$\begin{aligned}x_o &= \sum_{j \in R_o} x_j \lambda_j^* + s^{-*}, \\y_o &= \sum_{j \in R_o} y_j \lambda_j^* - s^{+*}.\end{aligned}\tag{H.10}$$

Finalmente SBM se puede interpretar como el producto de las ineficiencias de inputs y outputs, tasa media de reducción de input por tasa media de incremento de output.

$$\rho = \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{x_{io} - s_i^-}{x_{io}} \right) \left(\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{y_{ro} + s_r^+}{y_{ro}} \right)^{-1}.\tag{H.11}$$

Los autores, *Amirteimoori et al (2013)*, desarrollan un modelo para determinar el rol o el estatus de variables flexibles, concretamente un modelo basado en holguras para calcular la eficiencia relativa de DMUs con estas variables. Para ello modifican el modelo convencional de Tone (2001) para incorporar este tipo de medidas/variables flexibles.

A pesar de los estudios previos existentes, en su aproximación indican que algunas de las medidas flexibles tienen la doble condición. En este sentido, muestran que cuando una unidad operativa es eficiente en una medida flexible específica, esta medida puede jugar ambos roles (input, output) para esa unidad. En estos casos la designación óptima para una medida flexible es aquella que optimiza la eficiencia de una unidad media artificial. Demuestran que la medida flexible basada en holguras propuesta no es mejor que las medidas previas de eficiencia pero hace relativamente mejor discriminación de las DMUs.

Respecto a las Medidas Flexibles en procesos productivos, suponiendo que tenemos n-DMUs, que utilizan m-inputs, y producen s-outputs, que existen k-medidas flexibles cuyos estados (inputs, outputs) son desconocidos. La unidad bajo evaluación es $DMU_o(x_o, y_o)$. Considerando la forma de desarrollo del conjunto de posibilidades de producción (PPS)

$$x_{io} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m,\tag{I.1}$$

$$y_{ro} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$\text{For } k = 1, \dots, K, \quad \text{either } \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{kj} \leq z_{ko}$$

$$\text{For } k = 1, \dots, K, \quad \text{or } \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{kj} \geq z_{ko}$$

Las dos últimas restricciones, hacen referencia a cuando la medida flexible se comporta como output, o como input respectivamente. Una y sólo una de las restricciones será tenida en cuenta, por lo que se pueden combinar en una única ecuación como sigue:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{kj} + g_k^{(1)} - g_k^{(2)} &= z_{ko}, \quad k = 1, \dots, K, \\ g_k^{(1)}, g_k^{(2)} &\geq 0, \\ g_k^{(1)} \cdot g_k^{(2)} &= 0, \end{aligned} \quad (I.2)$$

Cuando $g_k^{(1)} > 0$ entonces z_{ko} es input, y cuando $g_k^{(2)} > 0$ entonces z_{ko} es output, mientras que cuando ambas son iguales a cero, entonces la medida flexible puede tener ambos roles. DMUo se puede expresar como sigue (siendo al menos una de las dos variables $g_k^{(1)}$ o $g_k^{(2)}$ debe ser positiva).

$$\begin{aligned} x_{io} &= \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ y_{ro} &= \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - q_r, \quad r = 1, \dots, s, \\ z_{ko} &= \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{kj} + g_k^{(1)} - g_k^{(2)}, \quad k = 1, \dots, K, \\ g_k^{(1)} \cdot g_k^{(2)} &= 0, \quad k = 1, \dots, K, \\ \lambda_j, g_k^{(1)}, g_k^{(2)}, q_r, s_i &\geq 0, \quad \text{for all } i, j, k, r. \end{aligned} \quad (I.3)$$

Teniendo en cuenta las medidas basadas en holguras de Tone (2001), la medida flexible basada en holguras de la eficiencia de DMUo se define así:

$$\pi_o = \frac{1 - \frac{1}{m+K} \left[\sum_{i=1}^m \frac{s_i}{x_{io}} + \sum_{k=1}^K \frac{g_k^{(1)}}{z_{ko}} \right]}{1 + \frac{1}{s+K} \left[\sum_{r=1}^s \frac{q_r}{y_{ro}} + \sum_{k=1}^K \frac{g_k^{(2)}}{z_{ko}} \right]} \quad (I.4)$$

Para estimar la eficiencia relativa de DMUo, se formula un problema de programación lineal fraccional

$$\begin{aligned}
\text{Min } \pi_o &= \frac{1 - \frac{1}{m+K} \left[\sum_{i=1}^m \frac{s_i}{x_{io}} + \sum_{k=1}^K \frac{g_k^{(1)}}{z_{ko}} \right]}{1 + \frac{1}{s+K} \left[\sum_{r=1}^s q_r + \sum_{k=1}^K \frac{g_k^{(2)}}{z_{ko}} \right]} \\
\text{s.t.} \\
x_{io} &= \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i, \quad i = 1, \dots, m, \\
y_{ro} &= \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - q_r, \quad r = 1, \dots, s, \\
z_{ko} &= \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{kj} + g_k^{(1)} - g_k^{(2)}, \quad k = 1, \dots, K, \\
g_k^{(1)} \cdot g_k^{(2)} &= 0, \quad k = 1, \dots, K, \\
\lambda_j, g_k^{(1)}, g_k^{(2)}, q_r, s_i &\geq 0, \quad \text{for all } i, j, k, r.
\end{aligned} \tag{I.5}$$

π_o es invariable respecto a las unidades de datos y se mantiene entre 0 y 1.

Posteriormente el autor formula un teorema (π_o el valor óptimo objetivo para el modelo FBSM no es mejor que el óptimo de medida flexible θ^*) en el que muestra que el anterior modelo FSBM de eficiencia no es mejor que la medida de eficiencia de Amirteimoori and Emrouznejad (2011), ni sobreestima la eficiencia de la DMU pero si discrimina mejor entre DMUs. Para hacer esta afirmación, trabaja sobre el modelo de Armiteimori and Emrouznejad (2011), haciendo que $\pi_o < \theta^*$. Para ello, utiliza la transformación de Charnes and Cooper y obtiene:

$$\begin{aligned}
\text{Min } \pi_o &= \rho - \frac{1}{m+K} \left[\sum_{i=1}^m \frac{s_i^x}{x_{io}} + \sum_{k=1}^K \frac{s_k^{(1)}}{z_{ko}} \right] \\
\text{s.t.} \\
\rho + \frac{1}{s+K} \left[\sum_{r=1}^s q_r + \sum_{k=1}^K \frac{g_k^{(2)}}{z_{ko}} \right] &= 1, \\
\rho x_{io} &= \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i, \quad i = 1, \dots, m, \\
\rho y_{ro} &= \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - q_r, \quad r = 1, \dots, s, \\
\rho z_{ko} &= \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{kj} + g_k^{(1)} - g_k^{(2)}, \quad k = 1, \dots, K, \\
g_k^{(1)} \cdot g_k^{(2)} &= 0, \quad k = 1, \dots, K, \\
\lambda_j, g_k^{(1)}, g_k^{(2)}, q_r, s_i &\geq 0, \quad \text{for all } i, j, k, r.
\end{aligned} \tag{I.6}$$

Y aunque se puede utilizar un algoritmo simplex modificado para su resolución, se puede obtener una aproximación alternativa con variables binarias auxiliares, para ello utiliza un numero M positivo y grande, y establece nuevas restricciones.

$$\begin{aligned}
\text{Min } \pi_o &= \rho - \frac{1}{m+K} \left[\sum_{i=1}^m \frac{s_i}{x_{io}} + \sum_{k=1}^K \frac{g_k^{(1)}}{z_{ko}} \right] \\
\text{s.t.} \\
\rho + \frac{1}{s+K} \left[\sum_{i=1}^m \frac{q_r}{y_{ro}} + \sum_{k=1}^K \frac{g_k^{(2)}}{z_{ko}} \right] &= 1, \\
\rho x_{io} &= \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i, \quad i = 1, \dots, m, \\
\rho y_{ro} &= \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - q_r, \quad r = 1, \dots, s, \\
\rho z_{ko} &= \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{kj} + g_k^{(1)} - g_k^{(2)}, \quad k = 1, \dots, K, \\
0 &\leq g_k^{(1)} \leq Md_k^{(1)}, \quad k = 1, \dots, K, \\
0 &\leq g_k^{(2)} \leq Md_k^{(2)}, \quad k = 1, \dots, K, \\
d_k^{(1)} + d_k^{(2)} &= 1, \quad k = 1, \dots, K, \\
\lambda_j, g_k^{(1)}, g_k^{(2)}, q_r, s_i &\geq 0, \quad \text{for all } i, j, k, r, \\
d_k^{(1)}, d_k^{(2)} &\in \{0, 1\}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Una $DMU_o(x_o, y_o)$ será FSBM eficiente si y solo si $\pi_o = 1$. Para que una DMU_o sea eficiente no debe haber excesos de input ni defectos de outputs, y cuando $g_k^{(1)} = g_k^{(2)} = 0$, z_{ko} puede actuar como input y como output para esa DMU_o sin alterar el nivel de eficiencia. En estos casos se puede asumir que la designación óptima input/output para variables flexibles será aquella que es creada por el siguiente modelo que optimiza la eficiencia de una media de DMU con:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \quad \bar{y}_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{rj}, \quad r = 1, \dots, s \quad \bar{z}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_{kj}, \quad k = 1, \dots, K$$

Este modelo determina el rol (input/output) de k-medidas flexibles para DMU.

$$\begin{aligned}
\text{Min } \pi_o &= \rho - \frac{1}{m+K} \left[\sum_{i=1}^m \frac{s_i^*}{x_{io}} + \sum_{k=1}^K \frac{g_k^{(1)}}{z_{ko}} \right] \\
\text{s.t.} \\
\rho + \frac{1}{s+K} \left[\sum_{r=1}^s \frac{q_r}{y_{ro}} + \sum_{k=1}^K \frac{g_k^{(2)}}{z_{ko}} \right] &= 1, \\
\rho \bar{x}_i &= \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i, \quad i = 1, \dots, m, \\
\rho \bar{y}_r &= \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - q_r, \quad r = 1, \dots, s, \\
\rho \bar{z}_k &= \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{kj} + g_k^{(1)} - g_k^{(2)}, \quad k = 1, \dots, K, \\
0 &\leq g_k^{(1)} \leq Md_k^{(1)}, \quad k = 1, \dots, K, \\
0 &\leq g_k^{(2)} \leq Md_k^{(2)}, \quad k = 1, \dots, K, \\
d_k^{(1)} + d_k^{(2)} &= 1, \quad k = 1, \dots, K, \\
\lambda_j, g_k^{(1)}, g_k^{(2)}, q_r, s_i &\geq 0, \quad \text{for all } i, j, k, r, \\
d_k^{(1)}, d_k^{(2)} &\in \{0, 1\}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Finalmente, aplica el modelo obtenido al caso de las 50 universidades conocidas, concluyendo que sólo 8 universidades son eficientes. Basándose en los valores de $g_k^{(1)}$ y $g_k^{(2)}$ que indican cuando el RI (Research Income) es considerado como input o como output, muestra que 22 universidades tratan RI (research income) como input y 20 como output, y las otras 8 lo tratan como input y como output.

Toloo (2012), muestra lo reflejado por Tone (2001) cuando se trabaja con medidas flexibles, e indica que se deben considerar soluciones óptimas alternativas, en caso contrario pueden producirse resultados incorrectos. Su modelo puede identificar los llamados casos compartidos, en los que los valores de eficiencia de una DMU son iguales tanto al considerar la medida flexible como input o como output. Estos casos compartidos no se deben tener en cuenta para clasificar inputs y outputs.

El autor hace una revisión bibliográfica y con los datos numéricos de las 50 universidades plantea una tabla 2 en la que aparecen: las puntuaciones de eficiencia de las DMUs cuando RI (Ingresos de Investigación) son considerados input, cuando son considerados outputs, el valor objetivo óptimo del modelo de Toloo (2009) (que es igual al máximo de las puntuaciones de eficiencia), y por último el valor óptimo de “d” (0 cuando es input y 1 cuando es output) que coincide con el mínimo de las puntuaciones de eficiencia.

Existen 9 de las 50 universidades en las que, para esa DMU, el máximo de los valores de eficiencia coincide con el mínimo de los valores de eficiencia y es igual 1, por lo que se obtiene el mismo valor tanto considerando RI como input como output (casos compartidos) y por tanto esas DMUs no deben tenerse en cuenta.

Por esta razón propone un nuevo modelo que permita identificar esos “casos compartidos” y acomodar la medida flexible de casos no compartidos simultáneamente en una fase (en lugar de en dos fases, realizando el modelo CCR primero como output y luego como input).

$$\begin{aligned}
 & \min \theta \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0} \quad r = 1, 2, \dots, s \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j w_{lj} \leq \theta w_{l0} + M \bar{d}_l \quad l = 1, 2, \dots, L \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j w_{lj} \geq w_{l0} - M(1 - \bar{d}_l) \quad i = 1, 2, \dots, L \\
 & \bar{d}_l \in \{0, 1\} \quad \forall l \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad \forall j.
 \end{aligned} \tag{J.1}$$

Para obtener este modelo parte de la forma multiplicador del modelo CCR. Supone que existen L-medidas flexibles w_{lj} ($l=1, \dots, L$) y añade dos restricciones para cuando la medida flexible es considerada input o salida/output. Introduce una variable binaria auxiliar para transformar en restricción simultánea:

$$\bar{d}_l = \begin{cases} 0, & \text{if } w_l \text{ is an input} \\ 1, & \text{if } w_l \text{ is an output} \end{cases} \quad (J.2)$$

Y añade un número M grande para convertir en:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j w_{lj} \leq \theta w_{l0} + M \bar{d}_l \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j w_{lj} \geq w_{l0} - M(1 - \bar{d}_l) \quad (J.3)$$

La conversión garantiza que sólo una de las restricciones puede estar activa al mismo tiempo, si $\bar{d}_l = 0$ la primera restricción $\sum_{j=1}^n \lambda_j w_{lj} \leq \theta w_{l0}$ está activa y la segunda redundante, si es igual a 1 la primera restricción es redundante y la segunda estaría activa $\sum_{j=1}^n \lambda_j w_{lj} \geq w_{l0}$

El modelo tiene las propiedades de invarianza y Constant Return to Scale (CRS). Por otro lado, otra versión del modelo anterior con orientación output/salida:

$$\begin{aligned} & \max \varphi \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \mu_j x_{ij} \leq x_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} \geq \varphi y_{r0} \quad r = 1, 2, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \mu_j w_{lj} \leq w_{l0} + \hat{M} \hat{d}_l \quad l = 1, 2, \dots, L \\ & \sum_{j=1}^n \mu_j w_{lj} \geq \varphi w_{l0} - \hat{M}(1 - \hat{d}_l) \quad i = 1, 2, \dots, L \\ & \hat{d}_l \in \{0, 1\} \quad \forall l \\ & \mu_j \geq 0 \quad \forall j \end{aligned} \quad (J.4)$$

Shabani et al (2011), proponen un modelo DEA no lineal de “dual role factor” o medidas flexibles, en el caso de la selección de contenedores refrigerados en la gestión de la cadena de frío, que acaban comprobando mediante algoritmos genéticos.

Un criterio específico como los costes de equipamiento de seguridad de los contenedores refrigerados pueden actuar como “dual role factor”. Como input, dada su naturaleza de coste, por lo que cualquier descenso de este factor aumenta la eficacia. También como output, empleando más equipamiento de seguridad incrementa la eficiencia del container al reducir pérdidas/basura. En su revisión del estado del arte, sugiere que ninguno de los modelos deja al dual role factor actuar parcialmente como input o como output.

Partiendo del modelo CCR combinado con orientación de input y de output

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r=1}^S S_r^+ + \sum_{i=1}^m S_i^- \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io}; \quad i = 1, \dots, m \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} + s_r^+ = y_{ro}; \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1; \quad \lambda_j \geq 0; \quad j = 1, \dots, n \quad s_r^- \geq 0; \quad i = 1, \dots, m \quad s_r^+ \geq 0; \\ & r = 1, \dots, s \end{aligned} \tag{K.1}$$

Donde s_i^- y s_i^+ representan los excesos de input y los defectos de output respectivamente, x_{ij} y y_{rj} son los input consumidos y los outputs producidos respectivamente, y λ_j es el conjunto de referencia. Por tanto DMU_0 es eficiente si s_i^- y s_i^+ son iguales a cero.

El objetivo del modelo es seleccionar containers en la presencia de dual role factor parciales en el contexto de CCM (Cold Chain Management. Asume que uno de los criterios juega el rol tanto de input como de output, pudiéndose exponer dos restricciones:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &\leq x_{io}, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &\geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s \end{aligned} \tag{K.2}$$

Se puede definir la variable D como input componente del Dual-Role Factor y (1-D) como un output componente del Dual Role Factor.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} D &\leq x_{io} D, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} (1 - D) &\geq y_{ro} (1 - D), \quad r = 1, \dots, s \\ 0 &\leq D \leq 1 \end{aligned} \tag{K.3}$$

Si existieran múltiples Dual Role Factor, tendríamos D_f y $(1 - D_f)$ como el input y output componente del Dual Role Factor f-ésimo.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} D_f \leq x_{io} D_f; \quad i = 1, \dots, m; \quad f = 1, \dots, w \tag{K.4}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} (1 - D_f) \geq y_{ro} (1 - D_f); \quad r = 1, \dots, s; \quad f = 1, \dots, w \quad (\text{K.5})$$

$$0 \leq D_f \leq 1; \quad f = 1, \dots, w$$

Por tanto, el modelo definitivo conjunto sería el siguiente, denominado por el autor NAOD (Non-binary Arithmetic Operator Dual-role):

$$\max \sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^-$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io}; \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}; \quad r = 1, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} D_f + s_i^- = x_{io} D_f; \quad i = 1, \dots, m; \quad f = 1, \dots, w \quad (\text{K.6})$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} (1 - D_f) - s_r^+ = y_{ro} (1 - D_f); \quad r = 1, \dots, s; \quad f = 1, \dots, w$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$0 \leq D_f \leq 1; \quad f = 1, \dots, w \quad \lambda_j \geq 0; \quad j = 1, \dots, n \quad s_i^- \geq 0; \quad i = 1, \dots, m$$

$$s_r^+ \geq 0; \quad r = 1, \dots, s.$$

Utiliza un algoritmo genético para resolver el problema no lineal, y posteriormente lo aplica a un caso práctico de cálculo de eficiencia, teniendo como Dual Role Factor el Safety Equipment Cost, que resuelve via Algoritmos Genéticos y vía Lingo (que sólo obtiene soluciones locales).

Finalmente, *Shabani and Farzipoor Saen (2015a)*, proponen un nuevo procedimiento basado en FDH (free disposal hull) para determinar la selección de un vehículo de transporte en logística de frío. Generalmente FDH compara DMUs ineficientes con DMUs actualmente eficientes (no asume proporcionalidad ni convexidad).

En FDH, al asumir la libre disposición, se estrecha la región factible. Por otro lado, en FDH existen demasiadas observaciones eficientes, porque están localizadas en el área de PPS (production possibility set o conjunto de posibilidades de producción) y no hay otras observaciones con las que ser comparadas. Por tanto, elegir la mejor alternativa es difícil. Para ello, es necesario realizar un método supereficiente FDH para proveer un rango completo de DMUs eficientes.

En su artículo maneja dos tipos de medidas flexibles o “dual role factors”:

- Costes de equipamiento de frío:
 - o Input: coste como tal.
 - o Output: asignar más presupuesto en equipamiento, tienen un efecto positivo en la reducción de residuos.
- Peso neto del vehículo:
 - o Input: a mayor peso, más consumo y deterioro de neumáticos, y mayores costes variables.
 - o Output: peso ligero incrementa la posibilidad de vuelco, peso pesado aumenta la estabilidad del vehículo.

El método FDH propuesto con orientación de entrada, donde z_{fj} es el criterio dual-role factor f-ésimo de la DMU j-ésima, y D_f es una variable binaria que determina si el dual-role factor actúa como input ($D=1$) o como output ($D=0$).

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \theta \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{j=1}^J \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{io}, \quad i = 1, \dots, I \\
 & \sum_{j=1}^J \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, R \\
 & \sum_{j=1}^J \lambda_j z_{fj} D_f - \sum_{j=1}^J \lambda_j z_{fj} (1 - D_f) \leq \theta z_{fo} D_f - z_{fo} (1 - D_f); \quad f = 1, \dots, F \\
 & \sum_{j=1}^J \lambda_j = 1, \\
 & \lambda_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, J \\
 & D_f \in \{0, 1\}, \quad f = 1, \dots, F.
 \end{aligned} \tag{L.1}$$

El modelo FDH propuesto con orientación de salida es:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \phi \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{j=1}^J \lambda_j x_{ij} \leq x_{io}, \quad i = 1, \dots, I \\
 & \sum_{j=1}^J \lambda_j y_{rj} \geq \phi y_{ro}, \quad r = 1, \dots, R \\
 & \sum_{j=1}^J \lambda_j z_{fj} D_f - \sum_{j=1}^J \lambda_j z_{fj} (1 - D_f) \leq z_{fo} D_f - \phi z_{fo} (1 - D_f); \quad f = 1, \dots, F \\
 & \sum_{j=1}^J \lambda_j = 1, \\
 & \lambda_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, J \\
 & D_f \in \{0, 1\}, \quad f = 1, \dots, F.
 \end{aligned} \tag{L.2}$$

Al obligar que λ_j sea 0 ó 1, hace que muchas de las observaciones del conjunto de datos sean identificadas eficientes por éste método. Sin embargo, para hacer un ranking de las DMUs, los dos modelos anteriores se cambian por Dual-Role superfiency FDH model excluyendo DMU_0 del conjunto de referencia, obteniendo estos dos nuevos modelos supereficientes.

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \theta^{\text{super-FDH}} \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j x_{ij} \leq \theta^{\text{super-FDH}} x_{io}, \quad i = 1, \dots, I \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, R \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j z_{fj} D_f - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j z_{fj} (1 - D_f) \leq \theta^{\text{super-FDH}} z_{fo} D_f - z_{fo} (1 - D_f); \quad f = 1, \dots, F \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j = 1, \\
 & \lambda_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, J, \quad j \neq 0 \\
 & D_f \in \{0, 1\}, \quad f = 1, \dots, F.
 \end{aligned} \tag{L.3.1}$$

Modelo de supereficiencia con orientación entrada, y más abajo con orientación de salida.

$$\begin{aligned}
& \text{Max } \phi^{super-FDH} \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j x_{ij} \leq x_{io}, \quad i = 1, \dots, I \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j y_{rj} \geq \phi^{super-FDH} y_{ro}, \quad r = 1, \dots, R \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j z_{fj} D_f - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j f_{fj} (1 - D_f) \leq z_{fo} D_f - \phi^{super-FDH} z_{fo} (1 - D_f); \quad f = 1, \dots, F \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j = 1, \\
& \lambda_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, J, \quad j \neq 0 \\
& D_f \in \{0, 1\}, \quad f = 1, \dots, F.
\end{aligned} \tag{L.3.2}$$

Para examinar si DMU_0 tiene cero supereficiencia consumiendo inputs o no, hay que proyectar todas las DMU ineficientes sobre la frontera eficiente. Para ello, los dos modelos anteriores se transforman en los siguientes:

$$\begin{aligned}
& \text{Min } \tilde{\theta}^{super-FDH} \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j x_{ij} \leq \tilde{\theta}^{super-FDH} x_{io}, \quad i = 1, \dots, I \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j \tilde{y}_{rj} \geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, R \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j z_{fj} D_f - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j \tilde{z}_{fj} (1 - D_f) \leq \tilde{\theta}^{super-FDH} z_{fo} D_f - z_{fo} (1 - D_f); \quad f = 1, \dots, F \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j = 1, \\
& \lambda_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, J, \quad j \neq 0 \\
& D_f \in \{0, 1\}, \quad f = 1, \dots, F.
\end{aligned} \tag{L.4}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Max } \tilde{\phi}^{\text{super-FDH}} \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j \tilde{x}_{ij} \leq x_{io}, \quad i = 1, \dots, I \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j y_{rj} \geq \tilde{\phi}^{\text{super-FDH}} y_{ro}, \quad r = 1, \dots, R \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j \tilde{z}_{fj} D_f - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j z_{fj} (1 - D_f) \leq z_{fo} D_f - \tilde{\phi}^{\text{super-FDH}} z_{fo} (1 - D_f); \quad f = 1, \dots, F \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^J \lambda_j = 1, \\
& \lambda_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, J, \quad j \neq 0
\end{aligned} \tag{L.5}$$

Finalmente, determina un ranking de las DMUs eficientes mediante la puntuación en supereficiencia en términos de ahorro de inputs (ψ) y la puntuación de supereficiencia en términos de aumento de outputs (φ), que pueden ser integrados en una sola supereficiencia:

$$\zeta_o = \eta_\psi \psi_o + \eta_\varphi \frac{1}{\varphi_o} \tag{L.6}$$

Nótese que los parámetros η , son el grado de importancia de la puntuación de supereficiencia y son proporcionados por la subjetividad del decisor, por lo que es una desventaja de FDH con respecto al DEA tradicional en el que el decisor no interviene en la evaluación.

Cierra su artículo con un caso práctico para seleccionar el mejor vehículo a comprar para una empresa iraní que produce y distribuye productos agroalimentarios diariamente en todo el país del autor. Para determinar el mejor vehículo para sus necesidades, se plantean 30 alternativas distintas, siendo considerado cada vehículo como una DMU. Seleccionan las diferentes variables a tener en cuenta:

- Inputs: precio, consumo de fuel, costes de mantenimiento
- Outputs: capacidad de refrigeración, vida útil, valor residual del vehículo.
- Dual Role Factors: costes de equipamiento de frío, y peso neto del vehículo.

Elabora varias tablas de datos:

- Resultados del procedimiento con orientación entrada
- Resultados del procedimiento con orientación salida
- Resultados integrados de supereficiencia y "ranking" de DMUs

En general tiene mayor importancia el valor de eficiencia con orientación de salida en el valor de supereficiencia integrada media, de ahí que ocupe el primer puesto en el ranking el vehículo DMU_{21} que tenía un valor de 4,303.

Chen (2014), proporciona una nueva perspectiva al introducir el concepto de conjunto de tecnología, para incorporar los “dual-role factors” en DEA, en lugar de desarrollar un modelo ad hoc. Cuando una medida flexible actúa como input, tanto los inputs normales como la medida flexible (input) producen outputs, conformando una tecnología que es diferente respecto al caso que los inputs normales producen outputs normales más la variable flexible actuando como output.

Los beneficios de la aproximación propuesta por *Chen (2014)* son tres:

- Proporciona un claro marco de referencia para analizar cómo incorporar los dual-role factor en DEA
- Proporciona una vía para validar modelos propuestos en la literatura existente
- La aproximación propuesta es fácil de extender e integrar con variantes de modelos DEA con requerimientos específicos (FDH, variables no discrecionales, etc)

Para modelar los “dual-role factor”, el autor utiliza el hecho de que pueden actuar simultáneamente como inputs, y como outputs. Sean “x” los inputs normales, “y” los outputs normales, y “w” los dual role factor (x,y,w).

En un conjunto de tecnología se pueden realizar las siguientes observaciones,

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \{ (x,y,w): (x) \text{ puede producir } (w, y) \} \\
 T_2 &= \{ (x,y,w): (x, w) \text{ puede producir } (y) \}
 \end{aligned}
 \tag{M.1}$$

Que si se producen simultáneamente podemos formalizar un conjunto de tecnología con “dual role factors” como la intersección de ambas tecnologías T_1 y T_2 . Indica que un “dual role factor” actúa como input o como output en función de cómo gana más el registro entre ambos roles. Así, se expresa el conjunto factible de (x,w) para un (y) dado como $\psi(y) = \{ (x,w): (x, w, y) \in T_1 \cap T_2 \}$.

Adicionalmente se enuncia una proposición respecto a que $\psi(y)$ está anidado en “y” debido a lo fuerte disponibilidad de “y”, y lo demuestra matemáticamente.

$$\widehat{T_1} \cap \widehat{T_2} \equiv \left\{ (x, w, y) : \begin{aligned} &\sum_{r \in R} x_r \lambda_r \leq x; \sum_{r \in R} y_r \lambda_r \geq y; \\ &\sum_{r \in R} w_r \lambda_r \geq w; \sum_{r \in R} x_r \lambda_r \leq x; \sum_{r \in R} y_r \lambda_r \geq y; \\ &\sum_{r \in R} w_r \lambda_r \leq w; \lambda_r \geq 0, r \in R \end{aligned} \right\}. \quad (M.2)$$

Como la eficiencia de entrada convencional es una medida de eficiencia radial relativa a las bondades de la tecnología de reducir proporcionalmente “todos los inputs”, reduciendo las restricciones similares se obtiene:

$$\theta_k^{\text{radial}} = \min \theta, \quad (M.3)$$

$$\text{s.t. } \begin{aligned} &\sum_{r \in R} x_r \lambda_r \leq \theta x_k, \\ &\sum_{r \in R} y_r \lambda_r \geq y_k, \\ &\sum_{r \in R} w_r \lambda_r \geq \theta w_k, \\ &\sum_{r \in R} w_r \lambda_r \leq \theta w_k, \\ &\lambda_r \geq 0, r \in R. \end{aligned}$$

A continuación plantea el problema dual y el equivalente programa lineal fraccional (modelo ratio de *Charnes et al, (1978)*), que se transforma como queda más abajo, dónde “u” y “v” son los vectores de los pesos para inputs y outputs normales y “ γ ” el vector de los pesos para los dual-role factor; concluyendo que el factor “d” tiene indiferencia por ser un input o un output

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{y_k v}{x_k u + w_k (\gamma^I - \gamma^O)} \\ \text{s.t.} \quad & \frac{y_r v}{x_r u + w_r (\gamma^I - \gamma^O)} \leq 1, r \in R, \\ & u \geq 0, v \geq 0, \gamma^O \geq 0, \gamma^I \geq 0. \end{aligned} \quad (M.4)$$

Igualmente, en vez de minimizar proporcionalmente x_k y w_k como hemos visto anteriormente, ahora propone resolver el problema que evalúa “k” asumiendo que los “dual-role factor” son fijados exógenamente, como (*Cook et al, (2006)*)

$$\begin{aligned}
\theta_k^{\text{fix}} = \min \quad & \theta, \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r \in R} x_r \lambda_r \leq \theta x_k, \\
& \sum_{r \in R} y_r \lambda_r \geq y_k, \\
& \sum_{r \in R} w_r \lambda_r \geq w_k, \\
& \sum_{r \in R} x_r \lambda_r \leq \theta x_k, \\
& \sum_{r \in R} y_r \lambda_r \geq y_k, \\
& \sum_{r \in R} w_r \lambda_r \leq w_k, \\
& \lambda_r \geq 0, r \in R.
\end{aligned} \tag{M.5}$$

En este caso sólo minimiza los inputs normales, y las restricciones siguientes fijan respectivamente y exógenamente: los dual role outputs de T1, y los dual-role inputs de T2.

$$\sum_{r \in R} w_r \lambda_r \geq w_k, \quad \sum_{r \in R} w_r \lambda_r \leq w_k, \tag{M.6}$$

Sigue el mismo procedimiento anterior, plantea el problema dual y el equivalente programa lineal fraccional, y obtiene

$$\begin{aligned}
\max \quad & \frac{y_k v + w_k (\gamma^o - \gamma^f)}{x_k u}, \\
& \frac{y_r v + w_r (\gamma^o - \gamma^f)}{x_r u} \leq 1, r \in R, \\
& u \geq 0, v \geq 0, \gamma^o \geq 0, \gamma^f \geq 0.
\end{aligned} \tag{M.7}$$

Hace varias interpretaciones y deduce que el modelo propuesto por *Beasley (1990, 1995)* es problemático y no se alinea con entendimiento general e intuitivo de los “dual role factors”.

Igualmente, hace una representación visual tridimensional para el caso de un solo input normal, un solo output normal, y un dual-role factor (y también generaliza para casos multidimensionales para considerar múltiples factores), partiendo de los datos numéricos empleados por *Beasley (1990)*. Además, determinan la tendencia de comportamiento como input/output de un dual-role factor en el análisis de resultados.

Concluye que la tendencia input/output de un dual-role factor es una propiedad en el límite proyectado, no en los propios puntos de datos. Esto arroja luz sobre los problemas de asignación centralizada/descentralizada de los dual role factor. Diferentes caminos proyectados asociados con diferentes objetivos producen diferentes pesos y diferentes implicaciones. Los pesos relacionan la mejora ideal del rendimiento objetivo. Por tanto, el

punto de referencia en la frontera es el estado después de la mejora y no implica futuras mejoras.

Mahdiloo et al (2011), propone una aproximación basada en *Beasley (1990, 1995)*, y también en

$$\begin{aligned} \max & \frac{(\sum_{r=1}^R \mu_r y_{ro} + \gamma w_o)}{(\sum_{i=1}^I v_i x_{io} + \beta w_o)} \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{r=1}^R \mu_r y_{rk} + \gamma w_k - \sum_{i=1}^I v_i x_{ik} - \beta w_k \leq 0, \quad k=1, \dots, K, \\ & \mu_r, v_i, \gamma, \beta \geq 0 \end{aligned} \tag{N.1}$$

la modificación que hicieron *Cook et al (2006)* al introducir el “dual role factor” en el lado de los inputs como un input no discrecional

$$\begin{aligned} \text{Max} & \sum_{r=1}^R \mu_r y_{ro} + \gamma w_o - \beta w_o \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{i=1}^I v_i x_{io} = 1, \\ & \sum_{r=1}^R \mu_r y_{rk} + \gamma w_k - \beta w_k - \sum_{i=1}^I v_i x_{ik} \leq 0, \quad k=1, \dots, K, \\ & \mu_r, v_i, \gamma, \beta \geq 0, \end{aligned} \tag{N.2}$$

Mahdiloo et al (2011) propone realizar dos modelos y un algoritmo para determinar el estado del dual-role factor (tratar el dual role factor en el lado de los inputs con el modelo de la izquierda, tratar el dual-role factor en el lado de los outputs con el modelo de la derecha, calcular el óptimo de eficiencia θ^* como $\max(\theta_1 \text{ y } \theta_2)$, de modo que si $\theta_1 > \theta_2$ el dual-role factor actúa como input, si es $\theta_1 < \theta_2$ actúa como output, y si son iguales está equilibrado.

$$\begin{aligned} \text{Min } \theta_1 & & \min \theta_2 \\ \text{s.t.} & & \text{s.t.} \\ \sum_{k=1}^K x_{ik} \lambda_k \leq \theta_1 x_{io}, & i=1, \dots, I, & \sum_{k=1}^K x_{ik} \lambda_k \leq \theta_2 x_{io}, & i=1, \dots, I, \\ \sum_{k=1}^K w_k \lambda_k \leq w_o, & & \sum_{k=1}^K y_{rk} \lambda_k \geq y_{ro}, & r=1, \dots, R, \\ \sum_{k=1}^K y_{rk} \lambda_k \geq y_{ro}, & r=1, \dots, R, & \sum_{k=1}^K w_k \lambda_k \geq w_o, & \\ \lambda_k \geq 0, & & \lambda_k \geq 0, & \\ \theta_1 \text{ free} & & \theta_2 \text{ free} & \end{aligned} \tag{N.3}$$

Finalmente propone un ejemplo numérico basado en el conjunto de datos de *Farzipoor Saen (2010)* consistente en dos inputs Costes Totales de envíos (TC) y el N° de envíos por mes (NS), y dos outputs N° de envíos a tiempo (NOT) y N° de facturas recibidas sin errores (NB). El único dual role factor son los Costes de I+D (R&D).

Por su parte *Toloo y Barat (2015)*, presentan una aproximación de un modelo que es un programa lineal entero mixto (MILP) cuya estructura está desarrollada para encontrar el

estado del dual-role factor resolviendo un único modelo. Para ello plantea dos puntos de vista el individual y el agregado.

En primer lugar presenta los modelos existentes de *Cook et al (2006)* y de *Mahdiloo et al. (2011)*. Recordemos que *Cook et al (2006)* tenía k -DMUs a evaluar, m -inputs, s -outputs, y un “dual-role factors” (w) por cada DMU. Considera el problema orientado a input, cuando una DMU tiene un puntuación de eficiencia θ , todos los inputs discretionales (incluye w “dual-role factor”) son reducidos por $(1-\theta)$, sin embargo w dual-role factor está también en el lado de los outputs, se asume que no se reduce y por tanto actúa como no discrecional en el lado input.

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro} + \gamma w_o - \beta w_o & (0.1) \\
 & \text{s.t.} \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rk} + \gamma w_k - \beta w_k - \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} \leq 0, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & \mu_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \\
 & v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \gamma, \beta \geq 0.
 \end{aligned}$$

Siendo γ^* y β^* los valores óptimos del problema, se puede decir que:

- si $(\gamma^* - \beta^*) < 0$, dual-role factor como input, y a menor w implica DMU más eficiente.
- si $(\gamma^* - \beta^*) > 0$, dual-role factor como output, y a mayor w implica DMU más eficiente.
- si $(\gamma^* - \beta^*) < 0$, dual-role factor en equilibrio.

Mahdiloo et al (2011) proponen considerar la relación causal entre inputs y outputs, de hecho primero tratan el “dual-role factor” en el lado inputs como no discrecional y resuelven el modelo izquierda, y posteriormente lo tratan en el lado output resolviendo el modelo de la derecha.

$$\begin{aligned}
 & \min \theta_1 & & \min \theta_2 & (0.2) \\
 & \text{s.t.} \sum_{k=1}^K \lambda_k x_{ik} \leq \theta_1 x_{io}, \quad i = 1, \dots, m, & & \text{s.t.} \sum_{k=1}^K \lambda_k x_{ik} \leq \theta_2 x_{io}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{k=1}^K \lambda_k w_k \leq w_o, & & \sum_{k=1}^K \lambda_k w_k \geq w_o, \\
 & \sum_{k=1}^K \lambda_k y_{rk} \geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s, & & \sum_{k=1}^K \lambda_k y_{rk} \geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s, \\
 & \lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K. & & \lambda_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, K.
 \end{aligned}$$

El óptimo de eficiencia θ^* es el máximo de entre θ_1 y θ_2 , de modo que si $\theta_1 > \theta_2$ el “dual-role factor” actúa como input, si es $\theta_1 < \theta_2$ actúa como output, y si son iguales está equilibrado.

En cuanto a su aproximación propuesta, explica primero que un Programa Lineal (LP) la asunción de divisibilidad requiere que valores no enteros sean aceptables para las variables de decisión. En el caso que todas las variables sean restringidas a valores enteros, estaríamos ante un Programa Lineal Entero (ILP). Cuando sólo algunas de las variables requieren que tengan valores enteros estamos en el caso de Programa Lineal Entero Mixto (MILP). También explica el caso de los problemas en que hay dos restricciones que no pueden ser satisfechas simultáneamente, sino que hay que elegir una de ellas.

Mahdilloo (2011) plantea dos puntos de vista de la eficiencia, planteando 7 teoremas hasta que llega a su modelo definitivo para determinar el estado del dual-role factor “ w_0 ”:

1) Eficiencia Individual de DMU

Partiendo del modelo de CCR de *Charnes et al (1978)*, enmarcado en el rectángulo, introduce dos nuevas restricciones basadas en las de *Mahdilloo et al (2011)* pero añadiendo una variable binaria “ d ” y un número M muy grande, tal que si $d=1$ (“dual-role factor” w_0 es input) y si $d=0$ w_0 es un output. Resolviendo n-MILPs se verifica el estado del “dual-role factor”. Del mismo modo se puede hacer para la versión orientada output obteniendo el MILP de la derecha.

| | |
|---|--|
| $\begin{aligned} & \min \hat{\theta} \\ & \text{s.t.} \sum_{k=1}^K \lambda_k x_{ik} \leq \hat{\theta} x_{io}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{k=1}^K \lambda_k y_{rk} \geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s, \\ & \sum_{k=1}^K \lambda_k w_k \leq w_o + M(1 - d), \\ & \sum_{k=1}^K \lambda_k w_k \geq w_o - Md, \\ & d \in \{0, 1\}, \\ & \lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned}$ | $\begin{aligned} & \max \varphi \\ & \text{s.t.} \sum_{k=1}^K \mu_k x_{ik} \leq x_{io}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{k=1}^K \mu_k y_{rk} \geq \varphi y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s, \\ & \sum_{k=1}^K \mu_k w_k \leq w_o + \bar{M}(1 - \bar{d}), \\ & \sum_{k=1}^K \mu_k w_k \geq w_o - \bar{M} \bar{d}, \\ & \bar{d} \in \{0, 1\}, \\ & \mu_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K, \end{aligned}$ |
| | (0.3) |

Por último propone un algoritmo en 5 pasos para determinar el estado “dual-role factor”.

2) Eficiencia agregada

Partiendo del modelo de Cook et al (2007) que utilizaba la eficiencia agregada de una colección de DMUs, propone utilizar el multiplicador de CCR. La idea es mantener el nivel de outputs agregados mientras se reducen los inputs agregados tanto como sea

posible. El “dual-role factor” es considerado tanto en los inputs agregados (no discrecional) como en los outputs agregados.

$$\begin{aligned}
 \theta^* &= \min \theta & (0.4) \\
 \text{s.t. } & \sum_{k=1}^K \lambda_k x_{ik} \leq \theta \left(\sum_{k=1}^K x_{ik} \right), \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{k=1}^K \lambda_k y_{rk} \geq \left(\sum_{k=1}^K y_{rk} \right), \quad r = 1, \dots, s, \\
 & \sum_{k=1}^K \lambda_k w_k \leq \left(\sum_{k=1}^K w_k \right) + M(1-d), \\
 & \sum_{k=1}^K \lambda_k w_k \geq \left(\sum_{k=1}^K w_k \right) - Md, \\
 & d \in \{0, 1\}, \\
 & \lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K.
 \end{aligned}$$

Al final del artículo proponen un modelo numérico utilizando el conjunto de datos para 18 suministradores de *Mahdiloo et al (2011)*, consistente en dos inputs Costes Totales de envíos (TC) y el N^o de envíos por mes (NS), y dos outputs N^o de envíos a tiempo (NOT) y N^o de facturas recibidas sin errores (NB). El único dual role factor son los Costes de I+D (R&D).

Comparando los resultados de este modelo con el original de *Mahdiloo et al (2011)*, se observa que se obtienen los mismos resultados y que mientras con el modelo de *Mahdiloo et al (2011)* para cada DMU hay que calcular dos modelos, con el propuesto por *Toloo and Barat (2015)* sólo hay que hacerlo una vez. En este sentido, concluye que el dual-role factor R&D es finalmente tratado como output.

Por su parte, *Shabani and Farzipoor Saen (2013)*, aplican dual-role factor en modelo DEA al problema de selección de mercados internacionales. Para ello tienen en cuenta variables ternarias, o variables trivalentes muy valoradas en sistemas lógicos. Asignan valores 0, 1, 2 en función de si la variable es verdadera, falsa o puede ser cualquiera de las dos. Estas variables las emplean para seleccionar el IMS (selección del mercado internacional) más eficiente mediante comparación de cada uno con los demás en la presencia de dual-role factor. Su estudio determina en cuáles Mercados Internacionales los factores se comportan predominantemente como inputs (por lo que el IM se beneficia de tener menos valor en esos factores), o como outputs dónde más factor es deseable, o dónde se encuentran en equilibrio. Para llegar al modelo, primero parten del modelo de *Farzipoor Saen (2010a)* para considerar múltiples dual-role factor. Posteriormente, lo reformulan como si fuera un programa fraccional según *Charnes et al (1978)*. Realizan una nueva transformación insertando los dual-role factor tanto en denominador como numerador (dado que actúan como inputs y outputs a la vez). Tras varias modificaciones más entre las que se incluye la transformación de Charnes-Cooper, y un cambio de variable llegan al modelo propuesto (P.1).

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} + \sum_{l=1}^f t_l w_{lo} - \sum_{l=1}^f p_l w_{lo}, & (P.1) \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1, \\
& \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + \sum_{l=1}^f t_l w_{lj} - \sum_{l=1}^f p_l w_{lj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
& 0 \leq t_l \leq q_l, \quad l = 1, \dots, f, \\
& t_l + (1 - q_l) \leq p_l \leq t_l + (1 - q_l), \quad l = 1, \dots, f, \\
& q_l \in \mathbb{Z}_3, \quad l = 1, \dots, f, \\
& u_r, v_i, p_l, t_l \geq 0, \forall r, i, l.
\end{aligned}$$

Para finalizar con la revisión bibliográfica en cuanto “dual-role factor”, *Shabani y Farzipoor Saen (2015b)*, aplican dual role factor en modelo DEA al problema de prospectivas de referentes en la cadena de suministro verde.

Para ello partiendo del modelo aditivo de *Charnes et al (1985)*, que fue propuesto para tratar las holguras directamente en la función objetivo,

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{r=1}^s S_r^+ + \sum_{i=1}^m S_i^-, \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + S_i^- = x_{io}; \quad i = 1, \dots, m, \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - S_r^+ = y_{ro}; \quad r = 1, \dots, s, \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\
& \lambda_j, S_i^-, S_r^+ \geq 0 \forall i, r, j. & (Q.1)
\end{aligned}$$

Suponiendo que alguno de los criterios actuara como dual-role-factor habría que añadir las dos restricciones siguientes (X.2), sin embargo habría que transformar las expresiones incorporando una variable binaria k (k=1 dual-role-factor como input, k=0 output) para evitar la disminución del poder de discriminación del modelo y todas las DMUs sean eficientes (X.3).

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \lambda_j z_j + S_{m+1}^- &= z_o; & \sum_{j=1}^n k \lambda_j z_j + S_{m+1}^- &= k z_o; \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j z_j - S_{s+1}^+ &= z_o; & \sum_{j=1}^n (1-k) \lambda_j z_j - S_{s+1}^+ &= (1-k) z_o; \\
& & k &\in \{0, 1\}.
\end{aligned}
\tag{Q.2} \qquad \tag{Q.3}$$

El modelo completo incluyendo esta restricción transformada es tipo NLP (conjunto de variables reales no conocidas, definidas por restricciones no lineales y una F.O. no lineal).

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{r=1}^s S_r^+ + \sum_{i=1}^m S_i^-, \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + S_i^- = x_{io}; \quad i = 1, \dots, m, \\
&\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - S_r^+ = y_{ro}; \quad r = 1, \dots, s, \\
&\sum_{j=1}^n k \lambda_j z_j + S_{m+1}^- = k z_o; \\
&\sum_{j=1}^n \lambda_j z_j - \sum_{j=1}^n k \lambda_j z_j - S_{s+1}^+ = z_o - k z_o; \\
&\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\
&k \in \{0, 1\}, \\
&\lambda_j, S_i^-, S_r^+, S_{m+1}^-, S_{s+1}^+ \geq 0, \forall j, i, r.
\end{aligned}
\tag{Q.4}$$

Para la resolución del modelo NLP habría que linealizar haciendo un cambio de variable $\delta_j = k \lambda_j, j=1, \dots, n$ para incorporar las restricciones (Q.5) obteniendo el modelo final (Q.6).

$$\begin{aligned}
0 &\leq \delta_j \leq k, \\
\delta_j &\leq \lambda_j \leq \delta_j + (1-k),
\end{aligned}
\tag{Q.5}$$

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{r=1}^s S_r^+ + \sum_{i=1}^m S_i^-, \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + S_i^- = x_{io}; \quad i = 1, \dots, m, \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - S_r^+ = y_{ro}; \quad r = 1, \dots, s, \\
& \sum_{j=1}^n \delta_j z_j + S_{m+1}^- = kz_o; \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j - \sum_{j=1}^n \delta_j z_j - S_{s+1}^+ = z_o - kz_o; \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\
& 0 \leq \delta_j \leq k; \quad j = 1, \dots, n, \\
& \delta_j \leq \lambda_j \leq \delta_j + (1-k); \quad j = 1, \dots, n, \\
& k \in (0, 1], \\
& \lambda_j, S_i^-, S_r^+, S_{m+1}^-, S_{s+1}^+ \geq 0, \quad \forall j, i, r.
\end{aligned} \tag{Q.6}$$

El modelo (Q.6) es tipo MILP (con variables enteras y restricciones lineales). Para su resolución propone el conocido sistema PERT/CPM para controlar las cantidades estimadas de cada input/output, dado que se trata de una prospectiva donde los inputs y outputs están influenciados por factores externos. Inspirados en el trabajo de *Azadi y Farzipoor Saen (2011)*, estiman \tilde{x}_{ij} , \tilde{y}_{ij} , \tilde{z}_{ij} , como cantidades de inputs y outputs medidas en el tiempo que viene. Además involucran un "Decision Maker" (DM) que estima tres valores (más probable o ML, optimista u OP, pesimista o PE) para cada input y output, obteniendo:

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{[(OP_{ij}/2) + 2ML_{ij} + (PE_{ij}/2)]}{3}, \quad \tilde{y}_{rj} = \frac{[(OP_{rj}/2) + 2ML_{rj} + (PE_{rj}/2)]}{3}, \tag{Q.7}$$

Por tanto, el modelo final queda expuesto como sigue, en el que el valor esperado para el dual-role-factor es estimado del mismo modo:

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{r=1}^s S_r^+ + \sum_{i=1}^m S_i^- \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{x}_{ij} + S_i^- = \tilde{x}_{i0}; \quad i = 1, \dots, m \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{y}_{rj} - S_r^+ = \tilde{y}_{r0}; \quad r = 1, \dots, s \\
& \sum_{j=1}^n \delta_j \tilde{z}_j + S_{m+1}^- = k \tilde{z}_0; \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{z}_j - \sum_{j=1}^n \delta_j \tilde{z}_j - S_{s+1}^+ = \tilde{z}_0 - k \tilde{z}_0; \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1; \\
& 0 \leq \delta_j \leq k; \quad j = 1, \dots, n, \\
& \delta_j \leq \lambda_j \leq \delta_j + (1-k); \quad j = 1, \dots, n, \\
& k \in \{0, 1\}, \\
& \lambda_j, S_i^-, S_r^+, S_{m+1}^-, S_{s+1}^+ \geq 0, \quad \forall j, i, r.
\end{aligned} \tag{Q.8}$$

Finalmente propone un caso práctico para validar al aplicabilidad del modelo propuesto y determinar referentes prospectivos con un ejemplo numérico de 25 compañías iraníes

Villa y Lozano (2016), proponen un modelo DEA para aplicar cuando se presentan variables no monótonas, para aquellas ocasiones en las que la monotonicidad de una variable con respecto a la eficiencia, depende del valor de la variable. En estos casos, dentro de un determinado rango de valores es deseable un aumento de la variable, y en otro rango es deseable una disminución de la misma. Finalmente proponen una aplicación a la eficiencia de la macroeconomía de los gobiernos de la U.E. durante el período 2006-2013, encontrando dos variables no monótonas como son la carga fiscal (tax) y deuda bruta (debt), y otras variables tipo output monótonas como son el crecimiento del producto interior bruto (GDP) y la tasa de empleo total (EMP). En base a todo lo estudiado hasta ahora, éste es el modelo que más se asemeja a nuestros objetivos de estudio y pasaremos a estudiarlo y desarrollarlo a fondo en apartado específico.

3.2. ESTADO DEL ARTE DEA EN AGRICULTURA Y OLIVAR

Revisamos la bibliografía existente respecto a la eficiencia en agricultura y en olivar, y vemos que no existen muchos estudios previos de eficiencia en olivar, aunque si existen algunas referencias agroalimentarias, como la eficiencia en la producción de leche en la provincia de Córdoba de *Pardo et al (2001)*, y otro estudio centrado en las explotaciones lecheras argentinas *Arzubi y Berbel (2001)*, por citar alguna de las más cercanas.

Centrándonos en la producción agrícola propiamente dicha, cabría citar el trabajo de eficiencia en la producción de trigo en regadío en la Cuenca Baja de la India de *Hussain et al. (2000)*. Otro en el que aplicando DEA se estudia la eficiencia de las explotaciones agrarias localizadas en la comarca del Alto Guadalquivir en la provincia de Córdoba de *Vicario et al (2000)*.

Recientes estudios utilizan DEA para medir simultáneamente eficiencia económica y ecológica en fincas individuales y en los principales sistemas de cultivo de olivar, *Gómez-Limón et al (2012)*, y *Picazo-Tadeo et al (2012)*. En los estudios se indica que existe una fuerte relación entre la eco-ineficiencia y la ineficiencia técnica de las fincas de olivar. Se demuestra que es posible mejorar, reduciendo los inputs empleados sin adoptar nuevas tecnologías y sin reducir producción.

Atendiendo ya a estudios específicos de eficiencia del olivar existen algunos trabajos realizados en Grecia *Tzouvelekas, et al (2003)*, *Karagiannis and Tzouvelekas (2009a, 2009b)* y en Andalucía *Calatrava (1997)*, utilizando el análisis de fronteras estocásticas, que ofrece una explicación de la eficiencia técnica basada en la teoría económica, por esa razón obliga a especificar la forma de la función de producción que en olivar está poco estudiado. En este sentido, la especificación de una u otra forma de la función de producción tiene una gran influencia en la medición de la eficiencia obtenida y en la importancia de cada variable en eficiencia técnica.

En la literatura existen algunas referencias relativas a la eficiencia de gestión de fincas agrícolas de olivar en Grecia – como *Zhu et al (2011)* que tienen en cuenta varios inputs (costes variables (€), capital (€), grado de especialización, horas de trabajo familiar, subvenciones, etc) y como outputs (la producción en €), y analizan el impacto de la reforma de la PAC y los subsidios directos mediante modelos de eficiencia no monótona. *Lambarra et al (2007)* hace lo mismo para el olivo español, analizando la mejora de fincas individuales observando la frontera eficiente de sistemas de cultivo de olivar sin evaluar la eficiencia relativa de los propios sistemas oleícolas.

Por otro lado, *Kashiwet al. (2012)* analizan la eficiencia técnica en olivares de Túnez de cara a la potencial demanda en Japón. Para ello tienen en cuenta aspectos como riego, superficie, y concluyen (entre otros) que el riego incrementa la eficiencia y la mayor superficie la reduce.

Por su parte, *Amores y Contreras (2006)*, proponen una aproximación para la asignación de subvenciones europeas en base a puntuaciones obtenidas utilizando DEA y aplicado al caso del olivar en Andalucía, a partir de datos extraídos de 3.000 explotaciones de Andalucía proporcionadas por la base de datos de la Administración andaluza.

Para realizar este estudio de eficiencia recurre a las técnicas DEA, que mediante el uso de fronteras de producción no paramétricas, estudia la eficiencia relativa de cada explotación de olivar respecto al resto, indicando qué factores son los que contribuyen esa eficiencia. Entre los inputs que tiene en cuenta figuran los siguientes:

Superficie (ha)

Precipitaciones, lo incluye como input no discrecional, y no controlable

Marco o Densidad de Plantación

Superficie regable (ha)

Gastos Totales de Producción (maquinaria, transportes, fitosanitarios, sin diferenciar)

Entre los outputs que tienen en cuenta, figuran estos otros:

Producción

Empleo Generado

Rendimiento Graso, indicador calidad, usando variables categóricas si hay datos.

Entre sus conclusiones, podemos destacar que:

El Know-How del olivar tradicional es una desventaja ya que las provincias con más tradición olivarera son las que presentan menos DMUs eficientes.

Las técnicas de cultivo modernas influyen mucho en la eficiencia, dado que las DMUs eficientes se encuentran en las provincias con mayor presencia de olivar moderno.

La eficiencia está correlacionada con el tamaño de explotación, por lo que visto que el olivar andaluz tiene gran cantidad de microexplotaciones, muestra una gran debilidad del mismo. Por otro lado los resultados de eficiencia en fincas grandes son más homogéneos. Esto sugiere que están más cercanos a mejorar sus técnicas. Estas mejoras vienen desde el punto de vista del riego, nuevas variedades, mayor

disponibilidad de capital para afrontarlas. Por otro lado, los agricultores tradicionales tienden a ser más reticentes a adoptar nuevas técnicas.

Por su parte, según *Beltrán-Esteve (2013)* en su estudio basado en metadistancias que compara eficiencia entre olivares tradicional con pendiente de campiña (99 explotaciones) y olivar tradicional sin pendiente de campiña (121 explotaciones), ambas sin riego, sólo con aportes de precipitación, de las provincias de Córdoba y Jaén (Andalucía) durante el año 2010 mediante encuestas. Especifica que no se tienen en cuenta en el estudio explotaciones de la zona de Sierra (alta pendiente) por la característica de sus suelos y del clima que son muy diferentes de las zonas Penibética y Sierra Sur. Para ello, tiene en cuenta inicialmente como outputs la Aceituna producida (Kg), y como inputs:

Superficie (has)

Maquinaria costes (€)

Jornales (días)

Fitosanitarios (€)

Fertilizantes (€)

Energía (€)

Sin embargo en una segunda tabla, justifica la eliminación de Energía y Fertilizantes en su análisis. En el caso de los costes de fertilización, en los olivares tradicionales, se realiza mediante patrones de fertilización multianual, pudiendo comparar explotaciones que han fertilizado una año con otras que no lo han hecho (esto no ocurre en olivares modernos intensivos ni superintensivos). Por otro lado, los costes de energía están correlacionados (coeficiente 0,994) con los costes de maquinaria y son eliminados del estudio por no aportar información adicional.

En su estudio se pueden extraer varias conclusiones:

- La eficiencia técnica refleja los fallos de determinadas fincas en obtener el máximo output posible, dada una cantidad de input empleados. Hay que identificar un punto de referencia apropiado (benchmark) para identificar las fuentes de ineficiencia y sugerir algunas estrategias para mejorar la eficiencia bajo un aprendizaje activo. Un modo sería alcanzar la frontera eficiente.
- En este sentido, concluye que las fincas eficientes en ambos sistemas de cultivo tienen los mayores rendimientos/ha y bajos costes de maquinaria (y energía). Sin embargo, no tienen diferencias en el uso de jornales, pesticidas o fertilizantes.

- Tampoco encuentran diferencias entre ambos sistemas de cultivo en función de la superficie o la edad de la plantación.
- En cuanto a la densidad de plantación encuentran que sólo en el caso de plantaciones con pendiente, a mayor densidad mayor eficiencia.
- Por último, explican que los agricultores eficientes son los que menos tiempo dedican a la agricultura porque subcontratan determinadas tareas (labores, poda, tratamientos, recolección) a determinadas empresas especializadas.
- En cuanto a pesticidas ambos pueden mejorar en eficiencia e impacto medioambiental. Por otro lado, dos grandes medidas para mejorar son la formación del agricultor/gestor y la subcontratación con especialistas en cada materia. Otras posibles cuestiones de estudio serían cómo mejorar la eficiencia vía producción integrada y/o ecológica.

Por otro lado, algunos autores como *Reinhard et al (2000)*, *De Koeijer et al (2002)*, *Asmild and Hougaard (2006)*, trabajan directamente con el tema de las fertilizaciones pero no desde el punto de vista de la eficiencia, sino desde el punto de vista medioambiental, dado que los consideran como “excesos no deseables” para el medioambiente.

Por otro lado, exponemos en la siguiente página la Tabla 1 que hemos elaborado para exponer y resumir el tratamiento que dan algunos otros autores a las diferentes variables que toman en cuenta en sus estudios. La razón no es otra que clarificar nuestra toma de decisiones a la hora de seleccionar nuestras entradas, salidas y variables no monótonas, para aplicarlas al caso práctico.

Del mismo modo, posteriormente, en la Tabla 2, se han clasificado los modelos DEA aplicados en distintos cultivos por parte de diferentes autores.

| Variable | Input/Output | Tipo medida | Unidad o medida | Autores |
|--|--------------|---------------------|---|---|
| Producción | Output | Términos económicos | Valor total de la producción en unidades monetarias | Piot-Lepetit et al (1997) Thiele and Brodersen (1999) Brummer (2001) Lansink et al (2002) Iraizoz et al (2003) Rodriguez-Diaz et al (2004) Cherchye an Van Puyenbroeck (2007) Balcombe et al (2008a) Adhikari and Bjorndal (2011) |
| | | | Ingresos obtenidos por la finca | Galanopoulos et al (2006) Bojnec and Latruffe (2009) |
| | | Producción física | Kg o Tn | Coelli et al (2002) Wadud (2003) Reig-Martinez, Pizazo Tadeo (2004) Balcombe et al (2008b) Luik et al (2009) Odeck (2009) |
| | | | Producción/Superficie (Kg/ha o Tn/ha) | De Koeijer et al (2002) Wossink and Denaux (2006) García and Shively (2011) |
| | | | Producción/Día (Kg/día, Litros/día) | Fraser and Cordina (1999) Balcome et al (2006) |
| Tierra | Input | Superficie | Unidad superficie (ha) | Sin diferencias apreciables |
| Personal | Input | Medida temporal | Número de trabajadores | Grazhdaninova, Lerman (2005) |
| | | | Jornales/año | Piot-Leptit et al (1997) Latruffe et al (2004) Reig-Martinez, Picazo-Tadeo (2004) Rodriguez-Diaz et al (2004) Davidova and Latruffe (2007) Balcombe et al (2008) Latruffe et al (2008) |
| | | | Horas de trabajo | Fraser and Cordina (1999) Reinhard et al (2000) Lansink et al (2002) Iraizoz et al (2003) Asmild and Hougaard (2006) Galanopoulos et al (2006) Luik et al (2009) |
| | | Términos económicos | Coste laboral | Fare et al (1997) KleinhanB et al (2007) Artukoglu et al (2010) |
| Costes agregados (energía, fertilizantes, alimento, fuel, semillas, maquinaria, pesticidas, agua, etc) | Input | Términos económicos | Coste de cultivo | Iraizoz et al (2003) |
| | | | Consumo intermedio | Millian and Aldaz (1998) Latruffe et al (2004) Davidova and Latruffe (2007) Balcombe et al (2008a) Luik et al (2009) |
| | | | Materiales | Alene et al (2006) |
| | | | Compras | Helfland and Levine (2004) Adhikari and Bjorndal (2011) |
| | | | Gastos totales | Amores and Contreras (2009) |
| | | | Inputs variables | Thiele and Brodersen (1999) Reinhard et al (2000) Cherchye, Van Puyenbroeck (2007) Bojnec and Latruffe (2009) |
| | | | Otros gastos | Mathijs and Vranken (2000) Lansink et al (2002) |

Tabla 1. Clasificación de la información relevante de variables agrícolas.

| Variable | Input/Output | Tipo medida | Unidad o medida | Autores |
|---|---------------------|---------------------|------------------------|--|
| Costes independientes | Input | Términos económicos | Fertilizantes | Jha et al (2000) Kim (2001) Coelli et al (2002) Wadud (2003) Lilienfeld and Asmild (2007) Odeck (2009) García and Shively (2001) |
| | | | Combustible | Grazhdaninova and Lerman (2005) Andersen and Bogetoft (2007) |
| | | | Semillas | Piot-Lepetit et al (1997) Dhungana et al (2004) Balcombe et al (2008b) Odeck (2009) |
| | | | Energía consumida | Morrison Paul et al (2004) Asmild, Hougaard (2006) Bogetoft et al (2007) |
| | | | Fitosanitarios | De Koeijer et al (2002) Wossink, Denaux (2006) Reig- Martinez, Picazo-Tadeo (2004) |
| Inputs (N,P,K) no deseables medioambientalmente | Input no deseable | Medida física | N, P, K | Reinhard et al (2000) De Koeijer et al (2002) Asmild and Hougaard (2006) |
| Agua | Input | Medida física | Agua aplicada | Rodriguez-Diaz (2004) |
| Agua + Precipitación | Input | Medida física | Agua + Precipitación | Lilienfeld, Asmild (2007) |

Tabla 1 (cont). Clasificación de la información relevante de variables agrícolas.

| Cultivo | País (región) | Conjunto de datos (años) | Inputs | Outputs | Modelo DEA (orientación) | Referencia |
|--|-----------------------|---|--|--|---|---|
| Tierra arable | The Netherlands | 119 fincas (2003–2007) | fertilizantes, fungicidas, herbicidas, insecticidas, otros inputs variables, horas, capital, tierra | Valor de la producción | Semiradial direccional distance DEA model Undesirable outputs | Skevas et al. (2014) |
| Tierra arable COP (cereales, oleaginosas, proteaginosas) | US (Kansas) | 293 fincas (2000/2010) | capital, superficie, horas, inputs químicos, otros inputs | Indice Paasche de precio | CCR/BCC (Input) | Guesmi et al. (2015) |
| Berberis vulgaris | Iran (Qaen region) | 144 fincas (2008/2009) | jornales, maquinaria, diesel, fertilizantes, biocidas, agua riego, electricidad, energía | Rendimiento berberis, superficie | CCR/BCC (Input) | Mousavvi-Avval et al. (2012) |
| Cebada | Australia (Wheatbelt) | 65 fincas (1991-1995) | fertilizantes, agua de lluvia previa y posterior | Rendimiento lluvia | CCR/BCC (Input/Output) Inputs aleatorios | Chambers et al. (2011) |
| Cebada | Iran (Hamedan) | 67 fincas (2010) | jornales, maquinaria, diesel, fuel, fertilizantes, estiércol, biocidas, electricidad, semillas | cebada | CCR/BCC (Input) | Motbaker et al. (2013) |
| Cereal | Nepal | 2585 fincas (2003) | labores, tierra regable, lluvia, capital, costes inputs, otros costes | Valor del cereal, valor de los pulsos, valor del efectivo del cultivo, valor de otros cultivos | CCR/BCC (Output) Segunda etapa: Regresión de Tobit | Adhikari and Bjorndal (2012) |
| Cultivos (COP) | France, Hungary | 7481 (Francia) 4198 (Hungria) (2001-2007) | Tierra utilizada, labores, consumo intermedio, capital | Valor de la producción, valor de otros output | CCR/BCC (Output) Bootstrapping Indice de Malmquist Metafrontera | Latruffe et al. (2012) |
| Cítricos | Spain (Valencia) | 105 convencional 107 ecológico (2009) | ingresos, labranza, poda, fertilización, fitosanitarios, superficie | ventas | Directional DEA Metafrontera (ecológico vs. convencional sistemas citrícolas) | Beltrán-Esteve and Reig-Martínez (2014) |
| Maíz | Iran (Fars province) | 89 agricultores (2010) | maquinaria, fuel, fertilizante, químicos, semillas, electricidad. | rendimiento, índices de sostenibilidad | Multifuzzy, DEA (BCC-input) SBM | Houshyar et al. (2012) |
| Algodón | Pakistan (Punjab) | 169 (2010) | agua, semillas, labor, fuel, NPK, precios pesticidas (Costes eficiencia) | Ingresos netos | Eco-efficiency. Segunda etapa: bootstrap truncated regression | Ullah and Perret (2014) |
| Algodón | Pakistan (Punjab) | 169 (2010) | Calentamiento global, acidificación, eutrofización, toxicidad humana, agua, ozono, ecotoxicidad, ecotoxicidad potencial terrestre, uso agua, | Ingresos netos | BCC (Input orientados) | Ullah et al. (2016) |

| | | | | | | |
|------------------------------|--|--|---|--|--|------------------------------|
| Cultivo | China | 2028 condados (1999) | labor, potencia mecánica, input fertilizantes, área sembrada de cultivos | Cantidad de agua de lluvia y carne producida | BCC (Output) Segunda etapa: modelo bootstrapped de regresión | Monchuck et al. (2010) |
| Cultivo | OECD countries | 88 países (1970-2001) | tierra, tractores, labor, fertilizantes, y ganado | Cultivos y ganado | Malmquist | Headey et al. (2010) |
| Cultivo | OECD countries | 30 países (1990-2003) | fertilizantes, tierra, alimentos y semillas, contenido agregado de N y P | Indice de cantidad Fisher | CCR/BCC (Input) | Hoang and Alauddin (2012) |
| Cultivo | US (Western Kansas) | 43 regantes (1992-1999) | Agua de riego, labor, capital, semillas, fertilizantes, precipitación, suministro de agua disponible | Trigo, maíz, sorgo, soja, alfalfa | BCC (Input) | Lilienfeld and Asmild (2007) |
| Cultivo | Turkey (Marmara) | 4 provincias (1993-2002) | Area utilizada, fertilizantes, tractores, labores | Valor bruto de laproducción en agricultura | Malmquist | Tipi and Rehber (2005) |
| Cultivos agrícolas | Brazil (Amazonia) | 76 fincas familiares (1986; 2002) | cultivo, labor | Producción de arroz, maíz y café | BCC (Input) | Gomes et al. (2009) |
| Cultivos agrícolas | England (East Anglian River Basin Catchment) | 61 fincas (2011/2012) | Área cultivada, maquinaria costes, labores, fertilizantes costes, costes protección cultivos, costes agua, costes energía maquinaria, | Margen bruto | Ecoefficiency (input oriented) Segunda etapa: regression truncada | Gadanakis et al. (2015) |
| Cultivos (Frutas y Verduras) | Turkey | 81 provincias (NUTS 1) (1994-2004) | población, tierra, tractor, fertilizantes | Producción de cultivos | Malmquist | Armagan et al. (2010) |
| Cultivos | India | 17 regiones (1970/1971-2010/2011) | tierra, fertilizantes; superficie regada, sets de bombas, tractores, electricidad, labor. | Agua de lluvia | Additive technology (CRS) Segunda etapa: Estimación generalizada de mínimos cuadrados | Ray and Ghose (2014) |
| Agricultura y ganadería | Lithuania | 3308 fincas (2004/2011) | labor, tierra, consumos intermedios, depreciación | Ingresos totales | Análisis Multi-directional eficiencia VRS DEA analysis | Asmild et al. (2016) |
| Pepino | Iran (Jiroft city) | 60 agricultores de invernaderos (2012) | jornales, maquinaria, diésel, fertilizantes, estiércol, Biocidas, agua riego, semillas | pepino, energía total | CCR/BCC(Input) | Bolandnazar et al. (2014) |
| Grosellas | Greece (Vostiza) | 112 (convencional) 86 (ecológico) | capital, labor, tierra, inputs intermedios | producción | CCR/BCC (Input) Segunda etapa: Regresión de Tobit | Dimara et al. (2005) |
| Productores de grano | Norway | 19 (1987-1997) | capital, labores, tierra agrícola, semillas, fertilizante | Rendimiento de cultivo | CCR/BCC (Input) Indice de Malmquist product. | Odeck (2007) |

| | | | | | | |
|---|--|---------------------------------|---|--|---|------------------------------------|
| Maiz, Café | Ethiopia (Durame and Gara Godo) | 124 agricultores (1999/2000) | tierra, labor, fertilizantes, materiales | Valor bruto de maiz y cave | CCR/BCC (Input/Output) | Alene et al. (2006) |
| Maiz | Ethiopia (Wolaita and Gamo Gofa) | 385 fincas (2009/2010) | labor, semillas, fertilizantes, bueyes potencia | maiz | BCC (Input) Segunda etapa: Regresión de Tobit | Geta et al. (2013) |
| Maiz | Mexico (Yucatán) | 74 hogares (1998/1999) | Área forestal roturada para cultivos, labores de cultivo, fertilidad del suelo | Maiz total producido por hogares | CCR/BCC (Input) (NIRS) Segunda etapa: Regresión de Tobit | Pascual (2005) |
| Olivar | Spain (Andalusia) | 292 (2010) | erosion, biodiversidad, riesgo pesticidas, uso del agua, ratio de nitrógeno, ratio energía | Ingresos netos | Eco-efficiency (CRS) Segunda etapa: Regresión de Tobit | Gómez-Limón et al. (2012) |
| Naranjas | Iran (Northern) | 60 (2012/2013) | energía inputs (jornales, maquinaria, diesel, fertilizantes, estiércol, químicos y electricidad) | Rendimiento naranjas | DEA Algoritmos genéticos | Nabavi-Pelesaraei et al. (2014) |
| Sistemas agrícolas con precipitación | Spain (Central) | 171 fincas (2008) | semillas, N y P fertilizantes, pesticidas y energía | Ventas, subsidios, pagos medioambientales | Eco-efficiency model (CRS) Segunda etapa: Regresión Truncada Simar and Wilson | Picazo-Tadeo et al. (2011) |
| Arroz | South Korea | 96 fincas (2003-2007) | labores, poder de eutrofización de las labores, superficie, poder eutrofización tierra, fertilizantes | Arroz, lluvia | CCR(Input) | Nguyen et al. (2012) |
| Arroz | Bangladesh | 295 fincas (Nov-Dec) | Labors con buey, labores humanas, semillas, fertilizantes, superficie arroz | arroz | Doble bootstrap DEA aproximación (CCR/BCC) (Output) Segunda etapa: Bootstrap | Balcome et al. (2008) |
| Arroz | Bangladesh | 20 years (1989-2008) | area, semillas, fertilizantes, agua de lluvia, humedad, temperatura | Producción | CCR/BCC(Output) Segunda etapa: Regresión de Tobit | Hossain et al. (2013) |
| Arroz | Bangladesh (North-central) | 199 fincas (2010) | Tierra cultivada, tierra alquilada, labores humanas, labores con salario, semillas, estiércol, precio estiércol, fertilizantes, precio fertilizantes, pesticidas, precio pesticidas | Valor de la producción | BCC(Input) Segunda etapa: Regresión de Tobit | Nargis and Lee (2013) |
| Arroz | Iran (Gorgan region) | 82 fincas (2010) | labor, maquinaria, diesel, agua, electricidad, químicos, fertilizantes, semillas | arrozal | CCR(Input) LCA | Mohamnadi et al. (2015) |

| | | | | | | |
|------------------------|----------------------------|--|--|-----------------------------|---|-------------------------------|
| Cosecha de arroz | India (Punjab) | 363 fincas (1997-2000) | jornales, animal labor, diesel, electricidad, maquinaria, semillas, fertilizantes y químicos | Rendimiento de producto | CCR/BCC(Input) | Nassiri and Singh (2009) |
| Rosa | Iran (Esfahan Province) | 29 farmers (2009/2010) | jornales, diesel fuel, electricidad, fertilizantes, químicos | Rendimiento rosas | CCR/BCC (Input) | Pahlavan at al. (2012) |
| Granos de soja | Iran (Golestan province) | 94 fincas (2009/2010) | jornales, maquinaria, diesel fuel, químicos, fertilizantes, agua riego, semillas, electricidad | Soja | BCC (input) Cross efficiency ranking method | Mousavi-Avval et al. (2011) |
| Tobaco | Turkey (Adiyaman province) | 149 fincas (2000/2001) | Fertilizantes N y P, labor, Potencia de trio, y costes pesticidas | Rendimiento hojas de tabaco | CCR/VRS (Input) | Ören and Alemdar (2006) |
| Tomate | Iran | 27 agricultores (2008) | jornales, diésel,, electricidad, fertilizantes, químicos | Rendimiento tomate | CCR/VRS (Input) | Pahlavan et al. (2011) |
| Viñedos | Spain | 83 fincas (50 convencional 33 ecológico) (2004) | tierra, labores y otros costes N no deseable Impacto medioambiental Cociente de fincas | Ingresos totales fincas | Inverso de la industria output-orientada eficiencia Metafrontera | Aldanondo-Ochoa et al. (2014) |
| Sandías | Iran (Central, Kerman) | 88 fincas | maquinaria, diesel, químicos fertilizantes, estiércol, pesticidas, electricidad, semillas, plásticos | sandía | DEA Multiobjetivo algoritmo genético LCA | Khoshnevisan et al. (2015) |
| Trigo | India/Pakistan | 19 areas (nivel regional) 25 areas (inter-regional) | riego, semillas, uso fertilizantes | rendimiento | CCR/BCC (Input) | Malana and Malano (2006) |
| Trigo y otros cultivos | Turkey | 374 fincas (2009) | tierra, labores, costes de producción de cultivo, gastos | producción | CRS modelo (output) con producción de trade-offs | Atici and Podinovski (2015) |
| Trigo | Bangladesh (Northwestern) | 246 Laboreo conservación 86 Laboreo tradicional | NPK, pesticidas, riego, labor, fuel, semillas | Trigo, lluvia, paja | SBM. Segunda etapa: fractional regression. | Aravindakshan et al. (2015) |

Nota: DEA (Data Envelopment Analysis), CRS (Constant Returns to Scale), VRS (Variable Returns to Scale), LCA (Life Cycle Assessment)
CCR (Charnes et al. 1978), BCC (Banker et al. 1984), SBM (Tone 2001)

Tabla 2. Clasificación de modelos DEA aplicados en distintos cultivos por diferentes autores

Finalmente, podemos concluir tras la revisión de todos los apartados del estado del arte, que aunque se han propuesto muchos y diferentes modelos para manejar el concepto de los “dual-role factor”, sin embargo no existen en la literatura técnica estudios que hayan aplicado el concepto de que algunas variables pueden ser consideradas en unas ocasiones una entrada y en otras una salida (dependiendo del rango de valores en el que nos encontremos) salvo el trabajo mencionado de *Villa y Lozano (2016)*.

Por lo tanto, en este trabajo fin de master, se van a considerar aquellos casos en los que una variable puede ser tratada como una salida dentro de un rango de valores (cuando aumentar la variable es deseable porque aumenta la eficiencia), mientras que la misma variable puede ser considerada como una entrada en otro rango de valores (cuando reducir la variable es deseable porque aumenta con ello la eficiencia).

En este sentido, se presenta primero un modelo DEA general para manejar variables no monótonas, y posteriormente lo aplicaremos a un caso práctico de evaluación de la eficiencia productiva en olivar, dado que tampoco se han tenido en cuenta las cantidades de NPK y de riego como tal.

4. MODELO DEA CON VARIABLES NO MONÓTONAS:

El primer paso a realizar en DEA convencional es inferir el Production Possibility Set (PPS) o conjunto de posibilidades de producción, también conocido como tecnología DEA. Esto se hace usando algunos axiomas básicos (como envoltura, libre disponibilidad, y convexidad) y aplicando el Principio de Mínima Extrapolación. De este modo, obtenemos el VRS o la tecnología DEA Variable Returns to Scale (o retorno de escala variable).

Por lo tanto, sea

| | |
|----------|--------------------------------------|
| j | índice de las DMUs, desde 1 hasta n |
| i | índice para inputs, desde 1 hasta m |
| k | índice para outputs, desde 1 hasta p |
| x_{ij} | input i consumido por DMU j |
| y_{kj} | output k producido por DMU j |

El conjunto de posibilidades de producción (PPS) VRS corresponde a:

$$T(\hat{x}, \hat{y}) = \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \hat{x}_i; \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} \geq \hat{y}_k; \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1; \lambda_j \geq 0 \right\} \quad (1)$$

En este proyecto, además de inputs y outputs, vamos a considerar variables no monótonas. Estas variables no son consideradas libremente disponibles. No tendría mucho sentido asumir que, dado un punto factible de operación, reduciendo una de estas variables sin ningún límite (o incrementándola), como la libre disponibilidad indica, sea siempre factible. No se puede garantizar que reduciendo la variable (o incrementándola) corresponda con menor eficiencia y desplazándose o alejándose de la frontera eficiente. Por lo tanto, dado que asumir la libre disponibilidad de las variables no monótonas no parece razonable, no se ha considerado para este tipo de variables.

Sea:

| | |
|----------|---|
| r | índice de las variables no monótonas, desde 1 hasta h |
| v_{rj} | valor de la variable no monótona r para DMU j |

El conjunto de posibilidades resultante (PPS) no monótono VRS es:

$$T(\hat{x}, \hat{y}, \hat{v}) = \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \hat{x}_i; \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} \geq \hat{y}_k; \sum_{j=1}^n \lambda_j v_{rj} = \hat{v}_r; \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1; \lambda_j \geq 0 \right\} \quad (2)$$

Sin embargo, la primera diferencia con respecto a DEA convencional es que el PPS requerido para las variables no monótonas difiere de los habituales inputs y outputs monótonos del PPS en que los valores de las variables no monótonas fuera del rango observado no son consideradas factibles. Efectivamente, sólo aquellos valores dentro del casco/envolvente convexo son posibles.

La segunda diferencia, más sorprendente aún, es que para determinar la frontera eficiente, es necesario definir el rango de valores donde las variables no monótonas son monótonamente crecientes o decrecientes con respecto a la eficiencia. En otras palabras, para cada variable no monótona, el rango de valores para los cuales se comporta como un input y un output debe ser determinado. Consideramos solamente variables no monótonas v_r para las cuales:

- Hay un intervalo $(v_r^{ideal,min}, v_r^{ideal,max})$ en el que la variable v_r es óptima, es decir, toma su mejor valor posible, y por tanto contribuye máximamente a la eficiencia en el sentido que la variable no puede ser mejorada cambiando esta variable.
- Hay un intervalo $(v_r^{min}, v_r^{ideal,min})$ en el que la variable actúa como output, por lo que incrementar su valor es deseable.
- Hay un intervalo $(v_r^{ideal,max}, v_r^{max})$ en el que la variable actúa como input, por lo que disminuir su valor es deseable.

Nótese, como se muestra en la Figura 1, este tipo de variables pueden ser descritas a través de un Número Fuzzy Trapezoidal (TrFN) $(v_r^{min}, v_r^{ideal,min}, v_r^{ideal,max}, v_r^{max})$, de manera que la correspondiente función de pertenencia $\mu_r(v_r)$ representa la deseabilidad del correspondiente valor de la variable. La deseabilidad asociada a la función de pertenencia implica que queremos que la variable no monótona tome el valor que haga que la función de pertenencia tomar valor uno, siendo indeseables los valores que hagan la función de pertenencia tome valor cero. Hay que tener en cuenta también que podemos definir un número similar TrFN para representar la deseabilidad de las variables inputs $(0,0, x_i^{ideal,max}, x_i^{max})$ y outputs $(y_k^{min}, y_k^{ideal,min}, \infty, \infty)$, respectivamente.

Aquí, $x_i^{ideal,max}$ corresponde con el máximo valor del input consumido en el caso ideal y puede, en principio, ser equiparado al mínimo valor del input para las DMUs observadas. El máximo valor aceptable (p.ej. valores altos son completamente no deseables) de ese input, x_i^{max} , por otra parte, puede ser, en principio equiparable al máximo valor de ese input i para las DMUs observadas. Análogamente, y_k^{min} e $y_k^{ideal,min}$ representan el valor mínimo aceptable y el valor ideal mínimo respectivamente, para el output k y puede ser equiparable, en principio, al valor mínimo y máximo de ese output de las DMUs observadas.

Gráficamente:

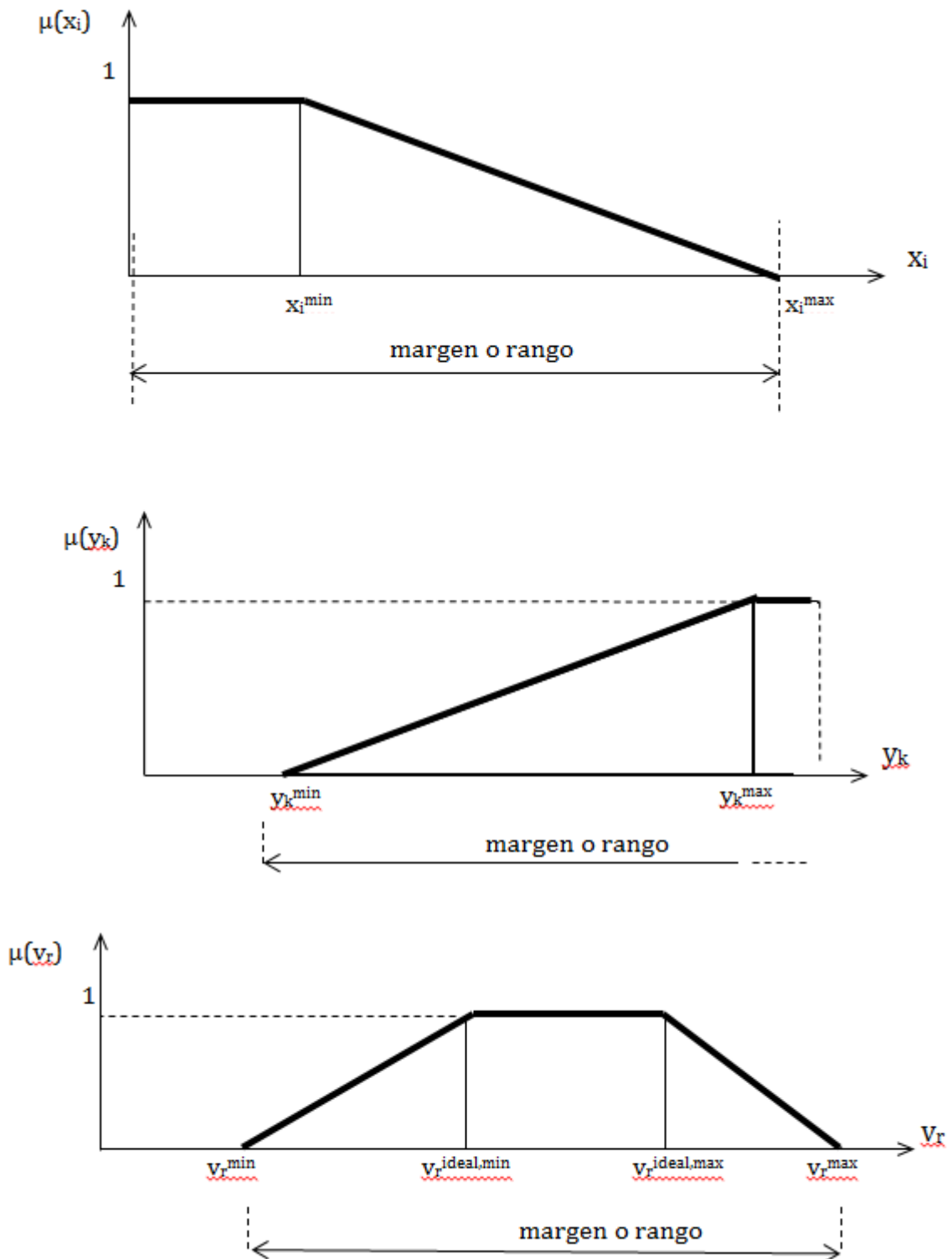


Figura 1. Funciones de pertenencia para input (x), output (y), y variables no monótonas.

Dado el TrFN correspondiente a la función de pertenencia deseable de los diferentes inputs, outputs y variables no monótonas, la eficiencia relativa de una DMU puede ser definida como el máximo posible incremento en la deseabilidad de estas variables con respecto a los valores observados. Una DMU es por lo tanto, efectivamente eficiente si la deseabilidad de ninguno de sus inputs, outputs, o variables no monótonas puede ser mejorada de acuerdo con el correspondiente TrFN. El modelo DEA para obtener la correspondiente puntuación de eficiencia se ha formulado más abajo, pero antes conviene ilustrar los conceptos con un ejemplo numérico, dado que tanto el PPS como la frontera eficiente, en el caso de variables no monótonas, difieren de los del DEA convencional. En este sentido, de cara a ser capaces de representar los datos en un plano bidimensional, consideraremos el caso de inputs no monótonos, un único output monótono, y una sólo variable no monótona v .

En la Figura 2 se pueden ver representados 11 DMUs juntas con los valores de referencia del TrFN de la variable no monótona (correspondiente a las 4 líneas de trazos). Los valores de referencia correspondientes de la variable output son $y_k^{\min}=5$ and $y_k^{\text{ideal},\min}=30$, ligeramente por debajo y ligeramente por encima respectivamente, de los valores observados mínimo y máximo del output (por lo que todos los valores de salida de las DMUs están entre éstos dos). El conjunto PPS no monótono dado por la ecuación (2) corresponde al área delimitada por la línea del polígono y la correspondiente frontera eficiente es solamente un segmento marcado en negrita, que incluye uno de los puntos observados DMU (que tiene el máximo output) más parte del segmento que une esta DMU, y otro con el valor más bajo de la variable no monótona. Cualquier otro punto (\hat{v}, \hat{y}) dentro del PPS no es eficiente como tampoco la deseabilidad del output monótono (mo) $\mu^{\text{mo}}(\hat{y})$ y/o la de la variable no monótona (non_m) variable $\mu^{\text{non-m}}(\hat{v})$ puede ser incrementado. Es decir, la frontera tecnológica tiene puntos eficientes y otros que no lo son, y éstos últimos no son eficientes porque la variable no monótona no está entre los valores óptimos.

En el caso mostrado en Figura 2, una de las DMU pertenece a la frontera eficiente. Nótese sin embargo, a pesar de lo que ocurre en modelos DEA tradicionales, cuando se consideran variables no monótonas, la frontera eficiente puede contener puntos operativos (como el punto Q de la Figura 2) que son una combinación lineal de las DMUs observadas, algunas de las cuales no pertenecen necesariamente a la frontera eficiente.

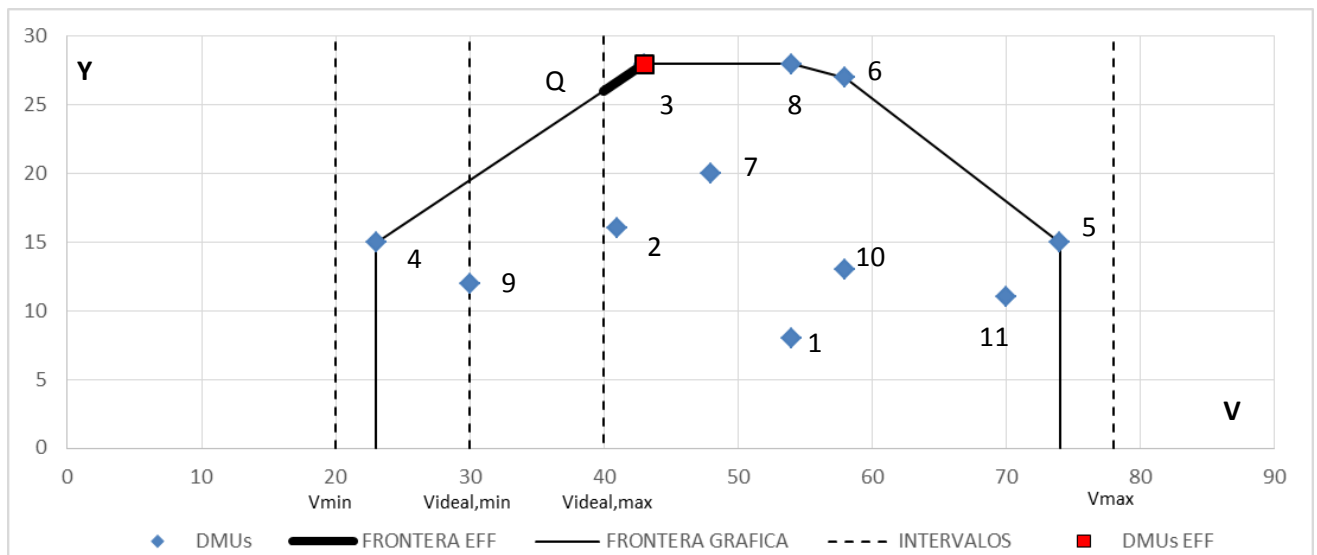


Figura 2. Representación un único output/una única variable no monótona.

La Figura 3 muestra otros cuatro escenarios correspondientes a diferentes valores de los parámetros $v_r^{ideal,min}$ and $v_r^{ideal,max}$. Así, en el caso mostrado en el panel (a), tenemos de nuevo que una de las dos DMUs con máximo valor de output es eficiente y que la frontera eficiente contiene puntos operativos formados como combinación lineal de las DMUs, no perteneciendo todas ellas a la frontera eficiente.

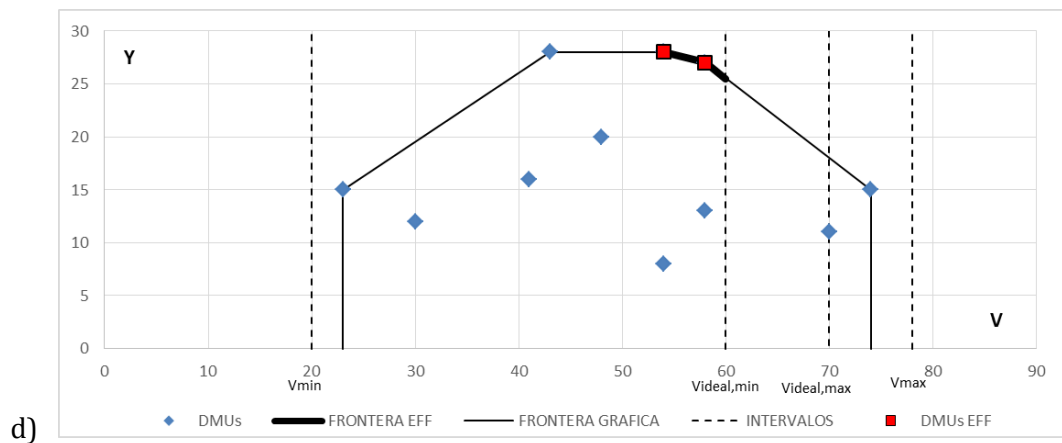
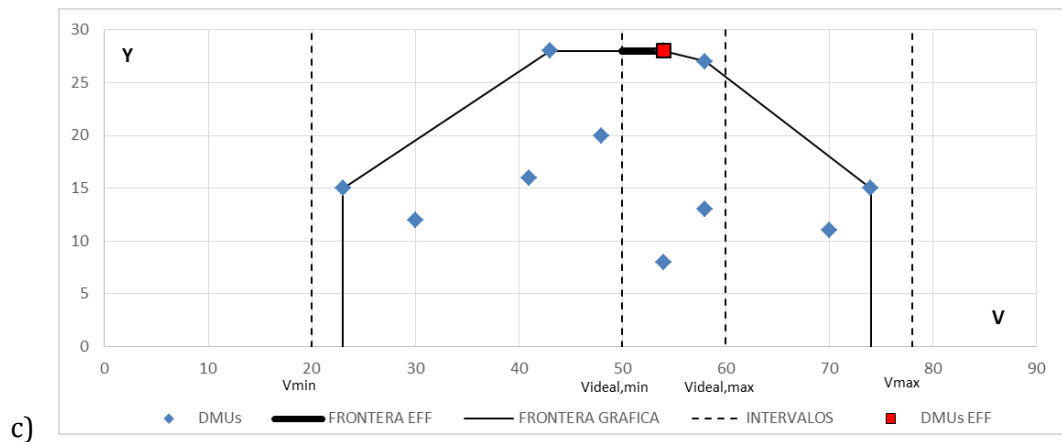
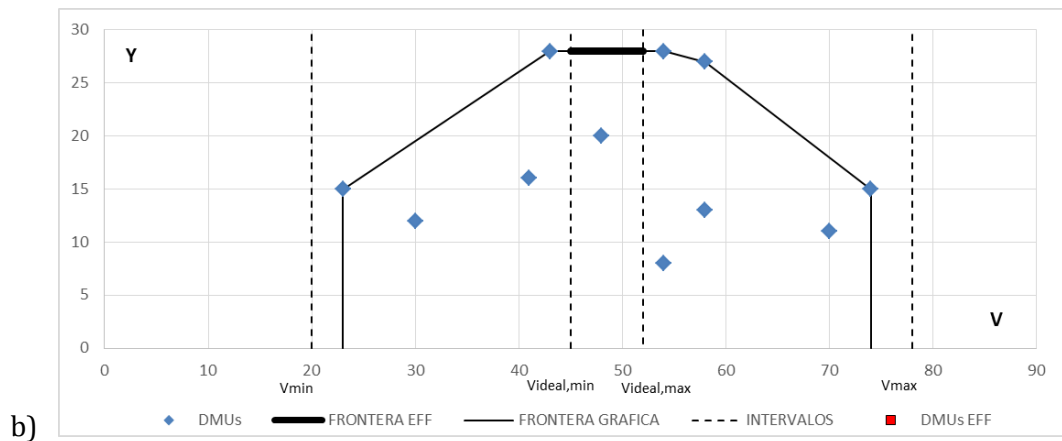
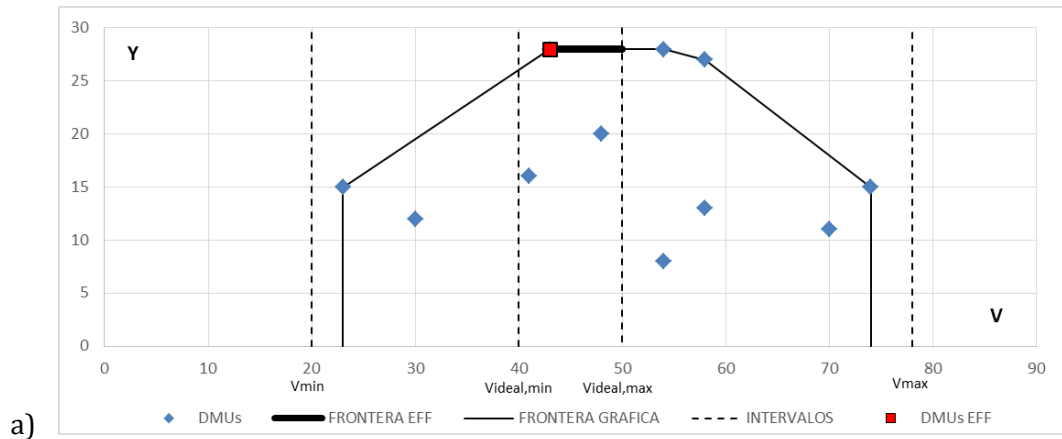


Figura 3. Otros ejemplos (a, b, c, d) de único output, y única variable no monótona.

En el panel (b), la frontera eficiente contiene puntos de output máximo, pero ninguno de ellos corresponde a DMUs observadas. Esto nunca pasa en DEA convencional, en el que al menos una de las DMUs observadas siempre se considera eficiente. El caso mostrado en el panel (c) es similar al de panel (a) excepto que la DMU eficiente con máximo output es diferente. Finalmente en el panel (d), hay dos DMUs eficientes, una de las cuales corresponde al máximo output.

Como se puede apreciar en estos ejemplos, en DEA no monótono la frontera eficiente no tiene porqué incluir las DMUs observadas. Aunque parezca sorprendente a primera vista, no es tan extraño. Así, en la red de trabajo DEA puede suceder que ninguna DMU se considere eficiente ya que para que una DMU sea eficiente, todos sus procesos deben ser eficientes, algo que no es muy probable.

Por tanto, procedemos a formular el modelo DEA no monótono:

| | |
|------------------------|--|
| 0 | DMU evaluada |
| I^{mi} | inputs monótonos |
| O^{mo} | outputs monótonos |
| V^{non_m} | variables no monótonas |
| \hat{x}_i | objetivo del input i para DMU 0 |
| \hat{y}_k | objetivo del output k para DMU 0 |
| \hat{v}_r | objetivo de la variable r para DMU 0 |
| $\mu_{r0}^{non_m}$ | valor de la función de pertenencia de la variable no monótona r para DMU 0 |
| $\hat{\mu}_r^{non_m}$ | valor de la función de pertenencia del valor objetivo de la var. no monótona \hat{v}_r |
| μ_{i0}^{mi} | valor de la función de pertenencia del input monótono i para DMU 0 |
| $\hat{\mu}_i^{mi}$ | valor de la función de pertenencia del input monótono i en \hat{x}_i |
| μ_{k0}^{mo} | valor de la función de pertenencia del output monótono k para DMU 0 |
| $\hat{\mu}_k^{mo}$ | valor de la función de pertenencia del output monótono k en \hat{y}_k |
| λ_j | variable de intensidad para la combinación lineal convexa de DMUs observadas |

| | |
|---------|---|
| w_r | peso relativo de mejora del valor de pertenencia de la variable no monótona r |
| w'_i | peso relativo de mejora del valor de pertenencia del input monótono i |
| w''_k | peso relativo de mejora del valor de pertenencia del output monótono k |
| ξ_0 | puntuación de eficiencia de la DMU 0 |

El modelo DEA no monótono propuesto se puede formular como sigue:

$$\text{Max} \sum_{r=1}^h w_r (\hat{\mu}_r^{\text{non_m}} - \mu_{r0}^{\text{non_m}}) + \sum_{i=1}^m w'_i (\hat{\mu}_i^{\text{mi}} - \mu_{i0}^{\text{mi}}) + \sum_{k=1}^p w''_k (\hat{\mu}_k^{\text{mo}} - \mu_{k0}^{\text{mo}}) \quad (3)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{i0} \quad \forall i \in I^{\text{mi}} \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} \geq y_{k0} \quad \forall k \in O^{\text{mo}} \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \hat{x}_i \quad \forall i \in I^{\text{mi}} \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = \hat{y}_k \quad \forall k \in O^{\text{mo}} \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j v_{rj} = \hat{v}_r \quad \forall r \in V^{\text{non_m}} \quad (8)$$

$$\hat{\mu}_r^{\text{non_m}} \leq \frac{\hat{v}_r - v_r^{\text{min}}}{v_r^{\text{ideal,min}} - v_r^{\text{min}}} \quad \forall r \in V^{\text{non_m}} \quad (9)$$

$$\hat{\mu}_r^{\text{non_m}} \leq \frac{v_r^{\text{max}} - \hat{v}_r}{v_r^{\text{max}} - v_r^{\text{ideal,max}}} \quad \forall r \in V^{\text{non_m}} \quad (10)$$

$$\hat{\mu}_i^{\text{mi}} \leq \frac{x_i^{\text{max}} - \hat{x}_i}{x_i^{\text{max}} - x_i^{\text{min}}} \quad \forall i \in I^{\text{mi}} \quad (11)$$

$$\hat{\mu}_k^{\text{mo}} \leq \frac{\hat{y}_k - y_k^{\text{min}}}{y_k^{\text{max}} - y_k^{\text{min}}} \quad \forall k \in O^{\text{mo}} \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (13)$$

$$\mu_{r0}^{\text{non}_m} \leq \hat{\mu}_r^{\text{non}_m} \leq 1 \quad \forall r \in V^{\text{non}_m} \quad (14)$$

$$\mu_{i0}^{\text{mi}} \leq \hat{\mu}_i^{\text{mi}} \leq 1 \quad \forall i \in I^{\text{mi}} \quad (15)$$

$$\mu_{k0}^{\text{mo}} \leq \hat{\mu}_k^{\text{mo}} \leq 1 \quad \forall k \in O^{\text{mo}} \quad (16)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j \quad (17)$$

Este modelo es un Programa Lineal (LP) con $2*(h+m+p)+n$ variables continuas y $5h+4*(m+s)$ restricciones. El modelo cuantifica la eficiencia de DMU 0 maximizando el incremento ponderado en el grado de pertenencia de todas las variables respecto a los valores observados. Las restricciones (4) y (5) garantizan que los inputs no serán incrementados y los outputs no serán reducidos. Las restricciones (6), (7), y (8) definen los valores objetivos de diferentes variables. Todas estas restricciones junto con, junto con (13) y (17), en realidad implementan las asunciones del involucramiento, la libre disponibilidad de inputs y outputs, y la convexidad, y juntas definen los puntos $(\hat{x}_i, \hat{y}_k, \hat{v}_r)$ que pertenecen al conjunto monótono PPS.

El siguiente conjunto de restricciones son relativas a los valores de la función de pertenencia de las diferentes variables. Así, restricciones (9) y (10), junto con (14), computan el valor objetivo de la función de pertenencia de cada variable (\hat{v}_r) no monótona. Restricciones similares son (11) y (12), junto con (15) y (16), que computan el correspondiente valor objetivo de la función de pertenencia para cada input y output variable monótono.

Véase que restricciones (14) y (16) garantizan que el valor objetivo de pertenencia de cada variable, monótona o no-monótona, debe ser mayor que o igual que el observado para DMU 0. Finalmente, la función objetivo (3) puede ser interpretada como maximizar el incremento ponderado de aquellos valores objetivo de la función de pertenencia. Esta función objetivo parece similar a la maximización de holguras ponderadas en los modelos DEA convencional. Se debe destacar, sin embargo, que en el modelo propuesto todas las variables (monótonas y no monótonas) han sido trasladadas hasta su correspondientes valores de la función de pertenencia, por lo que son variables adimensionales y pueden ser sumadas.

Si el valor óptimo de la función objetivo es cero, entonces DMU 0 es eficiente. Como los valores de todas las funciones objetivo están entre 0 y 1, asumiendo que los pesos o ponderaciones son normalizados.

$$\sum_{r=1}^h w_r + \sum_{i=1}^m w'_i + \sum_{k=1}^p w''_k = 1 \quad (18)$$

Y la puntuación de la eficiencia normalizada para DMU 0 puede ser calculada como:

$$\xi_0 = 1 - \left[\sum_{r=1}^h w_r (\hat{\mu}_r^{non_m} - \mu_{r0}^{non_m}) + \sum_{i=1}^m w'_i (\hat{\mu}_i^{mi} - \mu_{i0}^{mi}) + \sum_{k=1}^p w''_k (\hat{\mu}_k^{mo} - \mu_{k0}^{mo}) \right] \quad (19)$$

Usando el modelo DEA no monótono propuesto con el conjunto de datos mostrados en la Figura 2 y considerando los mismos pesos ($w=w''=0.5$), podemos calcular los objetivos y los correspondientes valores de la función de pertenencia de cada DMU, así como su puntuación de eficiencia. Estos se muestran en la Tabla 3 junto con los valores observados de las variables, sus correspondientes valores de la función de pertenencia y los puntos de referencia usados para calcular el objetivo.

| DMU | Datos | | | | Resultados | | | | |
|-----|-------|-------|------------------|--------------|--------------|-------------|-------------|------------------------|--------------------|
| | v_0 | y_0 | $\mu_0^{non_m}$ | μ_0^{mo} | ξ_0 | \hat{v}_0 | \hat{y}_0 | $\hat{\mu}_0^{non_m}$ | $\hat{\mu}_0^{mo}$ |
| 1 | 54 | 8 | 0.65 | 0.12 | 0.463 | 43 | 28 | 0.93 | 0.92 |
| 2 | 41 | 16 | 0.98 | 0.44 | 0.787 | 40 | 26.05 | 1.00 | 0.84 |
| 3 | 43 | 28 | 0.93 | 0.92 | 1.000 | 43 | 28 | 0.93 | 0.92 |
| 4 | 23 | 15 | 0.30 | 0.40 | 0.428 | 43 | 28 | 0.93 | 0.92 |
| 5 | 74 | 15 | 0.15 | 0.40 | 0.353 | 43 | 28 | 0.93 | 0.92 |
| 6 | 58 | 27 | 0.55 | 0.88 | 0.793 | 43 | 28 | 0.93 | 0.92 |
| 7 | 48 | 20 | 0.80 | 0.60 | 0.778 | 43 | 28 | 0.93 | 0.92 |
| 8 | 54 | 28 | 0.65 | 0.92 | 0.863 | 43 | 28 | 0.93 | 0.92 |
| 9 | 30 | 12 | 1.00 | 0.28 | 0.719 | 40 | 26.05 | 1.00 | 0.84 |
| 10 | 58 | 13 | 0.55 | 0.32 | 0.513 | 43 | 28 | 0.93 | 0.92 |
| 11 | 70 | 11 | 0.25 | 0.24 | 0.323 | 43 | 28 | 0.93 | 0.92 |

Tabla 3. Valores observados y resultados para el ejemplo mostrado en Figura 1.

La fila correspondiente a la única DMU considerada eficiente (denominada DMU 3) está mostrada en gris. Todas las demás DMUs son proyectadas sobre esta DMU eficiente excepto DMU 2 y 9, que son proyectadas sobre el punto denominado Q ($\hat{v} = 40, \hat{y} = 26.05$) en la Figura 2, que es una combinación convexa de DMU 3 (que es eficiente) y DMU 4 (que no es eficiente).

Se debe destacar que la formulación del modelo es la que debe ser empleada cuando los valores observados de todas las variables (monótonos y no monótonos) están dentro del margen deseable de sus respectivas funciones de pertenencia. Si este no fuera el caso, entonces

es necesario realizar una pequeña modificación, ligeramente más compleja con variables binarias que vamos a detallar algo más en el siguiente punto.

No obstante, conviene destacar que la función de pertenencia empleada en la aproximación propuesta para las variables no monótonas define rangos específicos para estas variables por lo que el efecto de un cambio de las variables en la función objetivo depende del rango en que se encuentren las variables.

A veces, como en el caso de los resultados de analíticas de sangre o en el caso del cultivo del olivar, los límites de estos rangos pueden ser identificados por consenso con expertos. En otras ocasiones, los límites correspondientes pueden ser más subjetivos pueden depender del Decisión Maker (DM) y su valor de juicio. De hecho, la existencia de un DM está implícita desde el momento que en la aproximación propuesta se considera una función objetivo ponderada, que soporta de manera diferente los incrementos de los valores de la función de pertenencia de los inputs, los outputs, y las variables no monótonas.

Finalmente, aunque la aproximación propuesta ha sido considerada tipo VRS, en principio es posible extenderlo al caso CRS. Habrá que considerar la asunción de escalabilidad cuando se construya la correspondiente tecnología, no siendo esto un problema. El hecho que la función de pertenencia de las variables no monótonas establezca rangos fijos para estas variables, puede limitar la medida en que la frontera eficiente CRS puede extender.

4.1. MODELO DEA CON VARIABLES FUERA DEL RANGO DESEABLE

En este apartado se formula y explica el modelo modificado que debe ser utilizado para aquellas DMUs en las que el valor observado de al menos una de las variables (monótonas o no monótonas) cae fuera del margen deseable de sus respectivas funciones de pertenencia correspondiente a esa variable.

Aunque el modelo expuesto considera el peor caso en el que esto ocurre para todas las variables, en la mayoría de los casos las modificaciones correspondientes (que básicamente implica la introducción de una o dos variables binarias, dependiendo de si la variable con margen más estrecho es monótona o no monótona) se tienen que hacer sólo para las variables afectadas.

$$\text{Max} \sum_{r=1}^h w_r (\hat{\mu}_r^{\text{non}_m} - \mu_{r0}^{\text{non}_m}) + \sum_{i=1}^m w'_i (\hat{\mu}_i^{\text{mi}} - \mu_{i0}^{\text{mi}}) + \sum_{k=1}^p w''_k (\hat{\mu}_k^{\text{mo}} - \mu_{k0}^{\text{mo}}) \quad (\text{AP.1})$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{i0} \quad \forall i \in I^{\text{mi}} \quad (\text{AP.2})$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} \geq y_{k0} \quad \forall k \in O^{\text{mo}} \quad (\text{AP.3})$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \hat{x}_i \quad \forall i \in I^{\text{mi}} \quad (\text{AP.4})$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = \hat{y}_k \quad \forall k \in O^{\text{mo}} \quad (\text{AP.5})$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j v_{rj} = \hat{v}_r \quad \forall r \in V^{\text{non}_m} \quad (\text{AP.6})$$

$$\hat{\mu}_r^{\text{non}_m} \leq \frac{\hat{v}_r - v_r^{\text{min}}}{v_r^{\text{ideal,min}} - v_r^{\text{min}}} + M\delta_r^+ \quad \forall r \in V^{\text{non}_m} \quad (\text{AP.7})$$

$$\frac{\hat{v}_r - v_r^{\text{min}}}{v_r^{\text{ideal,min}} - v_r^{\text{min}}} \leq M(1 - \delta_r^+) \quad \forall r \in V^{\text{non}_m} \quad (\text{AP.8})$$

$$\hat{\mu}_r^{\text{non}_m} \leq \frac{v_r^{\text{max}} - \hat{v}_r}{v_r^{\text{max}} - v_r^{\text{ideal,max}}} + M\delta_r^- \quad \forall r \in V^{\text{non}_m} \quad (\text{AP.9})$$

$$\frac{v_r^{\max} - \hat{v}_r}{v_r^{\max} - v_r^{\text{ideal,max}}} \leq M(1 - \delta_r^-) \quad \forall r \in V^{\text{non_m}} \quad (\text{AP.10})$$

$$\hat{\mu}_i^{\text{mi}} \leq \frac{x_i^{\max} - \hat{x}_i}{x_i^{\max} - x_i^{\min}} + M\delta_i^- \quad \forall i \in I^{\text{mi}} \quad (\text{AP.11})$$

$$\frac{x_i^{\max} - \hat{x}_i}{x_i^{\max} - x_i^{\min}} \leq M(1 - \delta_i^-) \quad \forall i \in I^{\text{mi}} \quad (\text{AP.12})$$

$$\hat{\mu}_k^{\text{mo}} \leq \frac{\hat{y}_k - y_k^{\min}}{y_k^{\max} - y_k^{\min}} + M\delta_k^+ \quad \forall k \in O^{\text{mo}} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\hat{y}_k - y_k^{\min}}{y_k^{\max} - y_k^{\min}} \leq M(1 - \delta_k^+) \quad \forall k \in O^{\text{mo}} \quad (\text{AP.14})$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (\text{AP.15})$$

$$\mu_{r0}^{\text{non_m}} \leq \hat{\mu}_r^{\text{non_m}} \leq (1 - \delta_r^+ - \delta_r^-) \quad \forall r \in V^{\text{non_m}} \quad (\text{AP.16})$$

$$\mu_{i0}^{\text{mi}} \leq \hat{\mu}_i^{\text{mi}} \leq (1 - \delta_i^-) \quad \forall i \in I^{\text{mi}} \quad (\text{AP.17})$$

$$\mu_{k0}^{\text{mo}} \leq \hat{\mu}_k^{\text{mo}} \leq (1 - \delta_k^+) \quad \forall k \in O^{\text{mo}} \quad (\text{AP.18})$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j \quad (\text{AP.19})$$

$$\delta_k^+, \delta_i^-, \delta_r^+, \delta_r^- = \{0,1\} \quad \forall k \in O^{\text{mo}} \quad \forall i \in I^{\text{mi}} \quad \forall r \in V^{\text{non_m}} \quad (\text{AP.20})$$

Véase que este es un modelo MILP con 2^*h+m+p variables binarias incluidas, siendo M un número positivo suficientemente grande. Téngase en cuenta que para estas variables no afectadas por la condición de margen estrecho, las correspondientes variables binarias pueden ser fijadas a 0 sin peligro, y las correspondientes restricciones serán equivalentes a aquellas del primer modelo (3) y (17).

La necesidad de la modificada formulación viene del hecho que la envolvente convexa de los valores observados contiene puntos de operación fuera del soporte/margen de algunas funciones de pertenencia, y por tanto los valores objetivo pueden estar también fuera de ese soporte/margen. En realidad esto es lo que hemos mencionado antes como una condición de soporte estrecha. Analicemos las modificaciones requeridas por medio de los siguientes cuatro casos. Cualquier otro caso conlleva a asignar valor 0 a las correspondientes variables binarias.

a) $\hat{v}_r < v_r^{\min}$

Cuando $\hat{v}_r < v_r^{\min}$, tenemos

$$\frac{\hat{v}_r - v_r^{\min}}{v_r^{\text{ideal},\min} - v_r^{\min}} < 0 \quad (\text{AP.21})$$

Esto fuerza el modelo a asignar $\delta_r^+ = 1$ debido a (AP.7), $\mu_{r0}^{\text{non-m}} \geq 0$ (por definición de función de pertenencia) y (AP.16). Obsérvese que (AP.8) se cumple con cualquiera $\delta_r^+ = 0$ "o" $\delta_r^+ = 1$, en el caso que $\hat{v}_r < v_r^{\min}$.

Por otro lado, como $\hat{v}_r < v_r^{\min} < v_r^{\max}$,

$$\frac{v_r^{\max} - \hat{v}_r}{v_r^{\max} - v_r^{\text{ideal},\max}} > 0 \quad (\text{AP.22})$$

forzando $\delta_r^- = 0$, debido a (AP.10). Véase que (AP.9) se mantiene con cualquiera $\delta_r^- = 0$ o $\delta_r^- = 1$ en el caso que $\hat{v}_r < v_r^{\min}$.

Al final, ya que $\delta_r^+ = 1$ y $\delta_r^- = 0$, obtenemos que debido a la restricción (AP.16), $\hat{\mu}_r^{\text{non-m}} = 0$.

b) $\hat{v}_r > v_r^{\max}$

En este caso tenemos

$$\frac{v_r^{\max} - \hat{v}_r}{v_r^{\max} - v_r^{\text{ideal},\max}} < 0 \quad (\text{AP.23})$$

forzando $\delta_r^- = 1$, debido a (AP.9), ya que $\mu_{r0}^{\text{non-m}} \geq 0$.

Como $v_r^{\min} < v_r^{\max} < \hat{v}_r$,

$$\frac{\hat{v}_r - v_r^{\min}}{v_r^{\text{ideal},\min} - v_r^{\min}} > 0 \quad (\text{AP.24})$$

haciendo al modelo asignar $\delta_r^+ = 0$, debido a (AP.8).

Al final, ya que $\delta_r^+ = 0$ y $\delta_r^- = 1$, obtenemos que debido a la restricción (AP.16), $\hat{\mu}_r^{\text{non-m}} = 0$.

c) $\hat{x}_i > x_i^{\max}$

En este caso tenemos

$$\frac{x_i^{\max} - \hat{x}_i}{x_i^{\max} - x_i^{\min}} < 0 \quad (\text{AP.25})$$

Por lo tanto, (AP.11) determina que $\delta_i^- = 1$ y, consecuentemente, $\hat{\mu}_i^{\text{mi}} = 0$ debido a la restricción (AP.17). Véase que (AP.12) se mantiene en este caso con cualquier $\delta_i^- = 1$ o $\delta_i^- = 0$.

d) $\hat{y}_k < y_k^{\min}$

En este caso tenemos

$$\frac{\hat{y}_k - y_k^{\min}}{y_k^{\max} - y_k^{\min}} < 0 \quad (\text{AP.26})$$

Por tanto, (AP.13) determina que $\delta_k^+ = 1$ y, por lo tanto, $\hat{\mu}_k^{\text{mo}} = 0$ debido a la restricción (AP.18). Véase que (AP.14) se mantiene en este caso con cualquiera $\delta_k^+ = 1$ or $\delta_k^+ = 0$.

5. APLICACIÓN DEL MODELO PROPUESTO A FINCAS DE OLIVAR

En este apartado aplicaremos la metodología propuesta para evaluar eficiencia de determinadas fincas de olivar (DMUs) de las que disponemos de un conjunto de datos (PPS) suficientemente amplio para dos campañas de cultivo (2014 y 2015)

Con esta aplicación pretendemos dar respuesta a las preguntas siguientes relacionadas con la medición de la eficacia de las fincas en un escenario con variables no monótonas: ¿Qué se puede hacer para mejorar la eficiencia técnica? ¿Qué posibilidades tiene un agricultor para mejorar? ¿Cómo puede una finca ineficiente mejorar sus resultados productivos? ¿Es posible para los gerentes de fincas seguir determinados pasos para mejorar la eficiencia de sus fincas? Antes de profundizar en la aplicación práctica, hacemos una exposición informativa de los aspectos más importantes.

El cultivo del olivar es la mayor actividad agrícola en Andalucía y tiene una gran importancia económica, social y medioambiental. Esta actividad agrícola no es homogénea, dado que tiene diferentes sistemas de cultivo, cuyas diferencias residen básicamente en las posibilidades de mecanización de las diferentes operaciones (laboreo, tratamientos, fertilización, riego, poda y recolección), el uso intensivo de inputs que desemboquen en una mayor productividad, así como la disponibilidad de capital para inversiones que suele ir asociada a fincas grandes.

Esta falta de homogeneidad es debida a distintos parámetros, como pueden ser el régimen de cultivo, la orografía, la antigüedad de los olivos, la disponibilidad de agua, e incluso el manejo que de estos sistemas hacen los propios agricultores o las empresas consultoras encargadas de la gestión de la finca.

No obstante, tanto los olivares andaluces como los de fuera de España y Andalucía, compiten en un mismo mercado y obtienen una eficiencia determinada en un entorno cada vez más competitivo, con olivares recientes que incluso careciendo de subvenciones, son -más eficientes y rentables.

La creciente demanda de aceite de oliva en un mercado global con unos costes de producción competitivos, requiere una mejora de la eficiencia productiva del olivar, lo que implica la utilización de estrategias y técnicas adecuadas (nuevas variedades, mayores densidades de plantación, instalaciones de riego localizado, manejo fitosanitario integrado, mecanización de la cosecha y optimización del manejo cultural), para conseguir mayores rendimientos, una disminución de los costes de producción y una mejora de la calidad del aceite (*AEMO, 2012; Arbonés et. al, 2014*).

Este incremento en la eficiencia productiva requiere de una mejora en la tecnología del cultivo, centrado en aumentar la productividad del olivar y la calidad, pero sabiendo que el empleo de mayores recursos como el riego e insumos (incluida la energía) para la obtención de la mayor producción posible, no se corresponde con el punto de mayor beneficio ni eficiencia.

Comparar diferentes tipos de olivar tan distintos no es una tarea fácil, es necesario el desarrollo de una metodología que permita la comparación de unos tipos con otros, considerando el conjunto como un proceso de producción, en el que se emplean una serie de entradas o inputs, para obtener una serie de salidas u outputs.

En nuestro análisis nos vamos a centrar en un grupo de ellos (olivares en riego) que puede ser interesante para aplicar nuestro modelo ya expuesto, dado que según las experiencias contrastadas y las conclusiones de investigadores anteriores, es donde se suelen encontrar los DMUs más eficientes.

En primer lugar, está comprobado empíricamente (*AEMO, 2012*) que la rentabilidad del olivar es función del precio del producto transformado, el aceite, y los costes de producción.

- Precio del aceite es internacional, y a su vez es función de:

Consumo mundial

Producción mundial

- Costes de producción son particulares, y a su vez son función de:

Tipo de sistema de cultivo (riego/secano, intensivo/extensivo, pendiente)

Manejo del cultivo por el agricultor

Sobre la producción y el consumo mundial no se puede actuar, pero la tendencia es creciente en cuanto a la producción internacional, y el consumo también es creciente (pero sensible a precios elevados). Sin embargo sobre el tipo de sistema de cultivo y el manejo si se puede intervenir y mejorar nuestra tecnología, de cara a “proyectar” cualquier finca hacia los puntos de referencia en el sector.

Vamos a considerar varios escenarios de sistemas y manejos de cultivo, de manera que cualquier finca o parcela se pueda englobar en alguno de ellos, distinguiendo claramente entre olivar tradicional y olivar de alta densidad.

OLIVAR TRADICIONAL

Olivar Tradicional No Mecanizable (OTNM), secano y riego (excepcional)

Olivar Tradicional Mecanizable (OTM), secano y riego (en su caso)

OLIVAR ALTA DENSIDAD

Olivar Intensivo (OI), normalmente en riego, aunque existen en secano.

Olivar Superintensivo (OS), normalmente en riego, secano excepcional.

Describimos a continuación cada uno de estos 4 grandes sistemas.

OLIVAR TRADICIONAL (O.T.)

Olivar de varios pies (2 ó 3), eventualmente de 1 pie (suelos pobres).

Marcos amplios de plantación (10 a 12 metros).

Densidad media entre 80 y 100 plantas por hectárea.

Normalmente en régimen de secano, aunque algunos pueden tener riego

Rendimientos productivos bajos (1.500 – 6.000 kg/ha).

Edad media avanzada, superior a los 25 años y en ocasiones centenarios.

O.T. No Mecanizable (OTNM 24% superficie)

Pendiente media superior al 20%, suele ser olivar de sierra.

Labores no mecanizables, incluida la recolección

O.T. Mecanizable (OTM 52% superficie)

Pendiente media inferior al 20%, suele ser olivar de loma, con o sin riego.

Labores mecanizables, como los tratamientos y la recolección

Producción de 6.000 kg/ha en riego, 4.000 kg/ha en secano

Riego disponible máximo de 1.500 m³/ha.

OLIVAR DE ALTA DENSIDAD

Olivar Intensivo (OI 22% superficie)

Olivar de un pie

Olivos aislados con la copa en vaso

Densidades entre 200 y 600 árboles/Ha

Marco 6x6, con una calle ancha de 6 metros

Generalmente dotado de riego (1.500-2.500 m³/Ha).

Altas producciones por hectárea (6.000-10.000 kg/Ha).
Recolección integral mecanizada (vibrador c/s paraguas)
Vida útil probada superior a 40 años.

Olivar Superintensivo (OS 2-5% superficie)

Olivar lineal en seto
Densidades entre 1.000 y 2.000 árboles/Ha
Marco 3 x 1,5 o 4 x 1,5. No dispone de calle mayor de 4 m
Generalmente dotado de riego (2.500 m³/Ha -3.500 m³/Ha).
Altas producciones por hectárea (8.000-14.000 kg/Ha).
Recolección integral mecanizada (cosechadora cabalgadora)
Vida útil probada de hasta 14 años.

Como ya hemos indicado, de entre todos los sistemas vamos a centrar el estudio en olivar de riego de los tipos OTM, OI, OS. Como veremos después en literatura consultada el riego es un factor de eficiencia en este cultivo, excluyendo por tanto el seco y el OTNM.

5.1. PARÁMETROS IMPORTANTES DEL CULTIVO

Pasamos a presentar los parámetros que determinan la eficiencia del cultivo en el ámbito del olivo.

Superficie de la finca (has)

Introducimos la superficie a efectos de conocer las dimensiones de la finca y posible eficiencia por mayor cantidad de hectáreas. También como medida de la mayor disponibilidad de capital para acometer nuevas inversiones y nuevas tecnologías (fincas más grandes suelen ser propiedad de grandes capitales y con mayor apertura innovadora y capacidad de inversión). Igualmente, la introducimos para referenciar algunos datos o resultados por unidad de superficie.

Edad de plantación (años)

La contemplamos sólo a efectos de conocer, junto con la variedad y la densidad de plantación, la fase de cultivo en la que se encuentren las unidades más eficientes.

Variedad de aceituna

La introducimos en las encuestas sólo a efectos de conocer cuál es exactamente en cada caso, y cómo influye en los resultados obtenidos (dependiendo del sistema de cultivo).

Densidad de plantación o marco (árboles/ha)

Se introducirá en el modelo, dado que una mayor densidad de plantación contribuye a tener mayor volumen de copa, y por tanto mayor superficie de recepción solar y mayor capacidad productiva. Está íntimamente relacionado con el sistema de cultivo que se realiza (OTNM, OTM, OI, o OS) dado que la densidad nos indica en qué sistema se incluye.

O.T.: 100 plantas/ha

O.I.: 200-600 plantas/ha

O.S.: 1.000 – 2.000 plantas/ha.

Poda:

Los planteamientos de poda en secano y regadío son básicamente diferentes. La poda favorece la producción y la calidad de aceituna, a la vez que adapta a los olivos a una mejor recolección mecanizada (donde se produce el mayor ahorro de costes).

Lo normal en riego es hacer una poda ligera todos los años, controlando los abonos nitrogenados, y que los chupones no lleguen a un tamaño excesivo. Con la poda regular (poda ligera) se busca mantener una buena relación hoja/madera y un volumen de copa, así como rejuvenecer el árbol al eliminar ramas poco productivas. En regadío los árboles envejecen más lentamente. Entre los síntomas de envejecimiento destaca la alternancia de producciones acentuada cada dos años. Por lo que llegado el momento, hay que podar drásticamente alguna vez (poda renovación) para mantener árboles más frondosos y de gran tamaño, con mayor superficie verde interceptando más radiación solar que permitirá obtener mayor producción de aceitunas y de buena calidad. En olivares con buena disponibilidad de agua, la producción es proporcional a la radiación solar interceptada que está relacionada con la superficie de copa por hectárea, y por tanto con la densidad (o marco) de plantación.

En secano sin embargo, la poda trata de adaptar el volumen de copa a las disponibilidades de agua en el suelo, por lo que los árboles tienen un menor tamaño, menor densidad y por tanto menor producción. A la hora del estudio reflejaremos si la finca ha realizado poda (1) o no (0) en cada una de las últimas campañas, para extraer conclusiones a posteriori.

Extracciones del cultivo del suelo

Según el reglamento de producción integrada en olivar (no todas las fincas realizan producción integrada), las extracciones teóricas estimadas son las siguientes por tonelada de producción esperada.

- N: 15 kg/Tn
- P: 4 kg/Tn
- K: 25 kg/Tn

Por lo tanto, para producciones medias esperadas entre 4 y 10 Tn/ha, las extracciones teóricas de abono nitrogenado serían de 60 – 150 UFN. Las extracciones de K serían de 100 – 250 UFK.

Producción de Aceituna:

La producción depende del riego y el tamaño de copa (poda) porque a mayor volumen de copa hay más ramas donde producir más aceituna, hay mayor captación de radiación solar, pero también mayor evapotranspiración del cultivo ($ET_c = ET_o \times K_c$). Teniendo en cuenta los datos de AEMO 2012 (y salvo algunas producciones de superintensivo), podemos establecer:

- Producción baja: entre 5.000 - 6.000 kg/ha
- Producción media: entre 8.000 – 10.000 kg/ha
- Producción alta: 12- 14.000 kg/ha.

Vamos a considerar dos años en estudio para extraer conclusiones acertadas y salvar la vejería del olivo, y para contemplar la posible influencia de la poda realizada en dos campañas.

Riego:

El olivo es un árbol de hoja perenne que requiere suministro hídrico durante todo el año, que se reduce en invierno. Las zonas más frecuentes de cultivo son aquellas con precipitaciones anuales de 400-600 mm que, sin embargo éstas suelen producirse en otoño e invierno donde ya no es tan necesaria, puesto que la recolección de aceituna ya está cercana, y comienza el descanso vegetativo. La precipitación media en el año 2014 fue bastante superior (casi el doble) a la del año 2015.

Por tanto, de cara a conseguir las máximas producciones se deberá aportar agua de riego en los meses de verano para evitar alteraciones del fruto que está en formación. A la vez habrá que evitar los excesos de agua para evitar lixiviación de nutrientes que pueden incrementar la contaminación por nitratos del suelo, y por el elevado coste del agua de riego.

Asumimos en general que:

- El agua de riego tiene unas características idóneas para el cultivo, como Conductividad Eléctrica, pH, bicarbonatos, Relación de Absorción de Sodio.
- Las fincas disponen de riego localizado por goteo de alta eficiencia, pero habrá que tener en cuenta características como la densidad o marco de plantación, el % de cobertura, la textura de suelo, la distribución de goteros. Al aplicar el riego localizado la presencia de malas hierbas será también menor al reducir la superficie mojada.
- Gran parte de las fincas emplean fertirriego que permite la incorporación de abonos y nutrientes directamente al agua de riego, incrementando la eficiencia del cultivo al reducir las maquinarias y personal.

Para marcar unos límites, dado que no tenemos datos publicados aún, consultamos a expertos que colaboran con la E.T.S.I.A.M de la Universidad de Córdoba, concluyendo que el incremento marginal de producción en olivar al aumentar en 1 m³/ha el riego es el siguiente:

| | |
|---------------------------|------------------------|
| Secano | 2.8 Kg/m ³ |
| 1.500 m ³ /ha: | 1.75 Kg/m ³ |
| 2.500 m ³ /ha: | 1.05 Kg/m ³ |
| 3.200 m ³ /ha: | 0.56 Kg/m ³ |

Por tanto, concluimos que la reducción del incremento marginal de producción cuando nos encontramos ya por encima de 2.500 m³/ha, nos recomienda marcar los límites de riego siguiente:

| |
|--|
| 450 m ³ /ha mínimo (conocido como riego de apoyo) |
| 2.000 m ³ /ha óptimo, |
| 2.500 - 2.600 m ³ /ha máximo. |

Por otro lado, como dato orientativo y de cara a nuevas concesiones de agua, el Plan Hidrológico Nacional 2015-2023 propone para el olivar dotaciones máximas de (1.290/0.86) m³/ha y año = 1.500 m³/ha para las nuevas solicitudes de concesión de aguas de la Confederación Hidrográfica.

Abonado nitrogenado (N):

En relación al abonado, partimos de la base que tiene que estar fundamentada en un buen análisis foliar para ver el contenido en nutrientes y posibles carencias. La deficiencia de nitrógeno provoca falta de vigor y un menor rendimiento de producción, por el contrario, el exceso de N supone mayor sensibilidad a heladas/plagas/enfermedades, exceso de vigor y crecimiento de chupones, así como reducción de calidad de fruto.

El nitrógeno lo absorbe el olivo en forma de nitratos, que son altamente solubles en agua y pueden ser fácilmente arrastrados por exceso de lluvia o agua de drenaje. La absorción en regadío intensivo está entre 800 – 1200 gr/año, siendo la época de mayor demanda desde la diferenciación de yemas hasta engorde de fruto. Lo recomendable es aplicar los abonos nitrogenados a la salida del invierno cuando se prevean lluvias, o en fincas con riego mediante fertirrigación.

Por extracciones de nutrientes del suelo por parte del cultivo, hemos determinado anteriormente que estarían entre 60 – 150 UFN. Existe una limitación de aportes de nitrógeno en zonas vulnerables a contaminación por nitratos basada en un máximo de 20 Kg N/Tn producción media esperada, por lo que para producciones medias esperadas de aceituna de entre 6 y 10 Tn/ha, tendríamos una limitación teórica de 120 – 200 UFN.

Por tanto podemos establecer los siguientes límites de abonado nitrogenado para el ámbito de nuestro estudio:

Mínimo: 70 UFN

Optimo: 120 UFN

Máximo: 150 - 200 UFN

Abonado fosfórico (P):

El fósforo es de especial importancia en la fase de crecimiento y formación de raíces. Favorece también la floración y el cuaje. Está íntimamente ligado al nitrógeno y otros elementos nutritivos porque su deficiencia provoca contenidos bajo de nitrógeno, magnesio, calcio y boro. Las extracciones del cultivo son de solamente 4 Kg/Tn de producción, por lo que las necesidades pueden quedar cubiertas con cualquier abono ternario (NPK).

Abonado potásico (K):

La mayor demanda de K se produce a medida que se desarrollan los frutos, que acumulan grandes cantidades de este elemento en el período de maduración, por lo que es importante para conseguir buenas producciones. Aumenta la resistencia del árbol a las heladas y a las enfermedades criptogámicas. Mejora el tamaño y la calidad de los frutos.

En cuanto al abonado potásico, podemos destacar que desempeña una labor importante en el transporte de azúcares en la planta, en la transpiración y en numerosos procesos bioquímicos en los que tiene que estar presente (transporte de agua, y apertura y cierre de estomas). El potasio es el elemento con mayores extracciones del olivar, superando al nitrógeno. Con la ventaja adicional que por su naturaleza catiónica no se lixivia como ocurre con el nitrógeno, por lo que queda acumulado en el suelo asociado a arcillas.

El olivo precisa de grandes cantidades de potasio y si la cosecha es abundante y las extracciones han sido elevadas pueden presentarse deficiencias, necrosándose las hojas y defoliándose el árbol. Las deficiencias de potasio son difíciles de corregir y por ello es importante mantener una adecuada concentración de este elemento en las hojas. Sin embargo, un exceso de potasio afecta negativamente a la absorción de calcio (formación y maduración de frutos) y magnesio.

Por tanto, consultados expertos del sector con diferencias de opinión, podemos establecer los siguientes límites de abonado potásico, (siempre basadas en de las analíticas previas), para el ámbito de nuestro estudio:

Mínimo: 60 - 80 UFK

Optimo: 120 UFK

Máximo: 200 UFK

Precipitaciones:

Sólo serían relevantes en el caso que se tuvieran en cuenta los olivares de secano, pero al considerar sólo explotaciones de riego y las provincias de Córdoba y Sevilla (y zonas limítrofes) con precipitaciones similares, no consideramos que sea un factor diferencial y lo obviaamos en el presente caso práctico. En general los años climatológicos pueden considerarse secos (350 mm), normal (500 mm) y húmedos (650 mm). El año 2014 fue un año húmedo mientras que el año 2015 se considera seco. Un exceso continuado de precipitación sería perjudicial para el cultivo dado que podría lavar los nutrientes aportados previamente.

Fitosanitarios:

No consideramos que sea relevante, según la mayoría de los consultores técnicos no influye en la eficiencia, salvo casos o años excepcionales. Esto es así, dado que lo normal es realizar en la mayoría de las explotaciones una gestión integrada de plagas, por lo que sólo se realizan tratamientos cuando se superan los umbrales de tratamiento. Las plagas más habituales suelen ser dos (prais en primavera, y mosca en otoño) que están bien controladas con tratamientos muy similares de un año a otro en casi todos los sistemas de cultivo.

Energía/maquinaria:

El precio de la energía es cada vez más limitante, pero no disponemos de datos de las explotaciones para tenerlo en cuenta. En cualquier caso el riego localizado genera menos demanda de energía eléctrica, tanto menor cuanto más accesible esté el agua. Y en el caso de la energía asociada a maquinaria, los sistemas elegidos ya reducen y controlan los tratamientos y operaciones de cultivo a lo estrictamente necesario.

5.2. DESCRIPCIÓN DEL CASO PRÁCTICO

Tras consultar tanto la bibliografía citada (*AEMO, 2012; Arbonés et. al, 2014*) como a consultores agrícolas con dilatada experiencia en el cultivo y tecnología del olivar, se diseñaron unas encuestas para recabar datos recientes y anónimos de fincas reales de diferentes términos municipales de las citadas zonas de Córdoba, Sevilla, Málaga y Huelva (Tabla 4), durante las campañas de cultivo de 2014 y 2015.

Una de las contribuciones de este estudio es el uso de datos extraídos directamente de fincas, dado que salvo casos particulares como *Beltrán-Esteve (2013)* que toma datos reales de fincas de secano de Córdoba y Jaén, la mayoría de las investigaciones suelen tomar datos de bases de datos generales o estadísticas de la Administración Pública en la que no reflejan un nivel de desglose suficiente. Es más, tanto los inputs como los outputs, están presentados en magnitudes económicas en euros € (costes de maquinaria, fertilización o fitosanitarios, producciones), a veces incluso agrupados o correlacionados.

Cuando se revisa la aplicación de DEA en el sector agrario, se pueden identificar determinados inputs y outputs comunes tenidos en cuenta en la mayoría de los estudios. En la Tabla 1 localizada en el punto 3.3. Estado del Arte en Agricultura y Olivar, se refleja la comparativa que hemos realizado antes de seleccionar nuestras variables, mediante el estudio y clasificación de la bibliografía consultada respecto a las variables, inputs/outputs, tipo de medida y las unidades empleadas de algunos autores.

Tras diseñar las encuestas, se hizo un trabajo de campo laborioso para documentar la información necesaria. En este sentido, hay que destacar que se han realizado un total de 70 encuestas, y que una vez filtradas se han reducido a 32 finalmente analizadas. Algunas de las razones fueron que finalmente no obtuvimos la autorización para exponer dichos datos por condicionantes de confidencialidad y secreto profesional, puesto que una parte de ellos no son públicos y constituyen la base tecnológica de cada tipo de olivar; y en otros casos la información no era completa.

En el estudio nos hemos centrado en los olivares de riego, ya sea Olivar Tradicional (OT), Intensivo (OI) o Superintensivo (OS), en los que se emplean nuevas técnicas de manejo (fertirriego, nuevas variedades, y superficies medianas/grandes), tal y como sugieren *Amores y Contreras (2009)* en sus conclusiones.

Por todo ello, se incluyeron una serie de parámetros iniciales (que no se introducen en el modelo) para clasificar cada finca que se iba a analizar, y poder explicar mejor los resultados obtenidos por el modelo:

- Término Municipal
- Variedad de aceituna
- Edad del olivar (años)
- Tipo de Olivar (OT, OI, OS) en función del marco de plantación
- Marco de plantación (m x m)

| | | | | |
|-------------------|----------|-------------|------|-------------|
| Término Municipal | Variedad | Edad (Años) | Tipo | Marco (m*m) |
|-------------------|----------|-------------|------|-------------|

A continuación, una serie de inputs generales:

- Densidad de plantación (nº árboles/ha) que proviene del marco de plantación, para poder comparar entre diferentes DMUs.
- Superficie de la finca (has)

| | |
|---------------|-----------|
| Dens (arb/ha) | Sup (Has) |
|---------------|-----------|

Seguidamente, se solicitaron los datos producción e insumos (fertilización y riego) de dos campañas consecutivas, 2014 y 2015. La razón para solicitar dos campañas no es otra que salvar las posibles diferencias temporales de cada finca en cuanto a la vecería del olivar (alternancia de producción, alta/baja) y la poda (si la realiza un año o no).

- N aplicado total (Kg/ha o UFN, Unidades de Fertilización Nitrogenada)
- P aplicado total (Kg/ha o UFP)
- K aplicado total (Kg/ha o UFK)
- Poda (1 realiza, 0 no realiza)
- Riego aplicado (m3/ha)
- Producción obtenida (Kg/ha)

| 2014 | | | | | | 2015 | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|--------------|---------------|--------------|-----------|-----------|-----------|--------------|---------------|--------------|
| N (Kg/ha) | P (Kg/ha) | K (Kg/ha) | Poda (1 / 0) | RIEGO (m3/ha) | PROD (Kg/ha) | N (Kg/ha) | P (Kg/ha) | K (Kg/ha) | Poda (1 / 0) | RIEGO (m3/ha) | PROD (Kg/ha) |

En este sentido, y como ya se ha justificado, el fósforo no tiene tanta influencia en la producción, por lo que no se incluye en las variables a tener en cuenta. Igualmente no incluimos en el modelo la poda, dado que la mayoría de las fincas, bien realizan una poda ligera todos los años, o bien una más fuerte cada 2 o 3. No obstante, igual que hicimos con los parámetros iniciales, conservamos el dato para explicar los resultados obtenidos por el modelo. Los datos recopilados de las diferentes fincas a lo largo de estos meses se indican en la siguiente tabla resumen.

| DMU | Término Municipal | Variedad | DATOS FINCAS | | | | | Campaña 2014 | | | | | | | Campaña 2015 | | | | | | |
|-----|------------------------|------------|--------------|------|-------------|---------------|-----------|--------------|-----------|-----------|--------------|-----------|---------------|--------------|--------------|-----------|-----------|--------------|-----------|---------------|--------------|
| | | | Edad (Años) | Tipo | Marco (m*m) | Dens (arb/ha) | Sup (Has) | N (Kg/ha) | P (Kg/ha) | K (Kg/ha) | Poda (1 / 0) | Prec (mm) | RIEGO (m3/ha) | PROD (Kg/ha) | N (Kg/ha) | P (Kg/ha) | K (Kg/ha) | Poda (1 / 0) | Prec (mm) | RIEGO (m3/ha) | PROD (Kg/ha) |
| 1 | MARTIN DE LA JARA | HOJIBLANCA | 20 | OI | 8*5 | 250 | 27 | 100 | 50 | 150 | 1 | 455 | 2.000 | 11.400 | 100 | 0 | 100 | 1 | 274 | 2.200 | 14.500 |
| 2 | CABRA | PICUAL | 30 | OI | 7*7 | 204 | 133 | 78 | 50 | 120 | 1 | 620 | 450 | 8.000 | 78 | 0 | 187 | 1 | 339 | 450 | 6.300 |
| 3 | ANTEQUERA | HOJIBLANCA | 100 | OT | 12*13 | 70 | 76 | 100 | 12 | 30 | 0 | 430 | 1.500 | 4.500 | 100 | 12 | 30 | 1 | 206 | 1.500 | 3.900 |
| 4 | AGUILAR DE LA FRONTERA | HOJIBLANCA | 100 | OT | 12*12 | 70 | 57 | 60 | 12 | 30 | 0 | 620 | 1.000 | 860 | 100 | 12 | 30 | 1 | 339 | 1.000 | 6.600 |
| 5 | ECIJA | PICUAL | 100 | OT | 11*11 | 82 | 99 | 120 | 50 | 120 | 1 | 483 | 2.000 | 7.070 | 120 | 12 | 30 | 0 | 205 | 2.000 | 8.200 |
| 6 | PUEBLA DE CAZALLA | ARBEQUINA | 9 | OI | 7*4 | 357 | 68 | 100 | 40 | 150 | 1 | 568 | 1.500 | 6.850 | 140 | 45 | 210 | 1 | 291 | 1.500 | 7.530 |
| 7 | PALMA DEL RIO | ARBEQUINA | 15 | OI | 7*5 | 286 | 82 | 100 | 32 | 100 | 1 | 680 | 2.200 | 10.000 | 89 | 25 | 95 | 1 | 309 | 1.200 | 7.000 |
| 8 | PALMA DEL RIO | PICUAL/ARB | 15 | OI | 7*6 | 238 | 15 | 90 | 30 | 95 | 1 | 680 | 1.800 | 8.000 | 114 | 14 | 20 | 1 | 309 | 1.850 | 8.500 |
| 9 | PALMA DEL RIO | ARBEQUINA | 10 | OI | 7*4,5 | 317 | 23 | 120 | 40 | 130 | 1 | 680 | 2.200 | 12.000 | 60 | 15 | 21 | 0 | 309 | 2.300 | 8.200 |
| 10 | PALMA DEL RIO | ARBEQUINA | 12 | OT | 7*4,5 | 317 | 98 | 120 | 40 | 130 | 1 | 680 | 2.200 | 12.000 | 84 | 0 | 1,5 | 0 | 309 | 1.200 | 7.000 |
| 11 | LORA DEL RIO | PICUAL | 20 | OT | 6*6 | 278 | 99 | 100 | 30 | 120 | 1 | 715 | 2.400 | 9.000 | 50 | 12 | 17 | 1 | 334 | 2.200 | 10.000 |
| 12 | PALMA DEL RIO | ARBEQUINA | 14 | OI | 7*4 | 357 | 24 | 57 | 20 | 70 | 0 | 680 | 1.600 | 8.000 | 57 | 20 | 70 | 0 | 309 | 1.600 | 7.000 |
| 13 | PEÑAFLOR | ARBEQUINA | 14 | OI | 5*4 | 500 | 6 | 92 | 30 | 110 | 1 | 680 | 2.000 | 12.000 | 92 | 30 | 110 | 1 | 309 | 1.800 | 8.000 |
| 14 | PALMA DEL RIO | ARBEQUINA | 10 | OI | 7*5 | 286 | 12 | 57 | 20 | 80 | 1 | 680 | 1.800 | 9.000 | 57 | 20 | 80 | 1 | 309 | 1.800 | 9.000 |
| 15 | ECIJA | ARBEQUINA | 12 | OS | 4*1,5 | 1.667 | 20 | 76 | 14 | 35 | 1 | 483 | 1.385 | 9.225 | 135 | 27 | 185 | 1 | 205 | 1.620 | 10.316 |
| 16 | ECIJA | PICUAL | 25 | OI | 7*7 | 204 | 17 | 44 | 0 | 1,5 | 1 | 483 | 1.689 | 7.500 | 110 | 22 | 47 | 1 | 205 | 1.356 | 8.177 |
| 17 | POSADAS | ARBEQUINA | 15 | OI | 4*1,5 | 1.667 | 10 | 80 | 18 | 185 | 1 | 562 | 1.598 | 9.000 | 95 | 12 | 47 | 1 | 264 | 1.434 | 9.832 |
| 18 | BOLLULLOS DE MITACI3N | ARBEQUINA | 15 | OS | 4*1,5 | 1.667 | 146 | 92 | 9 | 70 | 1 | 499 | 1.420 | 8.388 | 82 | 14 | 65 | 1 | 320 | 1.570 | 11.522 |
| 19 | PUENTE GENIL | ARBOSANA | 10 | OS | 4*1,5 | 1.667 | 22 | 87 | 11 | 49 | 1 | 543 | 1.987 | 7.204 | 92 | 15 | 43 | 1 | 272 | 2.216 | 8.938 |
| 20 | NIEBLA | ARBEQUINA | 15 | OI | 7*3,5 | 408 | 23 | 50 | 15 | 65 | 1 | 650 | 1.300 | 11.530 | 65 | 20 | 75 | 0 | 363 | 1.550 | 8.580 |
| 21 | SANLUCAR DE GUADIANA | ARBEQUINA | 16 | OI | 7*4 | 357 | 61 | 48 | 15 | 57 | 0 | 620 | 1.220 | 7.280 | 56 | 16 | 70 | 1 | 428 | 1.800 | 5.320 |
| 22 | VVA.DE LOS CASTILLEJOS | ARBEQUINA | 18 | OI | 7*4 | 357 | 65 | 48 | 15 | 57 | 0 | 620 | 1.220 | 5.400 | 56 | 16 | 70 | 0 | 428 | 1.800 | 7.430 |
| 23 | LA CAMPANA | ARBEQUINA | 9 | OI | 7*3 | 285 | 11 | 98 | 49 | 51 | 1 | 632 | 1.500 | 4.000 | 99 | 30 | 41 | 0 | 292 | 1.600 | 9.000 |
| 24 | GERENA | MANZANILLA | 20 | OI | 7*7 | 204 | 16 | 64 | 36 | 54 | 1 | 595 | 2.500 | 9.200 | 119 | 1 | 1,5 | 1 | 348 | 2.600 | 4.900 |
| 25 | GUILLENA | MANZANILLA | 17 | OI | 8*4 | 300 | 21 | 99 | 71 | 11 | 1 | 595 | 1.200 | 2.500 | 66 | 13 | 26 | 1 | 348 | 1.700 | 1.700 |
| 26 | LA PUEBLA DE CAZALLA | ARBEQUINA | 7 | OI | 7*3,75 | 381 | 80 | 92 | 0 | 1,5 | 1 | 568 | 900 | 7.500 | 99 | 30 | 41 | 1 | 291 | 900 | 5.500 |
| 27 | LA CAMPANA | MANZANILLA | 10 | OI | 8*6 | 208 | 9 | 37 | 12 | 12 | 1 | 632 | 1.200 | 5.000 | 96 | 69 | 1,5 | 1 | 292 | 1.200 | 3.500 |
| 28 | GUILLENA | PICUAL | 15 | OI | 7*7 | 204 | 17 | 98 | 0 | 8 | 1 | 595 | 900 | 4.906 | 112 | 5 | 54 | 1 | 348 | 843 | 3.250 |
| 29 | MOR3N | MANZANILLA | 11 | OI | 10*6 | 167 | 8 | 120 | 0 | 1,5 | 1 | 623 | 1.200 | 6.500 | 115 | 0 | 1,5 | 1 | 282 | 1.100 | 8.900 |
| 30 | CARMONA | ARBEQUINA | 9 | OS | 4*1,5 | 1.666 | 25 | 88 | 35 | 60 | 1 | 714 | 800 | 8.000 | 88 | 35 | 35 | 1 | 334 | 800 | 10.000 |
| 31 | DOS HERMANAS | GORDAL | 70 | OT | 10*10 | 100 | 4 | 98 | 49 | 52 | 1 | 506 | 900 | 3.220 | 92 | 0 | 1,5 | 1 | 290 | 900 | 1.806 |
| 32 | CARMONA | ARBEQUINA | 12 | OS | 4*1,5 | 1.666 | 6 | 105 | 35 | 48 | 1 | 714 | 1.000 | 4.528 | 105 | 35 | 35 | 1 | 334 | 1.000 | 3.396 |

Tabla 4. Datos de fincas y parámetros extraídos de las encuestas realizadas

Por tanto, los datos finalmente incluidos en tablas para la aproximación del modelo son:

Inputs monótonos

- X1, Densidad de planta (arb/ha)
- X2, Superficie de finca (ha)

VARIABLES NO-MONÓTONAS

- V1, Abonado de N (Kg N/ha)
- V2, Abonado de K (Kg K/ha)
- V3, Riego de agua (m³/ha)

Outputs monótonos

- Y1, Producción Aceituna (Kg/ha)

Como se aprecia, se incluyen las variables monótonas X1 y X2 correspondientes a la superficie (ha) y la densidad de planta (arb/ha), pero como entradas no discretionales, que no se pueden modificar fácilmente de una campaña para otra.

Por tanto, resumiendo los datos a introducir en la aproximación del modelo son las variables no monótonas (Abonado N, Abonado K, Riego de Agua) y el único output (Producción).

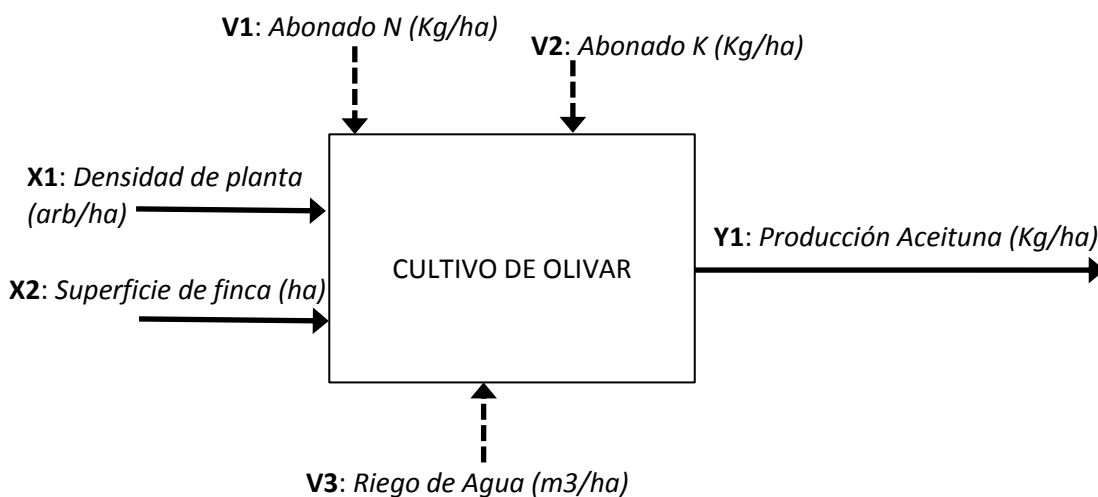


Figura 4. Eficiencia en el cultivo del olivar.

Asumimos las funciones de pertenencia de deseabilidad mostradas en Figura 5 (2014) y Figura 6 (2015) para cada una de las campañas. Estas funciones de pertenencia de asumen como “ideal” la aportación de nitrógeno N en torno a 100 UFN y como indeseable aplicaciones por debajo de 37 UFN (50 UFN en 2015) y por encima de 120 UFN (140 UFN en 2015). Del mismo modo, el valor “ideal” para la función de pertenencia de las aplicaciones de potasio K se sitúa en 120 UFK, y como indeseable valores inferiores a 1,5 UFK y superiores a 185 UFK (210 UFK en 2015). Igualmente, el valor ideal en el caso del riego se sitúa en torno a los 2.000 m³/ha, siendo indeseables aportaciones inferiores a 450 m³/ha (que suele corresponder con un riego de apoyo estival) y superiores a 2.500 m³/ha (2.600 m³/ha en 2015). Análogamente, para la producción de aceituna lo deseable es que haya producción con un mínimo que viene marcado por el valor 860 Kg/ha en 2014 (1.700 Kg/ha en 2015) y un máximo de 12.000 Kg/ha (14.500 Kg/ha en 2015). Las figuras específicas asumidas para estas funciones de pertenencia son bastante razonables.

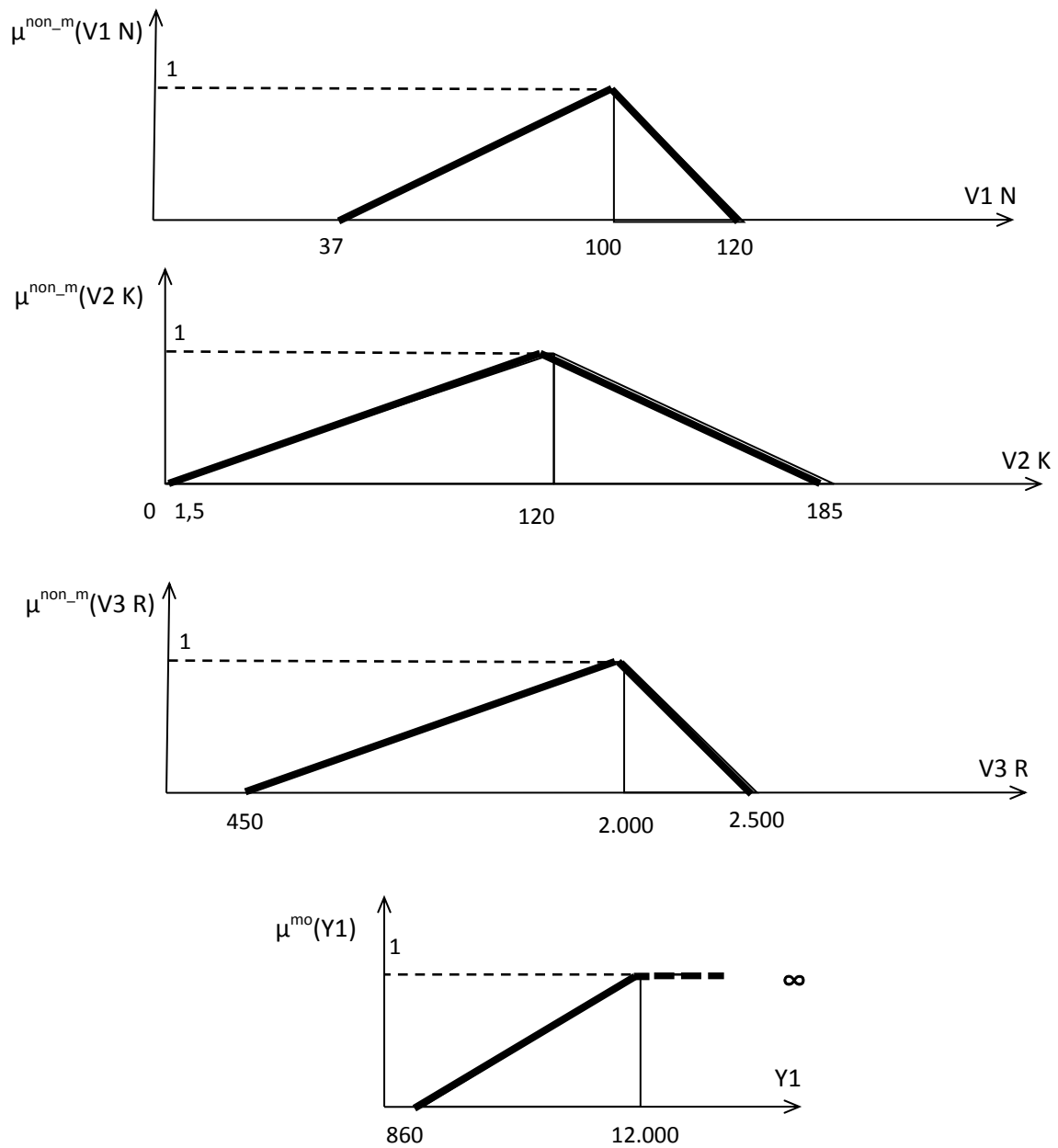


Figura 5. Funciones de pertenencia para las variables consideradas en 2014.

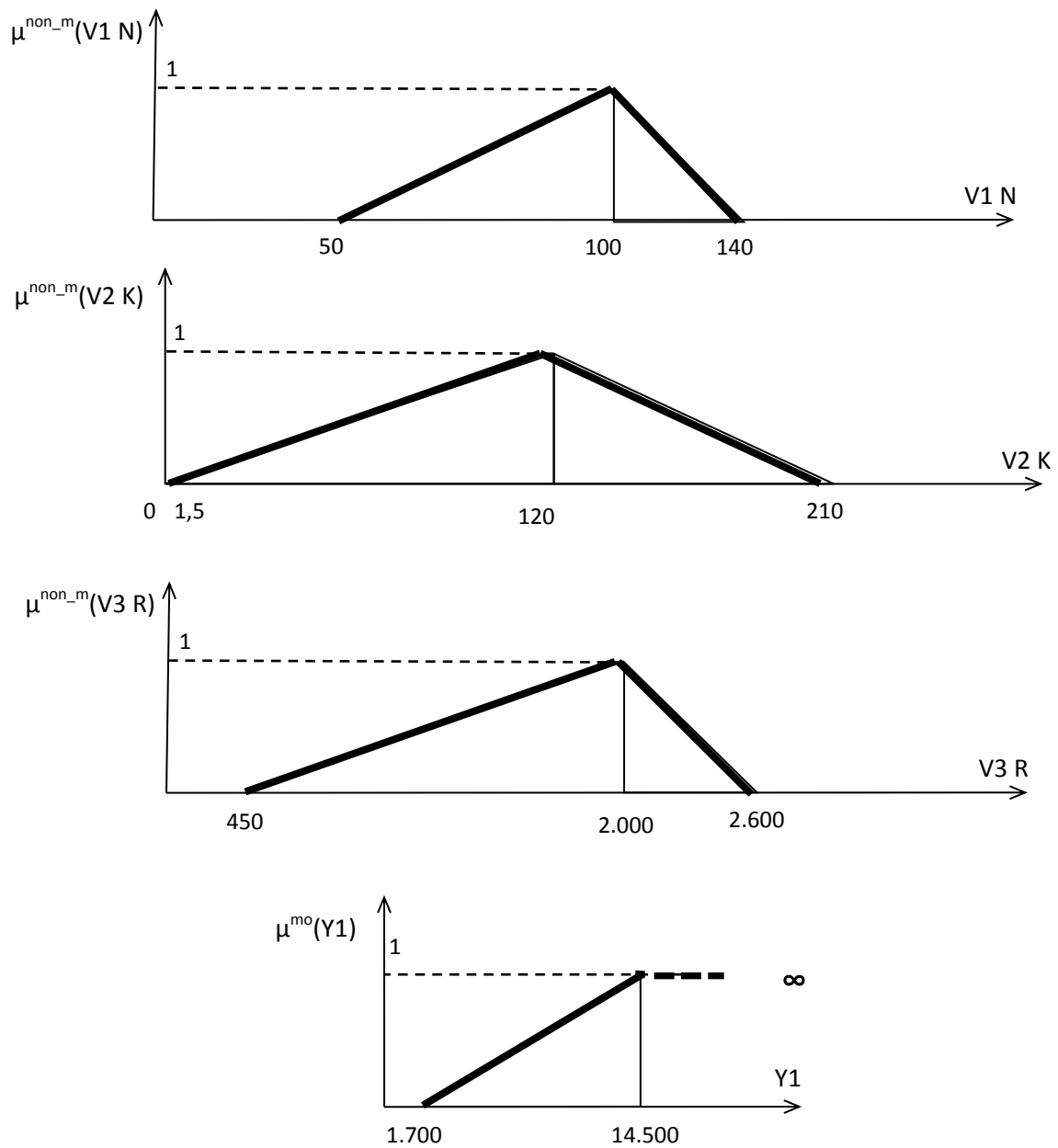


Figure 6. Funciones de pertenencia para las variables consideradas en 2015.

Pasamos a aplicar el modelo conjunto de datos disponibles para la primera Campaña 2014, obviamente, el procedimiento sería similar para la siguiente Campaña de 2015. Partiendo del modelo DEA no monótono propuesto (3) y dado todos los inputs monótonos se consideran no discretionales, nuestra Función Objetivo quedaría como sigue (20):

$$\text{Max} \sum_{r=1}^h w_r (\hat{\mu}_r^{\text{non}_m} - \mu_{r0}^{\text{non}_m}) + \sum_{i=1}^m w'_i (\hat{\mu}_i^{\text{mi}} - \mu_{i0}^{\text{mi}}) + \sum_{k=1}^p w''_k (\hat{\mu}_k^{\text{mo}} - \mu_{k0}^{\text{mo}}) \quad (3)$$

$$\text{Max} \sum_{r=1}^h w_r (\hat{\mu}_r^{\text{non}_m} - \mu_{r0}^{\text{non}_m}) + \sum_{k=1}^p w''_k (\hat{\mu}_k^{\text{mo}} - \mu_{k0}^{\text{mo}}) \quad (20)$$

La expresión (20) tiende a maximizar el incremento ponderado (mediante los pesos w) de los valores de la función de pertenencia. Los valores de todas las funciones objetivo estarán entre 0 y 1, por lo que una DMU será tanto más eficiente cuánto más cerca esté del cero, ya que esto significa que la finca debe operar en los niveles de inputs y outputs actuales.

La eficiencia no es más que la diferencia entre 1 y el resultado de la Función Objetivo calculada (20), que en nuestro caso particular queda reducida a la expresión (21). Una DMU será tanto más eficiente, cuánto más cerca esté de 1.

$$\xi_0 = 1 - \left[\sum_{r=1}^h w_r (\hat{\mu}_r^{\text{non}_m} - \mu_{r0}^{\text{non}_m}) + \sum_{i=1}^m w'_i (\hat{\mu}_i^{\text{mi}} - \mu_{i0}^{\text{mi}}) + \sum_{k=1}^p w''_k (\hat{\mu}_k^{\text{mo}} - \mu_{k0}^{\text{mo}}) \right] \quad (19)$$

$$\xi_0 = 1 - \left[\sum_{r=1}^h w_r (\hat{\mu}_r^{\text{non}_m} - \mu_{r0}^{\text{non}_m}) + \sum_{k=1}^p w''_k (\hat{\mu}_k^{\text{mo}} - \mu_{k0}^{\text{mo}}) \right] \quad (21)$$

Resumiendo y adaptando las anteriores expresiones, nuestro modelo final quedaría diseñado como sigue:

$$\text{Max } w_{\text{No}}(\hat{\mu}_{\text{No}} - \mu_{\text{No}}) + w_{\text{K}}(\hat{\mu}_{\text{Ko}} - \mu_{\text{Ko}}) + w_{\text{R}}(\hat{\mu}_{\text{Ro}} - \mu_{\text{Ro}}) + w_{\text{PROD}}(\hat{\mu}_{\text{PROD}} - \mu_{\text{PROD}})$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{32} \lambda_j \text{DENS}_j \leq \text{DENS}_0$$

$$\sum_{j=1}^{32} \lambda_j \text{SUP}_j \leq \text{SUP}_0$$

$$\sum_{j=1}^{32} \lambda_j N_j = \hat{N}_0$$

$$\sum_{j=1}^{32} \lambda_j K_j = \hat{K}_0$$

$$\sum_{j=1}^{32} \lambda_j R_j = \hat{R}_0$$

$$\sum_{j=1}^{32} \lambda_j \text{PROD}_j = \widehat{\text{PROD}}_0$$

$$\hat{\mu}_{\text{No}} \leq \frac{\hat{N}_0 - N^{\text{ideal}}}{N^{\text{ideal}} - N^{\text{min}}}$$

$$\hat{\mu}_{\text{Ko}} \leq \frac{K^{\text{ideal}} - \hat{K}_0}{K^{\text{max}} - K^{\text{ideal}}}$$

$$\hat{\mu}_{\text{No}} \leq \frac{N^{\text{ideal}} - \hat{N}_0}{N^{\text{max}} - N^{\text{ideal}}}$$

$$\hat{\mu}_{\text{Ko}} \leq \frac{K^{\text{ideal}} - \hat{K}_0}{K^{\text{max}} - K^{\text{ideal}}}$$

$$\mu_{\text{No}} \leq \hat{\mu}_{\text{No}} \leq 1$$

$$\mu_{\text{Ko}} \leq \hat{\mu}_{\text{Ko}} \leq 1$$

$$\hat{\mu}_{\text{Ro}} \leq \frac{\hat{R}_0 - R^{\text{ideal}}}{R^{\text{ideal}} - R^{\text{min}}}$$

$$\hat{\mu}_{\text{PROD}} \leq \frac{N^{\text{ideal}} - \hat{N}_0}{N^{\text{max}} - N^{\text{ideal}}}$$

$$\hat{\mu}_{\text{Ro}} \leq \frac{R^{\text{ideal}} - \hat{R}_0}{R^{\text{max}} - R^{\text{ideal}}}$$

$$\hat{\mu}_{\text{PROD}} \leq \frac{\text{PROD}^{\text{ideal}} - \widehat{\text{PROD}}_0}{\text{PROD}^{\text{max}} - \text{PROD}^{\text{ideal}}}$$

$$\mu_{\text{Ro}} \leq \hat{\mu}_{\text{Ro}} \leq 1$$

$$\mu_{\text{PROD}_0} \leq \hat{\mu}_{\text{PROD}_0} \leq 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1 \dots 32$$

$$\sum_{j=1}^{32} \lambda_j = 1$$

Por tanto, usando el modelo propuesto con el conjunto de datos de fincas recopilado y considerando idénticos pesos relativos en la función objetivo ($w_1 = w_2 = w_3 = w''_1 = 0,25$), se han calculado los targets y los valores de la función de pertenencia según Figura 5 y 6, así como la puntuación de eficiencia para cada una de las dos campañas 2014 y 2015. Estos datos se muestran en las tablas siguientes Tabla 5 y Tabla 6, junto con los valores observados de las variables, sus correspondientes valores de la función de pertenencia y los puntos de referencia usados para calcular el objetivo.

El paquete de programación optimización utilizado para resolver los modelos de programación lineal propuestos ha sido LINGO V14. El código fuente del modelo se incluye en el Anexo 8.

| DMUs | DATOS 2014 | | | | | | | | | | RESULTADOS 2014 | | | | | | | | | |
|------|------------|-----|-----|-----|-------|--------|---------|---------|---------|--------------|-----------------|-----------|-----------|--------------|---------------|---------------|---------------|--------------------|---------|---------|
| | DENS | SUP | N | K | R | PROD | μ_N | μ_K | μ_R | μ_{PROD} | \hat{N} | \hat{K} | \hat{R} | \hat{PROD} | $\hat{\mu}_N$ | $\hat{\mu}_K$ | $\hat{\mu}_R$ | $\hat{\mu}_{PROD}$ | F. Obj. | ξ_0 |
| 1 | 250 | 27 | 100 | 150 | 2.000 | 11.400 | 1 | 0,538 | 1 | 0,946 | 100 | 150 | 2.000 | 11.400 | 1 | 0,538 | 1 | 0,946 | 0 | 1 |
| 2 | 204 | 133 | 78 | 120 | 450 | 8.000 | 0,651 | 1 | 0 | 0,641 | 100 | 120 | 2.000 | 9.861 | 1 | 1 | 1 | 0,808 | 0,379 | 0,621 |
| 3 | 70 | 76 | 100 | 30 | 1.500 | 4.500 | 1 | 0,241 | 0,677 | 0,327 | 100 | 30 | 1.500 | 4.500 | 1 | 0,241 | 0,677 | 0,327 | 0 | 1 |
| 4 | 70 | 57 | 60 | 30 | 1.000 | 860 | 0,365 | 0,241 | 0,355 | 0 | 60 | 30 | 1.000 | 860 | 0,365 | 0,241 | 0,355 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 82 | 99 | 120 | 120 | 2.000 | 7.070 | 0 | 1 | 1 | 0,557 | 120 | 120 | 2.000 | 7.070 | 0 | 1 | 1 | 0,557 | 0 | 1 |
| 6 | 357 | 68 | 100 | 150 | 1.500 | 6.850 | 1 | 0,538 | 0,677 | 0,538 | 100 | 120 | 2.000 | 11.796 | 1 | 1 | 1 | 0,982 | 0,307 | 0,693 |
| 7 | 286 | 82 | 100 | 100 | 2.200 | 10.000 | 1 | 0,831 | 0,600 | 0,820 | 100 | 120 | 2.000 | 11.273 | 1 | 1 | 1 | 0,935 | 0,171 | 0,829 |
| 8 | 238 | 15 | 90 | 95 | 1.800 | 8.000 | 0,841 | 0,789 | 0,871 | 0,641 | 96 | 95 | 1.800 | 8.741 | 0,936 | 0,789 | 0,871 | 0,707 | 0,040 | 0,960 |
| 9 | 317 | 23 | 120 | 130 | 2.200 | 12.000 | 0 | 0,846 | 0,600 | 1 | 120 | 130 | 2.200 | 12.000 | 0 | 0,846 | 0,600 | 1 | 0 | 1 |
| 10 | 317 | 98 | 120 | 130 | 2.200 | 12.000 | 0 | 0,846 | 0,600 | 1 | 120 | 130 | 2.200 | 12.000 | 0 | 0,846 | 0,600 | 1 | 0 | 1 |
| 11 | 278 | 99 | 100 | 120 | 2.400 | 9.000 | 1 | 1 | 0,200 | 0,731 | 100 | 120 | 2.000 | 11.161 | 1 | 1 | 1 | 0,925 | 0,249 | 0,751 |
| 12 | 357 | 24 | 57 | 70 | 1.600 | 8.000 | 0,317 | 0,578 | 0,742 | 0,641 | 100 | 120 | 2.000 | 11.796 | 1 | 1 | 1 | 0,982 | 0,426 | 0,574 |
| 13 | 500 | 6 | 92 | 110 | 2.000 | 12.000 | 0,873 | 0,916 | 1 | 1 | 92 | 110 | 2.000 | 12.000 | 0,873 | 0,916 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 14 | 286 | 12 | 57 | 80 | 1.800 | 9.000 | 0,317 | 0,662 | 0,871 | 0,731 | 99 | 92 | 1.800 | 9.025 | 0,982 | 0,761 | 0,871 | 0,733 | 0,191 | 0,809 |
| 15 | 1.667 | 20 | 76 | 35 | 1.385 | 9.225 | 0,619 | 0,283 | 0,603 | 0,751 | 100 | 120 | 2.000 | 11.839 | 1 | 1 | 1 | 0,986 | 0,432 | 0,568 |
| 16 | 204 | 17 | 44 | 2 | 1.689 | 7.500 | 0,111 | 0 | 0,799 | 0,596 | 99 | 102 | 1.689 | 8.370 | 0,992 | 0,850 | 0,799 | 0,674 | 0,452 | 0,548 |
| 17 | 1.667 | 10 | 80 | 185 | 1.598 | 9.000 | 0,683 | 0 | 0,741 | 0,731 | 97 | 120 | 2.000 | 11.686 | 0,955 | 1 | 1 | 0,972 | 0,443 | 0,557 |
| 18 | 1.667 | 146 | 92 | 70 | 1.420 | 8.388 | 0,873 | 0,578 | 0,626 | 0,676 | 100 | 120 | 2.000 | 11.839 | 1 | 1 | 1 | 0,986 | 0,308 | 0,692 |
| 19 | 1.667 | 22 | 87 | 49 | 1.987 | 7.204 | 0,794 | 0,401 | 0,992 | 0,569 | 100 | 120 | 2.000 | 11.839 | 1 | 1 | 1 | 0,986 | 0,307 | 0,693 |
| 20 | 408 | 23 | 50 | 65 | 1.300 | 11.530 | 0,206 | 0,536 | 0,548 | 0,958 | 100 | 120 | 2.000 | 11.839 | 1 | 1 | 1 | 0,986 | 0,434 | 0,566 |
| 21 | 357 | 61 | 48 | 57 | 1.220 | 7.280 | 0,175 | 0,468 | 0,497 | 0,576 | 100 | 120 | 2.000 | 11.796 | 1 | 1 | 1 | 0,982 | 0,566 | 0,434 |
| 22 | 357 | 65 | 48 | 57 | 1.220 | 5.400 | 0,175 | 0,468 | 0,497 | 0,408 | 100 | 120 | 2.000 | 11.796 | 1 | 1 | 1 | 0,982 | 0,609 | 0,391 |
| 23 | 285 | 11 | 98 | 51 | 1.500 | 4.000 | 0,968 | 0,418 | 0,677 | 0,282 | 100 | 91 | 1.714 | 8.728 | 1 | 0,757 | 0,816 | 0,706 | 0,233 | 0,767 |
| 24 | 204 | 16 | 64 | 54 | 2.500 | 9.200 | 0,429 | 0,443 | 0 | 0,749 | 64 | 54 | 2.500 | 9.200 | 0,429 | 0,443 | 0 | 0,749 | 0 | 1 |
| 25 | 300 | 21 | 99 | 11 | 1.200 | 2.500 | 0,984 | 0,080 | 0,484 | 0,147 | 100 | 120 | 2.000 | 11.178 | 1 | 1 | 1 | 0,926 | 0,558 | 0,442 |
| 26 | 381 | 80 | 92 | 2 | 900 | 7.500 | 0,873 | 0 | 0,290 | 0,596 | 100 | 120 | 2.000 | 11.839 | 1 | 1 | 1 | 0,986 | 0,557 | 0,443 |
| 27 | 208 | 9 | 37 | 12 | 1.200 | 5.000 | 0 | 0,089 | 0,484 | 0,372 | 100 | 77 | 1.419 | 6.650 | 1 | 0,636 | 0,625 | 0,520 | 0,459 | 0,541 |
| 28 | 204 | 17 | 98 | 8 | 900 | 4.906 | 0,968 | 0,055 | 0,290 | 0,363 | 100 | 103 | 1.677 | 8.353 | 1 | 0,855 | 0,792 | 0,673 | 0,411 | 0,589 |
| 29 | 167 | 8 | 120 | 2 | 1.200 | 6.500 | 0 | 0 | 0,484 | 0,506 | 120 | 2 | 1.200 | 6.500 | 0 | 0 | 0,484 | 0,506 | 0 | 1 |
| 30 | 1.666 | 25 | 88 | 60 | 800 | 8.000 | 0,810 | 0,494 | 0,226 | 0,641 | 100 | 120 | 2.000 | 11.839 | 1 | 1 | 1 | 0,986 | 0,454 | 0,546 |
| 31 | 100 | 4 | 98 | 52 | 900 | 3.220 | 0,968 | 0,426 | 0,290 | 0,212 | 98 | 52 | 900 | 3.220 | 0,968 | 0,426 | 0,290 | 0,212 | 0 | 1 |
| 32 | 1.666 | 6 | 105 | 48 | 1.000 | 4.528 | 0,750 | 0,392 | 0,355 | 0,329 | 92 | 110 | 2.000 | 12.000 | 0,873 | 0,916 | 1 | 1 | 0,491 | 0,509 |

Tabla 5. Valores observados y resultados para Campaña 2014.

| DMUs | DATOS 2015 | | | | | | | | | | RESULTADOS 2015 | | | | | | | | | |
|------|------------|-----|-----|-----|-------|--------|---------------|---------------|---------------|--------------------|-----------------|-----------|-----------|--------------|---------------|---------------|---------------|--------------------|---------|---------|
| | DENS | SUP | N | K | R | PROD | $\hat{\mu}_N$ | $\hat{\mu}_K$ | $\hat{\mu}_R$ | $\hat{\mu}_{PROD}$ | \hat{N} | \hat{K} | \hat{R} | \hat{PROD} | $\hat{\mu}_N$ | $\hat{\mu}_K$ | $\hat{\mu}_R$ | $\hat{\mu}_{PROD}$ | F. Obj. | ξ_0 |
| 1 | 250 | 27 | 100 | 100 | 2.200 | 14.500 | 1 | 0,831 | 0,667 | 1 | 100 | 100 | 2.200 | 14.500 | 1 | 0,831 | 0,667 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 204 | 133 | 78 | 187 | 450 | 6.300 | 0,560 | 0,256 | 0 | 0,359 | 103 | 90 | 2.000 | 12.220 | 0,922 | 0,746 | 1 | 0,822 | 0,579 | 0,421 |
| 3 | 70 | 76 | 100 | 30 | 1.500 | 3.900 | 1 | 0,241 | 0,677 | 0,172 | 100 | 30 | 1.500 | 3.900 | 1 | 0,241 | 0,677 | 0,172 | 0 | 1 |
| 4 | 70 | 57 | 100 | 30 | 1.000 | 6.600 | 1 | 0,241 | 0,355 | 0,383 | 100 | 30 | 1.000 | 6.600 | 1 | 0,241 | 0,355 | 0,383 | 0 | 1 |
| 5 | 82 | 99 | 120 | 30 | 2.000 | 8.200 | 0,500 | 0,241 | 1 | 0,508 | 120 | 30 | 2.000 | 8.200 | 0,500 | 0,241 | 1 | 0,508 | 0 | 1 |
| 6 | 357 | 68 | 140 | 210 | 1.500 | 7.530 | 0 | 0 | 0,677 | 0,455 | 100 | 113 | 2.000 | 13.476 | 1 | 0,943 | 1 | 0,920 | 0,683 | 0,317 |
| 7 | 286 | 82 | 89 | 95 | 1.200 | 7.000 | 0,780 | 0,789 | 0,484 | 0,414 | 100 | 114 | 2.000 | 13.418 | 1 | 0,946 | 1 | 0,915 | 0,349 | 0,651 |
| 8 | 238 | 15 | 114 | 20 | 1.850 | 8.500 | 0,650 | 0,156 | 0,903 | 0,531 | 100 | 48 | 1.850 | 9.473 | 1 | 0,388 | 0,903 | 0,607 | 0,165 | 0,835 |
| 9 | 317 | 23 | 60 | 21 | 2.300 | 8.200 | 0,200 | 0,165 | 0,500 | 0,508 | 100 | 105 | 2.000 | 12.057 | 1 | 0,870 | 1 | 0,809 | 0,577 | 0,423 |
| 10 | 317 | 98 | 84 | 2 | 1.200 | 7.000 | 0,680 | 0 | 0,484 | 0,414 | 100 | 113 | 2.000 | 13.459 | 1 | 0,944 | 1 | 0,919 | 0,571 | 0,429 |
| 11 | 278 | 99 | 50 | 17 | 2.200 | 10.000 | 0 | 0,131 | 0,667 | 0,648 | 100 | 114 | 2.000 | 13.408 | 1 | 0,946 | 1 | 0,915 | 0,604 | 0,396 |
| 12 | 357 | 24 | 57 | 70 | 1.600 | 7.000 | 0,140 | 0,578 | 0,742 | 0,414 | 100 | 113 | 2.000 | 11.782 | 1 | 0,941 | 1 | 0,788 | 0,464 | 0,536 |
| 13 | 500 | 6 | 92 | 110 | 1.800 | 8.000 | 0,840 | 0,916 | 0,871 | 0,492 | 92 | 110 | 1.800 | 8.000 | 0,840 | 0,916 | 0,871 | 0,492 | 0 | 1 |
| 14 | 286 | 12 | 57 | 80 | 1.800 | 9.000 | 0,140 | 0,662 | 0,871 | 0,570 | 57 | 80 | 1.800 | 9.000 | 0,140 | 0,662 | 0,871 | 0,570 | 0 | 1 |
| 15 | 1.667 | 20 | 135 | 185 | 1.620 | 10.316 | 0,125 | 0,278 | 0,755 | 0,673 | 100 | 112 | 2.000 | 12.011 | 1 | 0,937 | 1 | 0,806 | 0,478 | 0,522 |
| 16 | 204 | 17 | 110 | 47 | 1.356 | 8.177 | 0,750 | 0,384 | 0,585 | 0,506 | 100 | 55 | 1.656 | 10.469 | 1 | 0,454 | 0,778 | 0,685 | 0,173 | 0,827 |
| 17 | 1.667 | 10 | 95 | 47 | 1.434 | 9.832 | 0,900 | 0,384 | 0,635 | 0,635 | 95 | 47 | 1.434 | 9.832 | 0,900 | 0,384 | 0,635 | 0,635 | 0 | 1 |
| 18 | 1.667 | 146 | 82 | 65 | 1.570 | 11.522 | 0,640 | 0,536 | 0,723 | 0,767 | 100 | 113 | 2.000 | 13.476 | 1 | 0,943 | 1 | 0,920 | 0,299 | 0,701 |
| 19 | 1.667 | 22 | 92 | 43 | 2.216 | 8.938 | 0,840 | 0,350 | 0,640 | 0,565 | 100 | 114 | 2.000 | 12.429 | 1 | 0,953 | 1 | 0,838 | 0,349 | 0,651 |
| 20 | 408 | 23 | 65 | 75 | 1.550 | 8.580 | 0,300 | 0,620 | 0,710 | 0,538 | 100 | 113 | 2.000 | 11.905 | 1 | 0,942 | 1 | 0,797 | 0,393 | 0,607 |
| 21 | 357 | 61 | 56 | 70 | 1.800 | 5.320 | 0,120 | 0,578 | 0,871 | 0,283 | 100 | 113 | 2.000 | 13.476 | 1 | 0,943 | 1 | 0,920 | 0,503 | 0,497 |
| 22 | 357 | 65 | 56 | 70 | 1.800 | 7.430 | 0,120 | 0,578 | 0,871 | 0,448 | 100 | 113 | 2.000 | 13.476 | 1 | 0,943 | 1 | 0,920 | 0,462 | 0,538 |
| 23 | 285 | 11 | 99 | 41 | 1.600 | 9.000 | 0,980 | 0,333 | 0,742 | 0,570 | 100 | 54 | 1.600 | 9.269 | 1 | 0,444 | 0,742 | 0,591 | 0,038 | 0,962 |
| 24 | 204 | 16 | 119 | 2 | 2.600 | 4.900 | 0,525 | 0 | 0 | 0,250 | 100 | 51 | 1.610 | 10.315 | 1 | 0,419 | 0,748 | 0,673 | 0,516 | 0,484 |
| 25 | 300 | 21 | 66 | 26 | 1.700 | 1.700 | 0,320 | 0,207 | 0,806 | 0 | 100 | 95 | 2.000 | 12.431 | 1 | 0,785 | 1 | 0,838 | 0,573 | 0,427 |
| 26 | 381 | 80 | 99 | 41 | 900 | 5.500 | 0,980 | 0,333 | 0,290 | 0,297 | 100 | 113 | 2.000 | 13.476 | 1 | 0,943 | 1 | 0,920 | 0,491 | 0,509 |
| 27 | 208 | 9 | 96 | 2 | 1.200 | 3.500 | 0,920 | 0 | 0,484 | 0,141 | 100 | 25 | 1.301 | 8.921 | 1 | 0,198 | 0,549 | 0,564 | 0,191 | 0,809 |
| 28 | 204 | 17 | 112 | 54 | 843 | 3.250 | 0,700 | 0,443 | 0,254 | 0,121 | 100 | 55 | 1.655 | 10.465 | 1 | 0,454 | 0,778 | 0,685 | 0,350 | 0,650 |
| 29 | 167 | 8 | 115 | 2 | 1.100 | 8.900 | 0,625 | 0 | 0,419 | 0,563 | 115 | 2 | 1.100 | 8.900 | 0,625 | - | 0,419 | 0,563 | 0 | 1 |
| 30 | 1.666 | 25 | 88 | 35 | 800 | 10.000 | 0,760 | 0,283 | 0,226 | 0,648 | 100 | 115 | 2.000 | 12.731 | 1 | 0,957 | 1 | 0,862 | 0,475 | 0,525 |
| 31 | 100 | 4 | 92 | 2 | 900 | 1.806 | 0,840 | 0 | 0,290 | 0,008 | 92 | 2 | 900 | 1.806 | 0,840 | - | 0,290 | 0,008 | 0 | 1 |
| 32 | 1.666 | 6 | 105 | 35 | 1.000 | 3.396 | 0,875 | 0,283 | 0,355 | 0,133 | 94 | 100 | 1.692 | 7.380 | 0,875 | 0,830 | 0,801 | 0,444 | 0,326 | 0,674 |

Tabla 6. Valores observados y resultados para Campaña 2015.

La Tabla 7 contiene las puntuaciones de eficiencia ξ calculadas anteriormente, así como la media de las dos campañas. Las filas correspondientes a las fincas que han sido eficientes al menos una vez en alguna campaña están resaltadas en negrita.

| DATOS | ξ_0 2014 | ξ_0 2015 | MEDIA |
|-----------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0,621 | 0,421 | 0,521 |
| 3 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 0,693 | 0,317 | 0,505 |
| 7 | 0,829 | 0,651 | 0,740 |
| 8 | 0,960 | 0,835 | 0,898 |
| 9 | 1 | 0,423 | 0,712 |
| 10 | 1 | 0,429 | 0,714 |
| 11 | 0,751 | 0,396 | 0,574 |
| 12 | 0,574 | 0,536 | 0,555 |
| 13 | 1 | 1 | 1 |
| 14 | 0,809 | 1 | 0,904 |
| 15 | 0,568 | 0,522 | 0,545 |
| 16 | 0,548 | 0,827 | 0,687 |
| 17 | 0,557 | 1 | 0,778 |
| 18 | 0,692 | 0,701 | 0,696 |
| 19 | 0,693 | 0,651 | 0,672 |
| 20 | 0,566 | 0,607 | 0,586 |
| 21 | 0,434 | 0,497 | 0,465 |
| 22 | 0,391 | 0,538 | 0,465 |
| 23 | 0,767 | 0,962 | 0,864 |
| 24 | 1 | 0,484 | 0,742 |
| 25 | 0,442 | 0,427 | 0,435 |
| 26 | 0,443 | 0,509 | 0,476 |
| 27 | 0,541 | 0,809 | 0,675 |
| 28 | 0,589 | 0,650 | 0,620 |
| 29 | 1 | 1 | 1 |
| 30 | 0,546 | 0,525 | 0,535 |
| 31 | 1 | 1 | 1 |
| 32 | 0,509 | 0,674 | 0,592 |

Tabla 7. Puntuaciones de Eficiencia anual y media.

A la vista de la tabla, entre las DMUs que son eficientes en ambas campañas, destacamos que la DMU 1 se trata de un olivar intensivo (250 arb/ha) de 20 años, con una superficie mediana/grande (27 has) y poda alternante, que ha seguido unos parámetros de abonado en NPK y riego cercanos al ideal, obteniendo unas producciones cercanas al máximo de cada año (11.400 y 14.500 Kg/ha).

En el caso de la DMU 5 se trata de un olivar tradicional (82 arb/ha) de 100 años, con una superficie grande (99 has) y poda alternante, que ha seguido unos parámetros de abonado en NPK y riego no muy comunes en olivar tradicional pero cercanos al ideal, obteniendo unas producciones más que aceptables (7.000 – 8.000 Kg/ha).

Destacar también la DMU 13 que es un olivar intensivo (500 arb/ha) de sólo 14 años, con una superficie pequeña (6 has) y poda anual, que ha seguido unos parámetros de abonado ligeramente inferiores al ideal.

Por último, la DMU 29 se trata de un olivar intensivo (167 arb/ha) de 11 años de edad, con una superficie pequeña (ha) y poda anual, que fertiliza sólo con N y riega en torno a la mitad del ideal (1.000 m³/año), obteniendo producciones de 6 – 8.500 Kg/ha.

Llama la atención el caso de la DMU 4, ya que al encontrarnos en VRS (Variable Return to Scale) con entradas (NPK y riego) y salidas (producción) tan bajas, provoca que ese olivar se encuentre en la frontera eficiente, dado que no encuentra un olivar de referencia que sea mejor para esa salida tan baja (860 Kg/ha).

Por otro lado, entre los olivares que dejan de ser eficientes de una campaña para otra, tenemos por ejemplo la DMU 9 cuya eficiencia cae de 1 hasta 0,423 siendo un OI de 10 años y 23 has de superficie, dado que reduce sus aportaciones de NPK prácticamente a la mitad y no realiza poda, por lo que la producción cae desde el máximo en 2014 (12.000 Kg/ha) hasta los 8.200 Kg, a pesar que el riego se ha mantenido cercano al ideal (2.300 m³/ha).

Del mismo modo, DMU 10 cuya eficiencia cae igualmente desde 1 hasta 0,429 pese a ser OI y tener una buena superficie de 98 has y una edad aceptable de 12 años, porque reduce el abonado N por debajo del ideal (80 UFN) y elimina el abonado de K (1,5 UFN), reduciendo a la mitad el riego (1.200 m³/ha) sin realizar poda en esa campaña, obteniendo una producción de tan sólo 7.000 Kg/ha.

En este mismo caso se encuentra la DMU 24, cuya eficiencia cae desde 1 hasta 0,484 teniendo una edad de 20 años y una superficie de 16 has en un OI, porque a pese a realizar poda en ambos años, llega a duplicar la fertilización nitrogenada (que pasa de 64 hasta 119 UFN) y supera el ideal de 100 UFN, deja de abonar en K y mantiene el riego cercano al máximo (4.600 m³/ha), por lo que la producción cae hasta la mitad (4.900 Kg/ha frente a 9.200 Kg/ha anteriores).

Igualmente, existen otros olivares que sin ser eficientes en 2014, disminuyen su eficiencia en 2015, en este caso nos encontramos la DMU 7 que pasa de un nivel de eficiencia de 0,829 a 0,651 siendo un olivar OI de 15 años y 82 has, estaba en 2014 en el ideal en cuanto fertilización N (cercano en potasio 100 UFK) con un riego algo superior al óptimo marcado 2.200 m³/ha y una producción bastante buena de 10.000 Kg/ha. Sin embargo, en 2015 baja por debajo del ideal en fertilización nitrogenada (89 UFN) y reduce el riego a la mitad (1.200 m³/ha) por lo que la producción cae a 7.000 Kg/ha.

En otro orden se encuentran los olivares que pasan a ser eficientes de una campaña para otra, como es el caso de la DMU 17, cuya eficiencia pasa de 0,557 hasta 1, es un olivar tipo OI con 10 años, tiene una superficie de 12 has y realiza poda en ambas campañas, y lo que hace es aumentar la fertilización N hasta casi el ideal (95 UFN) y reducir el aporte de K dado que el año anterior superó el ideal, obteniendo una producción ligeramente superior. Lo que ocurre es que este año se está proyectando sobre si mismo, lo que quiere decir es que ha mejorado con respecto a las Entradas y Salidas del resto de DMUs y ha pasado a formar parte de la frontera tecnológica.

Existen también fincas como la DMU 16, que sin ser eficiente mejora desde 0,548 hasta los 0,827 siendo un olivar OI de 25 años con 17 has. Pasa de estar por debajo del ideal en todos los parámetros (44 UFN, 0 UFK, 1.689 m³/ha y 7.500 Kg/ha) a realizar una mejor aportación de NPK (110 UFN, 47 UFK) obtienen una mejora de la producción hasta los 8.177 Kg/ha.

Existen igualmente los que se mantienen ineficientes de una año para otro como por ejemplo, la DMU 15 que tiene sendas eficiencias de 0,568 y 0,523 siendo un olivar OS de 12 años y 20 has, en 2014 se queda por debajo del ideal en todos los parámetros (76 UFN, 35 UFK, 1.385 m³/ha) y no consigue una producción cercana al máximo sino 9.222 Kg/ha. En 2015 sin embargo excede los ideales (135 UFN, 185 UFK) y no sube el riego suficientemente 1.620 m³/ha, obteniendo una producción ligeramente superior de 10.316 Kg/ha. En cada año se está proyectando sobre diferentes puntos (100, 120, 2.000, 11.839) en 2014 y (100, 112, 2.000, 12.010) en 2015.

Observamos también los que tienen las peores tasas de eficiencia como la DMU 25, que tiene una eficiencia media de 0,435 y se trata de un olivar OI de 17 años, de 21 has y que realiza poda anual, que reduce la aplicación de N desde el ideal hasta 66 UFN y que aumenta ligeramente la aplicación de K hasta las 26 UFN, obteniendo una reducción de producción hasta el mínimo de ese año de 1.700 Kg/ha.

Por último en cuanto a los datos medios, observamos que la eficiencia media está en torno a 0,700 con una fertilización media de 90 UFN y 65 UFK, un riego medio de 1.518 m³/ha y una producción media de 7.300 Kg/ha.

| DMU | EFF 2014 | EFF 2015 | MEDIA | Término Municipal | Variedad | Edad (Años) | Tipo | Marco (m*m) | Dens (arb/ha) | Sup (Has) |
|-----|----------|----------|-------|----------------------|------------|-------------|------|-------------|---------------|-----------|
| 29 | 1 | 1 | 1 | MORÓN | MANZANILLA | 11 | OI | 10*6 | 167 | 8 |
| 24 | 1 | 0,484 | 0,742 | GERENA | MANZANILLA | 20 | OI | 7*7 | 204 | 16 |
| 28 | 0,589 | 0,650 | 0,620 | GUILLENA | PICUAL | 15 | OI | 7*7 | 204 | 17 |
| 2 | 0,621 | 0,421 | 0,521 | CABRA | PICUAL | 30 | OI | 7*7 | 204 | 133 |
| 16 | 0,548 | 0,827 | 0,687 | ECIJA | PICUAL | 25 | OI | 7*7 | 204 | 17 |
| 27 | 0,541 | 0,809 | 0,675 | LA CAMPANA | MANZANILLA | 10 | OI | 8*6 | 208 | 9 |
| 8 | 0,960 | 0,835 | 0,898 | PALMA DEL RIO | PICUAL/ARB | 15 | OI | 7*6 | 238 | 15 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | MARTIN DE LA JARA | HOJIBLANCA | 20 | OI | 8*5 | 250 | 27 |
| 23 | 0,767 | 0,962 | 0,864 | LA CAMPANA | ARBEQUINA | 9 | OI | 7*3 | 285 | 11 |
| 14 | 0,809 | 1 | 0,904 | PALMA DEL RIO | ARBEQUINA | 10 | OI | 7*5 | 286 | 12 |
| 7 | 0,829 | 0,651 | 0,740 | PALMA DEL RIO | ARBEQUINA | 15 | OI | 7*5 | 286 | 82 |
| 25 | 0,442 | 0,427 | 0,435 | GUILLENA | MANZANILLA | 17 | OI | 8*4 | 300 | 21 |
| 9 | 1 | 0,423 | 0,712 | PALMA DEL RIO | ARBEQUINA | 10 | OI | 7*4,5 | 317 | 23 |
| 6 | 0,693 | 0,317 | 0,505 | PUEBLA DE CAZALLA | ARBEQUINA | 9 | OI | 7*4 | 357 | 68 |
| 12 | 0,574 | 0,536 | 0,555 | PALMA DEL RIO | ARBEQUINA | 14 | OI | 7*4 | 357 | 24 |
| 21 | 0,434 | 0,497 | 0,465 | S. DE GUADIANA | ARBEQUINA | 16 | OI | 7*4 | 357 | 61 |
| 22 | 0,391 | 0,538 | 0,465 | VVA. CASTILLEJOS | ARBEQUINA | 18 | OI | 7*4 | 357 | 65 |
| 26 | 0,443 | 0,509 | 0,476 | LA PUEBLA DE CAZALLA | ARBEQUINA | 7 | OI | 7*3,75 | 381 | 80 |
| 20 | 0,566 | 0,607 | 0,586 | NIEBLA | ARBEQUINA | 15 | OI | 7*3,5 | 408 | 23 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | PEÑAFLORES | ARBEQUINA | 14 | OI | 5*4 | 500 | 6 |
| 17 | 0,557 | 1 | 0,778 | POSADAS | ARBEQUINA | 15 | OI | 4*1,5 | 1.667 | 10 |
| 32 | 0,509 | 0,674 | 0,592 | CARMONA | ARBEQUINA | 12 | OS | 4*1,5 | 1.666 | 6 |
| 30 | 0,546 | 0,525 | 0,535 | CARMONA | ARBEQUINA | 9 | OS | 4*1,5 | 1.666 | 25 |
| 15 | 0,568 | 0,522 | 0,545 | ECIJA | ARBEQUINA | 12 | OS | 4*1,5 | 1.667 | 20 |
| 19 | 0,693 | 0,651 | 0,672 | PUENTE GENIL | ARBOSANA | 10 | OS | 4*1,5 | 1.667 | 22 |
| 18 | 0,692 | 0,701 | 0,696 | BOLLULLOS DE MIT. | ARBEQUINA | 15 | OS | 4*1,5 | 1.667 | 146 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | AGUILAR DE LA FRA | HOJIBLANCA | 100 | OT | 12*12 | 70 | 57 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | ANTEQUERA | HOJIBLANCA | 100 | OT | 12*13 | 70 | 76 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | ECIJA | PICUAL | 100 | OT | 11*11 | 82 | 99 |
| 31 | 1 | 1 | 1 | DOS HERMANAS | GORDAL | 70 | OT | 10*10 | 100 | 4 |
| 11 | 0,751 | 0,396 | 0,574 | LORA DEL RIO | PICUAL | 20 | OT | 6*6 | 278 | 99 |
| 10 | 1 | 0,429 | 0,714 | PALMA DEL RIO | ARBEQUINA | 12 | OT | 7*4,5 | 317 | 98 |

Tabla 8. Resultados de eficiencia ordenados por tipo de olivar, densidad y superficie.

En la Tabla 8 adjunta se han ordenado las DMUs por tipo de olivar, y se observa que el olivar tradicional OT contiene un mayor número de DMUs eficientes, por el contrario el olivar superintensivo no contiene ninguna, pero se observa que es más eficiente cuanto mayor es la superficie de la DMU. El olivar intensivo contiene 3 unidades eficientes.

| DMU | EFF 2014 | EFF 2015 | MEDIA | Término Municipal | Variedad | Edad (Años) | Tipo | Marco (m*m) | Dens (arb/ha) | Sup (Has) |
|-----|----------|----------|-------|----------------------|------------|-------------|------|-------------|---------------|-----------|
| 22 | 0,391 | 0,538 | 0,465 | VVA. CASTILLEJOS | ARBEQUINA | 18 | OI | 7*4 | 357 | 65 |
| 21 | 0,434 | 0,497 | 0,465 | SANL. DE GUADIANA | ARBEQUINA | 16 | OI | 7*4 | 357 | 61 |
| 25 | 0,442 | 0,427 | 0,435 | GUILLENA | MANZANILLA | 17 | OI | 8*4 | 300 | 21 |
| 26 | 0,443 | 0,509 | 0,476 | LA PUEBLA DE CAZALLA | ARBEQUINA | 7 | OI | 7*3,75 | 381 | 80 |
| 27 | 0,541 | 0,809 | 0,675 | LA CAMPANA | MANZANILLA | 10 | OI | 8*6 | 208 | 9 |
| 16 | 0,548 | 0,827 | 0,687 | ECIJA | PICUAL | 25 | OI | 7*7 | 204 | 17 |
| 17 | 0,557 | 1 | 0,778 | POSADAS | ARBEQUINA | 15 | OI | 4*1,5 | 1.667 | 10 |
| 20 | 0,566 | 0,607 | 0,586 | NIEBLA | ARBEQUINA | 15 | OI | 7*3,5 | 408 | 23 |
| 12 | 0,574 | 0,536 | 0,555 | PALMA DEL RIO | ARBEQUINA | 14 | OI | 7*4 | 357 | 24 |
| 28 | 0,589 | 0,650 | 0,620 | GUILLENA | PICUAL | 15 | OI | 7*7 | 204 | 17 |
| 2 | 0,621 | 0,421 | 0,521 | CABRA | PICUAL | 30 | OI | 7*7 | 204 | 133 |
| 6 | 0,693 | 0,317 | 0,505 | PUEBLA DE CAZALLA | ARBEQUINA | 9 | OI | 7*4 | 357 | 68 |
| 23 | 0,767 | 0,962 | 0,864 | LA CAMPANA | ARBEQUINA | 9 | OI | 7*3 | 285 | 11 |
| 14 | 0,809 | 1 | 0,904 | PALMA DEL RIO | ARBEQUINA | 10 | OI | 7*5 | 286 | 12 |
| 7 | 0,829 | 0,651 | 0,740 | PALMA DEL RIO | ARBEQUINA | 15 | OI | 7*5 | 286 | 82 |
| 8 | 0,960 | 0,835 | 0,898 | PALMA DEL RIO | PICUAL/ARB | 15 | OI | 7*6 | 238 | 15 |
| 9 | 1 | 0,423 | 0,712 | PALMA DEL RIO | ARBEQUINA | 10 | OI | 7*4,5 | 317 | 23 |
| 24 | 1 | 0,484 | 0,742 | GERENA | MANZANILLA | 20 | OI | 7*7 | 204 | 16 |
| 29 | 1 | 1 | 1 | MORÓN | MANZANILLA | 11 | OI | 10*6 | 167 | 8 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | MARTIN DE LA JARA | HOJIBLANCA | 20 | OI | 8*5 | 250 | 27 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | PEÑAFLORES | ARBEQUINA | 14 | OI | 5*4 | 500 | 6 |
| 32 | 0,509 | 0,674 | 0,592 | CARMONA | ARBEQUINA | 12 | OS | 4*1,5 | 1.666 | 6 |
| 30 | 0,546 | 0,525 | 0,535 | CARMONA | ARBEQUINA | 9 | OS | 4*1,5 | 1.666 | 25 |
| 15 | 0,568 | 0,522 | 0,545 | ECIJA | ARBEQUINA | 12 | OS | 4*1,5 | 1.667 | 20 |
| 18 | 0,692 | 0,701 | 0,696 | BOLLULLOS DE MIT. | ARBEQUINA | 10 | OS | 4*1,5 | 1.667 | 22 |
| 19 | 0,693 | 0,651 | 0,672 | PUENTE GENIL | ARBOSANA | 15 | OS | 4*1,5 | 1.667 | 146 |
| 11 | 0,751 | 0,396 | 0,574 | LORA DEL RIO | PICUAL | 20 | OT | 6*6 | 278 | 99 |
| 10 | 1 | 0,429 | 0,714 | PALMA DEL RIO | ARBEQUINA | 12 | OT | 7*4,5 | 317 | 98 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | AGUILAR DE LA FRA | HOJIBLANCA | 100 | OT | 12*12 | 70 | 57 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | ANTEQUERA | HOJIBLANCA | 100 | OT | 12*13 | 70 | 76 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | ECIJA | PICUAL | 100 | OT | 11*11 | 82 | 99 |
| 31 | 1 | 1 | 1 | DOS HERMANAS | GORDAL | 70 | OT | 10*10 | 100 | 4 |

Tabla 9. Resultados de eficiencia ordenados por tipo de olivar, y eficiencia anual.

En la presente tabla, se observa que dentro de los olivares intensivos, los más eficientes están en densidades medias de entre 167 y 500 árboles por hectárea, no existiendo relación con la superficie. Por otro lado, se observa una zona intermedia de eficiencia media bastante alta en la zona de Palma del Río con densidades en torno a los 286 árboles/ha.

Se ha realizado un análisis de sensibilidad modificando el valor ideal en una de las variables no monótonas, concretamente hemos calculado la eficiencia de nuevo para un valor ideal para 80 UFK y 60 UFK respectivamente. La razón no es otra que la controversia suscitada entre diferentes consultores agrícolas respecto a las cantidades ideales para el cultivo, y vistas las cantidades reales aplicadas en la práctica. El resultado se muestra en la siguiente la Tabla 11, concluyendo que los resultados son prácticamente los mismos, tan sólo se observa una ligera subida en cada parámetro y en los valores medios.

Aunque el resultado puede cambiar cuando cambian los valores de referencia de estas funciones de pertenencia, los resultados no son muy sensibles en este sentido porque pequeñas cambios en las funciones de pertenencia conducen pequeños cambios en los resultados.

| | 2014 | 2015 | | 2014 | 2015 | | 2014 | 2015 | |
|-------|-------------|-------|-------|------------|-------|-------|------------|-------|-------|
| DMUs | EFF 120 UFK | | MEDIA | EFF 80 UFK | | MEDIA | EFF 60 UFK | | MEDIA |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0,621 | 0,421 | 0,521 | 0,543 | 0,321 | 0,432 | 0,533 | 0,323 | 0,428 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 0,693 | 0,317 | 0,505 | 0,678 | 0,306 | 0,492 | 0,691 | 0,335 | 0,513 |
| 7 | 0,829 | 0,651 | 0,740 | 0,848 | 0,663 | 0,756 | 0,853 | 0,663 | 0,758 |
| 8 | 0,960 | 0,835 | 0,898 | 0,887 | 0,806 | 0,846 | 0,838 | 0,776 | 0,807 |
| 9 | 1 | 0,423 | 0,712 | 1 | 0,391 | 0,695 | 1 | 0,440 | 0,720 |
| 10 | 1 | 0,429 | 0,714 | 1 | 0,417 | 0,708 | 1 | 0,446 | 0,723 |
| 11 | 0,751 | 0,396 | 0,574 | 0,678 | 0,401 | 0,539 | 0,680 | 0,447 | 0,563 |
| 12 | 0,574 | 0,536 | 0,555 | 0,684 | 0,566 | 0,625 | 0,722 | 0,611 | 0,667 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 14 | 0,809 | 1 | 0,904 | 0,821 | 1 | 0,911 | 0,772 | 1 | 0,886 |
| 15 | 0,568 | 0,522 | 0,545 | 0,641 | 0,485 | 0,563 | 0,704 | 0,494 | 0,599 |
| 16 | 0,548 | 0,827 | 0,687 | 0,492 | 0,818 | 0,655 | 0,480 | 0,809 | 0,644 |
| 17 | 0,557 | 1 | 0,778 | 0,595 | 1 | 0,797 | 0,629 | 1 | 0,815 |
| 18 | 0,692 | 0,701 | 0,696 | 0,802 | 0,757 | 0,780 | 0,841 | 0,826 | 0,833 |
| 19 | 0,693 | 0,651 | 0,672 | 0,781 | 0,676 | 0,728 | 0,859 | 0,744 | 0,801 |
| 20 | 0,566 | 0,607 | 0,586 | 0,731 | 0,647 | 0,689 | 1,000 | 0,666 | 0,833 |
| 21 | 0,434 | 0,497 | 0,465 | 0,529 | 0,559 | 0,544 | 0,616 | 0,604 | 0,610 |
| 22 | 0,391 | 0,538 | 0,465 | 0,487 | 0,600 | 0,544 | 0,574 | 0,645 | 0,609 |
| 23 | 0,767 | 0,962 | 0,864 | 0,749 | 0,948 | 0,848 | 0,784 | 0,933 | 0,859 |
| 24 | 1 | 0,484 | 0,742 | 1 | 0,430 | 0,715 | 1 | 0,376 | 0,688 |
| 25 | 0,442 | 0,427 | 0,435 | 0,475 | 0,401 | 0,438 | 0,512 | 0,444 | 0,478 |
| 26 | 0,443 | 0,509 | 0,476 | 0,481 | 0,540 | 0,510 | 0,507 | 0,612 | 0,560 |
| 27 | 0,541 | 0,809 | 0,675 | 0,470 | 0,783 | 0,627 | 0,457 | 0,758 | 0,607 |
| 28 | 0,589 | 0,650 | 0,620 | 0,541 | 0,649 | 0,595 | 0,537 | 0,648 | 0,592 |
| 29 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 30 | 0,546 | 0,525 | 0,535 | 0,646 | 0,539 | 0,592 | 0,737 | 0,605 | 0,671 |
| 31 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 32 | 0,509 | 0,674 | 0,592 | 0,610 | 0,681 | 0,645 | 0,712 | 0,740 | 0,726 |
| Media | 0,735 | 0,700 | 0,717 | 0,755 | 0,699 | 0,727 | 0,782 | 0,717 | 0,750 |

Tabla 10. Análisis de sensibilidad al bajar el valor ideal de K (80 UFK y 60 UFK).

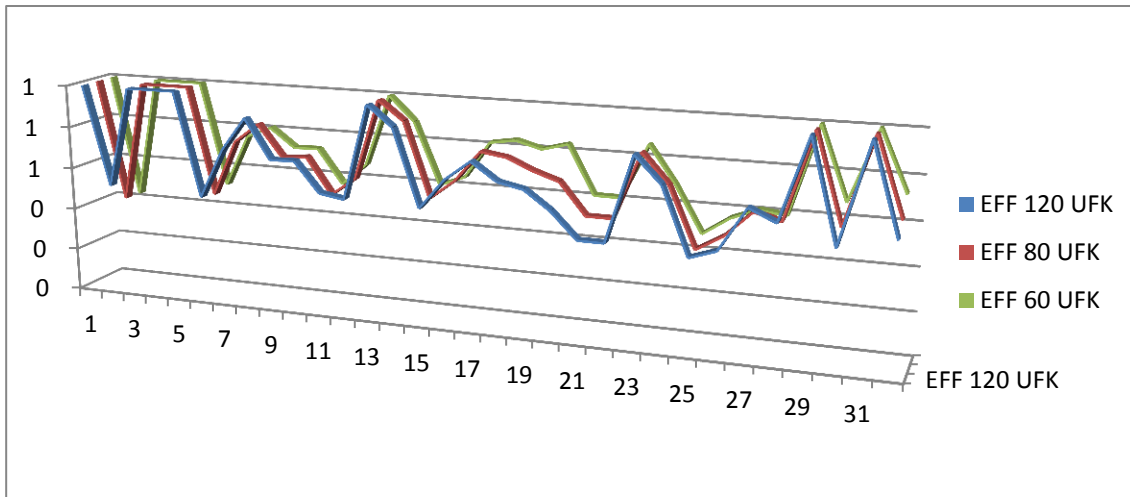


Figura 7. Representación gráfica en 3D del análisis de sensibilidad.

6. RESUMEN Y CONCLUSIONES

En el presente proyecto hemos trabajado con aplicaciones DEA en las que un determinado número de variables no pueden ser etiquetadas como inputs ni como outputs, porque su comportamiento depende de los valores que toman. Así, dentro de un determinado rango, la variable puede ser considerada como output porque un incremento en su valor es deseable. Sin embargo, dentro de otro rango ocurre lo contrario, se comporta como un input que es deseable disminuir. Se han denominado este tipo de variables como no monótonas para distinguirlas de los inputs y outputs monótonos convencionales.

La consideración de este tipo de variables fuerza a revisar determinados axiomas utilizados para derivar la tecnología DEA. En particular, mientras que los axiomas de envoltura y convexidad no plantean ningún problema, el axioma de libre disponibilidad no puede ser aplicado a las variables no monótonas. Esto conduce a nueva tecnología que ha sido denominada como DEA no monótono.

La definición de eficiencia es mantenida como medida de la distancia a la frontera eficiente, que está formada por aquellos puntos operativos factibles para los cuales no es posible mejorar. Las medidas de mejora en DEA convencional son fáciles, se trata sólo de reducir inputs y aumentar outputs. Todas las mejoras tienen que ser normalizadas (para que sean adimensionales) antes de agregarlas. En el caso de las variables no monótonas no es tan fácil puesto que lo que es considerado una mejora, puede ser un aumento o disminución de variable, dependiendo del rango en que se encuentre la variable. La solución propuesta en nuestro caso es utilizar una función de pertenencia dada por un Número Fuzzy Trapezoidal TrFN. En este sentido, las mejoras en la variable no monótona son medidas por el incremento en su correspondiente valor de la función de pertenencia. Por lo tanto, hay que especificar una función de pertenencia por cada variable no monótona y, para integrar éstas con las variables monótonas, estos últimos también tienen que ser asignados a las funciones de pertenencia que reflejen su carácter monótono.

El modelo DEA no monótono resultante es tipo LP, siempre que los valores observados de todas las DMUs caigan dentro del rango o margen de las correspondientes variables (monótonas y no monótonas). Si este no es el caso, entonces aquellas DMUs para las que una o más variables estén fuera del rango o zona de soporte, es necesario usar el modelo MILP modificado, con variables binarias.

Tras revisar la bibliografía y concluir que no había muchas investigaciones respecto al olivar andaluz, que dichos estudios no trataban en profundidad el olivar moderno en riego (OT, OI, OS), que las fuentes de datos suelen ser bases de datos públicas, y que no existían estudios del

“quore” del negocio en cuanto a fertilización, riego, poda, superficie, y densidad; decidimos encaminar este trabajo en ese camino para tratar de clarificar qué tiene que hacer o hacia dónde tiene que proyectarse una finca que pretenda ser eficiente en este sector.

La aproximación propuesta ha sido aplicada a la evaluación de fincas de olivar en riego de tipología tradicional, intensiva y superintensiva, de las provincias de Córdoba, Sevilla, Málaga y Huelva durante las Campañas 2014-2015. En esta aplicación, se han asumido tres variables no monótonas denominadas Abonado N (N en Kg N/ha o UFN), Abonado K (K en Kg K/ha o UFK), Riego (R en m³/ha), y un output monótono que es la Producción de Aceituna (Y1 en Kg/ha). Igualmente han sido consideradas como inputs tanto la densidad de planta como la superficie de finca, ambas no discrecionales. La aproximación propuesta ha calculado la puntuación de eficiencia para cada finca en cada uno de los años, así como el valor objetivo para cada una de las variables monótonas y no monótonas.

Como consecuencia existen varias DMUs que son eficientes en ambas campañas (puntuación 1) como la DMU 1 que ha seguido unos parámetros de abonado y riego cercanos al ideal en cada caso, y que obtiene unas producciones cercanas al máximo. En el lado opuesto, está la DMU 15 que en ambas campañas es ineficiente (puntuaciones 0,568 y 0,523) dado que el primer año está por debajo del ideal en fertilización y el segundo por encima, y en ambos años no llega a la dosis ideal de riego. A pesar de ello aumenta la producción. En una situación intermedia está la DMU 9 que pasa de una eficiencia de 1 hasta 0,423 al reducir drásticamente las aportaciones de fertilizante y pese a mantener la dosis de riego por encima del ideal, con una producción que cae hasta los 8.200 Kg/ha.

Aunque la aproximación aquí propuesta es útil para manejar variables no monótonas, puede aparecer un problema en DEA dado que la aplicación propuesta tiene sus limitaciones. En consecuencia, sólo se ha considerado un tipo específico de función de pertenencia de deseabilidad TrFN, particularmente variables que tienen un ideal donde pueden ser consideradas óptimas, y valores por encima y por debajo de ese intervalo que no son tan deseables. Pero pueden existir variables cuyo carácter no monótono consista en que lo que es deseable es estar fuera de un determinado rango de valores. Por tanto, la aproximación no podría manejar este tipo de situaciones.

Por último comentar que las variables no-monótonas consideran una situación diferente de las manejadas por los “dual role factors”, puesto que el decisor/modelador no conoce a priori como debe ser tratada la variable, como input o como output, por lo que el modelo refleja esta incertidumbre y debe identificarse el caso particular. En el caso de variables no monótonas se asume que el decisor/modelador conoce antes cómo se comporta la variable dependiendo de

su valor. Por tanto, en un rango se comporta como input por que se prefieren valores más pequeños. Mientras en otro rango la variable se comporta como output y valores mayores son preferidos. Existe un rango intermedio en el que el cambio de variable es neutral.

Como líneas de investigación posteriores se pueden plantear el introducir un mayor número de fincas, incluyendo otros tipos de cultivo como el secano, así como introducir un mayor número de parámetros en estudio que en esta ocasión no hemos decidido no incluir (como el abonado fosfórico, la influencia de la poda anual, etc). También aplicar el modelo tipo MILP para el caso de variables cuyos valores caen fuera de la zona de soporte.

7. BIBLIOGRAFÍA

7.1. BIBLIOGRAFÍA DEA VARIABLES FLEXIBLES

Amirteimoori, A., Emrouznejad, A. (2011) Flexible measures in production process: a DEA-based approach, *RAIRO Operations Research*, 45 (1), 63–74.

Amirteimoori, A., Emrouznejad, A. (2012) Notes on 'Classifying inputs and outputs in data envelopment analysis', *Applied Mathematics Letters*, 25, 1625–1628.

Amirteimoori, A., Emrouznejad, A. Khoshandam, L., (2013) Classifying flexible measures in data envelopment analysis: A slack-based measure, *Measurement*, 46, 4100–4107.

Azadi, M., Farzipoor Saen, R. (2011) Developing an output-oriented super SBM model with an application to third-party reverse logistics providers, *Journal of Multi-criteria Decision Analysis*, 18, 267-277.

Banker R, Charnes A., Cooper W.W. (1984) Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis, *Management Science*, 30, 1078-92.

Beasley, J. (1990) Comparing university departments, *Omega* 8 (2), 171–183.

Beasley, J. (1995) Determining teaching and research efficiencies, *Journal of the Operational Research Society*, 46, 441–452.

Charnes, A., Cooper, W.W. (1962). Programming with linear fractional functions. *Naval Research Logistics Quarterly*, 9: 181-186.

Charnes, A., Cooper, W. W., Lewin, A. Y., Morey, R. C., Rousseau, J. (1985) Sensitivity and stability analysis in DEA. *Annals of Operations Research*, 2, 139-156.

Charnes, A., Cooper, W. and Rhodes, E. (1978) Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operational Research*, 2 (6) 429–444.

Chen, W. (2014) Revisiting dual-role factors in data envelopment analysis: derivation and implications. *IIE Transactions*, 46, 653–663.

Cook, W.D., Zhu, J. (2007) Classifying inputs and outputs in DEA, *European Journal of Operational Research*, 180, 692–699.

Cook, W.D., Green, R.H., Zhu, J. (2006) Dual-role factors in data envelopment analysis, *IIE Transactions*, 38, 105–115.

Cooper, W.W., Seiford, L.M., Tone, K. *Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. Kluwer Academic Publishers, 2000.

Färe, R., Grosskopf, S. *New Directions: Efficiency and Productivity*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2004.

Farzipoor Saen, R. (2010a) A new model for selecting third-party reverse logistics providers in the presence of multiple dual-role factors, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 46 (1-4) 405-10.

Farzipoor Saen, R. (2010b) Restricting weights in supplier selection decisions in the presence of dual-role factors, *Applied Mathematical Modelling*, 34 (10), 2820-30.

Mahdiloo, M., Noorzadeh, A., Farzipoor Saen, R. (2011) A new approach for considering dual role factor in supplier selection problem. *International Journal of Academic Research*, 3 (1), 261-266.

Shabani, A., Farzipoor Saen, R. (2013) The use of data envelopment analysis for international market selection in the presence of multiple dual-role factors, *International Journal of Business Information Systems*, 13 (4), 471–489.

Shabani, A., Farzipoor Saen, R. (2015a) A new super-efficiency dual-role FDH procedure: An application in dairy cold chain for vehicle selection. *International Journal of Shipping and Transport Logistics*, 7 (4), 426–456.

Shabani, A., Farzipoor Saen, R. (2015b) Developing a novel data envelopment analysis model to determine prospective benchmarks of green supply chain in the presence of dual-role factor. *Benchmarking: An International Journal*, 22 (4), 711–730.

Shabani, A., Torabipour, S.M.R., Farzipoor Saen, R. (2011) Container selection in the presence of partial dual-role factors, *International Journal of Physical Distribution & Logistics Management*, 41 (10), 991–1008.

Toloo, M. (2009) On classifying inputs and outputs in DEA: A revised model, *European Journal of Operational Research*, 198, 358–360.

Toloo, M., Barat, M. (2015) On considering dual-role factor in supplier selection problem, *Mathematical Methods of Operations Research*, 82, 107–122.

Tone, K. (2001) A Slack-based measure of efficiency in DEA, *European Journal of Operational Research*, 130, 498–509.

Villa G., Lozano, S. (2016) DEA with non-monotonic variables. Application to EU governments' macroeconomic efficiency, *Journal of the Operational Research Society*. doi:10.1057/jors.2016.36

Wang, E.C., Alvi, E., (2011) Relative Efficiency of Government Spending and Its Determinants: Evidence from East Asian Countries, *Eurasian Economic Review*, 1 (1) 3-28.

Zhu, J., *Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking: Data Envelopment Analysis with Spreadsheets and DEA Excel Solver*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2002.

7.2. BIBLIOGRAFÍA ESPECÍFICA AGRICULTURA

Adhikari, C.B., Bjorndal, T. (2012) Analyses of technical efficiency using SDF and DEA models: evidence from Nepalese agriculture, *Applied Economics*, 44, 3297-3308.

Adhikari, C.B., Bjorndal, T. (2011) "Analyses of technical efficiency using SDF and DEA models: evidence from Nepalese agriculture", *Applied Economics*, 1–12.

AEMO (2012). *Memorias Anuales*. Asociación Española de Municipios del Olivo.

Aldanondo-Ochoa, A., Casanovas-Oliva, V.L., Arandia-Miura, A. (2014) Environmental efficiency and the impact of regulation in dryland organic vine production, *Land Use Policy*, 36, 275-284.

Alene; A.D., Manyong, V.M., Gockowski, J. (2006) The production efficiency of intercropping annual and perennial crops in southern Ethiopia: A comparison of distance functions and production frontiers, *Agricultural Systems*, 91, 51-70.

Amores, A.F., Contreras, I. (2009) New approach for the assignment of new European agricultural subsidies using scores from data envelopment analysis: Application to olivegrowing farms in Andalusia (Spain), *European Journal of Operational Research*, 193, 718–729.

Andersen, J.L., Bogetoft, P. (2007) "Gains from quota trade: theoretical models and an application to the Danish fishery", *European Review of Agricultural Economics*, 34 (1), 105–127.

Aravindakshan, S., Rossi, F.J., Krupnik, T.J. (2015) What does benchmarking of wheat farmers practicing conservation tillage in the eastern Indo-Gangetic Plains tell us about energy use efficiency? An application of slack-based data envelopment analysis, *Energy*, 90, 483-493.

Armagan, G., Ozden, A., Bekcioglu, S. (2010) Efficiency and total factor productivity of crop production at NUTS1 level in Turkey: Malmquist index approach, *Quality & Quantity*, 44, 573-581.

Arzubi, A., Berbel, J. (2001). *Determinación de eficiencia usando en DEA en explotaciones lecheras de Argentina*. UCO. ETSIAM.

Artukoglu, M.M., Olgun, A., Adanacioglu, H. (2010) "The efficiency analysis of organic and conventional olive farms: Case of Turkey", *Agricultural Economics – Czech*, 56(2), 89– 96.

Asmild, M., Hougaard, J.L. (2006) "Economic versus environmental improvement potentials of Danish pig farms", *Agricultural Economics*, 35, 171–181.

Asmild, M., Baležentis, T., Hougaard, J.L., (2016) Multi-directional program efficiency: the case of Lithuanian family farms, *Journal of Productivity Analysis*, 45(1), 23-33.

Atici, K.B., Podivnoski, V.V. (2015) Using data envelopment analysis for the assessment of technical efficiency of units with different specialisations: An application to agriculture, *Omega*, 54, 72-83.

Balcombe, K., Davidova, S., Latruffe, L. (2008a) "The use of bootstrapped Malmquist indices to reassess productivity change findings: an application to a sample of Polish farms", *Applied Economics*, 40(16), 2055–2061.

- Balcombe, K., Fraser, I., Latruffe, L., Rahman, R., Smith, L. (2008b) An application of the DEA double bootstrap to examine sources of efficiency in Bangladesh rice farming, *Applied Economics*, 40, 1919-1925.
- Balcombe, K., Fraser, I., Kim, J.H. (2006) "Estimating technical efficiency of Australian dairy farms using alternative frontier methodologies", *Applied Economics*, 38(19), 2221– 2236.
- Beltrán-Esteve, M. and Reig-Martínez, E. (2014) Comparing conventional and organic citrus grower efficiency in Spain, *Agricultural Systems*, 129, 115-123.
- Beltrán-Esteve, M. (2013) Assessing technical efficiency in traditional olive groves systems: A directional metadistance function approach, *Economía Agraria y Recursos Naturales*, Vol 13, 2. 53-76.
- Bogetoft, P., Boye, K., Neergaard-Petersen, H., Nielsen, K. (2007) "Reallocating sugar beet contracts: can sugar production survive in Denmark?", *European Review of Agricultural Economics*, 34 (1), 1–20.
- Bojnec, Š., Latruffe, L. (2009) "Determinants of technical efficiency of Slovenian farms", *Post-Communist Economies*, 21(1), 117–124.
- Bolandnazar, E., Keyhani, A., Omid, M. (2014) Determination of efficient and inefficient greenhouse cucumber producers using Data Envelopment Analysis approach, a case study: Jiroft city in Iran. *Journal of Cleaner Production*, 79, 108-115.
- Brümmer, B. (2001) "Estimating confidence intervals for technical efficiency: the case of private farms in Slovenia", *European Review of Agricultural Economics*, 28(3), 285–306.
- Cherchye, L., Van Puyenbroeck, T. (2007) "Profit efficiency analysis under limited information with an application to German farm types", *Omega*, 35, 335–349.
- Chambers, R.G., Hailu, A., Quiggin, J. (2011) Event-specific data envelopment models and efficiency analysis, *The Australian Journal of Agricultural and Resource Economics*, 55, 90-106.
- Coelli, T., Rahman, S., Thirtle, C. (2002) "Technical, Allocative, Cost and Scale Efficiencies in Bangladesh Rice Cultivation: A Non-parametric Approach", *Journal of Agricultural Economics*, 53(3), 607–626.
- Davidova, S., Latruffe, L. (2007) "Relationships between Technical Efficiency and Financial Management for Czech Republic Farms", *Journal of Agricultural Economics*, 58(2), 269–288.
- De Koeijer, T.J., Wossink, G.A.A., Struik, P.C., Renkema, J.A. (2002) Measuring agricultural sustainability in terms of efficiency: the case of Dutch sugar beet growers. *Journal of Environmental Management*, 66, 9–17.
- Dimara, E., Pantzios, C.J, Skuras, D., Tsekouras, K. (2005) The impacts of regulated notions of quality on farm efficiency: A DEA application, *European Journal of Operational Research*, 161, 416-431

- Dhungana, B.R., Nuthall, P.L., Nartca, G.V. (2004) "Measuring the economic inefficiency of Nepalese rice farms using data envelopment analysis", *The Australian Journal of Agricultural and Resource Economics*, 48(2), 347–369.
- Färe, R., Grabowski, R., Grasskopf, S., Kraft, S. (1997) "Efficiency of a fixed but allocatable input: A non-parametric approach", *Economics Letters*, 56, 187–193.
- Fraser, I., Cordina, D. (1999) "An application of data envelopment analysis to irrigated dairy farms in Northern Victoria, Australia", *Agricultural Systems*, 59, 267–282.
- Frija, A., Wossink, A., Buysse, J., Speelman, S., Huylenbroeck, G.V., (2011) Irrigation pricing policies and its impact on agricultural inputs demand in Tunisia: A DEA-based methodology, *Journal of Environmental Management*, 92, 2109-2118
- Gadanakis, Y., Bennett, R., Park, J., Areal, F.J. (2015) Evaluating the Sustainable Intensification of arable farms, *Journal of Environmental Management*, 150, 288-298
- Galanopoulos, K., Aggelopoulos, S., Kamenidou, I., Mattas, K. (2006) "Assessing the effects of managerial and production practices on the efficiency of commercial pig farming", *Agricultural Systems*, 88, 125–141.
- Garcia, A.F., Shively, G.E. (2011) "How Might Shadow Price Restrictions Reduce Technical Efficiency? Evidence from a Restricted DEA Analysis of Coffee Farms in Vietnam", *Journal of Agricultural Economics*, 62(1), 47–58.
- Geta, E., Bogale, A., Kassa, B. Elias, E. (2013) Productivity and Efficiency Analysis of Smallholder Maize Producers in Southern Ethiopia, *Journal of Human Ecology*, 41 (1) 67-75
- Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B., Souza, G.S.S., Angulo Meza, L., Mangabeira, J.A.C. (2009) Efficiency and sustainability assessment for a group of farmers in the Brazilian Amazon, *Annals of Operational Research*, 169, 167-181
- Gómez-Limón, J.A., Picazo-Tadeo, A.J., Reig-Martínez, E., (2012) Eco-efficiency assessment of olive farms in Andalusia, *Land Use Policy*, 29, 395-406
- Grazhdaninova, M., Lerman, Z. (2005) "Allocative and Technical Efficiency of Corporate Farms in Russia", *Comparative Economic Studies*, 47, 200–213.
- Guesmi, B., Serra, T., Featherstone, A. (2015) Technical efficiency of Kansas arable crop farms: a local maximum likelihood approach, *Agricultural Economics*, 46 (6) 703-713
- Headey, D. Alauddin, M., Rao, D.S.P.(2010) Explaining agricultural productivity growth: an international perspective, *Agricultural Economics*, 41, 1-14
- Helfand, S.M., Levine, E.S. (2004) "Farm size and the determinants of productive efficiency in the Brazilian Center-West", *Agricultural Economics*, 31, 241–249.
- Hoang, V-N, Alauddin, M. (2012) Input-Orientated Data Envelopment Analysis Framework for Measuring and Decomposing Economic, Environmental and Ecological Efficiency: An Application to OECD Agriculture, *Environmental and Resource Economics*, 51, 431-452

- Hossain, M.K., Kamil, A.A., Masron, T.A., Baten, M.A., (2013) Impact of environmental factors on efficiency of rice production in Bangladesh, *Journal of Applied Sciences*, 13 (4), 564-571
- Hussain, I., Marikar, F., Jehangir, W. A. (2000). Productivity and performance of irrigated wheat farms across canal commands in the Lower Indus Basin, 44. *IWMI*.
- Houshyar, E., Azadi, H., Almassi, M., Davoodi, M.J.S. and Witlox, F. (2012) Sustainable and efficient energy consumption of corn production in Southwest Iran: Combination of multi-fuzzy and DEA modeling, *Energy*, 44, 672-681
- Iráizoz, B., Rapún, M., Zabaleta, I. (2003) "Assessing the technical efficiency of horticultural production in Navarra, Spain", *Agricultural Systems*, 78, 387–403.
- Jha, R., Chitkara, P., Gupta, S. (2000) "Productivity, technical and allocative efficiency and farm size in wheat farming in India: a DEA approach", *Applied Economics Letters*, 7, 1–5.
- Karagiannis, G. and Tzouvelekas, V. (2009a). Measuring technical efficiency in the stochastic varying coefficient frontier model. *Agricultural Economics*, 40 (4): 389-396.
- Karagiannis, G. and Tzouvelekas, V. (2009b). Parametric measurement of Time- Varying technical inefficiency: Results from competing models. *Agricultural Economics Reviews*, 10 (1), 50-79.
- Kashiwagi, Kawachi, Sayadi, Isoda. (2012). Technical efficiency of Olive Growing Farms in Tunisia and Potential demand for olive oil in Japan. *Journal of Arid Land Studies*. 22 (1), 45-48 (2012)
- Khoshnevisan, B., Bolandnazar, E., Barak, S., Shamshirband, S., Maghsoudlou, H., Altameem, T.A., Gani, A., (2015) A clustering model based on an evolutionary algorithm for better energy use in crop production, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 29 (8), 1921-1935
- Kim, J.M. (2001) "Efficiency Analysis of Sustainable and Conventional Farms in the Republic of Korea with Special Reference to the Data Envelopment Analysis (DEA)", *Journal of Sustainable Agriculture*, 18(4), 9–26.
- Kleinhanß, W., Murillo, C., San Juan, C., Sperlich, S. (2007) "Efficiency, subsidies and environmental adaptation of animal farming under CAP", *Agricultural Economics*, 36, 49–64.
- Lambarra, F., Serra, T. and Gil, J.M. (2007). Technical efficiency analysis and decomposition of productivity growth of Spanish olive farms. *Spanish Journal of Agricultural Research*, 5 (3), 259-270
- Lansik, A.O., Pietola, K., Bäckman, S. (2002) Efficiency and productivity of conventional and organic farms in Finland 1994–1997, *European Review of Agricultural Economic*, 29 (1), 51-65
- Latruffe, L., Fogarasi, J., Desjeux, Y. (2012) Efficiency, productivity and technology comparison for farms in Central and Western Europe: The case of field crop and dairy farming in Hungary and France, *Economic Systems*, 36, 264–278.
- Latruffe, L., Balcombe, K., Davidova, S., Zawalinska, K. (2004) "Determinants of technical efficiency of crop and livestock farms in Poland", *Applied Economics*, 36(12), 1255–1263.

Latruffe, L., Davidova, S., Balcombe, K. (2008a) "Application of a double bootstrap to investigation of determinants of technical efficiency of farms in Central Europe", *Journal of Productivity Analysis*, 29, 183–191.

Latruffe, L., Guyomard, H., Le Mouël, C. (2008b) "Impact of CAP Direct Payments on French Farms' Managerial Efficiency", 12th Congress of the European Association of Agricultural Economists – EAAE.

Lilienfeld, A., Asmild, M. (2007) Estimation of excess water use in irrigated agriculture: A Data Envelopment Analysis approach, *Agricultural Water Management*, 94, 73-82.

Luik, H., Seinlenthal, J., Värnik, R. (2009) "Measuring the input-orientated technical efficiency of Estonian grain farms in 2005–2007", *Food Economics - Acta Agriculturae Scandinavica*, Section C, 6, 204–210.

Malana, N., Malano, H.M.(2006) Benchmarking productive efficiency of selected wheat areas in Pakistan and India using Data Envelopment Analysis, *Irrigation and Drainage*, 55, 383-394

Mathijs, E., Vranken, L. (2000) "Farm restructuring and efficiency in transition: evidence from Bulgaria and Hungary", Selected Paper, American Agricultural Economics Association Annual Meeting, Tampa, Florida, July 30–August 2.

Masuda, K. (2016) Measuring eco-efficiency of wheat production in Japan: a combined application of life cycle assessment and data envelopment analysis, *Journal of Cleaner Production*, 126, 373-381.

Mihci, H., Mollavelioğlu, S (2011) An Assessment of Sustainable Agriculture in the OECD Countries with Special Reference to Turkey, *New Mediterranean Journal of Economics Agriculture and Environment*, 2, 4-17

Millian, J.A., Aldaz, N. (1998) "Agricultural productivity of the Spanish regions: a nonparametric Malmquist analysis", *Applied Economics*, 30, 875–884.

Mollavelioğlu, S., Mihci, H., Cagatay, S., Ulucan, A. (2010) Assessment of sustainability of the European Union and Turkish Agricultural sectors, *A New Mediterranean Journal of Economics Agriculture and Environment*, Vol IX, no.3.

Monchuk, D.C., Chen, Z., Bonaparte, Y. (2010) Explaining production inefficiency in China's agriculture using data envelopment analysis and semi-parametric bootstrapping, *China Economic Review*, 21, 346-354.

Mobtaker, H.G., Taki, M., Salehi, M., Shahamat, E.Z. (2013) Application of nonparametric method to improve energy productivity and CO2 emission for barley production in Iran, *Agricultural Engineering International*, 15, 4, 84-93.

Mohammadi, A., Rafiee, S., Jafari, A., Keyhani, A., Dalgaard, T., Trydeman Knudsen, M., Nguyen, T.L.T., Borek, R., Hermansen, J.E. (2015) Joint Life Cycle Assessment and Data Envelopment Analysis for the benchmarking of environmental impacts in rice paddy production, *Journal of Cleaner Production*, 106, 521-532.

- Morrison Paul, C., Nehring, R., Banker, D., Somwaru, A. (2004) "Scale Economies and Efficiency in U.S. Agriculture: Are Traditional Farms History?", *Journal of Productivity Analysis*, 22, 185–205.
- Mousavi-Avval, S.H., Rafiee, S., Jafari, A., Mohammadi, A. (2011) Optimization of energy consumption for soybean production using Data Envelopment Analysis (DEA) approach, *Applied Energy*, 88 (11), 3765-3772.
- Mousavi-Avval, S.H., Mohammadi, A. and Rafiee, Tabatabaeefar, A. (2012) Assessing the technical efficiency of energy use in different barberry production systems, *Journal of Cleaner Production*, 27, 126-132.
- Nabavi-Pelesaraei, A., Abdi, R., Ra, S., Mobtaker, H.G. (2014) Optimization of energy required and greenhouse gas emissions analysis for orange producers using data envelopment analysis approach, *Journal of Cleaner Production*, 65, 311-317.
- Nargis, F. Lee, S.H. (2013) Efficiency analysis of boro rice production in north-central of Bangladesh, *The Journal of Animal & Plant Sciences* 23 (2), 527-533.
- Nassiri, S.M., Singh, S. (2009) Study on energy use efficiency for paddy crop using data envelopment analysis (DEA) technique, *Applied Energy*, 86, 1320-1325.
- Ndlovu, P.V., Mazvimavi, K.,H., Murendo, C. (2014) Productivity and efficiency analysis of maize under conservation agriculture in Zimbabwe, *Agricultural Systems*, 124, 21-31.
- Nguyen, T.T., Hoang, V-N., Seo, B. (2012) Costs and environmental efficiency of rice farms in South Korea, *Agricultural Economics*, 43, 369-378.
- Odeck, J. (2007) Measuring technical efficiency and productivity growth: a comparison of SFA and DEA on Norwegian grain production data, *Applied Economics*, 39, 2617-2630.
- Odeck, J. (2009) "Statistical precision of DEA and Malmquist indices: A bootstrap application to Norwegian grain producers", *Omega*, 37, 1007–1017.
- Ören, M.N., Alemdar, T. (2006) Technical Efficiency Analysis of Tobacco Farming in Southeastern Anatolia, *Turkish Journal of Agriculture and Forestry*, 30, 165-172.
- Pahlavan, R. Omid, M., Rafie, S. Mousavi-Avval, S.H. (2012) Optimization of energy consumption for rose production in Iran, *Energy for Sustainable Development*, 16, 236-241.
- Pahlavan, R., Omid, M., Akram, A. (2011) Energy use efficiency in greenhouse tomato production in Iran, *Energy*, 36, 6714-6719.
- Pardo, M., Ruiz, D., Rodríguez, J.J., Martos, J., Lara, P. (2001) Aplicación de la metodología DEA en la medida de la eficiencia de la producción de la leche en Córdoba. En: IV Congreso de la Asociación de Economía Agraria, Pamplona.
- Pascual, U. (2005) Land use intensification potential in slash-and-burn farming through improvements in technical efficiency, *Ecological Economics*, 52, 497-511.
- Picazo-Tadeo, A.J., Gómez-Limón, J.A., Reig-Martínez, E. (2011) Assessing farming eco-efficiency: A Data Envelopment Analysis approach, *Journal of Environmental Management*, 92, 1154-1164.

- Piot-Lepetit, I., Vermersch, D., Weaver, R.D. (1997) "Agriculture's environmental externalities: DEA evidence for French agriculture", *Applied Economics*, 29, 331–338.
- Ray, S.C., Ghose, A. (2014) Production efficiency in Indian agriculture: An assessment of the post green revolution years, *Omega*, 44, 58-69.
- Reig-Martínez, E., Picazo-Tadeo, A.J. (2004) "Analysing farming systems with Data Envelopment Analysis: citrus farming in Spain", *Agricultural Systems*, 82, 17–30.
- Reinhard, S., Knox Lovell, C.A., Thijssen, G.J. (2000) Environmental efficiency with multiple environmentally detrimental variables; estimated with SFA and DEA, *European Journal of Operational Research*, 121, 287–303.
- Rodríguez-Díaz, J.A., Camacho-Poyato, E., López-Luque, R. (2004) "Application of Data Envelopment Analysis to Studies of Irrigation Efficiency in Andalusia", *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 130(3), 175–183.
- Skevas, T., Stefanou, S.E., Lansik, A.O. (2014) Pesticide use, environmental spillovers and efficiency: A DEA risk-adjusted efficiency approach applied to Dutch arable farming, *European Journal of Operational Research*, 237 (2), 658-664.
- Thiele, H., Brodersen, C.M. (1999) "Differences in farm efficiency in market and transition economies: empirical evidence from west and east Germany", *European Review of Agricultural Economics*, 26, 331–347.
- Tipi, T., Rehber, E. (2006) Measuring technical efficiency and total factor productivity in agriculture: The case of the South Marmara region of Turkey, *New Zealand Journal of Agricultural Research*, 49, 137-145.
- Tzouvelekas, V., Pantzios, C.J., Fotopoulos, C. (2003) Technical efficiency of alternative farming systems: the case of Greek organic and conventional olive-growing farms, *Food Policy* 26, 549–569.
- Ullah, A., Perret, S.R. (2014) Technical- and environmental-efficiency analysis of irrigated cotton-cropping systems in Punjab, Pakistan using Data Envelopment Analysis, *Environmental Management*, 54, 288–300
- Ullah, A., Perret, S.R., Gheewala, S.H., Soni, P. (2016) Eco-efficiency of cotton-cropping systems in Pakistan: an integrated approach of life cycle assessment and data envelopment analysis, *Journal of Cleaner Production*, 134, 623-632
- Vicario, V., Dios, R., Martínez, D. (2000). La eficiencia técnica en las explotaciones multicultivo de la provincia de Córdoba mediante DEA. Una comparación con los métodos paramétricos. In: IV Congreso de la Asociación de Economía Agraria, Pamplona
- Vlontzos, G., Niavis, S., Manos, B. (2014). A DEA approach for estimating the agricultural energy and environmental efficiency of EU countries, *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 70, 91-96
- Wadud, A. (2003) "Technical, Allocative, and Economic Efficiency of Farms in Bangladesh: A Stochastic Frontier and DEA Approach", *The Journal of Developing Areas*, 37(1), 109–126.

Wossink, A., Denaux, Z. S. (2006) "Environmental and cost efficiency of pesticide use in transgenic and conventional cotton production", *Agricultural Systems*, 90, 312–328.

Zhu, X., Karagiannis, G., Oude Lansink, A.G.J.M. (2008). Analyzing the impact of direct subsidies on the performance of the Greek Olive Farms with a non-monotonic efficiency effects model. 12th Congress of the European Association of Agricultural Economists – EAAE 2008.

8. ANEXOS

8.1. Anexo 1. Código del modelo en LINGO V14

```
SETS:
!conjuntos primitivos;
ENTRADA/1,2/:XSOL;
SALIDA/1/:YSOL,WK,MUSOL_K,YMAX,YMIN;
VBLE/1,2,3/:VSOL,WR,MUSOL_R,VMAX,VMIN,VIDEAL;
DMU/1..32/;;

!conjuntos derivados;
ITERACION(DMU):LANDA;
DMU_ENTRADA(DMU,ENTRADA):X;
DMU_SALIDA(DMU,SALIDA):Y,MU_K,YSOLT,MUSOLY;
DMU_VBLE(DMU,VBLE):V,MU_R;
VBLE_DMU(VBLE,DMU):MUSOLR,VSOLT;
ENDSETS

DATA:
!Importamos los datos desde una hoja excel;
X,Y,V,WK,WR,MU_K,MU_R,YMAX,YMIN,VMAX,VMIN,VIDEAL =
@OLE ('C:\PROYECTO\OLIVEGROVE.xls', 'X', 'Y', 'V', 'WK', 'WR', 'MU_AK', 'MU_NR', 'YAMAX', 'YAMIN', 'VNMAX', 'VNMIN', 'VIDEAL');

ENDDATA

SUBMODEL Interval:
!Funcion objetivo;
MAX= @SUM(VBLE(R):WR(R)*(MUSOL_R(R)-MU_R(T,R)))+@SUM(SALIDA(K):WK(K)*(MUSOL_K(K)-MU_K(T,K)));

!Restricciones;
!TECNOLOGIA;
@FOR(ENTRADA(I):
    @SUM(DMU(J):
        LANDA(J)*X(J,I)) <= X(T,I));
@FOR (SALIDA(K):
    @SUM(DMU(J):
        LANDA(J)*Y(J,K)) = YSOL(K));
@FOR (SALIDA(K):
    YSOL(K) >= Y(T,K));
@FOR (VBLE(R):
    @SUM(DMU(J):
        LANDA(J)*V(J,R)) = VSOL(R));
```

```

!RESTRICCIONES PARA VARIABLES NO MONOTONAS;
@FOR (VBLE(R):
      MUSOL_R(R)>=MU_R(T,R));

@FOR (VBLE(R):
      MUSOL_R(R)<=(VSOL(R)-VMIN(R))/(VIDEAL(R)-VMIN(R)));

@FOR (VBLE(R):
      MUSOL_R(R)<=(VMAX(R)-VSOL(R))/(VMAX(R)-VIDEAL(R)));

!RESTRICCIONES PARA VARIABLE PRODUCCION;
@FOR (SALIDA(K):
      MUSOL_K(K)>=MU_K(T,K));

@FOR (SALIDA(K):
      MUSOL_K(K)<=(YSOL(K)-YMIN(K))/(YMAX(K)-YMIN(K)));

!RESTRICCIONES VRS;
@SUM(DMU(J):LANDA(J))=1;

!RESTRICCIONES DE VALORES DE LAS VARIABLES ;
@FOR (VBLE(R):
      MUSOL_R(R)<=1;
);

@FOR (SALIDA(K):
      MUSOL_K(K)<=1;
);

@FOR (DMU(J): LANDA(J)>=0);

@FREE (YSOL(1));

ENDSUBMODEL

CALC:
@SET( 'TERSEO', 2);

@FOR (ITERACION(ITER):

T=ITER;

@SOLVE(Interval);

@FOR (SALIDA(K):
      YSOLT(ITER,K)=YSOL(K);
      MUSOLY(ITER,K)=MUSOL_K(K);

YSOLT(ITER,K)=YSOL(K);
MUSOLY(ITER,K)=MUSOL_K(K);
);

@FOR (VBLE(R):
      VSOLT(R,ITER)=VSOL(R);
      MUSOLR(R,ITER)=MUSOL_R(R);
);

);

ENDCALC

```