

---

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear

Modelización Tridimensional del Transporte

Oceánico de  $^{137}\text{Cs}$  Forzado por Vientos.

Validación en el Mar Báltico  
tras el Accidente Nuclear de Chernobyl

TESIS DOCTORAL

Autor: Manuel Toscano Jiménez

Director: José María Abril Hernández

Tutor: Manuel García León

Universidad de Sevilla, 2012

---

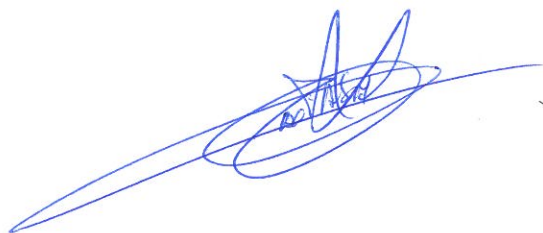


---

D. **José María Abril Hernández**, Catedrático de Universidad del Departamento Física Aplicada I de la Universidad de Sevilla, y D. **Manuel García León**, Catedrático de Universidad del Departamento Física Atómica, Molecular y Nuclear de la Universidad de Sevilla,

CERTIFICAN que la presente memoria, titulada “*Modelización Tridimensional del Transporte Oceánico de  $^{137}\text{Cs}$  Forzado por Vientos. Validación en el Mar Báltico tras el Accidente Nuclear de Chernobyl*”, ha sido realizada por D. **Manuel Toscano Jiménez**, bajo nuestra dirección y tutoría, respectivamente, para optar al grado de Doctor en Física.

Para que conste, en cumplimiento de la normativa vigente, firmamos el presente certificado en Sevilla, a veintidós de octubre de 2012.



Fdo.: José María Abril Hernández  
Director de la tesis



Fdo.: Manuel García León  
Tutor de la tesis

---



---

## AGRADECIMIENTOS

---

A Nani, mi mujer, por su apoyo incondicional a lo largo de esta larga y difícil carrera investigadora. Siempre está ahí, luchadora las veinticuatro horas del día, positiva e inteligente. Sin su paciencia infinita, esto no hubiera sido posible.

A mis padres, Manuel y Concha, personas de bien hechas a sí mismas que no conocen otro camino que el de la sencillez y la entrega a sus hijos en cuerpo y alma. De ellos sigo aprendido a disfrutar con alegría de las cosas pequeñas y a mirar con serenidad, aún en los peores momentos. A mis hermanos, por todo lo que he aprendido de ellos y con ellos.

La primera mitad de mi carrera investigadora (1998–2005) se consolidó con el reconocimiento de un sexenio de investigación por la Comisión Nacional de Evaluación de la Actividad Investigadora (CNEAI), que pude solicitar por mi condición de profesor titular de escuela universitaria. La segunda mitad (2005–2012) es la que trata de consolidarse con esta memoria de tesis doctoral.

A José María Abril, que apareció como agua de mayo en la segunda mitad de mi carrera investigadora, por su intachable labor de revisión de esta memoria de tesis doctoral, y a Manuel García León, por ser mi tutor desde la época de los cursos de doctorado en la Facultad de Física, de tan tierno recuerdo.

A todos mis compañeros del Departamento de Física Aplicada de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla. Con mención especial al grupo joven, nacidos en los años sesenta y setenta, que ingresaron en el departamento en su época expansiva dirigida por Marcelo Rodríguez Danta, y que son, sin lugar a dudas, una buena muestra de lo mejor que pasó por las aulas universitarias españolas durante los años ochenta y noventa. De ellos es muy fácil aprender, y son los testigos más fidedignos de lo que aparece en estos agradecimientos y de la evolución de mi carrera científica y docente. A mis amigos, especialmente a Pepe, Tete, Pablo y Santiago, por su apoyo y respeto permanentes.

A mis hijos, Inmaculada y Fernando, por la alegría que nos dan cada día.

Iniciar una carrera científica cuando se está trabajando nunca ha sido fácil, como sabemos los que hemos emprendido este camino científico siendo ya profesores en una escuela técnica española, donde el trabajo docente es muy acaparador, y donde personas de gran valía intelectual conocidas y apreciadas por nosotros han tenido que abandonar para no desatender su vocación y obligación docentes. Hasta ahí, la cosa puede ser llevadera. Lo malo es que si surgen obstáculos como los que autor de esta memoria ha tenido que superar, el sendero se empina muchísimo más, se embarra y se vuelve, como llegó a decir un amigo mío “heroico”. Yo no diría tanto, pero es probable que a muchas personas que aparecéis implícita o explícitamente en estos agradecimientos, y que me habéis ayudado y acompañado estos largos años, muchas veces desde el más respetuoso silencio, os haya dado un pellizquito en el corazón como me ha ocurrido a mí al releer este párrafo.

A todos vosotros, muchas gracias.

---



---

<b>1. Introducción General y Objetivos de la Tesis</b> .....	11
1. Normativa y formato de esta tesis doctoral .....	11
2. Contexto académico de la tesis .....	12
3. Elección del tema y objetivo general de la tesis .....	14
4. Objetivos específicos de la tesis .....	19
<b>2. Hidrodinámica General de un Fluido Oceánico</b> .....	23
1. Introducción .....	23
2. Ecuación de continuidad y variación de la cantidad de movimiento .....	24
3. Influencia de la viscosidad .....	31
4. Turbulencia y ecuaciones de Navier-Stokes promediadas .....	37
5. Ecuaciones de movimiento del fluido oceánico .....	52
6. Caso particular: el problema de Ekman simple .....	54
7. Ecuación de advección-difusión: transporte de materia .....	67
<b>3. Descripción General del Mar Báltico y de sus Procesos Físicos</b> .....	70
1. Situación geográfica, dimensiones, batimetría y origen glacial del mar Báltico .....	70
2. El espectro de corrientes en el mar Báltico. Aplicación de filtros y difusión .....	74
3. Circulación media en el mar Báltico inducida por vientos .....	77
4. Descripción de los vientos sobre el mar Báltico .....	79
5. Distribución de la salinidad en el mar Báltico .....	80
6. La influencia del hielo en la circulación del mar Báltico .....	83

<b>4. La Circulación en el Mar Báltico y su modelización</b> .....	89
1. Introducción. Modelos hidrodinámicos previos del mar Báltico .....	89
2. Modelo previo 3D del mar Báltico: modelo de circulación media .....	93
3. Modelo previo de corrientes estacionarias del mar Báltico: Modelo de 8 vientos .....	108
4. Adaptación de los modelos previos a nuestra malla de cálculo .....	135
5. Generalidades de los dos modelos de circulación adaptados a esta tesis .....	136
<b>5. La Difusión en el Mar Báltico y su Modelización</b> .....	153
1. La energía de las corrientes en el Mar Báltico .....	153
2. Difusión diaria: factores influyentes, datos experimentales y estimaciones .....	156
3. Sobre la relación entre las diferentes escalas de turbulencia .....	169
4. La modelización de la difusión .....	171
5. Estabilidad y difusión vertical .....	174
6. Otras fuentes de difusión según resolución espacial o temporal del modelo .....	182
<b>6. Métodos matemáticos para las ecuaciones de transporte</b> .....	191
1. Introducción .....	191
2. Método de diferencias finitas y algoritmos de limitación de flujo en una, dos y tres dimensiones .....	192
3. Introducción al método lagrangiano de Monte Carlo .....	205
4. Calibración y aplicaciones del método lagrangiano de Monte Carlo .....	207
<b>7. Modelo Lagrangiano de Transporte Conservativo</b> .....	226



---

1. Introducción general .....	226
2. Estadística de los vientos en el mar Báltico y su modelización .....	227
3. Aplicación primera: la mancha inicial del Golfo de Finlandia .....	232
4. Aplicación segunda: el Mar Báltico .....	244
5. Aplicación tercera: aplicación al río Guadalquivir. Transporte de salinidad.....	254
<b>8. Materia en Suspensión y su Modelización .....</b>	<b>259</b>
1. Aspectos generales de la materia en suspensión en el océano .....	259
2. Dinámica general de partículas suspendidas en el océano .....	262
3. Cálculo de la tensión de fondo a partir del modelo hidrodinámico .....	264
4. Modelo de transporte de la materia en suspensión .....	274
<b>9. Modelo del Transporte No Conservativo de Radionúclidos .....</b>	<b>297</b>
1. Introducción .....	297
2. Fases: disuelta y sólida en suspensión o sedimento .....	297
3. Equilibrio y cálculo de las probabilidades de transición de fase .....	301
4. Modelo de transporte, resultados y validación .....	304
<b>10. Sumario, Conclusiones y Trabajo Futuro .....</b>	<b>316</b>
1. Sumario y conclusiones .....	316
2. Trabajo futuro en relación a esta tesis doctoral .....	321
<b>A. Anexos</b>	
1. Bibliografía .....	326



# Capítulo 1

## Introducción General y Objetivos de la Tesis

### 1. NORMATIVA Y FORMATO DE ESTA TESIS DOCTORAL

La normativa sobre estudios de doctorado de la Universidad de Sevilla (BOUS, número 4, de 13 de julio de 2011; artículo 13) contempla dos posibilidades en lo que al formato de tesis doctoral se refiere:

(a) Formato 1: Conjunto de trabajos.

Este formato exige que el alumno, fruto de sus estudios de doctorado, tenga un mínimo de dos artículos publicados o aceptados, o capítulos de libro, o un libro, debiendo ser el doctorando preferentemente el primer autor, aunque bajo ciertas condiciones expuestas en la normativa puede éste ocupar otras posiciones en lo que a la firma se refiere. El autor de esta memoria reúne los requisitos para presentar la tesis bajo este formato, ya que la mayor parte de sus publicaciones ha sido evaluadas por la CNEAI que le concedió un sexenio de investigación (2000–2005), evaluación a la que tuvo derecho por su condición de profesor titular de escuela universitaria en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla; la documentación para la evaluación del sexenio incluye una memoria de los trabajos y un curriculum vitae. Aunque el formato elegido para esta tesis doctoral es el tradicional –formato más largo–, no se va a renunciar, en determinados momentos, a un estilo más directo.

## (b) Formato 2: Tesis tradicional.

Esta memoria de tesis estaba en un estado de redacción muy avanzado cuando se aprobó la normativa que contempla la posibilidad del formato anterior, por ello, el formato 2 es el elegido aquí, si bien, en determinados momentos de la memoria, el autor se apoyará en desarrollos, argumentos o resultados de sus publicaciones, y para no alargar demasiado la exposición, será más conciso y resultadista, en una línea similar a las tesis presentadas según el formato 1.

El hecho de que la normativa de tesis doctoral reconozca de algún modo la importancia de que el doctorando vaya consolidando paralelamente su currículum sitúa a la tesis en un contexto más amplio. Es por ello que se ha introducido el siguiente apartado sobre el contexto académico de la tesis, donde mínimamente, se exponen algunos puntos curriculares del doctorando que ayudan a entender muchísimas cuestiones de la propia tesis.

## 2. CONTEXTO ACADÉMICO DE LA TESIS

Antes de iniciar la introducción a los contenidos estrictamente científicos de esta tesis doctoral y con objeto de que esta obra pueda entenderse y evaluarse mejor, es necesario señalar que la carrera investigadora del doctorando se divide en dos mitades, concretamente dos etapas consecutivas de siete años<sup>1</sup> –septenios– que se han desarrollado a la par que su actividad docente. Ambas etapas están relacionadas con la modelización del transporte de radionúclidos en el océano, mediante metodologías distintas.

(a) **Septenio 1998–2005. Sexenio de investigación 2000–2005** reconocido por la CNEAI.

Este periodo de investigación se inicia con posterioridad a una estancia de cuatro meses en la Universidad de Uppsala (Suecia) y se materializa después en varias publicaciones internacionales en revistas internacionales JCR y en actas de congresos internacionales –una de ellas premiada en el congreso OCEANS’2005 del IEEE en Brest, Francia– con revisión por pares tales que junto a la dedicación docente del autor de esta memoria, reconocida con varios premios a la docencia, fructifica con la superación de la oposición que da acceso al cuerpo de profesores titulares de escuela

---

<sup>1</sup>Estos periodos de siete años abarcan siete cursos, que en el caso 2005–2012 serían el 2005–2006, ..., 2011–2012; el sexenio de investigación es bien sabido que se trata de un conjunto de seis años naturales completos.

universitaria (nombramiento en B.O.E., 14 de enero de 2004) y con el reconocimiento por parte de la CNEAI (Comisión Nacional de la Evaluación de la Actividad Investigadora) de un sexenio de investigación correspondiente al periodo 2000–2005. Aquí se emplea una metodología más estadística, enlazando con los métodos compartimentales de las publicaciones de los años ochenta, considerando únicamente la parte difusiva del transporte en diferentes escalas y utilizando un esquema numérico euleriano.

(b) **Septenio 2005–2012. Tesis Doctoral.**

Se trata del periodo de investigación que se recoge en esta memoria para optar al grado de doctor en física. Aquí se emplea una metodología más dinámica, entrando más a fondo en los procesos físicos intervinientes, y considerando el transporte tanto advectivo inducido por vientos como el difusivo a diferentes escalas del espacio y del tiempo, junto con el transporte reactivo no conservativo ligado a la materia en suspensión, con una resolución temporal mayor que en la primera etapa; todo ello implementado numéricamente mediante una metodología lagrangiana. Como resultado del mismo se tienen algunas publicaciones que ya se comentarán. Puede decirse que esta metodología supera de algún modo a la desarrollada en primera etapa (1998–2005) y va a ser enviada a partir del otoño de 2012 para ser publicada en forma de varios artículos en revistas indexadas JCR. Otro reconocimiento durante este periodo a la trayectoria científica del doctorando ha sido su actuación como revisor en la revista *Continental Shelf Research*, a petición del profesor David Prandle, de artículos científicos relacionados con la modelización de la dispersión de radionúclidos provenientes de puntos singulares como la planta de reprocesamiento nuclear de La Hague (Francia), y la central nuclear de Fukushima tras el accidente del 11 de marzo de 2011. Como mérito académico añadido, se publica en 2008, a nombre del autor de esta memoria, el libro "Mecánica. Ingenieros Industriales. Segundo Curso" editado por el Servicio de Publicaciones de Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla.

Para finalizar este paréntesis sobre el contexto en que se ha desarrollado esta tesis, hay que señalar también que la obtención del grado de doctor por parte del autor de esta memoria no será sólo un logro académico sino que tendrá, gracias a su condición de profesor titular de escuela universitaria en posesión de un sexenio de investigación y de

tramos de docencia (quinquenios), consecuencias administrativas que se van a detallar a continuación.

Por cumplimiento de la ley de universidades vigente (Ley Orgánica 4/2007, de 12 de abril; B.O.E. 13/04/2007; punto 1, disposición adicional segunda) y del Real Decreto 1312/2007, las universidades han de transformar y están transformado<sup>2,3</sup> directamente (es decir, sin concurso–oposición) en profesores titulares de universidad, a todos los profesores titulares de escuela universitaria que reúnan las condiciones del párrafo anterior, que han sido previa y automáticamente acreditados como profesores titulares de universidad, gracias al citado real decreto.

Tras este inciso contextual, académico y administrativo, daremos paso por fin a la introducción de los contenidos científicos recogidos en esta memoria de tesis doctoral para optar al grado de doctor en física.

### 3. ELECCIÓN DEL TEMA Y OBJETIVO GENERAL DE LA TESIS

La radiactividad artificial en el Mar Báltico y en el Mar del Norte previa al accidente de Chernobyl ha sido medida durante la segunda mitad del siglo XX, teniendo su origen en las pruebas de armas atómicas de los años cincuenta y sesenta, y en las descargas líquidas de radionúclidos provenientes de las plantas europeas de reprocesamiento nuclear de Sellafield (Mar de Irlanda, Reino Unido) y La Hague (Canal de la Mancha, Francia).

En particular, en el Mar Báltico existe una larga tradición en las medidas y control de la radiactividad gracias a una labor heredada del impulso inicial dado por Rudolf Sievert (Stockholm, 1896–1966), figura relevante del surgimiento de la Seguridad Nuclear como nueva ciencia nuclear y de la Física Médica como rama de la física de radiaciones. Gracias a ello existe una gran información sobre radiactividad en el Mar Báltico, tanto anterior como posterior al accidente de Chernobyl, parte de la cual se usará para validación en esta tesis doctoral.

La contaminación externa y previa al desastre nuclear ha sido transportada al Mar Báltico a través de los estrechos de Dinamarca. Estos radionúclidos se fueron dispersando

---

<sup>2</sup>Informe estadístico 090631 del patronato de la ANECA: <http://www.aneca.es>

<sup>3</sup>Informe del Rector de la Universidad de Sevilla sobre la aplicación de la actual ley de presupuestos que no afecta a las transformaciones de profesores T.E.U. en T.U. por estar al margen de la oferta pública de empleo: [http://servicio.us.es/secgral/sites/default/files/informe Sr. Rector.pdf](http://servicio.us.es/secgral/sites/default/files/informe_Sr._Rector.pdf)

en el sistema a lo largo de las décadas de los años cincuenta, sesenta, setenta, y primera mitad de los ochenta, alcanzándose con el paso del tiempo cierta correlación con la salinidad (IAEA, 1984: [76]), que se traducía en una disminución suave de la concentración desde Kattegat hasta los puntos más septentrionales de la Bahía de Bothnia siguiendo una tendencia decreciente ligada a la de la salinidad de este mar atenuadamente salobre de sur a norte.

El accidente nuclear de Chernobyl tuvo lugar a la 1:23 (hora local) del sábado 26 de abril de 1986 mientras se realizaba una prueba con la intención de aumentar la seguridad del reactor.

El primer lugar fuera de la URSS donde se midieron (IAEA, 1986: [77]) las consecuencias de la catástrofe de Chernobyl fue en la central nuclear de Forsmark (Suecia), el 28 de abril de 1986, gracias a los detectores de radioactividad situados para medir fugas locales. Debido a que se detectaron partículas radiactivas en las ropas de trabajadores de la central, se examinó el origen de la fuga y se concluyó que la contaminación provenía de la atmósfera y no de la propia central.

El análisis de la evolución meteorológica del norte de Europa durante esos días, con vientos predominantes de origen SE (Sureste) apuntó la posibilidad de un accidente en alguna central nuclear de la Unión Soviética [148, 12].

Las primeras muestras de radioactividad en agua de mar se tomaron entre el 29 de Abril y el 14 de mayo de 1986. La variedad de radionúclidos artificiales fue muy grande, la mayoría de vida corta y con poco impacto sobre la naturaleza. Así, los radionúclidos de mayor impacto ambiental, durante años, fueron el  $^{137}\text{Cs}$  ( $T_{1/2} \simeq 30$  a) y el  $^{134}\text{Cs}$  ( $T_{1/2} \simeq 2$  a) que ofrecieron además la posibilidad de identificar la contribución por Chernobyl debido a la ratio  $^{134}\text{Cs}/^{137}\text{Cs}$  de actividad entre ambos, del orden de 1/2. De hecho era prácticamente nula la actividad de  $^{134}\text{Cs}$  previa al accidente.

Este accidente cambió completamente la situación radioecológica en el norte de Europa y en gran parte del resto del mundo. En el caso del Mar Báltico la radioactividad permaneció durante años debido a la naturaleza casi aislada del sistema como mar semi-cerrado, con tiempos típicos medios de residencia para las partículas fluidas que están en el orden de los treinta años.

Una parte importante de estas medidas (figura 1.1) se realizó a lo largo del crucero

científico internacional RV GAUSS que tomó medidas en 94 puntos del sistema a diferentes profundidades.

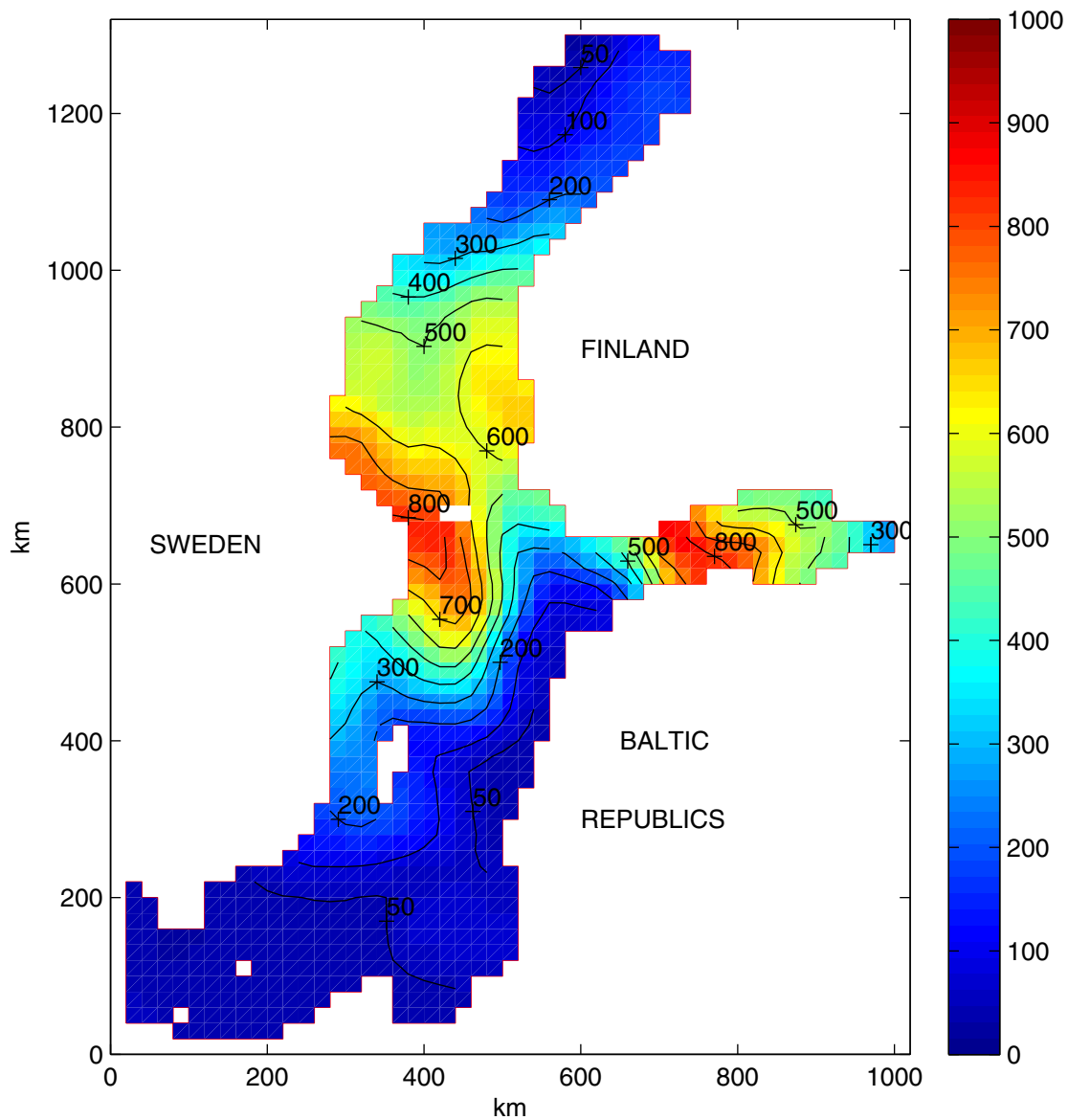


Figura 1.1: Actividad de  $^{137}\text{Cs}$  ( $\text{Bq m}^{-3}$ ) en la superficie del Mar Báltico durante Octubre de 1986, interpolada [189] a partir de medidas experimentales contenidas en la literatura [53, 54, 131].

Una cuestión destacable en estas medidas fue la influencia de la pinoquina (publica-



ción de la revista Nature [88] de 1987) que actuó como barrera limitando mucho el flujo de radionúclidos hacia zonas por debajo de la misma, fenómeno que tiene una mayor importancia en la mitad sur del Mar Báltico.

Respecto a la actividad previa en agua y en sedimentos, el dato importante es que la actividad de  $^{137}\text{Cs}$  anterior a Chernobyl, según indica la literatura [76, 66], aproximadamente uniforme en el Báltico y no muy variable con la profundidad. El valor de fondo de referencia se sitúa en torno a  $10\text{--}20\text{ Bq m}^{-3}$  lo que nos indica que los niveles de radiactividad en agua se multiplicaron en media por un factor 30 y convirtieron al Mar Báltico en el ecosistema fuera de la Unión Soviética más afectado por la catástrofe de Chernobyl.

El accidente de Chernobyl puso de manifiesto la debilidad [157] de los modelos existentes para hacer predicciones físicas en estas situaciones de emergencia. Existían a mediados de los años ochenta modelos oceánicos del Mar Báltico de diversa naturaleza alimentados por la tradición de la escuela escandinava de oceanografía y meteorología (V.W. Ekman 1874–1954, C.G. Rossby 1898–1957, V. Bjerkness 1862–1951, H. Sverdrup 1888–1957, M.Knudsen 1871–1949) vinculada desde antaño a las grandes empresas exploradoras (F. Nansen 1861–1930, R. Amundsen 1872–1928) de principios del siglo XX, y por otro lado, se disponía de una gran información experimental sobre la radiactividad del sistema antes y después del accidente, gracias en gran parte al largo recorrido de la seguridad nuclear en esta zona del mundo iniciado en la época de Sievert, que fue quien diseñó en los años cincuenta la pionera red de estaciones de radiación gamma origen de toda la estructura actual y la ley de seguridad nuclear sueca que data del año 1941. Lo paradójico es que cuando se produce el accidente de Chernobyl y se detectan las manchas de la figura 1.1 no había un modelo matemático específico que permitiera hacer predicciones sobre la evolución de las mismas. Y más paradójico aún es que más de una década después, el autor de esta tesis hace una estancia en la universidad de Uppsala (Suecia) y este problema sigue sin haberse empezado a resolver. Ese es el motivo por el que elegí este tema para iniciar mi carrera investigadora, la elaboración de un primer modelo del transporte de  $^{137}\text{Cs}$  en el Mar Báltico, validable con las medidas disponibles en la literatura, que pudiera suponer un apoyo más en la seguridad nuclear de escenarios similares en el futuro; y en sistemas oceánicos con analogías suficientes en la hidrodinámica, en los métodos matemáticos empleados, y en los fenómenos de transporte involucrados, que

pueden afectar por igual a la materia radiactiva y a la que no lo es, como la contaminación química, los nutrientes y las manchas de petróleo.

La necesidad de aportaciones a este campo floreciente de la física aplicada ha sido uno de los motores que han inspirado y motivado el trabajo que se presenta en esta tesis doctoral, haciendo trabajar en equipo a dos ramas de la ciencia como la Oceanografía y la Seguridad Nuclear, de largo recorrido en este escenario, pero no remando, al menos de una forma tan intensa como aquí, en la misma dirección, con el accidente de Chernobyl como catalizador.

La modelización del transporte radionúclidos tiene una primera etapa de modelos de cajas (o compartimentales) como el de Hallstadius [60] para el Mar del Norte y zonas adyacentes, o el de Nielsen [130] para todo el Atlántico Noreste. A esta familia pertenecen también el modelo de Scott [164] para los mares antárticos, el modelo de Sanchez-Cabeza [160] para el mar Mediterráneo, y el de Evans [33], específico para el sistema que aquí nos ocupa, el mar Báltico. Estos modelos de cajas son una primera aproximación al problema radioecología en el océano.

A este primer grupo de modelos le sucede una familia que son los modelos dinámicos de radionúclidos, que tienen en cuenta la posibilidad de variación temporal de los flujos del sistema, y se caracterizan por tener una componente hidrodinámica mayor. Hay que destacar el modelo de Prandle [149] para el Mar del Norte y los modelos de Abril [3, 4, 5, 6] sobre el mar de Irlanda, los dos últimos incluyendo ya incluso el transporte no conservativo de radionúclidos. La intensidad de modelos asociados al mar del Mar del Norte esta ligada a las cercanas centrales de reprocesamiento nuclear en Sellafield (Reino Unido) y La Hague (Francia). Hay que citar también el modelo de transporte para el Pacífico Sur [63] ligado a la dispersión de radionúclidos provenientes de las pruebas nucleares que Francia efectuó en su isla colonial de Mururoa desde los años sesenta hasta mediados de años noventa. En relación con otros sistemas oceánicos del planeta, también se publicaron, entre otros, un modelo sobre el canal de Suez [10, 11] y otro sobre un estuario atlántico de la zona SO de España [140].

Puede decirse que el modelo de Abril [3, 4] sobre el mar de Irlanda fue, tras su precedente de modelos de cajas de Hallstadius [60], el primer modelo radioecológico dinámico sobre un mar de corrientes gobernadas por las mareas. De manera paralela, el modelo aplicado al mar Báltico que se presenta en esta tesis doctoral y en sus publicaciones pre-

vias [187, 189], representaría, tras sus precedentes de modelos de cajas [33, 130], el primer modelo radioecológico dinámico tridimensional sobre un mar de corrientes gobernadas por el viento.

#### 4. OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE LA TESIS

Para llegar al objetivo general marcado en la tesis hay que ir cubriendo una serie de etapas que de una manera casi cronológica se traducen en los capítulos del 4 al 9. Los capítulos 2 y 3 son de carácter básico para que un lector científico medio, no necesariamente especialista en esta área concreta, pueda adentrarse respectivamente en los fundamentos generales de la mecánica de fluidos de los sistemas oceánicos y en las particularidades físicas del sistema central bajo estudio, el Mar Báltico, que abrirán las puertas de los capítulos del 4 al 9, necesariamente más técnicos. El capítulo 10 se dedicará a las conclusiones generales y al trabajo futuro.

Los capítulos 4 y 5 establecerán el modelo hidrodinámico sobre el que se sostendrá el modelo completo y que adaptará el movimiento del fluido a nuestra malla de cálculo, de baja resolución, con celdas de dimensiones horizontales  $20\text{ km}\times 20\text{ km}$ . El modelo radioecológico de referencia existente para el Mar Báltico era un modelo compartimental de 7 cajas [33]; por ello, la elección estructural de un modelo con esta resolución es quizás el paso más natural, siguiendo la línea de otros investigadores, como Abril [3, 4] en sus modelos dispersión de radionúclidos aplicados al Mar de Irlanda.

Nuestro modelo, junto a todas sus simulaciones, va a ser ejecutado en una computadora estándar. Aunque nunca se ha descartado el uso de grandes computadoras, siempre ha habido cierta vocación de usar computadoras normales porque uno de los objetivos de este trabajo es que aplicaciones futuras puedan ser realizadas por tomadores de decisiones en situaciones de emergencia. Hay que decir que los cálculos finales de la tesis han puesto al límite la memoria RAM de la computadora. Superada esta primera fase más conceptual, será necesario, en las siguientes fases de este proyecto, alternar el uso de la pequeña y la gran computadora, conjugando el cálculo conceptual con el cálculo más detallado.

El modelo hidrodinámico tendrá dos partes: el modelo de circulación y el modelo de difusión.

- (a) El modelo de circulación (capítulo 4) será el de corrientes medias, llamadas también

corrientes de circulación, de advección, de convección, residuales, o simplemente corrientes. Estas corrientes son inducidas fundamentalmente por los vientos, ya que las mareas en el Mar Báltico son prácticamente despreciables. Este modelo será desarrollado con dos variantes que son la adaptación a nuestra malla de cálculo de sendos modelos previos de circulación del Mar Báltico: un modelo 3D [43] de corrientes medias anuales diseñado por Instituto Sueco de Meteorología e Hidrología (SMHI), que será adaptado a nuestra malla numérica tal cual, y se convertirá en el modelo más usado en esta tesis (capítulo 7, 8 y 9); y un modelo de 8 vientos [80] para corrientes estacionarias que será extendido simbólicamente a unas condiciones meteorológicas algo más generales así como implementado y validado numéricamente para un problema concreto 3D (capítulo 7). Este último será de gran utilidad cuando los vientos dominantes del fenómeno a estudiar sean distintos de los vientos típicos del modelo anual.

- (b) El modelo de difusión (capítulo 5) tendrá en cuenta los fenómenos de transporte asociados a la desviación del vector velocidad respecto a su valor medio; desviación que tiene una parte asociada al promedio temporal y otra debida al promedio espacial como consecuencia del tamaño de las celdas numéricas con las que vamos a trabajar. Una causa importante de la difusión horizontal será la desviación del vector de viento respecto del valor medio, que variará según sea la escala temporal de la ventana de filtrado: anual, mensual, semanal, diaria, horaria, etc. Los coeficientes de difusión van a ser grandes porque lo son tanto las escalas espaciales como las escalas temporales del problema. La difusión vertical estará gobernada por el grado de estratificación del sistema.
- (c) El capítulo 6 se encargará de poner sobre la mesa la metodología numérica necesaria para mover en el tiempo a las partículas de agua según el ritmo marcado por el modelo hidrodinámico, cuyo campo de velocidades se toma como conocido según detalles que se explican en la memoria. Se compararán y calibrarán en este capítulo el método de diferencias finitas (MDC) y el método de Monte Carlo (MMC), comentándose sus ventajas e inconvenientes.
- (d) El capítulo 7 supone una validación del modelo de transporte conservativo (la partículas se mueven en disolución con las del agua) en el Mar Báltico. Se validará el modelo total en dos aplicaciones, la primera, en relación con el Golfo de Finlandia, con

una escala temporal de unas diez semanas, sometida a la circulación del modelo de 8 vientos; y la segunda, en relación al Mar Báltico en su totalidad, con una escala temporal de unos diez meses, sometida a la circulación del modelo de corrientes anuales. Realmente, se trata del mismo problema dividido en dos, ya que las condiciones finales del primer problema son prácticamente las condiciones iniciales del segundo. En cada problema, o simulación, dominan unos determinados procesos físicos, de modo que ambas simulaciones se complementan entre sí para validar las diferentes partes del modelo en su globalidad, principalmente cuatro: circulación, difusión horizontal y movimientos verticales de difusión e intercambio de materia en la piconclina.

Se muestra a continuación una tabla resumen de las simulaciones más importantes del capítulo 7, ya que en él se ponen en práctica gran parte de la metodología presentada en los capítulos anteriores dedicados a la circulación (capítulo 4), difusión (capítulo 5) y métodos matemáticos (capítulo 6).

Tabla 1.1: Procesos físicos dominantes y modelos de circulación aplicados en cada problema del capítulo 7

Simulaciones del capítulo 7	Golfo de Finlandia	Mar Báltico completo
Procesos dominantes	Circulación, difusión vertical	Difusión horizontal, intercambio en la piconclina
Modelo de Circulación	8 vientos	Media anual

No todas ellas han sido validadas del golpe sino que, jugando con la información experimental disponible, se han hecho distintas simulaciones no todas igualmente sensibles a las distintas partes del modelo en su conjunto. Ambas simulaciones se corresponden con dos escalas de tiempo distintas, unas diez semanas y unos diez meses respectivamente

- i. En la simulación del Golfo de Finlandia (principio del capítulo 7) se trabaja en una escala temporal más corta y se valida de una manera aceptable la metodología de la modelo de circulación, con el centroide de la reciente (semanas posterior al accidente de Chernobyl) mancha nuclear báltica avanzando unos 150 km hacia el SO durante unos dos meses. También aquí se hace un buen ajuste y calibración de la difusión vertical en las capas más superficiales que gracias a su acoplamiento con la estructura vertical de la circulación consiguen reproducir la

práctica detención de la mancha en el mes de agosto de 1986, que a partir de entonces sigue evolucionando gobernada fundamentalmente por la difusión.

- ii. La evolución posterior de esta mancha también se utiliza en la simulación del mar Báltico completo durante una escala más larga (periodo 1986–1987), en la parte central del capítulo 7, para calibrar otras partes del modelo como la difusión vertical en capas más profundas y el intercambio en la picnoclina.

También se hará una aplicación local de este modelo al transporte de sal en el estuario del Río Guadalquivir.

- (e) Los radionúclidos son partículas que en el medio marino se pueden encontrar en la fase disuelta y el fase sólida tanto en la materia suspendida como en el sedimento. Por ello, hace falta elaborar un modelo independiente del transporte de la materia en suspensión, disciplina a la que se consagra el capítulo 8.
- (f) Finalmente, en el capítulo 9, se estudiará el transporte de radionúclidos en sus fases disuelta y sólida, aprovechando parte de las metodologías de los capítulos anteriores, y dejará el capítulo 10 reservado a las conclusiones y al trabajo futuro en relación con esta tesis doctoral.

# Capítulo 2

## Hidrodinámica General de un Fluido Océanico

### 1. INTRODUCCIÓN

En lo que ahora sigue<sup>1</sup> se va a considerar la respuesta de un fluido sometido a distintas fuerzas externas e internas, lo que nos llevará a la obtención de las ecuaciones básicas que describen la dinámica del océano. Desarrollos similares y complementarios a éste pueden encontrarse en multitud de textos [14, 21, 174].

Como se sabe, la Mecánica de Fluidos aplicada a la Oceanografía es fundamentalmente mecánica newtoniana ampliada con la influencia de los complejos fenómenos turbulentos. Esta disciplina establece su base en las leyes de variación de la masa, de la cantidad de movimiento, del momento angular y de la energía. Las fuerzas dominantes en la dinámica del océano son: gravedad, fricción y de Coriolis. Recordemos algunas de sus propiedades más notables:

- (a) **Gravedad:** presión, mareas, diferencias de densidad.

El peso del agua en el océano produce presión. Los cambios en la gravedad debido a los movimientos del sol y la luna relativos a la tierra producen mareas, corrientes

---

<sup>1</sup>El desarrollo de este capítulo introductorio se hace partiendo de un nivel algo inferior a lo habitual en una tesis doctoral, para que puedan seguirlo también alumnos de últimos cursos universitarios con interés en este campo para su proyecto fin de carrera, especialmente los alumnos de la E.T.S. de Ingeniería de la Universidad de Sevilla, que ya han iniciado una línea de trabajo en esta rama bajo la supervisión del doctorando.

mareales y difusión mareal en el interior del océano. El empuje actúa sobre cada elemento del fluido en función de su diferencia de densidad con el medio circundante. Si por ejemplo empieza a soplar aire frío sobre la superficie del mar, esto hará que el agua de la capa superior se vuelva más densa que la de la capa inmediatamente inferior, tendiendo la primera a caer y a ocupar un lugar inferior más estable.

(b) **Fricción:** viento, viscosidad, fondo oceánico.

Es interesante distinguir entre fricción interna y externa.

- Fricción interna: la viscosidad.

Su papel es fundamental por ser la responsable de la transformación de la energía en el seno del fluido.

- Fricción externa: el viento y el fondo del mar.

En el fluido destacan dos capas límite en sendas fronteras del sistema con el aire y el fondo oceánico. Es notable el papel de las fuerzas externas por su influencia mecánica en el movimiento global del sistema. En este grupo sobresalen: la fuerza del viento, y la fuerza en el fondo del mar. Además de producir olas, el viento cambia la distribución del campo de presiones y aumenta su influencia al resto del océano.

(c) **Coriolis.**

La fuerza de Coriolis es una fuerza de inercia debida a la rotación de la tierra y su influencia se extiende tanto a la atmósfera como al océano. A gran escala, es la máxima responsable de la dirección y el sentido en que se curvan las líneas de corriente en el sistema mar-aire.

## 2. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD Y VARIACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Para poder aplicar las leyes de conservación hay que tener en cuenta que un elevado número de las magnitudes escalares y vectoriales van viajando en el fluido sometidas a cambios a lo largo del tiempo, por lo que será necesario recordar el concepto de Derivada Total,  $D/Dt$ . Considérese una magnitud escalar  $q$  que es transportada por un punto material en una dimensión  $x$ , y coloquemos dos puertas de control separadas una cantidad  $\delta x$  en las que  $q$  alcanza los valores  $\{q_{in}, q_{out}\}$  invirtiendo un tiempo  $\delta t$ , quedando el balance como sigue:



$$q_{out} = q_{in} + \frac{\partial q}{\partial t} \delta t + \frac{\partial q}{\partial x} \delta x. \quad (2.1)$$

En la figura 2.1 se hace una representación esquemática del balance, conjuntamente con un sistema de ejes cartesianos para la posición  $\{x, y, z\}$  y la velocidad  $\{u, v, w\}$  de las partículas del fluido.

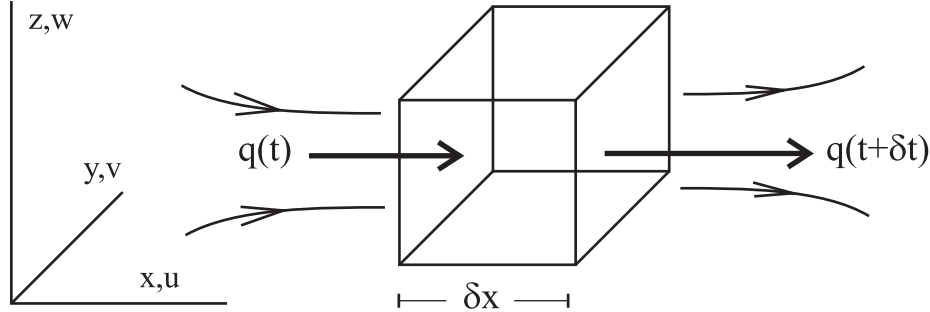


Figura 2.1: Esquema ilustrativo de la derivada total en un fluido.

El cambio sufrido por  $q$  en ese segmento de control vendrá dado por:

$$\frac{Dq}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{q_{out} - q_{in}}{\delta t} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta t}. \quad (2.2)$$

Si se tiene en cuenta que la velocidad del fluido en la dirección  $x$  puede calcularse como  $u = \delta x / \delta t$ , se llega a

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x}, \quad (2.3)$$

y generalizando a las tres dimensiones

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z}, \quad (2.4)$$

e introduciendo el operador nabla

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \quad (2.5)$$

se obtiene una expresión bastante más compacta.

Este resultado aparentemente normal tiene una importante repercusión en la dificultad de las ecuaciones que nacen de él, ya que al pasar de la descripción que sigue al punto material (lagrangiana) a la descripción local (euleriana) nos aparece un sistema de ecuaciones diferenciales *no lineal* en derivadas parciales.

La **ecuación de la cantidad de movimiento** para cada elemento del sistema puede ser escrita de forma sintética como:

$$\frac{D(m\vec{v})}{Dt} = \vec{F}, \quad (2.6)$$

donde  $\vec{F}$  es la fuerza,  $m$  es la masa, y  $\vec{v}$  la velocidad.

Y en el caso de que la masa  $m$  sea constante, podemos escribir:

$$\frac{D(\vec{v})}{Dt} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{f}_m, \quad (2.7)$$

donde  $\vec{f}_m$  es la fuerza por unidad de masa.

Vamos a mostrar el término de fuerzas correspondiente a la presión  $p$ . Se considerarán las fuerzas sobre las caras de una caja de fluido (figura 2.2). La fuerza neta en la dirección  $x$  será notada como  $\delta F_x$ :

$$\delta F_x = p \delta y \delta z - (p + \delta p) \delta y \delta z = -\delta p \delta y \delta z. \quad (2.8)$$

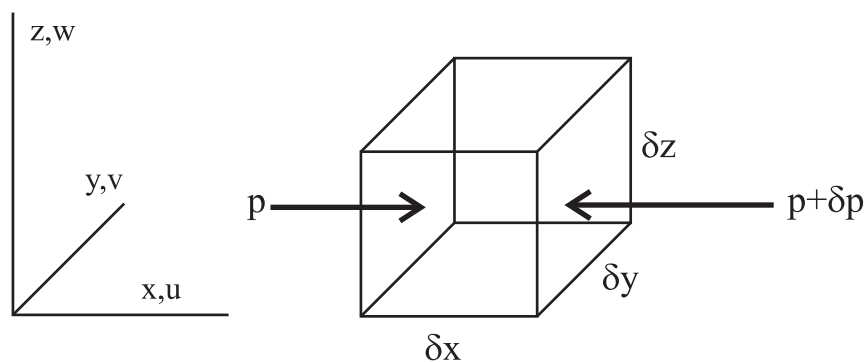


Figura 2.2: Esquema ilustrativo del concepto de presión en un fluido.

Por otro lado

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial x} \delta x, \quad (2.9)$$

por lo que el elemento en la dirección  $x$  será

$$\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta V. \quad (2.10)$$

Dividiendo por la masa  $\delta m$  del elemento de fluido considerado, la aceleración en la dirección  $x$  vendrá expresada por:

$$a_x = \frac{\delta F_x}{\delta m} = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta V}{\delta m} \rightarrow a_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.11)$$

Las fuerzas debidas a la presión en las otras dos direcciones se obtienen de la misma manera:

$$a_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad a_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.12)$$

Expresando la aceleración de forma vectorial tendríamos:

$$\vec{a}_p = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p. \quad (2.13)$$

La ecuación de la cantidad de movimiento está afectada por cuatro fuerzas fundamentales: gravedad, fuerzas de presión, Coriolis, y fuerzas de fricción. De forma compacta se expresaría así la ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{f}_r, \quad (2.14)$$

donde, se describen brevemente las fuerzas por unidad de masa:

- (a) La aceleración de la gravedad  $\vec{g}$ , que tiene una componente gravitacional pura apuntando al centro de la Tierra, y otra de tipo centrífugo normal al eje del planeta:

$$\vec{g} = \vec{g}_o + \vec{g}_{cf}. \quad (2.15)$$

y desarrollando cada término,

$$\vec{g}_o = -GM_T \vec{R}/R^3, \quad \vec{g}_{cf} = -\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}), \quad (2.16)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal,  $\vec{R}$  el vector de unión con el centro del planeta, y  $\{M_T, \Omega\}$  son la masa y la velocidad angular de la tierra. La velocidad  $\Omega$  está relacionada con el periodo sidéreo  $T_{sid}$ , de modo que  $\Omega = 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ .

- (b) La fuerza por presión produce una aceleración  $\vec{a}_p = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$ , que fue descrita en los párrafos anteriores al estudiar su influencia sobre las caras opuestas del elemento de fluido.
- (c) La fuerza de Coriolis produce una aceleración  $\vec{a}_{cor} = -2\vec{\Omega} \times \vec{v}$  perpendicular a la velocidad y de capital importancia en Oceanografía y Meteorología cuando se estudian problemas a media y gran escala.
- (d) La fuerza de fricción por unidad de masa  $\vec{f}_r$ , quizás la más compleja de las cuatro, y que merecerá un estudio aparte más adelante.

Sustituyendo la expresión de la derivada total en la ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{f}_r. \quad (2.17)$$

Cuando se desarrolla por componentes la ecuación anterior se tiene un sistema acoplado de tres ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v \sin \varphi + f_x, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \varphi + f_y, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega u \cos \varphi - g + f_z. \quad (2.20)$$

donde  $\{f_x, f_y, f_z\}$  son las componentes cartesianas de la fuerza de fricción por unidad de masa,  $\varphi$  es la latitud, y los ejes cartesianos señalan respectivamente a puntos Este (E), Norte (N) y azimut, respectivamente.

Se ha asumido que  $w \ll v$  por lo que el término  $2\Omega w \cos \varphi$  se ha despreciado en la componente  $x$  de la ley de la cantidad de movimiento.

Otra de las leyes notables de la mecánica de fluidos en general y de la Oceanografía en particular es la ley de **conservación de la masa**. Consideremos un elemento de fluido como el de la figura 2.3 y estudiemos los flujos de masa entrantes y salientes en las seis caras de la caja elemental:

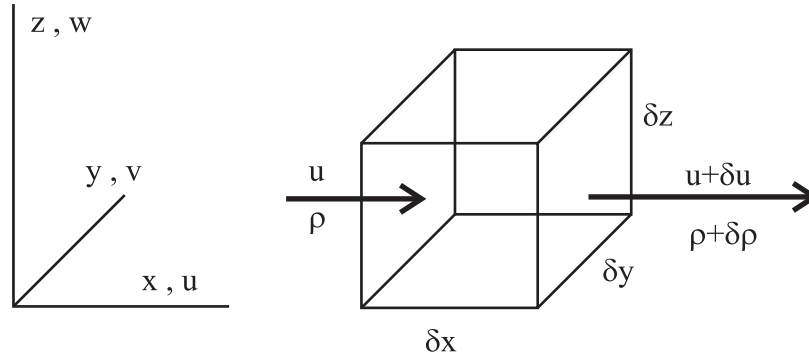


Figura 2.3: Esquema ilustrativo de la conservación de la masa en un fluido.

Consideramos los flujos de entrada y salida en dirección  $x$ :

$$\phi_{x,in} = \rho u \delta y \delta z \quad , \quad \phi_{x,out} = (\rho + \delta\rho)(u + \delta u) \delta y \delta z . \quad (2.21)$$

El flujo de masa neto en esa dirección, signo positivo el saliente y negativo el entrante, queda de la siguiente manera:

$$\phi_x = \phi_{x,out} - \phi_{x,in} = (\rho \delta u + u \delta\rho + \delta\rho \delta u) \delta z \delta y . \quad (2.22)$$

Despreciando el término de segundo orden  $\delta\rho \delta u$  que hay dentro del paréntesis, y sabiendo que

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \quad ; \quad \delta\rho = \frac{\partial\rho}{\partial x} \delta x , \quad (2.23)$$

el flujo se escribe como sigue

$$\phi_x = \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial\rho}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta V , \quad (2.24)$$

y ampliando a tres dimensiones:

$$\phi = \phi_x + \phi_y + \phi_z = \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) \delta V. \quad (2.25)$$

La masa contenida en el elemento es  $\delta m = \rho \delta V$ . Imponiendo que la variación temporal de masa  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta V$  se compense con el flujo total de masa en las paredes del recinto, se tiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.26)$$

Podemos, por un lado, expresarlo de forma vectorial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.27)$$

Si por otro lado derivamos los productos e introducimos la derivada total de la densidad  $D\rho/Dt$  nos queda:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho \quad \rightarrow \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.28)$$

La densidad en el océano es muy aproximadamente constante y en la inmensa mayoría de los casos pueden despreciar sus variaciones. El investigador Joseph Boussinesq (1842–1929) fue el primero en proponer que se podía perfectamente asumir la constancia de la densidad salvo en los términos matemáticos que estuvieran multiplicados por  $g$ , típicos representantes de la influencia de la presión en el movimiento del fluido. Este requisito se cumple siempre que se satisfagan las tres hipótesis de Boussinesq:

- (a) La velocidad del océano debe ser muy pequeña comparada con la velocidad del sonido  $c$ .
- (b) La velocidad de fase de las olas -ondas en la superficie- debe ser muy pequeña comparada con la velocidad del sonido  $c$ .
- (c) La escala vertical de los movimientos debe ser muy pequeña comparada con  $c^2/g$ , donde  $g$  es la gravedad.

Salvo en condiciones muy extremas que no estudiaremos aquí, se cumplen las tres hipótesis y la ecuación de continuidad que ahora nos ocupa se simplifica mucho, de modo que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.29)$$

o de forma vectorial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.30)$$

expresión coincidente con la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles.

A continuación se va a hacer una aproximación a la influencia de la viscosidad y la turbulencia en el movimiento del fluido oceánico.

### 3. INFLUENCIA DE LA VISCOSIDAD.

Aunque el problema de la fricción es complicado, pueden presentarse a continuación algunas generalidades. La influencia de la fricción se concentra mucho en los contornos del fluido, siendo de vital importancia los contactos del mar con la atmósfera y el fondo marino. Allí se sitúan las *dos capas límite* claves para el comportamiento dinámico del sistema ya que el campo de velocidades experimenta grandes cambios en espacios relativamente reducidos.

La capa límite superior, que está en contacto con el aire, recibe el nombre de capa *Ekman*, en honor al gran oceanógrafo sueco de principios del siglo XX. Está dominada por la energía del viento y muy vinculada por tanto a la meteorología del lugar.

La capa límite inferior o capa límite bentónica será de gran importancia en esta tesis doctoral cuando se aborde la dinámica de la materia en suspensión, muy sensible a los procesos de sedimentación y resuspensión que tienen lugar en el fondo oceánico.

Por otro lado, el interior del océano se comporta de modo que, en la mayoría de los casos, la fricción es poco relevante y dominan otro tipo de fuerzas. También es digna de mención la capa de la atmósfera en contacto con el océano, llamada capa límite planetaria, donde la velocidad pasa de varios o muchos metros por segundo a decenas de centímetros por segundo en contacto con el agua; en esta capa se produce el enlace entre los modelos meteorológicos y oceanográficos.

En lo que sigue se van a introducir algunas generalidades sobre fricción, turbulencia y estabilidad del flujo sometido a cambios en la velocidad y la densidad.

Para esta introducción, se presenta la primera componente de la ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v \operatorname{sen} \varphi + f_x^{fric}, \quad (2.31)$$

donde destaca  $f_x^{fric}$ , fuerza de fricción por unidad de masa. Veamos su forma en el caso en que  $f_x^{fric}$  sea debido a la influencia de la viscosidad,  $f_x^{fric} = f_x^{vis}$ .

Retomemos la caja elemental de fluido de dimensiones  $\{\delta x, \delta y, \delta z\}$  para considerar las tensiones (figura 2.4) en la dirección de movimiento  $x$ .

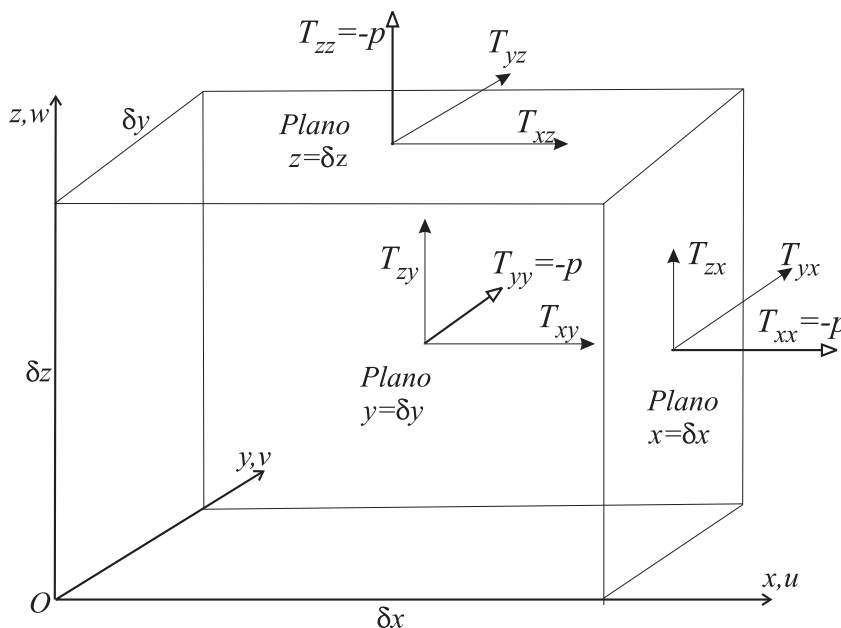


Figura 2.4: Esquema de tensiones en un volumen elemental del fluido.

Ayudándonos del elemento cartesiano de volumen de la figura anterior tendremos las siguientes tensiones en la dirección  $x$ :

- La tensión  $T_{xz}$ , es la componente  $x$  aplicada en una cara del tipo  $z = cte$ . Habrá que tener en cuenta las caras superior e inferior de la caja elemental.
- La tensión  $T_{xy}$ , es la componente  $x$  aplicada en una cara del tipo  $y = cte$ . Habrá que tener en cuenta las caras anterior e posterior de la caja elemental.
- La tensión  $T_{xx}$ , es la componente  $x$  aplicada en una cara del tipo  $x = cte$ . Habrá que tener en cuenta las caras izquierda y derecha de la caja elemental. Esta tensión, a diferencia de las otras dos que son tangenciales, es normal a la cara sobre la que actúa y está relacionada con la presión del modo  $T_{xx} = -p$ .



De esta manera, podremos generalizar y obtener las tensiones en la dirección  $y$  que serán del tipo  $\{T_{yx}, T_{yy}, T_{yz}\}$ , mientras las paralelas a  $Oz$  tomarán la forma  $\{T_{zx}, T_{zy}, T_{zz}\}$ . Es por ello que para completar el problema necesitamos  $3 \times 3 = 9$  tensiones representadas por el tensor

$$T_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad j = 1, 2, 3 \quad , \quad (2.32)$$

entre las que se destacan por un lado las componentes normales ,  $(T_{ii} = -p)$  representantes de la presión  $p$  y por otro, las tensiones tangenciales -o de corte-  $(T_{ij}, i \neq j)$  situadas en los elementos no diagonales del tensor. Si extendemos a todo el espacio tendremos un campo tensorial de tensiones  $T_{ij}(x, y, z)$ .

Volviendo a la fuerza total en dirección  $x$  sobre el elemento fluido se tiene que:

$$\begin{aligned} \delta F_x &= T_{xx}(x = \delta x) \delta S_x + T_{xy}(y = \delta y) \delta S_y + T_{xz}(z = \delta z) \delta S_z \\ &- [T_{xx}(x = 0) \delta S_x + T_{xy}(y = 0) \delta S_y + T_{xz}(z = 0) \delta S_z] \quad . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Las tensiones representadas en la figura son las sufridas por la celda problema debido a celdas situadas en posiciones superiores teniendo en cuenta el sistema coordenado  $Oxyz$ . Una celda situada en una posición superior sufrirá debido a la inmediatamente inferior y según el tercer principio de la Dinámica, una tensión opuesta a la dibujada en la figura; es por ello que para tener en cuenta la influencia de las tres celdas inferiores sobre la celda problema hayamos tenido en cuenta el sentido correspondiente y de ahí el signo menos que aparece en la fórmula anterior.

Teniendo en cuenta los elementos de superficie y de volumen

$$\delta S_x = \delta y \delta z \quad , \quad \delta S_y = \delta x \delta z \quad , \quad \delta S_z = \delta x \delta y \quad , \quad \delta V = \delta x \delta y \delta z \quad , \quad (2.34)$$

$$\delta S_x = \delta V / \delta x \quad , \quad \delta S_y = \delta V / \delta y \quad , \quad \delta S_z = \delta V / \delta z \quad , \quad (2.35)$$

los cambios en las tensiones se expresan como sigue:

$$T_{xx}(x = \delta x) - T_{xx}(x = 0) \equiv \delta T_{xx} \quad , \quad T_{xy}(y = \delta y) - T_{xy}(y = 0) \equiv \delta T_{xy} \quad , \quad (2.36)$$

$$T_{xz}(z = \delta z) - T_{xz}(z = 0) \equiv \delta T_{xz} \quad . \quad (2.37)$$

Sustituyendo estos cambios:

$$\delta F_x = \delta T_{xx} \delta S_x + \delta T_{xy} \delta S_y + \delta T_{xz} \delta S_z, \quad (2.38)$$

y por otro lado

$$\delta T_{xx} = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} \delta x, \quad \delta T_{xy} = \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \delta y, \quad \delta T_{xz} = \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \delta z, \quad (2.39)$$

así tendremos que  $\delta F_x$  queda como sigue:

$$\delta F_x = \left[ \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right] \delta V. \quad (2.40)$$

Introduciendo la fuerza total por unidad de masa  $f_x^{tot} \equiv \delta F_x / \delta m$ , la densidad  $\rho = \delta m / \delta V$ , e igualando:

$$f_x^{tot} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right]. \quad (2.41)$$

Para generalizar y calcular las tensiones en las otras dos direcciones  $y, z$ , basta permutar  $x$  con  $y$  y  $x$  con  $z$  respectivamente, quedando:

$$f_y^{tot} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \right], \quad (2.42)$$

$$f_z^{tot} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} \right]. \quad (2.43)$$

En desarrollos posteriores utilizaremos a veces la notación matricial para las componentes cartesianas de algunos campos vectoriales notables:

$$\vec{r} = [x_1, x_2, x_3] \quad , \quad \vec{v} = [v_1, v_2, v_3] \quad , \quad \vec{f}^{tot} = [f_1^{tot}, f_2^{tot}, f_3^{tot}] \quad , \quad \{T_{ij}\}. \quad (2.44)$$

De este modo queda más compacta  $f_x^{tot}$ :

$$f_x^{tot} \equiv f_1^{tot} = \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{1j}}{\partial x_j}, \quad (2.45)$$

y generalizando para  $f_i^{tot}$ ,  $i = 1, 2, 3$ :

$$f_i^{tot} = \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad \forall i = 1, 2, 3. \quad (2.46)$$

Para empezar, veamos cuánto valen la componentes de la fuerza por unidad de masa  $\{f_x^\nu, f_y^\nu, f_z^\nu\}$  cuando la fricción es realizada por influencia de la viscosidad molecular. Conocida es la ley de viscosidad para fluidos **newtonianos** –como es nuestro caso– para flujo en la dirección  $x$  y contenido en el plano  $xz$ :

$$T_{xz} = \rho\nu \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (2.47)$$

donde la viscosidad molecular  $\rho\nu$  se define, para fluidos newtonianos como el cociente entre la tensión tangencial  $T_{xz}$  y el perfil de velocidades  $\partial u/\partial z$ . El coeficiente  $\nu$  es la viscosidad cinemática que toma valores de típicos de  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  para el agua a temperatura ambiente.

Se generaliza la ley anterior a las tres dimensiones, y se aprovecha la notación matricial,

$$T_{ij} = \rho\nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \forall i \neq j, \quad (2.48)$$

expresión que sustituimos en  $f_i^{tot}$ , teniendo en cuenta los elementos diagonales de la matriz relacionados con la presión,  $T_{ii} = -p$ , y llegando a:

$$f_i^{tot} = \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} = \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left( \rho\nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)}_{\equiv f_i^\nu} \underbrace{- \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\equiv f_i^p}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.49)$$

donde tenemos separados los términos de la viscosidad y de la presión.

Teniendo en cuenta la incompresibilidad del sistema

$$f_i^\nu = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad \forall i = 1, 2, 3, \quad (2.50)$$

e introduciendo el operador nabla

$$f_i^\nu = \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla} v_i) = \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla}) v_i \quad \forall i = 1, 2, 3, \quad (2.51)$$

basta sumar las tres componentes para construir  $\vec{f}^\nu$ :

$$\vec{f}^\nu = \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla}) \vec{v}. \quad (2.52)$$

Ahora se podrían particularizar las componentes dispuestas a ser aplicadas a los problemas específicos:

$$f_x^\nu = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right], \quad (2.53)$$

$$f_y^\nu = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \frac{\partial v}{\partial z} \right], \quad (2.54)$$

$$f_z^\nu = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \frac{\partial w}{\partial z} \right]. \quad (2.55)$$

Si sustituímos  $f_x^\nu$  en la ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v \sin \varphi + f_x^\nu, \quad (2.56)$$

llegamos a la componente  $x$  del movimiento del fluido:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ 2\Omega v \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Análogamente, para las otras componentes  $\{y, z\}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ -2\Omega u \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \frac{\partial v}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$+2\Omega u \cos \varphi - g + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \frac{\partial w}{\partial z} \right]. \quad (2.59)$$

Con la notación vectorial queda mucho más compacta la expresión de la variación temporal del campo de velocidades:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla}) \vec{v}, \quad (2.60)$$

que son nuestra primera versión de las ecuaciones de Navier–Stokes, correspondientes a fluidos newtonianos incompresibles.

## 4. TURBULENCIA Y ECUACIONES DE NAVIER-STOKES PROMEDIADAS

### 4.1. Introducción.

La *turbulencia* es una de las más importantes propiedades de los sistemas fluidos, debida a la complejidad natural de un medio continuo cuyas ecuaciones de gobierno para la cantidad de movimiento contienen términos *no lineales* (de la forma  $u\partial u/\partial x$ ,  $v\partial u/\partial y$ ,  $w\partial u/\partial z$ , etc) que son los máximos responsables de la alta dificultad matemática que alberga su solución, muy sensible a inestabilidades ligadas a problemas mecánicos de esta naturaleza, que requieren, como veremos más adelante, un tratamiento especial. La importancia de esos términos no lineales viene dada por número el adimensional de Reynolds  $Re$ , que se define como el cociente entre el término no lineal y el término viscoso.

$$Re = \frac{\text{Término no lineal}}{\text{Término viscoso}} = \frac{|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}|}{|\vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla})\vec{v}|}. \quad (2.61)$$

Si tuviéramos por ejemplo un flujo unidireccional (paralelo a  $Ox$ ) cuyas variaciones se dieran en una dirección genérica  $Oy$ , se tendría que:

$$Re = \frac{\text{Término no lineal}}{\text{Término viscoso}} = \frac{|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}|}{|\vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla})\vec{v}|} = \frac{|u \frac{\partial u}{\partial y}|}{|\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}|}. \quad (2.62)$$

Es muy importante, en todos los problemas fluidomecánicos, hacer estimaciones del número  $Re$  con objeto de poder hacer simplificaciones en las ecuaciones generales de *Navier–Stokes*. En muchos casos es suficiente el orden de magnitud de  $Re$  para conseguir

el objetivo deseado. En el problema, relativamente simple, que se presenta ahora como de ejemplo, se cumple que:

$$u \approx U \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \approx \frac{U}{L} \quad \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \approx \frac{U}{L^2}. \quad (2.63)$$

donde  $U$  es una velocidad característica del campo  $\vec{v}$ , y  $L$  es la longitud característica de las variaciones del campo en la dirección  $Oy$ , que se puede estimar en general sin demasiada dificultad.

Sustituyendo de este modo en  $Re$ :

$$Re = \frac{\text{Término no lineal}}{\text{Término viscoso}} = \frac{\left| u \frac{\partial u}{\partial y} \right|}{\left| \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|} = \frac{U \frac{U}{L}}{\nu \frac{U}{L^2}} = \frac{UL}{\nu}. \quad (2.64)$$

Este número  $Re$  adimensional tan notable fue introducido por el científico Osborne Reynolds (1842–1912) en su histórico experimento [155] cuyo objetivo fundamental era acercarse empíricamente al concepto de la *turbulencia*. Estudió el movimiento de agua fluyendo a lo largo de un tubo y utilizó una tinta como trazador. Hizo múltiples medidas barriendo desde las velocidades pequeñas hasta las grandes. Como es sabido, para velocidades pequeñas el flujo es claramente *laminar*, mientras que para las grandes es turbulento. La transición ocurre cuando  $Re = UL/\nu \approx 2000$ , donde  $U$  es la velocidad promedio y  $L$  es el diámetro del tubo.

Una propiedad a destacar del número  $Re$  es que dos fluidos con la misma geometría y el mismo número  $Re$  tienen el mismo patrón de flujo. Por ello fueron notables los trabajos de Richardson [157] sobre el movimiento de un fluido con velocidad típica  $U$  alrededor de un cilindro circular de diámetro  $D$ : es interesante cuando muestra la comparación entre dos configuraciones tan distintas aparentemente como  $\{D = 10 \text{ cm}, U = 1 \text{ cm s}^{-1}\}$  y  $\{D = 1 \text{ cm}, U = 10 \text{ cm s}^{-1}\}$ , que presentan idéntico patrón ya que en ambos casos se tiene el mismo  $Re = 1000$ .

Si hacemos una primera estimación para un sistema oceánico como el que vamos a estudiar en esta tesis doctoral (Mar Báltico) suponiendo que se cumple la condición  $Re \approx UL/\nu$ , que la velocidad  $U \approx 0.1 \text{ m s}^{-1}$ , que la longitud típica de las variaciones  $L \approx 10 \text{ km}$ , y que a temperatura ambiente el agua tiene  $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , resulta que  $Re = 10^{10} \gg Re(\text{crítico}) \sim 2000$ , por lo que nuestro sistema en particular es *muy turbulento*.

Esta conclusión puede extenderse de manera general a los océanos de nuestro planeta. No quiere decir esto que la viscosidad molecular sea siempre despreciable; será importante en determinadas zonas del océano y en algunos problemas particulares.

#### 4.2. Tensiones de Turbulencia y Ecuaciones de Navier-Stokes Promediadas

Una de las grandes dificultades a la hora de resolver las ecuaciones de *Navier-Stokes* surge debido al carácter no lineal de este sistema. Para avanzar en este problema un camino tradicional consiste en tomar valores medios en estas ecuaciones previa descomposición de las magnitudes físicas en un término promedio temporal más otro de naturaleza turbulenta; así fue como trabajó O. Reynolds, el primero en acercarse matemáticamente al problema de la turbulencia.

De este modo, la descomposición quedaría [14] del siguiente modo para el vector velocidad y sus componentes:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' \quad u = U + u' \quad v = V + v' \quad w = W + w', \quad (2.65)$$

donde las velocidades promedio se definen como sigue:

$$\vec{V}(t) = \langle \vec{v}(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \vec{v}(\tau) d\tau, \quad (2.66)$$

$$U(t) = \langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} u(\tau) d\tau \quad V(t) = \langle v(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} v(\tau) d\tau, \quad (2.67)$$

$$W(t) = \langle w(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} w(\tau) d\tau. \quad (2.68)$$

Es muy razonable asumir que en las condiciones oceánicas con las que vamos a trabajar:

$$\langle p \rangle = p \quad \langle \rho \rangle = \rho \quad \langle \vec{g} \rangle = \vec{g}. \quad (2.69)$$

Dado que la función promedio es una función lineal, se cumplirá la siguiente propiedad de linealidad para el campo de velocidades:

$$\langle L(\vec{v}) \rangle = L(\langle \vec{v} \rangle). \quad (2.70)$$

donde  $L(\vec{v})$  es una función lineal en la velocidad.

Debe quedar claro que las derivadas temporales importantes que aparecerán en las ecuaciones de la cantidad de movimiento son operadores que trabajan en una banda de tiempo ( $\Delta t$ ) mucho mayor que el tiempo típico del promedio  $T$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\cdot) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta|_{\vec{r}=c\vec{t}\vec{e}}(\cdot)}{\Delta t}, \quad \vec{V} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \text{con} \quad \underline{\underline{\Delta t \gg T}}. \quad (2.71)$$

Con estas herramientas, podemos pasar a promediar las ecuaciones de Navier-Stokes para la cantidad de movimiento:

$$\left\langle \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\rangle + \langle (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \rangle = \langle \vec{g} \rangle - \left\langle \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right\rangle - \langle 2\vec{\Omega} \times \vec{v} \rangle + \langle \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla}) \vec{v} \rangle, \quad (2.72)$$

sustituyendo y aplicando la propiedad anterior de linealidad,

$$\frac{\partial \langle \vec{v} \rangle}{\partial t} + \langle (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \rangle = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - 2\vec{\Omega} \times \langle \vec{v} \rangle + \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla}) \langle \vec{v} \rangle, \quad (2.73)$$

e introduciendo los valores medios,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \langle (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \rangle = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla}) \vec{V}. \quad (2.74)$$

Falta por desarrollar el término no lineal:  $\langle (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \rangle$ .

Para ello, es conveniente demostrar previamente que:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot [\vec{v} \vec{v}], \quad (2.75)$$

donde  $[\vec{v} \vec{v}]$  es la matriz  $[v_i v_j]$  de las componentes cartesianas del campo de velocidades, tal que

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 v_j \vec{e}_j. \quad (2.76)$$



Recordando definiciones:

$$\vec{\nabla} \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right] , \quad [\vec{v} \vec{v}] \equiv \begin{bmatrix} v_1 v_1 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_2 v_1 & v_2 v_2 & v_2 v_3 \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & v_3 v_3 \end{bmatrix} . \quad (2.77)$$

Desarrollemos el producto de nabra por la matriz de las velocidades  $\vec{\nabla} \cdot [\vec{v} \vec{v}]$ :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot [\vec{v} \vec{v}] &= \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \cdot \begin{bmatrix} v_1 v_1 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_2 v_1 & v_2 v_2 & v_2 v_3 \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & v_3 v_3 \end{bmatrix} = \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(v_i v_1)}{\partial x_i} \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(v_i v_2)}{\partial x_i} \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(v_i v_3)}{\partial x_i} \right] \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(v_i v_j)}{\partial x_i} \vec{e}_j = \left( \sum_{j=1}^3 v_j \vec{e}_j \right) \overbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}}^{=\vec{\nabla} \cdot \vec{v}} + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \vec{e}_j . \end{aligned} \quad (2.78)$$

En condiciones normales oceánicas de fluido incompresible (se cumplen las condiciones de Boussinesq) la ecuación de continuidad se expresa simplemente con  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ , por lo se tiene:

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{v} \vec{v}] = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \vec{e}_j = \left( \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \sum_{j=1}^3 v_j \vec{e}_j = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} , \quad (2.79)$$

de esta manera,

$$\underline{\underline{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot [\vec{v} \vec{v}]}} , \quad (2.80)$$

que era lo que se quería demostrar. Hay que resaltar también que esta propiedad es válida para todo campo de velocidades incompresible.

Volvamos al desarrollo del término no lineal  $\langle (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \rangle$ . Vamos a demostrar en las siguientes líneas que:

$$\langle (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \rangle = \langle \vec{\nabla} \cdot [\vec{v} \vec{v}] \rangle = \vec{\nabla} \cdot [\vec{V} \vec{V}] + \vec{\nabla} \cdot [\langle \vec{v} \vec{v} \rangle] . \quad (2.81)$$

Tomando promedio en la igualdad que hemos demostrado y que se encuentra subrayada, se cumplirá que

$$\langle (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \rangle = \langle \vec{\nabla} \cdot [\vec{v} \vec{v}] \rangle. \quad (2.82)$$

Desarrollando este último término:

$$\begin{aligned} \langle (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \rangle &= \langle \vec{\nabla} \cdot [\vec{v} \vec{v}] \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (v_i v_j)}{\partial x_i} \vec{e}_j \right\rangle = \lambda v_i = V_i + v'_i \quad v_j = V_j + v'_j \quad \lambda = \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial [(V_i + v'_i)(V_j + v'_j)]}{\partial x_i} \vec{e}_j \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (V_i V_j + V_i v'_j + v'_i V_j + v'_i v'_j) \vec{e}_j \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Se presentan a continuación unas propiedades sencillas que nos facilitan la aplicación del operador promedio,  $\langle \rangle \equiv 1/T \int_{t-T/2}^{t+T/2}$ :

- Dado un campo escalar  $\phi(\vec{r}, t)$ , como pueden ser las componentes cartesianas de un campo vectorial, se cumple que:

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle = \lambda \text{ linealidad del operador } \partial/\partial x_i \quad \lambda = \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, 2, 3. \quad (2.84)$$

- Dados dos campos  $\{\phi(\vec{r}, t); \vec{f}(\vec{r}, t)\}$  escalares y vectoriales respectivamente, se demuestra a partir de la propiedad anterior que:

$$\langle \vec{\nabla} \phi \rangle = \vec{\nabla} \langle \phi \rangle \quad \langle \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \rangle = \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{f} \rangle \quad \langle \vec{\nabla} \times \vec{f} \rangle = \vec{\nabla} \times \langle \vec{f} \rangle. \quad (2.85)$$

- Las componentes medias de la velocidad  $V_i$  pueden salir fuera del operador promedio:

$$\langle V_i \phi \rangle = \lambda V_i = \text{cte en } [t - T/2, t + T/2] \quad \lambda = V_i \langle \phi \rangle, \quad (2.86)$$

$$\langle V_i \vec{f} \rangle = V_i \langle \vec{f} \rangle. \quad (2.87)$$

- Es trivial ver que los promedios las componentes turbulentas de la velocidad son nulos:

$$\langle v'_i \rangle = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3. \quad (2.88)$$

Continuando con el cálculo y aplicando las propiedades anteriores:

$$\begin{aligned}
 \langle (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \rangle &= \langle \vec{\nabla} \cdot [\vec{v} \vec{v}] \rangle = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle V_i V_j \rangle + \langle V_i v'_j \rangle + \langle v'_i V_j \rangle + \langle v'_i v'_j \rangle) \vec{e}_j = \\
 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( V_i V_j + \overbrace{V_i \langle v'_j \rangle}^{=0} + \overbrace{\langle v'_i \rangle V_j}^{=0} + \langle v'_i v'_j \rangle \right) \vec{e}_j = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (V_i V_j + \langle v'_i v'_j \rangle) \vec{e}_j = \\
 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (V_i V_j) \vec{e}_j + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle v'_i v'_j \rangle) \vec{e}_j = \vec{\nabla} \cdot [\vec{V} \vec{V}] + \vec{\nabla} \cdot [\langle \vec{v}' \vec{v}' \rangle] . \quad (2.89)
 \end{aligned}$$

En conclusión, el término no lineal queda como sigue:

$$\langle (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \rangle = \langle \vec{\nabla} \cdot [\vec{v} \vec{v}] \rangle = \vec{\nabla} \cdot [\vec{V} \vec{V}] + \vec{\nabla} \cdot [\langle \vec{v}' \vec{v}' \rangle] . \quad (2.90)$$

Si lo expresamos en notación matricial:

$$\langle (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \rangle = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 V_1 + \langle v'_1 v'_1 \rangle & V_1 V_2 + \langle v'_1 v'_2 \rangle & V_1 V_3 + \langle v'_1 v'_3 \rangle \\ V_2 V_1 + \langle v'_2 v'_1 \rangle & V_2 V_2 + \langle v'_2 v'_2 \rangle & V_2 V_3 + \langle v'_2 v'_3 \rangle \\ V_3 V_1 + \langle v'_3 v'_1 \rangle & V_3 V_2 + \langle v'_3 v'_2 \rangle & V_3 V_3 + \langle v'_3 v'_3 \rangle \end{bmatrix} . \quad (2.91)$$

Para futuros desarrollos va a ser útil la siguiente propiedad:

**Propiedad.** Si el campo de velocidades  $\vec{v}$  es incompresible, también lo serán los campos  $\vec{V}$  y  $\vec{v}'$ . Hay que demostrar que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \{ \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 ; \vec{\nabla} \cdot \vec{v}' = 0 \}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 , \text{ promediando, } \rightarrow \langle \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \rangle = \langle 0 \rangle \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{v} \rangle = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.92)$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v}' = \overbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{v}}^{=0} - \overbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{V}}^{=0} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v}' = 0 \quad C.Q.D. \quad (2.93)$$

Uniando esta última propiedad con la que ya conocemos sobre las dos formas alternativas de expresar el término no lineal de las ecuaciones de Navier-Stokes para la cantidad de movimiento, se tiene que:

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot [\vec{V} \vec{V}] \quad (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' = \vec{\nabla} \cdot [\vec{v}' \vec{v}'] , \quad (2.94)$$

y también,

$$\vec{\nabla} \cdot [\langle \vec{v}' \vec{v}' \rangle] = \langle (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' \rangle. \quad (2.95)$$

En el desarrollo de este trabajo habrá veces que nos resulte más interesante usar la forma de la derecha, y otras, normalmente en análisis más generales, en que utilizaremos la de la izquierda.

Retomando las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas y sustituyendo la parte no lineal, queda:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla}) \vec{V} - \vec{\nabla} \cdot [\langle \vec{v}' \vec{v}' \rangle], \quad (2.96)$$

que son la **versión de Reynolds de las ecuaciones N–S para la cantidad de movimiento**, llamadas [14] Ecuaciones Promediadas de Reynolds (RANS: Reynolds Averaged Navier Stokes, en la literatura anglosajona). Además pueden presentarse de las tres maneras siguientes :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\vec{V} \vec{V}] = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla}) \vec{V} - \langle (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' \rangle, \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla}) \vec{V} - \langle (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' \rangle, \quad (2.98)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\vec{V} \vec{V}] = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla}) \vec{V} - \vec{\nabla} \cdot [\langle \vec{v}' \vec{v}' \rangle]. \quad (2.99)$$

Las ecuaciones *RANS* presentan el trascendental *problema de cierre* consistente en que en ellas aparecen como incógnitas añadidas las cantidades estadísticas  $\langle v'_j v'_i \rangle$ , que al multiplicarlos por la densidad  $\rho$  constituyen los esfuerzos *aparentes* de Reynolds, que deben modelarse adecuadamente en el problema que se quiera resolver. No hay una única manera de atacar el problema de cierre. De momento se van a desarrollar los dos últimos términos de estas ecuaciones  $\{ \vec{f}^\nu ; \vec{f}^R \}$  que son fuerza por unidad de masa debidos a la viscosidad y a la turbulencia respectivamente:

$$\vec{f}^\nu = \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla}) \vec{V} \quad , \quad \vec{f}^R = -\vec{\nabla} \cdot [\langle v' v' \rangle] \quad (2.100)$$

donde el subíndice  $R$  hace honor a Reynolds.

A continuación se van a desarrollar las componentes de estas dos fuerzas al objeto de poder introducir posteriormente las analogías entre ambas, basadas en hechos experimentales, que introdujeron Prandtl, von Karman y Boussinesq, entre otros, durante la primera mitad del siglo XX.

$$\begin{aligned} \vec{f}^\nu &= \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla}) \vec{V} = \left( \sum_{j=1}^3 \nabla_j \right) \left( \sum_{j=1}^3 \nu \nabla_j \right) \sum_{i=1}^3 V_i \vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 \nabla_j (\nu \nabla_j) \sum_{i=1}^3 V_i \vec{e}_i = \\ &= \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \sum_{j=1}^3 \nabla_j (\nu \nabla_j (V_i)) . \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} \vec{f}^R &= -\vec{\nabla} \cdot [\langle v' v' \rangle] = -[\nabla_1 \nabla_2 \nabla_3] \cdot \begin{bmatrix} \langle v'_1 v'_1 \rangle & \langle v'_1 v'_2 \rangle & \langle v'_1 v'_3 \rangle \\ \langle v'_2 v'_1 \rangle & \langle v'_2 v'_2 \rangle & \langle v'_2 v'_3 \rangle \\ \langle v'_3 v'_1 \rangle & \langle v'_3 v'_2 \rangle & \langle v'_3 v'_3 \rangle \end{bmatrix} = \\ &= -\sum_{j=1}^3 [\nabla_j \langle v'_j v'_1 \rangle \vec{e}_1 + \nabla_j \langle v'_j v'_2 \rangle \vec{e}_2 + \nabla_j \langle v'_j v'_3 \rangle \vec{e}_3] = -\sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^3 \nabla_j \langle v'_j v'_i \rangle \vec{e}_i \right] = \\ &= -\sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \left[ \sum_{j=1}^3 \nabla_j \langle v'_j v'_i \rangle \right] . \end{aligned} \quad (2.102)$$

Si extraemos la componente genérica  $i$  de cada fuerza tenemos:

$$f_i^\nu = \sum_{j=1}^3 \nabla_j (\nu \nabla_j (V_i)) . \quad (2.103)$$

$$f_i^R = -\sum_{j=1}^3 \nabla_j \langle v'_j v'_i \rangle . \quad (2.104)$$

Introduciendo el tensor de viscosidad  $T_{ij}^\nu$  y su dependencia en el modelo newtoniano, se tiene:

$$T_{ij}^\nu = \rho\nu \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \rho\nu \nabla_j (V_i) \quad (2.105)$$

y sustituyendo,

$$f_i^\nu = \sum_{j=1}^3 \nabla_j \left( \frac{T_{ij}^\nu}{\rho} \right), \quad (2.106)$$

$$f_i^R = - \sum_{j=1}^3 \nabla_j \langle v'_j v'_i \rangle, \quad (2.107)$$

donde queda de manifiesto la similitud matemática entre ambas fuerzas por unidad de masa.

El tensor de turbulencia, o tensor de tensiones de Reynolds  $T_{ij}^R$ , también notado como  $R_{ij}$ , se define así:

$$T_{ij}^R \equiv -\rho \langle v'_j v'_i \rangle \equiv R_{ij}. \quad (2.108)$$

Es en este momento cuando vamos a elegir un modelo para el problema de cierre. La elección va a ser la del método clásico de cierre basado en cierta analogía entre el transporte turbulento y el transporte molecular. Durante la primera mitad del siglo *XX* los investigadores ya citados anteriormente, trabajaron en la idea de que los elementos de un fluido turbulento pudieran jugar un papel similar en la transferencia de cantidad de movimiento al que desempeñan las moléculas en un fluido laminar. A la vista de las dos expresiones que tenemos arriba para las componentes  $\{f_i^\nu ; f_i^R\}$ , es el momento de introducir [14] el modelo de la viscosidad turbulenta o turbillonaria (*eddy viscosity*, en la literatura anglosajona) resumida en la expresión:

$$T_{ij}^R \equiv -\rho \langle v'_j v'_i \rangle = \imath \text{ Modelo Eddy Viscosity } \imath = \rho A_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}, \quad (2.109)$$

donde  $\{A_j\}$  son los coeficientes de viscosidad turbillonaria, que juegan un papel análogo a la viscosidad  $\nu$  en los problemas laminares. Así las fuerzas por unidad de masa sí que adquieren ahora un aspecto absolutamente análogo matemáticamente a pesar de tener un origen físico bastante distinto:

$$f_i^\nu = \sum_{j=1}^3 \nabla_j \left( \frac{T_{ij}^\nu}{\rho} \right), \quad (2.110)$$

$$f_i^R = \sum_{j=1}^3 \nabla_j \left( \frac{T_{ij}^R}{\rho} \right). \quad (2.111)$$

Con objeto de completar el papel de todas las fuerzas intervinientes en las ecuaciones  $N$ - $S$ , vamos a expresar ahora las componentes cartesianas de la aceleración debidas a la gravedad, a la presión y a la fuerza de Coriolis:

- Gravedad.

$$\vec{g} = \sum_{i=1}^3 g_i \vec{e}_i = \lambda g_i = -g \delta_{i3} \quad \lambda = \sum_{i=1}^3 -g \delta_{i3} \vec{e}_i \quad \text{Componentes } i : \quad -g \delta_{i3}. \quad (2.112)$$

- Presión.

$$-\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = -\frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^3 \nabla_i p \vec{e}_i = -\frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad \text{Componentes } i : \quad -\frac{1}{\rho} \nabla_i p. \quad (2.113)$$

- Coriolis.

$$\begin{aligned} -2\vec{\Omega} \times \vec{V} &= -2 \left( \sum_{i=1}^3 \Omega_{i=1} \vec{e}_i \right) \times \left( \sum_{j=1}^3 V_j \vec{e}_j \right) = -2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Omega_i V_j \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \\ &= \lambda \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \quad \lambda = -2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \Omega_i V_j \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Recordemos que  $\varepsilon_{ijk}$  es el tensor de permutaciones definido así:

- $\varepsilon_{ijk} = 1$  si la terna  $ijk$  es transformable en 123 tras un número par de permutas.
- $\varepsilon_{ijk} = -1$  si la terna  $ijk$  es transformable en 123 tras un número impar de permutas.
- $\varepsilon_{ijk} = 0$  en los demás casos.

Permutando los subíndices  $k$  e  $i$ , y teniendo en cuenta que  $\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ijk}$ , obtenemos las componentes  $i$ :

$$-2\vec{\Omega} \times \vec{V} = -2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \Omega_k V_j \varepsilon_{kji} \vec{e}_i = 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \Omega_k V_j \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i; \quad (2.115)$$

Componente  $i$ :

$$2 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \Omega_k V_j \varepsilon_{ijk} \quad \text{donde } \Omega_1 = 0 \quad \Omega_2 = \Omega \cos \varphi \quad \Omega_3 = \Omega \sin \varphi. \quad (2.116)$$

Del término convectivo de la aceleración teníamos:

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{V} \vec{V}] = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (V_i V_j) \vec{e}_j. \quad (2.117)$$

Permutando  $i$  con  $j$ , y trabajando con nábla, aparecen las componentes  $i$  de la parte convectiva de la aceleración:

$$\text{Componentes } i \text{ de } \vec{\nabla} \cdot [\vec{V} \vec{V}]: \quad \sum_{j=1}^3 \nabla_j (V_j V_i). \quad (2.118)$$

Volviendo a escribir las ecuaciones N-S en términos conceptuales tenemos que la aceleración de un punto del sistema  $\vec{a}$  es igual a la resultante  $\vec{f}$  de las fuerzas actuantes por unidad de masa:

$$\vec{a} = \vec{f} \Rightarrow \underbrace{\vec{a}^{loc} + \vec{a}^{con}}_{\text{aceleraciones}} = \underbrace{\vec{f}^g + \vec{f}^p + \vec{f}^{cor} + \vec{f}^\nu + \vec{f}^R}_{\text{fuerzas / unid. masa}}. \quad (2.119)$$

Recapitulando las tres componentes  $i = \{1, 2, 3\}$  de las ecuaciones  $N - S$  para la cantidad de movimiento:

$$\underbrace{\frac{\partial V_i}{\partial t}}_{a_i^{loc}} + \underbrace{\sum_{j=1}^3 \nabla_j (V_j V_i)}_{a_i^{con}} = \underbrace{-g \delta_{i3}}_{f_i^g} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla_i p}_{f_i^p} + \underbrace{2 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \Omega_k V_j \varepsilon_{ijk}}_{f_i^{cor}} + \underbrace{\sum_{j=1}^3 \nabla_j \left( \frac{T_{ij}^\nu}{\rho} \right)}_{f_i^\nu} + \underbrace{\sum_{j=1}^3 \nabla_j \left( \frac{T_{ij}^R}{\rho} \right)}_{f_i^R}, \quad (2.120)$$

siendo  $T_{ij}^\nu$  el tensor de viscosidad newtoniana y  $T_{ij}^R$  el tensor de turbulencia proveniente de un E.V.M. (Eddy Viscosity Model):

$$T_{ij}^\nu = \rho \nu \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \rho \nu \nabla_j V_i \quad T_{ij}^R \equiv -\rho \langle v'_j v'_i \rangle = \lambda \text{ E.V.M. } \lambda = \rho A_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}. \quad (2.121)$$



### 4.3. Casos particulares relevantes

La discusión que viene a continuación trata sobre las aproximaciones que se pueden hacer a los términos dinámicos  $\{f_i^\nu, f_i^R\}$  y simplificaciones que esto conlleva sobre las ecuaciones de movimiento del sistema.

En general tenemos las siguientes expresiones para las fuerzas  $\{f_i^\nu, f_i^R\}$ , admitiendo la aproximación newtoniana para la primera y el modelo de viscosidad turbillanaria para la segunda:

$$f_i^\nu = \sum_{j=1}^3 \nabla_j \left( \frac{T_{ij}^\nu}{\rho} \right) = \text{\textcircled{Modelo de Newton}} \quad \lambda = \sum_{j=1}^3 \nabla_j (\nu \nabla_j V_i) , \quad (2.122)$$

$$f_i^R = \sum_{j=1}^3 \nabla_j \left( \frac{T_{ij}^R}{\rho} \right) = \text{\textcircled{Modelo Eddy Viscosity}} \quad \lambda = \sum_{j=1}^3 \nabla_j (A_j \nabla_j V_i) . \quad (2.123)$$

expresiones matemáticamente equivalentes donde los coeficientes  $\{\nu; A_j\}$  representan respectivamente a la viscosidad molecular y a la viscosidad turbulenta.

(a) Caso (1). Viscosidad molecular constante,  $\nu = cte$ :

$$\begin{aligned} f_i^\nu &= \sum_{j=1}^3 \nabla_j (\nu \nabla_j V_i) = \nu \sum_{j=1}^3 \nabla_j (\nabla_j V_i) = \nu \left( \sum_{j=1}^3 \nabla_j \nabla_j \right) V_i = \nu \left( \sum_{j=1}^3 \nabla_j^2 \right) V_i = \\ &= \nu \vec{\nabla}^2 V_i = \text{\textcircled{def. laplaciano}} : \vec{\nabla}^2 \equiv \Delta \quad \lambda = \nu \Delta V_i \Rightarrow \vec{f}^\nu = \nu \Delta \vec{V} , \end{aligned} \quad (2.124)$$

la expresión de las fuerzas sería:

$$\boxed{f_i^\nu = \nu \Delta V_i \quad , \quad f_i^R = \sum_{j=1}^3 \nabla_j (A_j \nabla_j V_i)} . \quad (2.125)$$

(b) Caso (2).- Viscosidad molecular constante,  $\nu = cte$ , y viscosidad turbulenta constante,  $A_j = cte_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ):

$$f_i^R = \sum_{j=1}^3 \nabla_j (A_j \nabla_j V_i) = \sum_{j=1}^3 A_j \nabla_j (\nabla_j V_i) = \sum_{j=1}^3 A_j \nabla_j^2 V_i , \quad (2.126)$$

para compactar la expresión se define el vector viscosidad turbulenta  $\vec{A}$  y el vector laplaciano que será notado por  $\vec{\Delta}$ :

$$\vec{A} \equiv [A_1 \ A_2 \ A_3] \quad , \quad \vec{\Delta} \equiv [\nabla_1^2 \ \nabla_2^2 \ \nabla_3^2] \quad , \quad (2.127)$$

quedando como sigue  $f_i^R$ :

$$f_i^R = (\vec{A} \cdot \vec{\Delta}) V_i \Rightarrow \vec{f}^R = (\vec{A} \cdot \vec{\Delta}) \vec{V} \quad , \quad (2.128)$$

siendo las expresiones de las fuerzas:

$$\boxed{\vec{f}^\nu = \nu \Delta \vec{V} \quad , \quad \vec{f}^R = (\vec{A} \cdot \vec{\Delta}) \vec{V}} \quad (2.129)$$

(c) CASO (3).- Viscosidad molecular constante,  $\nu = cte$ , viscosidad turbulenta constante,  $A_j = cte_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), y turbulencia horizontal isótropa ( $A_1 \simeq A_2 \equiv A_h$ ;  $A_3 \equiv A_v$ ):

$$\begin{aligned} \vec{f}^R &= (\vec{A} \cdot \vec{\Delta}) \vec{V} = (A_1 \Delta_1 + A_2 \Delta_2 + A_3 \Delta_3) \vec{V} = (A_h (\Delta_1 + \Delta_2) + A_v \Delta_3) \vec{V} = \\ &= \wr \text{ def. laplaciano horizontal y vertical: } \Delta_1 + \Delta_2 \equiv \Delta_h \quad \Delta_3 \equiv \Delta_v \wr = \\ &= (A_h \Delta_h + A_v \Delta_v) \vec{V} \quad , \quad (2.130) \end{aligned}$$

siendo las expresiones de las fuerzas:

$$\boxed{\vec{f}^\nu = \nu \Delta \vec{V} \quad , \quad \vec{f}^R = (A_h \Delta_h + A_v \Delta_v) \vec{V}} \quad (2.131)$$

que expresada en componentes cartesianas:

$$f_i^\nu = \nu \Delta V_i \quad f_i^R = (A_h \Delta_h + A_v \Delta_v) V_i \quad . \quad (2.132)$$

Utilizando una notación más oceanográfica tendremos que las fuerzas de fricción se expresarán de la manera siguiente:

- Viscosidad newtoniana.

$$\underline{\vec{f}^\nu = \nu \Delta \vec{V}} \Rightarrow f_x^\nu = \nu \Delta U = \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) ; \quad (2.133)$$

$$f_y^\nu = \nu \Delta V = \nu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \quad (2.134)$$

$$f_z^\nu = \nu \Delta W = \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) . \quad (2.135)$$

- Viscosidad turbillonaaria.

$$\underline{\vec{f}^R = (A_h \Delta_h + A_v \Delta_v) \vec{V}} \Rightarrow$$

$$f_x^R = (A_h \Delta_h + A_v \Delta_v) U = A_h \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \quad (2.136)$$

$$f_y^R = (A_h \Delta_h + A_v \Delta_v) V = A_h \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}; \quad (2.137)$$

$$f_z^R = (A_h \Delta_h + A_v \Delta_v) W = A_h \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}. \quad (2.138)$$

Sustituyendo en las componentes  $i$  de las ecuaciones de  $N - S$ :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \nabla_j (V_j U) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2(\Omega_3 V - \Omega_2 W) + f_x^\nu + f_x^R, \quad (2.139)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \nabla_j (V_j V) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega_3 U + f_y^\nu + f_y^R, \quad (2.140)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \nabla_j (V_j W) = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega_2 U + f_z^\nu + f_z^R. \quad (2.141)$$

En la inmensa mayoría de los problemas oceanográficos se desprecia la viscosidad molecular frente a la turbulenta ( $\nu \ll A_i$ ;  $i = 1, 2, 3$ ). También es bien sabido que las dimensiones verticales del océano son mucho menores que las horizontales, propiedad que condiciona también a las velocidades en las direcciones correspondientes ( $W \ll \{U, V\}$ ) y que nos permite despreciar uno de los términos ( $2\Omega_2 W$ ) de la primera ecuación. La componente de la fuerza de Coriolis en la dirección vertical es mucho menor que el peso ( $2\Omega_2 U \ll g$ ) para las velocidades típicas del sistema, por lo que no será tenida en cuenta. Introduciendo el factor de Coriolis ( $f \equiv 2\Omega_3 = 2\Omega \sin \varphi$ ) y teniendo en cuenta todo lo anterior se van a expresar las **ecuaciones  $N - S$  para la cantidad de movimiento en notación oceanográfica** ( $U, V, W$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(UU)}{\partial x} + \frac{\partial(VU)}{\partial y} + \frac{\partial(WU)}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ &+ fV + A_h \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (2.142)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(UV)}{\partial x} + \frac{\partial(VV)}{\partial y} + \frac{\partial(WV)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \\ -fU + A_h \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (2.143)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial(UW)}{\partial x} + \frac{\partial(VW)}{\partial y} + \frac{\partial(WW)}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \\ + A_h \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (2.144)$$

Al tratarse de un fluido incompresible tenemos el problema mecánico y el térmico desacoplados.

## 5. ECUACIONES DE MOVIMIENTO DEL FLUIDO OCEÁNICO

Supongamos en principio un medio de densidad ligeramente variable, siempre cumpliendo las hipótesis de Boussinesq; de modo que la presión pueda aproximarse por el modelo hidrostático:

$$\rho = \rho_o + \rho' \rightarrow p = p_a + g \int_z^\zeta \rho d\eta = p_a + g\rho_o(\zeta - z) + g \int_z^\zeta \rho' d\eta \quad (2.145)$$

donde  $\zeta$  es la elevación del mar por encima del nivel medio local  $z = 0$ , y  $H$  es la profundidad de modo que el punto inferior de la columna de líquido está en la cota mínima  $z = -H$ . Como la anomalía de densidad  $\rho'$  es mucho menor que el valor medio  $\rho_o$  ( $\rho' \ll \rho_o$ ), podemos aproximar la inversa de la densidad de esta manera:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_o + \rho'} \simeq \frac{1}{\rho_o} \quad (2.146)$$

Por otro lado, podemos intentar simplificar la siguiente integral:

$$g \int_z^\zeta \rho' d\eta = g \int_z^0 \rho' d\eta + g \int_0^\zeta \rho' d\eta \quad (2.147)$$

Como en los casos que vamos a estudiar  $\zeta$  es del orden de pocos centímetros y  $z$  del orden de pocos o muchos metros, será razonable suponer:

$$g \int_z^\zeta \rho' d\eta \simeq g \int_z^0 \rho' d\eta \quad (2.148)$$

Las componentes horizontales de la velocidad, la ecuación de continuidad, y el campo de presiones estará gobernado por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV + \frac{\partial(UU)}{\partial x} + \frac{\partial(VU)}{\partial y} + \frac{\partial(WU)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + A_v \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + A_h \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.149)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU + \frac{\partial(UV)}{\partial x} + \frac{\partial(VV)}{\partial y} + \frac{\partial(WV)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + A_v \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + A_h \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (2.150)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (2.151)$$

$$p = p_a + g\rho_o(\zeta - z) + g \int_z^0 \rho' d\eta \quad (2.152)$$

Tengamos en cuenta que:

$$\begin{aligned} \rho = \rho_o + \rho' &\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho_o}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.153)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + g\rho_o \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + g \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial x_i} d\eta \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (2.154)$$

Sustituyendo (2.154) en las ecuaciones (2.149) y (2.150) e introduciendo para abreviar el operador laplaciano horizontal  $\Delta_h$ :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial t} - fV + \frac{\partial(UU)}{\partial x} + \frac{\partial(VU)}{\partial y} + \frac{\partial(WU)}{\partial z} = \\ &= -\frac{1}{\rho_o} \left( \frac{\partial p_a}{\partial x} + g\rho_o \frac{\partial \zeta}{\partial x} + g \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial x} d\eta \right) + A_v \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + A_h \Delta_h U \end{aligned} \quad (2.155)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial t} + fU + \frac{\partial(UV)}{\partial x} + \frac{\partial(VV)}{\partial y} + \frac{\partial(WV)}{\partial z} = \\ &= -\frac{1}{\rho_o} \left( \frac{\partial p_a}{\partial y} + g\rho_o \frac{\partial \zeta}{\partial y} + g \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial y} d\eta \right) + A_v \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + A_h \Delta_h V \end{aligned} \quad (2.156)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (2.157)$$

De esta manera, queda planteado un sistema de tres ecuaciones (2.155), (2.156), (2.157) con tres incógnitas  $\{U, V, W\}$ , dada la hipótesis de que se conocieran las funciones restantes  $\{\rho, p_a, \zeta, A_z, A_h\}$  involucradas en el sistema.

## 6. CASO PARTICULAR: EL PROBLEMA DE EKMAN SIMPLE

Antes de entrar en soluciones numéricas del problema, parece interesante mostrar algunas soluciones particulares como son las ecuaciones libre de contornos laterales y de fondo. Es el caso particular más simple de todos los problemas de circulación inducida por vientos y sirve para darnos una primera estimación de funciones tan importantes como:

- El diámetro  $\phi$  para las órbitas inerciales. Esta magnitud se define para un flujo gobernado únicamente por la gravedad y la fuerza de Coriolis. A este primer caso podemos denominarlo flujo inercial simple.
- El perfil vertical de velocidades (*hélice de Ekman*) para flujo horizontal, homogéneo y estacionario. A este segundo caso podemos denominarlo flujo Ekman simple. Aquí se estudiará también espesor de la capa Ekman, zona donde se absorbe la inmensa mayoría de la energía externa que proporciona el viento.

Esta estimación va a ayudarnos a entender e interpretar mejor las soluciones estacionarias de los campos  $\{\psi(x, y), \zeta(x, y), \vec{v}_M(x, y), \vec{v}_s(x, y)\}$  correspondientes respectivamente a la función de corrientes, la función elevación, la velocidad media en la columna de líquido, y la velocidad en superficie, a las que llega Jankowski [80] en su modelo integrado de corrientes bidimensionales inducidas por los 8 vientos en las direcciones principales, con una intensidad de  $10 \text{ m s}^{-1}$  a una altura de diez metros sobre la superficie del mar Báltico. Estas soluciones pueden extenderse a las tres dimensiones [80], quedando este campo estacionario de corrientes evaluado en función de la profundidad, y preparado para futuras aplicaciones en esta tesis doctoral, donde se tendrá en cuenta también la capa Ekman de fondo (o bentónica), de una naturaleza matemática similar a la de superficie, pero inducida lógicamente por la tensión en la base de la columna de líquido. Esta solución de Ekman más general, que veremos en el capítulo 4, aportará términos dependientes del contorno y de la batimetría en general, destacando la contribución de las corrientes geostroficadas.

### 6.1. Flujo inercial simple.

Estamos ante el caso más simple del transporte Ekman. Para estudiar las corrientes cerca de la superficie del océano es interesante empezar por aquí, considerando este caso tan particular [146] en que el sistema tras ser sometido a un fuerte viento durante unas horas deja de recibir este impulso y sigue moviéndose por inercia, sometido únicamente a la fuerza de la gravedad y a la de Coriolis; despreciando la influencia de la fricción. Las ecuaciones de movimiento, teniendo en cuenta (2.18) y (2.19), quedarían como sigue:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v \sin \varphi \quad (2.158)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \varphi \quad (2.159)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega u \cos \varphi - g \quad (2.160)$$

donde:  $\Omega$  es la velocidad angular de rotación de la Tierra, con  $\Omega = 2\pi/T_{sid} = 7.292 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}$ ;  $T_{sid} = 86164 \text{s}$  es el periodo sidéreo; y  $f = 2\Omega \sin \varphi$  el factor de Coriolis dependiente de la latitud  $\varphi$ .

Buscando soluciones simples a estas ecuaciones podemos analizar lo que ocurre si despreciamos el gradiente horizontal de presiones frente al término de movimiento y al de la fuerza de Coriolis:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.161)$$

Si no se tienen en cuenta la influencia de los contornos puede decirse que el flujo será horizontal, quedando como sigue la ecuaciones de movimiento:

$$\frac{du}{dt} = 2\Omega v \sin \varphi = fv \quad (2.162)$$

$$\frac{dv}{dt} = -2\Omega v \sin \varphi = -fu \quad (2.163)$$

Se trata de un sencillo sistema de ecuaciones diferenciales lineales acopladas que puede ser resuelto mediante técnicas tradicionales. Derivando la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{f} \frac{d^2v}{dt^2} = fv \quad (2.164)$$

Reordenado términos, puede reconocerse la ecuación diferencial del oscilador armónico:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + f^2v = 0 \quad (2.165)$$

Este sistema se integra de una manera aún más simple utilizando notación vectorial. Usando el vector velocidad  $\vec{v} = [u, v]$ , el sistema de ecuaciones se expresa de la forma:

$$\dot{\vec{v}} = -f\vec{e}_z \wedge \vec{v} = f[-v, u] \quad (2.166)$$

Salta a la vista que el vector aceleración es perpendicular al vector velocidad:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -f\vec{e}_z \wedge \vec{v} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{v} \quad (2.167)$$

Esto quiere decir que la aceleración tangencial es nula y sólo queda la normal:

$$\vec{a} = \vec{a}_N \quad \vec{a}_T = 0 \Rightarrow |\vec{v}| = cte \Rightarrow |\vec{a}_N| = |\vec{a}| = f|\vec{v}| = CTE \quad (2.168)$$

Como el movimiento es uniforme ( $|\vec{v}| = cte$ ) y con aceleración normal constante  $|\vec{a}_N| = CTE$ , tenemos que la solución es el movimiento circular uniforme cuyo radio  $R$  será:

$$R = \frac{|\vec{v}|^2}{a_N} = \frac{|\vec{v}|}{f} = constante \quad (2.169)$$

El llamado periodo inercial viene dado por  $T_{ine} = 2\pi R/|\vec{v}|$  y define el llamado *día pendular* en alusión al tiempo empleado por su plano de oscilación al realizar un ciclo completo.

Teniendo en cuenta que  $f = 2\Omega \sin \varphi$  y  $\Omega = 2\pi/T_{sid}$ , resultan las siguientes expresiones para el periodo y el diámetro inercial  $\{\phi, T_{ine}\}$ :

$$\phi = 2|\vec{v}|/f = \frac{|\vec{v}|T_{sid}}{2\pi \sin \varphi} \quad T_{ine} = \frac{T_{sid}}{2 \sin \varphi} \quad (2.170)$$



A continuación se muestra la gráfica de un interesante experimento [196] sobre corrientes inerciales medidas a una profundidad de 15 m en el Pacífico Norte, en octubre de 1987, durante un periodo de 25 días. Las posiciones fueron observadas 10–12 veces al día mediante el sistema Argos de satélites meteorológicos de órbita polar de la NOAA. Las corrientes mayores se generaron el tercer día debido a una tormenta que tuvo lugar en esa zona del océano.

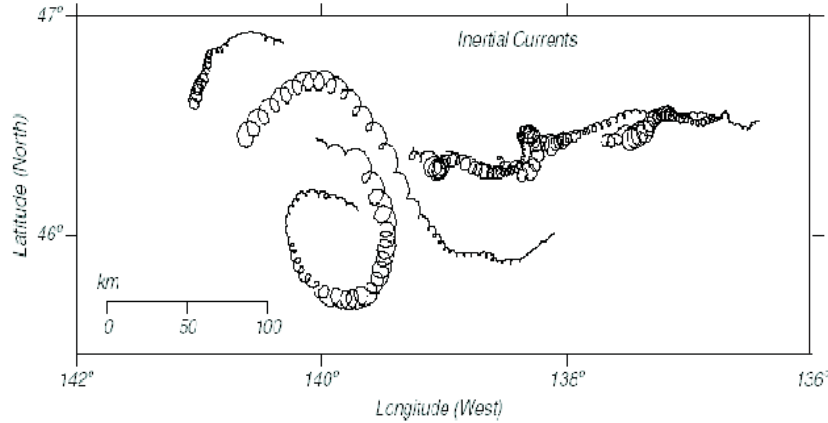


Figura 2.5: Corrientes inerciales medidas en el Pacífico Norte [196]. Cada bucle corresponde con una oscilación inercial, que ocurre aproximadamente cada 17 horas.

Para ver la variación del periodo y del diámetro inerciales en función de la latitud se muestra una tabla ilustrativa para una velocidad típica de deriva  $|\vec{v}| = 20 \text{ cm s}^{-1}$ :

TABLA 2.1: Órbitas inerciales para  $|\vec{v}| = 20 \text{ cm s}^{-1}$ :

Latitud $\varphi$ ( $^\circ$ )	Periodo inercial $T_{ine}$ (h)	Diámetro $\phi$ (km)
10	68.93	15.8
40	18.62	4.3
60	13.82	3.2
90	11.97	2.7

### 6.2. Flujo Ekman simple.

Las soluciones para este flujo particular se obtienen imponiendo la condición de carácter estacionario en las ecuaciones generales (2.155) y (2.156), a la que hay que

unir el carácter despreciable de los términos no lineales advectivos y la condición de homogeneidad ( $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ ), lo que nos lleva al sistema siguiente:

$$A_z \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + fV = 0 \quad (2.171)$$

$$A_z \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - fU = 0 \quad (2.172)$$

como puede consultarse en la literatura [174]. Más adelante, en el capítulo 4, cuando amplíemos las soluciones del transporte Ekman a condiciones más realistas, revisaremos la hipótesis sobre los términos no lineales advectivos y su carácter despreciable en relación con la resolución horizontal del modelo. Veremos también que la hipótesis de homogeneidad no será sostenible cuando aparezcan condiciones de contorno, ya que su validez está vinculada a la ausencia de las mismas.

Tenemos además las siguientes condiciones de contorno para  $z = 0$ :

$$T_{xz} = \rho A_z \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.173)$$

$$T_{yz} = \rho A_z \frac{\partial V}{\partial z} \quad (2.174)$$

donde  $\{T_{xz}, T_{yz}\}$  son las tensiones producidas por los vientos.

Pueden proponerse soluciones del tipo:

$$U(z) = V_o e^{az} \sin(\alpha - az) \quad (2.175)$$

$$V(z) = V_o e^{az} \cos(\alpha - az); \quad (2.176)$$

donde se define la función angular  $\theta(z) \equiv \alpha - az$ .

Vamos a estudiar el caso en que el viento sopla hacia el norte ( $T_{xz} = 0; T_{yz} = T$ ) y calcularemos los valores de  $\{\alpha, a, V_o\}$  en función de  $\{T, A_z, f\}$ .

Salta a la vista, sustituyendo simplemente  $z = 0$ , que la velocidad del fluido en esa posición tiene por módulo  $V_o$  y forma un ángulo  $\alpha$  con la dirección del viento.

La constante  $a$  va a estar relacionada con el paso de rosca de la hélice de corrientes, sin más que imponer  $\Delta\theta = 2\pi$ :

$$\theta(z) \equiv \alpha - az; \quad \Delta\theta = -a\Delta z \quad (2.177)$$

Tras una vuelta de la hélice  $\Delta\theta = 2\pi$  se produce un incremento  $\Delta z = -2\pi/a$ . Tomando valor absoluto queda determinado el paso de rosca  $h$  de la hélice en función de la constante  $a$ ,  $h = 2\pi/a$ .

Para calcular  $a = a(f, A_z)$ , basta sustituir las soluciones propuestas de  $\{U(z), V(z)\}$  y sus derivadas en la primera ecuación diferencial del sistema ( $A_z U'' + fV = 0$ ):

$$U' = V_o a e^{az} [\sin(\alpha - az) - \cos(\alpha - az)]; \quad U'' = -2a^2 V_o e^{az} \cos(\alpha - az) \quad (2.178)$$

$$V(z) = V_o e^{az} \cos(\alpha - az) \Rightarrow a = \sqrt{\frac{f}{2A_z}} = a(f, A_z) \quad (2.179)$$

Impongamos la primera condición de contorno:

$$T_{xz} = \rho A_z \frac{\partial U}{\partial z}; \quad T_{xz} = 0 \quad z = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \rho A_z \frac{\partial}{\partial z} [V_o e^{az} \sin(\alpha - az)]; \quad z = 0 \quad (2.180)$$

$$\Rightarrow \quad e^{az} [\sin(\alpha - az) - \cos(\alpha - az)] = 0; \quad z = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}} \quad (2.181)$$

que es el ángulo crítico en la hélice de corrientes de Ekman.

Si finalmente se impone la segunda condición de contorno:

$$T_{yz} = \rho A_z \frac{\partial V}{\partial z}; \quad T_{yz} = T \quad z = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \rho A_z V_o a e^{az} [\sin(\alpha - az) + \cos(\alpha - az)] \quad (2.182)$$

$$z = 0 \quad \sin \alpha = \cos \alpha = 1/\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad V_o = \frac{T}{\sqrt{2} \rho A_z a} \quad (2.183)$$

y sustituyendo  $a(f, A_z)$ :

$$V_o = \frac{T}{\sqrt{\rho^2 f A_z}} \quad (2.184)$$

La gráfica que se muestra a continuación [174] es una ilustración clara del campo de velocidades estacionario en una columna de líquido cuando intervienen únicamente la fricción (con  $A_z$  constante) y la fuerza de Coriolis, y se desprecia la influencia del contorno con todas las simplificaciones de homogeneidad que esto conlleva.

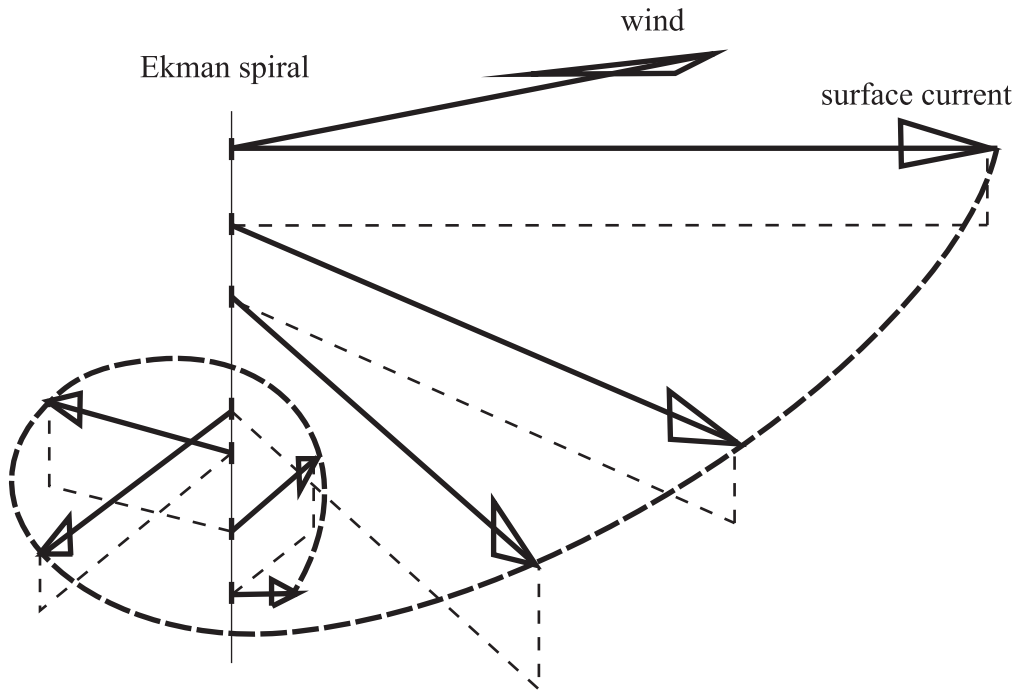


Figura 2.6: Espiral de Ekman para el campo de velocidades en una columna de líquido.

Para estudios más cualitativos será muy conveniente saber cuál es el valor medio alcanza un campo de velocidades representado por la hélice de Ekman. Vamos a demostrar que esta velocidad media  $\vec{V}$  es perpendicular a la velocidad del viento  $\vec{V}_w$ . Partiendo del campo helicoidal de velocidades:

$$\vec{V}(z) = V_o e^{az} [\text{sen}(\alpha - az), \text{cos}(\alpha - az)] = [U(z), V(z)] \quad (2.185)$$

los valores medios estarán definidos por:

$$\vec{V} = \frac{1}{H} \int_0^{-H} \vec{V}(z) dz = [\bar{U}, \bar{V}];$$

$$\bar{U} = \frac{1}{H} \int_0^{-H} U(z) dz; \quad \bar{V} = \frac{1}{H} \int_0^{-H} V(z) dz \quad (2.186)$$

Si cambiamos a una variable más cómoda de integración ( $\theta = \alpha - az$ ), las funciones a integrar serían  $\{U(\theta) = V_o e^\alpha e^{-\theta} \sin \theta, V(\theta) = V_o e^\alpha e^{-\theta} \cos \theta\}$ , y los límites de integración  $\{z = 0; z = -H\}$  cambiarían a  $\{\theta = \alpha; \theta = \alpha + aH \equiv \theta_f\}$ , quedando los promedios como sigue:

$$\bar{U} = \frac{1}{\theta_f - \alpha} \int_\alpha^{\theta_f} U(\theta) d\theta \quad \bar{V} = \frac{1}{\theta_f - \alpha} \int_\alpha^{\theta_f} V(\theta) d\theta \quad (2.187)$$

Puesto que el módulo de la velocidad decae exponencialmente, podemos cortar la definición del valor medio tras una vuelta de la hélice, ya que a partir de entonces puede decirse que el campo de velocidades es despreciable:

$$|\vec{V}(2\pi)| = V_o e^{\alpha - 2\pi} = V_o e^{-7\pi/4} \simeq V_o / 250 \ll V_o = |\vec{V}(0)| \quad (2.188)$$

Así, los valores medios asociados a un ciclo de la hélice serán:

$$\bar{U} = \frac{4}{7\pi} \int_\alpha^{2\pi} U(\theta) d\theta \quad \bar{V} = \frac{4}{7\pi} \int_\alpha^{2\pi} V(\theta) d\theta \quad (2.189)$$

• **Cálculo de  $\{\bar{U}, \bar{V}\}$ .**

De manera sencilla se obtienen las siguientes primitivas que definimos como  $\{I_U, I_V\}$ :

$$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} (\sin x + \cos x) / 2 \equiv I_U(x) \quad (2.190)$$

$$\int e^{-x} \cos x dx = e^{-x} (\sin x - \cos x) / 2 \equiv I_V(x) \quad (2.191)$$

Tomando los límites de integración:

$$\bar{U} = \frac{4}{7\pi} V_o e^\alpha [I_U(2\pi) - I_U(\alpha)] \quad \bar{V} = \frac{4}{7\pi} V_o e^\alpha [I_V(2\pi) - I_V(\alpha)] \quad (2.192)$$

Realizando las sustituciones oportunas:

$$\bar{U} = \frac{2}{7\pi} V_o e^\alpha [e^{-\alpha} \sqrt{2} - e^{-2\pi}] = \lambda e^{-2\pi} \ll e^{-\alpha} \lambda \simeq \frac{2}{7\pi} V_o e^\alpha e^{-\alpha} \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{7\pi} V_o \quad (2.193)$$

$$\bar{V} = \frac{2}{7\pi} V_o e^\alpha \left[ e^{-2\pi} - e^{-\alpha} \overbrace{(\sin \alpha - \cos \alpha)}^{=0} \right] = \frac{2}{7\pi} V_o e^{\alpha-2\pi} \ll \bar{U} \Rightarrow \bar{V} \simeq 0 \quad (2.194)$$

recordando que la velocidad del viento va en dirección norte  $\vec{V}_w \parallel \vec{e}_y$ :

$$\vec{V} = [\bar{U}, 0] \parallel \vec{e}_x \Rightarrow \vec{V} \perp \vec{V}_w \quad (2.195)$$

que era lo que se quería demostrar.

La tensión inducida por los vientos fue introducida por Ekman [30] de un modo bastante común, tal como sigue:

$$T_{yz} = T = \rho_{air} C_D U_{10}^2 \quad (2.196)$$

donde  $C_D$  y  $U_{10}$  son el coeficiente de arrastre y la velocidad del viento 10 m por encima de la superficie del mar, respectivamente. A  $U_{10}$  también se le denomina en la literatura mediante la notación  $U_a$ , que usaremos indistintamente en este texto para referirnos a la velocidad del viento.

Ekman trabajó entonces con relaciones empíricas entre la velocidad de la corriente en la superficie oceánica  $V_o$  y la velocidad del viento  $U_{10}$ :

$$V_o = \frac{C_1}{\sqrt{\sin |\varphi|}} U_{10}; \quad C_1 = 0.0127; \quad |\varphi| \geq 10 \quad (2.197)$$

Es interesante de cara al modelo que se va a exponer estimar valores típicos de  $V_o$  para el Mar Báltico, donde tomamos un valor medio de la latitud  $\bar{\varphi} \simeq 60^\circ$ :

$$V_o(\text{cm s}^{-1}) \simeq \frac{3}{2} U_{10}(\text{m s}^{-1}) \quad (2.198)$$

Existen diversas parametrizaciones [2, 142] de  $V_o$  en función de  $U_{10}$

$$V_o(\text{cm s}^{-1}) = \lambda_D U_{10}(\text{m s}^{-1}) \quad (2.199)$$

la mayoría colocan a  $\lambda_D$  en el intervalo

$$3/2 \leq \lambda_D \leq 3 \quad (2.200)$$

por lo que estaríamos hablando de velocidades superficiales comprendidas entre un 1.5% y un 3% de la velocidad del viento a 10 m de altura.

• **Profundidad de la capa Ekman.**

Aunque el decaimiento es exponencial, la profundidad de la capa Ekman fue definida como aquella en cuyo punto más bajo la corriente circula en sentido contrario al que lo hace en la superficie del océano:

$$\theta = \pi/4 + \pi = \pi/4 - az_E \Rightarrow z_E = -\pi/a, \tag{2.201}$$

donde definiendo  $D_E \equiv |z_E|$  y sustituyendo  $a = a(A_z, f)$ , nos queda la siguiente expresión para  $D_E(A_z, f)$ :

$$D_E = \pi/a = \sqrt{\frac{2\pi^2 A_z}{f}} \tag{2.202}$$

Teniendo en cuenta un valor de  $C_D$  usado por Ekman ( $C_D = 2.6 \cdot 10^{-3}$ ), e introduciendo en  $D_E(A_z, f)$  las funciones conocidas  $\{A_z(V_o, T), V_o(U_{10}), T(U_{10}), f(\varphi)\}$ , se llega a la expresión final de  $D_E(U_{10}, \varphi)$  :

$$D_E = \frac{C_2}{\sqrt{\sin |\varphi|}} U_{10} \quad ; \quad C_2 = 7.6 \text{ s} \tag{2.203}$$

A continuación se muestra una pequeña tabla con valores la profundidad Ekman  $D_E$  para varias latitudes y velocidades del viento representativas.

TABLA 2.2: Profundidad de la capa Ekman según la velocidad del viento y la latitud

$U_{10}(\text{m/s})$	$D_E(\text{m}); \varphi = 15^\circ$	$D_E(\text{m}); \varphi = 45^\circ$	$D_E(\text{m}); \varphi = 60^\circ$
5	40	30	27
10	90	50	45
20	180	110	100

Por definición hemos dicho que la profundidad Ekman  $D_E$  es aquella en la que el vector corriente  $\vec{v}$  forma  $\pi$  radianes con la velocidad del fluido en la superficie del océano  $\vec{V}_o$ :

$$z = -D_E : \quad \widehat{\vec{v}(z) \vec{V}_o} = \pi \tag{2.204}$$

Otra forma de llamar a  $D_E$  va a ser la siguiente:  $D_E \equiv D_\pi$ .

Integrando en la columna de agua, se ha demostrado que el flujo medio en la capa Ekman viaja en la dirección que forma  $45^\circ$  con la velocidad superficial; ortogonalmente por tanto a la velocidad del viento  $U_{10}$ . Vamos a definir esa profundidad como  $D_{\pi/4}$ . Se ve fácilmente que  $D_{\pi/4} = D_\pi/4 \equiv D_E/4$ .

También resulta interesante definir la profundidad  $D_\perp$  :  $\vec{v} \perp \vec{V}_o$ . Se calcula fácilmente que  $D_\perp = D_E/2$ .

Las tres profundidades definidas anteriormente  $\{D_E, D_{\pi/4}, D_\perp\}$  están relacionadas con la dirección del campo de velocidades del fluido. Es por ello que a continuación se va a definir una profundidad relacionada con el módulo de las velocidades. Se define profundidad crítica  $D_c$  para el decaimiento exponencial  $1/e$ :

$$z = -D_c \rightarrow v(z) = v_c = V_o/e \quad (2.205)$$

Es fácil obtener que:  $D_c = D_E/\pi$ . A continuación se muestra una tabla particularizada para el Mar Báltico con valores típicos de estas profundidades y de la velocidad superficial  $V_o$  en función de la velocidad del viento  $U_{10}$ .

TABLA 2.3: Algunas características de la capa Ekman en el Mar Báltico

$U_{10}$ (m/s); Viento	$V_o$ (cm/s); Océano	$D_E$ (m)	$D_{\pi/4}$ (m)	$D_c$ (m)	$D_\perp$ (m)
5	7.5	27	7	9	14
10	15	45	11	15	23
20	30	100	25	32	50

Una característica de la capa Ekman es que en su interior la fuerza de fricción y la de Coriolis alcanzan valores del mismo orden. Es por ello que se define el cociente entre ambas fuerzas, magnitud adimensional llamada *número de Ekman*  $E$ :

$$E = \frac{\text{Fuerza de Fricción}}{\text{Fuerza de Coriolis}} = \frac{A_z \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}}{fU} \quad (2.206)$$

Si introducimos una velocidad típica  $U$  y una profundidad representativa  $d$  en la que se produzcan las variaciones de  $U$ , podemos aproximar el numerador como sigue:



$$A_z \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \approx A_z \frac{U}{d^2} \Rightarrow E = \frac{A_z U / d^2}{fU} = \frac{A_z}{fd^2} \quad (2.207)$$

Si evaluamos  $E$  al final de la capa Ekman:

$$d = D_E = \sqrt{\frac{2\pi^2 A_z}{f}} \Rightarrow E = \frac{A_z}{f} \frac{f}{2\pi^2 A_z} = \frac{1}{2\pi^2} \cong \frac{1}{20} \quad (2.208)$$

Como cabía esperar, a esa profundidad el número de Ekman ya es muy pequeño. Se comprueba que  $E$  decrece con la profundidad, tendencia que se mantiene hasta que aparece la fricción debida al fondo del océano, es decir hasta que nos aproximamos a la otra capa límite. Por debajo de la capa Ekman, y lejos del fondo marino, el número  $E$  es muy pequeño ( $E \ll 1$ ), predominando la influencia de la fuerza de Coriolis.

### 6.3. La capa Ekman atmosférica.

La capa Ekman de la que acabamos de hablar es una zona superficial en el océano sensible doblemente a la influencia del viento y de la fuerza de Coriolis. Aunque es la más importante en lo que a los problemas de transporte oceánico se refiere, es obligatorio mencionar otra notable capa Ekman que acompaña a la anterior en los problemas tierra-océano:

*Capa Ekman atmosférica*, que es la capa límite de aire en contacto con el océano.

La solución matemática a este problema indica que el flujo neto de viento cerca de la interfase con el océano, caracterizado por  $\vec{U}_{10}$ , forma un ángulo de  $45^\circ$  hacia la izquierda -en el hemisferio norte- con respecto al flujo atmosférico de altura. Según la aproximación geostrófica el flujo atmosférico de altura se mueve perpendicularmente a los gradientes de presión siguiendo una dirección prácticamente isobárica.

Si tenemos en cuenta que las corrientes oceánicas superficiales forman un ángulo de  $45^\circ$  a la derecha de  $\vec{U}_{10}$ , de lo cual resulta que tenemos una curiosa *compensación* de la suma de ambos efectos cuyo resultado es que *las corrientes superficiales oceánicas inducidas por los vientos siguen prácticamente las líneas isobáricas*.

Para ilustrar esta importante propiedad se va a mostrar a continuación una gráfica representativa de un experimento [120] realizado en el Océano Pacífico. Se representan

las isobaras promediadas para el mes de abril de 1978, y las trayectorias seguidas por las boyas de prueba a la deriva. Se observa que las trayectorias transcurren sobre caminos prácticamente isobáricos, a excepción de la zona de la corriente de Kuroshio, cerca del archipiélago japonés, donde no se reúnen las condiciones necesarias para esta clase de transporte.

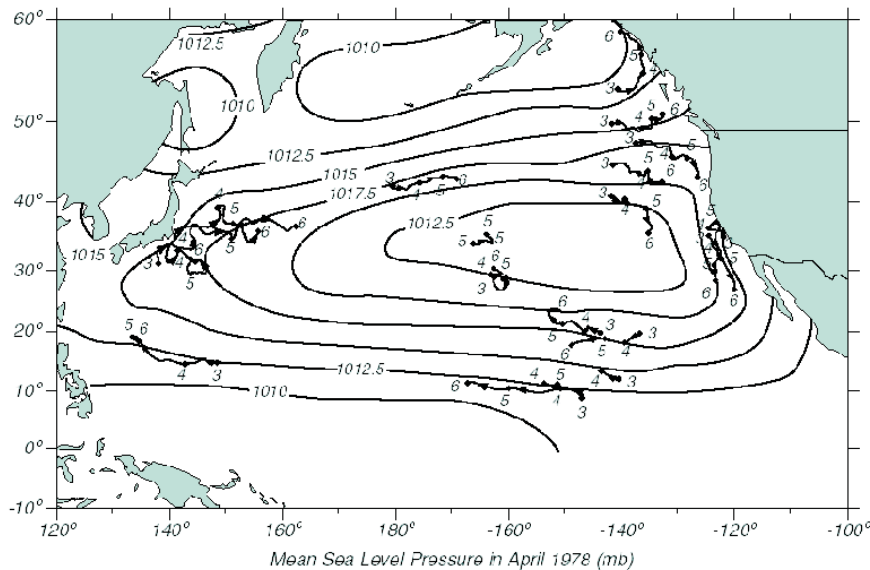


Figura 2.7: Trayectorias de boyas a la deriva, próximas a las líneas isobáricas [120].

#### 6.4. Algunas revisiones, limitaciones y validaciones del transporte Ekman.

Son innumerables los trabajos que se han realizado con posterioridad a estos pioneros estudios en Oceanografía. Las correcciones más importantes que cabe destacar son:

- (a) Correcciones por cercanía a la costa, debido a que la solución de Ekman está libre de contornos.
- (b) Intervalo transitorio. El transporte Ekman clásico se preocupa del estado estacionario, lo cual requiere que los vientos soplen durante periodos superiores a un día pendular. De todas maneras, el propio Ekman calculó también una solución dependiente del tiempo, del mismo tipo a la que obtuvo años más tarde [61].
- (c) Correcciones por estabilidad vertical. Es relativamente simple suponer que  $A_z$  depende únicamente de  $U_{10}^2$ . Es mucho más realista suponer que el coeficiente de viscosidad sea dependiente también de la profundidad.

- (d) Correcciones por la variación de la densidad. Este cuestión también afecta al problema de la estabilidad.

Las cuestiones sobre la estabilidad y la difusión en general, serán ampliadas en el capítulo 5 de este trabajo.

Una gran variedad de cuidadosos experimentos y medidas de corrientes se ha realizado a lo largo del siglo XX [200, 24, 153] confirmando la bondad de la Teoría de Ekman y el papel fundamental de las corrientes inerciales. Son mencionables los trabajos realizados [153] en relación con la profundidad Ekman  $D_E$  y la velocidad en superficie  $V_o$ :

$$V_o = \frac{C_3}{\sqrt{\sin |\varphi|}} U_{10} ; \quad C_3 = 0.0068 ; \quad |\varphi| \geq 10^\circ \tag{2.209}$$

$$D_E = \frac{C_4}{\sqrt{\sin |\varphi|}} U_{10} ; \quad C_4 = 7.12 \text{ s} \tag{2.210}$$

La primera es la mitad de la propuesta por Ekman, debido en gran parte a las cuestiones de estabilidad aludidas anteriormente; mientras que en la segunda se produce un acierto digno de mención dada la complejidad de estas medidas.

El transporte Ekman, con sus limitaciones sobre las condiciones de contorno del problema, será de gran utilidad cualitativa y cuantitativa en la metodología y análisis de nuestro modelo.

## 7. ECUACIÓN DE ADVECCIÓN–DIFUSIÓN: TRANSPORTE DE MATERIA

Esta ecuación describe de una manera general los fenómenos físicos de transferencia de materia en un sistema físico. En otros campos de la física es denominada frecuentemente como ecuación de convección–difusión o ecuación de trasporte. En la mecánica de fluidos se ha abordado siempre el problema de transporte de una función escalar  $A(\vec{r}, t)$ , que físicamente se corresponde con alguna función densidad (densidad de materia asociada a una sustancia concreta –concentración–, densidad de carga, actividad –densidad de desintegraciones por segundo–, etc.), denoninación que usaremos en algunas partes de este documento.

Las partes advectiva y difusiva del transporte están asociadas respectivamente al término promedio  $(\vec{V})$  y al turbulento  $(\vec{v}')$  de la velocidad  $(\vec{v})$  del fluido en cada punto  $P$

del espacio. Representemos el flujo mediante el vector  $\vec{\Phi}$ , que nos da cuenta de la cantidad de materia (expresada en unidades extensivas tales como gramos o bequerelios) que por unidad de tiempo atraviesa una unidad de superficie colocada en  $P$  perpendicularmente al vector  $\vec{\Phi}$ . Su parte advectiva será igual a

$$\vec{\Phi}_{adv} = A\vec{V}. \quad (2.211)$$

La parte difusiva –en el problema unidimensional–, siguiendo la primera ley de Fick, toma la expresión

$$\vec{\Phi}_{dif} = -D\vec{\nabla}A, \quad (2.212)$$

donde  $D$  es la difusividad o coeficiente de difusión.

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad para el escalar  $A(\vec{r}, t)$ ,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi} = \mathcal{S} \quad (2.213)$$

donde  $\mathcal{S}$  es la función fuente volumétrica, y sustituyendo el flujo total como suma del advectivo más el difusivo

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_{adv} + \vec{\Phi}_{dif} = A\vec{V} - D\vec{\nabla}A, \quad (2.214)$$

se llega a

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (A\vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (-D\vec{\nabla}A) = \mathcal{S}, \quad (2.215)$$

resultado que incluye como un caso particular (despreciables la advección y las fuentes :  $\vec{V} = \vec{0}$ ,  $\mathcal{S} = 0$ ) a la segunda ley de Fick.

En el caso del transporte de un radionúclido, como el que aquí nos ocupa,  $^{137}\text{Cs}$ , de actividad  $A$  y constante de desintegración  $\lambda$ , se cumple que su término fuente es

$$\mathcal{S} = -\lambda A. \quad (2.216)$$

En el problema tridimensional se suele separar la difusión en una parte horizontal y otra vertical

$$\vec{\Phi}_{dif} = -D_h \vec{\nabla}_h A + -D_v \vec{\nabla}_v A, \quad (2.217)$$

teniendo de este modo la siguiente ecuación para el transporte 3D de la función escalar  $A(\vec{r}, t)$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (A \vec{V}) + \vec{\nabla}_h \cdot (-D_h \vec{\nabla}_h A) + \vec{\nabla}_v \cdot (-D_v \vec{\nabla}_v A) = \mathcal{S}. \quad (2.218)$$

El problema hidrodinámico y el problema de transporte pueden estar acoplados. El ejemplo más sencillo es imaginar que la función escalar estudiada en el problema de transporte fuera la función salinidad, materia que participa activamente en las ecuaciones hidrodinámicas del sistema por su importancia en la función densidad del fluido.

En esta tesis doctoral, las funciones escalares principales cuyo transporte vamos a estudiar son: la densidad de materia en suspensión y la actividad de  $^{137}\text{Cs}$  en el océano, escalares pasivos ambos, que nos permiten desacoplar la hidrodinámica del problema de transporte.

Así, desde un punto de vista conceptual, podemos decir que si resolvemos las ecuaciones hidrodinámicas del apartado anterior, (2.155), (2.156), (2.157), y obtenemos a partir de ellas el campo de velocidades  $\vec{V}(\vec{r}, t)$ , podremos sustituirlo en la ecuación diferencial de transporte, (2.218), y de allí, tras la integración numérica correspondiente, deducir la solución del problema que nos ocupa aquí, que no es otro que la función escalar  $A(\vec{r}, t)$ .

# Capítulo 3

## Descripción General del Mar Báltico y de sus Procesos Físicos

### 1. SITUACIÓN GEOGRÁFICA, DIMENSIONES, BATIMETRÍA Y ORIGEN GLACIAL DEL MAR BÁLTICO

Para hacer un primer acercamiento al sistema se presenta a continuación una figura esquemática 3.1 donde se aprecia la situación geográfica del Mar Báltico y una división del mismo en compartimentos.

El Báltico conecta por mar a una gran parte de los países del norte de Europa: Alemania, Dinamarca, Suecia, Finlandia, Rusia, Estonia, Letonia, Lituania y Polonia.

El zona central y principal del Mar Báltico es denominada Báltico Estricto y aglutina a cinco de las quince zonas: Báltico Estricto Norte (6), Gotland Cuenca (7 y 8), Bornholm (11) y Arkona (12). En esta zona se encuentran los puntos más profundos de nuestro sistema, a ambos lados de la isla de Gotland, principal isla del Mar Báltico.

La distribución de zonas del Báltico con el área y el volumen de cada una se encuentra en la tabla 3.1.

En el mapa batimétrico del Mar Báltico (figura 3.2) se han representado las isolíneas de profundidad correspondientes a  $\{0, 10, 20, 40, 60, 80, 100, 150, 200\}$  m, de gran importancia en las corrientes por constituir el conjunto de condiciones de contorno más determinante del problema matemático que se tiene que resolver.

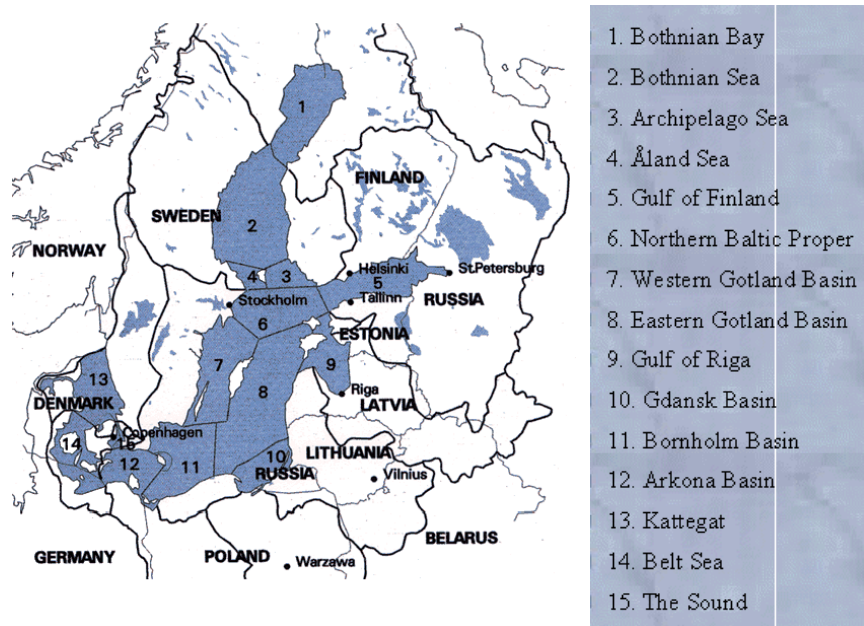


Fig.3.1. División del Mar Báltico en quince zonas y su situación geográfica.

Lógicamente, su influencia será mayor en los elementos del fluido cercanos a la costa y en las capas inferiores de la columna de líquido.

TABLA 3.1: Dimensiones principales de compartimentos del Mar Báltico

Tabla de dimensiones	Área ( $\times 10^3 \text{ km}^2$ )	Volumen ( $\text{km}^3$ )	prof. media (m)
Bahía de Botnia	37.0	1495	40.4
Mar de Botnia	79.0	4885	61.8
Golfo de Finlandia	29.6	1100	37.2
Golfo de Riga	18.8	408	21.7
Báltico Estricto	209	13000	62.2
Belt Sea y The Sound	20.4	290	14.2
Kattegat	22.0	507	23.0
Skagerrak	32.3	6780	210
TOTAL	448.1	28465	63.5

No se representa el Golfo de Riga en el mapa batimétrico, porque no va considerarse en este golfo báltico debido a su carácter prácticamente aislado en las aproximaciones que vamos a manejar. Tampoco se representan las regiones 13, 14 y 15, ya que trabajaremos con la hipótesis de mar cerrado como se justificará en el apartado 5 de este capítulo.

El origen del Mar Báltico es relativamente reciente y su nacimiento como mar se debe a la dinámica geológica de la zona durante la última glaciación, lo que explica, como veremos más adelante, gran parte de sus características.

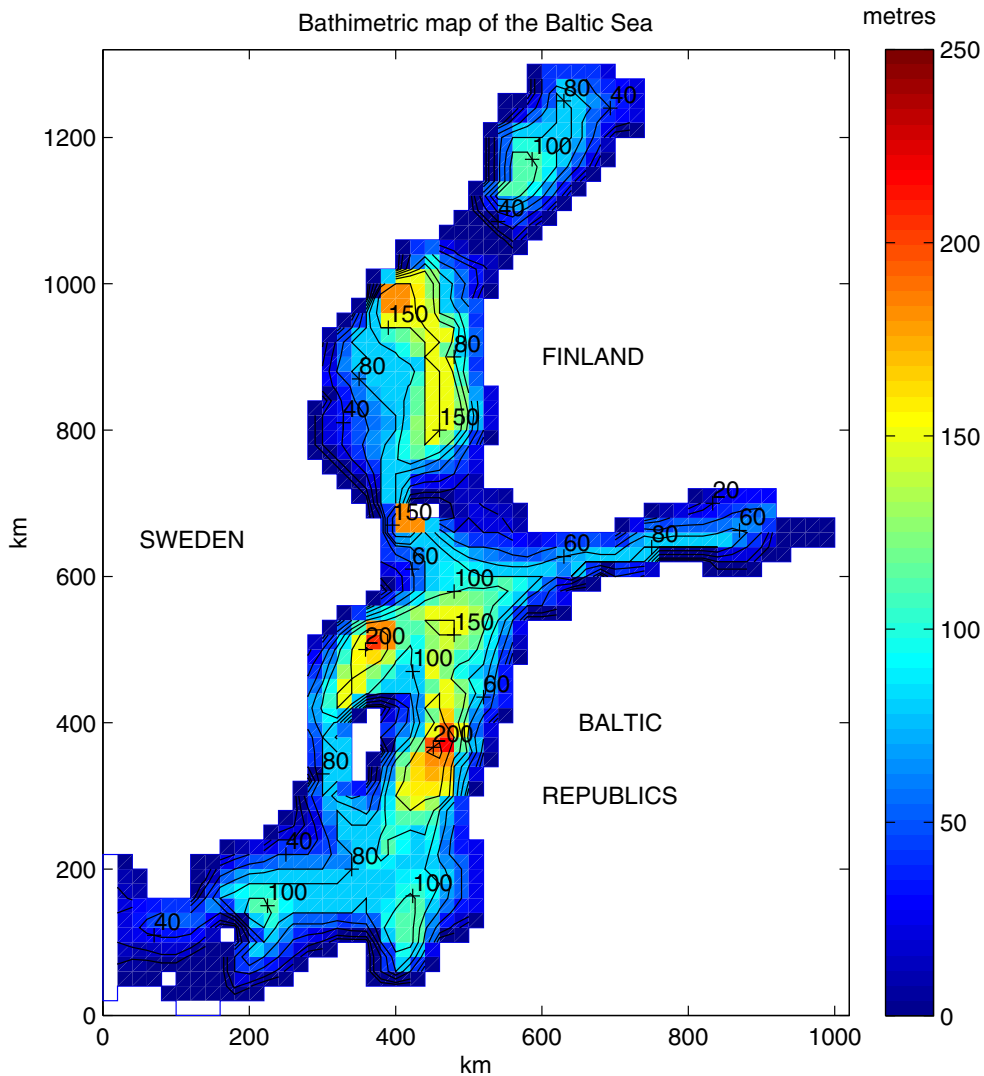


Fig.3.2. Mapa batimétrico del Mar Báltico, con una resolución horizontal de 20 km, que va utilizarse en las simulaciones de nuestro modelo.

La última glaciación afectó severamente al Báltico Norte, y el sistema no terminó de formarse como tal hasta hace unos siete mil años. Antes de adquirir su actual condición de mar salobre (7000 B.P.) pasó incluso por una fase de lago (Ancylus Lake; [41]) durante



unos dos mil años, hasta que se abrieron los estrechos de Dinamarca, en un proceso complejo de restauración de la forma del fondo asociado a la fusión de las enormes montañas de hielo durante el final de la glaciación.

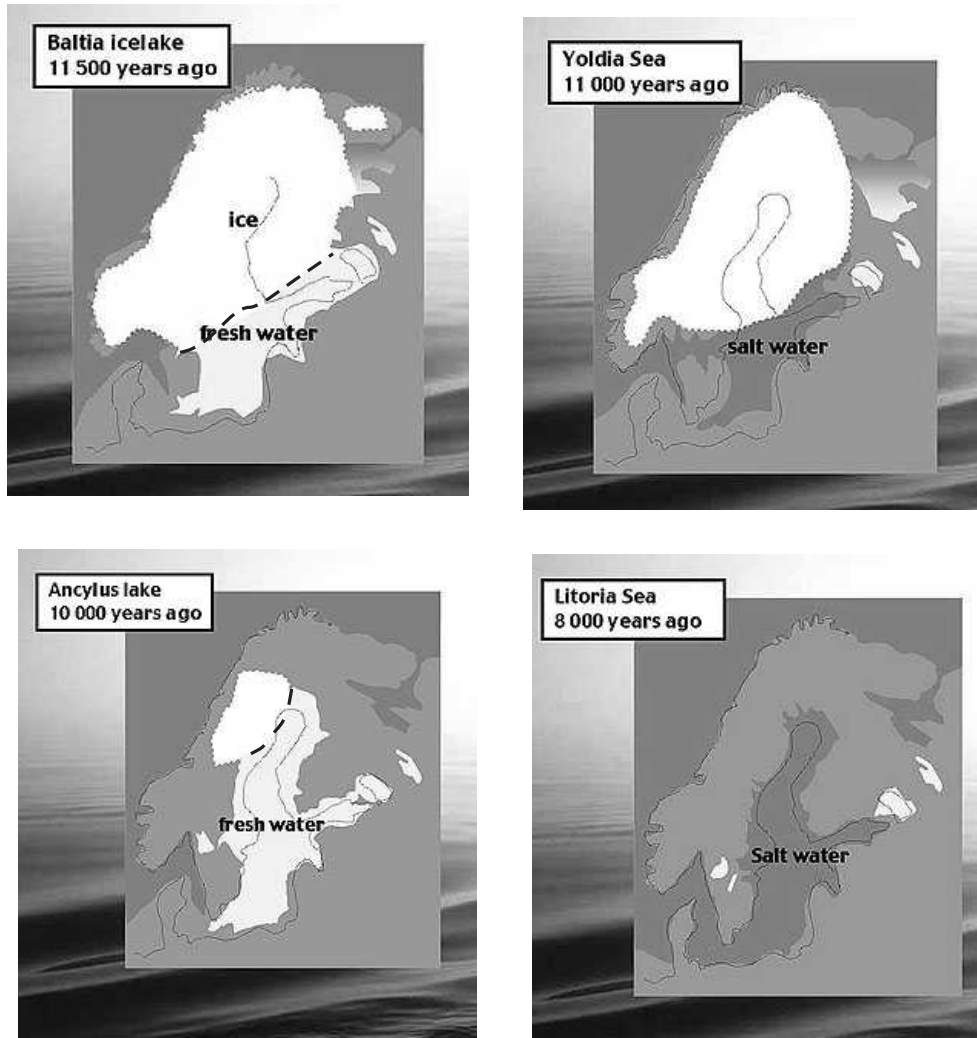


Fig.3.3. Figuras esquemáticas de la evolución geológica del Mar Báltico durante su formación en los milenios finales de la última glaciación.

Una consecuencia actual de este pasado glacial es que el fondo del Mar Báltico aún recupera su forma y sube a un ritmo de varios milímetros al año, mayor cuanto más al norte; la horquilla va de  $-1 \text{ mm a}^{-1}$  en el sur a  $+9 \text{ mm a}^{-1}$  en el norte. Por todo ello, y resumiendo, la batimetría es muy suave al sur, con presencia de arenas de todo tipo, e irregular y escarpado a medida que avanzamos hacia el norte como recuerdo de su pasado glacial.

## 2. EL ESPECTRO DE CORRIENTES EN EL MAR BÁLTICO. APLICACIÓN DE FILTROS Y DIFUSIÓN

La circulación en el Mar Báltico es bastante compleja y está formada por la superposición de muchos movimientos generalmente turbulentos. Añadida a la circulación media encontramos movimientos en forma de remolinos a diferentes escalas e intensidades. En el capítulo 4 veremos muchos mapas de corrientes medias a diferentes profundidades, y comprobaremos cómo, en términos generales, las corrientes superficiales están dominadas por los vientos mientras que las profundas lo están fundamentalmente por la batimetría. Aquí nos vamos a centrar en la presentación de un espectro de corrientes (figura 3.4) para describir algunas de sus propiedades más importantes e introducir conceptos que será de utilidad en el resto de la tesis.

Antes, necesitamos hablar de la aplicación de filtros a un espectro y su relación con la difusión. Una cuestión básica en todo modelo que tenga en cuenta la difusión es la elección apropiada de los coeficientes de difusión para las ecuaciones de transporte del problema. Tanto la teoría como los experimentos muestran que los coeficientes de intercambio turbulento aumentan a media que lo hace la escala del fenómeno físico que se está considerando. Los modelos numéricos de transporte cuyos tamaños horizontales de las celdas son kilométricos aproximan todos los movimientos internos mediante unos coeficientes, generalmente constantes, adecuados a las dimensiones horizontales de la celda. En la difusión entran también los procesos de intercambio de materia entre una celda y la vecina, en un determinado intervalo de tiempo; por lo que los coeficientes de difusión van a depender doblemente de cuestiones espaciales y temporales asociadas al modelo: de las dimensiones de la celda, y de la ventana temporal ( $T$ ) que asociemos a las velocidades advectivas, o velocidades medias.

Cuando se trabaja con corrientes medias en un intervalo de tiempo tan largo, decrecen los valores medios –o residuales– y aumentan lógicamente las fluctuaciones y por tanto el coeficiente de difusión. Además, esto se amplifica un poco si el tamaño de la celda del modelo aumenta, haciéndolo también las desviaciones espaciales de la velocidad respecto del valor medio, lo que conlleva un aumento añadido en los coeficientes de difusión. El hecho de que un fenómeno físico sea advectivo o difusivo pasa a ser una cuestión relativa según sea el nivel del filtrado espacio temporal con el que estemos trabajando, o en otras palabras, según sea la resolución del modelo. Un ejemplo sencillo: si el modelo trabaja

con la circulación media diaria, la corrientes de marea serán corrientes difusivas; si la circulación media es horaria las mareas serán fenómenos advectivos.

Por tanto, una cuestión importante a la hora de estudiar la difusión en un problema como el que nos ocupa es la separación del flujo medio y de las fluctuaciones en los espectros de corrientes: esto se hace matemáticamente mediante la aplicación de un filtro, que consiste básicamente en asociarle al valor de la función  $v(t)$  un valor promedio  $\bar{v}(t)$  que se calcula mediante una función filtro  $G(t')$  que opera convolutivamente en el intervalo de tiempo  $[t - t', t + t']$  ponderando con mayor peso los puntos centrales. La función peso puede tener diferentes formas, siendo quizás la función gaussiana la más usada, y debiendo encerrar un área finita al integrar en la recta real:

$$\bar{v}(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v(t - t')G(t')dt'}{\int_{-\infty}^{\infty} G(t')dt'} \quad ; \quad v'(t) = v(t) - \bar{v}(t). \quad (3.1)$$

Cuando la función filtro es una gaussiana el parámetro importante es la anchura a mitad de altura, a lo que se le suele llamar anchura de ventana -o anchura de filtro-, normalmente notada por  $\Delta_t$ . En los espectros que vamos a ver continuación se ha filtrado la función  $v(t)$  mediante una función de paso bajo cuyo resultado es muy similar al de aplicar un filtro gaussiano con  $\Delta_t = 1$  día. Por eso, al flujo medio resultante  $\bar{v}(t)$  le llamaremos flujo diario ( $\Delta_t = 1$  día); estando sus fluctuaciones  $v'(t)$  representadas por el coeficiente difusión horario  $K_h^{dia}$ .

En general cualquier función escalar  $\phi$  sometida a las ecuaciones de Navier–Stokes requerirá un filtrado en el espacio y el tiempo para separar la función promedio  $\bar{\phi}$  de su fluctuación  $\phi'$ :

$$\bar{\phi}(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - x', t - t')G(x', t')dx' dt'}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x', t')dx' dt'} \quad ; \quad \phi'(t) = \phi(t) - \bar{\phi}(t), \quad (3.2)$$

y en general, en el espacio tridimensional

$$\bar{\phi}(\vec{r}, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\vec{r} - \vec{r}', t - t')G(\vec{r}', t')d\vec{r}' dt'}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{r}', t')d\vec{r}' dt'} \quad ; \quad \phi'(t) = \phi(t) - \bar{\phi}(t), \quad (3.3)$$

donde habrá que tener en cuenta las anchuras de filtro  $\{\Delta_t, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z\}$ .

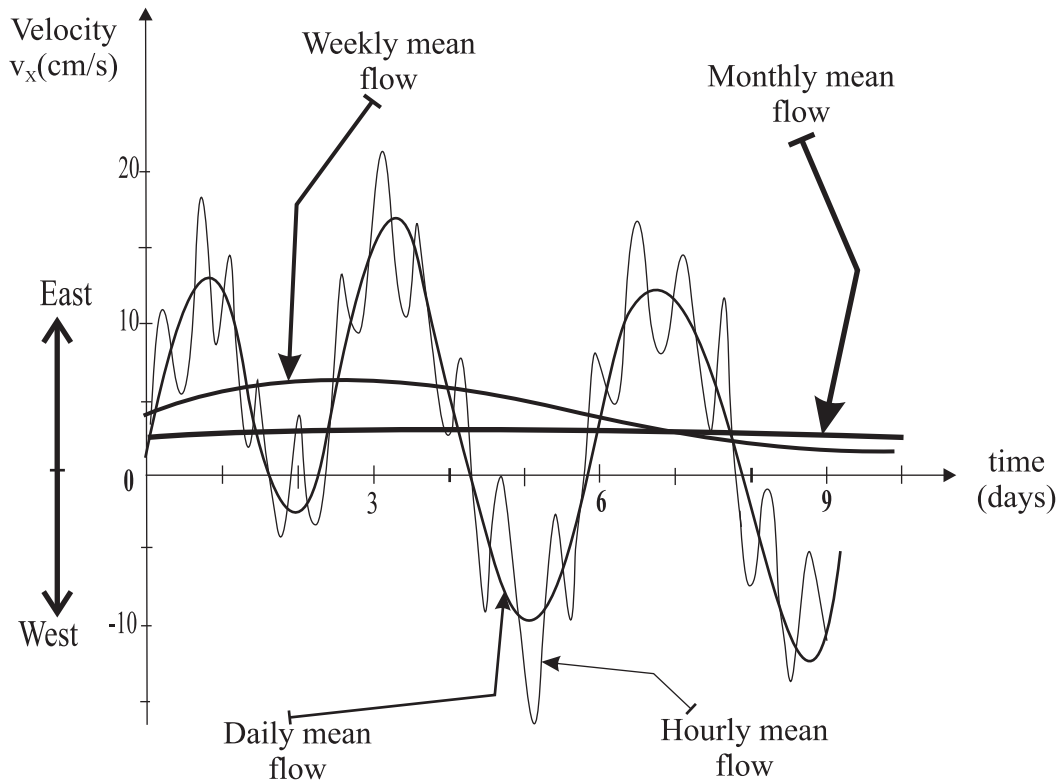


Fig.3.4. Gráfica descriptiva basada en un trabajo del SMHI [49] sobre diferentes flujos medios tras la aplicación de sus respectivos filtros temporales.

Pasamos a describir la figura 3.4 y a introducir los diferentes tipos de flujos que le podemos asociar según el filtro aplicado.

Una cuestión muy importante a la hora de estudiar la difusión en un problema como el que nos ocupa es la separación del flujo medio y de las fluctuaciones en los espectros de corrientes.

Además de la curva experimental (hourly mean flow), se incluyen otras que provienen sendos procesos analíticos de filtrado de la primera, con las correspondientes consecuencias de suavización que esto conlleva. Algunos tipos de flujos según la amplitud de la ventana son:

- (a) Flujo medio horario: Espectro completo de la velocidad  $v_x(t)$  en función proveniente de datos experimentales. Se promedia con una ventana de tiempo cuyo tamaño es del orden de una hora, aplicado a medidas experimentales tomadas cada 10 minutos.

(b) Flujo medio diario: Espectro filtrado de las oscilaciones horarias. Han desaparecido las fluctuaciones con periodos inferiores a un día como las oscilaciones inerciales y la mareas. El tamaño de la ventana del filtro es del orden de un día.

Quedan oscilaciones de corrientes como las asociadas a los cambios en la dirección del viento que serán muy importantes en este trabajo. Dan lugar a los llamamos torbellinos de una escala mayor (mesoescala) cuya energía es considerable como se verá más adelante.

(c) Flujo medio semanal: Espectro en que se ha promediado semanalmente.

(d) Flujo medio mensual: Espectro en que se ha promediado mensualmente quedando únicamente el flujo mensual medio, curva tan suave que es prácticamente horizontal para un intervalo de varios días como el que estamos representando. El tamaño de la ventana del filtro es del orden de un mes.

Podemos considerar escalas superiores como la estacional (seasonal mean flow) o la anual (annual mean flow), que puede resultar de interés para determinados estudios de transporte de materia en el océano.

Son de gran utilidad en esta parte del trabajo las técnicas numéricas de filtrado para calcular tanto las corrientes medias como los parámetros de difusión que puedan definirse en distintas escalas temporales del problema que resulten de interés en el análisis del sistema. La selección de un apropiado filtro es una cuestión crítica y requiere de un estudio de los procesos físicos que intervienen en los espectros de corrientes.

### **3. CIRCULACIÓN MEDIA EN EL MAR BÁLTICO INDUCIDA POR VIENTOS**

La variabilidad temporal de las corrientes es demasiado grande como para asumir únicamente un estado estacionario de circulación media. A éste hay que sumar las corrientes debidas a la variación temporal de los vientos.

Medidas en el Mar Báltico [90, 40] arrojan la conclusión de que las corrientes presentan picos para periodos similares a los de los espectros de vientos, es decir, del orden de 2 – 4 días.

Se ha corroborado también que la energía asociada a las fluctuaciones de las corrientes debidas a los vientos es un orden de magnitud mayor que la energía correspondiente a la circulación media estacional.

Dentro de las oscilaciones menores de energía se encuentran las *mareas* y las ondas *seiche* (ondas estacionarias asociadas al sistema o a regiones del mismo, cuyos periodos van desde un día a unas pocas horas). Las fluctuaciones asociadas a las mareas están en una escala energética inferior a las inerciales y su energía es prácticamente despreciable en nuestro sistema. En la mayoría del Mar Báltico [202] la amplitud oscila entre 2 y 5 cm. Los lugares de mayores mareas [36, 26], con amplitudes del orden de 10 cm, son las costas y los estrechos de Dinamarca, y el este del Golfo de Finlandia. En cuanto a las ondas *seiche* (periodos de algunas horas), veremos que su contribución es pequeña en el espectro de energía y su efecto será tenido en cuenta internamente en la difusión.

A la hora de hacer las simulaciones va a usarse la información meteorológica registrada en el Instituto Meteorológico de Suecia donde se han seleccionado datos acumulados durante cinco décadas que van a ser de gran utilidad. Se ha diseñado un año meteorológico típico en el SMHI [43] que contiene, con todas las dificultades de elaboración, limitaciones y ventajas que esto conlleva, los eventos meteorológicos más probables. Está diseñado incluyendo las variaciones típicas dentro de un año de modo que las diferencias entre este año típico y un año cualquiera son de un orden menor respecto a las primeras. Para cada una de las cuatro estaciones meteorológicas se ha escogido un mes representativo formado por 25–30 días, constituido por 4–6 eventos que cubren las características concretas del invierno, primavera, verano y otoño en esta zona de la superficie terrestre. Repitiendo estos meses en su estación correspondiente se va generando el año meteorológico. A partir de esta información, investigadores del SMHI han calculado corrientes medias en el mar Báltico [43] para cada estación y para el año completo, cuyos detalles se mostrarán en el capítulo 4 de esta tesis, dedicado a la circulación. Se verá que debido a la influencia de los vientos del oeste, tan importantes en estas latitudes, son destacables sobre todo las corrientes superficiales marinas del Oeste y del Suroeste, presentes en todo el sistema, pero con mayor peso de las primeras en el Báltico Sur, y de las segundas en el Báltico Norte. Esto se debe a la latitud media que ocupa el centro del ciclón borrascoso que origina los vientos a los están asociados estas corrientes.

El predominio de estas corrientes *Ekman* en las capas más superficiales está acompañado por zonas que abandonan esta tendencia dominante para presentar desviaciones e incluso remolinos locales en determinadas regiones.

Se puede decir que las corrientes geostróficas –consecuencia de la función elevación y

de la fuerza de Coriolis— inducidas por los vientos dominantes del oeste y suroeste hacen que en la circulación media del sistema esté más dominada por el sentido ciclónico que por el anticiclónico.

En las capas no superficiales y en las costeras la circulación está dominada por la topografía y la fuerza de Coriolis. Caben destacar las corrientes de retorno en diferentes zonas del sistema.

La información de estas corrientes medias anuales en las seis capas del Báltico se ha usado como input en una gran parte de las publicaciones del doctorando así como en varias aplicaciones de esta tesis doctoral.

#### 4. DESCRIPCIÓN DE LOS VIENTOS SOBRE EL MAR BÁLTICO

En lo concierne a la dirección de los vientos, se ha comentado el predominio de los vientos del Suroeste y del Oeste, asociados a condiciones locales de baja presión. Hay otro máximo relativo en la rosa de los vientos, correspondiente a los vientos del Norte, asociado a una situación anticiclónica en la zona, cuyos detalles serán expuestos en el capítulo 7.

Respecto al módulo de la velocidad del viento, valores típicos de  $U_{10}$  en el Mar Báltico, según se recoge en la obra recopilatoria de Leppäranta (2009, [114]), son  $\{8, 6, 5, 7\} \text{ m s}^{-1}$  respectivamente en las estaciones de invierno, primavera, verano y otoño. En determinadas aplicaciones, se modelará la variación temporal de  $U_{10}$  respecto a estos valores medios, mediante la clásica distribución de Weibull, que funciona bien [15] en nuestro sistema, el Mar Báltico. La distribución de Weibull se expresa así:

$$f_W(x; \lambda, k) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} \quad (3.4)$$

donde  $f_W(x)$  es la función densidad de probabilidad de que el módulo de la velocidad del viento (a 10 m sobre metros sobre superficie) tenga un valor  $x$ ;  $k$  es el parámetro de forma y  $\lambda$  es un parámetro de escala. La función es nula para valores negativos de  $x$ . Los resultados son muy buenos con un parámetro de forma  $k = 2$ , que es el que usaremos aquí. Es el valor más usado en otras aplicaciones como el diseño de aerogeneradores. Se van a generar los vientos mediante un proceso de Monte Carlo.

En un año meteorológico medio, según estas distribuciones, las frecuencias para vientos intensos, muy intensos, y extremos quedan encuadradas en la siguiente tabla orientativa, la tabla 3.2.

TABLA 3.2: Tabla orientativa de frecuencias de vientos de intensos, muy intensos y extremos.

$U_{10}$ ( $\text{m s}^{-1}$ )	10	12–15	15–20	20–25
Frecuencia	$\sim 1/\text{semana}$	$\sim 1/\text{mes}$	$\sim 1/\text{año}$	$\sim 1/(5 \text{ años})$

Será interesante también tener en cuenta estadísticas sobre los vientos dominantes durante cada mes. En el trabajo de Radziejewska [152] se recoge información a este respecto de años los 1984–1989, muy útil para nuestras simulaciones, interesadas en el entorno temporal del accidente nuclear de Chernobyl, ocurrido en el año 1986.

## 5. DISTRIBUCIÓN DE LA SALINIDAD EN EL MAR BÁLTICO

El Mar Báltico es un sistema salobre con cierta estructura de gran estuario y una caída progresiva en la salinidad a medida que nos alejamos del océano y nos adentramos hacia aguas más septentrionales.

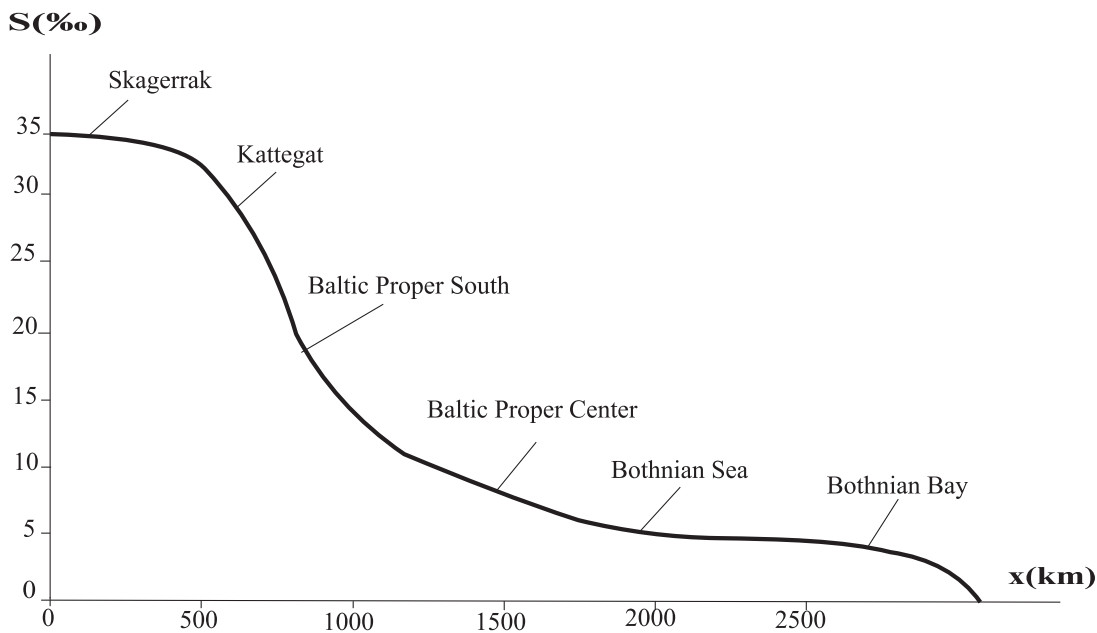


Fig.3.5. Función salinidad del Mar Báltico en función de la distancia al Océano Atlántico.

Curva de sistema decrecientemente salobre [180].



La figura 3.5 muestra valores típicos y promediados en la columna de líquido para la salinidad. El mar Báltico es un mar semicerrado con poco intercambio con el océano. Las zonas denominadas Skagerrak y Kattegat (frente a las costas de Dinamarca) hacen alusión a los estrechos primeros que sirven de transición entre el Océano Atlántico y el Mar Báltico.

Estos estrechos limitan bastante el intercambio de agua entre el mar y el océano, siendo el tiempo típico de residencia –cuya definición es similar al tiempo de semivida de un isótopo radiactivo– de una partícula en el Mar Báltico del orden de treinta años [178, 180] por lo que en esta tesis doctoral se trabajará bajo la hipótesis de **sistema cerrado** respecto al Océano Atlántico. Las simulaciones que van a realizarse en este trabajo estarán en el orden de uno a diez meses.

Describamos brevemente la variación de la salinidad con la profundidad, de la que se muestra un esquema ilustrativo en la figura 3.6. La pycnoclina –franja de la columna de líquido con una variación importante en la densidad– y la haloclina –franja de la columna de líquido con una variación importante en la salinidad– permanentes son prácticamente coincidentes en el mar Báltico.

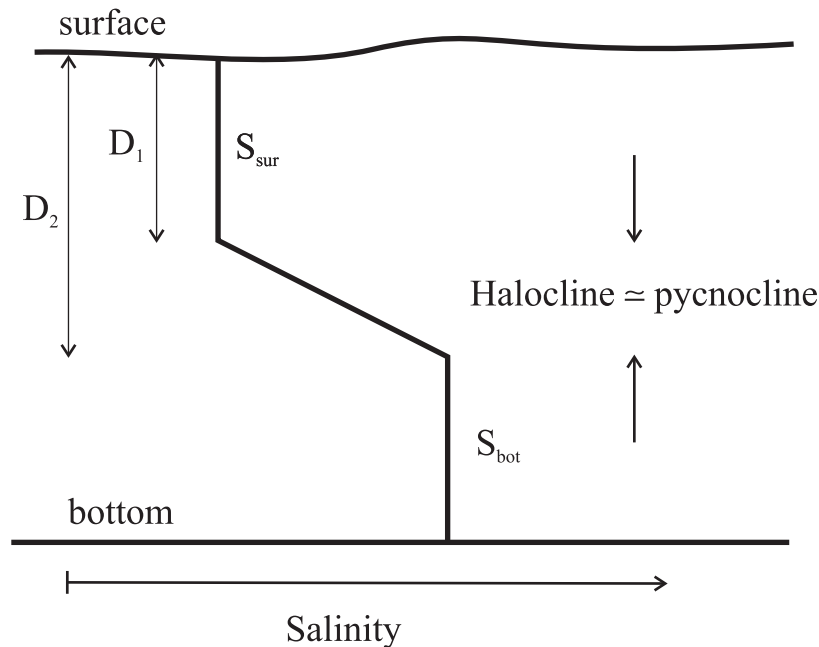


Fig.3.6. Perfil vertical típico de salinidad en el Mar Báltico [133].

La profundidad de la permanente no ocupa la misma posición en las diferentes zonas del Báltico. Otro hecho destacable es su carácter despreciable en el norte del Báltico

(Mar de Botnia y Bahía de Botnia), por ser la zona más alejada a la entrada de agua salada proveniente del Océano Atlántico. En la tabla 3.3 se presentan valores numéricos del perfil de salinidad.

TABLA 3.3: Posición, espesor y salinidad de la pycnoclina en diferentes zonas del Báltico

Zona	$D_1$ (m)	$D_2$ (m)	$S_{sur}$ (PSU)	$S_{bot}$ (PSU)
Arkona	40	50	8.5	17
Bornholm	40	70	8	16
Báltico Centro	60	90	7.5	11.5
Golfo de Finlandia	40	70	6.5	10
Mar de Botnia	40	70	6	7
Bahía de Botnia	40	70	3.5	4

En los cálculos de los modelos usaremos la tabla 3.3, sobre la profundidad (m) de la capa pycnoclina en diferentes zonas del Mar Báltico elaborada en esta tesis a partir de la literatura [133].

TABLA 3.4: Profundidades típicas de la pycnoclina permanentes según la zona.

Zona	profundidad ( $m$ ) de la pycnoclina
Arkona	40
Bornholm	40
Gotland Cuenca	60
Golfo de Finlandia	40

En la tabla 3.4 se han eliminado los compartimentos del norte (Mar de Botnia, Bahía de Botnia) ya que la debilidad de su pycnoclina hace que podamos despreciarla en la modelización, como se verá en el capítulo 5, a tenor de la buena mezcla que se produce en las columnas de líquido de estas zonas del Báltico.

## 6. LA INFLUENCIA DEL HIELO EN LA CIRCULACIÓN DEL MAR BÁLTICO

Habrán de tenerse en cuenta las condiciones especiales del sistema durante el invierno, pues de una manera parcial se produce la congelación de los primeros centímetros de la capa superficial del Mar Báltico, especialmente en las latitudes más septentrionales (figura 3.7).

Como descripción general [103] del comportamiento de las capas de hielo, cabe destacar que salvo una delgada línea de hielo que suele adherirse firmemente a la costa, en condiciones normales, el hielo interior se encuentra sometido a la acción del viento y de las corrientes sobre las que descansa. Tenemos incluso una clasificación del hielo según sea la ratio entre la superficie helada y la superficie total: hielo muy cerrado (9/10), cerrado (7/10, 8/10), abierto (4/10, 5/10, 6/10) y muy abierto (1/10, 2/10, 3/10). El hielo, en sus diferentes niveles de ratio se encuentra flotando y a la deriva, existiendo incluso modelos de deriva de hielo [195, 197], validados por observaciones de satélite.

Unos trabajos de los profesores Omstedt [135, 134], Leppäranta [113] y Zhan [209] señalan que la influencia de la capa fina de hielo (10–50 cm) sobre la circulación es menor de lo que esperamos a priori. Según estos cálculos, basados en una aproximación de circulación inducida por vientos, validada experimentalmente mediante series temporales de la elevación del mar, la atenuación de los flujos respecto a las condiciones sin hielo están claramente por debajo del cincuenta por ciento. Al contrario, en el trabajo de Lau [108] se concluye que los flujos de corrientes bajo el hielo están por encima (entre un quince y un treinta por ciento) de los flujos con superficie libre. Hay dos factores que favorecen este fenómeno:

- (a) Pérdida nula de energía en la parte rígida del sistema, salvo en los casos de fracturas por choques entre hielos.
- (b) Aumento de la superficie eficaz absorbente de energía atmosférica cuando la rugosidad del hielo superficial es alta.

Otra referencia interesante, según Kowalik [100], sobre circulación bajo hielo en el Mar de Beufort (Océano Ártico), también muestra tímidas diferencias entre las frecuencias de las ondas seiche con o sin hielo, comprendidas entre el 0 y el 10 por ciento.

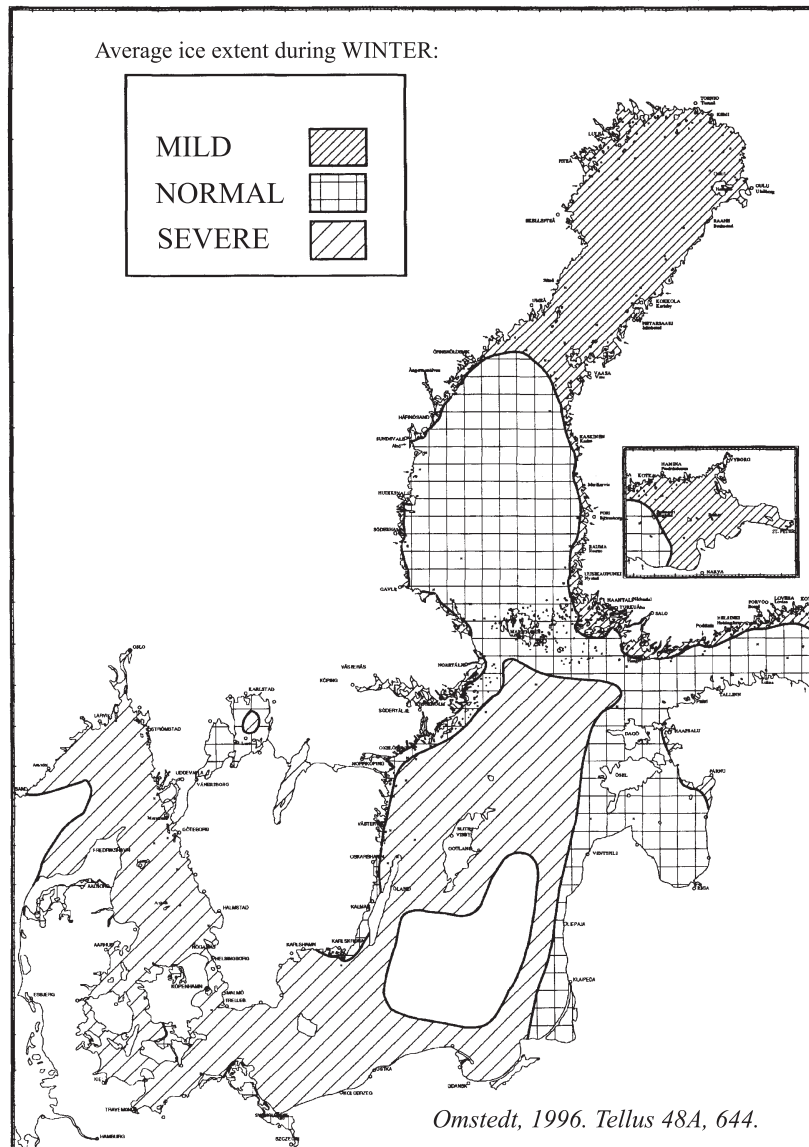


Fig.3.7: Distribución de hielo en el Mar Báltico en condiciones de invierno, suave y severo

[135].

NAO (Norte Atlantic Oscillation) es un fenómeno climático que mide las fluctuaciones de la diferencia de presión atmosférica a nivel del mar entre dos puntos representativos de sendos centros semi-permanentes de presiones como son el Anticiclón de las Azores y la Borrasca de Islandia; el índice *NAO* nos indica la diferencia de presión atmosférica entre dos puntos de referencia, en unas unidades normalizadas.

En esta tesis, se considerará la posibilidad de inviernos suaves, normales y severos, y se utilizará la función *NAO* (Oscilación del Atlántico Norte) como variable meteorológica

auxiliar cuyos valores típicos [110] para esos tres tipos de inviernos son respectivamente  $\{+2, +1, -1\}$ .

*NAO* es una función del tiempo, manejándose en Meteorología una amplia variedad de promedios con filtros de diferentes escalas: semanal, mensual, anual y niveles superiores, según exija el problema bajo estudio. La diferencia de presiones entre los dos polos del oscilador controla en buena parte la intensidad, dirección de los vientos y la dinámica atmosférica general en la zona atlántica norte. Su variación no obedece a una periodicidad particular ni especial: *NAO* positivo favorece los vientos del oeste y el bloqueo de aire frío en las zonas árticas; *NAO* negativo lleva asociada mayores presiones en las zonas polares y aire de componente norte en las latitudes intermedias. Las condiciones más probables, o normales, nos dan altas presiones en la zona subtropical (Azores) y bajas en la zona subpolar (Islandia, Mar Báltico), lo que indica *NAO* positivo.

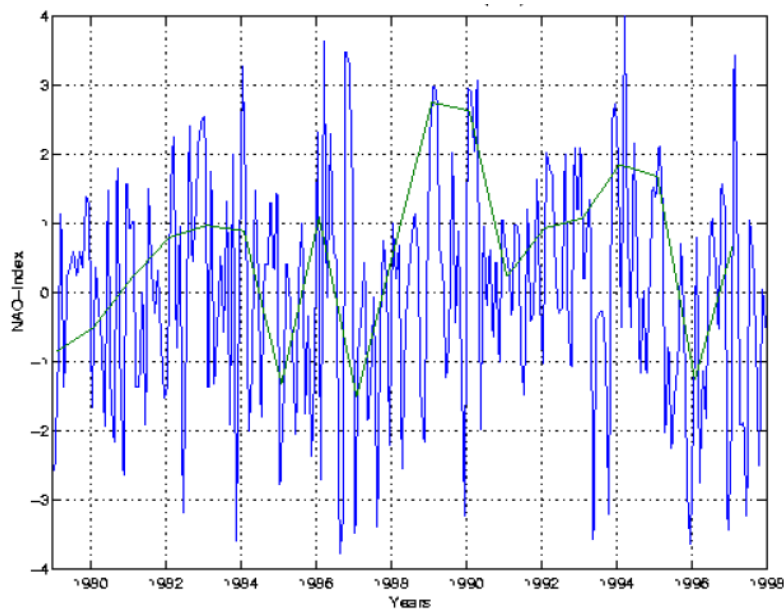


Fig.3.8: Evolución de la función NAO (Oscilación del Atlántico Norte) entre 1980 y 1996 [110].

El fenómeno NAO fue descubierto por G.T. Walker (1868-1958), que tras finalizar sus estudios en Cambridge se empleó en el Departamento de Meteorología de La India, investigando otros fenómenos climáticos importantes como los Monzones del Océano Índico, la Oscilación del Sur ("El Niño"), el posible acoplamiento entre ambos, y el papel de este último como indicador de algunos aspectos de la meteorología global del planeta.

La línea verde (línea más suave) de la figura 3.8 representa la evolución de la función *NAO* invernal (JFM index) entre los años 1980 y 1996. Cabe destacar los inviernos severos {1985, 1987, 1996} y los suaves {1989, 1990}; el resto pueden catalogarse como normales.

Podemos utilizar como primera aproximación para nuestro modelo, y basándonos en el trabajo de Omstedt [135], la siguiente tabla que relaciona la duración en días de la capa de hielo en los diferentes compartimentos en función de la severidad del invierno.

TABLA 3.4: Tiempos de permanencia (días) del hielo en el Mar Báltico

Región báltica	invierno suave	invierno normal	invierno severo
Bahía de Botnia	90	120	150
Mar de Botnia	0	90	120
Golfo de Finlandia	90	120	150
Báltico Estricto	0	0	90

Otra cifra estimada a partir de este trabajo [135] es la fecha central de los intervalos helados, que podemos situar alrededor del 15 de febrero.

Evidentemente, la anterior tabla es una aproximación que admite muchos matices que han de incorporarse en futuras aproximaciones. Se deben señalar trabajos muy detallados [73, 95, 96] que procuran esclarecer y desarrollar las correlaciones entre la función *NAO* y la distribución de hielo en el océano durante el invierno. En la misma línea, modelos acoplados atmósfera-hielo-océano [162, 122, 123] analizan situaciones de fuertes vientos y rápida reducción de la concentración de hielo; y situaciones de vientos débiles donde usualmente se produce formación de hielo.

Para consultar temperaturas típicas mensuales en el Mar Báltico se pueden usar los anuarios de temperaturas de los institutos meteorológicos de Suecia y Finlandia o el trabajo recopilatorio de Landsberg [107]. En la figura 3.9 se pueden observar las gráficas sobre las temperaturas medias mensuales medidas en una estación meteorológica representativa de cada zona del Báltico: Báltico Estricto Sur, Báltico Estricto Norte, Golfo de Finlandia, Mar de Botnia, Bahía de Botnia.

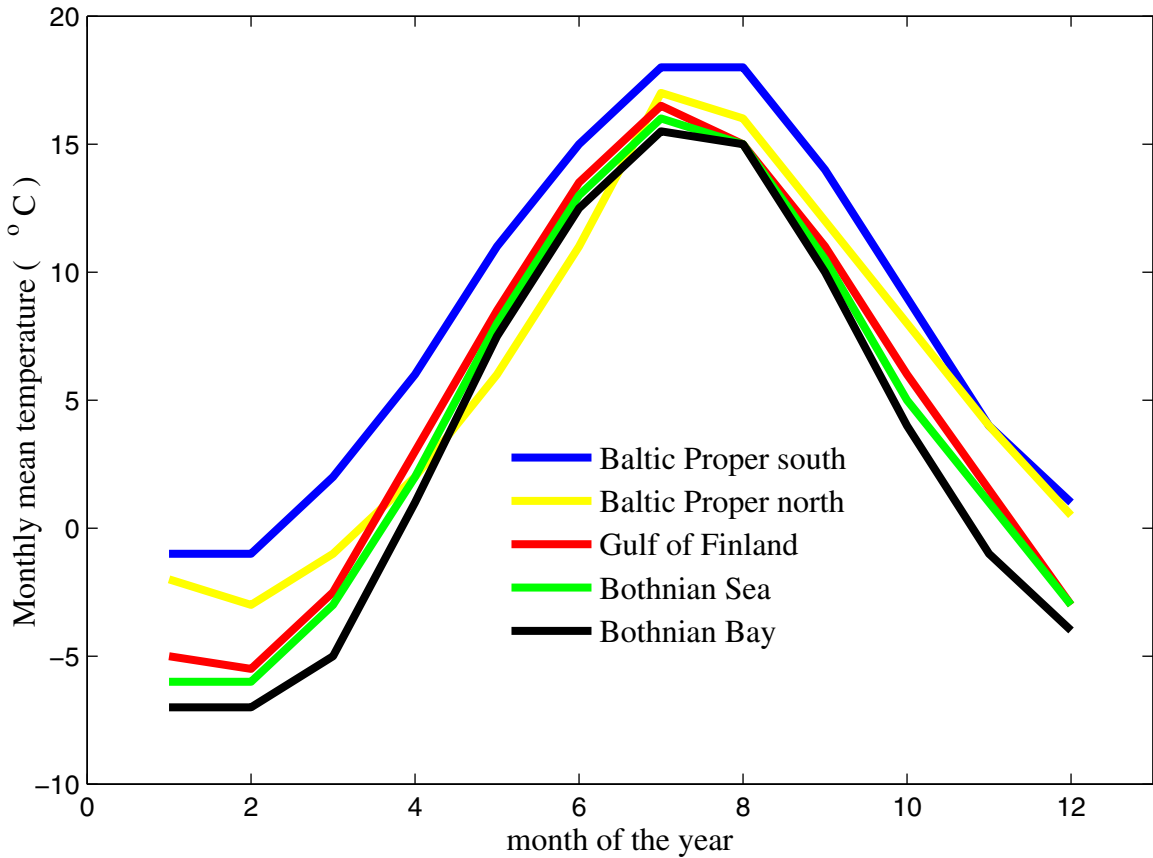


Fig.3.9. Curvas de temperatura media mensual [107] en diferentes zonas del Mar Báltico.

En condiciones de mar helado, y a la luz de la literatura científica, nuestras simulaciones podrían trabajar con el siguiente coeficiente de corrección  $\lambda_{ice}$

$$\vec{V}_{cor} = \lambda_{ice} \vec{V} \quad , \quad 0.7 < \lambda_{ice} < 1.2, \quad (3.5)$$

para el campo de velocidades, que nos da la velocidad en condiciones heladas  $\vec{V}_{cor}$  en relación a la velocidad en condiciones normales  $\vec{V}$ . Es destacable el hecho de que la incertidumbre asociada a  $\lambda_{ice}$  es menor que el asociado al parámetro de arrastre  $\lambda_D$  atmósfera-océano que según el capítulo 2 proporciona valores típicos para la velocidad en superficie que oscilan entre el 1.5% y el 3% de la del viento, incertidumbre, que junto a lo costoso que sería el ajuste de las velocidades por el efecto del hielo, nos invita a trabajar por defecto sin corregir el campo de velocidades, considerando por tanto  $\lambda_{ice} = 1$ .

El hielo totalmente cerrado (10/10) suele darse en las zonas costeras y forma líneas paralelas a la costa de una anchura muy delgada [114] y generalmente despreciable frente a la resolución horizontal (20 km) del modelo presentado en esta tesis doctoral. Es altamente improbable que la zona de hielo completamente cerrado complete todo un compartimento: sólo ocurrió una vez durante toda la segunda mitad del siglo XX, y fue durante unas semanas en el compartimento más septentrional (Bahía de Botnia) del sistema, en el severo invierno de 1985. Aún en compartimentos en esas condiciones severísimas, el grado de transferencia energética entre la atmósfera y el sistema hielo-océano es relativamente alto según la literatura [114] encontrándose por encima del cincuenta por ciento.

Una línea interesante de futuro de esta tesis doctoral consiste en un acoplamiento robusto de nuestro modelo de dispersión con los modelos meteorológicos a corto y medio plazo en el tiempo.



# Capítulo 4

## La Circulación en el Mar Báltico y su Modelización

### 1. INTRODUCCIÓN. MODELOS HIDRODINÁMICOS PREVIOS DEL MAR BÁLTICO

La modelización hidrodinámica de esta tesis doctoral tiene como objetivo alimentar a un modelo de transporte posterior cuya finalidad principal es cuantificar la evolución del radionúclido  $^{137}\text{Cs}$  en el Mar Báltico. Estamos interesados aquí en modelar la dispersión de  $^{137}\text{Cs}$  en dos escalas de tiempos diferentes:

(a) **ESCALA 1:** Escala mensual y corrientes estacionarias.

Este problema estudia la evolución de una función escalar en el océano en una escala de tiempo que va desde varias semanas a pocos meses. Tendremos en cuenta el viento dominante, y resolveremos problemas transitorios como el proceso de mezcla en la capa superficial y el arrastre del centroide de una distribución de contaminante en la superficie del mar. Aquí encajan bien un tipo de estudios hidrodinámicos previos sensibles a la influencia del viento dominante. Dentro de esta rama, destacan los estudios sobre corrientes estacionarias inducidas por el viento, disciplina clásica en oceanografía desde los estudios pioneros de Ekman de 1905 [30]. Centrándonos en el Báltico, destaca el primer estudio de esta naturaleza publicado por Kowalik en 1972 [99], autor del clásico libro mundialmente citado sobre modelización oceánica [101], que en su primera etapa científica investigó las corrientes **estacionarias** del mar Báltico, labor que continuó después [79] con otros colaboradores como Jankowski, y

que posteriormente se extendió al modelo de 8 vientos de éste último [80], que como ya se dijo en el capítulo 1, es uno de los dos modelos que sirven de base para la hidrodinámica de esta tesis. Estos científicos (Jankowski y Kowalik) están vinculados con el Instituto de Oceanología de la Academia de Ciencias de Polonia, IOPAN (Instytut Oceanologii Polskiej Akademii Nauk), y con su revista de referencia *Oceanologia* (JCR, IF = 1.242). El modelo [80], que a veces citaremos como el modelo del IOPAN [80], se plantea en dos fases: hay una primera etapa bidimensional y generatriz de una solución numérica que alimenta a una segunda fase donde se plantea –aunque no se calcula numéricamente– la solución hidrodinámica tridimensional del problema. Nosotros nos apoyaremos en este planteamiento para calcular los sistemas de corrientes 3D que usaremos en aplicaciones del capítulo 7.

(b) **ESCALA 2:** Escala anual y corrientes medias.

Este problema estudia la evolución de una función escalar en el océano en una escala de tiempo mayor, del orden uno a pocos años. Aquí se va a trabajar con unas corrientes medias anuales y se trata de estudiar problemas de transporte a más largo plazo, como es el lento proceso de contaminación de las capas profundas bajo la línea picnoclina. Una familia de modelos tridimensionales de corrientes **medias** inducidas por vientos [168, 169, 170, 43] se desarrolló a caballo entre científicos norteamericanos (Murty y Simons) y nórdicos (Omsted y Funkquist) del SMHI (Swedish Meteorological and Hydrological Institute) que estudiaron este problema aplicándolo respectivamente a los Grandes Lagos y al Mar Báltico, cuyo último eslabón, en lo que a nosotros nos afecta es un modelo tridimensional de corrientes medias desarrollado y publicado por el SMHI [43] en el que esta tesis se apoyará.

La hidrodinámica de nuestro modelo se va a plantear fundamentalmente sobre la base de estos dos modelos previos:

- (a) Un modelo 2D de corrientes estacionarias inducidas por el viento [80]. En este trabajo previo se calculan mapas para las función de corrientes  $\Psi(x, y)$ , la función elevación  $\zeta(x, y)$ , el campo de velocidades promediado verticalmente  $\vec{V}_{2D}(x, y)$ , y la velocidad del fluido en la superficie  $\vec{V}_S(x, y)$  para cada una de las ocho direcciones principales del viento Norte, Noroeste, Oeste, Suroeste, Sur, Sureste, Este, Noreste, abreviadamente  $\{N, NO, O, SO, S, SE, E, NE\}$  y una velocidad del viento a diez

metros ( $U_a \equiv U_{10}$ ) sobre la superficie tal que  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$ .

- (b) Un modelo 3D de corrientes medias inducidas por el viento [43] desarrollado para un año meteorológico típico y diseñado por el SMHI. El modelo trabaja con un sistema de seis capas (tabla 4.1) y tiene en cuenta tanto la estratificación vertical como la horizontal del sistema.

El primero de los trabajos previos (modelo del IOPAN [80]) tiene la ventaja de mostrar resultados para multitud de direcciones del viento, propiedad en la que se encuentra más limitado el segundo por dedicarse a la simulación de corrientes en año típico y no ser capaz de ofrecer soluciones para condiciones atmosféricas que se salgan de ese patrón estadísticamente más probable. A cambio, el modelo del SMHI [43] alberga la ventaja de ser tridimensional y sensible a la estratificación del sistema, de lo que se pueden deducir patrones de circulación a diferentes profundidades teniendo en cuenta la influencia de las condiciones de contorno tanto de costa como de fondo.

La resolución vertical con la que se va a trabajar en esta tesis es similar a la utilizada por otros autores [91, 170, 43] que para tener en cuenta la dispersión causada por la variabilidad vertical de las corrientes dividieron el sistema en seis capas con los espesores que se detallan a continuación:

TABLA 4.1: Estructura de capas del modelo

capa 1	capa 2	capa 3	capa 4	capa 5	capa 6
[0, 5] m	[5, 10] m	[10, 20] m	[20, 40] m	[40, 60] m	[60 m, bottom]

En el siguiente mapa batimétrico del Mar Báltico (figura 4.1) se aprecian las líneas de profundidad correspondientes a  $\{0, 30, 60, 90, 120, 150, 180\}$  m ya que la topografía tiene una gran importancia en las corrientes por constituir el conjunto de condiciones de contorno más determinante del problema matemático que se tiene que resolver. Lógicamente, su influencia será mayor en los elementos del fluido cercanos a la costa y en las capas inferiores de la columna de líquido.

Después se mostrarán también mapas de corriente que van a usarse en esta tesis doctoral y que se proponen a partir de los modelos hidrodinámicos [80, 43] que se citan al inicio de este capítulo.

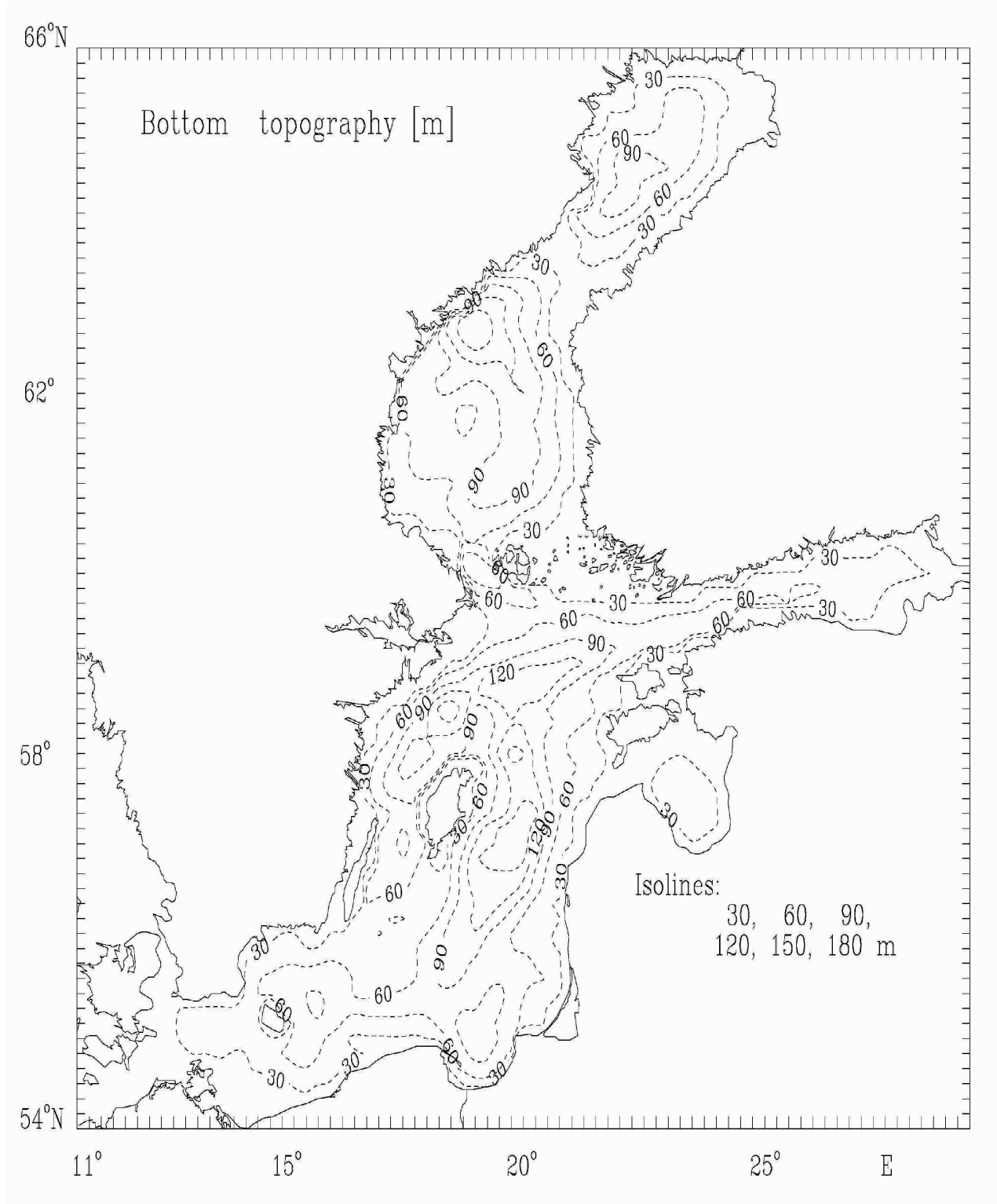


Figura 4.1: Mapa batimétrico [80] del Mar Báltico.

## 2. MODELO PREVIO 3D DEL MAR BÁLTICO: MODELO DE CIRCULACIÓN MEDIA

### 2.1. Antecedentes del modelo

La modelización de la circulación media 3D del Mar Báltico presenta un itinerario que se inicia en los años setenta [168, 169, 170].

Las corrientes tridimensionales que vamos a manejar en esta tesis doctoral están basadas en el trabajo realizado en el SMHI [43], que a su vez es una extrapolación a todo el Mar Báltico del modelo que Simons [170] realizó y validó para el sur del Báltico, siendo fruto este último trabajo de un programa de colaboración científica en Oceanografía entre los dos centros de referencia en Alemania y Canadá: Leibniz Institute of Marine Sciences, Kiel, Germany; y Canada Center of Inland Waters (Great Lakes), Ontario, Canada. El trabajo de Simons [170] sobre el Mar Báltico es la adaptación de otro anterior [169] desarrollado por el mismo autor para uno de los Grandes Lagos. Como nota curiosa, ambos sistemas no sólo comparten a este investigador sino algo mucho más esencial como es su origen geológico en la última glaciación que conoció nuestro planeta.

El trabajo publicado por Simons en 1978 [170] presenta un modelo baroclínico, influenciado por vientos, salinidad, estratificación y batimetría. Este modelo se ha desplegado numéricamente mediante un método de Diferencias Finitas y ha sido validado mediante observaciones realizadas en el sistema [89].

Recordemos que se considera fluido barotrópico al que tiene densidad constante o presenta isolíneas de presión paralelas a las de densidad. En el caso baroclínico estos dos tipos de isolíneas están inclinadas entre sí, y el gradiente de presiones y las corrientes asociadas varían con la profundidad. En la práctica y en líneas generales, la circulación en aguas homogéneas es barotrópica, mientras en aguas estratificadas la circulación ha de considerarse baroclínica. Un buen número de estudios, citados en la obra recopilatoria de Leppäranta [115] y basados en medidas de corrientes en el Mar Báltico, han mostrado que la respuesta del sistema a vientos con una duración superior o del orden de 50 horas es baroclínica, mientras que para vientos de menor duración (10–40 horas) la aproximación barotrópica funciona bien. Según estos estudios, la respuesta a vientos de corta duración, inferiores a 10 horas, desaparece rápidamente por disipación hacia escalas menores.

Otra cuestión que aborda en [170] es que en el Mar Báltico las variaciones mayores

de la función profundidad se dan en una cota muy similar a la que ocurre la máxima estratificación, por lo que se resuelve el acoplamiento entre los efectos baroclínico y batimétrico. Estos trabajos se publicaron después de haberse aclarado conceptos y creado herramientas como el potencial de vorticidad o la separación de los modos barotrópico y baroclínico en ausencia de dificultades batimétricas.

Para la validación de estos trabajos fue fundamental el proyecto Baltic'75 que elaboró una campaña de medidas [89] ligadas a cruceros científicos donde se registraron datos sobre corrientes y temperaturas a diferentes profundidades (desde cero a noventa metros), en más de veinte zonas del sistema.

Como entrada del modelo también se han usado medidas de temperatura, salinidad y densidad a lo largo del sistema [89]. Una de las claves para el éxito de este modelo fue el delicado tratamiento numérico de los términos no lineales de las ecuaciones diferenciales que tomaron prestada [17, 126] parte de la metodología desarrollada en Meteorología unos años atrás para el pronóstico del tiempo y basada fundamentalmente en la supresión de los armónicos altos mediante la introducción de la difusión turbulenta acompañada de técnicas espectrales avanzadas y métodos adecuados de filtrado matemático.

En la misma línea, el propio Simons [170] procedió a suavizar la salida de su modelo a fin de eliminar las oscilaciones inerciales así como las fluctuaciones asociadas a las ondas seiche.

Todos estos pasos previos condujeron a la elaboración del modelo 3D de Funkquist [43] elaborado en el SMHI, cuya hidrodinámica es de gran utilidad en este trabajo. A continuación se describen algunas de sus características.

## 2.2. Ecuaciones generales de partida para la circulación

Para ver algunos detalles sobre las ecuaciones del modelo 3D al que está dedicado este apartado, retomaremos del capítulo 2 las dos primeras ecuaciones de Navier–Stokes en notación oceanográfica (2.142, 2.143):

$$\underbrace{\frac{\partial V_i}{\partial t}}_{a_i^{loc}} + \underbrace{\sum_{j=1}^3 \nabla_j (V_j V_i)}_{a_i^{con}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \nabla_i p}_{f_i^p} + \underbrace{f \sum_{j=1}^3 V_j \varepsilon_{ijk}}_{f_i^{cor}} + \underbrace{\sum_{j=1}^3 A_j (\nabla_j^2 V_i)}_{f_i^R} \quad , \quad i = 1, 2 ; \quad (4.1)$$

donde aparecen, a la derecha y respectivamente, los términos local y convectivo –no

lineal– de la aceleración; y a la izquierda, los términos de fuerza por unidad de masa asociados respectivamente al gradiente de presión, a la fuerza de Coriolis y a la viscosidad turbulenta.

Añadiendo la ecuación de continuidad (2.157) y las hipótesis expuestas en esta parte de la tesis, tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, para las tres incógnitas  $\{U, V, W\}$  función de cada punto del espacio  $P(x, y, z)$  y del tiempo:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \nabla_j (V_j U) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fV + A_h \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \nabla_j (V_j V) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fU + A_h \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \quad (4.4)$$

### 2.3. Integración en cada capa

En este modelo se separa el sistema en  $N$  capas horizontales, teniendo cada columna de líquido un número de capas  $C$ , tal que  $C \leq N$ :

$$z_0 = \zeta, z_1, z_k, \dots, z_C = -H, \quad h_k \equiv z_{k-1} - z_k, \quad k = 1, \dots, C \leq N, \quad (4.5)$$

en cada una de las cuales se integran las ecuaciones anteriores

$$\begin{aligned} & \int_{z_k}^{z_{k-1}} \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \nabla_j (V_j U) \right] dz = \\ & = \int_{z_k}^{z_{k-1}} \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fV + A_h \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] dz. \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} & \int_{z_k}^{z_{k-1}} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \nabla_j (V_j V) \right] dz = \\ & = \int_{z_k}^{z_{k-1}} \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fU + A_h \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] dz. \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\int_{z_k}^{z_{k-1}} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right] dz = 0. \quad (4.8)$$

Va a darse a continuación el primer paso para integrar las ecuaciones anteriores en el espesor de cada capa ( $h_k = z_{k-1} - z_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ ), según los procedimientos seguidos en la literatura [168, 169, 170] sobre los que nos apoyamos aquí.

· Notación de los términos integrados en la columna de líquido

$$\int_{z_k}^{z_{k-1}} a_i^{loc} dz \equiv az_{i,k}^{loc}, \quad \int_{z_k}^{z_{k-1}} a_i^{con} dz \equiv az_{i,k}^{con}, \quad (4.9)$$

$$\int_{z_k}^{z_{k-1}} f_i^p dz \equiv fz_{i,k}^p, \quad \int_{z_k}^{z_{k-1}} f_i^{cor} dz \equiv fz_{i,k}^{cor}, \quad \int_{z_k}^{z_{k-1}} f_i^R dz \equiv fz_{i,k}^R \quad (4.10)$$

· Integración de la componente  $U$  del término de movimiento:

$$az_{1,k}^{loc} + az_{1,k}^{con} = h_k \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \nabla_j (V_j U) \right]_{k-\frac{1}{2}} + (UW)_{k-1} - (UW)_k \quad (4.11)$$

donde, los subíndices en los corchetes o paréntesis hacen referencia a la posición  $z_k$  en la columna de líquido donde se está evaluando para la integración. Si además de subíndice aparece superíndice, por ejemplo  $(UW)_k^{k-1}$ , esta notación querrá indicar,  $(UW)_k^{k-1} = (UW)_{k-1} - (UW)_k$ . En los extremos de la columna de líquido, aparecen las velocidades verticales en la superficie ( $k-1=0$ ) relacionadas con la función elevación, o su valor en el fondo oceánico ( $k=C$ ), necesariamente nulo:

$$(W)_{k-1=0} = \dot{\zeta}, \quad (W)_{k=C} = 0. \quad (4.12)$$

Nótese también que el sumatorio en  $j$  va ahora 1 a 2 y no de 1 a 3, como ocurría antes de integrar; esto se debe a que el término  $j=3$  ha sido ya integrado.

· De la presión y la densidad obtuvimos (2.145, 2.146, 2.154) lo siguiente:

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \frac{1}{\rho} \approx \frac{1}{\rho_0}, \quad p = p_a + g\rho_0(\zeta - z) + g \int_z^0 \rho' d\eta, \quad (4.13)$$



$$\nabla_i p = \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + g\rho_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + g \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial x_i} d\eta \quad (4.14)$$

· Integración de la componente  $U$  del término de fuerzas:

$$fz_{1,k}^p = \int_{z_k}^{z_{k-1}} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz = \frac{1}{\rho_0} (P_x^k + S_x^k) , \quad (4.15)$$

donde se definen a continuación  $P_x^k$  y  $S_x^k$ .

Como  $\zeta$  y  $p_a$  no son funciones de  $z$

$$P_x^k \equiv - \int_{z_k}^{z_{k-1}} (\nabla_x p_a + g\rho_0 \nabla_x \zeta) dz = -h_k (\nabla_x p_a + g\rho_0 \nabla_x \zeta) \quad (4.16)$$

$$P_x^H \equiv - \int_{-H}^0 (\nabla_x p_a + g\rho_0 \nabla_x \zeta) dz = -H (\nabla_x p_a + g\rho_0 \nabla_x \zeta) \quad (4.17)$$

Por otro lado

$$S_x^k \equiv -g \int_{z_k}^{z_{k-1}} dz \int_z^0 \nabla_x \rho d\eta \quad , \quad S_x^H \equiv -g \int_{-H}^0 dz \int_z^0 \nabla_x \rho d\eta \quad (4.18)$$

Las dos primeras ( $P_x^k, P_x^H$ ) son funciones de la presión atmosférica y de la elevación, mientras que las dos últimas ( $S_x^k, S_x^H$ ) dependen de la estratificación horizontal del fluido. Estas dos últimas son las funciones dependientes del gradiente horizontal de densidad (salinidad) calculadas a priori en este modelo por suponerse estacionarias las distribuciones salinas y de temperatura.

## 2.4. Condiciones de contorno

Teniendo en cuenta que

$$\int_{z_k}^{z_{k-1}} A_v \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} dz = \left( A_v \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{k-1} - \left( A_v \frac{\partial U}{\partial z} \right)_k \equiv \text{\textit{notación}} \equiv \left( A_v \frac{\partial U}{\partial z} \right)_k^{k-1} \quad (4.19)$$

los términos de Coriolis y Reynolds serán:

$$fz_{1,k}^{cor} + fz_{1,k}^R = h_k (fV)_{k-\frac{1}{2}} + h_k A_h \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{k-\frac{1}{2}} + \left( A_v \frac{\partial U}{\partial z} \right)_k^{k-1} \quad (4.20)$$

donde, al evaluar en los extremos, aparecen las tensiones sobre la superficie ( $k - 1 = 0$ ) o sobre el fondo oceánico ( $k = C$ ) en forma de condiciones matemáticas de contorno

$$\left( \rho A_v \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{k-1=0} = T_{xz}^s \quad , \quad \left( \rho A_v \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{k=C} = T_{xz}^b \quad , \quad (4.21)$$

sin olvidar también la necesidad de imponer la nulidad de la velocidad en la dirección normal al contorno del sistema. Las tensiones  $T_{xz}^s$  y  $T_{xz}^b$  serán modeladas en apartado 2.7 de este capítulo, apareciendo la influencia del viento y del contacto fluido-fondo.

· Reuniendo todos los términos para la componente U:

$$az_{1,k}^{loc} + az_{1,k}^{con} = h_k \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \nabla_j (V_j U) \right]_{k-\frac{1}{2}} + (UW)_k^{k-1} \quad (4.22)$$

$$fz_{1,k}^p = \frac{1}{\rho_0} \left[ P_x^k(p_a, \zeta) + S_x^k(\rho) \right] \quad , \quad (4.23)$$

$$fz_{1,k}^{cor} + fz_{1,k}^R = h_k (fV)_{k-\frac{1}{2}} + h_k A_h (\Delta_h U)_{k-\frac{1}{2}} + \left( A_v \frac{\partial U}{\partial z} \right)_k^{k-1} \quad . \quad (4.24)$$

## 2.5. Esquema conceptual de la integración en el tiempo

Los esquemas de Simons [170] y Funquist [43] están adaptados a las dificultades numéricas de estas ecuaciones diferenciales de Navier–Stokes que obligan a trabajar con diferentes pasos de tiempo, mallas alternadas y técnicas de suavización, entre otras herramientas, para vencer las múltiples dificultades que pueden presentar estas ecuaciones. En el apartado 2.9 daremos más detalles de esta metodología. Lo que toca a continuación, es un esquema conceptual, una especie de guía simplificada esta metodología [170, 43], desnuda de muchísimos matices numéricos, y con una intención clarificadora en esta parte de la exposición.

La integración fundamental de las ecuaciones diferenciales de movimiento es una integración en el tiempo. Conocidas las funciones  $\{U(t), V(t), W(t), \zeta(t)\}$  en el instante  $t$ , podemos plantear un esquema muy simple para el cálculo de su valor en el instante  $t + \Delta t$  que sería el que sigue:

$$U(t + \Delta t) = U(t) + \frac{\Delta t}{h_k} \left( -az_{1,k}^{loc} + fz_{1,k}^p + fz_{1,k}^{cor} + fz_{1,k}^R \right) \equiv F_U(U, V, W, \zeta; t) \quad (4.25)$$

donde se ha definido  $F_U$ , una función conocida en el instante  $t$ , por depender del conjunto de funciones  $\{U(t), V(t), W(t), \zeta(t)\}$  y de derivadas espaciales  $(\partial/\partial x, \partial^2/\partial x^2, \partial/\partial y, \dots)$  que operan sobre dicho grupo. De una manera más abreviada, se tendría:

$$U(t + \Delta t) = F_U(\vec{V}, \zeta; t) \quad \text{donde} \quad \vec{V} = [U, V, W] . \quad (4.26)$$

Análogamente se definen  $F_V$  y  $F_W$  en (4.30) y (4.31), para las otras componentes del campo  $\vec{V}(\vec{r}, t)$ .

· Integración de la componente  $V$  de las ecuaciones N-S.

Las ecuaciones resultantes son textualmente las mismas que las anteriores, cambiando  $U$  por  $V$ ,  $x$  por  $y$ , además del término de Coriolis  $fV$  que pasa a ser  $-fU$ . Reuniéndolas todas se llega a:

$$az_{2,k}^{loc} + az_{2,k}^{con} = h_k \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \nabla_j (V_j V) \right]_{k-\frac{1}{2}} + (VW)_k^{k-1} \quad (4.27)$$

$$fz_{2,k}^p = \frac{1}{\rho_0} [P_y^k(p_a, \zeta) + S_y^k(\rho)] , \quad (4.28)$$

$$fz_{2,k}^{cor} + fz_{2,k}^R = h_k (-fU)_{k-\frac{1}{2}} + h_k A_h (\Delta_h V)_{k-\frac{1}{2}} + \left( A_v \frac{\partial V}{\partial z} \right)_k^{k-1} . \quad (4.29)$$

· Integración en el tiempo de las ecuación de movimiento para  $V$ .

Análogamente:

$$V(t + \Delta t) = V(t) + \frac{\Delta t}{h_k} \left( -az_{2,k}^{loc} + fz_{2,k}^p + fz_{2,k}^{cor} + fz_{2,k}^R \right) \equiv F_V(\vec{V}, \zeta; t) . \quad (4.30)$$

## 2.6. Integración de la ecuación de continuidad. Corrientes verticales

$$\int_{z_k}^{z_{k-1}} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right] dz = 0 \implies h_k \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right]_{k-\frac{1}{2}} + (W)_{k-1} - (W)_k = 0 ,$$

$$(W)_{k-1} = (W)_k - h_k \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right]_{k-\frac{1}{2}} \equiv F_W \quad (4.31)$$

donde

$$(W)_{k-1=0} = \dot{\zeta} \quad , \quad (W)_{k=C} = 0. \quad (4.32)$$

Veremos en el apartado 2.8 que el esquema operará siempre de modo que  $F_W$  sea una función conocida, cuestión que se consigue empezando los cálculos por la capa de fondo, aprovechando que es nula la velocidad vertical en su cara inferior, coincidente con la superficie de contacto fluido–fondo.

## 2.7. Modelo de las condiciones de contorno y de la viscosidad turbulenta

· Tensiones superficiales y de fondo

En el trabajo de referencia que aquí nos ocupa [43] y en su antecesor [170] las expresiones usadas para las tensiones superficial y de fondo son respectivamente las siguientes:

$$\vec{T}^s = C_D \rho_a U_a \vec{U}_a \quad , \quad \vec{T}^b = B \rho H \vec{V}_{2D} \quad , \quad (4.33)$$

donde  $C_D$  es el coeficiente de arrastre,  $\rho_a$  es la densidad del aire,  $\vec{U}_a$  es la velocidad del aire a una altura de 10 metros sobre la superficie del mar,  $B$  es un coeficiente dependiente de la profundidad  $H$ , y  $\vec{V}_{2D}$  es el promedio de  $\vec{V}$  en la columna de líquido, cuyos detalles numéricos son:

$$C_D = 1.6 \times 10^{-3} \quad , \quad \rho_a = 1.3 \text{ kg m}^{-3} \quad , \quad B = b/H^2 \quad , \quad b = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}. \quad (4.34)$$

Una parametrización de  $C_D$  muy usada [101, 143, 46], como función de la velocidad del viento  $U_a$  es

$$C_D(U_a) = (\gamma_1 + \gamma_2 U_a) \times 10^{-3} \quad , \quad \gamma_1 = 0.75 \quad , \quad \gamma_2 = 0.067. \quad (4.35)$$

Los modelos de referencia [170, 43] han trabajado con valores de  $A_v$  que en la superficie han estado en el rango  $A_v \sim 50 - 100 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , mientras que en la zona de altos gradientes de densidad se han usado valores muy pequeños,  $A_v < 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . En lo que se refiera a la viscosidad turbulenta horizontal, los autores [170, 43] han considerado en sus modelos valores de  $A_h \sim 100 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , habiendo hecho cálculos considerando  $A_h > 100 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  sin que se noten cambios dignos de mención en los resultados.

### 2.8. Algoritmo general ascendente por capas

Una vez hecha una integración en el tiempo con unas condiciones iniciales, habría que iterarla adecuadamente, aprovechando las condiciones de contorno. Vuelve a exponerse a continuación un esquema sencillo, pero que básicamente reproduce la esencia del método usado en los referidos trabajos [170, 43]. Está dividido en diferentes pasos, a modo de bucle.

(a) PASO 0: Condiciones iniciales.

Inicialmente ( $t = t_0$ ) conocemos las funciones  $\{U, V, W, \zeta\}$  que dependen de la posición,  $(x, y, z; t = t_0)$ ; de una manera más abreviada,

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}; t = t_0) \quad : \quad \text{Condiciones iniciales.} \quad (4.36)$$

Seguidamente (Paso 1), ha de notarse que las variables conocidas  $\{U, V, W, \zeta\}(t_0)$  aparecen dentro de  $F_U$  y  $F_V$ , funciones diferenciales en el espacio  $R_3$ , resultantes de separar  $U$  y  $V$  para integrar en el tiempo.

(b) PASO 1:  $t = t_0 + \Delta t$ , capa de fondo  $k = N$ .

Del apartado anterior tenemos las ecuaciones que permiten obtener explícitamente

$$U_{N-\frac{1}{2}}(t_0 + \Delta t) = F_U(\vec{V}, \zeta; t_0) \quad , \quad k = N \quad (4.37)$$

$$V_{N-\frac{1}{2}}(t_0 + \Delta t) = F_V(\vec{V}, \zeta; t_0) \quad , \quad k = N \quad (4.38)$$

que sustituidas a continuación en la versión finita de la ecuación de continuidad, nos dan la velocidad vertical en la cara superior de la caja

$$W_{N-1}(t_0 + \Delta t) = F_W(U, V, W_N; t_0 + \Delta t) \quad , \quad k = N - 1 \quad (4.39)$$

gracias a que permanentemente  $W_{k=N}(t) = 0$ ,  $\forall t$  en la cara inferior de la misma.

(c) PASO 2:  $t = t_0 + \Delta t$ , capa superior a la de fondo  $k = N - 1$ .

Análogamente se pueden obtener explícitamente

$$U_{N-\frac{3}{2}}(t_0 + \Delta t) = F_U(\vec{V}, \zeta; t_0) \quad , \quad k = N - 1 \quad (4.40)$$

$$V_{N-\frac{3}{2}}(t_0 + \Delta t) = F_V(\vec{V}, \zeta; t_0) \quad , \quad k = N - 1 \quad (4.41)$$

que substituidas a continuación en la versión finita de la ecuación de continuidad, nos dan la velocidad vertical en la cara superior de la caja

$$W_{N-2}(t_0 + \Delta t) = F_W(U, V, W_{N-1}; t_0 + \Delta t) \quad , \quad k = N - 2 \quad (4.42)$$

gracias a que conocemos  $W_{N-1}(t_0 + \Delta t)$  en la cara inferior de la misma, como salida del paso anterior. Este paso se repite en la capa superior ( $k = N - 2$ ), y se reitera hasta llegar a la penúltima ( $k = 2$ ), inclusive.

(d) PASO 3:  $t = t_0 + \Delta t$ , capa superficial  $k = 1$ .

Del mismo modo se pueden obtener explícitamente

$$U_{\frac{1}{2}}(t_0 + \Delta t) = F_U(\vec{V}, \zeta; t_0) \quad , \quad k = 1 \quad (4.43)$$

$$V_{\frac{1}{2}}(t_0 + \Delta t) = F_V(\vec{V}, \zeta; t_0) \quad , \quad k = 1 \quad (4.44)$$

que substituidas a continuación en la versión finita de la ecuación de continuidad, nos dan la velocidad vertical en la superficie del fluido

$$W_0(t_0 + \Delta t) = F_W(U, V, W_1)|_{t_0+\Delta t} = \dot{\zeta}(t_0 + \Delta t) \quad , \quad k = 0, \quad (4.45)$$

$$\zeta(t_0 + \Delta t) = \text{\textit{\textbackslash} desarrollo en serie \textit{\textbackslash}} \equiv F_{\zeta}(\dot{\zeta}, \zeta; t_0) . \quad (4.46)$$

gracias a que conocemos  $W_1(t_0 + \Delta t)$  en la cara inferior de la capa superficial, como salida del paso anterior. De este modo cerramos el ciclo, puesto que ya conocemos los campos

$$\vec{V}(\vec{r}; t = t_0 + \Delta t) \quad \text{y} \quad \zeta(x, y; t = t_0 + \Delta t) \quad (4.47)$$

llegando así a las condiciones de partida, Paso 0, pero en el instante numérico posterior ( $t = t_0 + \Delta t$ ): Fin del ciclo.

Aquí se iniciaría otro ciclo, exactamente igual que el anterior, que transcurriría entre  $t = t_0 + \Delta t$  y  $t = t_0 + 2\Delta t$ ; y así sucesivamente hasta completar la integración numérica del problema.

## 2.9. Más detalles del esquema numérico de Simons [170] y del SMHI [43] para las ecuaciones N–S

- (a) Se trata de un esquema de diferencias finitas centradas.
- (b) La computación empieza por la capa de fondo y va sucesivamente subiendo hasta la capa superficial.
- (c) Para tener en cuenta las soluciones oscilatorias, los pasos de tiempo tienen que ser suficientemente pequeños y adecuadamente combinados con los pasos espaciales, según un criterio de Courant–Friedrichs–Lewy para ecuaciones diferenciales de tipo hiperbólico, como es el caso:

$$\frac{\Delta t}{\Delta s} < \frac{1/\sqrt{2}}{c_{max}} \quad (4.48)$$

donde  $c_{max}$  es la velocidad de onda más rápida en el modelo, que en este caso es la onda gravitatoria externa cuyo valor es  $c_{max} \sim \sqrt{gH}$ .

- (d) Por cuestiones de estabilidad numérica, se utilizaron pasos de tiempo distintos según los procesos físicos involucrados: el término del gradiente de presión, el de Coriolis y el no lineal han sido tratados con pasos de tiempo menores que los términos asociados a la viscosidad, mediante un esquema de tipo Lax-Wendroff.
- (e) El término advectivo no lineal y el de Coriolis requieren un delicado tratamiento también del mallado espacial con objeto de alcanzar buenas condiciones de estabilidad, lo que se consigue combinando adecuadamente dos reticulados distintos buscando la máxima estabilidad de la solución.
- (f) Los términos no lineales producen altos armónicos que se han minimizado tanto jugando con los coeficientes asociados a la turbulencia como realizando suavizaciones de soluciones conocidas del problema.
- (g) Se han hecho diversas simulaciones y se ha comprobado que los niveles medios de elevación se alcanzan al cabo de algunas horas (5–20 horas) en función de la velocidad del viento.

- (h) La estabilidad numérica de las soluciones se ha chequeado numéricamente mediante la evaluación de la energía total en ausencia tanto de términos forzados como de disipativos.
- (i) Esta metodología numérica de diferencias finitas centradas en el espacio y en el tiempo fue validada y puesta a punto con varias geometrías sencillas, concluyéndose que los errores por truncamiento con respecto a la solución exacta son del orden de un 1 %.

## 2.10. Aspectos meteorológicos del modelo del SMHI [43]

Se ha diseñado un año meteorológico típico que contiene, con todas las dificultades de elaboración, limitaciones y ventajas que esto conlleva, los eventos meteorológicos más probables.

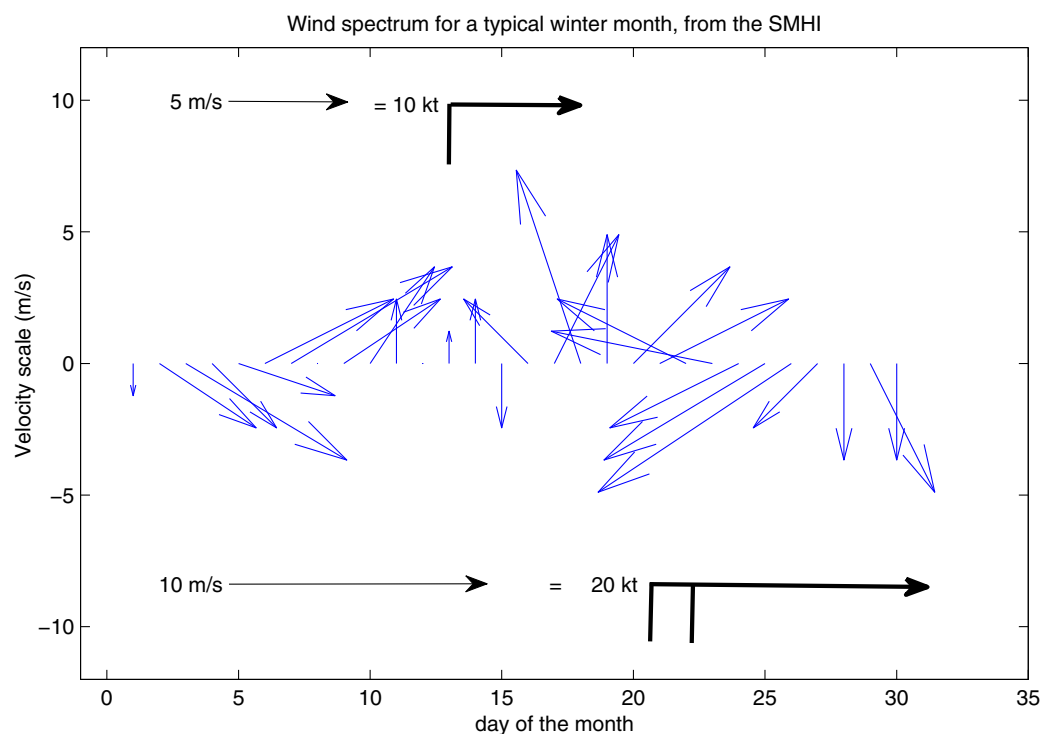


Figura 4.2: Espectro de vientos para un mes típico de invierno, diseñado por el SMHI [43]. En el eje vertical se representa una escala de la velocidad y en el horizontal el día del mes.

El año típico incluye las variaciones típicas de este intervalo de tiempo, de modo que las diferencias entre este año típico y un año cualquiera son de un orden menor respecto a las primeras. A la hora de hacer las simulaciones va a hacerse uso de la información



meteorológica registrada en el Instituto Meteorológico de Suecia donde se han seleccionado datos acumulados durante cinco décadas que van a ser de gran utilidad.

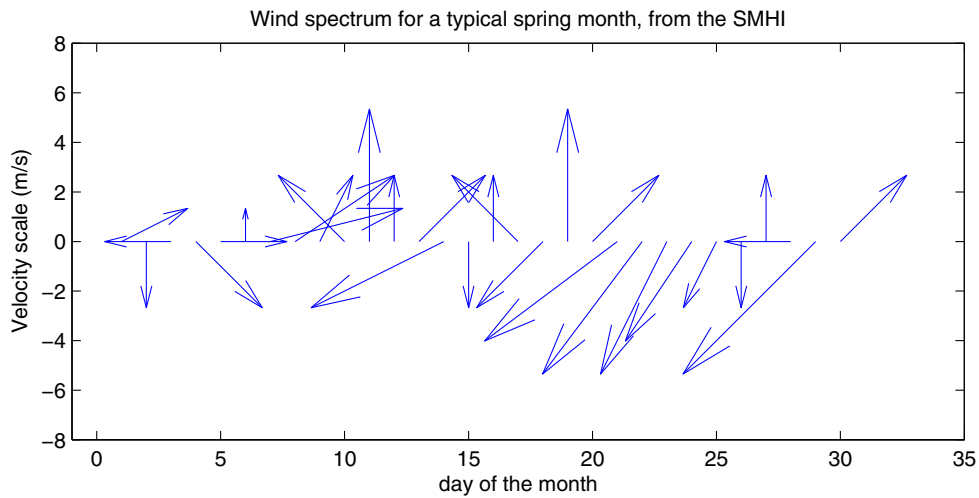


Figura 4.3: Espectro de vientos para un mes típico de primavera, diseñado por el SMHI [43]. En el eje vertical se representa una escala de la velocidad y en el horizontal el día del mes.

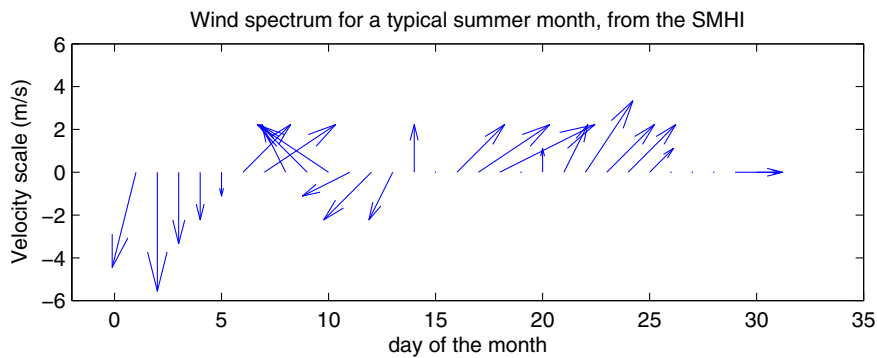


Figura 4.4: Espectro de vientos para un mes típico de verano, diseñado por el SMHI [43]. En el eje vertical se representa una escala de la velocidad y en el horizontal el día del mes.

Para cada una de las cuatro estaciones meteorológicas se ha escogido un mes representativo formado por 25–30 días, constituido por 4–6 eventos que cubren las características concretas del invierno, primavera, verano y otoño en esta zona de la superficie

terrestre. Repitiendo estos meses en su estación correspondiente se va generando el año meteorológico.

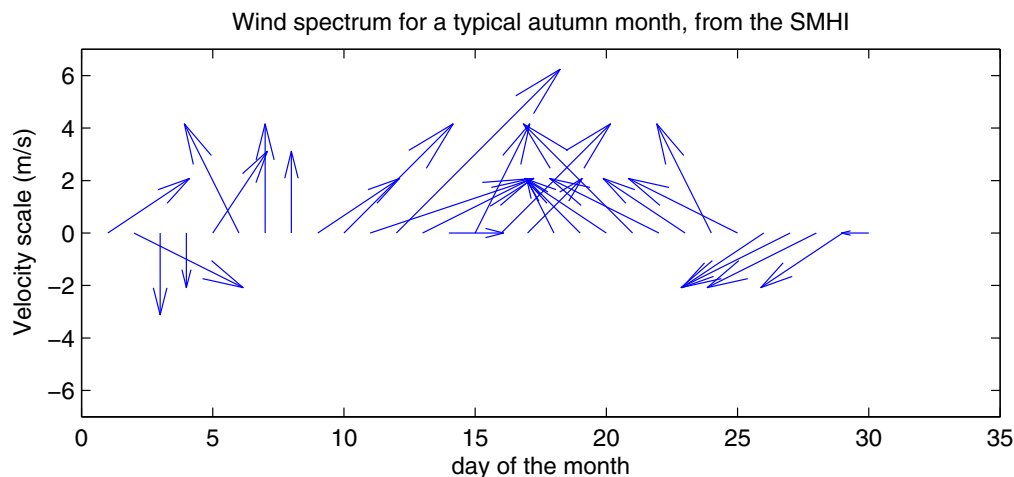


Figura 4.5: Espectro de vientos para un mes típico de otoño, diseñado por el SMHI [43]. En el eje vertical se representa una escala de la velocidad y en el horizontal el día del mes.

A partir de esta información, se han calculado corrientes medias [43] para cada estación y para el año completo. Debido a la influencia de los vientos del oeste, tan importantes en estas latitudes, son destacables sobre todo las corrientes superficiales del Oeste y del Suroeste, presentes en todo el sistema, pero con mayor peso de las primeras en el Báltico Sur, y de las segundas en el Báltico Norte. Esto se debe a la latitud media que ocupa el centro del ciclón borrascoso que origina los vientos a los están asociados estas corrientes. En las páginas siguientes se mostrarán algunos resultados gráficos de este modelo adaptados a nuestra malla de cálculo.

La variabilidad temporal de las corrientes es demasiado grande como para asumir únicamente un estado de circulación media. A éste hay que sumar las corrientes debidas a la variación temporal de los vientos.

Medidas en el Mar Báltico [90, 40] arrojan la conclusión de que las corrientes presentan picos para periodos similares a los de los espectros de vientos, es decir, del orden de 2 – 5 días. Se ha corroborado que la energía asociada a las fluctuaciones de las corrientes

debidas a los vientos es un orden de magnitud mayor que la energía correspondiente a la circulación media estacional. Todo esto y otros detalles se tendrán en cuenta en el siguiente capítulo, consagrado al estudio y modelización de la difusión.

### 2.11. Otros modelos hidrodinámicos del Mar Báltico: El HIROMB y el POM

Son diferentes y variados los modelos hidrodinámicos que del Mar Báltico se han desarrollado en los últimos años. Los modelos que mejor resumen estos esfuerzos por modelar el Báltico en resolución alta son los siguientes:

(a) HIROMB (High Resolution Operational Model for the Baltic).

El modelo HIROMB [44] es básicamente una versión superior del modelo previo del SMHI [43]. Se trata de un modelo de alta resolución forzado por el modelo atmosférico HIRLAM (High Resolution Limited Area Model), modelo de referencia para el pronóstico meteorológico en Europa, como bien es sabido. El modelo HIROMB funciona con computación vectorial y memoria paralela compartida en el Centro de Supercomputación de Suecia (Linköping). Este centro forma parte de la red de supercomputación de Suecia (Swedish National Infrastructure for Computing).

La resolución típica horizontal del HIROMB es de 1 milla cuadrada y 50 capas de resolución vertical. El proyecto HIROMB fue iniciado por Suecia y Alemania, y desde 1999 se unieron otros países como Dinamarca, Finlandia y Polonia.

(b) POM (Princeton Ocean Model).

Se trata de una aplicación al Mar Báltico [71] de los esquemas de modelización oceánica de la Universidad de Princeton. Con esta metodología se pueden simular una amplia gama de problemas como la circulación y los procesos de mezcla en ríos, estuarios, zonas costeras, lagos, mares semicerrados y océano abierto.

Los modelos POM utilizan coordenadas  $\sigma$  y sub-modelos para la turbulencia y las ondas, lo que les confiere cierta velocidad computacional, comparados con otros modelos.

La aplicación -al menos parcial- de estos modelos (de resolución media-alta) a nuestros modelos de transporte (de resolución baja) puede ser muy interesante en el futuro.

Su uso en la actualidad no es imprescindible debido a que esta tesis doctoral presenta una primera aproximación al transporte de materia pasiva en el Mar Báltico inducido por vientos en la escala temporal de meses, y su vocación, en principio, es que los cálculos puedan ser ejecutados en un ordenador personal estándar.

La naturaleza del modelo POM con coordenadas  $\sigma$  le cierra algunas puertas para uso futuro en nuestro modelo debido a la estructura vertical con capas de espesor constante de éste último. Parece más natural las aplicaciones futuras del modelo HIROMB a nuestros estudios; de hecho existe contacto y acuerdo con el Dr. Funkquist para que esta labor se empiece a materializar próximamente. Los investigadores Funkquist y Omsted, líderes en modelización en el SMHI, han apoyado siempre la necesidad de modelos ecológicos en el Mar Báltico y mostrado interés en nuestra rama de investigación en particular; todo ello empezó durante una larga reunión en Norrköping (Suecia) en la que se puede definir el inicio de esta línea de trabajo investigador.

### 3. MODELO PREVIO DE CORRIENTES ESTACIONARIAS DEL MAR BÁLTICO: MODELO DE 8 VIENTOS

En el capítulo 2 se introdujo la hidrodinámica general de un fluido oceánico que nos permite pasar ahora a la descripción de los fundamentos de los modelos hidrodinámicos bidimensionales (2D) y al cálculo de sus corrientes estacionarias.

#### 3.1. Introducción general a los modelos 2D para corrientes estacionarias

También allí, en el capítulo 2, se vio el caso más simple de corrientes Ekman, problema que cae dentro de la familia de las corrientes estacionarias, al cual está dedicado esta parte de la tesis. El factor común probablemente más importante de los problemas de corrientes estacionarias [30, 101] es que se desprecia el término no lineal convectivo, simplificación que se sostiene si la escala espacial (resolución espacial horizontal del orden o superior a 10 km) del problema es suficientemente grande, como podemos comprobar a continuación en una estimación para el Mar Báltico, donde que el término no lineal convectivo, bajo estas condiciones, es pequeño frente a la fuerza de Coriolis:

$$\frac{\partial(UV)}{\partial x} \sim \frac{\Delta U^2}{\Delta x} \sim \iota U \sim 0.1 \text{ m s}^{-1} \sim V, \quad \Delta x = 10 \text{ km} \quad \iota \sim \frac{10^{-2}}{10^4} \text{ m s}^{-2} = 10^{-6} \text{ m s}^{-2} \quad (4.49)$$

$$fU = 2\Omega \sin \varphi U \simeq 2 \frac{2\pi}{(\sqrt{3}/2) 10^5} \frac{\sqrt{3}}{2} U = 4\pi \times 10^{-5} U \sim 4\pi \times 10^{-6} \text{m s}^{-2}; \quad (4.50)$$

si se considera que  $fU \gg \frac{\partial(UV)}{\partial x} \quad : \quad f_i^{cor} \gg a_i^{con} \quad , \quad i = 1, 2.$  (4.51)

### 3.2. Ecuaciones para las funciones TRANSPORTE de masa $\vec{M}$ y ELEVACIÓN $\zeta$

Definamos la velocidades media en la columna de líquido  $\vec{V}_{2D}$ , y el vector *transporte de masa*  $\vec{M}$  como la cantidad de masa por unidad de tiempo que atraviesa un rectángulo imaginario de base la unidad y de altura  $H + \zeta$  colocada perpendicularmente al vector :

$$\begin{aligned} U_{2D} &\equiv \frac{1}{H} \int_{-H}^{\zeta} U dz \quad , \quad V_{2D} \equiv \frac{1}{H} \int_{-H}^{\zeta} V dz \quad , \quad \vec{V}_{2D} \equiv [U_{2D}, V_{2D}] \\ M_x &\equiv \int_{-H}^{\zeta} \rho U dz \quad , \quad M_y \equiv \int_{-H}^{\zeta} \rho V dz \quad , \quad \vec{M} \equiv [M_x, M_y] \end{aligned} \quad (4.52)$$

El objetivo de este apartado es obtener unas terna de ecuaciones para las funciones transporte de masa  $\{M_x, M_y\}$  y la función elevación  $\zeta$ . Para ello, se toman las ecuaciones (2.155), (2.156) y (2.157), se eliminan los términos no lineales convectivos, se multiplica todo por  $\rho_0 \simeq \rho$  y se integra en la columna de líquido entre  $z = -H$  y  $z = \zeta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_{-H}^{\zeta} \rho_0 U dz}_{M_x} - f \underbrace{\int_{-H}^{\zeta} \rho_0 V dz}_{M_y} &= - \int_{-H}^{\zeta} \left( \frac{\partial p_a}{\partial x} + g \rho_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + g \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial x} d\eta \right) dz + \\ &+ \rho_0 \int_{-H}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} \left( A_v \frac{\partial U}{\partial z} \right) dz + \rho_0 A_h \int_{-H}^{\zeta} \Delta_h U dz \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_{-H}^{\zeta} \rho_0 V dz}_{M_y} + f \underbrace{\int_{-H}^{\zeta} \rho_0 U dz}_{M_x} &= - \int_{-H}^{\zeta} \left( \frac{\partial p_a}{\partial y} + g \rho_0 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + g \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial y} d\eta \right) dz + \\ &+ \rho_0 \int_{-H}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} \left( A_v \frac{\partial V}{\partial z} \right) dz + \rho_0 A_h \int_{-H}^{\zeta} \Delta_h V dz \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\int_{-H}^{\zeta} \rho_0 \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (4.55)$$

Para realizar los cálculos de las ecuaciones (4.53), (4.54) y (4.55) se va a hacer uso de las siguientes relaciones y propiedades:

- (1) Definiciones de  $\{(M_x, M_y)\}$  teniendo en cuenta que  $\rho \simeq \rho_0$ ; esto afecta a los primeros sumandos de las ecuaciones (4.53) y (4.54).
- (2) Las magnitudes  $\{(p_a, \zeta)\}$  no son función de  $z$ . Esto afecta a los dos primeros sumandos de las partes izquierdas de las igualdades (4.53) y (4.54).
- (3) Permutación entre operadores:

$$\int_{-H}^{\zeta} \Delta_h \dots dz = \Delta_h \int_{-H}^{\zeta} \dots dz \quad (4.56)$$

esto afecta a los últimos miembros de las ecuaciones (4.53) y (4.54). Haciendo uso de las herramientas anteriores las ecuaciones quedan como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M_x - f M_y = & -(\zeta + H) \left( \frac{\partial p_a}{\partial x} + g \rho_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \int_{-H}^{\zeta} \left( g \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial x} d\eta \right) dz + \\ & + \left[ \underbrace{\rho_0 A_v \frac{\partial U}{\partial z}}_{T_{xz}} \right]_{-H}^{\zeta} + A_h \Delta_h \underbrace{\int_{-H}^{\zeta} \rho_0 U dz}_{M_x} \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M_y + f M_x = & -(\zeta + H) \left( \frac{\partial p_a}{\partial y} + g \rho_0 \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - \int_{-H}^{\zeta} \left( g \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial y} d\eta \right) dz + \\ & + \left[ \underbrace{\rho_0 A_v \frac{\partial V}{\partial z}}_{T_{yz}} \right]_{-H}^{\zeta} + A_h \Delta_h \underbrace{\int_{-H}^{\zeta} \rho_0 V dz}_{M_y} \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\int_{-H}^{\zeta} \rho_0 \frac{\partial U}{\partial x} dx + \int_{-H}^{\zeta} \rho_0 \frac{\partial V}{\partial y} dy + \rho_0 [W]_{-H}^{\zeta} = 0 \quad (4.59)$$

Sustituyendo adecuadamente en (4.57) y (4.58), quedan las siguientes ecuaciones para la cantidad de movimiento horizontal integrada:

$$\frac{\partial}{\partial t} M_x - f M_y = -(\zeta + H) \left( \frac{\partial p_a}{\partial x} + g \rho_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + S_x + T_{xz}^s - T_{xz}^b + A_h \Delta_h M_x \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} M_y + f M_x = -(\zeta + H) \left( \frac{\partial p_a}{\partial y} + g \rho_0 \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + S_y + T_{yz}^s - T_{yz}^b + A_h \Delta_h M_y \quad (4.61)$$

donde a continuación se definen las integrales de densidad  $\{S_x, S_y\}$  que deben su notación a su dependencia interna respecto a la salinidad:

$$S_x \equiv -g \int_{-H}^{\zeta} \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial x} d\eta dz \quad S_y \equiv -g \int_{-H}^{\zeta} \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial y} d\eta dz \quad (4.62)$$

Para realizar los cálculos de la ecuación (4.59) se va a hacer uso de las siguientes relaciones y propiedades:

(1) Dadas las funciones  $\{F(x, z), z_1(x), z_2(x)\}$  y definida la función  $f(x)$  como sigue:

$$f(x) \equiv \int_{z_1}^{z_2} F dz \quad (4.63)$$

puede demostrarse que:

$$\frac{Df}{Dx} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial F}{\partial x} dz + [F]_{z_2} z'_2 - [F]_{z_1} z'_1 \quad (4.64)$$

donde:

$$[F]_{z_1} \equiv F(x, z_1) \quad [F]_{z_2} \equiv F(x, z_2) \quad z'_1 \equiv \frac{Dz_1}{Dx} \quad z'_2 \equiv \frac{Dz_2}{Dx} \quad (4.65)$$

Esta propiedad se extiende fácilmente a funciones de más variables, quedando como siguen las siguientes particularizaciones.

Dadas las funciones  $\{U = U(x, y, z); V = V(x, y, z); z_1(x, y) \equiv -H; z_2(x, y) \equiv \zeta\}$  y en base a la propiedad anterior se cumple que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_1}^{z_2} U dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial U}{\partial x} dz + [U]_{z_2} \frac{\partial z_2}{\partial x} - [U]_{z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{z_1}^{z_2} V dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial V}{\partial y} dz + [V]_{z_2} \frac{\partial z_2}{\partial y} - [V]_{z_1} \frac{\partial z_1}{\partial y} \quad (4.67)$$

Cambiando términos de miembro para que aparezcan en la ecuación (4.59) las componentes del vector transporte de masa:

$$\int_{-H}^{\zeta} \frac{\partial U}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\int_{-H}^{\zeta} U dz}_{M_x/\rho_0} - U_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - U_H \frac{\partial H}{\partial x} \quad (4.68)$$

$$\int_{-H}^{\zeta} \frac{\partial V}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\int_{-H}^{\zeta} V dz}_{M_y/\rho_0} - V_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - V_H \frac{\partial H}{\partial y} \quad (4.69)$$

donde  $\{U_{\zeta}, U_H, V_{\zeta}, V_H\}$  son los valores que toman las componentes horizontales de la velocidad en los contornos superior e inferior del problema.

Acerca de la velocidad vertical  $W$  en las partes superior e inferior de la columna de líquido, se tiene lo siguiente:

$$[W]_{-H}^{\zeta} = [W]_{\zeta} - [W]_{-H} \quad (4.70)$$

Hagamos las siguientes definiciones de funciones:

$$[W]_{\zeta} \equiv W_{\zeta} \equiv \frac{D\zeta}{Dt} \quad [W]_{-H} \equiv W_H \equiv \frac{D(-H)}{Dt} = -\frac{DH}{Dt} \quad (4.71)$$

Recordemos que se trata de funciones de dos variables  $\{x, y\}$  donde  $W_{\zeta} = W_{\zeta}(x, y)$  y  $W_H = W_H(x, y)$ , por lo que el cálculo de su diferencial absoluta puede obtenerse como la derivada local más el término convectivo:

$$W_{\zeta} = \frac{D\zeta}{Dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\vec{V}_{\zeta} \cdot \vec{\nabla}) \zeta \quad W_H = -\frac{DH}{Dt} = -\underbrace{\frac{\partial H}{\partial t}}_{=0} - (\vec{V}_H \cdot \vec{\nabla}) H \quad (4.72)$$

donde  $\{\vec{V}_{\zeta}; \vec{V}_H\}$  representan al campo de velocidades en la parte superior e inferior de la columna de líquido respectivamente.

Sustituyendo en la velocidad vertical queda:

$$[W]_{-H}^{\zeta} = W_{\zeta} - W_H = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\vec{V}_{\zeta} \cdot \vec{\nabla}) \zeta + (\vec{V}_H \cdot \vec{\nabla}) H \quad (4.73)$$

Sustituyendo (36),(37) y (38) en la ecuación de continuidad integrada (32):

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} - \rho_0 \left[ U_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + U_H \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial M_y}{\partial y} - \rho_0 \left[ V_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + V_H \frac{\partial H}{\partial y} \right] \\ + \rho_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \rho_0 \left[ (\vec{V}_{\zeta} \cdot \vec{\nabla}) \zeta + (\vec{V}_H \cdot \vec{\nabla}) H \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.74)$$



Reordenando sumandos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} - \rho_0 \underbrace{\left[ U_\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + V_\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right]}_{(\vec{V}_\zeta \cdot \vec{\nabla})\zeta} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - \rho_0 \underbrace{\left[ U_H \frac{\partial H}{\partial x} + V_H \frac{\partial H}{\partial y} \right]}_{(\vec{V}_H \cdot \vec{\nabla})H} + \\ + \rho_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \rho_0 \left[ (\vec{V}_\zeta \cdot \vec{\nabla}) \zeta + (\vec{V}_H \cdot \vec{\nabla}) H \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

Tras anularse cuatro de los sumandos dos a dos, se llega a la expresión final para la ecuación de continuidad del fluido oceánico integrada en la dimensión  $z$ :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \rho_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (4.76)$$

Y así se llega al sistema final de tres ecuaciones diferenciales para las tres incógnitas  $\{M_x, M_y, \zeta\}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} M_x - f M_y = -(\zeta + H) \left( \frac{\partial p_a}{\partial x} + g \rho_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + S_x + T_{xz}^s - T_{xz}^b + A_h \Delta_h M_x \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} M_y + f M_x = -(\zeta + H) \left( \frac{\partial p_a}{\partial y} + g \rho_0 \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + S_y + T_{yz}^s - T_{yz}^b + A_h \Delta_h M_y \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \rho_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (4.79)$$

La solución estacionaria de este sistema 2D puede acoplarse después (apartado 3.6 de este capítulo) al sistema que plantea las velocidades horizontales  $\{U(x, y, z), V(x, y, z)\}$  en cada capa del mar Báltico. Posteriormente, en el apartado 5.2 de este capítulo, implementaremos este planteamiento numéricamente a nuestra malla de cálculo 3D.

### 3.3. Parametrización de las TENSIONES $\{T^s, T^b\}$ y de la TURBULENCIA $\{A_v, A_h\}$

Las tensiones en la superficie del océano  $\{T_{xz}^s, T_{yz}^s\}$  han sido estudiadas y parametrizadas en diferentes modelos numéricos [101, 155, 168]: se va a suponer que el vector de tensiones debido al viento  $\vec{T}_s$  lleva la dirección del viento  $\vec{U}_a$  y que su módulo  $|\vec{T}_s^s|$  es proporcional al cuadrado de la velocidad  $\vec{U}_a$ . Aquí se muestra su dependencia de la velocidad del viento  $\vec{U}_a$ , de sus componentes horizontales  $\vec{U}_a = [U_{a,x}, U_{a,y}]$ , de su módulo  $U_a$ , del coeficiente de arrastre  $C_D$  y de la densidad del aire  $\rho_a$ :

$$\begin{aligned} \vec{T}^s \parallel \vec{u}_a &\equiv \frac{\vec{U}_a}{|\vec{U}_a|} \equiv \frac{\vec{U}_a}{U_a} & |\vec{T}^s| &\propto U_a^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{T}^s = \rho C_D U_a^2 \frac{\vec{U}_a}{U_a} \\ \Rightarrow \quad T_{xz}^s &= \rho_a C_D U_a U_{a,x} & T_{yz}^s &= \rho_a C_D U_a U_{a,y} \end{aligned} \quad (4.80)$$

donde  $\vec{u}_a$  es el unitario en la dirección del viento cuya velocidad tiene por módulo  $U_a = |\vec{U}_a| = \sqrt{U_{a,x}^2 + U_{a,y}^2}$ . En los cálculos se tomará  $\rho_a = 1.3 \text{ kg m}^{-3}$  y para el coeficiente de arrastre  $C_D = 2.6 \times 10^{-3}$  [155, 168]. Existen diversas parametrizaciones en la literatura [101, 143] para  $C_D$  como función de la velocidad del viento.

Por otro lado, las tensiones en el fondo del mar  $\{T_{xz}^b, T_{yz}^b\}$  van a ser modeladas [101, 155, 168] para esta primera aproximación de manera análoga a las de la superficie: el vector de tensiones debido al fondo oceánico  $\vec{T}^b$  lleva la dirección del vector transporte de masa  $\vec{M}$  y su módulo  $|\vec{T}^b|$  es proporcional al cuadrado del vector  $\vec{M}$  y a la inversa del cuadrado de la profundidad total  $H + \zeta$ . Aquí se muestra su dependencia respecto a  $\vec{M}$ , su módulo y sus componentes, la profundidad y el coeficiente de fricción  $r$ :

$$\begin{aligned} \vec{T}^b \parallel \vec{u}_b &\equiv \frac{\vec{M}}{|\vec{M}|} & |\vec{T}^b| &\propto M^2 \frac{1}{(H + \zeta)^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{T}^b = r M^2 \frac{1}{(H + \zeta)^2} \frac{\vec{M}}{|\vec{M}|} \\ \Rightarrow \quad T_{xz}^b &= r \frac{M}{(H + \zeta)^2} M_x & T_{yz}^b &= r \frac{M}{(H + \zeta)^2} M_y \end{aligned} \quad (4.81)$$

donde  $\vec{u}_b$  es el unitario en la dirección del vector  $\vec{M}$  cuyo módulo viene dado por  $M = |\vec{M}| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ . El coeficiente de fricción  $r$  depende [95] de la rugosidad del fondo y de las propiedades de la capa límite de fondo, alcanzando valores típicamente en el intervalo  $2 - 4 \times 10^{-3}$ . En los cálculos se tomará  $r = 2.5 \times 10^{-3}$  [155, 168] para el coeficiente de fricción.

El coeficiente de viscosidad vertical  $A_v$  va a ser estimado mediante la teoría de Felsenbaum para corrientes inducidas por vientos, en que  $A_v$  depende [155, 179] de la velocidad del viento  $U_a$ , del parámetro de Coriolis  $f$  y de la profundidad  $H$ :

$$\begin{aligned} A_v &= \alpha_1 U_a H \quad \text{si} \quad H < H_{cr} & \text{ó} \\ A_v &= \alpha_2 \frac{U_a^2}{f} \quad \text{si} \quad H \geq H_{cr} \end{aligned} \quad (4.82)$$

donde  $H_{cr} = \alpha_3 U_a / f$  es una profundidad crítica, y los coeficientes  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  son iguales a  $\{0.54 \times 10^{-4}, 4.7 \times 10^{-8}, 8.7 \times 10^{-4}\}$  respectivamente.

El parámetro  $H_{cr}$  para el Báltico es del orden de la profundidad media y los valores que se obtienen para  $A_v$  en ambas partes de la función a trozos son similares, y ayudarán en el diseño del modelo de dispersión presentado en esta tesis doctoral.

La viscosidad turbulenta horizontal puede ser parametrizada dependiendo de la escala espacial de los procesos dinámicos intervinientes, teniendo en cuenta la conocida *Ley 4/3* de Richardson

$$A_h = c_o L^{4/3} \quad (4.83)$$

donde  $L$  representa la escala horizontal de los torbellinos presentes en el problema, y  $c_o$  es una constante empírica [26] que tiene un orden de magnitud de  $c_o \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{2/3} \text{ s}^{-1}$ . En los cálculos bidimensionales del modelo del IOPAN [80] se trabaja tomando  $L$  igual a varias veces el tamaño de la resolución horizontal ( $h_x = h_y = 10 \text{ km}$ ), tales que  $A_h > 1000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , para así favorecer la obtención numérica del estado estacionario.

### 3.4. Detalles sobre la integración numérica de las ecuaciones 2D

Una forma sencilla de integrar este sistema de ecuaciones (4.77)–(4.79) es mediante un esquema de Método de Diferencias Finitas que han seguido diferentes autores [101, 155]:

$$\begin{aligned} M_{x_{m+1},n}^{t+\tau} &= \left(1 - 2\tau \overline{R_{m+1,n}}\right) M_{x_{m+1},n}^{t-\tau} + 2f\tau \overline{M_y} + 2\tau G_{x_{m+1},n} + \\ &\quad - \rho_o g H_{m+1,n} \frac{\tau}{h_x} \left(\zeta_{m+2,n}^t - \zeta_{m,n}^t\right) + 2\tau A_h \Delta_h M_{x_{m+1},n}^{t+\tau} \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} M_{y_{m,n+1}}^{t+\tau} &= \left(1 - 2\tau \overline{R_{m,n+1}}\right) M_{y_{m,n+1}}^{t-\tau} - 2f\tau \overline{M_x} + 2\tau G_{y_{m,n+1}} + \\ &\quad - \rho_o g H_{m,n+1} \frac{\tau}{h_y} \left(\zeta_{m,n+2}^t - \zeta_{m,n}^t\right) + 2\tau A_h \Delta_h M_{y_{m,n+1}}^{t+\tau} \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\zeta_{m,n}^{t+2\tau} = \zeta_{m,n}^t - \frac{\tau}{\rho_o} \left[ \frac{1}{h_x} \left( M_{x_{m+1},n}^{t+\tau} - M_{x_{m-1},n}^{t+\tau} \right) + \frac{1}{h_y} \left( M_{y_{m,n+1}}^{t+\tau} - M_{y_{m,n-1}}^{t+\tau} \right) \right] \quad (4.86)$$

donde:

$$G_{x_{m+1,n}} = \frac{p_{a_{m+2,n}} - p_{a_{m,n}}}{2h_x} H_{m+1,n} + T_{x_{m+1,n}}^s + S_{x_{m+1,n}} \quad (4.87)$$

$$G_{y_{m,n+1}} = \frac{p_{a_{m,n+2}} - p_{a_{m,n}}}{2h_y} H_{m,n+1} + T_{y_{m,n+1}}^s + S_{y_{m,n+1}} \quad (4.88)$$

$$\overline{M}_y = \left( M_{y_{m+2,n+1}}^{t-\tau} + M_{y_{m+2,n-1}}^{t-\tau} + M_{y_{m,n+1}}^{t-\tau} + M_{y_{m,n-1}}^{t-\tau} \right) / 4 \quad (4.89)$$

$$\overline{M}_x = \left( M_{y_{m+1,n+2}}^{t-\tau} + M_{y_{m-1,n+1}}^{t-\tau} + M_{y_{m+1,n}}^{t-\tau} + M_{y_{m-1,n}}^{t-\tau} \right) / 4 \quad (4.90)$$

$$\Delta_h M_{x_{m+1,n}}^{t+\tau} = \left( M_{x_{m+1,n+2}}^{t+\tau} + M_{x_{m+1,n-2}}^{t+\tau} + M_{x_{m+3,n}}^{t+\tau} + M_{x_{m-1,n}}^{t+\tau} - 4M_{x_{m+1,n}}^{t+\tau} \right) / 4h_x^2 \quad (4.91)$$

$$\Delta_h M_{y_{m,n+1}}^{t+\tau} = \left( M_{y_{m,n+1}}^{t+\tau} + M_{y_{m,n+3}}^{t+\tau} + M_{y_{m,n-1}}^{t+\tau} + M_{y_{m+2,n+1}}^{t+\tau} - 4M_{y_{m-2,n+1}}^{t+\tau} \right) / 4h_y^2 \quad (4.92)$$

y teniendo en cuenta las expresiones (23) para la tensión en el fondo de la columna de líquido:

$$\overline{R}_{m+1,n} = \frac{r}{\left[ H + \left( \zeta_{m+2,n}^t + \zeta_{m,n}^t \right) / 2 \right]^2} \sqrt{\overline{M}_y^2 + \left( M_{x_{m+1,n}}^{t-\tau} \right)^2} \quad (4.93)$$

$$\overline{R}_{m,n+1} = \frac{r}{\left[ H + \left( \zeta_{m,n+2}^t + \zeta_{m,n}^t \right) / 2 \right]^2} \sqrt{\overline{M}_x^2 + \left( M_{y_{m,n+1}}^{t-\tau} \right)^2} \quad (4.94)$$

El mallado de diferencias finitas utilizado ha sido de tipo Arakawa C. Ya se ha hablado de la importancia de la búsqueda de soluciones estacionarias de las ecuaciones diferenciales que tenemos que resolver. Para ello, es aconsejable analizar la solución transitoria del sistema (4.77)–(4.79) que se hará con la ayuda del esquema numérico mostrado en las expresiones (4.84)–(4.94), y que conducirá, tras un tiempo determinado, a valores prácticamente invariables del transporte de masa y de la elevación en cada punto, es decir de los campos  $\{M_x^e(x, y), M_y^e(x, y), \zeta^e(x, y)\}$ , donde el superíndice  $e$  hace alusión su carácter estacionario.

Si tenemos en cuenta que en estado estacionario se cumple:

$$\frac{\partial}{\partial t} M_x^e = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} M_y^e = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} \zeta^e = 0 \quad (4.95)$$

y sustituimos en (4.77)–(4.79):

$$-f M_y^e = -(\zeta^e + H) \left( \frac{\partial p_a}{\partial x} + g \rho_o \frac{\partial \zeta^e}{\partial x} \right) + S_x + T_{xz}^s - T_{xz}^b + A_h \Delta_h M_x^e \quad (4.96)$$

$$f M_x^e = -(\zeta^e + H) \left( \frac{\partial p_a}{\partial y} + g \rho_o \frac{\partial \zeta^e}{\partial y} \right) + S_y + T_{yz}^s - T_{yz}^b + A_h \Delta_h M_y^e \quad (4.97)$$

$$\frac{\partial M_x^e}{\partial x} + \frac{\partial M_y^e}{\partial y} = 0 \quad (4.98)$$

• **Función de corrientes  $\Psi$**

Dado el carácter solenoidal ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{M}^e = 0$ ) del campo estacionario de transporte de masa, podemos definir una función escalar de corrientes  $\Psi$  a partir de la cual se pueden calcular las componentes del campo  $\vec{M}^e$ , con las ventajas matemáticas y gráficas –líneas de nivel, grandes circuitos de corriente, etc– que proporciona una función del tipo  $\Psi(x, y)$  que contenga toda la información analítica de las corrientes fundamentales que tienen lugar en el sistema.

La función de corrientes  $\Psi(x, y)$  se define de la siguiente manera:

$$M_x^e = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad M_y^e = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.99)$$

y si se expresa en forma vectorial:

$$\vec{M}^e = \vec{e}_z \wedge \vec{\nabla} \Psi \quad (4.100)$$

donde  $\vec{e}_z$  es el vector unitario en el sentido creciente del eje  $OZ$ .

**3.5. Descripción de algunas soluciones del problema 2D**

Ya se han introducido los fundamentos de los modelos hidrodinámico bidimensional (2D). A continuación se van a mostrar una parte de sus resultados para ilustrar el problema y acercarnos al comportamiento físico del sistema. En primer lugar haremos una

descripción de las corrientes inducidas bajo vientos del Oeste-Este, para terminar con los resultados asociados a los vientos en sentido Sur-Norte.

### 3.5.1. Descripción de corrientes inducidas por vientos del Oeste-Este.

Pasamos a describir soluciones del sistema de ecuaciones para corrientes 2D tales que  $\vec{V}_w \parallel \vec{e}_x$ ;  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$ . Antes de hacer un análisis por compartimentos, veremos las gráficas globales para el Mar Báltico, empezando por la solución estacionaria de las funciones cuando tenemos las condiciones meteorológicas citadas anteriormente.

La gráfica 4.6 presenta la función de corrientes  $\Psi(x, y)$  con isolíneas de la forma  $\Psi = cte$  expresadas en la unidad *Sverdrup* ( $1 \text{ Sv} = 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ Hm}^3 \text{ s}^{-1}$ ) en honor al insigne oceanógrafo escandinavo. Las líneas de corrientes plumeadas indican regiones de circulación ciclónica, o lo que es lo mismo en sentido contrario a las agujas del reloj.

Puede hablarse de cierto predominio de la circulación ciclónica, aunque como se verá más detalladamente en las gráficas compartimentales, hay regiones importantes con circulación anticiclónica (líneas lisas sin plumear).

El campo de corrientes superficiales  $\vec{V}_S(x, y)$  mostrado en la figura 4.7 es prácticamente uniforme en la dirección Oeste que es la dirección seguida por los vientos de altura  $\vec{V}_w \parallel \vec{e}_x$ . Hay una ligera desviación de esta tendencia sobre todo en los puntos de la costa este debido a la influencia de las condiciones de frontera.

El mapa ilustrativo (figura 4.8) de las corrientes medias  $\vec{V}_{2D}(x, y)$  promediadas verticalmente guarda por su propia naturaleza una estrecha relación con el de las líneas de corriente  $\Psi$  como se puede ver comparando ambos gráficos.

Con un poco de intuición se vislumbran en la figura que viene a continuación las líneas de corrientes de la figura anterior. Aparecen interesantes detalles que se comentarán más detenidamente en el análisis compartimental como es el protagonizado por altas velocidades medias en las zonas costeras del este del Mar Báltico.

Resulta interesante también la representación (figura 4.9) de la función elevación  $\zeta(x, y)$  en el régimen estacionario y condiciones meteorológicas que ya conocemos. Salta la vista la estructura del Mar Báltico en forma de "Y" griega, con dos brazos, uno principal y otro secundario que da lugar al Golfo de Finlandia, configuración que es la máxima responsable del carácter creciente de la función  $\zeta(x, y)$  hacia al norte en la rama principal y hacia el este en la secundaria.

A este último factor hay que sumar también la influencia de la batimetría del fondo marino, por la conocida tendencia que tienen a alinearse las curvas de profundidad  $H(x, y) = cte$  y las de elevación  $\zeta(x, y) = cte$ , o mejor dicho la tendencia de las líneas de elevación a alinearse con las líneas de profundidad.

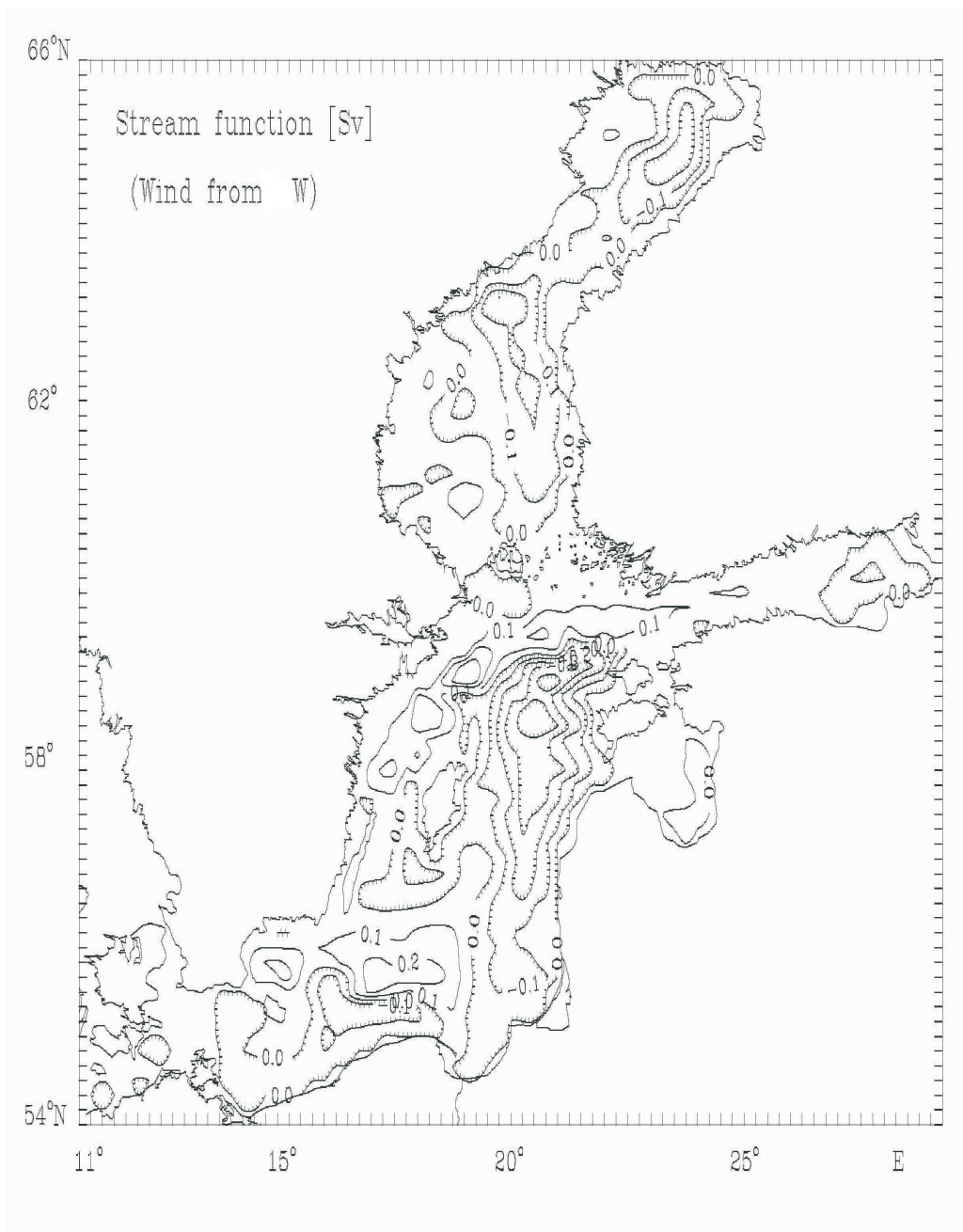


Figura 4.6: Líneas de la función de corrientes  $\Psi$ (Sv) inducidas por vientos del oeste tales que  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$  [80].

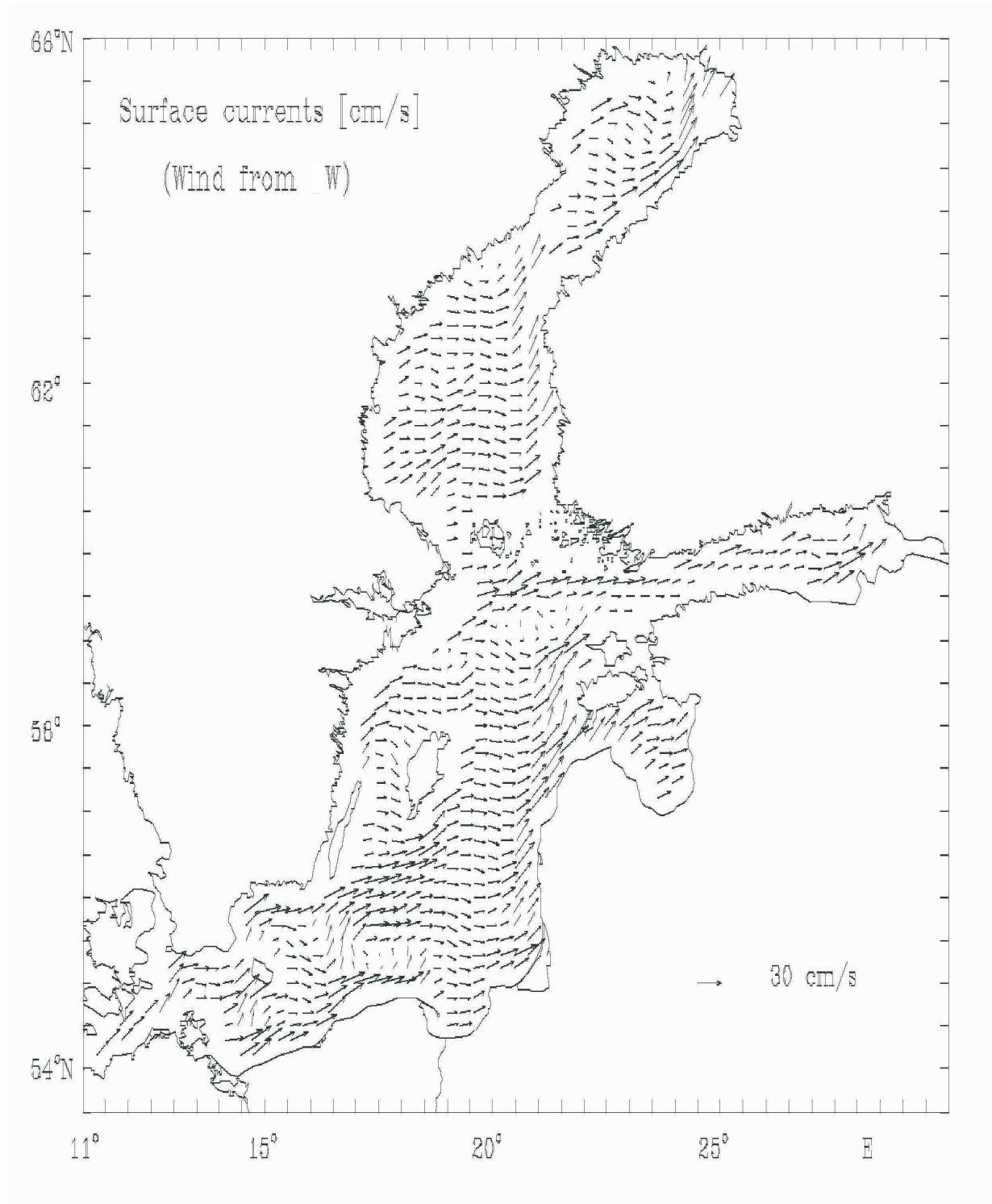


Figura 4.7: Corrientes superficiales  $\vec{V}_S(x, y)$  inducidas por vientos del oeste tales que  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$  [80].



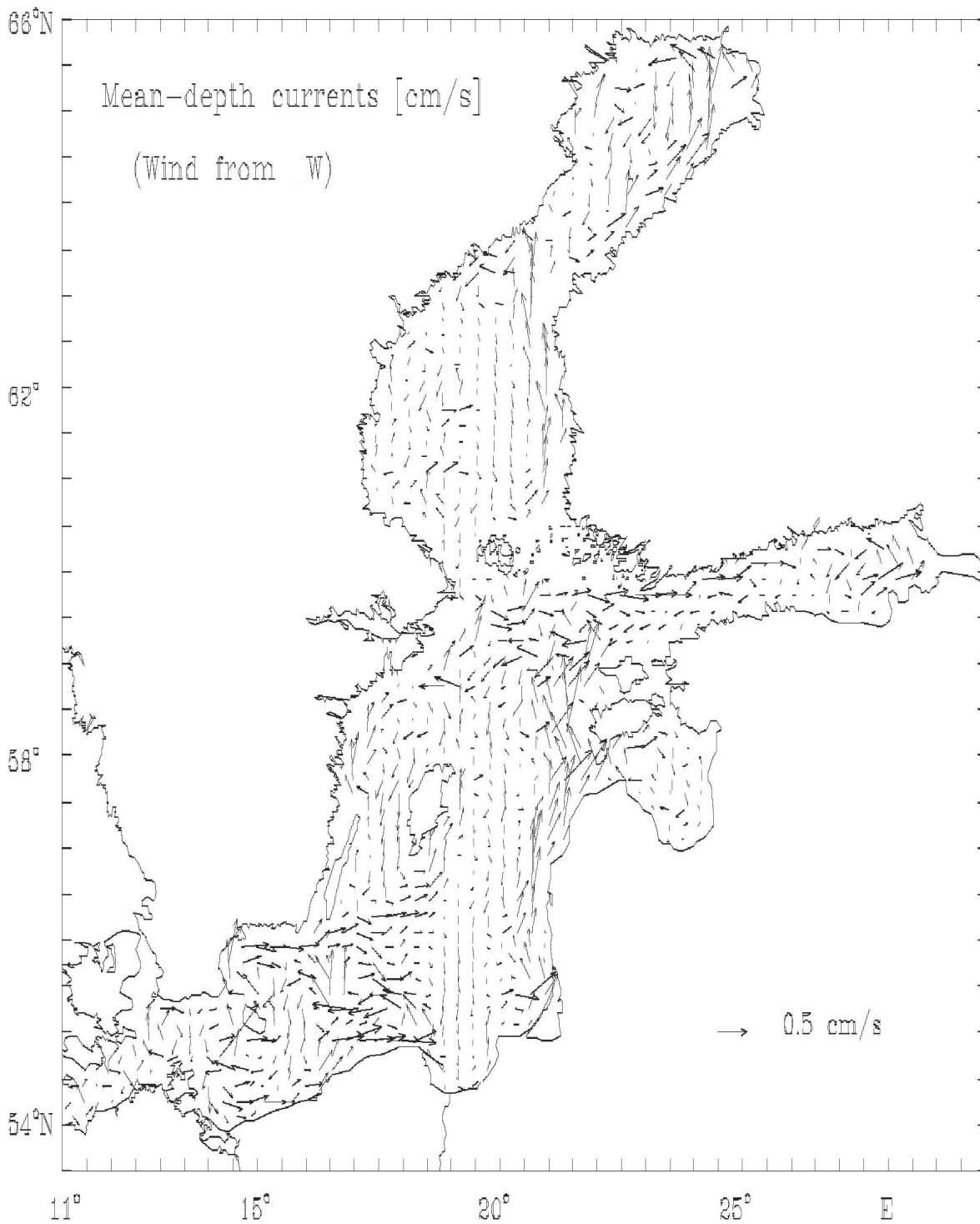


Figura 4.8: Corrientes medias  $\vec{V}_{2D}$  (cm s<sup>-1</sup>) promediadas verticalmente e inducidas por vientos del Oeste tales que  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$  [80].

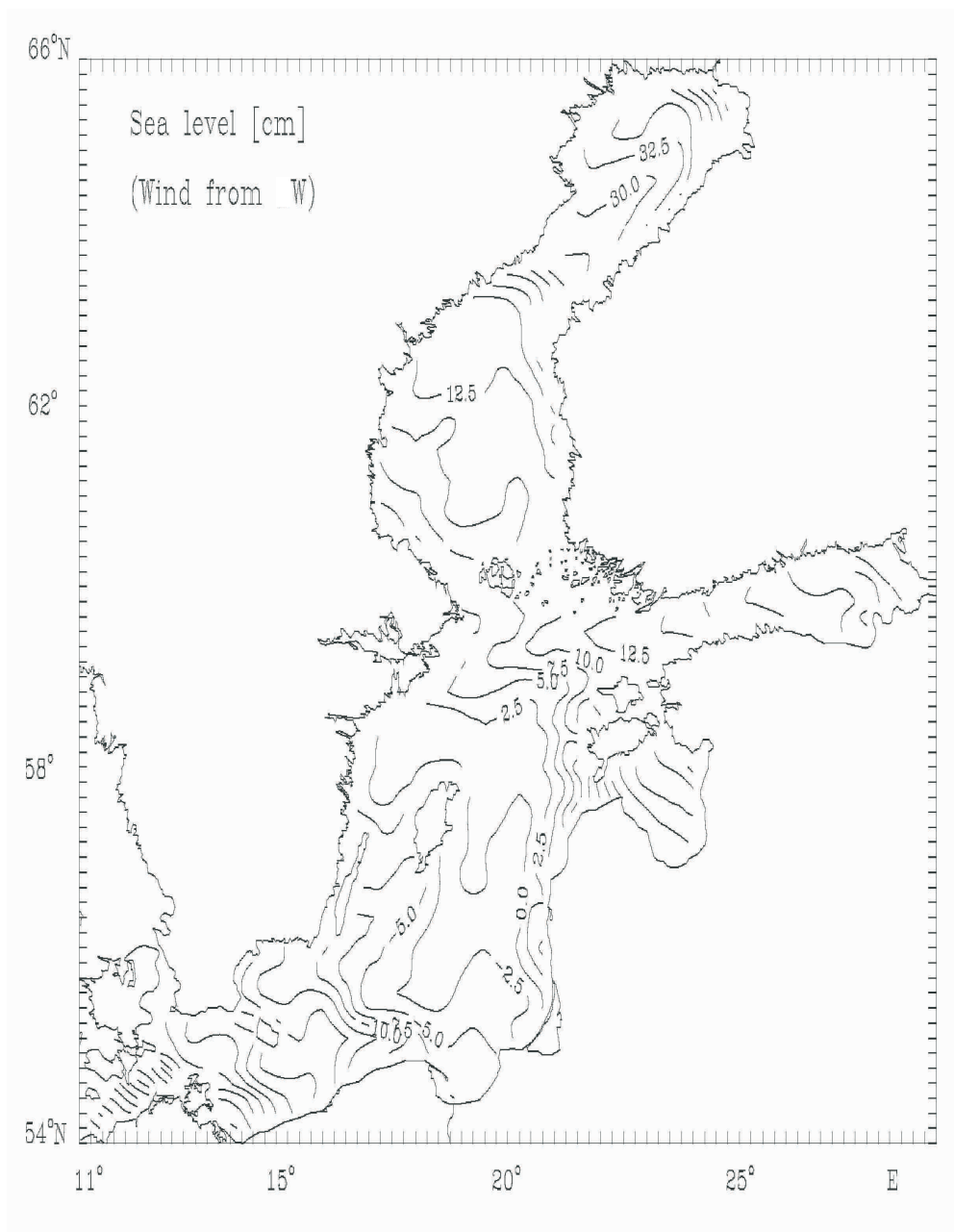


Figura 4.9: Líneas de elevación  $\zeta$  (cm) inducidas por vientos del oeste tales que  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$  [80].

A continuación se van exponer detalles de las soluciones estacionarias de las ecuaciones en cada uno de los cinco compartimentos que forman el sistema.

(a) **Soluciones en el Golfo de Bothnia**

Se tiene un claro predominio de la circulación en sentido ciclónico en la zona central en la zona este. La zona oeste está más afectada por la circulación anticiclónica si

bien la intensidad es menor que en el área ciclónica. Hay otra pequeña zona con circulación horaria en el sur de Golfo de Bothnia. Este hecho se aprecia con la mayor claridad en un artículo publicado por el Instituto Oceanográfico de Suecia [43]. El sentido de la velocidad del viento junto a que la zona noreste de este compartimento es poco profunda hace que allí se alcancen los valores más altos tanto de velocidad media  $\vec{V}_{2D}$  como en la velocidad superficial  $\vec{V}_S$ , hecho que se podía deducir de la proximidad entre las líneas de corrientes por la conocida proporcionalidad entre el gradiente de la función de corrientes y la velocidad media.

(b) **Soluciones en el Mar de Bothnia**

Se aprecia un dominio general de la circulación ciclónica en la mitad este y de la circulación anticiclónica en la occidental, si bien la intensidad de esta última es menor. La velocidad media  $\vec{V}_{2D}$  presenta máximos en la costa de Finlandia como cabe esperar para este patrón de vientos. Es obligatorio puntualizar que estas corrientes van prácticamente en la dirección del paralelo del lugar siguiendo el sentido marcado por los vientos con una componente sur-norte totalmente despreciable. En cuanto a las líneas de elevación, es claro el crecimiento de la función  $\zeta(x, y)$  hacia el norte con una suavización de las curvas debida a la influencia de la topografía, es decir de la función  $H(x, y)$ . Las corrientes superficiales  $\vec{V}_S$  van claramente en el sentido marcado por los vientos de altura, curvándose hacia el norte en la costa oriental, como cabía esperar. También, aunque en menor medida, se aprecia en la costa occidental una desviación en este mismo sentido.

(c) **Soluciones en el Golfo de Finlandia**

Las corrientes en el Golfo de Finlandia para vientos en altura hacia el este con  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$  presentan dos zonas claramente diferenciadas: una región ciclónica en el este y otra anticiclónica en el oeste, algo más débil la segunda que la primera. Entre ambas se tiene una zona de transición aproximadamente en el centro del golfo. La carta de corrientes medias  $\vec{V}_{2D}$  nos enseña que la entrada de fluido en el golfo se produce en el segmento norte de la línea fronteriza con el resto del Mar Báltico, mientras que la salida tiene lugar en el segmento sur.

El hecho de que la entrada se produzca por el segmento cuyas columnas de líquido son menos profundas concuerda con otros trabajos publicados en la literatura científica [207, 23, 205, 22]. Las corrientes superficiales  $\vec{V}_S(x, y)$  presentan similares carac-

terísticas a las del compartimento anterior y las líneas de nivel de la función  $\zeta(x, y)$  se suceden de oeste a este.

(d) **Soluciones en el Báltico Centro**

La región báltica central presenta una circulación con dos zonas claramente diferenciadas: la zona norte y oeste donde la circulación es anticiclónica, y la este y sur donde es antihoraria y de mayor intensidad que en la primera, como puede apreciarse por el número de líneas de corriente y su cercanía. El mapa de corrientes medias  $\vec{V}_{2D}(x, y)$  tiene como principal característica la altísima intensidad del flujo en la costa este, máximo en todo el Mar Báltico para las condiciones meteorológicas que se estudian en este apartado. Hay que destacar también las velocidades relativamente altas en la frontera con el Golfo de Finlandia favorecidas por los vientos de componente oeste que hacen muy eficiente el intercambio de fluido entre los dos compartimentos. Las corrientes superficiales  $\vec{V}_S(x, y)$ , que están claramente alineadas con los vientos en la dirección oeste-este, rompen esta tendencia en las zonas costeras de las repúblicas bálticas así como en el litoral sueco de la península y de la isla de Gotland, por la tendencia natural de la circulación oceánica a seguir las líneas de costa. Es destacable la presencia en este compartimento de la línea de elevación neutra  $\zeta(x, y) = 0$ , en la zona de la isla de Gotland.

(e) **Soluciones en el Báltico Sur**

Si dividimos esta zona en tres tercios latitudinales de norte a sur, norte, centro y sur; y en otros tres longitudinales de oeste a este, oeste, centro y este, quedan definidas nueve partes en el compartimento de las cuales siete tienen circulación ciclónica y dos anticiclónica. Son justamente las partes centro-oeste y la centro-centro las únicas depositarias de la circulación horaria, según que puede verse a continuación. Muy llamativos son los dos vórtices contrapuestos e intensos situados al norte de la costa de Polonia. La gráfica de corrientes medias nos enseña que el transporte más intenso se da precisamente en la zona de los remolinos anteriormente mencionados. Las corrientes superficiales se adaptan muy bien a la línea de costa y en el interior se mantienen prácticamente paralelas a la dirección del paralelo del lugar que es la marcada por las corrientes atmosféricas. Las líneas de elevación  $\zeta(x, y) = cte$  tienen las características del resto del sistema: crecientes a medida que avanzamos adentrándonos en la estructura canalizada del sistema, con una ligera adaptación a

las isolíneas de profundidad.

### 3.5.2. Descripción de corrientes inducidas por vientos del Sur-Norte.

Pasamos a describir soluciones del sistema de ecuaciones para corrientes 2D tales que  $\vec{V}_w \parallel \vec{e}_y$ ;  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$ . El aspecto más notable de la circulación oceánica del sistema para estas condiciones de viento es el reparto prácticamente equitativo entre las regiones ciclónicas y anticiclónicas (figura 4.10); esta característica puede apreciarse también en el mapa de corrientes medias (figura 4.11). correspondiente a la figura 4.11. El mapa ilustrativo de las corrientes medias promediadas verticalmente guarda por su propia naturaleza una estrecha relación con el de las líneas de corriente  $\Psi$  como se puede ver comparando ambos gráficos (figuras 4.11 y 4.10).

Como cabía esperar, las corrientes superficiales (figura 4.12) tienen mayoritariamente la dirección sur-norte en consonancia con las condiciones atmosféricas que intervienen en el problema.

En este mismo sentido, las líneas de la función elevación  $\zeta(x, y)$  alcanzan valores máximos superiores (figura 4.12) a los asociados a los vientos del oeste estudiados en el apartado anterior. Este extremo tiene su explicación en que el Mar Báltico está mayoritariamente orientado en la dirección sur-norte, canalizando así de forma favorable la acción de las corrientes atmosféricas.

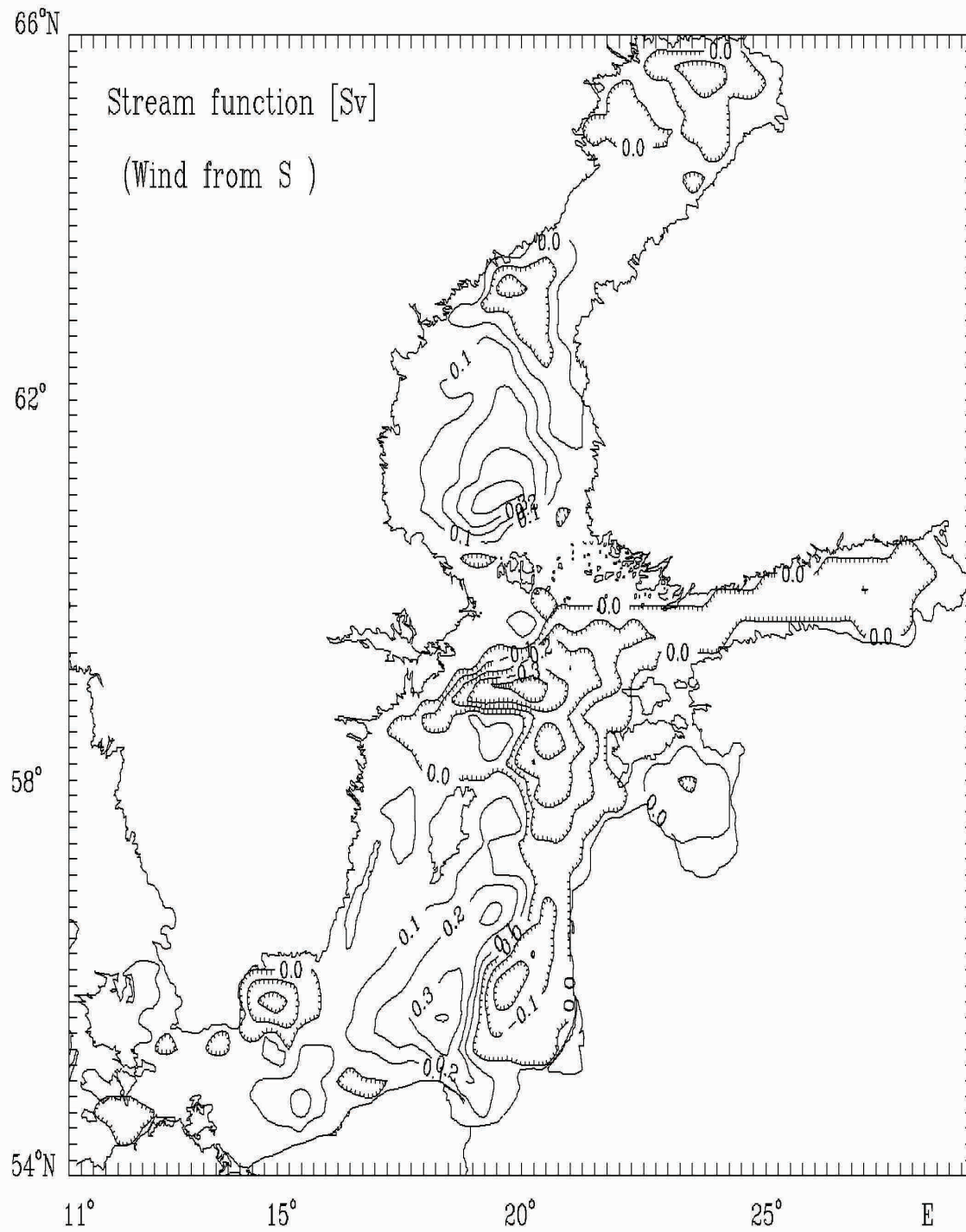


Figura 4.10: Líneas de la función de corrientes  $\Psi(\text{Sv})$  inducidas por vientos del sur tales que  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$  [80].

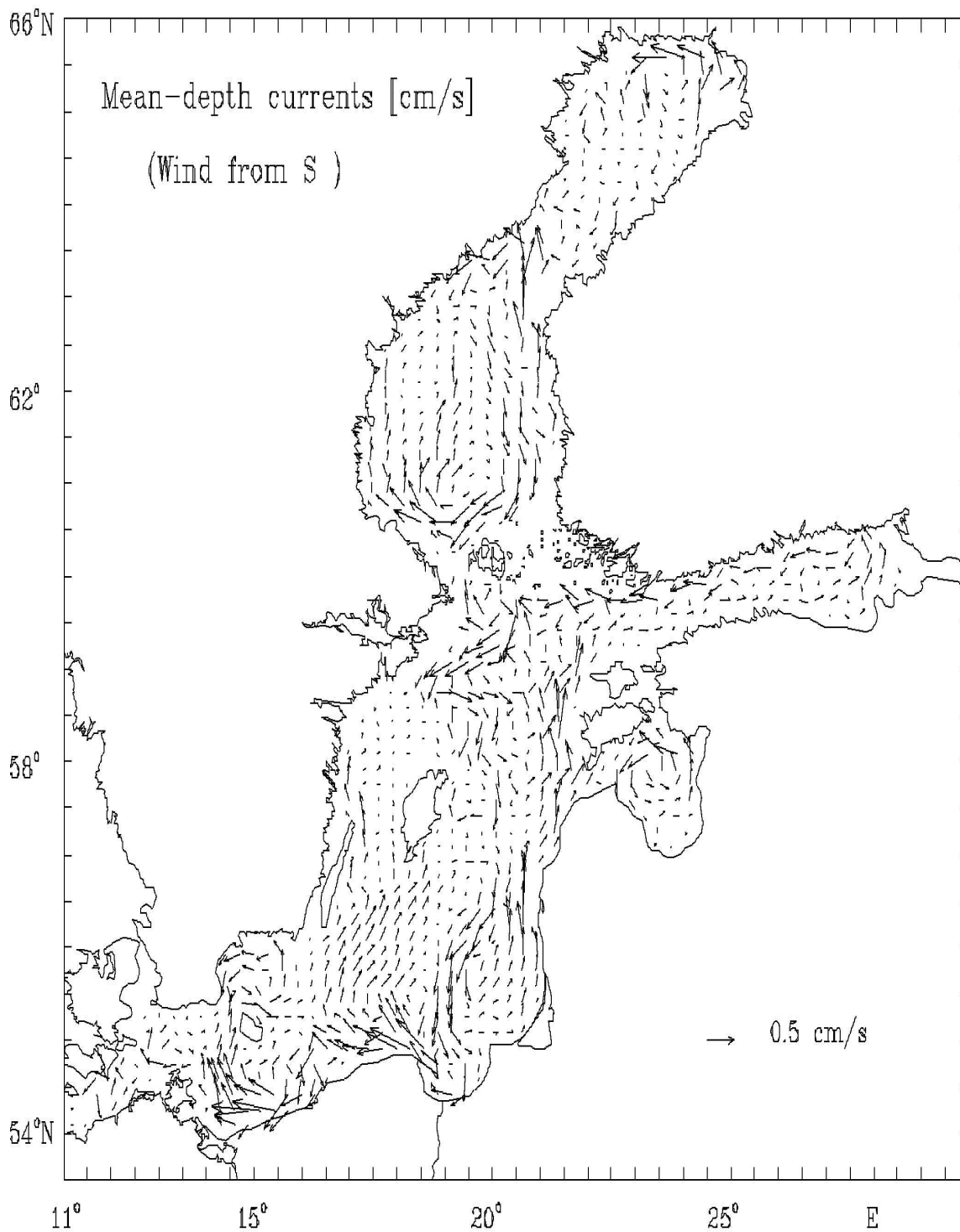


Figura 4.11: Corrientes medias  $\vec{V}_{2D}$  ( $\text{cm s}^{-1}$ ) promediadas verticalmente e inducidas por vientos del Sur tales que  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$  [80].

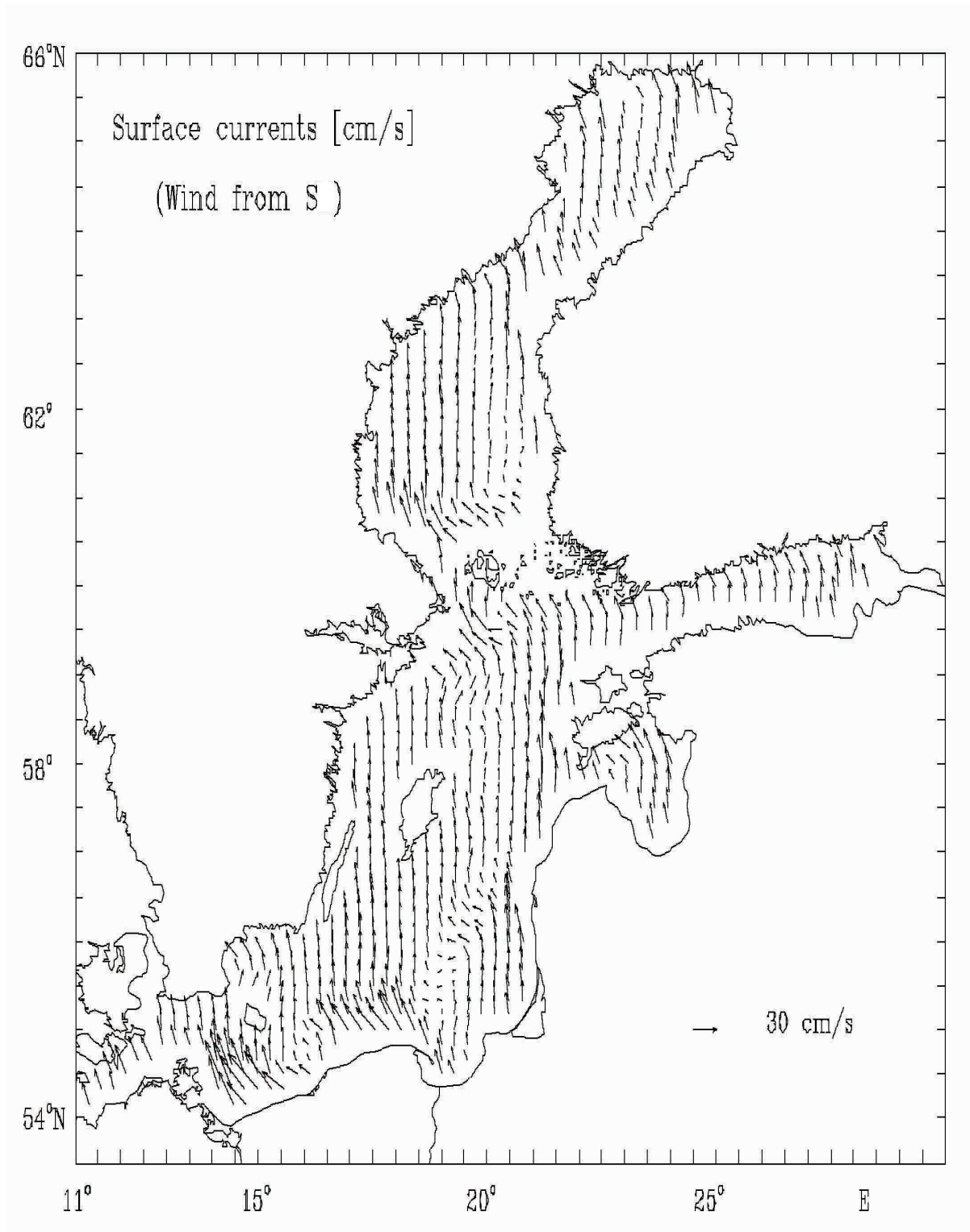


Figura 4.12: Corrientes superficiales  $\vec{V}_S(x, y)$  inducidas por vientos del sur tales que  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$  [80].



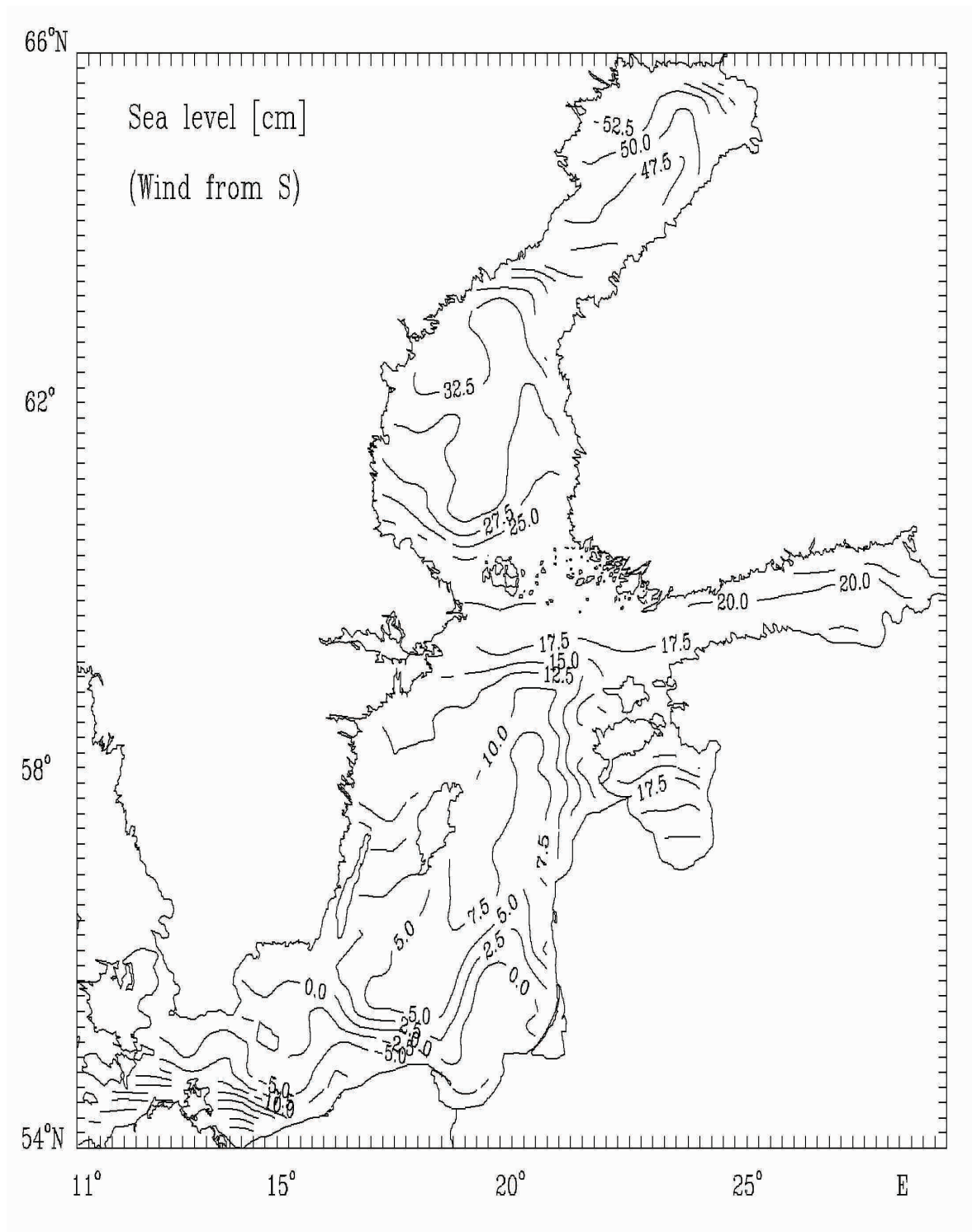


Figura 4.13: Líneas de elevación  $\zeta$ (cm) inducidas por vientos del sur tales que  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$  [80].

A continuación se van exponer detalles de las soluciones estacionarias de las ecuaciones en cada uno de los cinco compartimentos que forman el sistema.

(a) **Soluciones en el Golfo de Botnia**

En este compartimento se tiene una mayor presencia de la circulación ciclónica, sobre todo en el norte donde se aprecian dos dominios con líneas antihorarias. En el sur el fluido circula más débilmente y con sentido anticiclónico como se muestra en la figura de corrientes medias. La elevación del mar  $\zeta(x, y)$  es claramente creciente hacia el norte, alcanzándose en este compartimento los máximos del Mar Báltico para estas condiciones meteorológicas, con valores que superan la mitad de un metro. Las corrientes superficiales van nítidamente hacia el norte con ligeras desviaciones en las costas septentrionales en las que han de satisfacerse lógicamente las condiciones de contorno del problema.

(b) **Soluciones en el Mar de Botnia**

La característica más destacable del movimiento del fluido en esta zona es que las corrientes anticiclónicas cubren la mayor parte del compartimento. Se tiene un gran torbellino horario en el sur y otro de tamaño intermedio y antihorario en el norte. Hay que mencionar también la preponderancia de la circulación anticiclónica en la parte central, acompañada de pequeños remolinos ciclónicos en la costa este, apreciables más claramente en el mapa de corrientes medias. En las líneas de elevación  $\zeta(x, y) = cte$  se nota la influencia de la topografía junto a la tendencia creciente del campo en el sentido sur-norte, gracias a lo cual la función tiene una forma prácticamente plana en la zona central del compartimento. Las variaciones de las corrientes superficiales  $\vec{V}_S(x, y)$  respecto de la dirección predominante marcada por el meridiano local se deben a las corrientes de retorno que tienen lugar en las franjas norte y sur del Mar de Bothnia.

(c) **Soluciones en el Golfo de Finlandia**

Dadas las condiciones meteorológicas con vientos del sur y un compartimento como éste con una geometría tan claramente orientada en la dirección oeste-este se obtiene como solución un campo de velocidades no muy intensas que hacen circular al sistema en sentido contrario a las agujas del reloj. Las corrientes superficiales  $\vec{V}_S(x, y)$  van claramente en sentido norte, con las lógicas desviaciones en las cercanías del contorno,

y las líneas de elevación presentan esta misma tendencia creciente hacia el norte como consecuencia de la acción de los vientos.

(d) **Soluciones en el Báltico Centro**

Cuando las corrientes atmosféricas soplan hacia el norte y el sistema afectado está orientado y canalizado fundamentalmente en esta dirección existen un grupo de soluciones matemáticas a este problema [207, 23, 205, 22] que apuntan en la dirección de la formación de dominios de circulación ciclónica en zona este y anticiclónica en la oeste, con el acompañamiento de corrientes de retorno en las zonas norte y sur. Si añadimos a esta propiedad la presencia de un importante isla en la zona (isla de Gotland) y las irregularidades de la costa de Suecia cercana al Archipiélago, podremos interpretar bien la solución del problema fluidomecánico que nos cita aquí. Se observa así circulación anticiclónica en la costa oeste a la altura de la isla, en la zona oeste da la franja delimitada entre la gran isla y las costas bálticas, y en el litoral noroccidental no invadido por el gran ciclón generado frente las costas de Estocolmo que se expande debido a la forma del relieve costero. Hay una fuerte orientación de las corrientes superficiales  $\vec{V}_S(x, y)$  hacia el norte con un cambio de orientación claro en norte (Archipiélago) donde se producen la corrientes de retorno y los flujos más intensos. Las líneas de nivel presentan la tendencia general creciente hacia el norte, mezclada con la influencia de la topografía del fondo del mar. Otro hecho destacable es relativamente pequeño intercambio hidráulico con el Golfo de Finlandia, mucho mayor cuando los vientos soplan en la dirección perpendicular a la que nos ocupa ahora mismo.

(e) **Soluciones en el Báltico Sur**

En la parte suroeste (Isla de Bornholm) se tienen dos remolinos en sentido contrario al norte y sur de la pequeña isla; un ciclón frente a las costas suecas y anticiclón frente a las alemanas. El resto del sistema está recorrido por corrientes medias  $\vec{V}_{2D}$  hacia el norte en la costa, creándose circulación horaria en la mitad oeste y antihoraria en la mitad oriental. Son muy notables las corrientes fuertes de retorno en el sur (Golfo de Gdansk) con valores extremos de flujo. Es precisamente en esa zona donde las corrientes superficiales  $\vec{V}_S$  se salen más de tendencia natural hacia el norte para adaptarse a la frontera y cumplir así las condiciones de contorno. Esto se da a lo largo de toda la costa sur báltica. Las isolíneas de elevación están en la

tónica general de crecimiento modelada por la topografía de fondo que aparece en el resto del Mar Báltico.

### 3.6. Segunda fase de integración: Del modelo 2D a las corrientes 3D

Se retoman a continuación las ecuaciones generales del capítulo 2, (2.155) y (2.156). En condiciones bastante frecuentes de no proximidad a la costa, donde se da una relativa suavidad en campo horizontal de corrientes, es razonable considerar la aproximación ( $A_h \Delta_h V_{1,2} \ll A_v \Delta_v V_{1,2}$ ), como veremos en la siguiente estimación con valores típicos para el esquema numérico del mar Báltico:

$$\Delta_h U \sim \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \sim \frac{\Delta U}{h_x^2} \sim \frac{U}{h_x^2} \sim \frac{10^{-1} \text{m s}^{-1}}{10^8 \text{m}^2} \sim 10^{-9} \text{m}^{-1} \text{s}^{-1} \quad (4.101)$$

$$\Delta_v U \sim \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \sim \frac{\Delta U}{h_z^2} \sim \frac{U}{h_z^2} \sim \frac{10^{-1} \text{m s}^{-1}}{10^2 \text{m}^2} \sim 10^{-3} \text{m}^{-1} \text{s}^{-1} \quad (4.102)$$

$$A_h \sim 10^2 \text{m}^2 \text{s}^{-1} \quad , \quad A_v \sim 10^{-2} \text{m}^2 \text{s}^{-1} \implies A_v \Delta_v U \sim 100 A_h \Delta_h U : \quad (4.103)$$

$$A_h \Delta_h V_{1,2} \ll A_v \Delta_v V_{1,2} \quad (4.104)$$

Tras un tiempo suficientemente grande como para que el viento haya conseguido un régimen de circulación suficientemente estable ( $\partial V_{1,2}/\partial t \simeq 0$ ) puede buscarse una solución estacionaria al problema de las corrientes horizontales:

$$A_v \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + fV = \frac{1}{\rho_o} \left( \frac{\partial p_a}{\partial x} + g\rho_o \frac{\partial \zeta}{\partial x} + g \int_z^0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} d\eta \right) \quad (4.105)$$

$$A_v \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - fU = \frac{1}{\rho_o} \left( \frac{\partial p_a}{\partial y} + g\rho_o \frac{\partial \zeta}{\partial y} + g \int_z^0 \frac{\partial \rho'}{\partial y} d\eta \right) \quad (4.106)$$

similar al caso simple de Ekman estudiado en el capítulo 2 (2.171, 2.172), ecuaciones homogéneas que generaban allí la espiral del mismo nombre. Las que nos ocupan aquí (4.105, 4.106) tienen, a diferencia de las primeras, un término no homogéneo a la derecha, dependiente sobre todo de la función elevación y del gradiente horizontal de salinidad.

La solución del sistema formado por (4.105) y (4.106) puede obtenerse analíticamente conocidas las funciones  $\{A_z, p_a, \zeta, \rho\}$ , por un lado; y la funciones  $\{M_x, M_y\}$  por otro,

necesarias para el modelo de las tensiones que aparecen en las condiciones de contorno: todas ellas son la solución del problema estacionario bidimensional representado en el sistema de ecuaciones anterior (4.77, 4.78, 4.79) cuya salida acoplaremos al sistema de ecuaciones representadas por (4.108) que nos dará las velocidades  $\{U, V\}$  del problema tridimensional.

Debido a estructura funcional hiperbólica del sistema de ecuaciones diferenciales a resolver, puede proponerse como solución una función compleja definida a partir de las velocidades horizontales, donde la velocidad  $U$  es la parte real y la velocidad  $V$  es la parte imaginaria

$$D \equiv U + iV. \quad (4.107)$$

Agrupando la parte inhomogénea en la función  $G$  –dependiente de  $\{A_z, p_a, \zeta, \rho\}$ – e independiente de  $\{U, V\}$ , que son las incógnitas que nos ocupan ahora, queda la ecuación que sigue:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial z^2} - p_1^2 D = G \quad (4.108)$$

donde,

$$G = \frac{1}{\rho_o A_v} \left( \frac{\partial p_a}{\partial x} + i \frac{\partial p_a}{\partial y} \right) + \frac{g}{A_v} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + i \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \frac{g}{\rho_o A_v} \int_z^0 \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} + i \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) d\eta \quad (4.109)$$

$$p_1^2 = \frac{f}{A_v} i \quad i \equiv \sqrt{-1} \quad (4.110)$$

Las condiciones de contorno son las siguientes:

$$\rho A_v \frac{\partial D}{\partial z} = T^s \quad \text{para } z = \zeta \quad (4.111)$$

$$\rho A_v \frac{\partial D}{\partial z} = T^b \quad \text{para } z = -H \quad (4.112)$$

donde  $T^s$  y  $T^b$  son representaciones complejas de los vectores  $\{\vec{T}^s, \vec{T}^b\}$  cuyas componentes son las tensiones tangenciales que sufre el fluido en la superficie y en el fondo de la columna de líquido respectivamente:

$$\vec{T}^s \equiv [T_{xz}^s \ T_{yz}^s] \quad \vec{T}^b \equiv [T_{xz}^b \ T_{yz}^b] \quad (4.113)$$

y de manera análoga se definen las representaciones complejas:

$$T^s \equiv T_{xz}^s + iT_{yz}^s \quad T^b \equiv T_{xz}^b + iT_{yz}^b \quad (4.114)$$

donde  $T^s$  y  $T^b$  ya fueron parametrizadas en el apartado 3.3 de este capítulo: las tensiones en la superficie del océano  $\{T_{xz}^s, T_{yz}^s\}$ , veremos que son debidas a la acción del viento; y las tensiones en el fondo del mar  $\{T_{xz}^b, T_{yz}^b\}$  son modeladas en función del coeficiente de fricción líquido-sólido y del flujo de masa  $\{M_x, M_y\}$  que circula por encima en la columna de líquido.

Integrando (4.108), teniendo en cuenta (4.109), (4.111) y (4.112), y la metodología de la función de Green, se llega a:

$$\begin{aligned} D = & \frac{T^s}{\rho_o p_1 A_z} \frac{\cosh [p_1 (H + z)]}{\sinh p_1 H} + \\ & - \frac{\cosh p_1 z}{\sinh p_1 H} \left[ \frac{T^b}{\rho_o p_1 A_z} + 2B_1(x, y, -H) \cosh p_1 H \right] + \\ & + B_1(x, y, z) e^{p_1 z} + B_2(x, y, z) e^{-p_1 z} + G_1 \end{aligned} \quad (4.115)$$

donde:

$$B_1(x, y, z) = \frac{1}{2p_1} \int_0^z G_2(x, y, \eta) e^{-p_1 \eta} d\eta \quad (4.116)$$

$$B_2(x, y, z) = -\frac{1}{2p_1} \int_0^z G_2(x, y, \eta) e^{p_1 \eta} d\eta \quad (4.117)$$

$$G_1 = \frac{1}{\rho_o f} i \left( \frac{\partial p_a}{\partial x} + i \frac{\partial p_a}{\partial y} \right) + \frac{g}{f} i \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + i \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \quad (4.118)$$

$$G_2 = \frac{g}{\rho_o A_v} \int_0^z \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} + i \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) d\eta \quad (4.119)$$

Más adelante retomaremos esta solución para terminar de plantear el esquema de corrientes estacionarias tridimensionales que usaremos en esta tesis doctoral. Esto será en el apartado 5 del capítulo 4, donde tras adaptar las soluciones de Jankowski [80] a nuestra malla de cálculo, se planteará un algoritmo de modulación para extender esta información (relativa a los 8 vientos principales con  $U_a = 10\text{m s}^{-1}$ ) a un escenario meteorológico algo más general.

#### 4. ADAPTACIÓN DE LOS MODELOS PREVIOS A NUESTRA MALLA DE CÁLCULO

Se ha hecho un trabajo arduo en la adaptación de los resultados de estos modelos hidrodinámicos previos a nuestra malla de cálculo de resolución horizontal  $20\text{ km} \times 20\text{ km}$ . A modo resumido estos han sido los cálculos y los procesos de adaptación que se han realizado:

- (a) Se han practicado interpolaciones lineales eligiendo muestras representativas de los campos de velocidades horizontales tanto al modelo 3D como al 2D.
- (b) Se ha impuesto la ecuación de continuidad para el cálculo de la corrientes verticales, con algoritmos que empiezan por los nudos de la capa inferior y suben hasta llegar a su nudo homólogo en la capa superficial. Una vez allí se añade el flujo correspondiente horizontal residual que, respetando la conservación de la materia, más se aproxima a los valores de los modelos previos que sirven de fuente.
- (c) Todos estos cálculos se han realizado mediante algoritmos MATLAB. Debido a la dificultad de la batimetría tridimensional, y a la menor resolución de nuestro modelo en relación a los modelos hidrodinámicos de base, esta sistemática de cálculo programado ha tenido que ser completada en su etapa final por pequeños ajustes manuales en puntos de especial dificultad, especialmente del contorno, hasta encajar perfectamente la ecuación de continuidad en el sistema con el máximo respeto a las publicaciones hidrodinámicas fuente de este trabajo.
- (d) Al hacer las interpolaciones sobre las cartas de corrientes originales aparecen en algunos puntos de la frontera velocidades con componente normal. Estas componentes han sido automática anuladas en los cálculos posteriores.

## 5. GENERALIDADES DE LOS DOS MODELOS DE CIRCULACIÓN ADAPTADOS A ESTA TESIS

En esta tesis doctoral vamos a trabajar con la hidrodinámica de dos modelos tridimensionales, a los que llamaremos: modelo HD-3D; modelo HD-C3D.

### 5.1. Modelo HD-3D

Este modelo es la adaptación total a nuestra malla de cálculo del modelo del SMHI [43] descrito anteriormente. Se trata de un modelo de circulación media, basado en los eventos meteorológicos más probable. La labor de adaptación ha sido larga por toda la metodología de interpolación y determinación de corrientes verticales manteniendo la inviolabilidad de la ecuación de continuidad. A partir de ahora nos referiremos a él como: Modelo HD-3D. A continuación se muestran las cartas de corrientes para las seis capas en que se ha dividido el sistema y que han sido fruto de este proceso de adaptación. Serán usadas en nuestro modelo de transporte. El predominio de las corrientes *Ekman* en las capas más superficiales están acompañadas por zonas que abandonan esta tendencia dominante para presentar desviaciones e incluso remolinos locales en determinadas regiones. Algunas zonas que se salen de la norma antes descrita son:

- El noroeste de la isla de Bornholm, el norte de Polonia, puntos de la zona cercana a la isla de Gotland y la entrada al Golfo de Finlandia.
- También, en el norte y sur del Mar de Bothnia: circulación anticiclónica en el sur y ciclónica en el norte. Y en el norte y sur de la Bahía de Bothnia: circulación anticiclónica en el sur y ciclónica en el norte.
- A esto hay que añadir, lógicamente, el alineamiento costero de las corrientes.

Se puede decir que las corrientes geostróficas inducidas por los vientos dominantes del oeste y suroeste hacen que en la circulación media del sistema esté más dominada por el sentido ciclónico que por el anticiclónico. En las capas no superficiales la circulación está dominada por la topografía y la fuerza de Coriolis. Cabe destacar la corriente de retorno hacia el noroeste en las costas de Polonia; y hacia el oeste en Golfo de Finlandia. Son importantes las canalizaciones de corrientes en capas profundas que se producen dos zonas concretas; una en el Báltico Sur y otra en el Mar de Bothnia, y que explican fácilmente analizando el mapa batimétrico de profundidades. La información de estas



corrientes medias anuales en las seis capas del Báltico se ha usado como input en diversas publicaciones del doctorando así como en varias partes de esta tesis doctoral. Por otro lado, las corrientes medias tanto estacionales como anuales que aparecen en el modelo del SMHI [43] y que tienen como input los vientos del año meteorológico que se ha expuesto aquí, serán muy útiles para simular el transporte en condiciones meteorológicas genéricas.

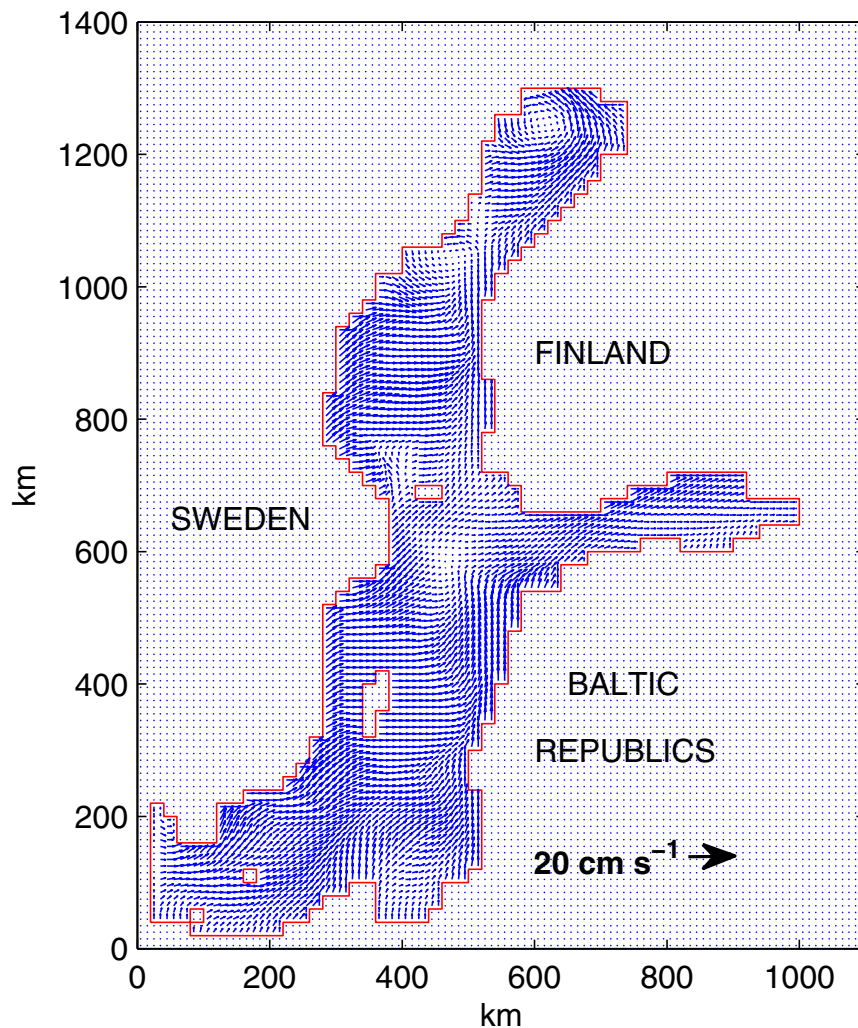


Figura 4.14: Corrientes medias anuales en las profundidades 0–10 m obtenidas por interpolación de las corrientes del SMHI [43].

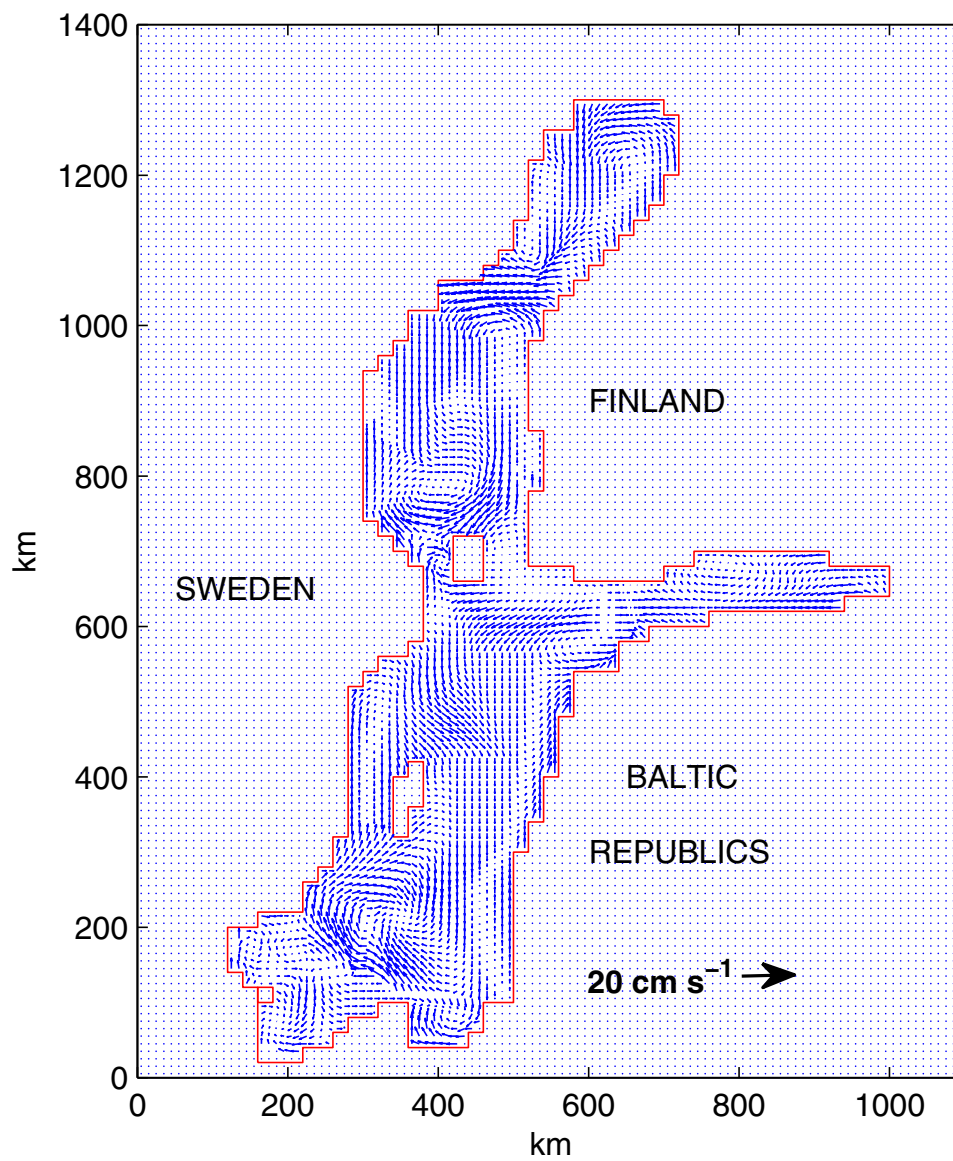


Figura 4.15: Corrientes medias anuales en las profundidades 10–20 m obtenidas por interpolación de las corrientes del SMHI [43].

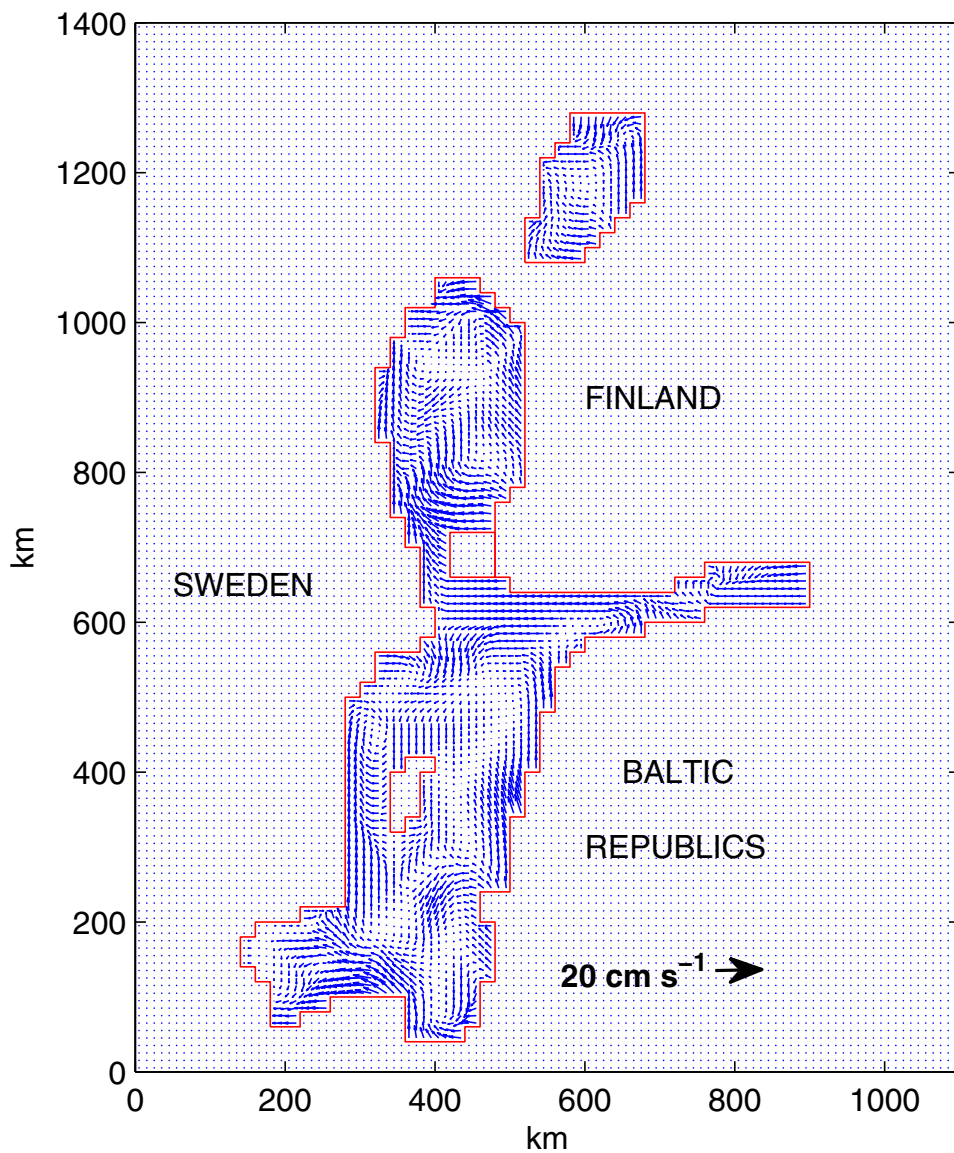


Figura 4.16: Corrientes medias anuales en las profundidades 20–40 m obtenidas por interpolación de las corrientes del SMHI [43].

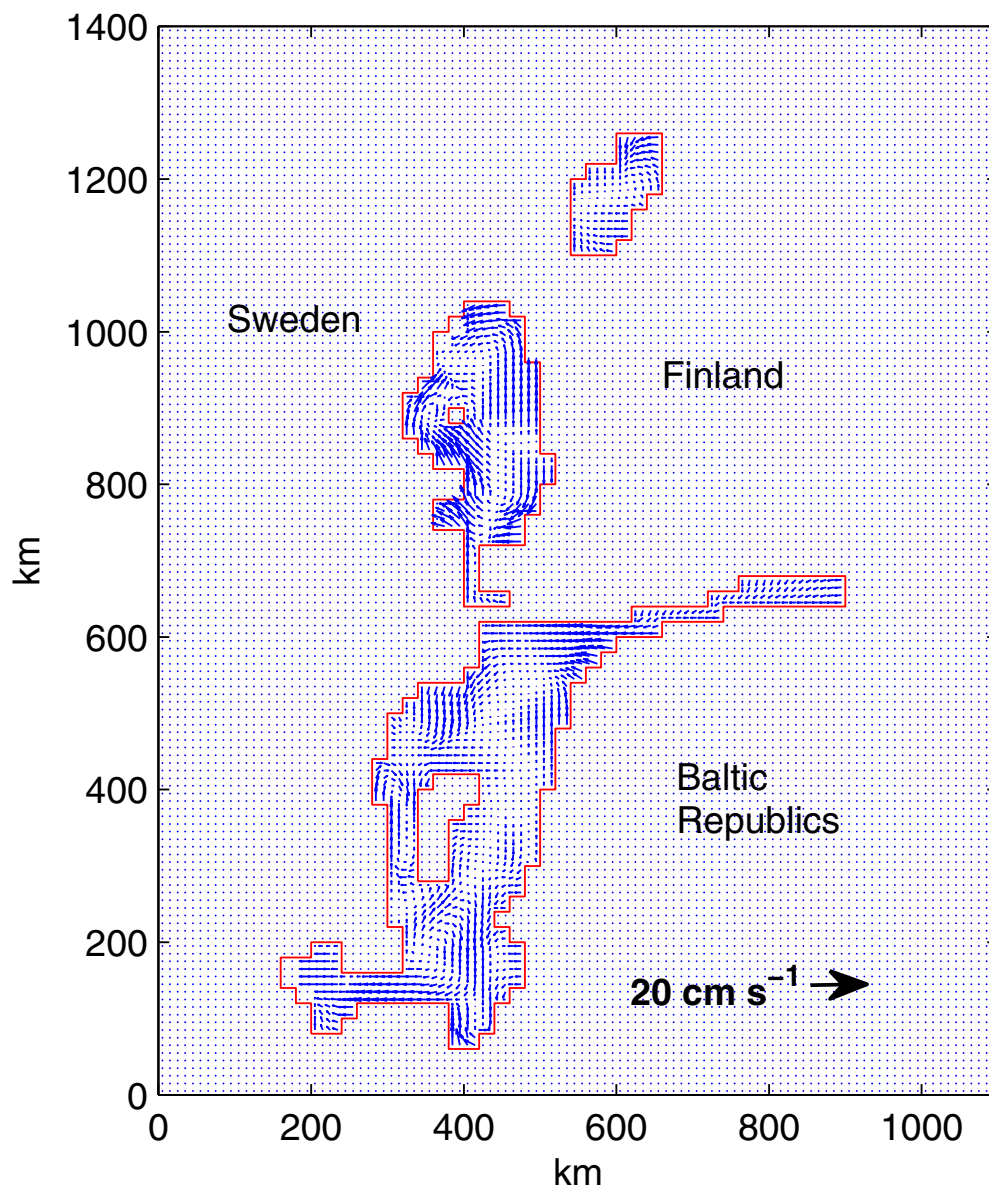


Figura 4.17: Corrientes medias anuales en las profundidades 40–60 m obtenidas por interpolación de las corrientes del SMHI [43].

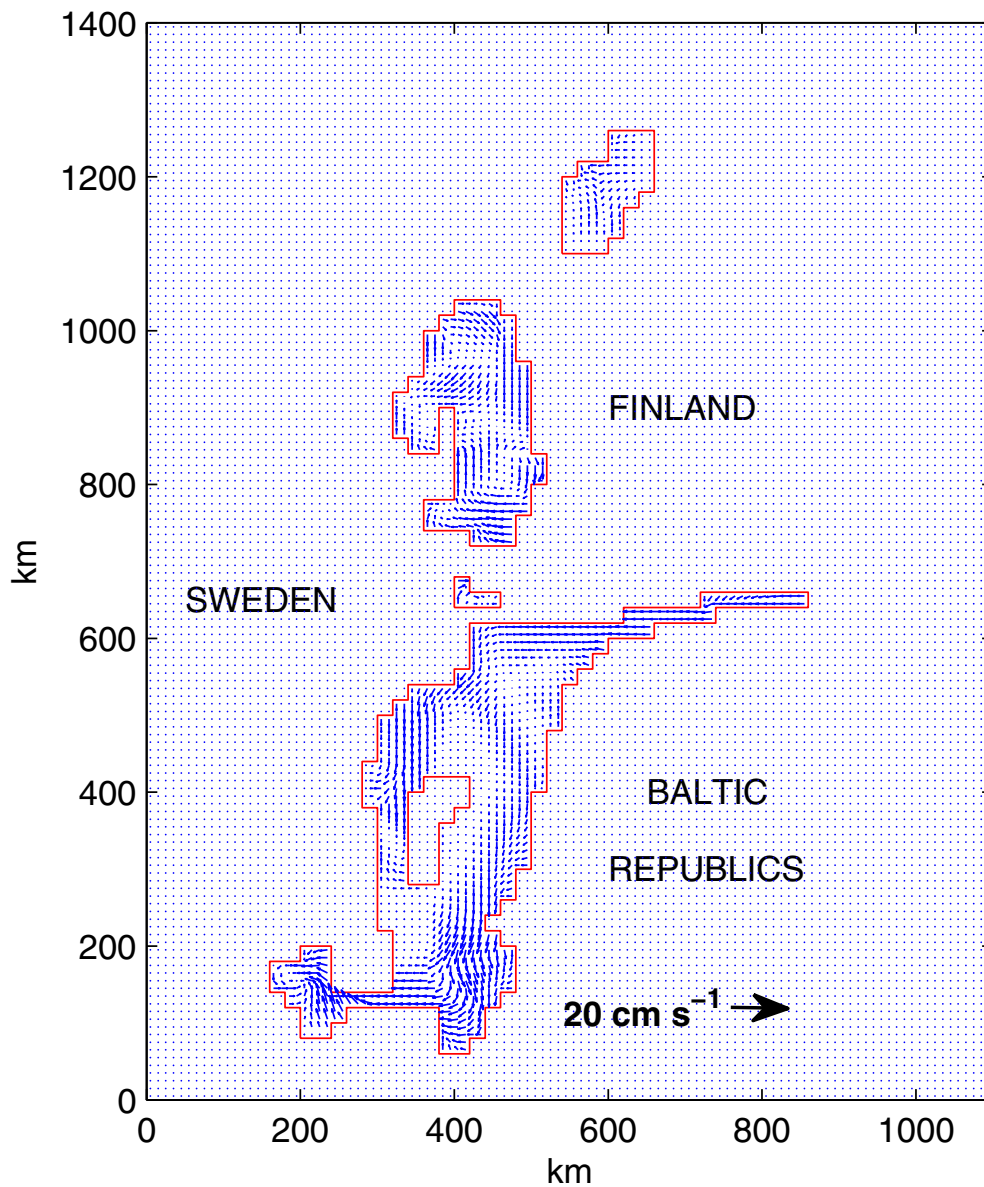


Figura 4.18: Corrientes medias anuales en las profundidades 60 m–bottom obtenidas por interpolación de las corrientes del SMHI[43].

## 5.2. MODELO CUASI-TRIDIMENSIONAL: MODELO HD-C3D

Se trata de la adaptación a nuestra malla de cálculo del modelo del IOPAN [80], con su posterior algoritmo de modulación para unas condiciones más genéricas de viento. La primera fase del modelo es bidimensional, seguida de una segunda fase donde se generaliza la solución de Ekman a una situación más general (4.115), lo que nos permiten obtener las velocidades  $\{U(x, y, z), V(x, y, z)\}$  a lo largo de la columna de líquido. En el trabajo de Jankowski [80] no se han tenido en cuenta los términos asociados a los gradientes horizontales de densidad, por lo que serán nulos los términos

$$G_2 = 0 \quad , \quad B_1 = 0 \quad , \quad B_2 = 0 \quad (4.120)$$

lo que nos lleva a la expresión siguiente para la velocidad estacionaria horizontal

$$D = \frac{T^s}{\rho_o p_1 A_z} \frac{\cosh [p_1 (H + z)]}{\sinh p_1 H} - \frac{T^b}{\rho_o p_1 A_z} \frac{\cosh p_1 z}{\sinh p_1 H} + G_1 \quad (4.121)$$

donde

$$G_1 = \frac{1}{\rho_o f} i \left( \frac{\partial p_a}{\partial x} + i \frac{\partial p_a}{\partial y} \right) + \frac{g}{f} i \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + i \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \quad , \quad p_1^2 = if/A_v \quad , \quad D = U + iV. \quad (4.122)$$

Una vez que tengamos  $U(x, y, z)$  y  $V(x, y, z)$ , la ecuación de continuidad nos permitirá el cálculo de  $W(x, y, z)$  desde la capa de fondo hasta la capa superficial, siguiendo el mismo esquema que en apartado 2.2 de este capítulo. Al no ser estrictamente un modelo tridimensional, como el HD-3D del SMHI, se puede decir que se trata de un modelo cuasi-tridimensional, por ello lo llamaremos a partir de ahora: Modelo HD-C3D. Su naturaleza es similar a otros existentes en la literatura como el HD-Q3D (Goudisou-Koutita, 1986; Tsanis et al., 2007) cuyos perfiles de la velocidad horizontal en la columna de líquido son parabólicos.

Vamos a plantear una extensión del modelo 2D de Jankowski [80] a uno C3D del que saldrán ocho primeras versiones asociadas a los vientos principales {N, NO, O, SO, S, SE, E, NE} tales que  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$ . Las corrientes estacionarias resultantes para las condiciones de viento de Jankowski (1983a) serán notadas con un subíndice 0:

$$U_0(x, y, z) \quad , \quad V_0(x, y, z) \quad , \quad D_0(x, y, z). \quad (4.123)$$

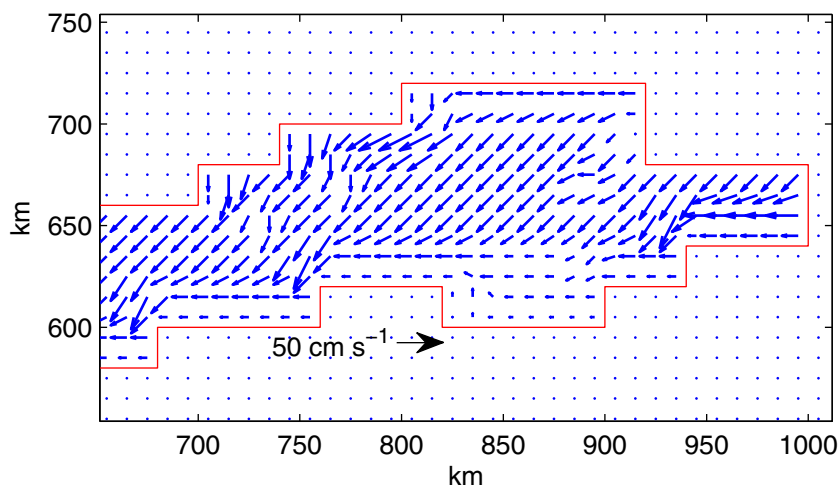


Figura 4.19: Corrientes inducidas por vientos del NE con  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$ , adaptados de la salida del modelo del IOPAN [80] a la capa 1 (0–5 m) de nuestra malla de cálculo.

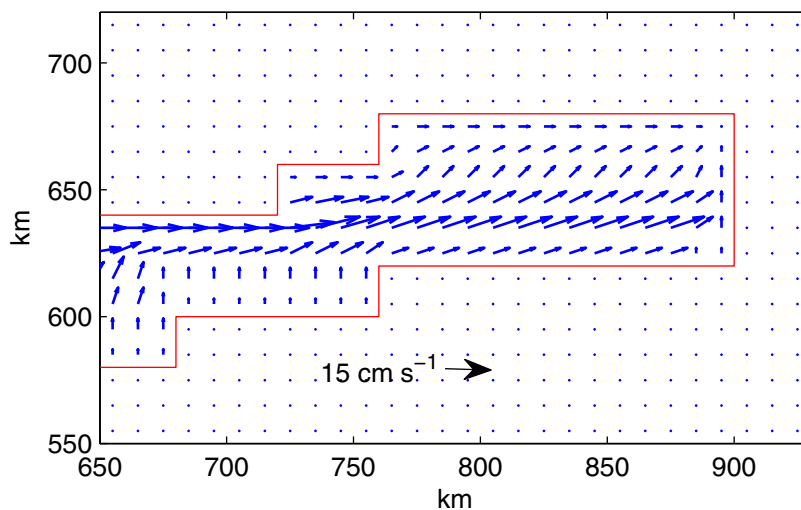


Figura 4.20: Corrientes inducidas por vientos del NE con  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$ , adaptados de la salida del modelo del IOPAN [80] a la capa 4 (20–40 m) de nuestra malla de cálculo.

A modo de ejemplo se muestran un par de cartas de corrientes (figuras 4.19 y 4.20). Son parte del campo de corrientes  $D_0(x, y, z)$  para vientos del NE cuya solución se ha

adaptado a nuestra malla de cálculo de 6 capas, presentándose ahora las corrientes asociadas a las capas 1 (0–5 m) y 4 (20–40 m). Estas soluciones serán parte de la hidrodinámica para una importante simulación del capítulo 7, centrada en la dispersión de una mancha radiactiva en el Golfo de Finlandia, varias semanas después del accidente de Chernobyl.

Hemos apoyado la hidrodinámica de esta tesis doctoral fundamentalmente en dos modelos previos (HD–3D y HD–C3D), que son respectivamente el de corrientes medias anuales [43] y el de ocho vientos [80], y queremos a continuación hacer una pequeña evaluación de la coherencia mutua de sus soluciones. Dada la diferente naturaleza de los resultados numéricos disponibles, el ejercicio de comparación de soluciones de ambos modelos será más cualitativo que cuantitativo:

(a) Fundamentos.

El lector puede consultar los innumerables puntos de coherencia intrínsecos de estos modelos que ya se detallaron en las secciones introductorias (2.1–2.10 y 3.1–3.6) de este capítulo. Como consecuencia de todo ello, los resultados serán compatibles, como se verá a continuación.

(b) Resultados.

Pueden compararse las figuras 4.21 y 4.22 asociadas al modelo de 8 vientos, con las figuras 4.14 y 4.16, respectivamente. Las primeras corresponden a las soluciones del SW tales que  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$ , y las segundas, con las corrientes anuales asociadas al año meteorológico típico cuya variada gama de vientos, con dominio del SW, ya se ha discutido en el apartado 2.10 de este capítulo. Son razonablemente compatibles los perfiles hidrodinámicos de ambos estudios:

- i. Las velocidades en superficie están dominadas en ambos casos por las corrientes de Ekman, del orden un dos por ciento de la velocidad del viento en zonas interiores superficiales, con una adaptación adecuada a las condiciones de frontera.
- ii. La profundidad de inversión de las velocidades (posición en la columna de líquido donde se anula la velocidad horizontal, por debajo de la cual se inician velocidades opuestas a las de superficie), se sitúa típicamente para ambos modelos (3D y C3D) en el entorno de los 20 metros:

$$z_{inv}(3D) \sim z_{inv}(C3D) \sim -20 \text{ m} . \quad (4.124)$$



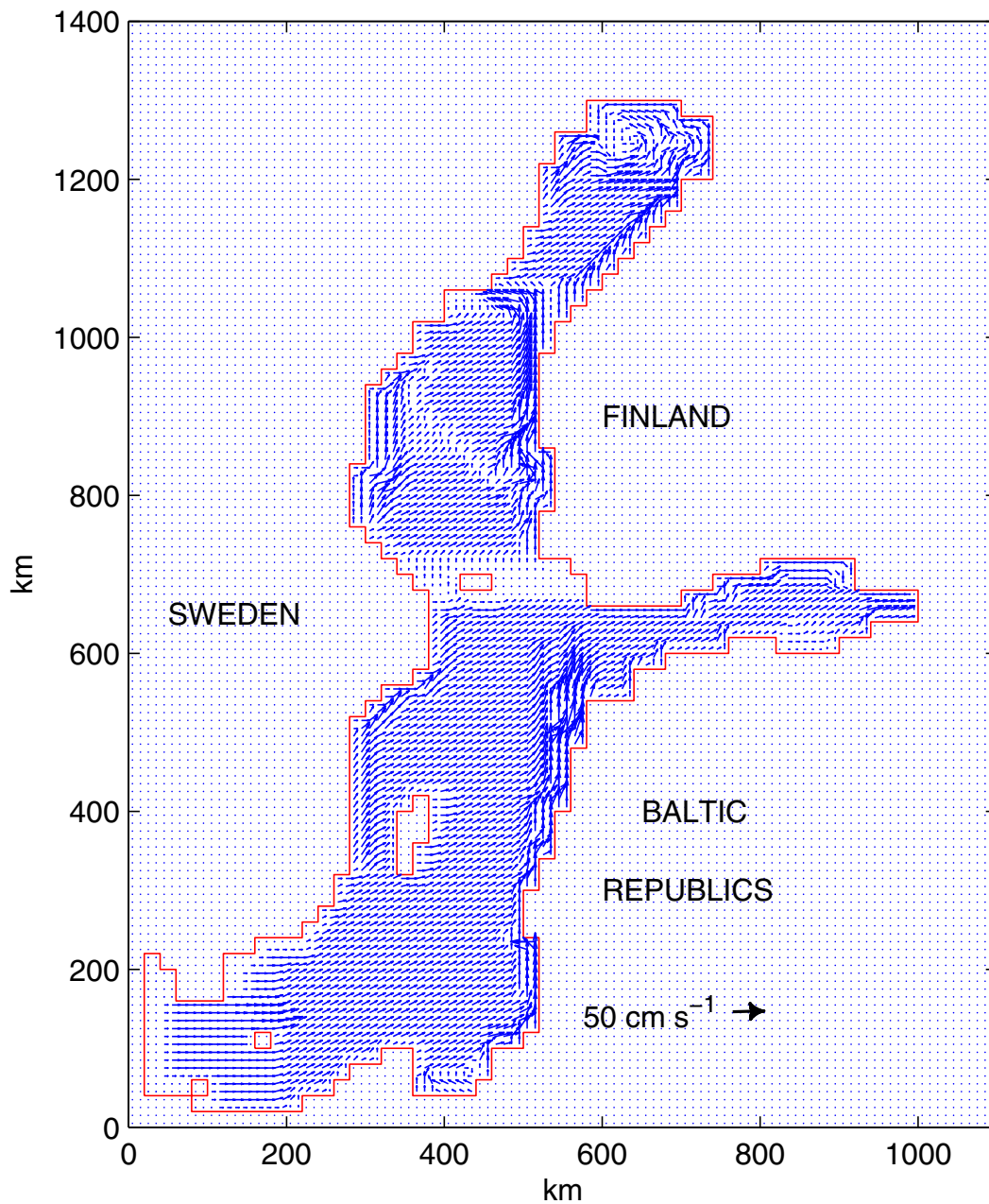


Figura 4.21: Corrientes inducidas por vientos del SW con  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$ , adaptados de la salida del modelo del IOPAN [80] a la capa 1 (0–5 m) de nuestra malla de cálculo.

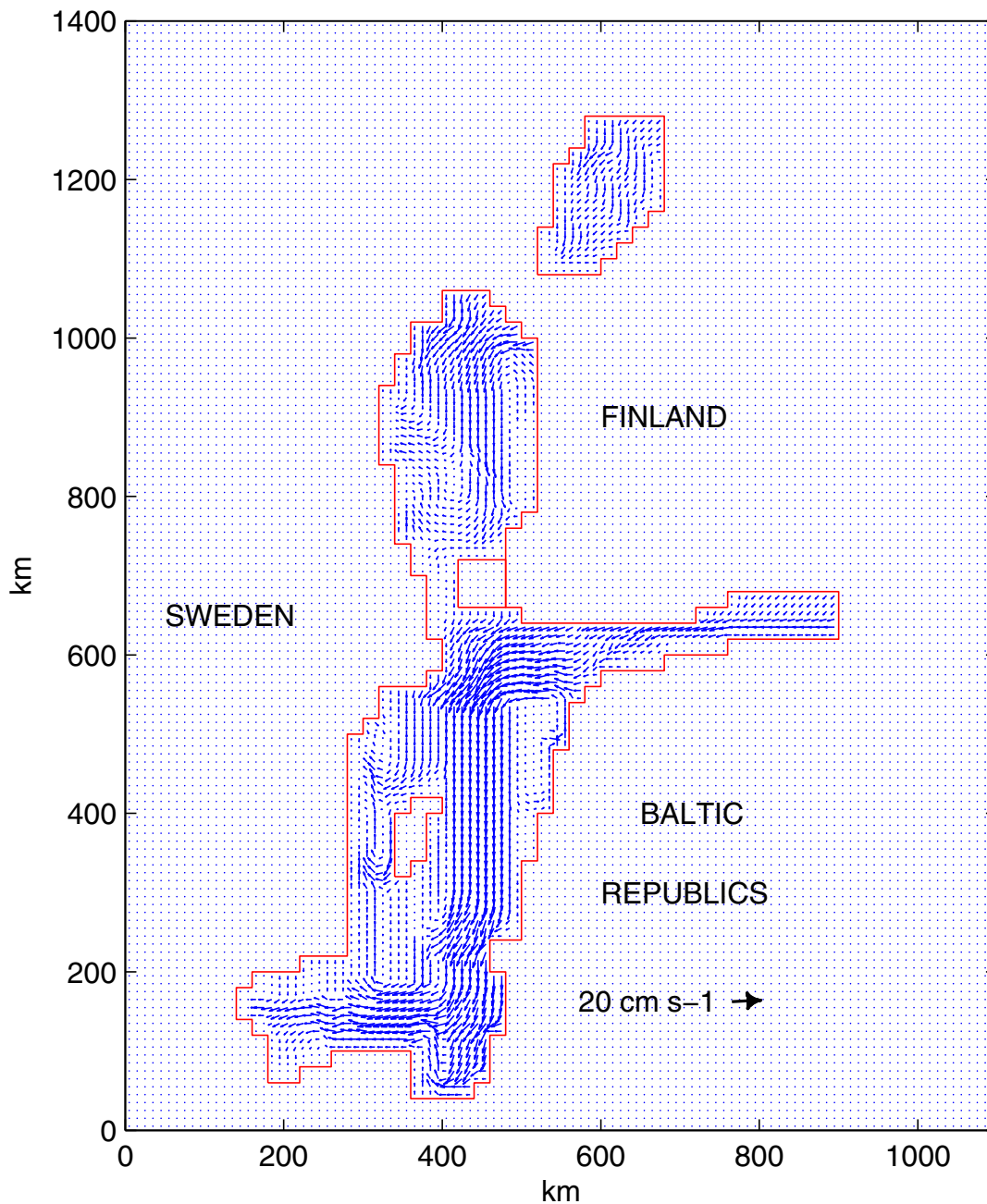


Figura 4.22: Corrientes inducidas por vientos del SW con  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$ , adaptados de la salida del modelo del IOPAN [80] a la capa 4 (20–40 m) de nuestra malla de cálculo.

Recordemos, que en las soluciones de  $U_0(x, y, z)$ ,  $V_0(x, y, z)$  y  $D_0(x, y, z)$  provenientes del modelo del IOPAN [80], no se tienen en cuenta las corrientes por densidad, aproxima-

ción que vamos a procurar matizar y delimitar a continuación.

No son por lo general importantes en este sistema las corrientes asociadas a los gradientes medios horizontales de densidad. Puede comprobarse que si hacemos una estimación en la fórmula de  $G_2$  introduciendo el gradiente horizontal medio de salinidad en el Mar Báltico, que es del orden de

$$|\nabla S| \sim \frac{10 \text{ PSU}}{1000 \text{ km}} \implies |\nabla \rho| \sim \frac{1 \text{ kg m}^{-3}}{100 \text{ km}} \quad (4.125)$$

obtenemos velocidades pequeñas ( $\sim 1 \text{ cm s}^{-1}$ ) tanto comparadas con las velocidades típicas asociadas al viento ( $\sim 10 \text{ cm s}^{-1}$ ) como con las geostroficas, que en las zonas de mayor desarrollo compiten ( $\sim 10 \text{ cm s}^{-1}$ ) con estas últimas. Existen excepciones [81], como la zona suroeste del mar Báltico, donde los gradientes horizontales de salinidad pueden ser importantes en las corrientes de fondo, factor que sí es tenido en cuenta en el modelo de Simons [170] y Funkquist [43], en que se basan las corrientes medias anuales de la otra aproximación hidrodinámica de esta tesis doctoral aplicada al mar Báltico. En otro trabajo de Jankowski [81] –a diferencia del trabajo de los 8 vientos [80] que trabaja con densidad constante– se intenta ver la influencia de las corrientes de densidad en relación con las corrientes Ekman para diferentes velocidades de viento. Algunas conclusiones generales de este trabajo [81], como primera aproximación para las aplicaciones de esta tesis doctoral, son las siguientes:

- (a) Las corrientes Ekman son dominantes en las **capas superficiales** del mar Báltico.
- (b) Respecto a las **capas profundas** (donde en presencia de tensiones insuficientes para la resuspensión de materia en suspensión, transcurren los procesos de acumulación hacia los sedimentos), el mar Báltico profundo, puede ser dividido en dos zonas:
  - i. Zona profunda A: gobernada por corrientes Ekman.  
Báltico Estricto norte, Golfo de Finlandia y Mar de Botnia.
  - ii. Zona profunda B: gobernada por corrientes por salinidad.  
Báltico Estricto centro y sur, y Bahía de Botnia.

El acercamiento de las soluciones de ambos modelos (comparación de figuras 4.14 y 4.16 con 4.21 y 4.22) es aún mayor en las partes del mar Báltico con zonas profundas tipo

A (Báltico Estricto norte, Golfo de Finlandia, Mar de Botnia), donde la influencia de las corrientes por densidad es menor.

Se puede decir que el modelo HD–C3D será una buena alternativa tanto para el modelado del transporte hidrodinámico en las capas superficiales del sistema, como en la zona profunda A. En la zona profunda B puede trabajarse con el modelo HD–3D de corrientes medias anuales del SMHI que tiene en cuenta el transporte por gradientes de densidad.

A continuación plantearemos una modulación del modelo para vientos con velocidades distintas a  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$  en las ocho direcciones principales de la rosa de los vientos.

### 5.2.1. Algoritmo de modulación según la velocidad del viento

Vamos a descomponer la expresión de  $D$  (4.121) en diferentes términos. Los dos primeros son los correspondientes a la capa Ekman superficial y de fondo respectivamente:

$$D_{E,s} \equiv \frac{T^s}{\rho_o p_1 A_z} \frac{\cosh [p_1 (H + z)]}{\sinh p_1 H} \equiv \frac{T^s}{\rho_o p_1 A_z} f_s(z) \quad (4.126)$$

$$D_{E,b} \equiv -\frac{T^b}{\rho_o p_1 A_z} \frac{\cosh p_1 z}{\sinh p_1 H} \equiv -\frac{T^b}{\rho_o p_1 A_z} f_b(z) \quad (4.127)$$

donde se han definido los términos  $f_s(z)$  y  $f_b(z)$  que dependen de la profundidad. Integrando en la columna de líquido se obtienen los valores medios siguientes:

$$\overline{f_s(z)} = \frac{1}{p_1 H} = \overline{f_b(z)}. \quad (4.128)$$

Si definimos la longitud  $d_E \equiv 1/|p_1|$  se comprueba que  $d_E$  es la zona de influencia del viento en las capas de Ekman, pudiendo ser usada para caracterizar sus espesores de influencia. Tras hacer unas estimaciones, mediante el modelo de  $A_v$  propuesto en (4.82), introduciendo diferentes valores típicos de profundidad y velocidad de viento, se obtiene que en la mayoría de los casos, el valor de  $d_E$  está en rango 10 – 20 metros.

Los términos restantes, que dependen de la presión, están asociados respectivamente a la presión atmosférica y a la función profundidad, siendo notadas las velocidades con subíndices alusivos al origen atmosférico y geostrófico:

$$D_{atm} = \frac{1}{\rho_o f} i \left( \frac{\partial p_a}{\partial x} + i \frac{\partial p_a}{\partial y} \right) \quad (4.129)$$

$$D_{geo} = \frac{g}{f} i \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + i \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) . \quad (4.130)$$

Para el algoritmo de modulación nos interesa hacer un breve análisis de la dependencia de algunas velocidades parciales estacionarias con la velocidad del viento  $U_a$ .

Si trabajamos con el valor medio de  $C_D$

$$T^s \propto U_a^2 \quad (4.131)$$

Según la teoría de Fenselbaum, expresada en modelos de la literatura [155, 80], y según las condiciones,  $A_z$  puede ser modelada proporcionalmente tanto a  $U_a$ , como a su cuadrado  $U_a^2$

$$A_z \propto U_a \quad , \quad \text{o bien} \quad , \quad A_z \propto U_a^2 \quad (4.132)$$

en función de ciertas condiciones de la profundidad y velocidad de viento, estando ambas aproximaciones ligadas respectivamente a zonas de poca o mucha profundidad. En esta discusión trabajaremos con la expresión

$$A_z \propto U_a^\alpha \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq 2 \quad (4.133)$$

Por definición se cumple que

$$p_1 \propto A_z^{-1/2} \propto U_a^{-\alpha/2} \quad (4.134)$$

Si tomamos valor medio en  $D_{E,s}$  y evaluamos su dependencia respecto del viento llegamos a

$$\overline{D_{E,s}} = \frac{T^s}{\rho_o p_1 A_z} \frac{1}{p_1 H} \propto \frac{T^s}{p_1^2 A_z} \propto T^s \propto U_a^2 \quad (4.135)$$

Evaluando la velocidad de Ekman en la superficie ( $z=0$ )

$$D_{E,s}(0) \propto T^s A_z^{-\alpha/2} \propto U_a^{2-\alpha/2} \quad (4.136)$$

La relación entre la velocidad del viento y el gradiente de presión atmosférica puede ser modelado [45] así

$$U_a = C_r B_T \nabla_n p_a \quad (4.137)$$

donde  $C_r$  es un factor de reducción que tiene en cuenta el debilitamiento del viento por fricción sobre la superficie del mar y  $B_T$  un coeficiente de estratificación para la interfase mar-atmósfera. Unos valores de trabajo, según [45], son  $C_r = 0.7$  y  $B_T = 4.7$ , donde el valor del gradiente vendrá dado en las unidades Pa/km. Por tanto

$$\nabla_x p_a \propto U_a^1 \quad , \quad \nabla_y p_a \propto U_a^1 \quad (4.138)$$

lo que nos lleva a suponer que

$$D_{geo} \propto \nabla_n p_a \propto U_a^1 \quad (4.139)$$

Hagamos ahora la discusión sobre  $D_{E,b}$  y  $D_{geo}$ . De manera análoga a la estimación de  $\overline{D_{E,s}}$  se llega a

$$\overline{D_{E,b}} \propto T^b \propto \overline{M}^2 \quad (4.140)$$

La velocidad geostrófica no es fácilmente modelable en función de la velocidad del viento. Perriáñez [147] estimó una relación límite ideal bajo condiciones de poca influencia de la tensión de fondo –situación típica en zonas relativamente profundas– que es la que sigue

$$D_{geo} \propto U_a^2 \quad (4.141)$$

siendo por tanto razonable trabajar con la relación

$$D_{geo} \propto U_a^\beta \quad , \quad 1 \leq \beta \leq 2 \quad (4.142)$$

Teniendo en cuenta toda esta discusión vamos a trabajar con una relación global para la velocidad total que será

$$D \propto U_a^\gamma \quad , \quad 1 \leq \gamma \leq 2. \quad (4.143)$$

Así, una primera aproximación para un algoritmo global de modulación sería el siguiente

$$D(x, y, z) = D_0(x, y, z) \left( \frac{U_a}{10} \right)^\gamma \quad , \quad 1 \leq \gamma \leq 2. \quad (4.144)$$

Para la simulaciones, elegiremos para este parámetro, un valor de trabajo intermedio, que por defecto será  $\gamma = 3/2$ .

Respecto a la modulación de la tensión de fondo  $T^b$ , llamaremos  $T_0^b$  a la tensión producida por cada uno de los 8 vientos del modelo de referencia [80]. Si suponemos que dada una columna de líquido situada en el punto  $P(x, y)$  se produce una proporcionalidad entre  $T^s(P, U_A)$  y  $T^b(P, U_A)$

$$T^b(P, U_A) \propto T^s(P, U_A) \propto U_a^2 \quad (4.145)$$

se deduce que

$$T^b(x, y) = T_0^b(x, y) \left( \frac{U_a}{10} \right)^2 \quad (4.146)$$

si bien dejaremos una propuesta más abierta

$$T^b(x, y) = T_0^b(x, y) \left( \frac{U_a}{10} \right)^{\lambda_T} \quad , \quad 1 \leq \lambda_T \leq 2. \quad (4.147)$$

aunque trabajemos con  $\lambda_T = 2$  como valor por defecto.

Este algoritmo de modulación es ampliable a otro más detallado que consiste en establecer estas relaciones en función de la profundidad: sería un algoritmo de modulación diferencial que se completaría finalmente con el cálculo de las corrientes verticales a partir de la ecuación de continuidad empezando por la capa inferior y siguiendo hasta acabar en capa superficial.

Lógicamente, todos los parámetros que aparecen en el modelo, podrán hacerse variar para ver la sensibilidad del modelo a los mismos, y buscar también el mejor de los acuerdos entre los resultados del modelo y la experiencia.

### 5.2.2. Correcciones por el efecto atenuante de la picnoclina

La energía que absorbe el océano por su contacto con la atmósfera encuentra cierta barrera en la picnoclina permanente de cara a transmitirse [127, 86] a las capas más profundas. Esta es una limitación del modelo del IOPAN [80], y por tanto del HD-C3D, para la solución que ofrece en las capas profundas bajo la picnoclina permanente del mar Báltico. Este efecto atenuante, llevado al extremo, invalidaría la solución en la parte más profunda de estas columnas de líquido. Podemos plantearnos dos correcciones a este problema. Una sería trabajar con un coeficiente de atenuación a las corrientes de Ekman bentónicas (de fondo). Hay autores que exponen que estas últimas pueden despreciarse [147] si la picnoclina permanente es suficientemente marcada, por lo que una segunda opción, para estas capas profundas bajo picnoclina muy desarrollada, podría ser, no trabajar con las corrientes Ekman de fondo, sino con la solución de circulación media se propone el SMHI [43] para capas profundas, que tiene en cuenta el factor de la estratificación vertical. La obtención de las corrientes verticales se haría al final, en base a la ecuación de continuidad.

La limitación del modelo del IOPAN [80] sobre las aguas que están bajo una picnoclina permanente afecta también al valor que este modelo ofrece sobre las tensiones de fondo bajo las columnas de líquido afectadas. Esto afectaría teóricamente a los valores de la tensión de fondo para nuestro modelo de transporte de materia en suspensión del capítulo 8, que se nutren de la modulación del modelo del IOPAN para obtener  $T^b$ , pero no tendrá consecuencias prácticas, ya que los fenómenos altamente dependientes de  $T^b$ , como son los episodios de resuspensión, son de carácter despreciable [86] bajo la capa picnoclina. Dicho de otro modo, sí trabajaremos con el valor que el modelo ofrecerá para  $T^b$  en la base de capa Ekman bentónica asociada a columnas de líquido que no atraviesen una capa picnoclina permanente, aquellas en las que precisamente sí se dan los fenómenos de resuspensión, importantes para dinámica de la materia en suspensión así como para el transporte de radionúclidos no conservativos.



# Capítulo 5

## La Difusión en el Mar Báltico y su Modelización

### 1. LA ENERGÍA DE LAS CORRIENTES EN EL MAR BÁLTICO

#### 1.1. Introducción

Ya se vio en el capítulo 3 que las diferentes formas de modelar un fluido oceánico dependen doblemente de la escala del problema que estemos estudiando y de la resolución espacial y temporal de nuestro modelo numérico. Remolinos de diferentes escalas se superponen en el espacio y el tiempo contribuyendo a la dispersión de las sustancias que forman parte del fluido. El filtrado matemático ayuda a separar y estudiar los distintos tipos de oscilaciones que entran en juego en el problema de la difusión, por lo aquí seguiremos un esquema que empezará con la difusión a menor escala para ir posteriormente estudiando las escalas mayores. Nuestro modelo de dispersión trabajará con una circulación media mensual o anual, cuya difusión dominante es la de mesoescala. Aún así, interesa ver también aquí otras fuentes de difusión de escala menor, como la diaria, aunque sus coeficientes de intercambio estén implícitamente incluidos en la difusión de escala mayor, ya que así entenderemos mejor el problema que nos ocupa y puede sernos de utilidad en futuros modelos de una resolución mayor.

Para poder desarrollar esta parte del trabajo, contribuirá positivamente el análisis de los espectros de corrientes y la distribución de energía en función de los diferentes fenómenos físicos que entran en juego en las distintas escalas espaciales y temporales.

## 1.2. El Espectro de Energía de las corrientes

El espectro de la energía cinética de las corrientes en un punto del sistema ofrece las bases para establecer el filtro más adecuado. Concretamente, es frecuente usar el *mínimo relativo* de la función como punto representativo de la transición entre la energía a mayor escala de las corrientes y la energía a escala menor asociada a las fluctuaciones más pequeñas, como las inerciales.

Dentro de las oscilaciones menores en energía se encuentran las *mareas* y las ondas *seiche*. Las fluctuaciones asociadas a las mareas están en una escala inferior a las inerciales y su energía es prácticamente despreciable en sistemas como los que vamos a estudiar en este trabajo. Distinto tratamiento tienen estos movimientos en sistemas cercanos y muy abiertos al océano como los del Mar del Norte.

Diferentes espectros de energía se han estudiado [127, 49, 82] en relación al Mar Báltico. A modo ilustrativo, se mostrarán en este capítulo unas curvas de energía y velocidad [127] que han sido realizadas por el SMHI en una de sus boyas situada en el punto (58.92° N, 19.15° E), a 4 metros de profundidad, en la zona Báltico Estricto norte, durante diferentes épocas de los años 2002 y 2003, y se compararán, para tener una mayor perspectiva, con datos estadísticos de otro trabajo del SMHI que contiene unas cincuenta series de medidas [49] a diferentes profundidades en tres zonas distintas del Báltico (Báltico Estricto sur, Báltico Estricto centro y Mar de Botnia).

Este espectro se ha obtenido [127] mediante transformada de Fourier de la función de experimental de corrientes  $v(t)$ .

Sea  $v(t)$  la velocidad horizontal total en el instante  $t$ , y  $\varepsilon(t)$  la energía cinética por unidad de masa:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2}v^2(t) , \quad (5.1)$$

la densidad de energía cinética por unidad de frecuencia  $\varepsilon(\omega)$  se define como el módulo de la transformada de Fourier de  $\varepsilon(t)$ ,

$$\varepsilon(\omega) \equiv | \mathcal{F}(\varepsilon(t)) | = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t) e^{-i\omega t} dt \right| . \quad (5.2)$$

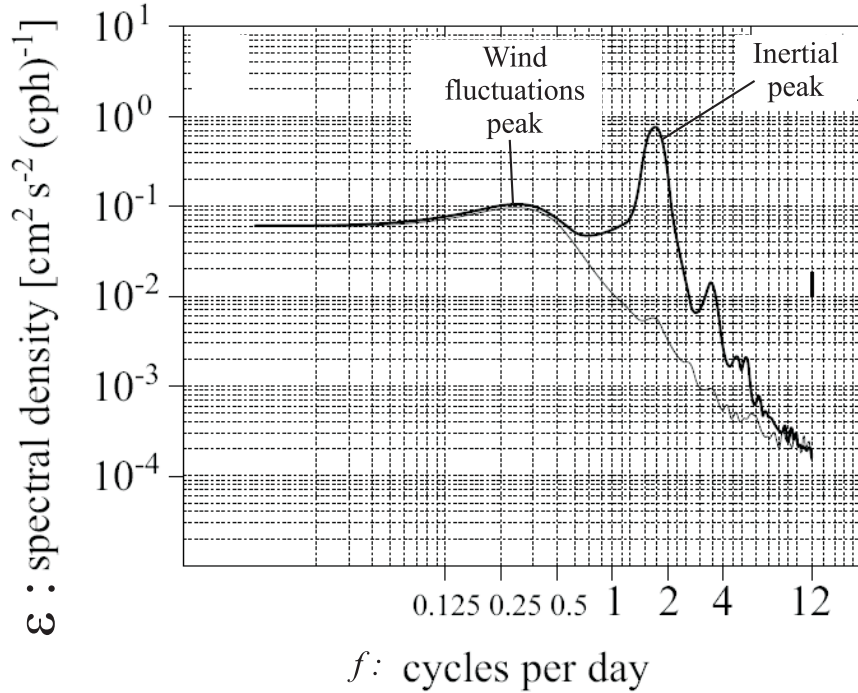


Figura 5.1: Densidad espectral de energía [127] del SMHI, con pico intenso de oscilaciones inerciales, medido durante el verano de 2003.

Algunas características fundamentales de estos espectros son:

- Un pico dominante en la frecuencia cercana a  $f \cong 1.7 \text{ day}^{-1}$ , es decir un periodo  $T \cong 14 \text{ h}$ , correspondiente a las oscilaciones inerciales consecuencia de fuerza de Coriolis debida a la rotación de la tierra. La línea delgada se debe al desdoblamiento de las medidas según el sentido de rotación de los torbellinos en ciclónicos y anticiclónicos.

Recordemos que:

$$T_{ine} = \frac{T_{sid}}{2} \text{sen } \varphi, \quad \text{donde } \varphi \text{ es la latitud, y } T_{sid} = 86164 \text{ s},$$

y sin más que sustituir valores próximos a  $\varphi = 60^\circ$ , se obtiene para las oscilaciones inerciales,  $T_{ine} \cong 14 \text{ h}$ .

- Un mínimo en la zona  $T \in [20, 40] \text{ h}$ . Se trata del mínimo de separación entre las oscilaciones de mesoescala y las inerciales.
- Un máximo relativo alrededor de un pico ancho en la frecuencia

$$f_{max} \approx \frac{1}{3} \text{ day}^{-1}, \tag{5.3}$$

con una zona central que abarca el intervalo de frecuencias

$$f \in \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right] \text{ day}^{-1}. \quad (5.4)$$

Por lo que pasando a periodos tenemos:

$$T_{max} \sim 3 - 4 \text{ days}; \quad \text{con un intervalo dominante en: } T \in [2, 5] \text{ days}. \quad (5.5)$$

Ha de notarse que estos son los intervalos de tiempos típicos que tienen asociados los pasajes meteorológicos, fundamentalmente borrascas y anticiclones, que marcan los regímenes de los vientos causantes de estas corrientes y de sus variaciones. La forma del pico de energía con el máximo en el intervalo 3–4 días nos va a resultar útil a la hora de modelar el tiempo de permanencia de las direcciones en la generación numérica de los vientos, asignando pesos de probabilidad compatibles con dicha curva. Por tanto, la función de probabilidad  $p_W(T)$  deberá tener una forma coherente con la función  $\varepsilon(T)$ : creciente en el intervalo 1–3 (días), aproximadamente constante en la franja 3–4 días, y decreciente en el tramo 4–6 días. El peso del resto de otros periodos podría despreciarse.

Unas dimensiones típicas para las celdas de nuestro modelo son  $\{h_x = h_y = 20 \text{ km}\}$  y tamaño típico de un remolino inercial es  $L_i \sim 5 \text{ km}$ . De este modo queda el movimiento inercial limitado al interior de la celda o conectando celdas vecinas, coherente con la descripción del fenómeno difusivo, típica de las discretizaciones de sistemas continuos en métodos numéricos como el Método de Diferencias Finitas.

## 2. DIFUSIÓN DIARIA: FACTORES INFLUYENTES, DATOS EXPERIMENTALES Y ESTIMACIONES

### 2.1. Estimación de los coeficientes $K_h^{dia}$ a partir de medidas experimentales

Veremos a continuación como puede hacerse una estimación del coeficiente de difusión horaria  $K_h^{dia}$  que tiene en cuenta los factores difusivos que intervienen en una ventana temporal de un día. Estos cálculos van a ponernos en contacto con una técnica clásica [182] para la estimación de los coeficientes efectivos de difusión que desarrolló G.I. Taylor (Londres, 1886–Cambridge, 1975) aplicando su amplio conocimiento sobre la turbulencia fluidomecánica al campo de la oceanografía y la meteorología. Esta técnica será aplicada en esta tesis con frecuencia para estimar la difusión asociada a distintos fenómenos.

Podemos trabajar con la velocidad descompuesta:

$$\vec{v} = \vec{v}_m + \vec{v}' \quad (5.6)$$

siendo  $\vec{v}_m$  el valor de la velocidad en el flujo diario, que se calcula filtrando las oscilaciones inferiores a un día, y  $\vec{v}'$  la parte restante.

En el trabajo publicado por el Instituto Meteorológico y Oceanográfico de Suecia [49] se han determinado experimentalmente los coeficientes de horizontales de difusión  $K_x$  y  $K_y$ . Las medidas se han llevado a cabo en una serie de estaciones situadas en el Mar Báltico a partir de las fluctuaciones respecto de las velocidades medias diarias.

Centrándonos en el cálculo de  $K_x$ , basado en trabajo clásico de G.I. Taylor [182]:

$$K_x = \overline{v_x'^2} T_x, \quad (5.7)$$

donde  $\overline{v_x'^2}$  es la desviación cuadrática media, y  $T_x$  es la escala de tiempo asociada a la fluctuación:

$$T_x = \int_0^{t_0} R_x(\tau) d\tau, \quad (5.8)$$

y  $R_x(\tau)$  es la autocorrelación asociada a la fluctuación  $v_x'(t)$ , dependiente de  $t_0$  que es el tiempo para el primer cero del correlograma  $R_x(\tau)$ . Recordemos su definición:

$$R_x(\tau) = \frac{\int_0^{T-\tau} v_x'(t)v_x'(t+\tau)dt}{\left[ \int_0^{T-\tau} v_x'^2(t)dt \int_0^{T-\tau} v_x'^2(t+\tau)dt \right]^{1/2}}, \quad (5.9)$$

siendo  $T$  el tiempo total del registro de medidas.

• **Escala de tiempo de Taylor para una oscilación armónica**

Dada una oscilación armónica en la velocidad,  $v_x'(t) = v_0 \sin \frac{2\pi}{T}t$ , calcularemos a continuación que la escala de tiempo de Taylor,  $T_x$ , es aproximadamente igual a la sexta parte de su periodo  $T$

$$T_x \simeq T/6 \quad : \quad T_{Taylor} \simeq T_{fis}/6, \quad (5.10)$$

propiedad que nos resultará muy útil para hacer estimaciones en otras partes de este trabajo así como para hacer interpretaciones en otros trabajos de la literatura que utilicen esta herramienta; la escala de tiempo de Taylor es del orden de la sexta parte del tiempo característico asociado al ciclo del fenómeno físico que hay detrás.

- Cálculo de  $\overline{v_x'^2}$ .

Tenemos  $v_x'(t) = v_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}t$ ; haciendo un cambio de variable:

$$\frac{2\pi}{T}t = x \quad \frac{v_x'}{v_0} = z = z(x) = \operatorname{sen}(x) \quad \frac{2\pi}{T}\tau = y \quad (5.11)$$

Integrando:

$$\overline{v_x'^2} = \frac{1}{T} \int_0^T v_x'(t)^2 dt = \frac{v_0^2 T / 2\pi}{T} \underbrace{\int_0^{2\pi} z^2(x) dx}_{=\pi} = \frac{1}{2} v_0^2 \quad (5.12)$$

- Cálculo de  $R_x$ .

Tras el cambio de variable:

$$R_x(y) = \frac{\int_0^{2\pi-y} z(x)z(x+y)dx}{\left[ \int_0^{2\pi-y} z^2(x)dx \int_0^{2\pi-y} z^2(x+y)dx \right]^{1/2}}, \text{ con } z(x) = \operatorname{sen}(x) \quad (5.13)$$

$$R_x(y) = \frac{\int_0^{2\pi-y} \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(x+y)dx}{\left[ \int_0^{2\pi-y} \operatorname{sen}^2(x)dx \int_0^{2\pi-y} \operatorname{sen}^2(x+y)dx \right]^{1/2}} \quad (5.14)$$

$$R_x(y) = \frac{(\operatorname{sen} y + 2\pi \cos y - y \cos y) / 2}{(4\pi - 2y + \operatorname{sen} y) / 4} \quad (5.15)$$

- Cálculo de  $T_x$ .

$$T_x = \int_0^{t_0} R_x(\tau) d\tau = \int_0^{y_0} R_x(y) \frac{T}{2\pi} dy = \frac{T}{2\pi} \underbrace{\int_0^{y_0} R_x(y) dy}_{\equiv \varphi_x} \quad (5.16)$$

El término de la izquierda se corresponde con la fase asociada a la fluctuación que notaremos por  $\varphi_x$ . Vamos a obtener  $y_0$ , que es el primer cero del autocorrelograma  $R_x(y)$  asociado a la función sinusoidal:

Haciendo los cálculos:

$$R_x(y_0) = 0 \implies y_0 = 1.795 \tag{5.17}$$

E integrando numéricamente se obtiene la fase asociada a la fluctuación:

$$\varphi_x = \int_0^{y_0} R_x(y) dy = 1.1597 . \tag{5.18}$$

$$\varphi_{sin} = 1.1597 \text{ rd} \approx \frac{\pi}{3} \text{ rd} = 60^\circ . \tag{5.19}$$

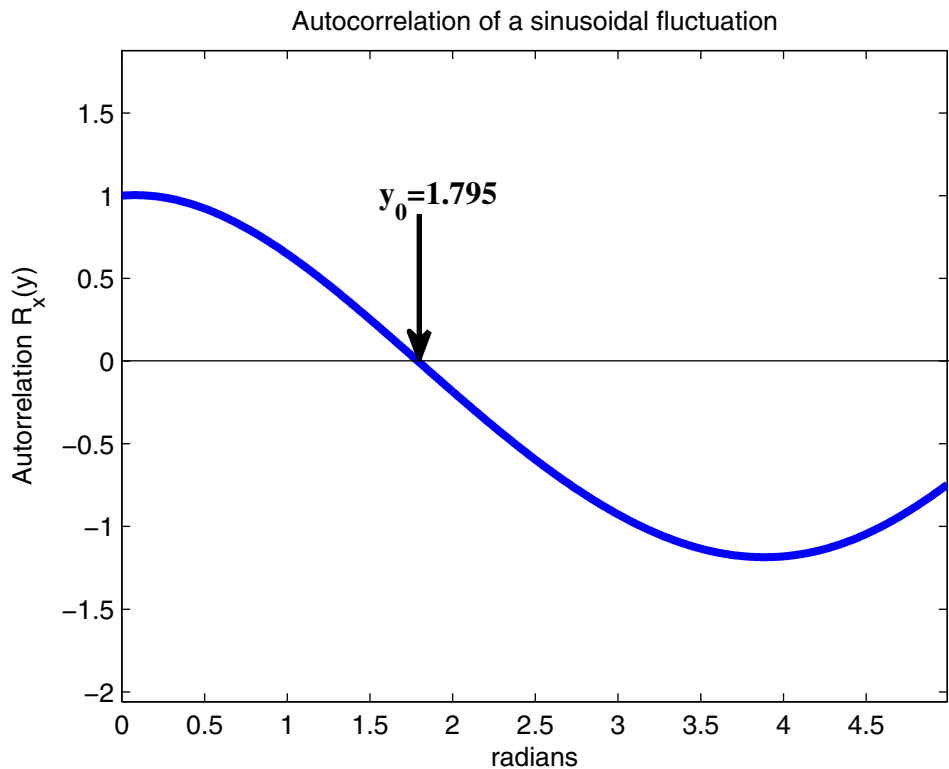


Figura 5.2: Autocorrelación de la desviación armónica de la velocidad respecto a su promedio.

En algunos cálculos estimativos que efectuaremos en otras partes de este trabajo, tomaremos un valor aproximado, redondeado y fácil de recordar para la fase asociada a una fluctuación sinusoidal:

Y sustituyendo finalmente en  $T_x$ :

$$T_x = \frac{T}{2\pi} \varphi_x \approx \frac{T}{2\pi} \frac{\pi}{3} = \frac{T}{6} \implies T_x \approx \frac{T}{6}. \quad (5.20)$$

A partir de los espectros se calculan  $\{\overline{v_x'^2}, T_x\}$ , de donde salen fácilmente los coeficientes de difusión  $K_x$ .

Los valores obtenidos para  $T_x$  son bastantes uniformes en todas las medidas y son muy próximos a 2 h, lo que representa aproximadamente la sexta parte del tiempo asociado al ciclo del fenómeno físico -oscilaciones inerciales de Coriolis- responsable de los mismos

$$T_x \sim 1.8 - 2.2 \text{ h} \sim \frac{1}{6} T_{ine} \quad , \quad T_{ine} \simeq 14 \text{ h}. \quad (5.21)$$

Idéntico proceso se sigue para el cálculo de  $K_y$ , que resulta ser en muchos casos bastante similar al resultado de  $K_x$ ,

$$K_y = \overline{v_y'^2} T_y \approx K_x. \quad (5.22)$$

Como resumen de los resultados para el coeficiente de difusión horizontal en diferentes puntos del sistema situados a distintas profundidades, podemos mostrar la tabla 5.1 basada en datos del SMHI [49] para  $K_h(\text{m}^2\text{s}^{-1}) \equiv K_x \approx K_y$  calculados aplicando la metodología anterior a espectros de velocidades en estaciones de medida repartidas por el Mar Báltico durante los meses de abril y mayo.

Al coeficiente  $K_h^{dia}$  obtenido por este método ya detallado lo denominaremos aquí coeficiente de difusión horizontal diario. No será el único que manejemos en esta tesis doctoral, ya que si practicamos una ventana que promedie en un intervalo de un mes podremos hablar de un coeficiente de difusión horizontal mensual. En general, por tanto, el coeficiente de difusión va a depender fuertemente del tamaño de la ventana temporal que aplique nuestro filtro.



TABLA 5.1: Valores medios del coeficiente de difusión horizontal diario en el Mar Báltico

$depth(m)$	$K_h^{dia} (m^2s^{-1})$ medio	Rango de $K_h^{dia} (m^2s^{-1})$
0–10	30	10–50
10–20	15	5–30
20–40	7	3–11
40–60	9	5–13
60–70	5	3–7
70–bottom	3	2–4

Cabe destacar en la tabla anterior la disminución de  $K_h$  con la profundidad y la gama relativamente amplia de valores de  $K_h$  para una misma profundidad. Recordemos que la columna vertical puede dividirse básicamente en tres zonas:

- (a) La capa superficial o capa de mezcla.

En ella se produce el intercambio de energía y materia entre el océano y la atmósfera. Es la capa más activa desde un punto de vista energético, lo que la lleva a un estado de mezcla prácticamente permanente.

- (b) La pycnoclina o capa intermedia.

Aquí se produce un cambio grande en la densidad del fluido, debido a un gradiente vertical de temperatura, de salinidad o a la suma de ambos.

- (c) La capa profunda.

Abarca desde el final de la pycnoclina hasta en fondo oceánico. Recibe sólo una pequeña parte de la energía que llega por la interacción océano-atmósfera. La parte inferior interacciona con el fondo marino y constituye una capa límite fundamental para el estudio del procesos de erosión y sedimentación.

Si observamos los valores medios de la tabla 5.1 podremos señalar (como también se indica en el trabajo de Gidhagen [49]) un mínimo relativo en la zona de 20–40 m, y un máximo relativo en 40–60 m, que es la franja en contacto con el inicio (alrededor de los 60 m) de la pycnoclina permanente en esta zona del Báltico. Este máximo relativo puede explicarse [177] por la interacción entre la parte inferior de capa de mezcla y la

parte superior de la pycnoclina, pues aquí entran en juego cuestiones como la disipación de energía y las inestabilidades fluidomecánicas asociadas a estos procesos.

La variación diaria de los vientos está lógicamente implícita en los espectros en los que se basan los cálculos anteriores de  $K_h^{dia}$  y reflejados en la tabla 5.1, aunque a modo de ejercicio de la metodología de Taylor, procedemos a continuación en los dos siguientes apartados a estimar su aporte a la difusión diaria.

### 2.2. Estimación de la difusión debida a la variabilidad diaria de la dirección de los vientos

Vamos a trabajar con valores de la velocidad del viento promediados para cada día por lo que hay que tener en cuenta las variaciones a lo largo del día (fluctuaciones horarias). Esto se traduce automáticamente en las corrientes:

$$\vec{v} = \vec{v}_m + \vec{v}' \tag{5.23}$$

donde  $\vec{v}_m$  es la corriente media a lo largo del día y  $\vec{v}'$  su fluctuación.

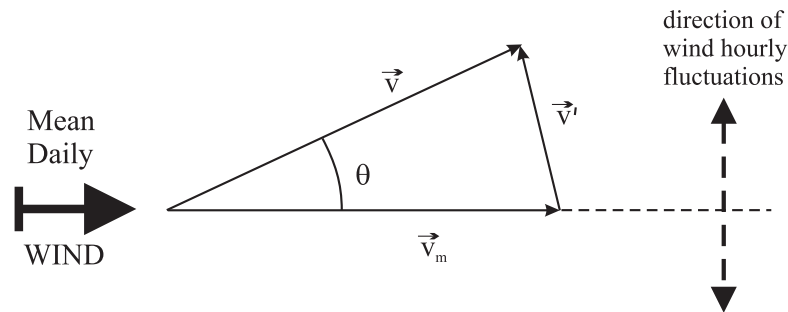


Figura 5.3: Triángulo de velocidades asociado al cambio en la dirección del viento.

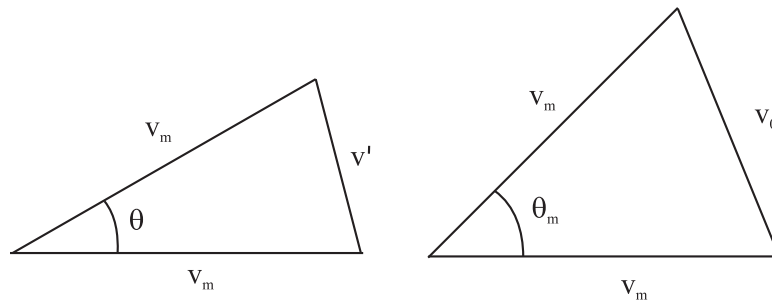


Figura 5.4: Triángulo de los módulos de las velocidades.

$$v' = 2v_m \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad -\theta_m \leq \theta \leq \theta_m \quad ; \quad \theta_m \equiv \theta_{max} \quad v_0 \equiv v'_{max} \tag{5.24}$$

donde  $\theta_m$  es el ángulo máximo de la fluctuación a la que asociaremos un periodo  $T$ , y  $v_0$  es máximo del módulo de la fluctuación  $\vec{v}'$ .

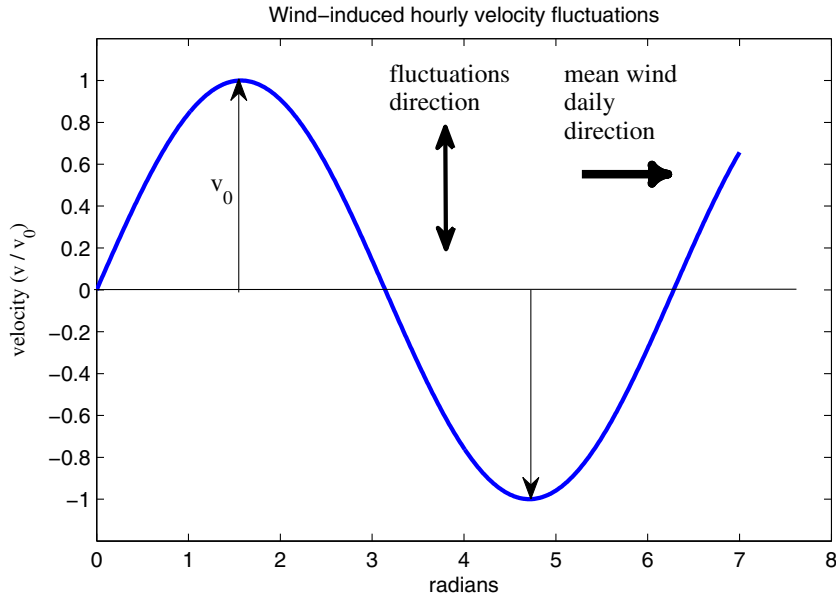


Figura 5.5: Aproximación armónica de las fluctuaciones de la velocidad asociadas a la variación de la dirección de los vientos.

Sustituyendo el valor máximo para obtener  $v_0$  y haciendo una hipótesis sinusoidal para  $v'(t)$  como muestra la figura de arriba

$$v_0 = 2v_m \text{sen} \frac{\theta_m}{2} \quad , \quad v'(t) = v_0 \text{sen} \frac{2\pi}{T}t. \tag{5.25}$$

La constante de difusión asociada a esta fluctuación la notaremos por  $K_w$ , y retomando la expresión clásica de Taylor (1921) quedará:

$$K_w = \overline{v'^2} T_w, \tag{5.26}$$

donde  $\overline{v'^2}$  es la desviación cuadrática media, y  $T_w$  es la escala de tiempo asociada a la fluctuación:

$$T_w = \int_0^{t_0} R_x(\tau) d\tau, \tag{5.27}$$

y  $R_x(\tau)$  es la autocorrelación asociada a la fluctuación  $v'(t)$ , dependiente de  $t_0$  que es el tiempo para el primer cero del correlograma  $R_x(\tau)$ . Sustituyendo en  $K_w$ :

$$K_w = \overline{v'^2} T_w \approx \frac{1}{2} v_0^2 \frac{T}{6} = \frac{1}{2} \left( 4v_m^2 \sin^2 \frac{\theta_m}{2} \right) \frac{T}{6} = \frac{1}{3} v_m^2 T \sin^2 \frac{\theta_m}{2} \quad (5.28)$$

$$K_w \approx \frac{1}{3} v_m^2 T \sin^2 \frac{\theta_m}{2}. \quad (5.29)$$

Puede evaluarse  $K_w$  en los siguientes rangos de valores:

$$\theta_m : \{30^\circ, 45^\circ, 60^\circ\} \quad v_m : \{10, 20\} \text{ cm s}^{-1} \quad T : \{6, 12, 24\} \text{ h} \quad (5.30)$$

$$K_w(30^\circ, 10 \text{ cm s}^{-1}, 6h) \approx 5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (5.31)$$

$$K_w(30^\circ, 20 \text{ cm s}^{-1}, 6h) \approx 20 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (5.32)$$

Oscilaciones del orden de  $\theta_m \approx 30^\circ$  se han observado [49] en espectros de vientos para el sistema que nos ocupa.

### 2.3. Estimación de la difusión debida a la variabilidad diaria de la intensidad de los vientos

La corrientes medias  $\vec{v}_m$  con las que vamos a trabajar están calculadas para vientos medios diarios, por lo que es necesario tener en cuenta las fluctuaciones  $\vec{v}'$  debidas a la variación horaria de la intensidad del viento respecto al valor medio diario.

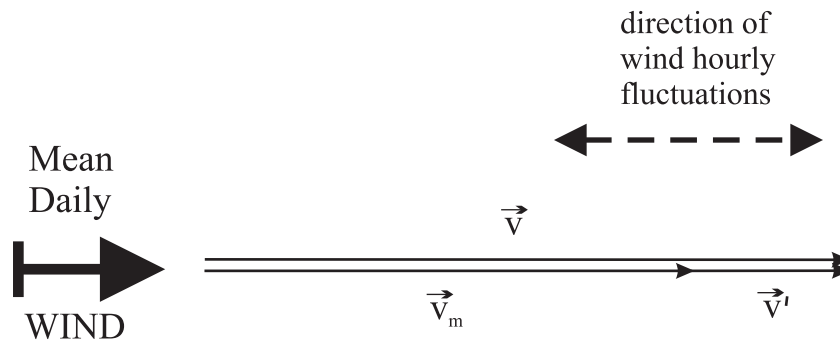


Figura 5.6: Triángulo degenerado de velocidades: media, total y fluctuación asociada al cambio en la intensidad del viento.

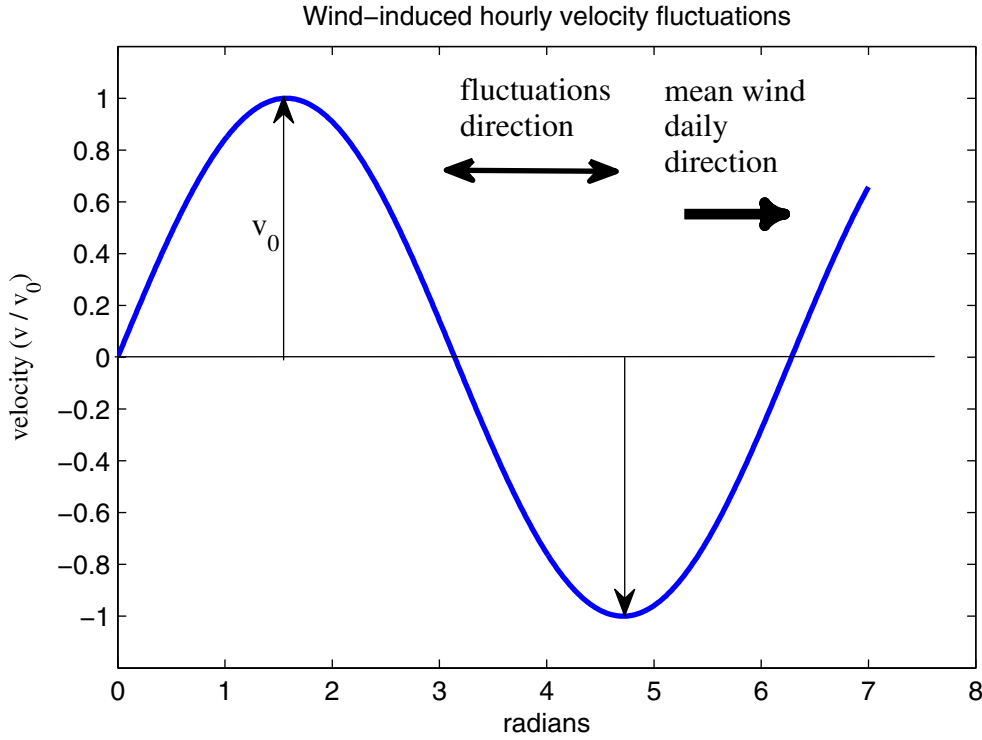


Figura 5.7: Aproximación armónica de las fluctuaciones de la velocidad asociadas a la variación en la intensidad de los vientos.

La constante de difusión asociada a esta fluctuación la notaremos por  $K_w$ , y retomando la expresión clásica de Taylor [182] quedará:

$$K_w = \overline{v'^2} T_w, \tag{5.33}$$

donde  $\overline{v'^2}$  es la desviación cuadrática media, y  $T_w$  es la escala de tiempo asociada a la fluctuación.

Hagamos la hipótesis:

$$v'(t) = v_0 \text{sen} \frac{2\pi}{T}t \tag{5.34}$$

donde  $T$  es el periodo asociado a la fluctuación y  $v_0$  el valor máximo.

Razonando idénticamente al apartado anterior:

$$\overline{v'^2} = \frac{1}{2}v_0^2 \quad T_w \approx \frac{T}{6}, \tag{5.35}$$

y sustituyendo

$$K_w \approx \frac{1}{12} v_0^2 T \quad (5.36)$$

Evaluación numérica de  $K_w$ .

Puede evaluarse  $K_w$  en los siguientes rangos de valores:

$$v_0 : \{5, 10, 15\} \text{ cm s}^{-1} \quad T : \{6, 12, 24\} \text{ h} \quad (5.37)$$

$$K_w (5 \text{ cm s}^{-1}, 6h) \approx 5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (5.38)$$

$$K_w (10 \text{ cm s}^{-1}, 6h) \approx 20 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (5.39)$$

#### 2.4. Ejemplos comentados de espectros de velocidad y energía

Este apartado tiene un carácter fundamentalmente de acercamiento a más detalles de los mecanismos de difusión diaria, además de acercarnos a la difusión en la escala superior, o **mesoescala**, donde se encuentran los torbellinos asociados a la variación de los vientos en la escala de una a varias semanas, que estudiaremos en el apartado 6 de este capítulo. La difusión de mesoescala va a ser la dominante en nuestros modelos de transporte, que van a trabajar con una circulación promediada mensual o anualmente.

Los dos periodos de medidas que se van a mostrar a continuación fueron llevados a cabo por el SMHI gracias a su sistema de boyas desplegado en el Mar Báltico, estudio que fue analizado y publicado posteriormente [127]:

- (a) El experimento del año 2002 se caracteriza por tener una energía de difusión diaria baja en relación a los espectros promedio que pueden observarse en el trabajo de Gidhagen [49].

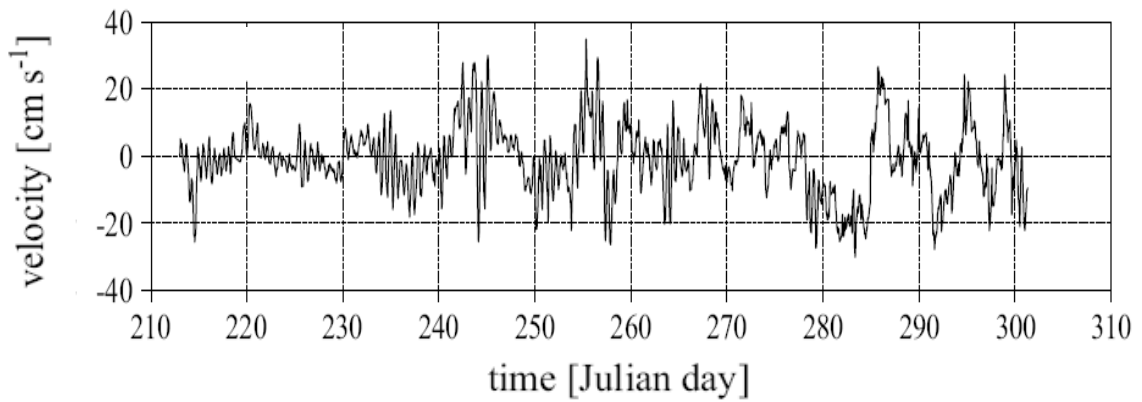


Figura 5.8: Espectro de velocidades del SMHI [127] en el Báltico con bajas oscilaciones inerciales.

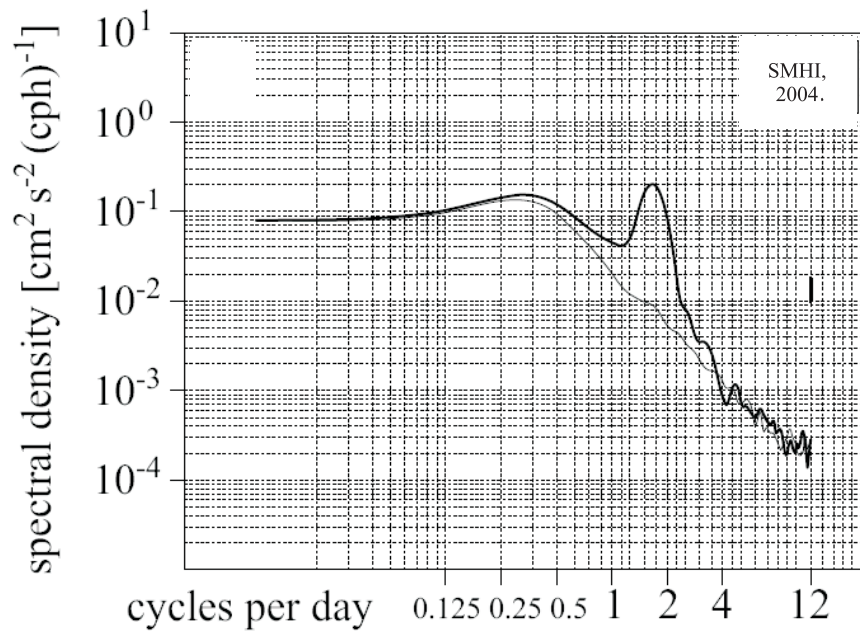


Figura 5.9: Espectro de energía del SMHI [127] en el Báltico con bajas oscilaciones inerciales.

Los indicadores más característicos son la amplitud de sus oscilaciones inerciales en el espectro de corrientes (figura 5.8) y la altura del pico correspondiente en la figura 5.9 de la densidad espectral de energía.

La integración de la energía da un valor  $E_T = 111 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}$  para la energía total, y  $E_I = 17 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}$  para la energía inercial. Realizando el cociente para obtener el tanto por ciento:

$$\frac{E_I}{E_T} 100 = 15\% \quad (5.40)$$

que podemos considerar bajas si tenemos en cuenta las estadísticas que hemos hecho de las 49 series de medidas a diferentes profundidades del trabajo del SMHI [49], donde la mitad de los espectros tienen una ratio  $(E_I/E_T \times 100)$  que está entre 20 y el 40 por ciento, que podemos considerar como el intervalo de energía difusiva diaria moderada o intermedia.

- (b) El experimento del año 2003 se caracteriza por tener una energía de difusión diaria alta en relación a los espectros ya comentados.

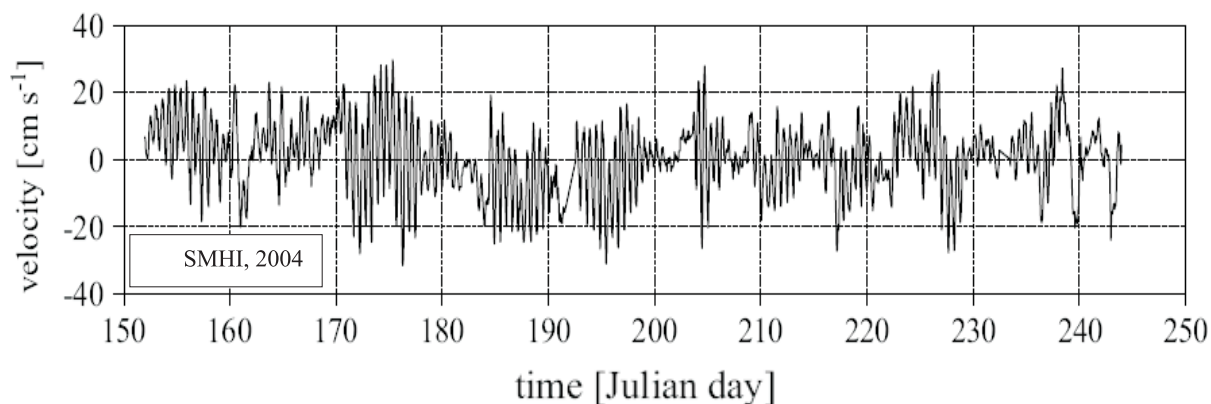


Figura 5.10: Espectro de velocidades del SMHI [127] en el Báltico con fuertes oscilaciones inerciales.

Puede observarse la amplitud elevada de sus oscilaciones inerciales en el espectro de corrientes (figura 5.10) y la altura considerable del pico correspondiente en la figura (5.11) de la densidad espectral de energía.

La integración de la energía nos da  $E_T = 98 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}$  para la energía total, y  $E_I = 51 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}$  para la energía inercial. Realizando el cociente para obtener el tanto por ciento:

$$\frac{E_I}{E_T} 100 = 51\% \quad (5.41)$$

por encima de la franja intermedia ya presentada y situada entre el 20 y 40 por ciento.



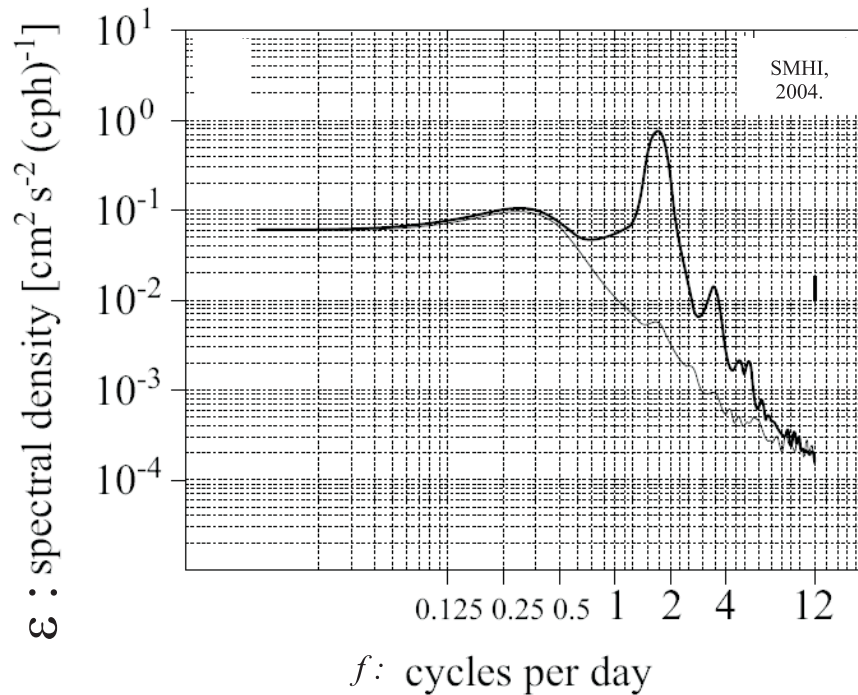


Figura 5.11: Espectro de energía del SMHI [127] en el Báltico con fuertes oscilaciones inerciales.

De la observación de ambas figuras se deduce también que los episodios de oscilaciones inerciales suelen ocurrir en paquetes con una duración de 3–6 días que son tiempos típicos [19, 127] de estancia de los frentes atmosféricos.

### 3. SOBRE LA RELACIÓN ENTRE LAS DIFERENTES ESCALAS DE TURBULENCIA

En la literatura especializada [14] a las longitudes y tiempos característicos que tienen lugar en un flujo turbulento se les denomina escalas turbulentas, y a los movimientos que tienen lugar en dichas escalas torbellinos o remolinos (*eddies* o *whirls* en la literatura anglosajona). Al ser el número de Reynolds siempre alto en los flujos turbulentos, los efectos viscosos son pequeños para el movimiento en los grandes torbellinos y, mediante mecanismos que no son muy conocidos todavía, se hacen inestables frente a perturbaciones dando lugar a un proceso de generación de torbellinos cada vez de menor tamaño, hasta que la longitud característica de los mismos se hace tan pequeña que la fuerza de viscosidad entra en juego y detiene el proceso.

Puesto que los torbellinos grandes coexisten con los pequeños, debe producirse un suministro continuo de energía, denominado *cascada de energía*, desde el movimiento de

gran escala, hacia el movimiento en las escalas pequeñas, debiendo la grande adquirir su energía del exterior para poder mantener esta cadena energética: aquí es donde debemos destacar el *papel dominante* del **viento** como fuente externa de energía para el sistema que estamos estudiando. El viento produce en el sistema torbellinos en la mesoescala con longitudes típicas del orden de  $L_{mes} \sim 10\text{--}60$  km que al desestabilizarse se transforman en remolinos más pequeños ( $L_{ine} \sim 5$  km y menores) que serán fundamentales en la parte difusiva de nuestro estudio.

El concepto de cascada de energía fue introducido en la primera mitad del siglo XX, y como idea nueva hay que atribuirlo *ex aequo* a Richardson y Kolmogorov, que introdujeron este fenómeno de manera cualitativa<sup>(\*)</sup> y cuantitativa [92] respectivamente.

(\*) *Big whirls have little whirls  
which feed on their velocity.  
Little whirls have lesser whirls  
and so on to viscosity.*

Autores como D'Asaro [25] insisten en la idea de que las variaciones de las velocidades en la mesoescala se van transformando en oscilaciones inerciales gracias al concurso de la fuerza de Coriolis.

## 4. LA MODELIZACIÓN DE LA DIFUSIÓN

### 4.1. Acoplamiento entre viscosidad y difusión turbulentas

Existen diferentes relaciones de acoplamiento entre la viscosidad y la difusión turbulentas, teniendo que distinguir además entre la parte horizontal y la vertical. En fundamental aquí destacar que todas estas relaciones dependen de la escala espacial y temporal con la que trabajemos, con las dimensiones de los torbellinos que dominen nuestro problema, que a su vez descansará sobre un modelo numérico con una resolución acorde a sus objetivos. Si definimos respectivamente como  $\sigma_{hor}$  y  $\sigma_{ver}$  al cociente horizontal y vertical entre ambas características del fluido,

$$\sigma_{hor} = \frac{K_h}{A_h} \quad , \quad \sigma_{ver} = \frac{K_v}{A_v} . \quad (5.42)$$

En la literatura podemos encontrar diferentes cocientes de acoplamiento. Hay autores [101, 143] que proponen  $\sigma_{ver} \sim 0.1 - 0.5$ . Encontramos un valor muy alejado de éste último en el trabajo de Funkquist [43],  $\sigma_{ver} \sim 0.01$ , y valores intermedios,  $\sigma_{ver} \sim 0.1$  en el detallado trabajo de Lehmann [110] sobre el Mar Báltico, diferencias que obedecen al distinto grado de resolución del modelo. Respecto a la parte horizontal, hay cierto acuerdo entre el trabajo de Funkquist [43] publicado por el SMHI y el de Lehmann [110], que proponen un diez por ciento para la difusión respecto a la viscosidad:  $\sigma_{hor} \sim 0.1$ .

### 4.2. Otras parametrizaciones de la difusión

Recordemos que la viscosidad turbulenta horizontal puede ser parametrizada dependiendo de la escala espacial de los procesos dinámicos intervinientes, teniendo en cuenta la conocida *Ley 4/3* de Richardson

$$A_h = c_o L^{4/3} \quad (5.43)$$

donde  $L$  representa la escala horizontal de los torbellinos del problema, y  $c_o$  es una constante empírica [26] que tiene un orden de magnitud de  $c_o \approx 5 \times 10^{-4} \text{ m}^{2/3} \text{ s}^{-1}$ .

Una referencia clásica en la parametrización de la difusión a diferentes escalas, desde las más pequeñas con un comportamiento más fickiano hasta las mayores en las que ya van entrando los mecanismos de cizalladura como catalizadores de la dispersión, es el trabajo de Okubo de 1971 [133], basado en la recopilación de numerosos experimentos

sobre la varianza ( $\sigma_O^2$ ) de la distribución de una mancha (generalmente de rodamina) en el océano:

$$\sigma_O^2 = \alpha t^\beta \quad , \quad \alpha = 0.018 \quad , \quad \beta = 2.34 , \quad (5.44)$$

donde  $\sigma_O^2$  se expresa en  $\text{cm}^2$  y el tiempo  $t$  en segundos. La varianza no es proporcional al tiempo como en los procesos de difusión fickianos puros, sino que va creciendo a medida que la mancha se expande por la intervención de los efectos cizalla que van aumentando con el tiempo.

Hay un artículo interesante [110] sobre el mar Báltico, con resolución horizontal de 5 km, que hace una aproximación en este terreno proponiendo la siguiente relación entre el coeficiente de difusión horizontal para el momento  $A_h$  (*eddy viscosity*) y el vector vorticidad  $\vec{\omega}$ :

$$A_h = \left\{ \begin{array}{ll} 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} , & |\vec{\omega}| < 1 \cdot 10^{-8} \\ 10^a |\omega|^b , & 1 \cdot 10^{-8} \leq |\vec{\omega}| \leq 1 \cdot 10^{-4} \\ 1 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} , & |\vec{\omega}| > 1 \cdot 10^{-4} \end{array} \right\} , \quad (5.45)$$

donde  $\vec{\omega}$  se obtiene aplicando el rotacional al campo de velocidades medias  $\vec{v}_m$  y  $\{a, b\}$  son constantes de origen estadístico:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}_m , \quad a = 5 , \quad b = 0.5 . \quad (5.46)$$

Recordemos que el campo  $\vec{v}_m$  se obtiene a partir del modelo de corrientes inducidas por el viento que hemos desarrollado para esta tesis doctoral basándonos en la literatura científica previa en este campo.

En una primera aproximación [43, 110] se puede tomar la difusividad turbillonaria ( $K_h$ ) como la décima parte de la viscosidad turbillonaria ( $A_h$ ):

$$K_h = \left\{ \begin{array}{ll} 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} , & |\vec{\omega}| < 1 \cdot 10^{-8} \\ 10^4 \sqrt{|\omega|} , & 1 \cdot 10^{-8} \leq |\vec{\omega}| \leq 1 \cdot 10^{-4} \\ 1 \cdot 10^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} , & |\vec{\omega}| > 1 \cdot 10^{-4} \end{array} \right\} , \quad (5.47)$$

que es una manera adecuada de enlazar salida del modelo de corrientes de advección con la difusión a esta escala. A mayor vorticidad advectiva, mayor difusión: el concepto que está detrás de esta relación es que la cizalladura en las velocidades favorece el mecanismo de difusión; en este caso sería una cizalladura (efecto shear) en las velocidades horizontales como condición potencial para la generación de turbulencia difusiva.

Extrapolando la información experimental disponible [49, 110, 127] y haciendo uso de los análisis de diferentes trabajos [166, 19, 110, 49, 43] se propone la tabla 5.2 con valores típicos del coeficiente de difusión horizontal  $K_h^{dia}$  ( $m^2 s^{-1}$ ) en función de la profundidad y a lo largo de las diferentes estaciones del año. Se trata de valores estimativos que no tienen en cuenta la variabilidad espacial, pero que son suficientes en esta parte de la exposición. De ser usados en una malla numérica concreta, habrían de ser modulados en función de la resolución espacial.

TABLA 5.2: Coeficiente de difusión horizontal diaria en relación a la profundidad

Tabla para $K_h^{dia}$ ( $m^2 s^{-1}$ )	invierno	primavera	verano	otoño
[0, 10] m	50	30	30	40
[10, 20] m	25	15	15	20
[20, 40] m	10	7	5	20
[40, 60] m	12	9	7	8
[60 m, bottom]	6	4	4	5

Es necesario señalar también que la existencia de diferentes tipos de torbellinos y franjas de corrientes ha podido ser detectada mediante imágenes infrarrojas de satélites [49, 50] basadas en la observación de zonas isotermas de las que se puede inferir la circulación oceánica.

Evidentemente, la escala de los movimientos horizontales es mucho mayor que la de los verticales, guardando semejanza con la desproporción entre ambas dimensiones espaciales cuya diferencia es de 3–4 órdenes de magnitud. Esto tendrá una repercusión directa en el transporte y dispersión de materia y energía entre diferentes puntos del sistema.

## 5. ESTABILIDAD Y DIFUSIÓN VERTICAL

### 5.1. Estabilidad estática.

Si pensamos en la columna de líquido deberemos tener en cuenta que la densidad del fluido  $\rho(z)$  (no veremos aquí su variación horizontal) es función de la coordenada vertical  $z$ , lo que nos permite definir el concepto de estabilidad estática  $E$

$$E \equiv -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}. \quad (5.48)$$

Lógicamente, si un elemento de la columna de líquido se encuentra situado por encima de otros de menor densidad tenderá a desestabilizarse, y con la influencia de la gravedad ( $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ ) ocupará en el futuro posiciones inferiores. Por contra, si se apoya sobre elementos del fluido de mayor densidad su estabilidad será mayor. En resumen:

TABLA 5.3: Tramos de la función Estabilidad estática

$E > 0$	Estable
$E = 0$	Estabilidad neutral
$E < 0$	Inestable

### 5.2. Frecuencia de flotación.

Abordemos el cálculo de la frecuencia de flotación (o de Brunt-Väisälä) que se nota mediante  $N$ .

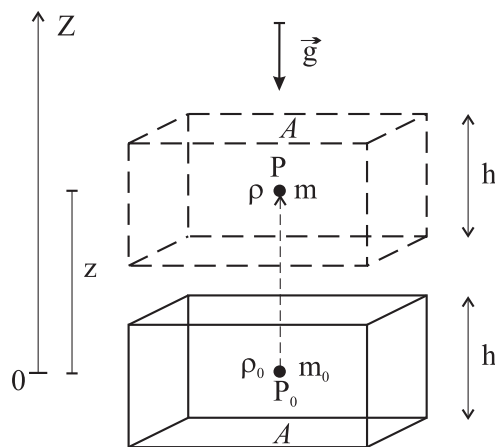


Figura 5.12: Esquema ilustrativo para las oscilaciones por flotabilidad.

Estudiaremos el movimiento oscilatorio de una capa de fluido cuando ocupa una posición tal que la función densidad  $\rho(z)$  es creciente hacia el fondo marino, en el sentido de la gravedad con  $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ .

Supongamos que el fluido se encuentra inicialmente en equilibrio y que la parcela de fluido de masa  $m_0$  y densidad  $\rho_0$  que ocupa  $P_0$  abandona esta posición y se coloca poco después en la posición  $P$  que ahora ocupa la parcela de masa  $m$  y densidad  $\rho$ .

Ambas parcelas tienen volumen  $V = Ah$ . Al tener  $m_0$  que desalojar el que fluido que ocupa ahora  $m$ , sufrirá una nueva fuerza de sustentación igual al peso desalojado

$$\vec{f}_{sus} = mg\vec{u}_z, \quad (5.49)$$

que ahora no coincidirá con su peso

$$\vec{P}_0 = -m_0g\vec{u}_z; \quad (5.50)$$

luego aplicando la segunda ley de la dinámica, y sustituyendo

$$\vec{f}_{sus} + \vec{P}_0 = m_0\ddot{z}\vec{u}_z \quad (5.51)$$

$$(m - m_0)g\vec{u}_z = m_0\ddot{z}\vec{u}_z. \quad (5.52)$$

Considerando que el desplazamiento  $z$  es suficientemente pequeño como para considerar exacta la aproximación lineal de la función densidad

$$\rho(z) = \rho(0) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_{z=0} (z - 0) = \rho_0 + \frac{\partial\rho}{\partial z}z, \quad (5.53)$$

que  $\{m = \rho V, m_0 = \rho_0 V\}$ , y sustituyendo,

$$g\frac{\partial\rho}{\partial z}z = \rho_0\ddot{z} \implies \ddot{z} = \frac{g}{\rho_0}\frac{\partial\rho}{\partial z}z \quad (5.54)$$

Exigiendo que  $\frac{\partial\rho}{\partial z} < 0$ , y por tanto que la estabilidad estática sea positiva ( $E > 0$ ), podemos definir la frecuencia  $N$ ,

$$\ddot{z} = \underbrace{\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}}_{\equiv -N^2} z = -N^2 z \implies \ddot{z} = -N^2 z, \quad (5.55)$$

que es la ecuación diferencial del movimiento oscilatorio armónico simple asociado a la flotación.

Expresando la frecuencia de flotación en función de la estabilidad estática  $E$ :

$$N^2 = -gE = g|E| \implies N = \sqrt{g|E|}. \quad (5.56)$$

La parcela mantiene este movimiento ya que cualquier desviación respecto de la posición de equilibrio en  $P_0$  encuentra su fuerza recuperadora:

- Si  $m_0$  se desplaza hacia arriba de  $P_0$  es el peso quien hace de fuerza recuperadora hacia abajo.
- Si  $m_0$  se desplaza hacia abajo de  $P_0$  es el empuje el que hace de fuerza recuperadora hacia arriba.

Cabe apreciar que la frecuencia es mayor cuanto más estable sea el sistema. Los valores típicos del periodo de flotación en el Báltico son de unos dos o tres minutos en el agua superficial, del orden de un minuto en la zona intermedia, y de veinte a cuarenta segundos en la franja picnoclina.

Puede definirse aquí el radio de Rossby ( $L_R$ ) que se corresponde con la escala en la que el efecto de la fuerza de Coriolis iguala al de la flotación o de las ondas de gravedad en casos respectivamente de flujo baroclínico o barotrópico. En el Báltico, por su estratificación, se definiría [139] así

$$L_R = \frac{NH}{\pi f} \quad (\text{radio de Rossby}), \quad (5.57)$$

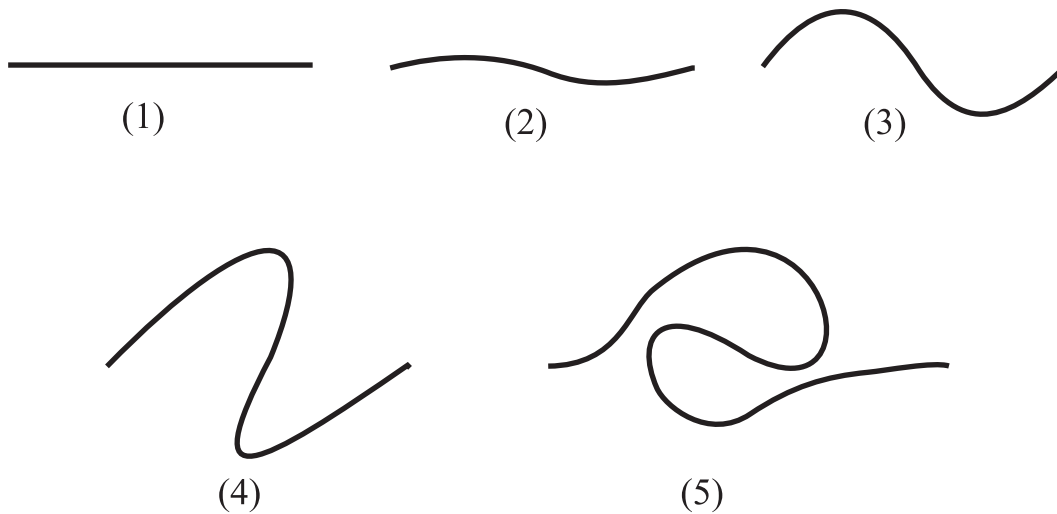
donde  $N$  es la frecuencia de flotación,  $H$  la profundidad, y  $f$  el parámetro de Coriolis. Son frecuentes [139] valores de  $L_R$  en el Báltico contenidos en el rango 5–8 km, y según este autor la información sobre  $L_R$  es de gran utilidad en los problemas de mesoescala, cuya difusión horizontal será dominante en esta tesis.



5.3. Estabilidad dinámica y turbulencia vertical: Difusión vertical

Se da con mucha frecuencia que la estabilidad estática no garantiza la estabilidad dinámica. Este es el caso de fluido que tiene una variación apreciable de la velocidad horizontal  $\vec{v}_h$  con la altura (efecto cizalladura)

$$\frac{\partial \vec{v}_h}{\partial z} \neq \vec{0} \quad : \quad \text{efecto cizalla ('shear')} \implies \text{Inestabilidad} . \quad (5.58)$$



Esquema del desarrollo de una inestabilidad Kelvin–Helmholtz

Figura 5.13: Ilustración de una inestabilidad de Kelvin–Helmholtz asociada a la ruptura de una onda interna como fuente de difusión.

Valga como ejemplo, un fluido oceánico que sufre la influencia del viento en su capa superficial, que inicialmente va formando olas, y que al soplar de manera creciente puede ir inestabilizando el flujo hasta que la ola rompe, aumentando así la turbulencia e incrementando por tanto la mezcla en el sistema.

Nótese que esta inestabilidad dinámica se desarrolla a pesar de que la estabilidad estática  $E$  tiende a infinito en la frontera de ambas fases del fluido debido a la discontinuidad de la densidad.

Otras inestabilidades que pueden aparecer a pesar de valores apreciables en la estabilidad estática  $E$  tienen lugar en las capas pycnoclinas que son franjas de la columna de líquido con una variación grande en la densidad debido a un gradiente en la salinidad

(capa haloclina), a un gradiente en la temperatura (termoclina), o a la suma de ambas variaciones.

Es frecuente que en estas condiciones se forme la llamada inestabilidad de Kelvin–Helmholtz (figura 5.13) que es uno de los fenómenos turbulentos más notables que existen.

Podemos decir resumidamente que la estabilidad estática favorece la estabilidad dinámica pero no la evita si el efecto cizalla (apreciable gradiente vertical del campo horizontal de velocidades) es suficientemente intenso. Para cuantificar estos fenómenos se define el número de Richardson  $R_i$ :

$$R_i \equiv \frac{gE}{\left(\frac{\partial \vec{v}_h}{\partial z}\right)^2}, \quad (5.59)$$

el numerador es ocupado por la estabilidad estática y el denominador por la estratificación de las velocidades.

La Mecánica de Fluidos nos dice que el flujo es estable si  $R_i > 1/4$  y turbulento si  $R_i < 1/4$ :

TABLA 5.4: Estabilidad dinámica y número de Richardson

$R_i > 1/4$	Estable
$R_i < 1/4$	Inestable: Turbulento $\rightarrow$ Vertical mixing

Sobrentendemos además que para que tengan lugar estos fenómenos el número de Reynolds  $R_e$  ha de ser suficientemente grande, cosa que le ocurre en condiciones normales a los sistemas que estamos estudiando.

Una consecuencia que resulta evidente es que la inestabilidad estática ( $E < 0$ ) implica automáticamente inestabilidad dinámica (por ser  $R_i < 0$ ):

$$\text{Inestabilidad estática } (E < 0) \quad \implies \quad \text{Inestabilidad dinámica.}$$

#### 5.4. El coeficiente de difusión vertical y su dependencia con la profundidad y con la capa pycnoclina

Existen parametrizaciones [110, 43] del coeficiente de difusión vertical en función del número de Richardson  $R_i$  y de otras variables físicas

$$K_v = \max \left[ \frac{K_0}{(1 + 3R_i)^{3/2}}, K_{min} \right] \tag{5.60}$$

donde  $K_0$  es un valor de referencia máximo que depende de la acción del viento y que es del orden de  $10 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . El coeficiente  $K_{min}$  es del orden coeficiente de difusión molecular  $0.01 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ .

La siguiente tabla muestra valores típicos [43] de  $K_0(\text{cm}^2 \text{ s}^{-1})$  para el mar Báltico, según las diferentes estaciones del año

TABLA 5.5: Valor de referencia máximo  $K_0$  del coeficiente de difusión vertical

$K_0(\text{cm}^2 \text{ s}^{-1})$	30	10	2	20
season	invierno	primavera	verano	otoño

A partir de datos experimentales [110, 43, 200] se pueden calcular tablas que muestren valores típicos de  $K_v$  en función de la profundidad según las diferentes estaciones del año.

En el trabajo de Lehmann [110] sobre el Mar Báltico se dan los siguientes valores orientativos para  $K_v$  según la estabilidad.

$$K_v < \sim 0.1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \quad , \quad \text{Muy estable ;} \tag{5.61}$$

$$K_v \sim 1 - 10 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \quad , \quad \text{Estabilidad moderada ;} \tag{5.62}$$

$$K_v \sim 10 - 50 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \quad , \quad \text{Inestable - Muy Turbulento .} \tag{5.63}$$

En el trabajo de Haapala [57] sobre transporte oceánico, validado en el mar Báltico, se trabaja con una expresión de  $K_v$  en la superficie cuya dependencia es lineal respecto a la tensión superficial  $T^s$  y cuyo rango de variación es:  $K_v \in 3 - 30 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ .

Teniendo en cuenta todos estos factores y los perfiles de salinidad típicos que vimos en el capítulo 3, se han calculado [43] los valores máximos de  $K_v$  para el Báltico Central (Cuenca de Gotland) que se muestran en la tabla 5.6.

TABLA 5.6:  $K_v^{max}$  ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ ) en función de la profundidad y de la estación en Báltico Central (Cuenca de Gotland).

$K_v$ ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ )	invierno	primavera	verano	otoño
[0, 10] m	30	10	2	20
[10, 20] m	30	10	2	20
[20, 40] m	30	10	0.02	20
[40, 60] m	30	10	0.04	0.15
[60 m, bottom]	0.09	0.03	0.01	0.06

De la misma manera se han calculado (tabla 5.7) los valores de  $K_v$  para el resto de zonas del Mar Báltico que tienen pycnoclina permanente: Cuenca de Arkona, Cuenca de Bornholm, Golfo de Finlandia.

TABLA 5.7:  $K_v^{max}$  ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ ) en función de la profundidad y de la estación para las zonas: Cuenca de Arkona, Cuenca de Bornholm, Golfo de Finlandia.

Tabla de $K_v$ ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ )	invierno	primavera	verano	otoño
[0, 10] m	30	10	2	20
[10, 20] m	30	10	0.02	20
[20, 40] m	30	10	0.04	0.15
[40m, bottom]	0.09	0.03	0.01	0.06

Finalmente, la parte norte del sistema (Mar de Botnia, Bahía de Botnia) tendrá una difusión vertical modelada mediante la tabla 5.8.

TABLA 5.8:  $K_v^{max}$  ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ ) en función de la estación la parte norte del sistema: Mar de Botnia, Bahía de Botnia.

Tabla de $K_v$ ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ )	invierno	primavera	verano	otoño
[0 m, bottom]	30	10	2	20

Existen modelos más sofisticados  $k - \varepsilon$  sobre turbulencia y difusión tridimensional en el Báltico, como el trabajo [122] elaborado en el SMHI, donde se parametrizan estos procesos en las diferentes capas de la columna de líquido teniendo en cuenta los fenómenos

de disipación asociados a la ruptura tanto de las ondas de superficie como de las ondas internas que tienen lugar en las capas pycnoclinas estacional y permanente. Esta versión más fina del problema de la difusión queda emplazada para otras versiones futuras de nuestro modelo de dispersión.

Veamos a continuación en qué consiste nuestra primera aproximación a la cuestión del flujo vertical que atraviesa la línea imaginaria pycnoclina. Es llamativa la diferencia de varios órdenes de magnitud entre los coeficientes de difusión vertical a uno y otro lado de la línea. En un artículo clásico publicado por Svansson [181] aparecen coeficientes de intercambio vertical calculados a partir de la conservación anual de la salinidad a cada lado de la línea crítica. Concretando para el Báltico Central (Báltico Estricto más Golfo de Finlandia) que es la zona donde vamos a considerar el efecto de la pycnoclina, se tienen en cuenta los volúmenes y la salinidad media anual en la partes superior e inferior,

$$V_{sup} = 12200 \text{ km}^3 \quad , \quad S_{sup} = 7.5 \text{ PSU} \quad (5.64)$$

$$V_{inf} = 2350 \text{ km}^3 \quad , \quad S_{inf} = 11 \text{ PSU} \quad (5.65)$$

y aplicando el modelo de Svansson [181] se obtiene el siguiente valor para los flujos  $\{\Phi_{12}, \Phi_{21}\}$  ascendente y descendente respectivamente

$$\Phi_{12} = \Phi_{21} = 315 \text{ km}^3 \text{ y}^{-1} \quad (5.66)$$

Haciendo una estimación simple en la que el área de separación entre ambas capas es  $A_{pic} \sim 10^5 \text{ km}^2$  se obtiene:

$$\Phi_{12} = v_{pic} A_{pic} \implies v_{pic} \sim 1 \text{ cm day}^{-1} \quad (5.67)$$

Estos flujos entre las capas superior e inferior a la línea crítica serán debidamente tenidos en cuenta en el modelo numérico y permitirán a la vez salvar la dificultad de modelar el transporte entre dos celdas de diferente coeficiente de difusión. La velocidad típica de  $1 \text{ cm day}^{-1}$  es mucho menor que las velocidades características internas en cada zona anexa.

## 6. OTRAS FUENTES DE DIFUSIÓN SEGÚN LA RESOLUCIÓN ESPACIAL O TEMPORAL DEL MODELO

### 6.1. Estimación de la difusión debida a la variabilidad mensual de los vientos

Se trata de una fuente de difusión asociada a los torbellinos de mesoescala, importante cuando trabajamos con un filtro temporal del orden de una semana o mayor.

Retomando la expresión

$$K_w \approx \frac{1}{12} v_0^2 T = \frac{1}{6} \sigma_v^2 T. \quad (5.68)$$

Si tomamos un intervalo típico de  $\sigma_v$  para estas fluctuaciones y tomamos un tiempo  $T$  característico de mesoescala, tendremos

$$\sigma_v \sim 3 - 7 \text{ cm s}^{-1} \quad , \quad T = 10 \text{ days} , \quad (5.69)$$

$$K_h^{meso} \sim 150 - 800 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} . \quad (5.70)$$

La difusión de mesoescala es la que mayor contribución va a tener en los problemas de transporte de esta tesis doctoral, ya que la circulación con la que va a trabajar nuestro modelo es una circulación en una escala temporal amplia e influida por los vientos medios dominantes en un rango temporal relativamente grande, comprendido entre un mes y un año, como ocurre con el modelo de circulación media anual diseñado por el SMHI. Cuando se trabaja con corrientes medias en un intervalo de tiempo tan largo, decrecen los valores medios –o residuales– y aumentan lógicamente las fluctuaciones y por tanto el coeficiente de difusión. Además, esto se amplifica un poco si el tamaño de la celda del modelo aumenta, haciéndolo también las desviaciones espaciales de la velocidad respecto del valor medio, lo que conlleva un aumento añadido en los coeficientes de difusión.

En un modelo de transporte de hielo en el mar Báltico [57], con una resolución similar a la nuestra,  $h_x = 18.5 \text{ km}$ , una resolución vertical de 4 capas, y una velocidades advectivas alimentadas por condiciones meteorológicas diarias –advección diaria frente a nuestra advección anual–, se trabaja con un coeficiente de difusión horizontal  $K_h = 250 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

En el artículo de Abril [4] sobre el transporte de radionúclidos en el mar de Irlanda, se tienen corrientes residuales anuales en un modelo bidimensional (2D) con un tamaño

de celda  $h_x = 5$  km y unos coeficientes de difusión  $K_h^{meso} \sim 100 - 500 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , en sintonía con los que vamos a manejar en esta tesis, a pesar de que hay dos características que diferencian a ambos modelos y que por actuar en sentido contrario hacen que sendos valores del coeficiente difusivo sean del mismo orden:

- (a) El efecto de cizalladura (shear): El modelo [4] es de naturaleza 2D cuyo efecto *shear* –influencia del perfil vertical de las velocidades en el incremento de la difusión horizontal– eleva mucho el coeficiente de difusión; este efecto es menor en los modelos 3D, como el que se expone aquí.
- (b) Resolución espacial: nuestro modelo tiene una resolución tal que  $h_x = 20$  km, mayor que la de Abril [4],  $h_x = 5$  km, lo que eleva su difusión horizontal respecto a éste, haciendo de contrapeso al efecto anterior.

Diferentes estudios sobre la difusión de mesoescala en el mar Báltico se han publicado [173, 211, 212] al respecto, arrojando valores de este coeficiente de difusión que están en el mismo orden que el estimado anteriormente. En el trabajo de Zhurbas [211]) se obtienen curvas de  $K_h^{meso}$ , durante los meses julio y agosto en mar Báltico (Golfo de Finlandia) a partir de medidas de velocidades y gradientes térmicos; valores que han sido calculados a partir de las medidas dependen de la amplitud de escala espacial  $L$  considerada, alcanzándose saturación para  $L \simeq 60$  km y un rango de valores  $K_{h,sat}^{meso}(t) \sim 200 - 800 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  durante los días analizados. De las curvas asociadas a cada escala espacial  $L$  se deduce aproximadamente y para cada instante de tiempo que:

$$K_{h,sat}^{meso} \simeq K_h^{meso}(L = 60 \text{ km}) \simeq \frac{9}{8} K_h^{meso}(L = 40 \text{ km}) \simeq 2 K_h^{meso}(L = 20 \text{ km}) \quad (5.71)$$

valor este último interesante para nosotros, debido a la resolución horizontal de nuestro modelo,  $h_x = 20$  km.

Se ha evaluado con detalle [211] la función  $K_h^{meso}(t)$  durante unos veinte días, observándose un desfase entre el máximo de  $K_h^{meso}(t)$  y el de la tensión superficial inducida por los vientos, alcanzado unos 2 días antes. Un intervalo de tiempo similar -de dos a tres días- es el que tarda en decaer  $K_h^{meso}(t)$  una vez que la velocidad del viento ha bajado a niveles menores.

Otras publicaciones sobre esta parte del problema, en relación a otros mares de una naturaleza similar, como el mar Adriático [62] y el mar de Japón [132], apuntan en la misma dirección y muestran valores situados en el mismo rango con el que se va a trabajarse en esta tesis doctoral. Respecto del primero [62], destaquemos que se han calculado la difusión lagrangiana a partir de la separación relativa entre parejas de partículas mediante simulaciones efectuadas sobre un validado modelo de alta resolución, cuyos movimientos se han estudiado alcanzándose valores para la dispersión como los que siguen

$$K_x \sim 400 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad , \quad K_y \sim 1000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (5.72)$$

donde el coeficiente  $K_x$  está asociado a la dirección transversal del sistema, de dimensión más estrecha, unos 200 km; mientras que  $K_y$ , lo está a la dirección longitudinal del sistema, de dimensión más alargada, unos 1000 km.

El estudio publicado sobre la difusión en el mar de Japón [132], mar casi cerrado, calcula valores del coeficiente de difusión por el método de Taylor [182] que están en el intervalo

$$K_h \sim 200 - 2000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (5.73)$$

y unos valores de la escala temporal de Taylor,  $T \sim 0.7 - 1.7$  días. Si calculamos los tiempos físicos de saturación bajo la aproximación armónica ( $T_{fis} \sim 6T$ ) que vimos anteriormente, obtenemos unos tiempos característicos tales que

$$T_{fis} \sim 4 - 10 \text{ días} \quad (5.74)$$

que representan, como sabemos, un rango de tiempo típico para los procesos físicos involucrados en los fenómenos de mesoescala. Los cálculos se efectúan sobre datos de un amplio trabajo de campo basado en la información proporcionada por un grupo de boyas monitorizadas por un sistema de satélites dentro del programa World Ocean Circulation Experiment/Tropical Ocean-Global Atmosphere (WOCE/TOGA).

En este artículo [132] se analiza una constante de dispersión efectiva  $K_{dis}$  en la que influye implícitamente el efecto de la mesoescala y el de la cizalladura espacial del campo advectivo de velocidades. Al cabo de unos diez días la difusión de mesoescala



alcanza cierta saturación; a partir de entonces  $K_{dis}$  sigue subiendo como consecuencia de la cizalladura de corrientes advectivas, con un perfil similar a los de Okubo [133].

Si aplicamos la metodología del mar de Japón al mar Báltico, podemos hacer una estimación de  $K_h$  tal que

$$K_h = L_R \sigma_v \quad (5.75)$$

donde  $L_R$  es el radio de Rossby y  $\sigma_v$  la desviación de las velocidades en mesoescala, cuyos rangos tomaremos como sigue

$$L_R \sim 5 - 8 \text{ km} \quad , \quad \sigma_v \sim 3 - 7 \text{ cm s}^{-1} \quad , \quad (5.76)$$

para obtener la franja de difusividades horizontales

$$K_h^{meso} \sim 150 - 600 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad . \quad (5.77)$$

En el trabajo de Eilola [28] se utiliza el agua dulce que llega al mar Báltico en primavera para trazar de la difusión horizontal, concluyéndose que el mecanismo principal de dispersión es la difusión consecuencia de la variación en la dirección de los vientos, con unas fluctuaciones típicas en velocidad de  $5 \text{ cm s}^{-1}$ , y un comportamiento en mesoescala de cuerdo con las relaciones de Okubo.

Podemos finalmente hacer una estimación en base a la aproximación de Abril [4] en relación a la longitud de mezcla ( $L_{mix}$ ). Supongamos una dependencia del tipo

$$K_h = \sigma_v L_{mix} \quad . \quad (5.78)$$

Si trabajamos con la relación  $L_{mix} = \sigma_O$ , donde  $\sigma_O$  es la desviación estándar de difusión de Okubo, ponemos un tiempo típico de proceso de 10 días ( $t \sim 9 \times 10^5 \text{ s}$ ), y un intervalo de  $\sigma_v$  entre 3 y  $7 \text{ cm s}^{-1}$ , llegamos a

$$L_{mix} = \sigma_O \sim 10 \text{ km} \quad , \quad K_h \sim 300 - 700 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad . \quad (5.79)$$

## 6.2. Difusión resultante 2D y estimación del efecto cizalla (shear)

Supongamos un esquema de corrientes inducidas por vientos con un perfil de velocidades como el que se muestra en la figura 5.14 y hagamos un análisis.

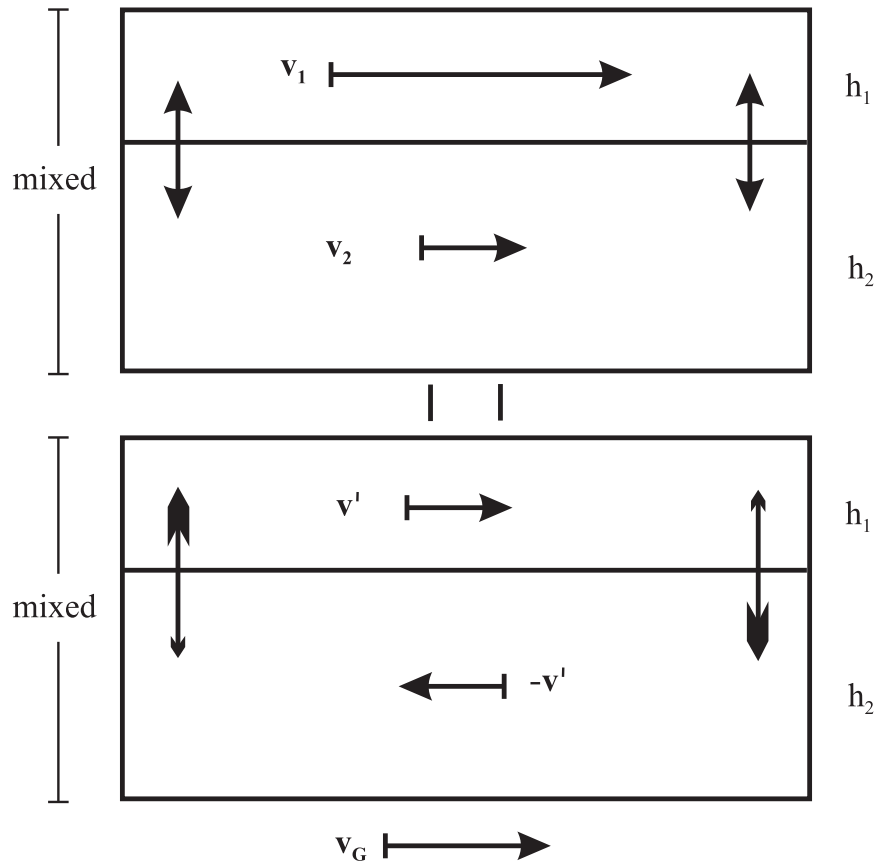


Figura 5.14: Esquema de la difusión horizontal debida al efecto shear en una capa de fluido de espesor  $h = h_1 + h_2$ . La figura describe el fluido desde el sistema asociado al centro de masas

$G$  de la capa completa de espesor  $h$ .

La velocidad del centro de masas  $v_G$  y la velocidad  $v'$  relativa a éste de ambas capas serán,

$$v_G = \frac{v_1 h_1 + v_2 h_2}{h_1 + h_2} \quad , \quad v' \equiv v_1 - v_G = -(v_2 - v_G) = \frac{h_2}{h_1 + h_2} (v_1 - v_2) \quad , \quad (5.80)$$

Podemos también hacer una estimación del coeficiente de difusión  $K_{sh}$  asociado al efecto shear que actúa en las condiciones anteriores:

$$K_{sh} = v_{sh}^2 T_{sh}, \quad (5.81)$$

donde  $v_{sh}$  son las velocidades fluctuantes del proceso

$$v_{sh} \equiv v' = v - v_G \quad (5.82)$$

y  $T_{sh}$  es el tiempo típico del proceso.

Si el tiempo lo asociamos al proceso de mezcla vertical que cierra el circuito entre las dos franjas de espesores  $\{h_1, h_2\}$ , con coeficiente de difusión  $K_z$  y longitud típica  $l_z$ ,

$$T_z = \frac{l_z^2}{K_z}. \quad (5.83)$$

Tomando  $l_z \sim (h_1 + h_2)/2$ , y asumiendo que  $T_{sh} = T_z$ , cuando se cierra el circuito,

$$K_{sh} = \frac{h_2^2 (v_1 - v_2)^2}{4K_z}. \quad (5.84)$$

Nótese que:

$$K_{sh} \propto \frac{1}{K_z} \quad (5.85)$$

quedando una constante de difusión por efecto Shear inversamente proporcional al coeficiente de difusión vertical. Lo cual tiene sentido ya que a menor difusión vertical más tiempo tarda en cerrarse el circuito, siendo mayores sus dimensiones y el coeficiente de difusión asociado al efecto cizalla. Esto lo comprobaremos en el siguiente bloque en una curiosa aplicación al Mar Báltico.

El efecto shear se estudia bastante en modelos 2D, aunque también se puede tener en cuenta en modelos 3D para estimar la difusión provocada por este efecto en el interior de una celda: descompondríamos ésta en dos sub-celdas y suponiendo un gradiente de velocidades igual al externo local, aplicaríamos el método de este apartado. Veamos una aplicación numérica:

- Estimación de  $T_{sh}$  y  $K_{sh}$  en condiciones típicas de invierno y verano.

Van a estimarse los valores de  $T_{sh}$  y  $K_{sh}$  dividiendo una capa típica de 10 m de espesor de nuestro modelo numérico en dos partes. Se tomarán  $h_2 \sim 5$  m, y según la estación,

(a) Verano: Si  $K_z \sim 3 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  ,  $(v_1 - v_2) \sim 3 \text{ cm s}^{-1}$

$$T_{sh} \sim 1 \text{ days} \quad , \quad K_{sh} \sim 20 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} . \quad (5.86)$$

(b) Invierno: Si  $K_z \sim 10 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  ,  $(v_1 - v_2) \sim 5 \text{ cm s}^{-1}$

$$T_{sh} \sim 1/2 \text{ days} \quad , \quad K_{sh} \sim 15 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} . \quad (5.87)$$

Estos valores obtenidos son muy interesantes a tener en cuenta en las aplicaciones y simulaciones del modelo numérico que tendrán lugar en los bloques siguientes.

En relación a la estimación de la difusión total debida a diferentes factores habría en primer lugar que evaluar la independencia entre ellos. Un trabajo que toca este aspecto [105] propone una combinación lineal de las coeficientes de difusión cuyos parámetros se ajustan por calibración. Apelando a la primera ley de Fick –flujo proporcional al coeficiente de Difusión– y bajo condiciones de isotropía, sería de esperar que cuanto más independientes sean las causas asociadas a cada coeficiente de difusión más próximos estén estos parámetros a la unidad, siendo el caso ideal el de la adición pura –o superposición directa– de coeficientes de difusión para obtener el coeficiente total. Esta cuestión será tenida en cuenta a la hora de las simulaciones y calibración del modelo numérico.

### 6.3. Reflexión sobre las escalas mayores de difusión en el mar Báltico

Reflexionemos a continuación sobre las escalas mayores de difusión o mezcla que se producen alimentadas por nuestro sistema de corrientes advectivas (circulación) que contribuyen a este proceso al operar en una escala mayor del espacio y el tiempo. Nuestro modelo de circulación anual (HD-3D) tiene una variación espacial en sus corrientes cuya cizalladura produce dispersión en una escala de tiempo grande, como aparece en algunos sistemas analizados por en los diagramas de Okubo [133]. Gobierna la mezcla en escalas de tiempo de meses –y superiores–, así como en longitudes del orden y superiores a 50 kilómetros, de modo que llegaríamos a la escala espacial de un compartimento (unos 300–400 km) y seguiríamos hasta terminar saturando con la longitud del sistema (unos 1000–1500 km).

Hagamos el ejercicio de pensar en un modelo 2D de baja resolución al que llamaremos aquí HD-2D, construido a partir del HD-3D, nuestro modelo tridimensional de baja resolución y corrientes medias anuales. Al integrar en la vertical, los módulos de las corrientes medias bajarán, aumentando los coeficientes de difusión horizontal, por efecto shear en la vertical. Utilizando la fórmula del efecto shear que vimos antes, podemos hacer una simplificación bicapa para el Báltico y realizar una estimación usando valores típicos como los siguientes

$$h_2 = 30 \text{ m} \quad , \quad v_1 - v_2 = 10 \text{ cm s}^{-1} \quad , \quad K_z = 10 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \quad (5.88)$$

cuya evaluación para  $K_h^{2D}$  nos da

$$K_h^{2D} \sim 2000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} > K_h^{3D} \sim 500 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} . \quad (5.89)$$

Ha de notarse que corrientes que son advectivas en el HD-3D, como las corrientes medias verticales, desaparecen explícitamente en el nuevo modelo HD-2D debido a que pasan a intervenir implícitamente en sus mecanismos de difusión, con escalas espaciales y temporales mayores que la difusión del modelo HD-3D.

El siguiente paso sería pensar en un modelo monodimensional para el mar Báltico con una coordenada longitudinal como la que se usa para la modelización de estuarios, al que llamaremos HD-1D, y que se construiría integrando el anterior en la coordenada transversal. En esta última iteración tendríamos un modelo completamente difusivo donde

toda la advección de modelos de versiones anteriores (HD–3D, HD–1D) contribuye a la difusión. Se han hecho estimaciones [181] sobre un coeficiente medio de difusión  $K_h^{1D}$ , relacionando los flujos de agua dulce en el sistema, que presenta un exceso anual en el Báltico de unos  $500 \text{ km}^3$ , con los gradientes medios longitudinales de salinidad supuestos estacionarios, obteniéndose lo siguiente

$$K_h^{1D} \sim 8000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} > K_h^{2D} \sim 2000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} > K_h^{3D} \sim 500 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (5.90)$$

debido el efecto shear horizontal de las corrientes 2D (función a su vez de las corrientes horizontales 3D) que intervienen alimentando el mecanismo de difusión 1D y elevando  $K_h^{1D}$  respecto al coeficiente  $K_h^{2D}$ . Para que nos hagamos una idea, el exceso de agua dulce en el Báltico supondría aproximadamente 1 metro de altura sobre la superficie del sistema en caso de que no se desalojara anualmente en el Océano Atlántico.

Puede hacerse una estimación de las escalas o longitudes  $\{L_{2D}, L_{1D}\}$  asociadas respectivamente a los circuitos difusivos de la aproximación HD–2D y HD–1D

$$K_h^{2D} = v_{2D} L_{2D} \quad , \quad K_h^{1D} = v_{1D} L_{1D} ; \quad (5.91)$$

si suponemos las siguientes velocidades,  $v_{2D} \sim v_{1D} = 5 \text{ cm s}^{-1}$ , obtenemos, curiosamente y de manera respectiva las escalas espaciales de un compartimento medio báltico y del mar completo

$$L_{2D} \sim 400 \text{ km} \sim L_{comp} \quad , \quad L_{1D} \sim 1500 \text{ km} \sim L_{Bal} . \quad (5.92)$$

De esta manera, cerramos este capítulo dedicado a diferentes aspectos generales y modelización de la difusión en el Mar Báltico.

# Capítulo 6

## Métodos Matemáticos para las Ecuaciones de Transporte

### 0. INTRODUCCIÓN

El método principal con que vamos a abordar el problema del transporte materia en esta tesis doctoral es el Método de Monte Carlo (MMC) cuyas ventajas quedarán expuestas más adelante. La alternativa fundamental a este método es el Método de Diferencias Finitas (MDF).

Se puede decir que el MDF es un método más clásico lo que en gran parte está asociado fundamentalmente a su menor coste computacional. La computación ha experimentado un fuerte avance en las últimas décadas con un crecimiento exponencial en la velocidad y en el volumen de cálculo así como en la capacidad de memoria de las computadoras. Todo ello ha beneficiado el avance de las aplicaciones de los métodos numéricos en general y del MMC en particular.

Ambos métodos tienen sus puntos fuertes y sus pequeños puntos débiles si los comparamos entre sí. La metodología del MDF la podemos consultar en muchos textos de la literatura [101, 143] y no vamos a exponerla aquí con detalle. Nos vamos a centrar aquí en el que quizás es su punto más débil que es la cuestión de la *difusión numérica*. Se trata de un efecto numérico no deseado cuya consecuencia sobre una nube de puntos transportada bajo un campo advectivo uniforme y cuya evolución debería ser igual que la de un sistema rígido, experimenta además difusión y, por tanto, deformación del sistema de puntos externa a la física del problema. La difusión numérica puede ser, según el caso,

superior a la difusión física, se dispara cuando la función densidad del problema presenta altos gradientes, y su razón de ser se debe a la naturaleza euleriana del MDF.

Por otro lado, la difusión numérica no es un problema para los métodos lagrangianos como el MMC, si bien no debemos olvidar que el coste computacional del MMC es alto, máxime teniendo en cuenta que un punto vocacional de esta tesis doctoral es que su metodología numérica pueda ser ejecutada en una computadora de usuario medio. Debemos tener presente siempre el MDF, aunque su uso será menor en esta tesis doctoral; conviene recordar que las primeras publicaciones del doctorando en este campo están basadas en metodologías eulerianas así como muchas otras en este campo, razón por la cual se le dedica aquí su espacio correspondiente.

En el siguiente apartado, se va a poner sobre la mesa la cuestión de la difusión numérica en el MDF, una metodología de corrección (MSOU) existente en la literatura, y una pequeña ampliación de la misma que se hace como parte de esta tesis doctoral.

## 1. MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS Y ALGORITMOS DE LIMITACIÓN DE FLUJO EN UNA, DOS Y TRES DIMENSIONES

### 1.1 Introducción

En el Método de Diferencias Finitas es conocida la fórmula [4, 149] para la difusión numérica en un problema unidimensional con malla de tamaño  $\Delta x$  y velocidad advectiva  $v$  cuando se usa un paso de tiempo  $\Delta t$  en la resolución de las ecuaciones de evolución:

$$K_{dif}^{num} = \frac{v}{2} (\Delta x - v\Delta t) . \quad (6.1)$$

Existen unas condiciones críticas [101] en que la difusión numérica es nula; y dados  $\{\Delta x, v\}$  se llama paso tiempo mágico  $\Delta t_{mag}$  al que anula este indeseado efecto numérico:

$$\Delta t_{mag} \equiv v/\Delta x . \quad (6.2)$$

La elección de pasos mágicos de tiempo tiene su aplicación en el caso de un campo uniforme de velocidades advectivas. Como esto no ocurre en un problema general, habrá que buscar métodos que corrijan este efecto numérico no deseado, pues en muchos casos la difusión numérica supera los valores de la difusión física y el modelo dista de reproducir la realidad.



Existe una amplia información sobre estos métodos de limitación del flujo advectivo [165, 143, 215, 161, 167, 199, 112, 113, 172].

En este trabajo nos vamos a centrar en el método MSOU (Monotonic Second Order Upstream; [143]). En primer lugar haremos una breve descripción del método MSOU cuyos algoritmos [143] se han aplicado a sistemas  $1D$  y a sistemas  $2D$  con advección uniforme.

Y en segundo lugar se presentará en este trabajo un ampliación del método a MSOU a sistemas  $2D$  con advección no uniforme y a sistemas advectivos  $3D$  con velocidades arbitrarias. A esto seguirán unas aplicaciones a nuestro sistema, el Mar Báltico.

## 1.2 Método MSOU 1D

Se mostrarán en primera instancia una aplicación del método MSOU para una dimensión, similares a otros resultados publicados [143]. Con este método tratamos de minimizar la difusión numérica que aparece ligada al transporte por advección como consecuencia natural de la discretización del sistema en el Método de Diferencias Finitas.

Partimos de un problema unidimensional cuyo esquema de advección queremos estudiar. Trabajamos con una función escalar de distribución  $\varrho(x, t)$  de la escribimos su ecuación de continuidad advectiva:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0 \quad (6.3)$$

Admitiendo una velocidad advectiva  $\vec{V} = u\vec{e}_x$ , y utilizando el asterisco para designar el instante futuro,  $\varrho_i^* \equiv \varrho_i(t + \Delta t)$ , una solución simple de esta ecuación sería la siguiente:

$$\frac{\varrho_i^* - \varrho_i}{\Delta t} = -u \frac{\varrho_i - \varrho_{i-1}}{\Delta x} \quad (u > 0) \quad (6.4)$$

$$\frac{\varrho_i^* - \varrho_i}{\Delta t} = -u \frac{\varrho_{i+1} - \varrho_i}{\Delta x} \quad (u < 0) \quad (6.5)$$

Los flujos en las fronteras derecha e izquierda de la celda  $i$  de tamaño  $\Delta x$  y sección transversal unidad, serán respectivamente:

$$f_i^+ = \varrho_i u \quad , \quad f_{i-1}^+ = \varrho_{i-1} u \quad (u > 0) \quad (6.6)$$

$$f_i^- = \varrho_{i+1} u \quad , \quad f_{i-1}^- = \varrho_i u \quad (u < 0). \quad (6.7)$$

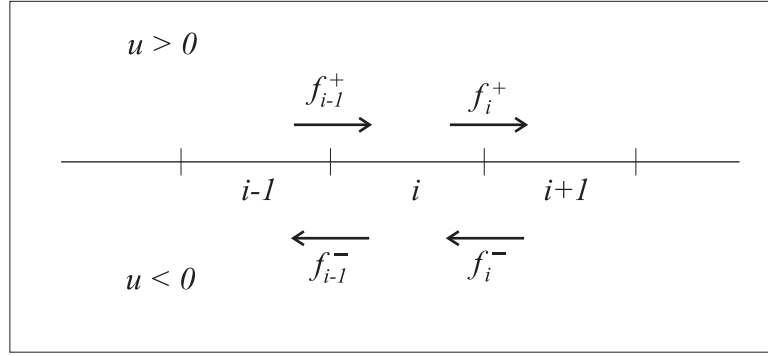


Figura 6.1: Esquema de flujos del transporte 1D.

Luego los esquemas de advección en función de estos últimos serán:

$$\varrho_i^* = \varrho_i + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i-1}^+ - f_i^+) \quad (u > 0) \quad (6.8)$$

$$\varrho_i^* = \varrho_i + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i-1}^- - f_i^-) \quad (u < 0). \quad (6.9)$$

Unificando para ambos sentidos de flujo:

$$\varrho_i^* = \varrho_i + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i-1} - f_i) \quad (\forall u) \quad (6.10)$$

donde:

$$f_i = \begin{cases} f_i^+ & \text{si } u > 0 \\ f_i^- & \text{si } u < 0. \end{cases} \quad (6.11)$$

#### • Esquema de limitación de flujo MSOU 1D.

Las limitaciones de flujo advectivo [143] se hacen mediante correcciones sobre la función densidad  $\varrho_i$ , corregida respectivamente por  $\{\varrho_i^+, \varrho_i^-\}$  en el caso flujo positivo o negativo, según sea el caso. El flujo corregido vendrá notado por  $\{f_i^{c+}, f_i^{c-}\}$ :

$$f_i^{c+} = \varrho_i^+ u \quad (6.12)$$

donde la densidad corregida en función de sus dos vecinas es

$$\varrho_i^+ = \varrho_i + \Psi(\varrho_{i-1}, \varrho_i, \varrho_{i+1}), \quad (6.13)$$

y término corrector  $\Psi$ , función de tres variables  $\{\varrho_{i-1} = a, \varrho_i = b, \varrho_{i+1} = c\}$  es:

$$\Psi(a, b, c) = \frac{1}{2}(b - a) \cdot f(r(a, b, c)) \quad , \quad f(r) = \max [0, \min(2r, 1), \min(r, 2)] \quad , \quad (6.14)$$

siendo el coeficiente adimensional  $r$  una función de segundo orden respecto a la densidad central  $i$  y a las dos anexas  $\{i - 1, i + 1\}$

$$r = \begin{cases} 0 & \text{si } b = a \\ \frac{c - b}{b - a} & \text{si } b \neq a \end{cases} \quad . \quad (6.15)$$

La función limitadora  $f(r)$  se muestra a continuación:

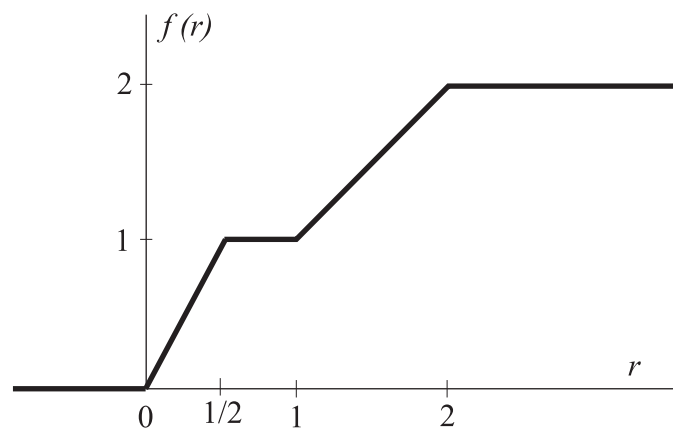


Figura 6.2: Función limitadora MSOU del flujo advectivo.

En el caso de flujo negativo tenemos

$$f_i^{c-} = \varrho_{i+1}^- u \quad (6.16)$$

donde la densidad corregida en función de sus dos vecinas es

$$\varrho_i^- = \varrho_i + \Psi(\varrho_{i+1}, \varrho_i, \varrho_{i+1}) \quad . \quad (6.17)$$

Nótese que los subíndices de las densidades en la función correctora  $\Psi$  van en orden decreciente, en el mismo sentido que el flujo. Aumentando en una unidad la expresión anterior y sustituyendo en la densidad  $\varrho_{i+1}$  llegamos a

$$f_i^{c-} = [\varrho_{i+1} + \Psi(\varrho_{i+2}, \varrho_{i+1}, \varrho_i)] u. \quad (6.18)$$

### · Aplicaciones numéricas método MSOU 1D

En las aplicaciones numéricas 1D que vienen a continuación vamos a fijar  $\{\Delta x = 1, v = 1\}$  y a variar  $\Delta t$ . Todas las expresiones numéricas de este apartado están referidas al sistema internacional (S.I).

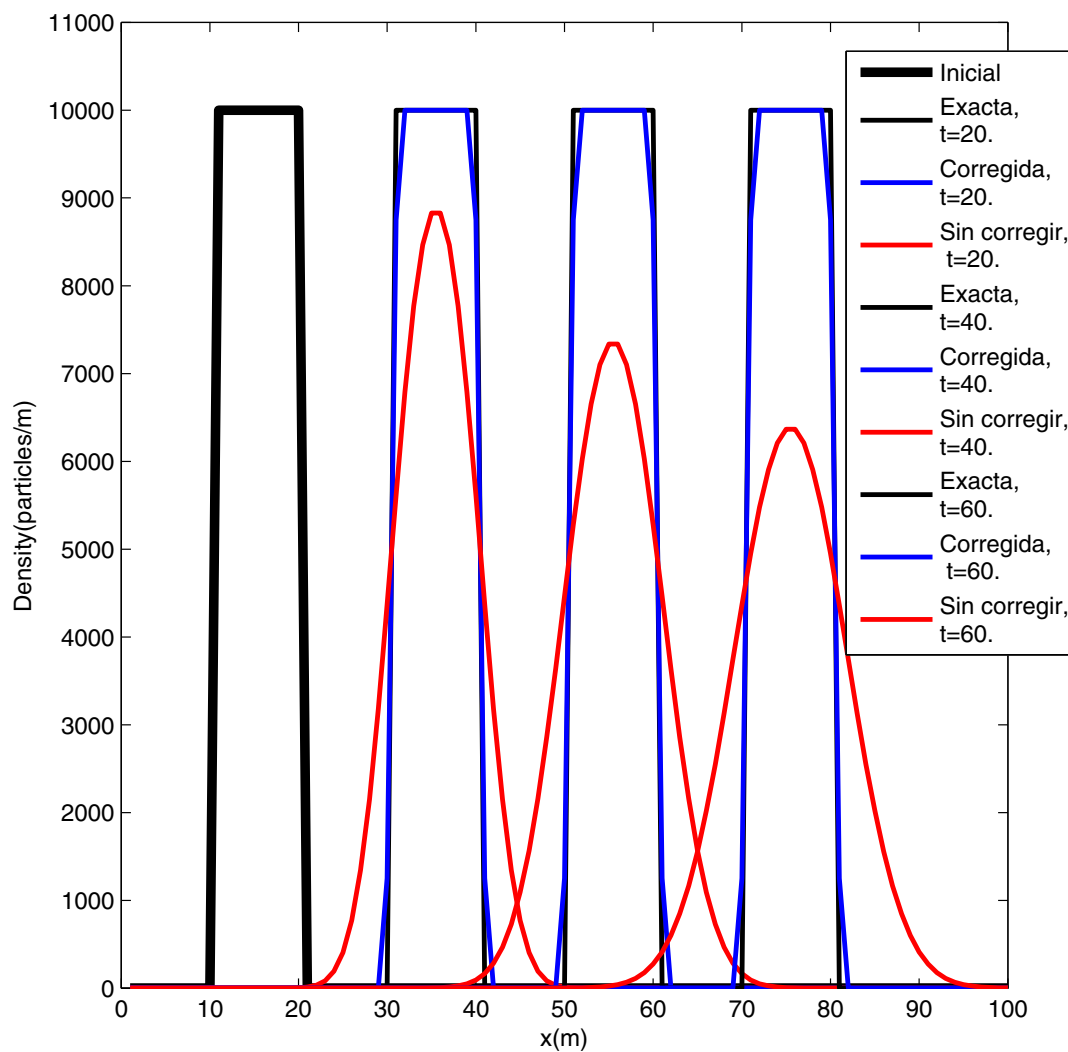


Figura 6.3: Calibración unidimensional del método MSOU para corrección de la difusión numérica. Simulación durante 60 unidades de tiempo, tomando  $\Delta t = 1/2$ .

Las figuras 6.3 y 6.4 muestran la evolución en el tiempo de la función de distribución  $A(x)$  que experimenta advección a lo largo del eje  $OX$ .

La elección de tiempo mágico  $\Delta t_{mag} = 1$  nos da una solución exacta que se traslada rígidamente con velocidad  $v = 1$ .

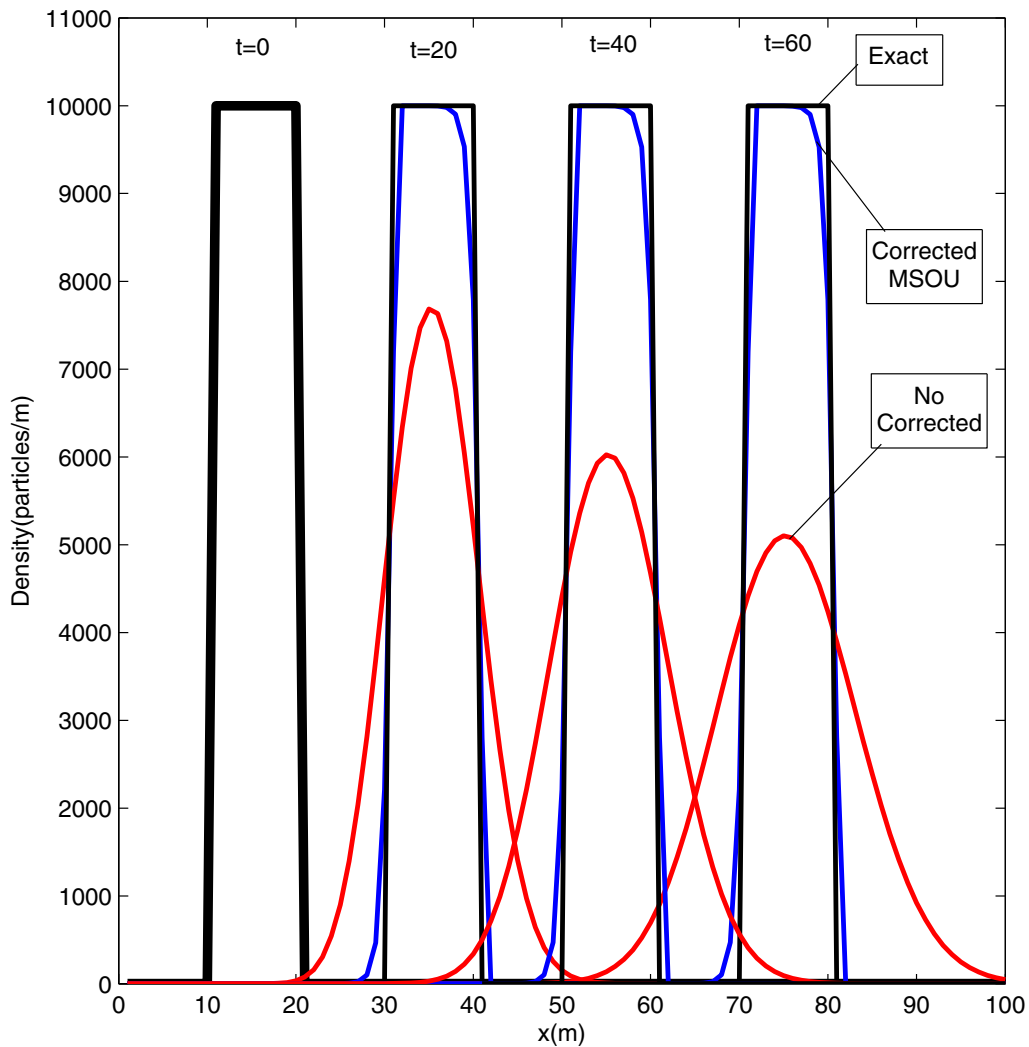


Figura 6.4: Simulación unidimensional del método MSOU para corrección de la difusión numérica. Simulación durante 60 unidades de tiempo, tomando  $\Delta t = 1/8$ .

Puede notarse en esta gráfica que al estar el paso de tiempo ( $\Delta t = 1/8$ ) más alejado del paso mágico ( $\Delta t = 1$ ) que en el caso anterior ( $\Delta t = 1/2$ ), la difusión numérica es mayor, como nos muestran las distribuciones sin corrección, más anchas en segundo

caso que en primero. Esto influye ligeramente en la eficacia del método, siendo un poco mayores en el último caso las diferencias entre la solución corregida y la exacta. Puede afirmarse de todas maneras y la luz de los resultados que la eficacia del método en los casos estudiados es bastante aceptable.

### 1.3 Método MSOU 2D. Concepto de nudo puntero.

La versión del método MSOU 2D que se ha encontrado en la literatura científica [143] es aplicada a un campo advectivo uniforme. A continuación vamos a extender esta metodología de segundo orden a un problema bidimensional general haciendo uso del concepto de nudo *puntero*, constituyendo esta extensión del método una pequeña aportación original de esta tesis. El flujo a través de una pared se produce entre dos celdas contiguas, a las que podemos denominar celda entrante y saliente, estando dirigido el flujo lógicamente en el sentido entrante-saliente. Por otro lado, a la celda entrante llega a su vez flujo proveniente de otra celda, cuya posición central denominaremos aquí nudo puntero o apuntador. Inicialmente, se va a trabajar bajo la condición de que hay, a lo sumo, un nudo puntero por cada celda.

Retomando los algoritmos de segundo orden del esquema anterior MSOU 1D para corrección de flujo, es inmediato señalar al nudo puntero dentro del trío de celdas, que ocupará el primer lugar de la terna en el sentido del flujo:

- (a) Flujo positivo:  $f_i^{c+}(i-1, i, i+1)$  . Nudo puntero:  $i-1$  .
- (b) Flujo negativo:  $f_i^{c-}(i+2, i+1, i)$  . Nudo puntero:  $i+2$  .

Esta inmediatez se debe al sentido de circulación uniforme en toda la recta OX, cualidad que no se da para una recta cualquiera elegida sobre una malla general en un problema advectivo 2D. Así, al definir el concepto de nudo puntero podemos exportar la metodología 1D al problema general 2D situando a éste en el primer lugar de la terna.

Dado un nudo  $[i, j]$ , los flujos a través de sus paredes principales  $[i+1/2, j]$  y  $[i, j+1/2]$  serán respectivamente:

- (a) Pared  $[i+1/2, j]$ :

$$f_{x,ij}^+ = \varrho_{ij} u_{i,j} \quad (u_{i,j} > 0) \quad , \quad f_{x,ij}^- = \varrho_{i+1,j} u_{i+1,j} \quad (u_{i+1,j} < 0) \quad . \quad (6.19)$$

(b) Pared  $[i, j + 1/2]$ :

$$f_{y,ij}^+ = \varrho_{ij} v_{i,j} \quad (v_{i,j} > 0) \quad , \quad f_{y,ij}^- = \varrho_{i,j+1} v_{i,j+1} \quad (v_{i,j+1} < 0) . \quad (6.20)$$

La posición y la densidad de la celda asociadas al nudo puntero de uno dado  $[i, j]$  serán respectivamente notadas del siguiente modo:

$$[i, j]^P \quad , \quad \varrho_{ij}^P . \quad (6.21)$$

(a) Flujo a través de la pared  $[i + 1/2, j]$  .

i. Consideremos el flujo **positivo**  $f_{x,ij}^+$  a través de la pared  $[i + 1/2, j]$  y obtengamos su flujo corregido  $f_{x,ij}^{c+}$ . Habremos de hacer una corrección en la densidad, que notaremos mediante  $\varrho_{x,ij}^+$ . La terna asociada a este flujo estará formada por:

$$[i, j]^P \longrightarrow [i, j] \longrightarrow [i + 1, j] \quad (6.22)$$

por lo que el valor de  $\varrho_{x,ij}^+$  será

$$\varrho_{x,ij}^+ = \varrho_{ij} + \Psi \left( \varrho_{ij}^P, \varrho_{ij}, \varrho_{i+1,j} \right) \quad (6.23)$$

que nos lleva a

$$f_{x,ij}^{c+} = \varrho_{x,ij}^+ u_{ij} = \left[ \varrho_{ij} + \Psi \left( \varrho_{ij}^P, \varrho_{ij}, \varrho_{i+1,j} \right) \right] u_{ij} . \quad (6.24)$$

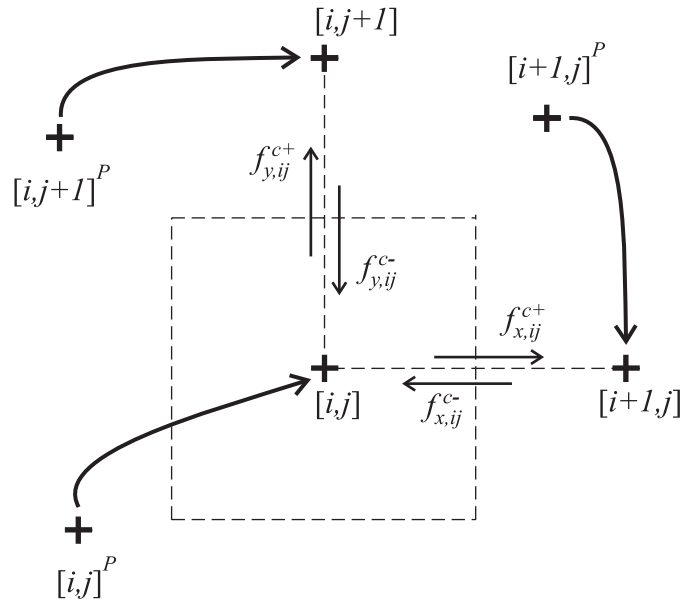


Figura 6.5: Esquema de los flujos 2D bajo la descripción de nudos punteros.

- ii. Análogamente, a partir del flujo **negativo**  $f_{x,ij}^-$  a través de la pared  $[i + 1/2, j]$  podemos obtener su flujo corregido  $f_{x,ij}^{c-}$ . Habremos de hacer una corrección en la densidad, que notaremos mediante  $\varrho_{x,i+1,j}^-$ . La terna asociada a este flujo estará formado por los nudos:

$$[i + 1, j]^P \longrightarrow [i + 1, j] \longrightarrow [i, j] \quad (6.25)$$

por lo que el valor de  $\varrho_{x,i+1,j}^-$  será

$$\varrho_{x,i+1,j}^- = \varrho_{i+1,j} + \Psi \left( \varrho_{i+1,j}^P, \varrho_{i+1,j}, \varrho_{i,j} \right) \quad (6.26)$$

que nos lleva a

$$f_{x,ij}^{c-} = \varrho_{x,i+1,j}^- u_{i+1,j} = \left[ \varrho_{i+1,j} + \Psi \left( \varrho_{i+1,j}^P, \varrho_{i+1,j}, \varrho_{i,j} \right) \right] u_{i+1,j}. \quad (6.27)$$

(b) Flujo a través de la pared  $\{i, j + 1/2\}$ .

- i. Consideremos el flujo **positivo**  $f_{y,ij}^+$  a través de la pared  $[i, j + 1/2]$  y obtengamos su flujo corregido  $f_{y,ij}^{c+}$ . Habremos de hacer una corrección en la densidad, que notaremos mediante  $\varrho_{y,ij}^+$ . La terna asociada a este flujo estará formado por los nudos:

$$[i, j]^P \longrightarrow [i, j] \longrightarrow [i, j + 1] \quad (6.28)$$

por lo que el valor de  $\varrho_{y,ij}^+$  será

$$\varrho_{y,ij}^+ = \varrho_{ij} + \Psi \left( \varrho_{ij}^P, \varrho_{ij}, \varrho_{i,j+1} \right) \quad (6.29)$$

que nos lleva a

$$f_{y,ij}^{c+} = \varrho_{y,ij}^+ v_{ij} = \left[ \varrho_{ij} + \Psi \left( \varrho_{ij}^P, \varrho_{ij}, \varrho_{i,j+1} \right) \right] v_{ij}. \quad (6.30)$$

- ii. Análogamente, a partir del flujo **negativo**  $f_{y,ij}^-$  a través de la pared  $[i, j + 1/2]$  podemos obtener su flujo corregido  $f_{y,ij}^{c-}$ . Habremos de hacer una corrección en la densidad, que notaremos mediante  $\varrho_{y,i,j+1}^-$ . La terna asociada a este flujo estará formado por los nudos:

$$[i, j + 1]^P \longrightarrow [i, j + 1] \longrightarrow [i, j] \quad (6.31)$$



por lo que el valor de  $\varrho_{y,i,j+1}^-$  será

$$\varrho_{y,i,j+1}^- = \varrho_{i,j+1} + \Psi \left( \varrho_{i,j+1}^P, \varrho_{i,j+1}, \varrho_{i,j} \right) \quad (6.32)$$

que nos lleva a

$$f_{y,ij}^{c-} = \varrho_{y,i,j+1}^- v_{i,j+1} = \left[ \varrho_{i,j+1} + \Psi \left( \varrho_{i,j+1}^P, \varrho_{i,j+1}, \varrho_{i,j} \right) \right] v_{i,j+1}. \quad (6.33)$$

(c) Solución de la ecuación de transporte advectivo.

Unifiquemos la notación de los flujos cualquiera que sea su signo.

El flujo paralelo a OX en la posición  $[i + 1/2, j]$  es

$$f_{x,ij}^c = \begin{cases} f_{x,ij}^{c+} & \text{si } u_{ij} > 0 \\ f_{x,ij}^{c-} & \text{si } u_{i+1,j} < 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \quad (6.34)$$

mientras que el paralelo a OY en  $[i, j + 1/2]$  será:

$$f_{y,ij}^c = \begin{cases} f_{y,ij}^{c+} & \text{si } v_{ij} > 0 \\ f_{y,ij}^{c-} & \text{si } v_{i,j+1} < 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (6.35)$$

Esta es la solución para la función densidad  $\varrho_{ij}^*$  en el instante posterior:

$$\varrho_{ij}^* = \varrho_{ij} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{x,i-1,j}^c - f_{x,ij}^c) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (f_{y,i,j-1}^c - f_{y,ij}^c). \quad (6.36)$$

Se presenta a continuación una aplicación bidimensional de este algoritmo al Mar Báltico Central sometiendo al sistema a un circuito ideal de corrientes con una velocidad advectiva de  $4 \text{ cm s}^{-1}$ . Mostraremos en primer lugar la solución sin correcciones a la limitación de flujo, para acto seguido poder compararla con la solución fruto del Método MSOU 2D.

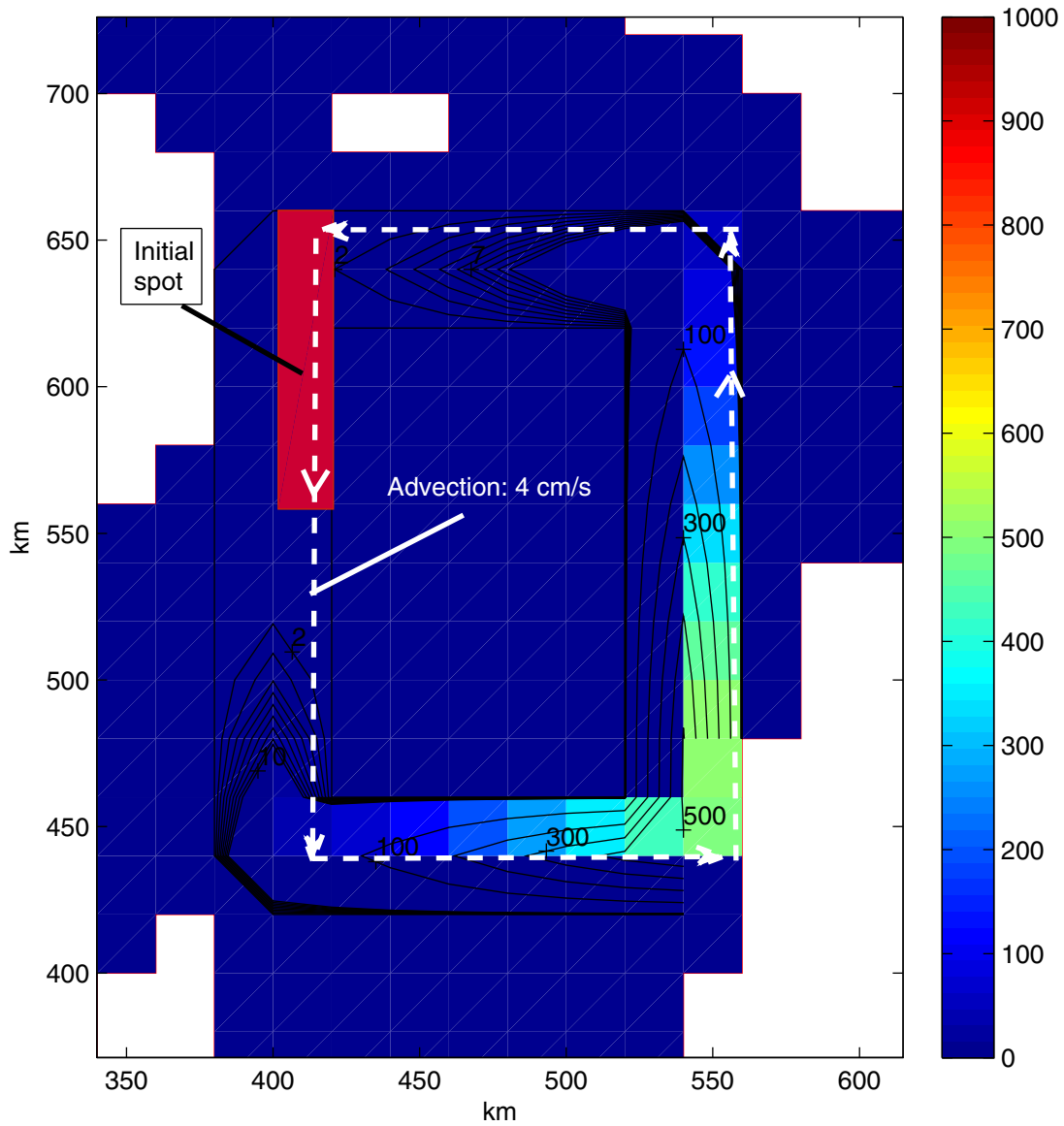


Figura 6.6: Resultados de una simulación de transporte advectivo por el MDF sin limitación de flujo. Inicialmente se tiene una franja de 100 km con una densidad de  $1000 \text{ Bq m}^{-3}$  (mancha formada por cinco cuadros de color rojo) en la zona noroeste del Baltic Proper. En el mapa se muestra la densidad ( $\text{Bq m}^{-3}$ ) tras tres meses de transporte a un ritmo de  $4 \text{ cm s}^{-1}$  siguiendo un circuito bidimensional (color blanco), como se muestra en la figura, con

$$\Delta x = \Delta y = 20 \text{ km}, \Delta t = 24 \text{ h.}$$

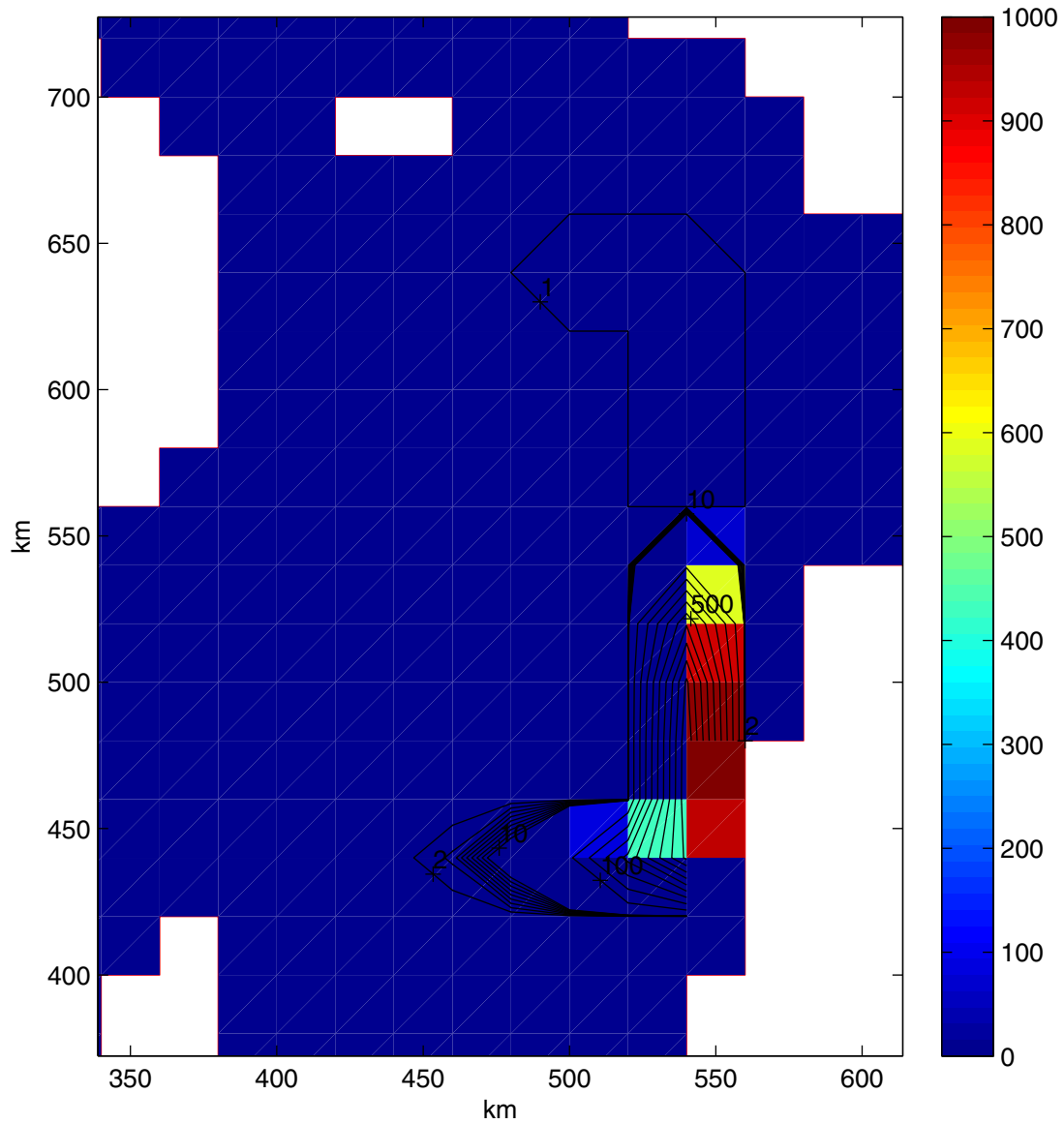


Figura 6.7: Resultados de una simulación de transporte advectivo aplicando el esquema anterior MSOU 2D para limitación de flujo. Inicialmente se tiene una franja de 100 km con una densidad de  $1000 \text{ Bq m}^{-3}$  (mancha formada por cinco cuadros de color rojo) en la zona noroeste del Baltic Proper. En el mapa se muestra la densidad ( $\text{Bq m}^{-3}$ ) tras tres meses de transporte a un ritmo de  $4 \text{ cm s}^{-1}$  siguiendo un circuito bidimensional (color blanco), como se muestra en la figura 6.6, con  $\Delta x = \Delta y = 20 \text{ km}$ ,  $\Delta t = 24 \text{ h}$ .

Se han hecho simulaciones para periodos superiores a los tres meses, observándose bastante estabilización en el perfil de la función escalar que es transportada advectivamente experimentando un movimiento casi rígido, con una difusión numérica casi despreciable a partir de cierto instante relativamente cercano al inicial.

#### 1.4 Método MSOU 3D.

Vamos a generalizar el método de dos a tres dimensiones. Extendemos el esquema anterior para obtener la función densidad  $\varrho_{ijk}^*$  en el instante posterior  $t + \Delta t$ :

$$\begin{aligned} \varrho_{ijk}^* = & \varrho_{ijk} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{x,i-1,j,k}^c - f_{x,ij,k}^c) + \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta y} (f_{y,i,j-1,k}^c - f_{y,ijk}^c) + \frac{\Delta t}{\Delta z} (f_{z,i,j,k-1}^c - f_{z,ijk}^c). \end{aligned} \quad (6.37)$$

El flujo paralelo a OZ en la posición  $[i, j, k + 1/2]$  es

$$f_{z,ijk}^c = \begin{cases} f_{z,ijk}^{c+} & \text{si } w_{ijk} > 0 \\ f_{z,ijk}^{c-} & \text{si } w_{i,j,k+1} < 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \quad (6.38)$$

donde, haciendo otra vez uso de los nudos punteros, las expresiones de los flujos verticales en cada sentido  $f_{z,ijk}^{c+}$  y  $f_{z,ijk}^{c-}$  se computan como sigue:

$$f_{z,ijk}^{c+} = \varrho_{y,ijk}^+ w_{ij} = \left[ \varrho_{ijk} + \Psi \left( \varrho_{ijk}^P, \varrho_{ijk}, \varrho_{i,j,k+1} \right) \right] w_{ijk}, \quad (6.39)$$

$$f_{z,ijk}^{c-} = \varrho_{z,i,j,k+1}^- w_{i,j,k+1} = \left[ \varrho_{i,j,k+1} + \Psi \left( \varrho_{i,j,k+1}^P, \varrho_{i,j,k+1}, \varrho_{ijk} \right) \right] w_{i,j,k+1}. \quad (6.40)$$

#### • Extensión del método a casos con más de un nudo puntero

Todos los desarrollos anteriores son válidos bajo la hipótesis de un único nudo puntero  $[i, j, k]^P$  para cada celda  $[i, j, k]$ . Si se da el caso de que más de un nudo apunta hacia otro dado, lo que se propone a continuación para obtener  $\varrho_{ijk}^P$  es ponderar las densidades punteras  $\varrho_{ijk}^{P_n}$  mediante sus flujos apuntadores  $f_{ijk}^{P_n}$ , siendo  $n$  el índice para cada nudo puntero respecto a  $[i, j, k]^P$ , que tendrá un máximo de tres,  $n_{max} = 3$ .

Habrà a lo sumo un flujo apuntador para cada una de las direcciones del espacio, y asignaremos el índice  $n = 1$  a la dirección OX,  $n = 2$  a la dirección OY, y el  $n = 3$  a la dirección OZ.

Así, la fórmula para el cálculo de  $\varrho_{ijk}^P$  será la siguiente:

$$\varrho_{ijk}^P = \frac{\frac{\varrho_{ijk}^{P_1} |f_{ijk}^{P_1}|}{\Delta x} + \frac{\varrho_{ijk}^{P_2} |f_{ijk}^{P_2}|}{\Delta y} + \frac{\varrho_{ijk}^{P_3} |f_{ijk}^{P_3}|}{\Delta z}}{\frac{|f_{ijk}^{P_1}|}{\Delta x} + \frac{|f_{ijk}^{P_2}|}{\Delta y} + \frac{|f_{ijk}^{P_3}|}{\Delta z}} \quad (6.41)$$

expresión que nos permite extender la corrección numérica a sistemas más generales.

En futuras versiones de este trabajo se aplicará esta metodología al Mar Báltico en las mismas condiciones de flujo tridimensional que se está usando para el Método de Monte Carlo para poder hacer estudios de comparación

Método Monte Carlo 3D      *versus*      Método Diferencias Finitas + MSOU 3D

y poder analizar en detalle las ventajas e inconvenientes de ambos métodos (MMC 3D y MDF + MSOU 3D) en función de la anchura de ventana del filtro temporal de corrientes.

## 2. INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE MONTE CARLO

El modelo numérico fundamental de dispersión que vamos a plantear y desarrollar en esta tesis es un modelo lagrangiano que trabaja con un número discreto de partículas, cada una de ellas equivalente a un cierto número de unidades (kg, moles, Bq, átomos) de la sustancia material que se va a estudiar.

Se seguirá la evolución de cada partícula teniendo en cuenta que está sometida a un campo medio de velocidades más una difusión tridimensional que se computará mediante el Método de Monte Carlo. La densidad de partículas se calcula al final de cada proceso de simulación, aunque también puede computarse para instantes intermedios mediante almacenamiento en memoria.

Las principales ventajas de este modelo de dispersión lagrangiana son:

- (a) Los buenos resultados obtenidos para problemas con altos gradientes en la función densidad.
- (b) La eliminación del problema de la difusión numérica tan costosa cuando se usa un método euleriano como el método de diferencias finitas.

Esta aproximación permite analizar y hacer predicciones sobre la evolución de partículas pasivas [141, 128, 174, 51] tras accidentes o emisiones deliberadas de contaminantes de diversa naturaleza como radionúclidos, contaminantes químicos, o manchas de petróleo, entre otros problemas.

Un esquema básico de los desplazamientos de cada partícula viene dado por

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\Delta t \quad (6.42)$$

donde

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_m(t) + \vec{v}'(t) \quad (6.43)$$

siendo  $\vec{v}_m(t)$  la velocidad media –o residual– que sale del modelo de circulación evaluado en ese instante y punto del sistema, y  $\vec{v}'(t)$  la velocidad de difusión que se simulará mediante el Método de Monte Carlo.

Se trata de un esquema cinemático de primer orden, que resultará suficiente, pues el uso de un esquema de segundo orden no mejora sustancialmente los resultados [31].

Las componentes cartesianas de la velocidad de difusión,  $\vec{v}' = [v'_x, v'_y, v'_z]$ , van a generarse utilizando una distribución aleatoria rectangular que para las velocidades horizontales alcanza un máximo [85] dado por la expresiones

$$|v'_x|_{max} = |v'_y|_{max} = \sqrt{\frac{6K_h}{\Delta t_h}} \quad (6.44)$$

donde  $K_h$  es el coeficiente de difusión horizontal y  $\Delta t_h$  su paso de tiempo en cada computación.

Las componentes horizontales [187, 189] se calculan por separado del siguiente modo

$$v'_x = \sqrt{\frac{6K_h}{\Delta t_h}} \text{RAN}_x \quad v'_y = \sqrt{\frac{6K_h}{\Delta t_h}} \text{RAN}_y \quad (6.45)$$

donde  $\{\text{RAN}_x, \text{RAN}_y\}$  son números aleatorios entre  $-1$  y  $1$  que se generan al efecto mediante un código MATLAB. Análogamente se procederá con la velocidad vertical  $v'_z$

$$|v'_z|_{max} = \sqrt{\frac{2K_v}{\Delta t_v}} \quad v'_z = \sqrt{\frac{2K_v}{\Delta t_v}} \text{RAN}_z, \quad (6.46)$$

donde  $K_v$  es el coeficiente de difusión vertical,  $\Delta t_v$  su paso de tiempo, y  $\text{RAN}_z$  son números aleatorios entre  $-1$  y  $1$ .

En general, los pasos de tiempo que se utilizarán para los procesos verticales y horizontales serán distintos entre sí.

### 3. CALIBRACIÓN Y APLICACIONES DEL MÉTODO DE MONTE CARLO

#### 3.1 Problema unidimensional

Como solución de prueba para la calibración se propone (Toscano et al., 2005) la difusión de una función escalón de altura  $h$  y densidad lineal  $N/h$  siendo  $N$  el número total de partículas. Denominemos  $A(x, t)$  a la función densidad que inicialmente es:

$$A(x, 0) = A_0, |x| \leq \frac{h}{2}; \quad A(x, 0) = 0, |x| \geq \frac{h}{2}. \quad (6.47)$$

Conocida la constante de difusión  $K_x$ , la solución exacta se obtiene por integración directa de la solución para una fuente puntual infinitesimal  $dN$ :

$$A(x, t) = \frac{A_0}{2} \left[ \text{erf} \left( \frac{x + h/2}{\sqrt{2}\sigma_x(t)} \right) - \text{erf} \left( \frac{x - h/2}{\sqrt{2}\sigma_x(t)} \right) \right], \quad (6.48)$$

donde,

$$\sigma_x(t) = \sqrt{2K_x t}, \quad \text{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx. \quad (6.49)$$

Si el sistema además se encuentra sometido a advección constante

$$\vec{v}_M(x, t) = v \vec{u}_x, \quad v = \text{constante} \quad (6.50)$$

y definimos la coordenada  $x'$

$$x = x' + vt \quad (6.51)$$

la solución al problema será idéntica a la anterior por la equivalencia entre sistemas inerciales

$$A(x', t) = \frac{A_0}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x' + h/2}{\sqrt{2}\sigma_x(t)} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x' - h/2}{\sqrt{2}\sigma_x(t)} \right) \right], \quad (6.52)$$

donde,

$$\sigma_x(t) = \sqrt{2K_x t} \quad , \quad \operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx. \quad (6.53)$$

A continuación se muestra el resultado de una simulación unidimensional.

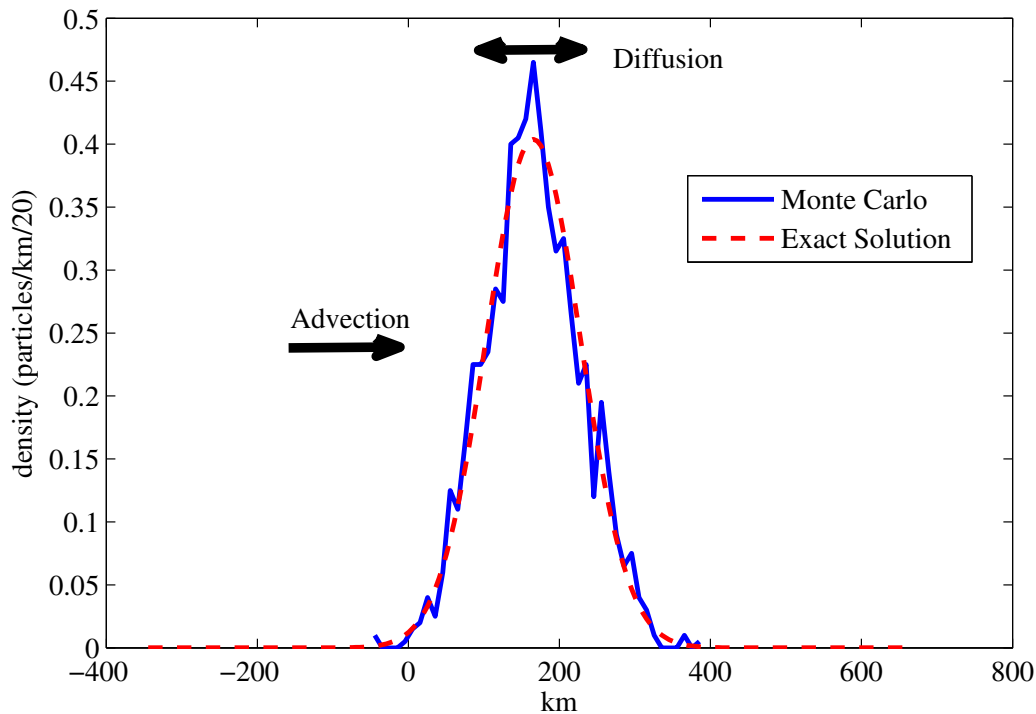


Figura 6.8: Simulación 1D de una función escalón con  $N = 10000$  partículas,  $h = 20$  km,  $\Delta t = 1$  h,  $K_x = 250 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $v = 2 \text{ cm s}^{-1}$ , 90 días de difusión.

Los parámetros físicos se han particularizado con valores dentro del rango posible en que se encuentran los sistemas que vamos a estudiar. Concretamente, podrían corresponder a condiciones de advección y difusión resultantes de hacer un filtrado espectral de ventana temporal ancha, del orden de una semana.

Las figura anterior, 6.8., representa la función escalar  $\rho(x)$  de partículas, en unas determinadas unidades, para cada celda  $x_i$  de tamaño  $h = 20$  km. Podemos calcular  $N_i$



que sería el número de partículas en cada celda  $i$  en función de  $\rho_i$ . Teniendo en cuenta las unidades presentadas arriba se llega a:

$$N_i = 400 \rho_i \quad (6.54)$$

Haciendo una estimación en las proximidades del pico

$$\rho_i \sim \frac{4}{10} \implies N_i \sim 160. \quad (6.55)$$

Notemos por  $\varepsilon_i$  a la función fluctuación relativa, en cada punto  $i$ :

$$\varepsilon_i \equiv \frac{\Delta N_i}{N_i} \quad (6.56)$$

Como sabemos que

$$\Delta N_i \sim \sqrt{N_i} \implies \varepsilon_i \sim \frac{1}{\sqrt{N_i}}, \quad (6.57)$$

sustituyendo lo anterior llegamos a

$$\varepsilon_i \sim \frac{1}{\sqrt{160}} \sim \frac{8}{100} \quad (6.58)$$

que es lo que cualitativamente vemos en la figura 6.8.

Resultados similares a éste se han publicado (Toscano et al., 2007) acompañados de una comparación entre el método de Monte Carlo y el Método de Diferencias Finitas.

En la siguiente simulación se ha utilizado un número mucho mayor de partículas, treinta y seis veces mayor que el anterior,  $N = 3.6 \times 10^5$ .

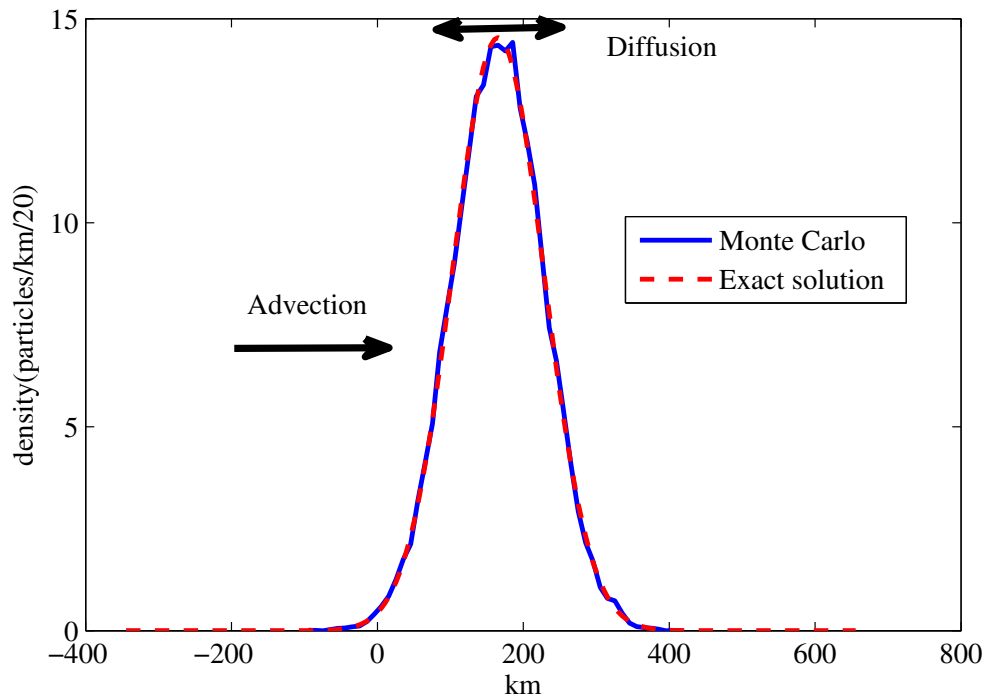


Figura 6.9: Simulación 1D de una función escalón con  $N = 36 \times 10^4$  partículas,  $h = 20$  km,  $\Delta t = 1$  h,  $K_x = 250 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $v = 2 \text{ cm s}^{-1}$ , 90 días de difusión.

Haciendo una estimación en las proximidades del pico

$$\rho_i \sim 15 \implies N_i \sim 6000, \quad (6.59)$$

y sustituyendo lo anterior llegamos a

$$\varepsilon_i \sim \frac{1}{\sqrt{6000}} \sim \frac{13}{1000} \quad (6.60)$$

una sexta parte de las fluctuaciones anteriores, que es lo que se esperaba y lo que cualitativamente apreciamos en la figura 6.9. Los cálculos con la función error han sido muy sencillos ya que ésta forma parte de las funciones de la librería del código MATLAB.

### 3.2 Problema bidimensional

Análogamente, para la calibración de este problema se ha utilizado la difusión de una mancha prismática inicial de sección cuadrada ( $h$ ), dada por:

$$A(x, y, 0) = A_0, \quad \left(|x| \leq \frac{h}{2}\right) \cap \left(|y| \leq \frac{h}{2}\right) \quad (6.61)$$

$$A(x, y, 0) = 0, \quad \left(|x| > \frac{h}{2}\right) \cup \left(|y| > \frac{h}{2}\right). \quad (6.62)$$

La solución exacta a este problema es la siguiente:

$$A(x, y, t) = \frac{A_0}{4} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x + h/2}{\sqrt{2}\sigma_x(t)} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x - h/2}{\sqrt{2}\sigma_x(t)} \right) \right] \times \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{y + h/2}{\sqrt{2}\sigma_y(t)} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{y - h/2}{\sqrt{2}\sigma_y(t)} \right) \right] \quad (6.63)$$

donde,

$$\sigma_x(t) = \sqrt{2K_x t}, \quad \sigma_y(t) = \sqrt{2K_y t}, \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx. \quad (6.64)$$

La calibración ha sido satisfactoria, cuyos resultados y las gráficas 2D pueden consultarse en una publicación del doctorando [192] dedicada parcialmente a esta parte del modelo.

### 3.3. Problema tridimensional

En las aplicaciones que vienen a continuación se pretenden poner de manifiesto el papel de tres de las partes más importantes de nuestra modelización tridimensional:

- (a) La velocidad del fluido en la superficie del océano.
- (b) El perfil vertical de velocidades.
- (c) La difusión vertical.

Son tres partes del problema tridimensional, pero también, la cooperación entre ellas es lo que gobierna el proceso de dispersión global y efectiva en las escalas superiores del problema tanto a nivel espacial como temporal. Lo que queda de este capítulo es una primera aproximación al problema; aquí trabajaremos con unos parámetros de corrientes y difusión basados en la realidad, pero idealizados, para que queda más clara la contribución de cada parte y cómo se unen entre ellas en el problema general del transporte oceánico. En la primera parte del capítulo 7, se da un paso más, y se ponen sobre la mesa estas herramientas para ser validadas con un problema radioecológico ocurrido en el Golfo de

Finlandia varias semanas después del accidente de Chernobyl, usando nuestro modelo de transporte, cuya columna vertebral está formada por las tres partes del problema de tridimensional ya comentadas: velocidad del fluido en la superficie, perfil vertical de velocidades y difusividad vertical; esta aplicación podrá reproducir la deriva hacia el SO de esta importante mancha radiactiva y su posterior detención, registrándose unos tiempos de evolución y unas velocidades de desplazamiento que validan nuestro modelo tridimensional, habida cuenta de que la debilidad de alguna de estas tres partes haría que nuestro modelo se desviara de lo que señalan las medidas experimentales.

### 3.3.1 Resolución general de un problema tridimensional

Los cálculos tridimensionales que vamos a hacer ahora son para situaciones meteorológicas ideales con el objeto de que los análisis sean lo más ilustrativos posible.

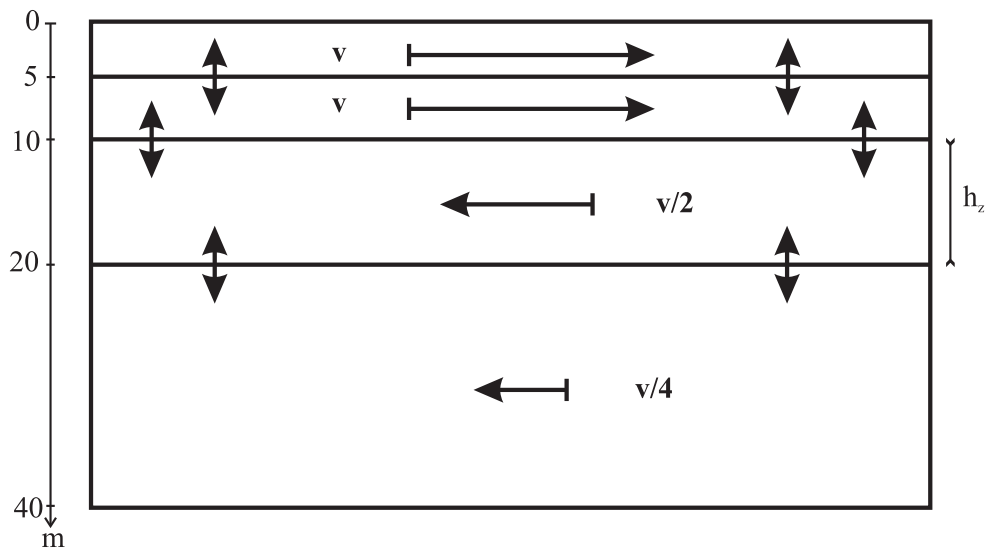


Figura 6.10: Perfil vertical de las velocidades advectivas horizontales para las cuatro capas superiores. La velocidad advectiva media integrada en las cuatro capas es nula.

Trabajaremos en el Mar Báltico con el sistema de corrientes medias  $\vec{v}_m(x, y, z)$  adaptado a la batimetría del sistema y con un perfil vertical de velocidades sencillo que puede definirse como una idealización de las corrientes estudiadas en la literatura [43, 80], que es parte del efecto "cinta transportadora" del que habla Leppäranta en su obra recopilatoria [115] sobre el Báltico. Estos estudios han servido para implementar la circulación mediante un campo 3D de corrientes estacionarias publicado en [194] e ilustrado en la figura 6.10.

Cada capa tiene un contorno por cada uno de sus extremos, donde se introduce la corriente vertical solución de la ecuación de continuidad.

Se ha introducido un número de partículas  $N = 2.5 \times 10^5$ , en una parcela cuadrada de dimensiones  $20 \text{ km} \times 20 \text{ km}$ , situada en la superficie del Báltico Sur. Las condiciones físicas han sido muy ideales, para ilustrar un problema con baja difusión y así poder resaltar el papel de la advección.

El viento sopla del sur y constantemente, de modo que  $U_a = 5 \text{ m s}^{-1}$ , y el coeficiente de difusión es pequeño,  $K_h = 40 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , igual que el vertical,  $K_v = 4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . Como valor de las corrientes en superficie se ha tomado un 2 % [143] de la velocidad del viento a diez metros de altura. A continuación se muestra una representación lagrangiana del sistema.

Las partículas han sido transportadas durante 90 días, y los tiempos de paso de la computación para la advección y las difusiones horizontal y vertical han sido respectivamente

$$\Delta t_m = \Delta t_h = \Delta t_v = 6 \text{ h}. \quad (6.65)$$

Se han representado como *Up particles* y en color azul, las partículas que permanecen en la capa 1 (0–5 m), y en rojo las que están por debajo de  $z = -60 \text{ m}$ , cota correspondiente con la picnoclina de las zonas estudiadas (Báltico Central y Sur, y Golfo de Finlandia). En la figura no se aprecia, pero incluso en la zona de cruces rojas, la densidad de cruces azules es mayor; de hecho es unas cinco veces mayor. Este efecto es debido a que primero se han imprimido las azules, quedando éstas tapadas por las rojas de color más vivo.

El flujo a través de la picnoclina es coherente con el adecuado para mantener los niveles de salinidad existentes a cada lado de dicha frontera que propone el modelo de Svansson [181]. Según este trabajo, un 2.5 por ciento del fluido superior atraviesa la línea divisoria cada año. Nuestros cálculos arrojan las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} N = 25 \times 10^4 \quad , \quad N_{down} = 4719 \quad , \quad N_{up} = 245281 &\implies \\ \implies \Phi_{u \rightarrow d} = \frac{2}{100} \text{ year}^{-1} & \end{aligned} \quad (6.66)$$

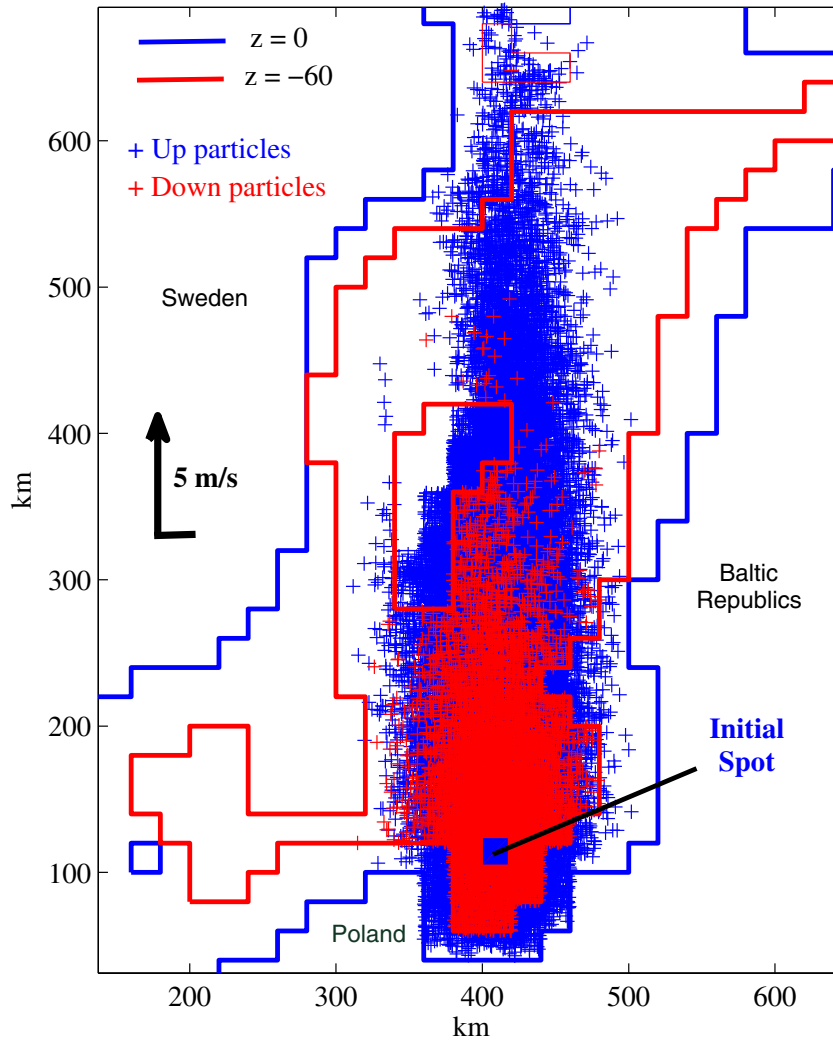


Figura 6.11: Patrón de dispersión 3D de una hipotética mancha inicialmente en superficie tras 90 días de transporte forzado por vientos del sur de intensidad  $5 \text{ m s}^{-1}$ . El número de partículas trazadoras  $N = 2.5 \times 10^5$ ,  $K_v = 4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $K_h = 40 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . La figura representa partículas *Up* (0–5 m) y *Down* (debajo de 60 m) transportadas bajo la piconclina.

Puesto que las partículas parten de la capa superior (0–5 m) y se tarda un tiempo en establecerse el flujo estacionario a lo largo de la línea, se puede afirmar que este aspecto del modelo es reproducido correctamente. Esto se comprueba haciendo una simulación de dos años pasamos del 2 al 4.5 por ciento.

El tiempo de CPU ha sido de 7 minutos, en un ordenador personal estándar:

TABLA 6.1: Características del PC usado en los cálculos

Intel (R), Core(TM)2, Duo CPU
Velocidad de procesador: 2.26 GHz
Memoria RAM: 2.93 GB

Transcurridos los minutos de la simulación, el autor de este manuscrito encontró curiosa la estructura de la figura en la pantalla de la computadora por su parecido con la imagen de una vela de cera encendida, ¡qué casualidad!, pensó. Luego empezó a ver que el parecido no era casual sino causal, ya que básicamente y salvando las diferencias, ambos sistemas son fluidos sometidos a alta convección y baja difusión.

• **Curiosidad** sobre la forma de **llama** de las partículas dispersadas y **otras curiosidades**

El problema de la combustión de la vela no un problema simple ya que la combustión en general es uno de los campos más complejos de la Mecánica de Fluidos. Dentro del problema de la combustión existe una revista que se llama –valga la redundancia– *Combustion and Flame*, del grupo editorial *Elsevier* y cono un índice de impacto  $IF = 2.923$  en 2009. Se ha incluido como referencia [116] el primer artículo del profesor Liñán como autor principal en esta revista. Amable Liñán es una autoridad mundial en esta materia y gran exponente de mecánica de fluidos de nuestro país. La escritura de este texto casi coincide en el tiempo con el merecido homenaje por su jubilación y con el fallecimiento de uno de sus alumnos predilectos, profesor y compañero singular donde los haya, Antonio Barrero Ripoll [14] cuya obra ha sido ejemplar para los investigadores jóvenes que le hemos conocido. Sirvan estas líneas, aunque fuera del ortodoxo apartado de agradecimientos de la tesis doctoral, de recuerdo y reconocimiento a su labor científica extraordinaria. Esta anécdota de las casualidades fue contada por el autor de esta memoria, mechero en mano, en una presentación oral [193] que sobre este tema tuvo lugar en el congreso ICEFA IV, celebrado en la Universidad de Cambridge del 4 al 7 de julio de 2010. Esta universidad fue, entre otras cosas, pionera en mecánica de fluidos en general, y del problema de la convección en particular, teniendo siempre una gran vocación experimental incluso desde épocas previas a los Laboratorios Cavendish, por lo que hubiera sido incoherente no ilustrar los espesos cálculos de dicha presentación mediante un sencillo experimento.

Siguiendo el análisis de los resultados, vamos a ilustrar a continuación el comportamiento del sistema como canal. Se hace una representación unidimensional (figura 6.12)

de la distribución de partículas en la dirección sur–norte ( $OY$ ), integrando adecuadamente en la dirección oeste–este ( $OX$ ) para la capa 1 (0–5 m). Recordemos que las corrientes advectivas inducidas por viento del sur avanzan hacia el norte en las capas superiores y retornan hacia el sur en las capas inferiores hasta cerrarse. Podemos decir resumidamente que existe un cierto efecto "cinta transportadora" [115] cuya consecuencia neta debido a la baja difusión vertical es un ligero arrastre lento hacia el norte de unos 100 kilómetros además de la lógica difusión que ha transformado la distribución escalón inicial en la gráfica que muestra la figura 6.12.

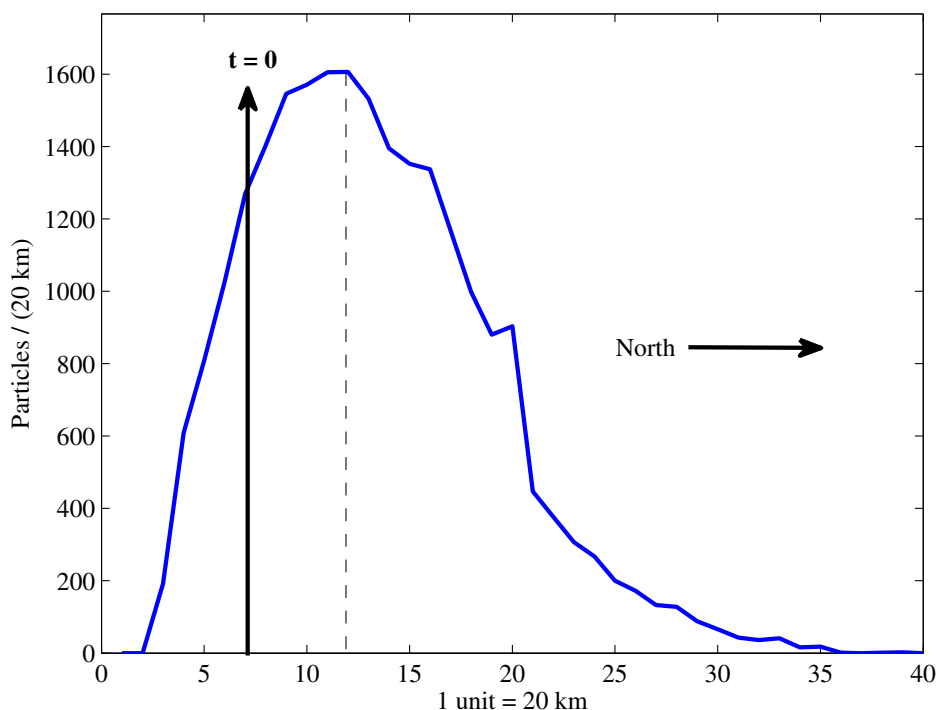


Figura 6.12: Función densidad, al cabo de 90 días de transporte, integrada en la dirección oeste-este para la primera capa del sistema, 0–5 m. El máximo se desplazó hacia el norte inducido por vientos del sur de intensidad  $5 \text{ m s}^{-1}$ .

Puede estimarse el coeficiente de difusión horizontal del problema reducido unidimensional equivalente *Sur-Norte*. Retomemos la difusión 1D de una función escalón ( $N$  partículas en una anchura  $h$ ):

$$A(x, t) = \frac{A_0}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x + h/2}{\sqrt{2}\sigma_r(t)} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x - h/2}{\sqrt{2}\sigma_r(t)} \right) \right], \quad (6.67)$$



donde,

$$\sigma_r(t) = \sqrt{2K_r t} \quad , \quad \text{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx, \quad (6.68)$$

y busquemos la relación entre la altura del máximo  $A_m$  y la altura inicial de la función escalón:

$$\begin{aligned} A_m = A(x=0, t) &= \frac{A_0}{2} \left[ \text{erf} \left( \frac{h/2}{\sqrt{2}\sigma_r(t)} \right) - \text{erf} \left( \frac{-h/2}{\sqrt{2}\sigma_r(t)} \right) \right] = \\ &= \text{\textit{imparidad funcional}} = A_0 \text{erf} \left( \frac{h/2}{\sqrt{2}\sigma_r(t)} \right). \end{aligned} \quad (6.69)$$

Puesto que  $\frac{h}{2} \ll \sqrt{2}\sigma_r \sim$  anchura de la distribución, y

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \dots \right), \quad (6.70)$$

$$\frac{A_m}{A_0} \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{h/2}{\sqrt{2}\sigma_r(t)} = \frac{h}{\sqrt{4\pi K_r t}}, \quad (6.71)$$

calculando  $A_m$  tras sumar para todas las capas, y sustituyendo

$$A_0 = 250000/h \quad , \quad A_m \sim 25000/h \quad , \quad t = 3 \text{ meses} \quad , \quad h = 20000 \text{ m}, \quad (6.72)$$

$$K_r \sim 1600 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}. \quad (6.73)$$

La solución de la función densidad que hemos usado es estrictamente válida para transporte libre de contornos, pero dado que es una estimación y que la densidad en la frontera es prácticamente nula podemos decir que es una aproximación más que suficiente.

### 3.3.2 Análisis del efecto de la cizalladura

Siguiendo con el este problema, vamos a ver cuestiones de la dispersión global de la mancha. Por concretar, se comprobará cómo tanto el desplazamiento de la mancha como su amplitud varían sensiblemente con la difusividad vertical. También se comprobará el papel importante que juega la variación de las velocidades horizontales en la columna de líquido (efecto de cizalladura vertical).

En la siguiente simulación, se mantienen las variables físicas de la gráfica anterior (6.12) y bajamos el valor de  $K_v$ . Para tres valores de  $K_v = \{4.0, 1.0, 0.4\} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . se representa la función escalar tanto en la capa superior (0–5 m) como en la inferior (60 m–bottom). Es clara la tendencia del pico a desplazarse más rápidamente aprovechando la energía del viento y el menor acoplamiento energético con las capas inferiores, fruto de una difusión vertical menor.

Hay un detalle accidental en la gráfica provocado por la principal isla del Báltico (isla de Gotland) que ocupa una posición central ( $\sim [300, 400] \text{ km} = [15, 20] \text{ units}$ ) y que produce un pequeño efecto acumulador por la disminución la sección libre para el transporte no acompañada de grandes cambios en las condiciones cinemáticas del problema. Esto afecta sobre todo en la aparición de un máximo relativo en la curva de  $K_v = 0.4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  cerca de la abscisa de las veinte unidades.

Hay otro efecto acumulador producido por el estrechamiento que se crea desde antes de llegar a las islas ( $\sim [500, 700] \text{ km} = [25, 35] \text{ units}$ ) del Archipiélago (Aland Islands) que dan entrada al Golfo de Botnia. Los dos efectos más notables de esta condición de contorno sobre las curvas anteriores son: un estancamiento en la caída de la curva de  $K_v = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  y una amplificación del máximo absoluto de la curva de  $K_v = 0.4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ .

En el análisis anterior hemos fijado el tiempo de transporte (un año) y variado los valores de la difusión vertical,  $K_v = \{4, 1, 0.4\} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ .

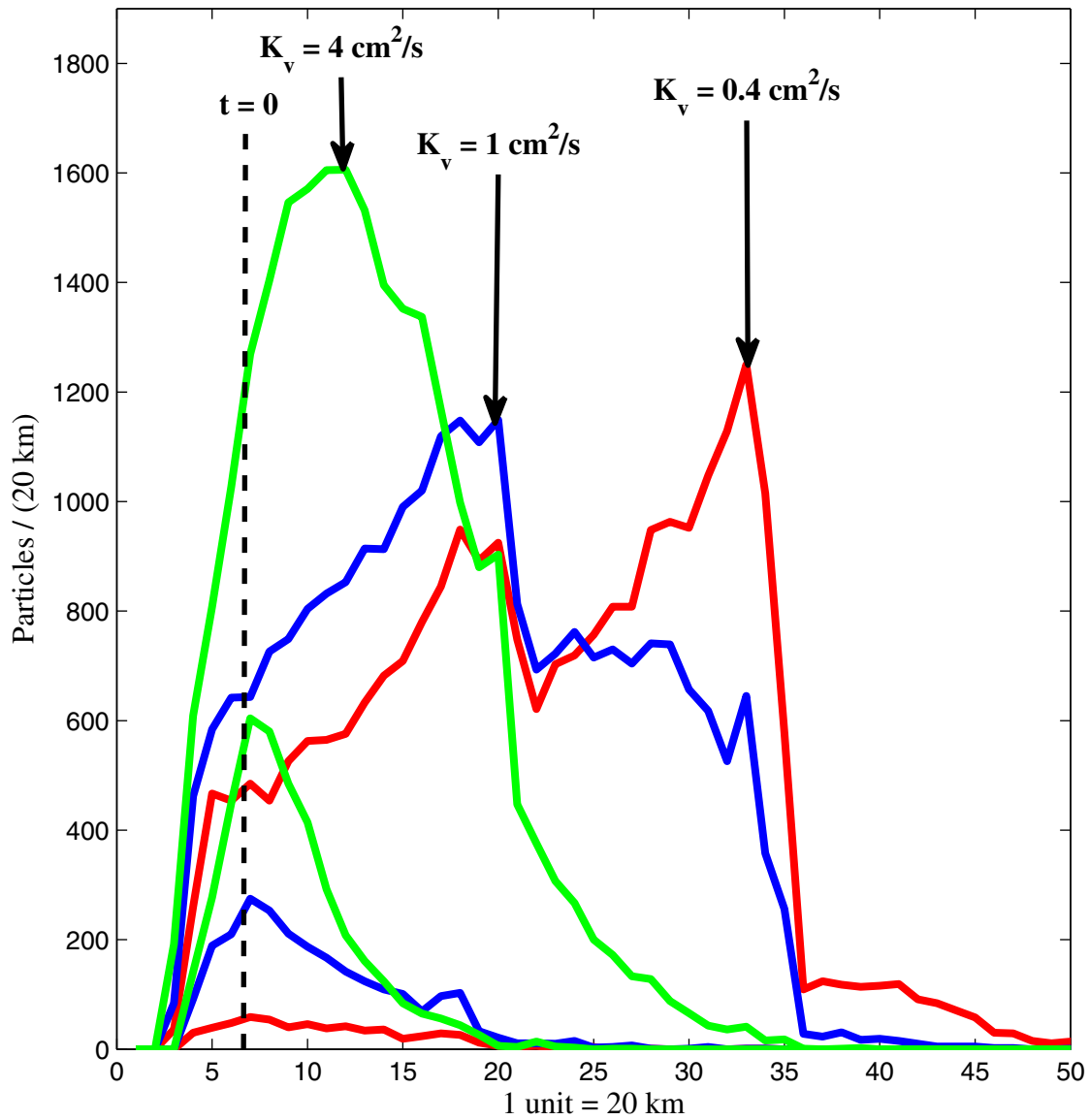


Figura 6.13: Perfiles horizontales de la mancha para diferentes valores de  $K_v$ , después de 90 días de transporte, bajo las condiciones físicas expuestas en el pie de la figura 6.11.

· **Interpretación** de las curvas mediante difusión efectiva por cizalladura (**Efecto Shear**).

Supongamos un esquema de corrientes inducidas por vientos del sur con el perfil de velocidades de la figura 6.10.

Analicemos unas condiciones transitorias previas a que se produzca la mezcla total en

las cuatro capas. Supongamos una situación ideal en que se han mezclado perfectamente las tres primeras capas (0–20 m) y que el número de partículas en la cuarta capa (20–40 m) es despreciable. Si llamamos  $m$  a la masa de las partículas de la capa superior, la velocidad del centroide de la distribución será

$$v_G = \frac{mv + mv + 2m \frac{(-v)}{2}}{4m} = \frac{v}{4}. \quad (6.74)$$

Si tenemos en cuenta que la velocidad advectiva que proporciona el modelo para la capa superficial es  $v = 10 \text{ cm s}^{-1}$  (el 2% de la velocidad del viento) y tenemos en cuenta que  $v_G = v_{peak}$ :

$$v_{peak} = v_G = \frac{v}{4} = 2.5 \text{ cm s}^{-1} \sim 2 \text{ km day}^{-1}. \quad (6.75)$$

Una cuestión interesante es que el centro de masas  $G$  (que ocupa la posición del pico) verá cómo las capas superiores (0–10 m) y la capa 3 (10–20 m) avanzan respectivamente con velocidades opuestas de módulo  $3v/4$

$$0 - 10 \text{ m} : +3v/4 \quad , \quad 10 - 20 \text{ m} : -3v/4. \quad (6.76)$$

Podemos también hacer una estimación del coeficiente de difusión  $K_{sh}$  asociado al efecto shear que actúa en las condiciones anteriores:

$$K_{sh} = v_{sh}^2 T_{sh}, \quad (6.77)$$

donde  $v_{sh}$  son las velocidades fluctuantes del proceso

$$v_{sh} \equiv v' = v - v_G = -(-v/2 - v_G) = v - v/4 = v/2 + v/4 = 3v/4 \quad (6.78)$$

y  $T_{sh}$  es el tiempo típico de las fluctuaciones.

Si el tiempo lo asociamos al proceso de mezcla vertical que cierra el circuito entre las dos franjas de idéntico espesor  $h_z$  (diez metros) coeficiente de difusión  $K_z$  y longitud típica  $l_z = h_z = 10 \text{ m}$ ,

$$T_{sh} = \frac{l_z^2}{K_z} \quad (6.79)$$

y operamos

$$K_{sh} = v_{sh}^2 \frac{l_z^2}{K_z} = \frac{9}{16} \frac{v^2 l_z^2}{K_z} = \frac{9}{16} \frac{v^2 h_z^2}{K_z}. \quad (6.80)$$

Veamos ahora cómo es de certera esta aproximación expuesta sobre la estimación de  $K_{sh}$ . Para ello, vamos a compararla con la aproximación de la difusión  $K_r$  de una mancha bidimensional inicialmente prismática, cuyos cálculos efectuamos anteriormente entre (6.67) y (6.73). Sustituyendo:

$$v = 10 \text{ cm s}^{-1} \quad , \quad l_z = 10 \text{ m} \quad , \quad K_z = 4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \quad : \quad (6.81)$$

$$K_{sh} \sim 1400 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \sim K_r \sim 1600 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (6.82)$$

valores bastantes cercanos a tenor de que ambos coeficientes de la difusión horizontal descansan sobre modelos conceptuales distintos, con sus limitaciones y dificultades, pero que felizmente aquí se ponen de acuerdo de una manera casi sorprendente.

Por otro lado, respecto de la dependencia  $K_{sh}$ , es interesante notar que:

$$K_{sh} \propto \frac{1}{K_z} \quad : \quad (6.83)$$

la constante de difusión por efecto Shear es inversamente proporcional al coeficiente de difusión vertical. Lo cual tiene sentido ya que a menor difusión vertical más tiempo tarda en cerrarse el circuito, siendo mayores sus dimensiones y el coeficiente de difusión asociado al efecto de cizalladura. Esto lo apreciamos en la figura 6.13, que mostraba una instantánea al cabo de tres meses de transporte, con tres curvas para diferentes coeficientes de difusión vertical; allí se aprecia que la distribución más estrecha (la de menor  $K_{sh}$ ) corresponde a la simulación de mayor  $K_z$ , concretamente  $K_z = 4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ .

### 3.3.3 Análisis de la deriva y detención de una mancha radiactiva

A continuación vamos a hacer lo contrario para discutir ciertas propiedades del transporte tridimensional en un fluido. Por tanto, vamos a fijar el coeficiente de difusión vertical  $K_v = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  y a variar el tiempo de transporte desde 10 hasta 120 días,

$$t = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 120\} \text{ días}, \quad (6.84)$$

manteniendo los parámetros físicos del problema anterior.

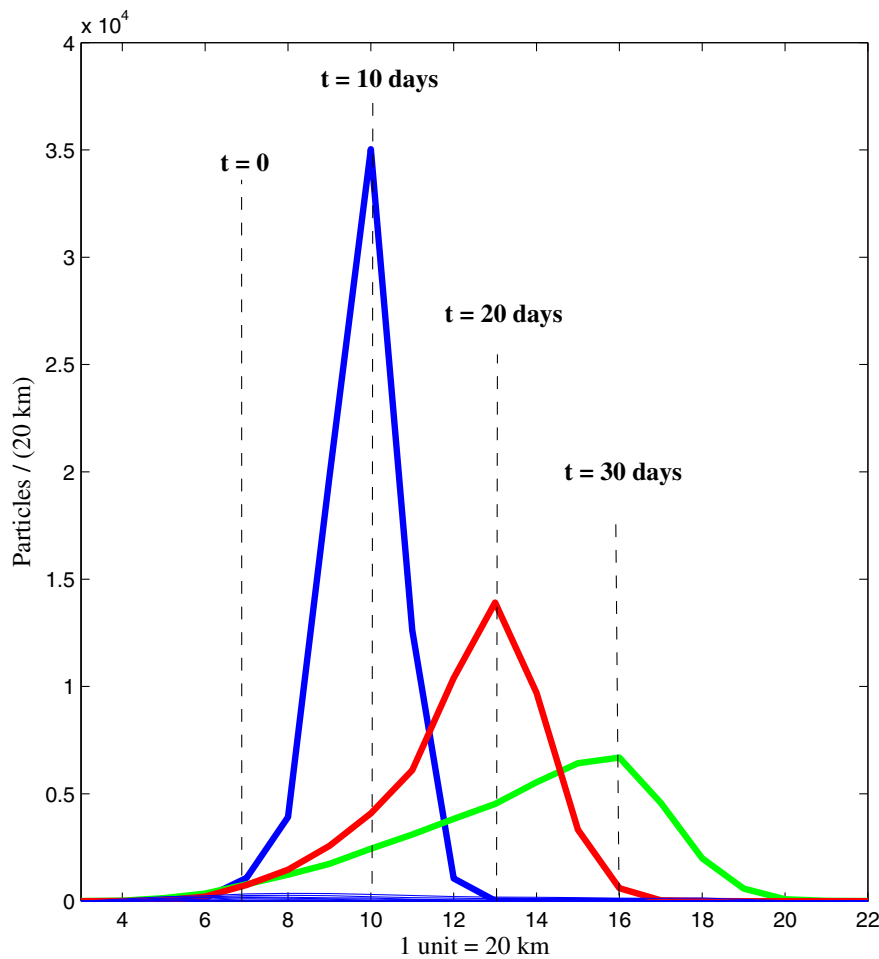


Figura 6.14: Dispersión de una mancha en las condiciones físicas descritas para  $K_v = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  después de 10, 20, y 30 días de transporte. En el eje OY se representa la densidad de partículas integradas en secciones oeste-este del sistema y en la primera capa (0-5 m).

Las tres primeras curvas (figura 6.14) corresponden a  $t = \{10, 20, 30\}$  días y a la capa superficial (0–5 m). Es destacable la casi perfecta linealidad del avance advectivo del pico ( $v_{peak} \sim 8 \text{ km day}^{-1}$ ) de la distribución acompañado por el ensanchamiento progresivo del mismo consecuencia de la difusión.

La siguiente representación (figura 6.15) muestra las curvas de distribución para los instantes siguientes

$$t = \{30, 40, 50, 60, 80, 120\} \text{ días.} \quad (6.85)$$

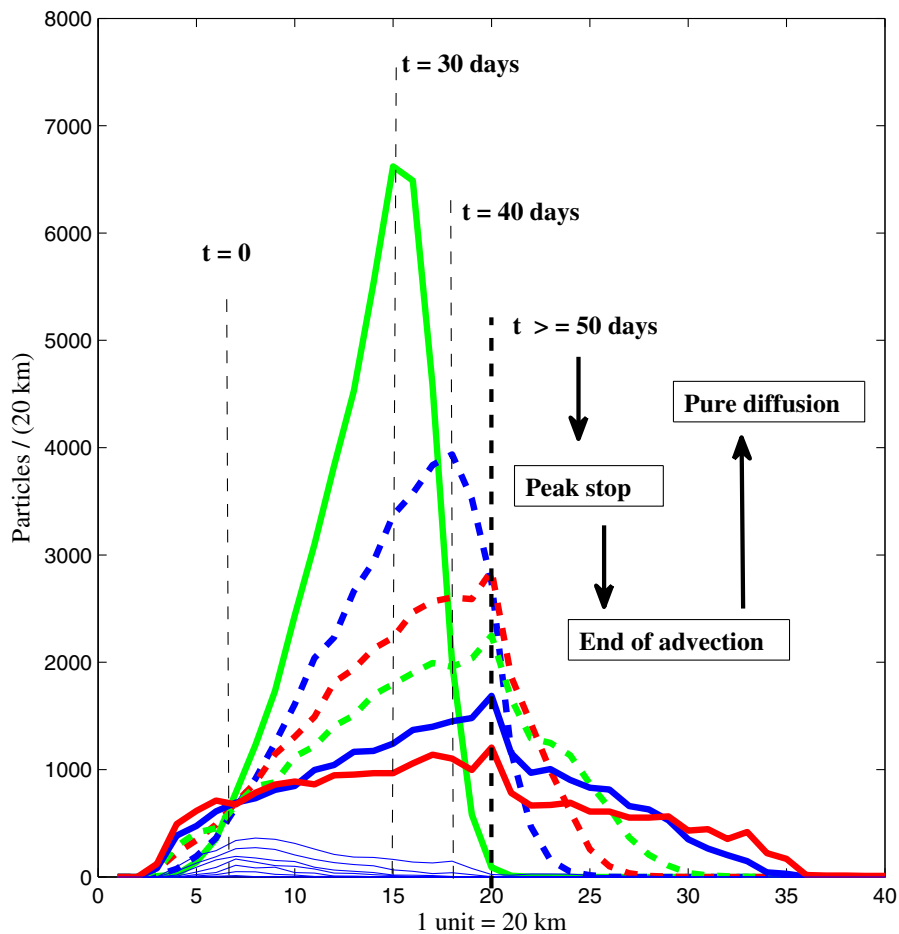


Figura 6.15: Dispersión de una mancha en las condiciones físicas descritas, para  $K_v = 1 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$  después los 30, 40, 50 días de transporte y algunas fechas posteriores. Se observa el fenómeno *parada* de la mancha y posterior difusión pura a partir del día 50.

El fenómeno más sobresaliente de esta simulación es la detención del proceso de advección a los 50 días de iniciado el proceso: la mancha "se para" y a partir de ese momento se difunde indefinidamente sin variar el centro de su distribución.

· Interpretación física de la **detención de la mancha** superficial oceánica

Recordemos que inicialmente la mancha está concentrada en la capa superficial. Resumidamente, la estructura de la advección inducida por vientos del sur consiste en corrientes superficiales hacia el norte en la franja 0–10 m y corrientes de retorno hacia el sur en la franja 10–40 m. El avance inicial del pico se produce porque al principio la mayoría de las partículas se encuentra en la zona con corrientes favorecidas por el viento. Una vez que se produce la mezcla vertical en la franja 0–40 m ya tendremos tantas partículas viajando en un sentido como en el contrario, lo que equivale a no tener advección y únicamente difusión.

El tiempo que tarda en detenerse la advección debe estar asociado con el tiempo de mezcla en la zona 0 – 40 m. Hagamos una estimación fluidomecánica:

$$K_z = \frac{l_z^2}{T_z} \quad (6.86)$$

donde  $l_z$  es una longitud típica del proceso de difusión vertical y  $T_z$  es el tiempo característico del fenómeno. Despejando el tiempo característico:

$$T_z = \frac{l_z^2}{K_z}. \quad (6.87)$$

Recordemos que  $K_v = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . Una vez que se mezcla la franja problema las partículas realizan órbitas en la dimensión vertical con diámetros que van desde los diez a los cuarenta metros, teniendo un peso relativo mayor los más pequeños ya que la advección es menos intensa a medida que aumenta la profundidad. Hecho este comentario la elección de  $l_z$  la podemos asociar al diámetro típico de la difusión vertical. Podemos tomar, por ejemplo,  $l_z = 20 \text{ m}$  y sustituir en la expresión anterior,

$$T_z \sim 4 \times 10^6 \text{ s} \sim 46 \text{ días}, \quad (6.88)$$

con la suerte de que llegamos a un resultado absolutamente coherente con el tiempo característico del fenómeno descrito en la última simulación (50 días). Por tanto, parece



acertada la interpretación que hacíamos antes de ligar la detención del fenómeno advectivo con la terminación del proceso de mezcla en la capa del mismo nombre.

Las condiciones físicas que hemos impuesto para las simulaciones son realmente ideales con objeto de analizar con mayor claridad los procesos físicos que tienen lugar. Un coeficiente de difusión vertical  $K_v = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  se da en condiciones de muy alta estabilidad vertical, como ocurre en determinados momentos del verano. El coeficiente de difusión horizontal elegido también ha sido pequeño por motivos de claridad, igual que la constancia prolongada en el tiempo de la intensidad y del sentido del viento.

# Capítulo 7

## Modelo Lagrangiano de Transporte Conservativo

### 0. INTRODUCCIÓN GENERAL

Este capítulo está dividido en cinco partes. Se inicia con el apartado que nos ocupa, seguido de un segundo de tipo metodológico dedicado a la estructura de los vientos, con nuevos detalles de su tratamiento estadístico. Todo ello conduce al grueso de este capítulo que son las aplicaciones y que se describen brevemente a continuación. La metodología numérica será lagrangiana por todas las razones expuestas en el capítulo 6.

- (a) **Aplicación primera:** Circulación HD–C3D (8 vientos) y Golfo de Finlandia.

Se trata de la aplicación [194] del método a la primera mancha radiactiva en el océano posterior al accidente de Chernobyl (finales abril de 1986) de la que se tiene constancia experimental. Según la información experimental disponible, la mancha fue a la deriva por el Golfo de Finlandia desde junio hasta agosto de ese año. La circulación en este problema se implementará mediante una versión sencilla del modelo HD–C3D (8 vientos), con promedios mensuales de vientos del NE.

- (b) **Aplicación segunda:** Circulación HD–3D (corrientes anuales) y Mar Báltico.

Es una aplicación de esta tesis doctoral a todo el Mar Báltico, validando con datos de distribución de  $^{137}\text{Cs}$  para el periodo que va de octubre de 1986 hasta agosto de 1987. Soluciones previas del mismo autor [184, 187, 189, 191] han sido publicadas. Inicialmente, hay dos manchas principales en el sistema, una en la zona de Esto-

colmo y otra en el Golfo de Finlandia, que es la misma de la aplicación primera, dos meses después del final de la simulación. Ambas manchas tuvieron una fuente fundamentalmente atmosférica. La circulación va a ser tratada mediante el modelo HD-3D (circulación media anual).

(c) **Aplicación tercera:** Problema local.

Es una aplicación reciente [194] a un sistema local, el estuario del Río Guadalquivir, aprovechando la metodología ya validada en el Báltico y la publicación meses antes de medidas sobre el sistema con motivo de un estudio [159] en relación al dragado del río para su navegación, que han hecho posible la validación de una primera y sencilla versión de un modelo 1D del estuario para el transporte de sal. Esta aplicación supone cierto retorno a la región de Andalucía del conocimiento adquirido por el autor de esta memoria en sus investigaciones aplicadas al mar Báltico.

## 1. ESTADÍSTICA DE LOS VIENTOS EN EL MAR BÁLTICO Y SU MODELIZACIÓN

En el capítulo 3 de introducción a los procesos físicos del Mar Báltico se hizo una primera aproximación al problema del viento y su influencia en el sistema.

En esta parte de la tesis doctoral necesitamos más información de la estructura temporal de ese problema, por lo que a continuación daremos más detalles y formularemos un estadística básica del viento que nos dé la resolución necesaria para los estudios posteriores. La intensidad de los vientos es mayor lógicamente en invierno que verano, con valores típicos para el Báltico [115] de  $\{8, 6, 5, 7\} \text{ m s}^{-1}$  respectivamente en las estaciones de invierno, primavera, verano y otoño. El valor promedio anual se sitúa aproximadamente en  $U_a = 6 \text{ m s}^{-1}$ . Los valores estacionales anteriores son promedios para todas las direcciones de vientos; obviamente, la velocidad promedio para un determinado tipo de viento y estación puede variar respecto del valor global.

Un interesante estudio [173] muestra abundantes datos sobre cómo la forma de la rosa de los vientos (estudiada durante varias décadas) varía claramente según la intensidad de los vientos que representemos sobre ella.

La originalidad del estudio radica, según sus autores, en resaltar la importancia de la rosa de vientos diferencial. Hasta ese momento prácticamente sólo se había trabajado en la zona del Báltico con la rosa de los vientos global, sin separarla en componentes según

la intensidad de los vientos. Se diferencian los datos incluso por épocas del año. Algunas conclusiones de este estudio son las siguientes:

- (a) La rosa de los vientos para vientos débiles, por debajo del valor promedio ( $U_a < 6 \text{ m s}^{-1}$ ) es aproximadamente isótropa.
- (b) La rosa de los vientos global presenta un estructura bimodal con dos máximos: uno primario en la dirección SW y uno secundario en la dirección N. Ambos máximos están asociados respectivamente a dos situaciones meteorológicas distintas: borrasca o anticiclón en la zona de Islandia.
- (c) La rosa de los vientos para vientos moderados ( $6 \leq U_a < 10 \text{ m s}^{-1}$ ) o fuertes ( $U_a \geq 10 \text{ m s}^{-1}$ ) tiende a subir los máximos y bajar los mínimos.
- (d) El máximo principal tiende a acentuarse en el semestre octubre–marzo mientras que el secundario lo hace en el complementario, abril–septiembre.

Estos vientos presentan variaciones locales según la estación meteorológica en que se midan, aunque éstas no son grandes y más cuantitativas que cualitativas. Los datos que se muestran a continuación son de una estación (isla de Vilsandi, 1977–1991) de la costa este báltica cuyos datos son representativos de la zona Báltico Estricto y similares a los de otra de la zona central (isla de Gotland). Se presenta una tabla ilustrativa de la rosa de los vientos global, a partir de los datos de Soomere [173].

TABLA 7.1: Frecuencia global de vientos en el Mar Báltico

Vientos	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E
Frecuencia (%)	8	10	14	20	14	10	16	8	8

Se pueden usar también tablas diferenciales que tengan en cuenta la intensidad de los vientos y la época del año, como se verá en las siguientes tablas.

TABLA 7.2: Frecuencia de vientos moderados o fuertes ( $U_a \geq 6 \text{ m s}^{-1}$ ) en el Mar Báltico durante el semestre octubre–marzo.

Vientos	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E
Frecuencia (%)	3	9	21	27	17	5	15	3	3

Durante el periodo de primavera y verano ambos picos casi se igualan, si bien la distribución en torno al principal es más ancha.

TABLA 7.3: Frecuencia de vientos moderados o fuertes ( $U_a \geq 6 \text{ m s}^{-1}$ ) en el Mar Báltico durante el semestre abril–septiembre.

Vientos	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E
Frecuencia (%)	5	7	15	22	11	10	21	9	5

Las tablas de las rosas de vientos moderados y fuertes resultarán especialmente útiles en los algoritmos de generación de vientos, ya que son precisamente las velocidades por encima de la media las responsables de la mayoría de los episodios de resuspensión de materia en suspensión debidos a tensiones sobre el fondo marino superiores a los valores críticos.

Si partimos de un modelo de circulación media anual y queremos diseñar un modelo de mayor resolución temporal, podemos proponer, como primer paso, un modelo de circulación media mensual como el que vamos a describir ahora. Al tratarse de una circulación inducida por vientos, sería interesante tener en cuenta los vientos que dominan en el Báltico cada mes. Valga como ejemplo una gráfica (figura 7.1) que se muestra a continuación sobre los vientos dominantes por meses en el mar Báltico entre los años 1984 y 1988.

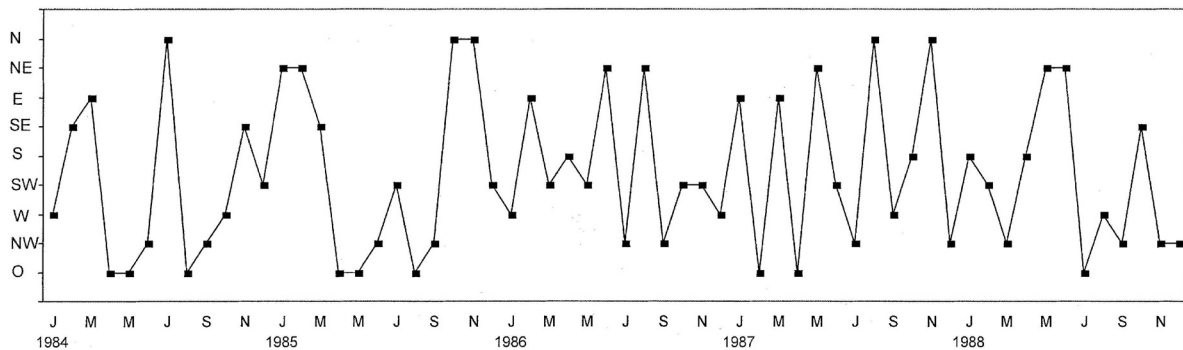


Figura 7.1: Gráfica de vientos dominantes por meses en el periodo 1984–88 en el Mar Báltico [153].

Las variaciones o fluctuaciones de las corrientes respecto a los promedios mensuales de los vientos (filtrados mensualmente) están gobernadas, como ya se vio en el capítulo 5, por la difusión horizontal de mesoescala, cuyas estimaciones según el esquema de Taylor [182] señalaban que

$$K_w \approx \frac{1}{12} v_0^2 T = \frac{1}{6} \sigma_v^2 T. \quad (7.1)$$

Si tomamos un intervalo típico de  $\sigma_v$  para estas fluctuaciones y tomamos un tiempo  $T$  característico de mesoescala, tendremos

$$\sigma_v \sim 3 - 7 \text{ cm s}^{-1} \quad , \quad T = 10 \text{ days}, \quad (7.2)$$

$$K_h^{meso} \sim 150 - 800 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}. \quad (7.3)$$

En el modelo HD-C3D (8 vientos) se va a trabajar con los siguientes valores de referencia para vientos, que variarán de intensidad según el semestre en que nos encontremos. Los vectores de viento corresponden con  $\vec{U}_a$  y para simplificar su expresión, sus componentes están expresadas en una base girada  $45^\circ$  a la izquierda respecto de la base natural de la rosa de los vientos. Recordemos que ése es el desfase entre  $\vec{U}_a \equiv \vec{U}_{10}$  y la corriente superficial  $\vec{v}_S$  en el modelo de Ekman simple. Según sea el origen de los vientos que producen  $\vec{U}_a$  así los notaremos:  $\vec{N}$  si es de origen norte,  $\vec{S}$  si es de origen sur; así para los ocho vientos principales. A continuación se proponen unas base de vientos medios según la dirección y el semestre del año al que pertenecen, de acuerdo con valores típicos presentados en la literatura [115].

(a) Base de vientos medios para otoño e invierno.

$$\begin{aligned} \vec{N} &= [0, -7.5] \text{ m s}^{-1} \quad , \quad \vec{NE} = [-5, -5] \text{ m s}^{-1} \\ \vec{E} &= [-7.5, 0] \text{ m s}^{-1} \quad , \quad \vec{SE} = [-5, +5] \text{ m s}^{-1} \\ \vec{S} &= [0, +7.5] \text{ m s}^{-1} \quad , \quad \vec{SW} = [+5, +5] \text{ m s}^{-1} \\ \vec{W} &= [+7.5, 0] \text{ m s}^{-1} \quad , \quad \vec{NW} = [+5, -5] \text{ m s}^{-1} \end{aligned} \quad (7.4)$$

(b) Base de vientos medios para la primavera y el verano.

$$\begin{aligned} \vec{N} &= [0, -5.5] \text{ m s}^{-1} \quad , \quad \vec{NE} = [-4, -4] \text{ m s}^{-1} \\ \vec{E} &= [-5.5, 0] \text{ m s}^{-1} \quad , \quad \vec{SE} = [-4, +4] \text{ m s}^{-1} \\ \vec{S} &= [0, +5.5] \text{ m s}^{-1} \quad , \quad \vec{SW} = [+4, +4] \text{ m s}^{-1} \\ \vec{W} &= [+5.5, 0] \text{ m s}^{-1} \quad , \quad \vec{NW} = [+4, -4] \text{ m s}^{-1} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Tras estudiar diferentes trabajos de la literatura [173, 127, 49, 43] sobre la frecuencia ( $f_{men}$ ) de un viento dominante dentro de un mes, se observa que esta oscila entre un 25 % y un 50 %, que expresada en tanto por uno será

$$\frac{1}{4} \leq f_{men}^{dom} \leq \frac{1}{2}, \quad (7.6)$$

valores relativamente altos si tenemos en cuenta que estamos trabajando sobre una rosa de 8 vientos. Por lo general, cuando un viento es dominante durante un mes, la contribución mensual de los vientos inversos a éste suele ser menor y del mismo orden que el resto de los vientos. Recordemos la estructura bimodal (pico mayor en SW y pico menor en N) de la rosa de vientos descrita en las tablas que concentra a la mayoría de los vientos en dos familias (W-SW-S y NW-N-NE) asociadas a sendos picos de la distribución. Hay que añadir, tras revisar diferentes series de vientos [127, 43, 49] que cuando un mes es dominado por una familia, el peso de la otra familia suele ser menor en frecuencia y/o en intensidad, con una influencia similar al resto de vientos no dominantes.

Definimos mes modelo como aquel en que la influencia de los vientos inversos respecto al dominante es pequeña y la rosa de los vientos puede construirse como superposición de dos, una isotropa con una frecuencia mensual

$$f_{men}^{iso} = 1 - f_{men}^{dom} \quad (7.7)$$

y una anisótropa con frecuencia  $f_{men}^{dom}$ . Los días de vientos dominantes serían de transporte fundamentalmente advectivo, mientras que el resto del mes estaría dominado por la difusión. El parámetro  $f_{men}^{dom}$  puede variarse en las simulaciones para ajustar lo mejor posible el modelo a las medidas experimentales. La circulación oceánica del modelo podemos generarla mediante meses meteorológicos modelo de 30 días, donde ocurren  $30 \times f_{men}^{dom}$  días dominantes y  $30 \times f_{men}^{iso}$  días isotropos, a partir del modelo HD-C3D descrito en el capítulo 4, que alimentaremos con los vientos descritos en (7.4) y (7.5).

Si el mes real que se va a modelar no se ajusta a las características de mes modelo, la opción más probable es que se trate de un mes con perfil bimodal, en cuyo caso trabajaríamos con tres frecuencias  $\{f_{men}^{dom,1}, f_{men}^{dom,2}, f_{men}^{iso}\}$ . En el resto de casos, se agruparía el mes en semanas, que es un periodo típico de permanencia de los vientos, y tendríamos

un mes fraccionado. El inconveniente del mes bimodal y del fraccionado es el coste computacional que suponen frente a las ventajas numéricas ya descritas del mes modelo.

## 2. APLICACIÓN PRIMERA: LA MANCHA INICIAL DEL GOLFO DE FINLANDIA

### 2.0. Introducción y condiciones iniciales

Se trata de una aplicación a la primera mancha radiactiva oceánica registrada tras el accidente nuclear de Chernobyl, días después del desastre nuclear.

A continuación vamos ver una aplicación del modelo al Golfo de Finlandia para comprobar su compatibilidad con unas medidas de  $^{137}\text{Cs}$  efectuadas en la superficie del Mar Báltico durante los meses posteriores al desastre de Chernobyl ocurrido el 26 de abril de 1986. El Mar Báltico [157, 187, 189] fue el sistema fuera de la antigua Unión Soviética más afectado por la catástrofe.

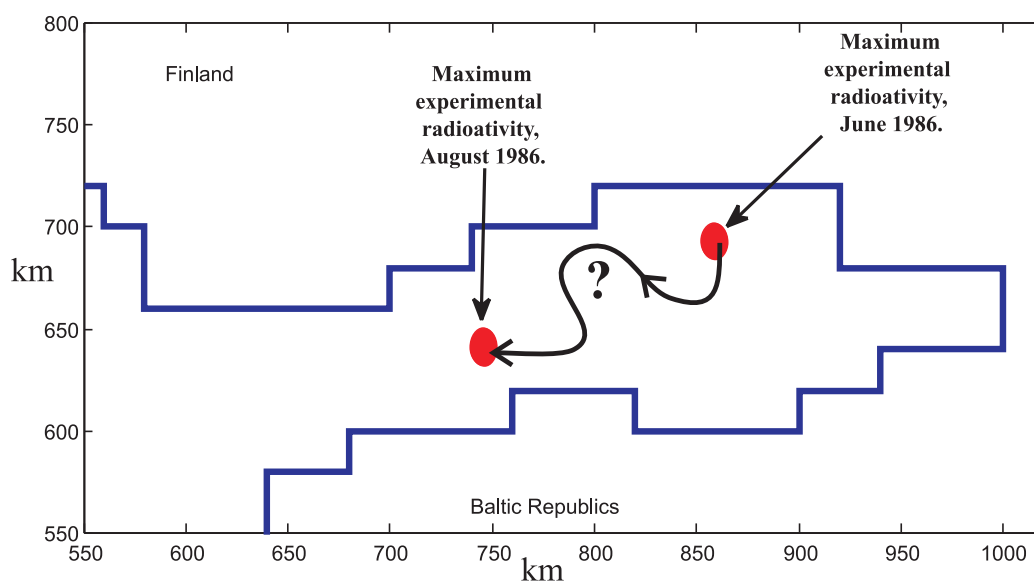


Figura 7.2: Esquema conceptual de la deriva (15 de junio – 15 de agosto de 1986) de la primera mancha radiactiva proveniente del accidente nuclear de Chernobyl registrada en el Mar Báltico.

Según la literatura científica [53] la zona del Báltico más contaminada por el accidente en junio de 1986 se encontraba al norte de la parte central del Golfo de Finlandia. De las medidas efectuadas en agosto del mismo año, se infiere cierto desplazamiento del centro de la mancha hacia el oeste y ligeramente hacia el sur.



Se estima que el centro de la distribución se desplazó numerosas decenas de kilómetros (100–150 km) hasta su detención, a la luz de medidas posteriores [131] durante el mes de octubre del año en cuestión. En la representación aparecen los puntos de actividad máxima en las campañas de medidas realizadas respectivamente en junio y agosto de 1986, que nos da el orden de magnitud del desplazamiento que pudo tener el sistema.

Un desplazamiento advectivo en ese sentido es compatible con la dirección de los vientos que se da para valores mensuales de *NAO* con signo negativo. La oscilación *NAO* alcanzó ese verano [111] valores mensuales extremos de  $-4$  y esto lleva asociada una situación anticiclónica en el norte de Europa cuyos vientos dominantes son de componente este y norte como puede comprobarse en la bibliografía [153].

### 2.1. Aplicación del modelo HD–C3D

Para esta aplicación vamos a coger la salida del modelo HD–C3D que es una adaptación del modelo de 8 vientos del IOPAN [80] a nuestra malla de cálculo, seguida de unos algoritmos de modulación a unas condiciones meteorológicas algo más generales, como se describe en el capítulo 4 de esta tesis.

Los vientos mensuales dominantes que se introducirán en la simulación

$$\overline{NE} = [-4, -4] \text{ m s}^{-1}, \quad (7.8)$$

son coherentes con las medidas efectuadas en el Mar Báltico [153] y con los valores mensuales de la función *NAO* [111].

Se tomará el valor por defecto  $\gamma = 3/2$  del algoritmo de modulación (4.144) expuesto en el capítulo 4. La simulación del 15 de junio al 15 de agosto se hará considerando dos meses modelo con vientos dominantes del NE,  $\overline{NE} = [-4, -4] \text{ m s}^{-1}$ , tales que  $U_a = 4\sqrt{2} \text{ m s}^{-1}$ . Dada la información meteorológica señalada anteriormente [111, 153] de vientos persistentes con componentes N y E, se introducirá una frecuencia mensual de tipo alto,  $f_{men}^{dom} = 1/2$ .

### 2.2. Tabla de coeficientes de difusión

La estimación correspondiente (capítulo 5) a los coeficientes de difusión de mesoescala, que gobiernan el transporte turbulento horizontal de nuestro modelo, nos dio el rango

$$K_h^{meso} \sim 150 - 800 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}. \quad (7.9)$$

Hay que tener en cuenta los valores medios de los vientos estacionales

$$U_a \sim \{8, 6, 5, 7\} \text{ m s}^{-1}, \quad (7.10)$$

que presenta Leppäranta [115] en su obra recopilatoria del mar Báltico, puesto que la velocidad en superficie, es una pequeña fracción (1.5% – 3%) de la velocidad del viento  $U_a$ , e influye en el tamaño de los remolinos de mesoescala [127, 49] cuyo transporte está descrito por el mecanismo de difusión que nos ocupa aquí.

A continuación, se presentan los valores de referencia para los coeficientes de difusión horizontal  $K_h^{men}$  ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ) asociados a variaciones mensuales, y vertical  $K_v$  ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ ) en la superficie del mar que se van a usar en la simulación, variables según las estaciones el año, que han sido extraídos del capítulo 5, junto a los perfiles verticales que se aplicarán a  $K_h^{men}$  y  $K_v$ .

TABLA 7.4: Rangos de referencia para los coeficientes de difusión horizontal y vertical

Tabla de Difusión	Invierno	Primavera	Verano	Otoño
$K_h^{men}$ ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )	400–800	200–400	150–300	300–600
$K_v$ ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ )	15–30	5–10	1–3	10–20

Valores del mismo orden se han calibrado en modelos [4, 211, 62, 132, 57] de transporte oceánico con ventanas espaciales y temporales de la misma familia que las que aquí nos ocupan.

Los coeficientes de difusión que se han usado para las capas no superficiales se han calculado a partir de los valores superficiales de la tabla de arriba teniendo en cuenta los perfiles verticales de  $K_h$  ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ) y  $K_v$  ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ ) que aparecen en las tablas del capítulo 5, que es la parte de esta tesis doctoral dedicada por entero a la difusión. Tomaremos como fecha inicial y final de la simulación el 15 de junio y el 15 de agosto respectivamente y haremos una idealización del problema colocando inicialmente una mancha en el centro de la distribución radiactiva medida el mes de junio. Puede trabajarse con valores de

difusión horizontal realistas que tengan en cuenta la oscilación de los vientos durante el verano

$$K_h = 150\text{--}300 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, \quad (7.11)$$

y tendremos en cuenta, para las simulaciones, un intervalo de valores de la difusividad vertical que será

$$K_v = 0.2\text{--}20 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}, \quad (7.12)$$

hasta que el modelo reproduzca las medidas experimentales. Nótese que el rango de juego para la simulación es más amplio que el rango típico, ( $1\text{--}3 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ; tabla 7.4), señalado por la literatura. Lo hacemos precisamente para comprobar que los valores fuera de rango producen una evolución de la mancha que contradice la experiencia.

### 2.3. Simulaciones y resultados

La mancha inicial la situamos en el punto (850, 690) km, con una extensión de una celda de dimensiones  $20 \text{ km} \times 20 \text{ km} \times 5 \text{ m}$ , siendo el número de partículas trazadoras para este problema de Monte Carlo igual a  $N = 25 \times 10^4$ . Se ha usado la metodología numérica lagrangiana expuesta en el capítulo 6, tomando para las simulaciones los siguientes pasos de tiempo para la circulación y la difusión respectivamente:

$$\Delta t_{cir} = 6 \text{ h} \quad , \quad \Delta t_{dif} = 1 \text{ h}. \quad (7.13)$$

En todas las simulaciones de este apartado se hará uso de los parámetros físicos y numéricos contenidos en el apartado 2.1 de este capítulo. Las siguientes aplicaciones (figuras 7.3–7.14) muestran resultados para diferentes valores de la difusión vertical y del número de meses de transporte. El tiempo de CPU necesario –en el ordenador personal especificado en el capítulo 6– para una simulación de 60 días de transporte ha sido del orden 10 minutos.

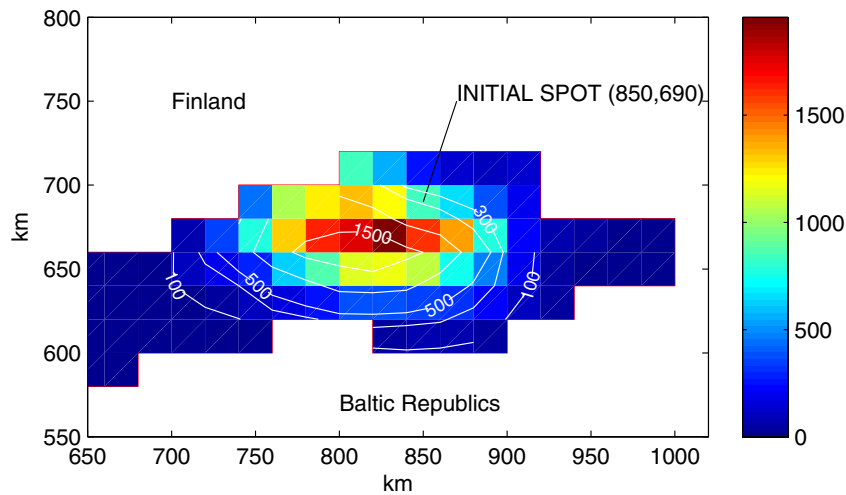


Figura 7.3: Resultado de la simulación del sistema de partículas tras 60 días de transporte (15 de Junio – 15 de Agosto), sometidas a un viento  $\overrightarrow{NE} = [-4, -4] \text{ m s}^{-1}$ , con frecuencia  $f_{men}^{dom} = 1/2$ , una difusión horizontal pequeña  $K_h = 250 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , y una difusión vertical  $K_v = 20 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . Se representa la función densidad (isolíneas y barra de escala) en la capa superficial (número de partículas por cada celda de tamaño  $20 \text{ km} \times 20 \text{ km} \times 5 \text{ m}$ ) y la posición de la mancha inicial en el punto de coordenadas (850, 690) km

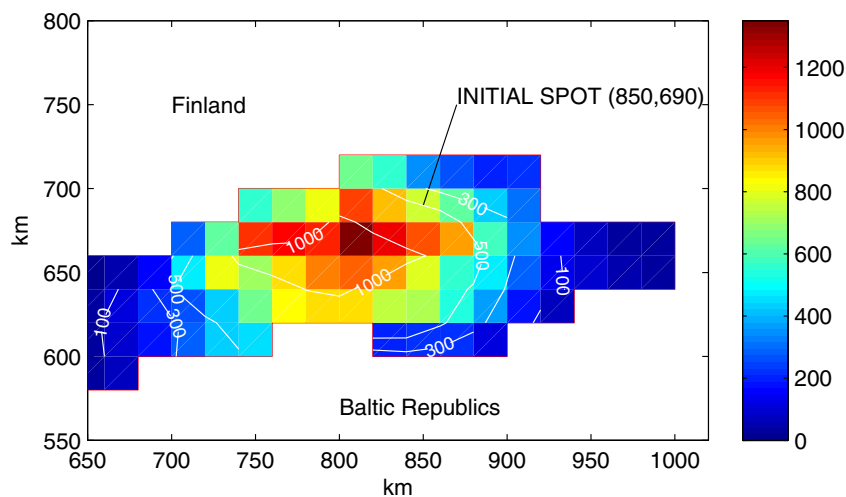


Figura 7.4: Resultado de la simulación del sistema bajo las mismas condiciones físicas que la mostrada en la figura 7.3, pero con una difusión vertical menor,  $K_v = 6 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ .

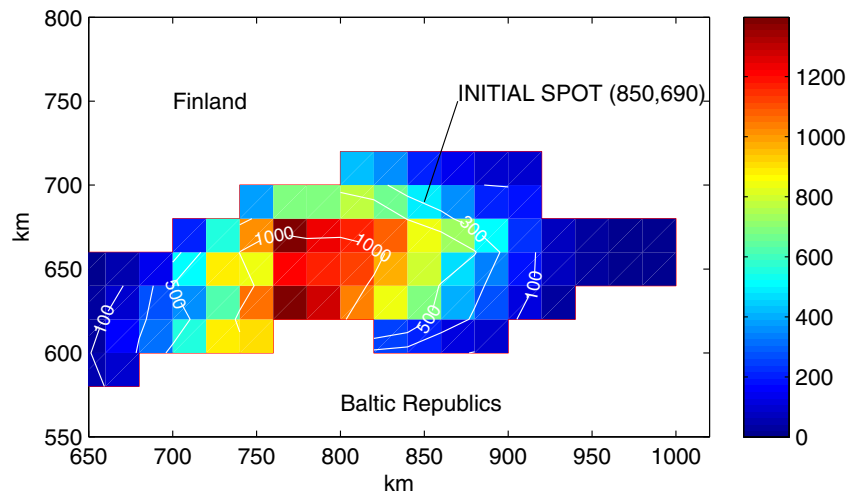


Figura 7.5: Resultado de la simulación del sistema bajo las mismas condiciones físicas que la mostrada en la figura 7.3, pero con una difusión vertical menor,  $K_v = 2 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ .

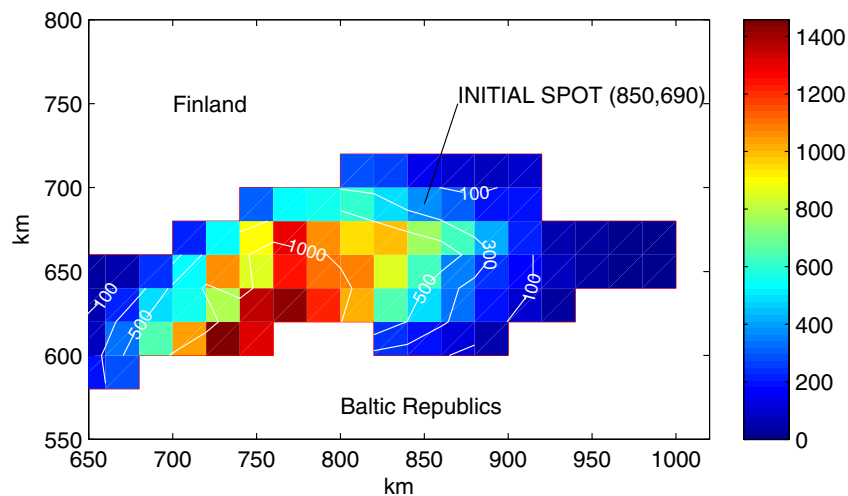


Figura 7.6: Resultado de la simulación del sistema bajo las mismas condiciones físicas que la mostrada en la figura 7.3, pero con una difusión vertical menor,  $K_v = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ .

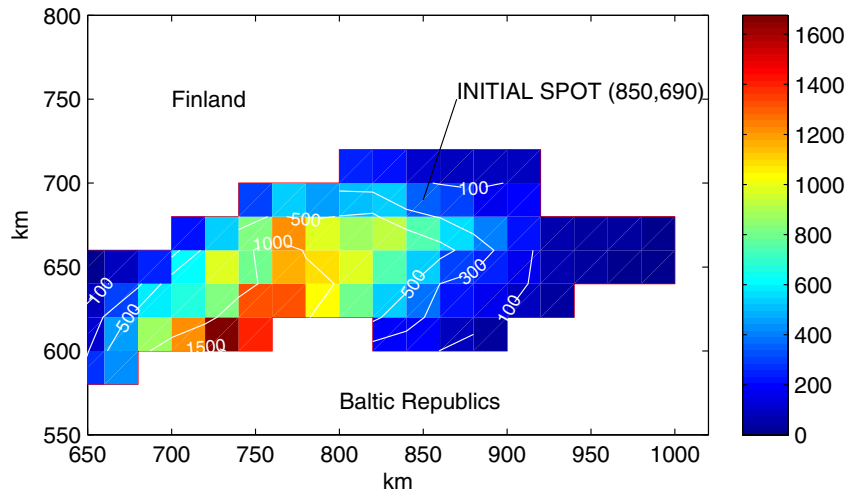


Figura 7.7: Resultado de la simulación del sistema bajo las mismas condiciones físicas que la mostrada en la figura 7.3, pero con una difusión vertical menor,  $K_v = 0.5 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ .

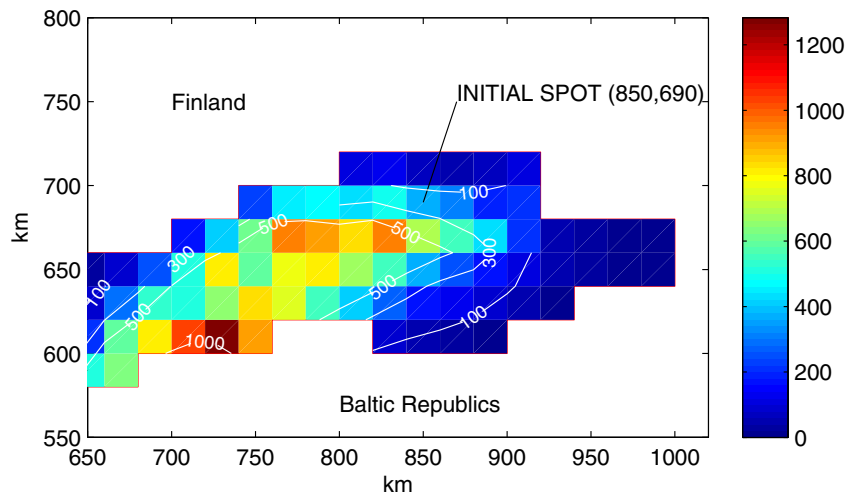


Figura 7.8: Resultado de la simulación del sistema bajo las mismas condiciones físicas que la mostrada en la figura 7.3, pero con una difusión vertical menor,  $K_v = 0.2 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ .

Tanto los coeficientes  $K_v = 2 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , como  $K_v = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , reproducen un desplazamiento para el centro de la distribución similar al sufrido por el máximo de la actividad superficial medida en sendas campañas experimentales. Aunque el resultado arrojado por  $K_v = 0.2 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , está en el entorno de compatibilidad con las medidas experimentales, parece descartable ya para esta difusión el centro de la distribución continúa su marcha varios meses después como veremos en seguida en una simulación, yendo en contra de los experimentos [131]. Por otro lado hay que apuntar que esta continuación de la deriva pasados esos dos meses es una situación ideal y altamente improbable debido a que las condiciones meteorológicas a partir de la segunda quincena de agosto empiezan a no ser tan estables; de hecho la pinoquina estacional de verano suele típicamente iniciar su descenso a principios de septiembre, con la subida consiguiente del coeficiente de difusión vertical.

Por todo lo anterior, las figuras que se muestran ahora son instantáneas mensuales de la función densidad para los coeficientes  $K_v = 0.2 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , y  $K_v = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . Veremos que para este último valor de la difusión vertical sí habrá una detención por parte del centro de la distribución, quedando el problema de transporte reducido prácticamente a un proceso de difusión tridimensional. Teniendo en cuenta la evolución desde  $t = 1$  mes hasta  $t = 5$  meses el máximo de la distribución cae prácticamente un orden de magnitud (desde unas seis mil unidades hasta unas setecientas), hecho que contrasta con los cambios de la isolínea de 400 que se mantiene casi inmóvil en todo este proceso, sobre todo desde que se cumple el segundo mes, otro síntoma de lo estacionario que se vuelve el proceso a partir de un cierto instante. A medida que aumenta el tiempo ya empezamos a apreciar con más frecuencia que las líneas de nivel se van quebrando y perdiendo suavidad, indicador de que las fluctuaciones estadísticas empiezan a tener importancia, como se vio en un apartado anterior de este trabajo.

Las últimas figuras de este apartado (7.13, 7.14) muestran la distribución para difusión muy pequeña  $K_v = 0.2 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , cuando han transcurrido 2 y 5 meses respectivamente. En la figura 7.14, como cabía esperar para un coeficiente  $K_v$  tan pequeño y fuera de rango, se aprecia que el centro de la mancha ha sobrepasado la posición final que indicaron las medidas experimentales. Ya vimos que una vertical tan pequeña no se da en superficie, y menos, a partir del 15 de Agosto.

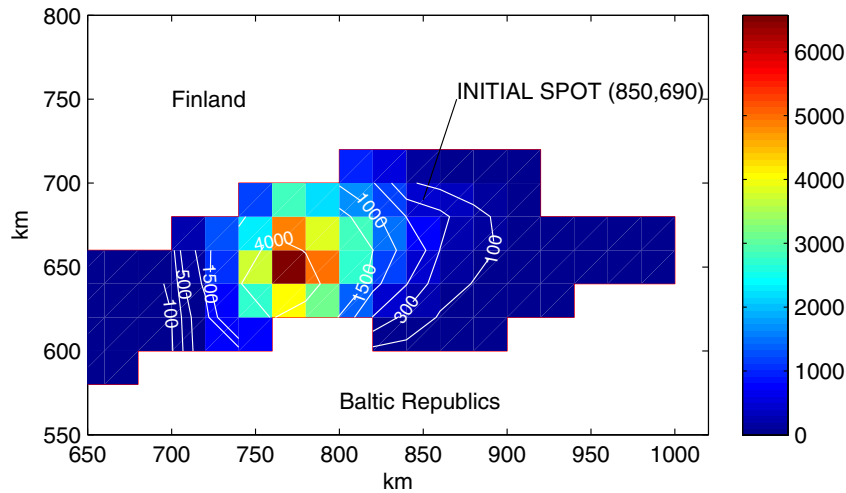


Figura 7.9: Resultado de la simulación del sistema de partículas tras 30 días de transporte (15 de Junio – 15 de Julio), sometidas a un viento  $\overrightarrow{NE} = [-4, -4] \text{ m s}^{-1}$ , con frecuencia  $f_{men}^{dom} = 1/2$ , una difusión horizontal  $K_h = 250 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , y una difusión vertical  $K_v = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . Se representa la función densidad (isolíneas y barra de escala) en la capa superficial (número de partículas por cada celda de tamaño  $20 \text{ km} \times 20 \text{ km} \times 5 \text{ m}$ ) y la posición de la mancha inicial en el punto de coordenadas (850, 690) km

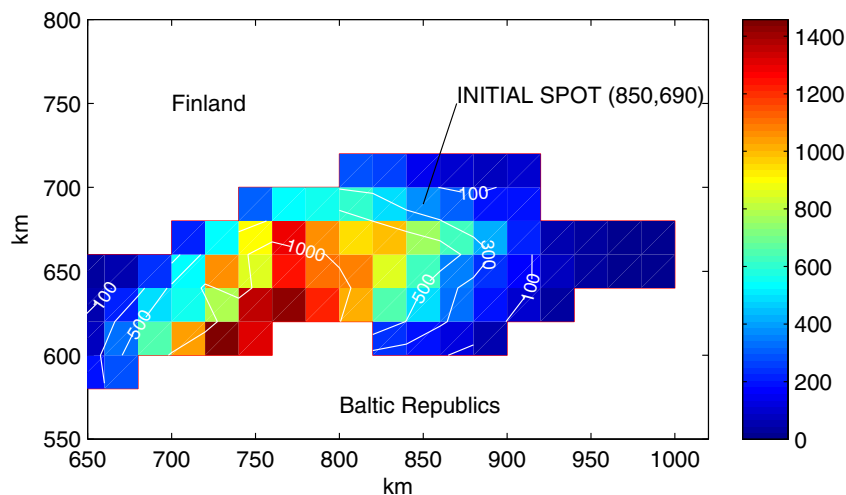


Figura 7.10: Resultado de la simulación del sistema bajo las mismas condiciones físicas que la mostrada en la figura 7.9, pero con un mayor tiempo de simulación, 60 días (15 de Junio – 15 de Agosto).



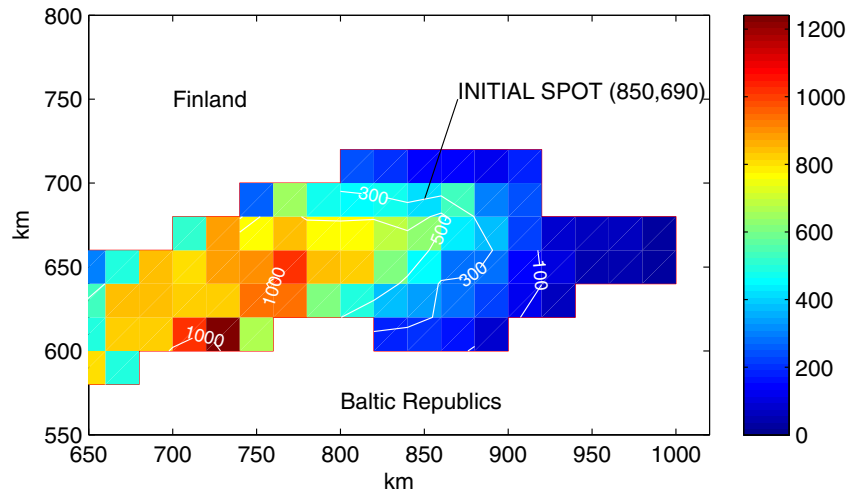


Figura 7.11: Resultado de la simulación del sistema bajo las mismas condiciones físicas que la mostrada en la figura 7.9, pero con un mayor tiempo de simulación, 90 días (15 de Junio – 15 de Septiembre).

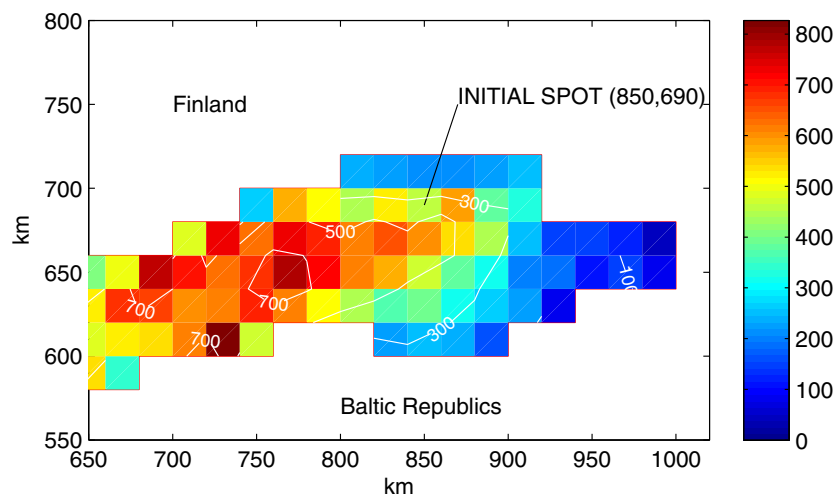


Figura 7.12: Resultado de la simulación del sistema bajo las mismas condiciones físicas que la mostrada en la figura 7.9, pero con un mayor tiempo de simulación, 150 días (15 de Junio – 15 de Noviembre).

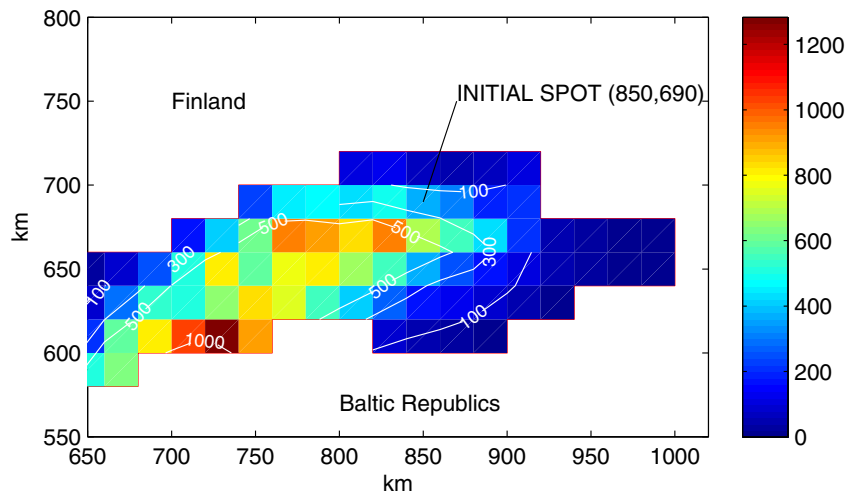


Figura 7.13: Resultado de la simulación del sistema de partículas tras 60 días de transporte (15 de Junio – 15 de Agosto), sometidas a un viento  $\overrightarrow{NE} = [-4, -4] \text{ m s}^{-1}$ , con frecuencia  $f_{men}^{dom} = 1/2$ , una difusión horizontal  $K_h = 250 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , y una difusión vertical  $K_v = 0.2 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . Se representa la función densidad (isolíneas y barra de escala) en la capa superficial (número de partículas por cada celda de tamaño  $20 \text{ km} \times 20 \text{ km} \times 5 \text{ m}$ ) y la posición de la mancha inicial en el punto de coordenadas  $(850, 690) \text{ km}$

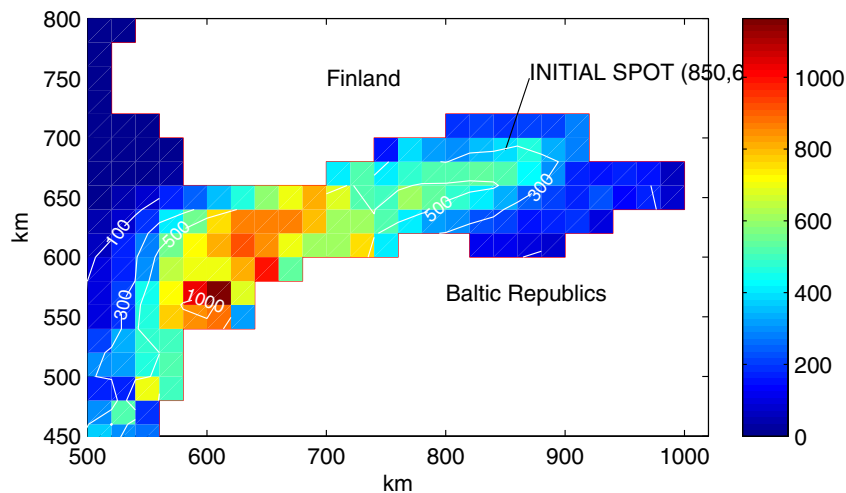


Figura 7.14: Resultado de la simulación del sistema bajo las mismas condiciones físicas que la mostrada en la figura 7.13, pero con un mayor tiempo de simulación, 150 días (15 de Junio – 15 de Noviembre).

## 2.4. Trabajo futuro en relación al Golfo de Finlandia

Una simulación más detallada de este sistema que tenga en cuenta otros aspectos cualitativos del problema está proyectada llevarse a cabo en futuras versiones de este estudio. Allí se tendrán en cuenta, por ejemplo, los aportes de radionúclidos provenientes del río Neva durante los primeros meses posteriores al desastre de Chernobyl.

Quisiera destacar también, como línea general de trabajo futuro, la idea de centrar todos los esfuerzos y las mejoras de la metodología de esta tesis doctoral en una parte del Mar Báltico: el Golfo de Finlandia.

A continuación se detallan algunos de los motivos:

- (a) El Golfo de Finlandia es una parte del sistema que representa como ninguna otra, los procesos físicos y medioambientales del Mar Báltico: alta materia en suspensión, pycnoclina permanente y mar generalmente helado en invierno, entre otros.
- (b) Si el Mar Báltico es uno de los mares más contaminados del mundo por su naturaleza estrechamente semicerrada, el Golfo de Finlandia es su compartimento más representativo por los aportes del mayor río, con diferencia, de la cuenca báltica: el río Neva.
- (c) El retorno de la inversión en trabajo nuevo de campo proveniente de la mejora de la resolución espacial y temporal del modelo se produciría en un tiempo razonable y permitiría pasar del actual modelo de baja resolución a uno de una generación posterior, con mayor resolución, similar al HIROMB del SMHI.
- (d) Se podría diseñar en un tiempo aceptable un modelo hidrodinámico propio de corrientes inducidas por vientos que nos daría independencia respecto al SMHI.
- (e) Riqueza de aplicaciones del método de Monte Carlo en la zona del estuario del río Neva.
- (f) El Golfo de Finlandia es una zona abierta al Báltico pero con un contorno no difícil de modelar numéricamente. La dispersión de la pluma contaminante del río Neva se podría tratar, como primera aproximación, mediante un sistema cerrado.
- (g) El Golfo de Finlandia es el eje marino y comercial más importante del Mar Báltico, rodeado de ciudades notables (Estocolmo, San Petersburgo, Tallin y Helsinki), con intenso tráfico marítimo y problemas derivados de los vertidos petróleo, susceptibles de ser modelados.

- (h) Importantes centros de investigación de la región –SMHI, Finnish Institute of Marine Research, Uppsala University, entre otros– podrían prestar su colaboración y apoyo.

### 3. APLICACIÓN SEGUNDA: EL MAR BÁLTICO

#### 3.1. Trabajos precedentes de este modelo

Diversos trabajos publicados por el autor de esta memoria desde 2001 hasta 2004 [183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190] en congresos internacionales o en revistas internacionales JCR, supusieron una primera aproximación al problema que nos ocupa y constituyen el germen de la obra recogida en esta memoria de tesis doctoral.

Estas son las principales características de los estudios sobre el Báltico publicados entre 2001 y 2004:

- (a) Se trata de modelos previos aplicados al mar Báltico, una metodología híbrida e intermedia entre las dos generaciones de modelos radioecológicos presentados en el capítulo 1, introductorio de esta tesis: los modelos compartimentales y los dinámicos de gran auge en la literatura de los años ochenta y noventa, respectivamente.
- (b) Son modelos difusivos cuyos coeficientes de difusión se hacen depender entre otras variables de la circulación media anual publicada por el SMHI [43] e interpolada a nuestra malla numérica.
- (c) Al ser modelos difusivos, su validez se centra en situaciones con capas bien mezcladas donde la advección contribuye de una manera menor, no pudiendo resolver escenarios donde la circulación de manchas radiactivas sea dominante.
- (d) Trabajan con el método de diferencias finitas (metodología euleriana), a diferencia de la segunda fase de modelos, presentada en esta tesis doctoral, que se centra en la metodología lagrangiana para poder resolver eficientemente el problema de la difusión numérica asociado al modelo de circulación inducida por vientos.
- (e) En las primeras versiones [184, 187] se utilizan unos coeficientes de intercambio entre compartimentos [33] para modelar los movimientos hidrodinámicos de gran escala.
- (f) En versiones posteriores [188, 189] se muestra validación tanto en agua como en sedimento, siendo la materia en suspensión tratada a concentración constante y mediante un modelo básico de arrastre vertical, tradicional en los modelos compartimentales,

y primitivo en comparación con el modelo de transporte de materia en suspensión presentado en esta tesis.

- (g) Las condiciones iniciales de actividad de  $^{137}\text{Cs}$  se ajustan en una primera fase a los datos experimentales de la literatura, y a las zonas con una información experimental más pobre se les deja un parámetro de ajuste de condiciones iniciales variable según la bondad de validación del modelo.
- (h) Se han introducido circuitos entre celdas vecinas del mallado, en los que la varianza de la velocidad es una función conocida de la circulación media anual.
- (i) Se introduce el concepto de longitud de mezcla en la zona de intercambio de fluido.
- (j) Un método de Monte Carlo genera una forma gaussiana para la velocidad.
- (k) La varianza de la velocidad es parametrizada y modificada en las simulaciones, comprobándose su repercusión en el proceso de validación del modelo, simulando condiciones meteorológicas asociadas a vientos flojos, moderados y fuertes.

### 3.2. Introducción y condiciones iniciales

Esta aplicación consiste en una simulación y validación del transporte de radionúclidos en el Mar Báltico en el intervalo del 15 de Octubre de 1986 al 15 de Agosto de 1987.

La radiactividad artificial en el Mar Báltico y en el Mar del Norte previa al accidente de Chernobyl ha sido medida durante la segunda mitad del siglo XX, teniendo su origen en las pruebas de armas atómicas de los años sesenta y descargas líquidas de radionúclidos provenientes de las plantas europeas de reprocesamiento nuclear de Sellafield (Mar de Irlanda, Reino Unido) y La Hague (Canal de la Mancha, Francia).

En particular, en el Mar Báltico existe una larga tradición en las medidas y control de la radiactividad gracias a una labor heredada del impulso inicial dado por Rudolf Sievert (Stockholm, 1896–1966), figura relevante del surgimiento de la Seguridad Nuclear como nueva ciencia nuclear y de la Física Médica. Gracias a ello existe una gran información sobre radiactividad en el Mar Báltico, tanto anterior como posterior al accidente de Chernobyl, parte de la cual se usará para validación en esta tesis doctoral.

La contaminación externa y previa al desastre nuclear ha sido transportada al Mar Báltico a través de los estrechos de Dinamarca presentando típicamente una alta correlación con la salinidad [76], lo que quiere decir que la concentración disminuye desde

Kattegat hasta los puntos más septentrionales de la Bahía de Bothnia siguiendo la misma tendencia que la salinidad de este mar decrecientemente salobre.

El accidente nuclear de Chernobyl tuvo lugar a la 1:23 (hora local) del sábado 26 de abril de 1986 mientras se realizaba una prueba con la intención de aumentar la seguridad del reactor.

El primer lugar fuera de la URSS donde se detectaron las consecuencias de la catástrofe de Chernobyl fue en la central nuclear de Forsmark (Suecia), el 27 de abril de 1986, gracias a los detectores de radioactividad situados para detectar fugas locales. Debido a que se detectaron partículas radiactivas en las ropas de trabajadores de la central, se examinó el origen de la fuga y se concluyó que la contaminación provenía de la atmósfera y no de la propia central.

El análisis de la evolución meteorológica del norte de Europa durante esos días, con vientos predominantes de tipo SE (Sureste) apuntó la posibilidad de un accidente en la Unión Soviética [12].

Las primeras muestras de radioactividad en agua de mar se tomaron entre el 29 de Abril y el 14 de mayo de 1986. La variedad de radionúclidos artificiales fue grande ( $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{134}\text{Cs}$ ,  $^{90}\text{Sr}$ ,  $^{95}\text{Zr}$ ,  $^{95}\text{Nb}$ ,  $^{99}\text{Mo}$ ,  $^{103}\text{Ru}$ ,  $^{106}\text{Ru}$ ,  $^{110\text{m}}\text{Ag}$ ,  $^{129\text{m}}\text{Te}$ ,  $^{131}\text{I}$ ,  $^{132}\text{Te}$ ,  $^{140}\text{Ba}$ ,  $^{141}\text{Ce}$ ,  $^{144}\text{Ce}$ ,  $^{239}\text{Np}$ , y  $^{242}\text{Cm}$ ), la mayoría de vida corta y con poco impacto sobre la naturaleza. Así, los radionúclidos de mayor impacto fueron el  $^{137}\text{Cs}$  ( $T_{1/2} \simeq 30$  a) y el  $^{134}\text{Cs}$  ( $T_{1/2} \simeq 2$  a) que ofrecieron además la posibilidad de identificar la contribución por Chernobyl debido a la ratio  $^{134}\text{Cs}/^{137}\text{Cs}$  de actividad entre ambos, del orden de 1/2. De hecho era prácticamente nula la actividad de  $^{134}\text{Cs}$  (semivida de dos años) previa al accidente.

Este accidente cambió completamente la situación radioecológica en el norte de Europa y en gran parte del resto del mundo. En el caso del Mar Báltico la radiactividad permaneció durante años debido a la naturaleza casi aislada del sistema como mar semi-cerrado, con tiempos típicos de residencia para las partículas fluidas que están en el orden de los treinta años.

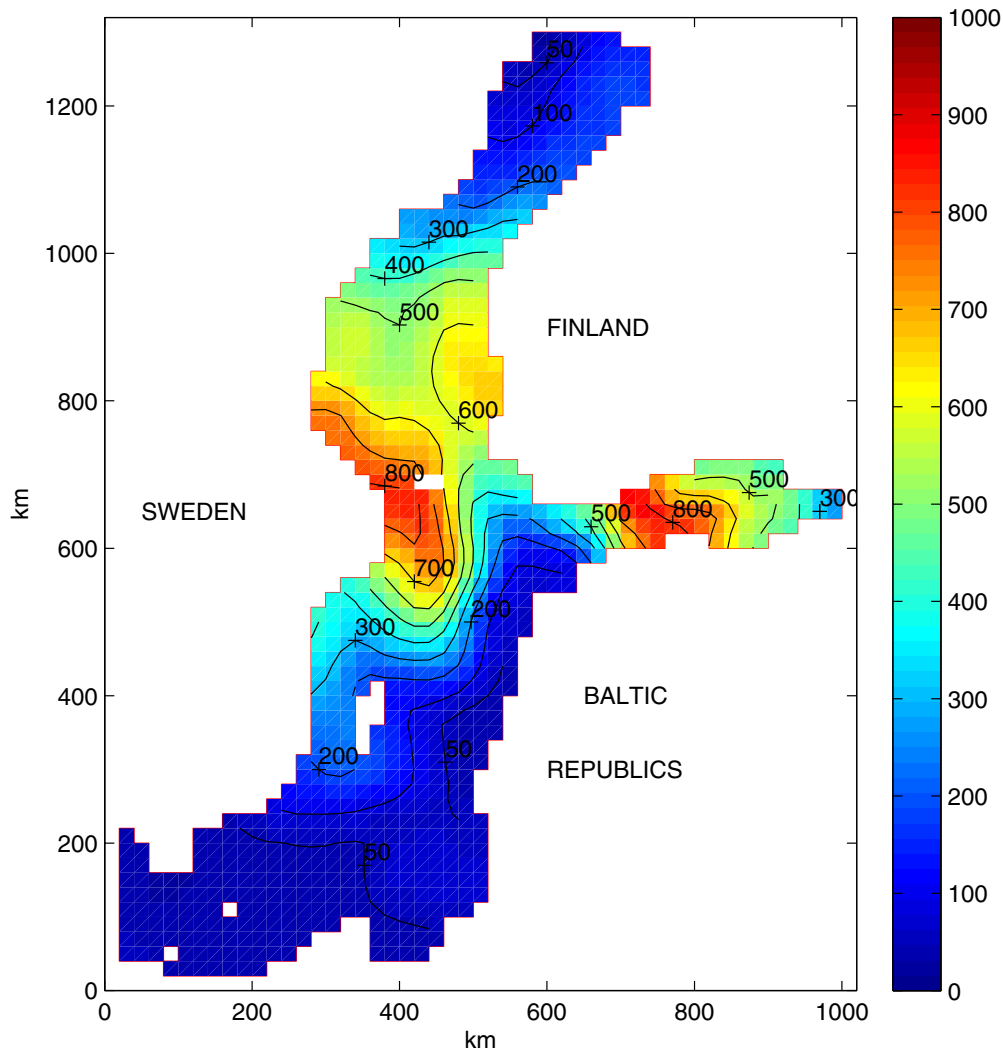


Figura 7.15: Actividad de  $^{137}\text{Cs}$  ( $\text{Bq m}^{-3}$ ) en la superficie del Mar Báltico durante Octubre de 1986, interpolada a partir de medidas experimentales contenidas en la literatura [53, 54, 131].

La distribución irregular de la actividad de  $^{137}\text{Cs}$  que se muestra en la figura 7.15 [53, 54, 131] es fruto de la desigual intensidad en la precipitación atmosférica, con máximos causados por elevadas precipitaciones a nivel local.

La información experimental  $^{137}\text{Cs}$  con los que se ha trabajado para las condiciones iniciales de este problema está contenida en diferentes publicaciones [53, 54, 131] del campo de la seguridad nuclear.

El número de puntos de medida encontrado en la literatura fue del orden de 100 y de la mitad, aproximadamente, se tiene información del perfil vertical de la actividad de  $^{137}\text{Cs}$ . Cualitativamente, este perfil decae lentamente en las zonas norte (Mar de Botnia y Bahía de Botnia) debido a que la mezcla es mejor por la ausencia de picnoclina permanente; allí se ha trabajado con perfiles parabólicos convexos y con perfiles planos en zonas de poca profundidad. En las regiones donde la picnoclina es importante (capítulo 3) la curva de actividad cae más bruscamente y se ha trabajado con un perfil parabólico cóncavo. En el resto se ha utilizado o bien un perfil decreciente lineal o un perfil plano en algunas zonas de poca profundidad, todo ello procurando ajustarnos a las medidas experimentales. Estos perfiles ya se habían sido optimizado para validar modelos previos aplicados al mar Báltico, publicados por el doctorando en revistas internacionales JCR [187, 189], y germen de la metodología que se presenta en esta memoria de esta tesis doctoral. Para completar las condiciones iniciales se ha hecho una interpolación lineal en cada capa del sistema [187, 189] cuyos valores en superficie se muestran en la figura 7.15.

Una parte importante de estas medidas se realizó a lo largo del crucero científico internacional RV GAUSS que tomó medidas en 94 puntos del sistema a diferentes profundidades. Una cuestión destacable en estas medidas fue la influencia de la picnoclina (publicada en la revista *Nature* [88]) que actuó como barrera limitando mucho el flujo de radionúclidos hacia zonas por debajo de la misma, fenómeno que tiene una mayor importancia en la mitad sur del Mar Báltico.

Respecto a la actividad previa en agua y en sedimentos, el dato importante es que la actividad de  $^{137}\text{Cs}$  anterior a Chernobyl es [66] aproximadamente uniforme en el Báltico y prácticamente independiente de la profundidad. El valor de fondo de referencia se sitúa en  $\sim 10 \text{ Bq m}^{-3}$ , con una ligera variación de sur a norte que despreciaremos en esta fase de simulación.

El accidente de Chernobyl puso de manifiesto la debilidad [157] de los modelos existentes para hacer predicciones físicas en estas situaciones de emergencia. La necesidad de aportaciones a este campo floreciente de la física aplicada ha sido uno de los motores que han inspirado y motivado el trabajo que se presenta en esta tesis doctoral.



El modelo que se está exponiendo es la versión última de un modelo que se ha construido en diferentes fases.

### 3.3. Aplicación del modelo HD-3D (circulación anual) y tabla de difusión

Este modelo ha sido detallado en el capítulo 4, con todos sus procedimientos de interpolación y adaptación a nuestra malla de cálculo.

A continuación, se presentan los valores de referencia para los coeficientes de difusión horizontal  $K_h^{anu}$  ( $m^2 s^{-1}$ ) asociados a variaciones mensuales, y vertical  $K_v$  ( $cm^2 s^{-1}$ ) en la superficie del mar que se van a usar en la simulación, variables según las estaciones el año, que han sido extraídos del capítulo 5.

TABLA 7.4: Rangos de referencia para los coeficientes de difusión horizontal y vertical

Tabla de Difusión	Invierno	Primavera	Verano	Otoño
$K_h^{anu}$ ( $m^2 s^{-1}$ )	400–800	200–400	150–300	300–600
$K_v$ ( $cm^2 s^{-1}$ )	15–30	5–10	1–3	10–20

Los perfiles verticales que se han aplicado a los coeficientes de difusión  $K_h^{anu}$  y  $K_v$  están contenidos en el capítulo 5. Un perfil típico, tomando la unidad como referencia para la primera capa, sería el siguiente:  $\{1, 1/2, 1/4, 1/3, 1/6, 1/10\}$ .

### 3.4. Simulación y validación

En los meses de invierno tendremos en cuenta la posibilidad de que el mar esté parcialmente helado. Según la información disponible el invierno de 1987 fue catalogado técnicamente como severo (NAO Index = -1), por lo que nuestro modelo asigna una serie de días helados a cada compartimento según la tabla del bloque anterior.

En caso de superficie parcialmente helada, el modelo aplicará un coeficiente de reducción a todas las velocidades, como se vio en el capítulo 3:

$$\vec{v}_{cor} = \lambda_{ice} \vec{v} \quad , \quad 0.6 < \lambda_{ice} < 1.2, \tag{7.14}$$

y teniendo en cuenta el índice NAO del invierno de 1987 (figura 3.8), propondremos como coeficiente corrector para la simulación, el valor por defecto  $\lambda_{ice} = 1$ , por los motivos que ya se expusieron en el capítulo 3.

La asignación de partículas representativas del proceso de Monte Carlo se ha hecho asignando inicialmente 1 partícula por cada  $\text{Bq m}^{-3}$  distribuidas uniformemente por la celda, siendo necesarias  $N = 1786746$  partículas trazadoras.

Se ha usado la metodología numérica lagrangiana expuesta en el capítulo 6, tomando para las simulaciones los siguientes pasos de tiempo para la circulación y la difusión respectivamente:

$$\Delta t_{cir} = 6 \text{ h} \quad , \quad \Delta t_{dif} = 1 \text{ h} . \quad (7.15)$$

El resto de parámetros físicos y numéricos usados son de la simulación tridimensional del capítulo 6 (apartado 2.3). El tiempo de CPU necesario –en el ordenador personal especificado en el capítulo 6– para la simulación de 300 días de transporte ha sido del orden 100 minutos.

El resultado del modelo, simulando desde el 15 de Octubre de 1986 hasta el 15 de Agosto de 1987, tras computar el transporte de las partículas y toda la información detallada aquí, se muestra en la figura 7.16.

En Agosto de 1987 se realizó otra expedición científica llamada SWRV ATTAIR para analizar la evolución de la actividad por comparación con las medidas de 1986. La mayoría de las medidas usadas para validar nuestro modelo provienen de los resultados de este crucero internacional y junto con otras forman un conjunto [53, 54, 131] cuya interpolación en superficie se ha tenido en cuenta para calcular la figura 7.17.

El modelo de transporte que tenemos ahora entre manos es conservativo, ya que no estamos considerando perdidas de actividad por sedimentación. Por ello, y para poder realizar la validación de igual a igual, se han corregido las medidas experimentales en superficie añadiendo una pequeña fracción de actividad sedimentada, que según estimaciones encontradas en la literatura [202] oscila entre un 5% y un 25% con un claro

crecimiento sur a norte, fundamentalmente al ritmo en que decrece la salinidad del sistema. El modelo consta de un contador de partículas para garantizar la viabilidad del mismo y seguimos bajo la hipótesis de sistema cerrado al Océano Atlántico.

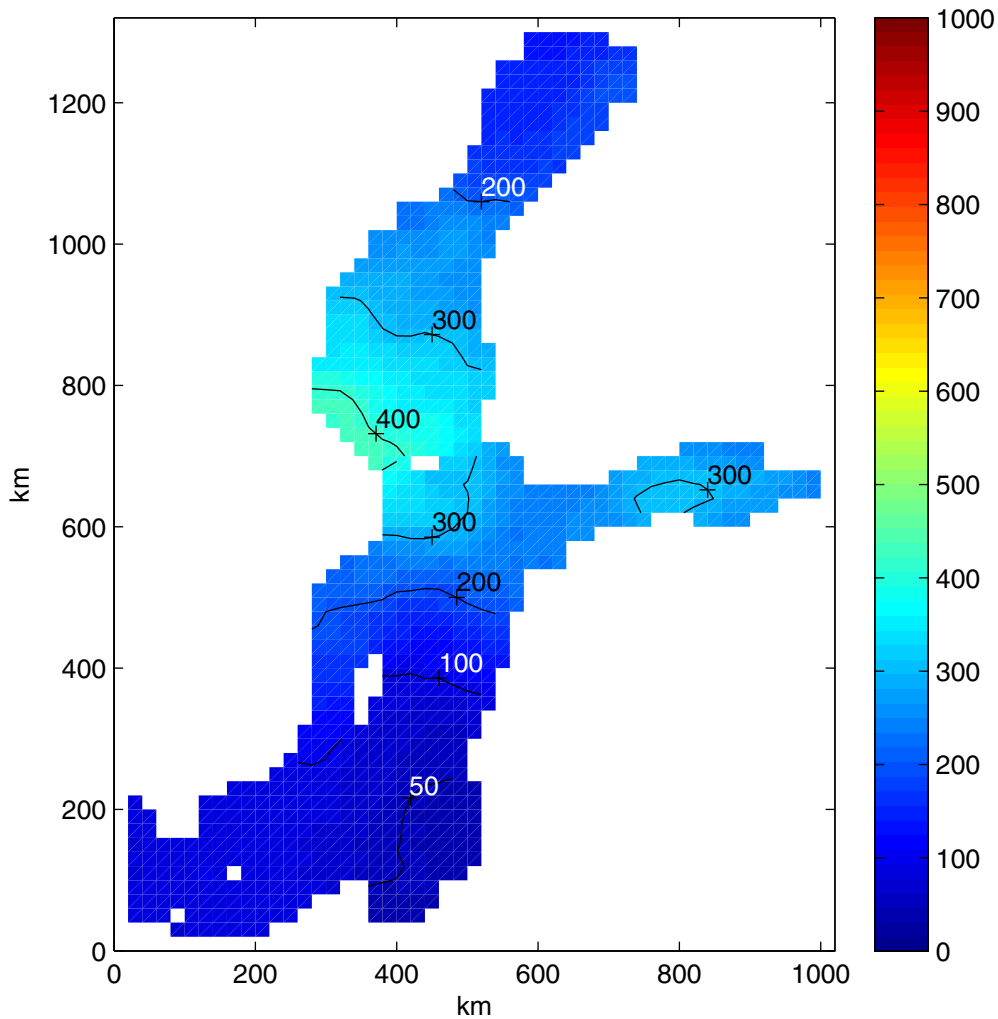


Figura 7.16: Actividad de  $^{137}\text{Cs}$  ( $\text{Bq m}^{-3}$ ) en la superficie del Mar Báltico resultado de la simulación del modelo, para 15 de Agosto de 1987. Se trabaja con la circulación media anual del HD-Q3D. Los coeficientes de difusión horizontal y vertical de trabajo serán los valores centrales de los intervalos de referencia de la Tabla 7.5., variables según la estación.

Con toda estas consideraciones se ha calculado la figura 7.17, que es con la que se va validar el modelo matemático presentado aquí.

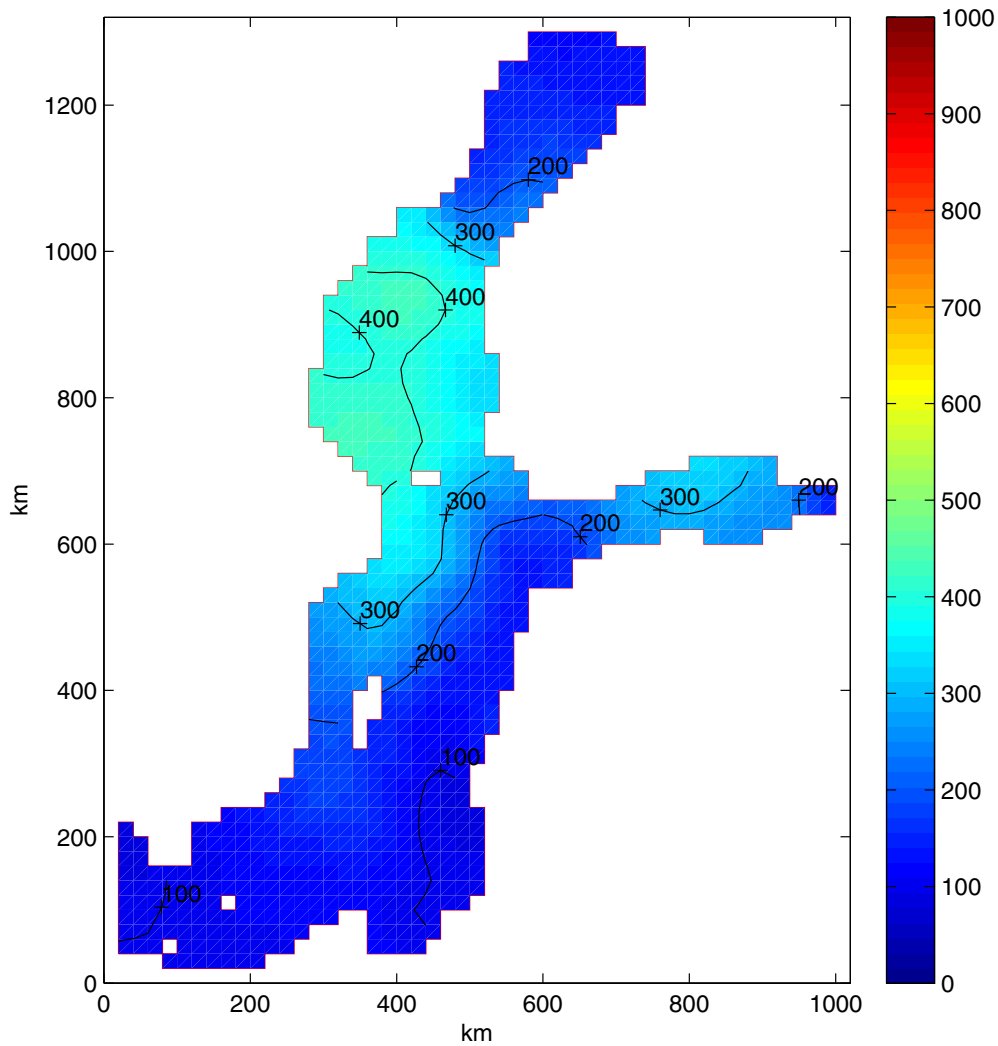


Figura 7.17: Actividad de  $^{137}\text{Cs}$  ( $\text{Bq m}^{-3}$ ) en la superficie del Mar Báltico durante Agosto de 1987, interpolada [187, 189] a partir de medidas experimentales contenidas en la literatura [53, 54, 131], corregida con la fracción sedimentada [202] para facilitar la validación con la gráfica anterior proveniente del modelo.

El acuerdo entre el modelo y las medidas experimentales es bastante aceptable a tenor de la complejidad del problema que estamos estudiando. Las pequeñas discrepancias en

superficie en algunas zonas del centro y norte del Báltico, con una actividad en el modelo inferior a la experimental se debe a que ésta se encuentra en puntos inferiores de la columna de líquido.

La mayor discrepancia se observa en la zona sureste del sistema, donde hay aproximadamente un factor 2 entre las actividades del modelo y las experimentales. En esta zona se produce un aumento en la actividad superficial que oscila entre un factor 2 y 3. Las diferencias entre el modelo y las medidas son demasiado grandes como para ser explicadas por los aportes de los ríos [47], que no han sido tenido en cuenta en la modelización. Según el trabajo de Gavrilov [47] el aporte de radionúclidos de origen fluvial ya se había producido en su práctica totalidad cuando empezó este periodo de validación, en octubre de 1986.

Por otro lado, del análisis cualitativo que hace Gritchenko [53] sobre los flujos de radionúclidos en este periodo y del hecho de que en los primeros meses de validación dominaron vientos de componente norte [153], parece desprenderse que el aumento relativo de actividad en esta zona durante ese periodo fue debido en gran parte a la llegada de radionúclidos desde el norte del compartimento Baltic Proper. La circulación de nuestro modelo no ha podido dar cuenta de este cambio porque sus corrientes son medias anuales dominadas por los vientos del suroeste, muy distintos de los que al parecer dieron lugar al citado incremento.

Futuras simulaciones, basadas en el propuesto modelo de circulación de 8 vientos (HD-C3D), se diseñarán introduciendo un patrón de vientos más realista con objeto de evaluar la respuesta de nuestro modelo en esta zona donde las predicciones y las medidas experimentales no parecen tener un buen acuerdo. Una posibilidad consistiría en aplicar el modelo HD-C3D (8 vientos) mes a mes, durante los diez meses de transporte (Octubre'86–Agosto'87), tomando los vientos dominantes del trabajo de Radziejewska [153] y las intensidades de la base de 8 vientos subdividida en dos tramos anuales (expresiones 7.4. y 7.5.) que se mostró en el apartado 1 de este capítulo.

#### 4. APLICACIÓN TERCERA: APLICACIÓN AL RÍO GUADALQUIVIR. TRANSPORTE DE SALINIDAD

El río Guadalquivir es el segundo río más largo de España (después del río Tago), y el más largo de Andalucía. Tiene 657 kilómetros de largo y su superficie de drenaje es de unos 58000 kilómetros cuadrados ( $2/3$  de la superficie total de Andalucía), desembocando en el Golfo de Cádiz (Océano Atlántico) rodeado de una zona de marisma perteneciente al Parque Nacional de Doñana. Es el único gran río navegable de España (actualmente es navegable hasta la ciudad de Sevilla). Su estuario tiene 110 km de largo y la zona de influencia de marea llega hasta la presa hidráulica de Alcalá de Río. La salinidad a lo largo del estuario está gobernada por la intrusión de agua marina y por los aportes de agua dulce, principalmente de las descargas periódicas de la presa.

El rango típico de sus mareas (diferencia entre las elevaciones de pleamar y bajamar) es del orden de 2 metros en marea viva y aproximadamente la mitad en marea muerta. Las corrientes son relativamente altas, con máximos del orden de  $1 \text{ m s}^{-1}$  en marea viva. Los aportes de agua dulce provenientes de la presa son variables a lo largo del año, con valores medios anuales del orden de  $50 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ , y de unos  $20\text{--}30 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  en los periodos secos. Estos últimos valores conllevan unos niveles de salinidad aceptables en la zona central del estuario, dedicada intensamente a la producción agrícola. En los periodos lluviosos, los aportes de agua dulce normalmente van de 50 a  $100 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ .

Respecto a los regímenes mareales del estuario, se pueden distinguir tres zonas [159]:

- (a) Región hiper-síncrona (0–15 km): la fricción domina sobre el factor de convergencia del estuario y la amplitud marea decae en ese tramo.
- (b) Región síncrona (15–45 km): La fricción y la convergencia se compensan y la amplitud de la marea se mantiene constante en ese tramo.
- (c) Región hipo-síncrona (45–110 km): la amplitud crece por el factor de convergencia del estuario, y se produce reflexión de la onda en la presa.

El área de la sección,  $a(x)$ , la anchura,  $b(x)$  y la profundidad media  $h(x)$  pueden ser parametrizadas en función de la distancia  $x$  (km) a la desembocadura, como sigue [159]:

$$a(x) = a_0 e^{-x/\lambda} \quad , \quad a_0 = 5840 \text{ m}^2 \quad , \quad \lambda = 60 \text{ km} \quad (7.16)$$

$$b(x) = b_0 e^{-x/\mu} \quad , \quad b_0 = 795 \text{ m} \quad , \quad \mu = 66 \text{ km} \quad (7.17)$$

$$h(x) = h_0 \quad , \quad h_0 = 7.1 \text{ m} \quad (7.18)$$



Figura 7.18. Imagen de satélite (NOAA): la línea amarilla representa el tramo de estuario del río Guadalquivir desde el Océano Atlántico hasta la presa hidráulica, pasando por Sevilla en el kilómetro 90.

Un modelo lagrangiano 1D ha sido implementado para estudiar la evolución de los gradientes horizontales de salinidad (promediados sobre ciclos de mareas semidiurnos)

Una descripción detallada de la hidrodinámica del estuario del Guadalquivir se puede encontrar en la literatura [159]. Particularmente, el coeficiente efectivo de difusión horizontal  $K_x$  ha sido estudiado como función de las corrientes de marea, el coeficiente de fricción, y los aportes de agua dulce. Como conclusión, se ha establecido el siguiente rango de variabilidad [159]:

$$150 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \leq K_x \leq 1000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}. \quad (7.19)$$

El modelo lagrangiano usa un número de partículas trazadoras proporcional a la salinidad, dada en unidades PSU. La aproximación 1D parece razonable para este sistema, relativamente bien canalizado, debido a las diferentes intervenciones (canalizaciones, cortas y dragados) a que ha sido sometido en el último siglo.

La discretización del modelo se hace con  $\Delta x = 1 \text{ km}$ , with  $\Delta t = 1 \text{ h}$ . Como primera aproximación, la circulación residual ha sido estimada asumiendo un flujo medio en cada sección igual al aporte de agua dulce en el contorno con la presa.

Como condiciones iniciales, un número de partículas  $N(x) = 100 S \times \Delta x$  fue asignado en cada celda, siendo  $S$  la salinidad. Como condición de contorno en la desembocadura del estuario, se ha incluido un compartimento que reproduce el mar abierto mediante una condición de mezcla rápida y homogénea.

Tras imponer las condiciones descritas, y tras un periodo transitorio de unos pocos días, se alcanza el estado estacionario. Un acuerdo razonable entre el modelo y las observaciones se alcanza cuando se introduce la siguiente parametrización del coeficiente efectivo de difusión horizontal:

$$K_x(x) = K_0 \left(1 - \gamma \frac{x}{l_E}\right)^2 \quad (7.20)$$

donde  $K_0$  es el correspondiente valor del coeficiente cuando  $x = 0$ ,  $\gamma$  es un parámetro libre que será calibrado, y  $l_E$  es la longitud del estuario.

La siguiente figura (7.19) muestra los resultados del estado estacionario de la distribución de salinidad (en unidades PSU) obtenida para un aporte de agua dulce  $Q = 25 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  (típico durante periodos secos), y se compara con valores experimentales [159].

Análogamente, la otra figura (7.20) muestra el correspondiente resultado para un aporte dulce igual a  $Q = 60 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ , típico durante los periodos lluviosos. Estas curvas de salinidad son una primera aproximación a la problemática de la intrusión salina en el estuario, conocido como el problema del "tapón de sal" por los habitantes de los núcleos



de población limítrofes con el estuario, conocedores de unas condiciones medioambientales tan próximas a las marinas como prolongado sea el avance del "tapón" río arriba.

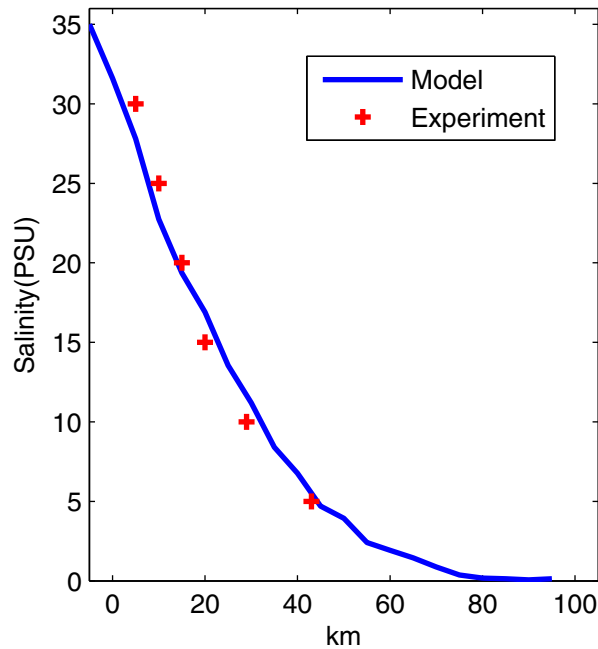


Figura 7.19: Comparación entre los valores de la salinidad experimentales (promediados sobre ciclos semidiurnos) y los calculados con el modelo, como función de la distancia a la desembocadura. El aporte dulce fue igual a  $Q = 25 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  (típico durante periodos secos),  $K_0 = 300 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\gamma = 3/4$  y  $l_E = 110 \text{ km}$ .

Hay puntos muy sensibles (ver figuras 7.19 y 7.20) a estas variaciones de la curva, como el punto  $x = 50 \text{ km}$ , donde la salinidad en época seca es unas cinco veces superior a la de los periodos lluviosos.

El acuerdo razonable entre las predicciones del modelo y las medidas le da apoyo a esta versión preliminar de nuestro modelo 1D de dispersión lagrangiana para el estuario del río Guadalquivir.

Futuras mejoras serán incluidas en este modelo, como las oscilaciones de marea, coeficientes de difusión dependientes del tiempo y una más detallada descripción de la hidrodinámica del estuario.

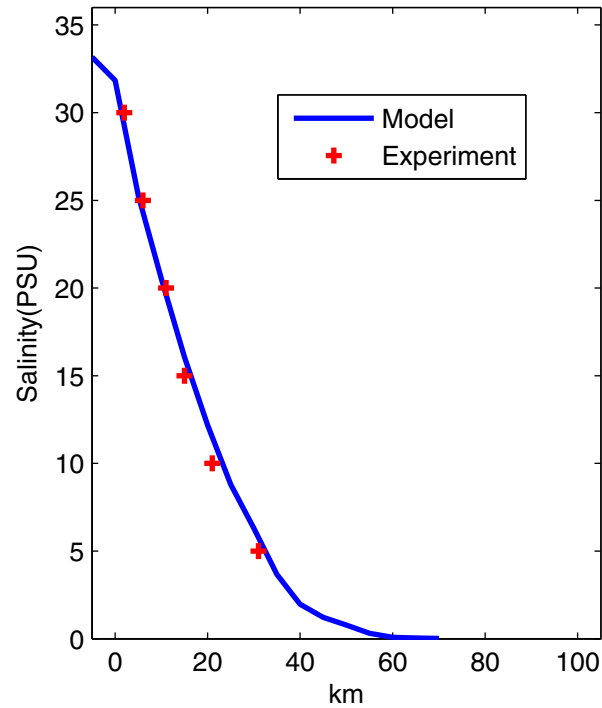


Figura 7.20: Iguales condiciones que en la figura anterior, para un aporte dulce igual a  $Q = 60 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  (típico durante periodos lluviosos),  $K_0 = 600 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\gamma = 1/2$  y  $l_E = 110 \text{ km}$ .

Un conocimiento más detallado del estuario del río Guadalquivir viene siendo demandado en los últimos años por razones socioeconómicas y ecológicas: labores de dragado periódicas para mantenimiento de la navegabilidad, acuicultura, agricultura intensiva de arroz, turismo, y el impacto ecológico en el Parque Nacional de Doñana, entre otros. Por este motivo, un modelo de transporte más avanzado y ramificado será necesario en el futuro.

# Capítulo 8

## Materia en Suspensión y su Modelización

### 1. ASPECTOS GENERALES DE LA MATERIA EN SUSPENSIÓN EN EL OCÉANO

En el desarrollo de esta tesis doctoral estamos interesados en el estudio y modelización del transporte de partículas en general y de radionúclidos en particular cuando se encuentran inmersos en el océano.

Nuestro interés se centra en radionúclidos que se pueden encontrar tanto en fase disuelta como en fase sólida, bien agregados a la materia en suspensión o formando parte del sedimento marino. Los radionúclidos que se encuentran sólo en la fase disuelta se denominan conservativos, mientras que los que se presentan ambas fases son conocidos como radionúclidos no conservativos.

Tanto la fase disuelta como la fase sólida suspendida participan de todos los procesos hidrodinámicos que hemos expuesto hasta ahora. Los radionúclidos disueltos forman parte del movimiento del fluido como si de moléculas de agua se tratara, mientras que los radionúclidos en la fase sólida requieren un tratamiento aparte ya que previamente hay que estudiar la dinámica de las partículas sólidas a las que van adheridos.

Como escenario de partida, habrá que introducir el modelo hidrodinámico previo -ya que las partículas que estamos estudiando son pasivas y no intervienen en la dinámica del fluido que las soporta-, la información meteorológica necesaria, los datos sobre las fuentes de materia en suspensión y la dinámica específica de la fase sólida en el seno del fluido.

A partir de ahí, levantaremos un sencillo y suficiente por ahora Modelo de la Materia en Suspensión –o Modelo de Partículas Suspendidas–, que nos dará la concentración de partículas sólidas a lo largo del tiempo en el sistema, a las que irá agregada la parte no disuelta de los radionúclidos que estamos estudiando.

En el Modelo de la Materia en Suspensión se habrán de tener en cuenta dos procesos fundamentales de las partículas sólidas en el océano: la deposición y la resuspensión.

Posteriormente habrá que tener en cuenta la posibilidad de que radionúclidos de la fase disuelta pasen a la fase sólida y viceversa. La primera aproximación que podemos hacer a este problema es suponer que se encuentran en equilibrio, condición que se alcanza al cabo de un tiempo dependiente de cada radionúclido, pero que en nuestro caso será corto comparado con las escalas temporales que vamos a manejar para nuestro estudio del sistema. El intervalo transitorio cinético o de no equilibrio, será tenido en cuenta en futuras ampliaciones del modelo cuando se haga un escalado más fino del problema.

Por convenio, se llama materia en suspensión al material retenido en un filtro para partículas con un tamaño de poro entre  $0.4 \mu\text{m}$  y  $0.5 \mu\text{m}$ . El material que no es retenido en este sistema y por tanto con un diámetro  $\phi < 0.4 \mu\text{m}$  es considerado como materia disuelta. Se considera materia suspendida fina [3, 29] a aquella cuyo diámetro  $\phi < 62.5 \mu\text{m}$ . Las partículas con diámetro superior se depositan mucho más rápidamente incorporándose a sedimentos de una textura mucho más gruesa que los que van a protagonizar nuestro estudio. La razón fundamental de esto último es que las partículas finas son mucho más eficaces que las gruesas a la hora de transportar radionúclidos, por la sencilla explicación geométrica de que una masa  $m$  de partículas finas presenta una superficie de adherencia potencial para los radionúclidos mucho mayor que la misma cantidad  $m$  de partículas gruesas. Basta considerar el siguiente sencillo experimento mental de romper una partícula gruesa homogénea en diferentes finas: supóngase por sencillez que es cúbica, de lado  $a$  y que se le practican  $N$  cortes paralelos a cada uno de los lados del cubo, apareciendo  $N^3$  cubitos de lado  $a/N$ . Si llamamos  $S_A$  y  $S_B$  a las superficies de ambos sistemas de igual masa  $m$  llegamos a:

$$S_A = 6a^2 \ll S_B = N^3 \times 6(a/N)^2 = 6a^2N \quad (8.1)$$

La idea es que la capacidad de absorber radionúclidos por una partícula aumenta

cuando decrece [4, 5, 29] su diámetro característico  $\phi$ , razón por la que nos interesamos únicamente en la partículas suspendidas finas.

La superficie  $S$  y el volumen  $V$  de una partícula sólida están ligados a través de una constante  $k$  y del diámetro  $\phi$ ,

$$V = k\phi S \quad (8.2)$$

aunque, según las investigaciones de Abril [7, 8, 9] y otros autores, la relación puede ser más compleja, ya que la superficie es rugosa, con poros y bordes libres, que pueden aumentar la superficie efectiva de adsorción. La masa de la partícula está ligada con la densidad media  $\rho$ ,

$$m = \rho V \quad (8.3)$$

luego si calculamos la relación entre la superficie  $S$  útil por unidad de masa para absorber radionúclidos, y la denominamos  $\sigma_m$ , llegamos a

$$\sigma_m \equiv \frac{S}{m} = \frac{1}{k\rho\phi} \quad (8.4)$$

donde se nota su dependencia inversamente proporcional con el diámetro de las partículas sólidas  $\phi$ . En el caso de partículas esféricas,  $k = 6$ , y un rango frecuente [204] para  $\rho$  en algunos de nuestros problemas es  $\rho \sim 2 - 3 \text{ g cm}^{-3}$ .

Aunque la materia en suspensión está formada por partículas finas ( $\phi < 62.5 \mu\text{m}$ ) y gruesas, dada la importancia de las primeras en los problemas que vamos a abordar, se sobrentenderá a partir de ahora y mientras no se diga lo contrario que la materia en suspensión son las partículas finas suspendidas.

Se presentará a continuación la tabla 8.1, donde se muestran el nombre y los tamaños de grano del amplio abanico de sólidos que pueden formar parte de un sedimento.

Para esta tabla, y por su utilidad en futuros análisis, se va introducir la escala logarítmica de Wentworth [107], que toma como referencia el grano grueso de arena de un milímetro de diámetro, y que coloca a los granos más pequeños en la parte positiva de la escala como premio a su carácter dinámico:

$$\Phi = \log_2 \frac{\phi_0}{\phi} \iff \phi = \phi_0 2^{-\Phi} \quad , \quad \phi_0 = 1 \text{ mm} \quad (8.5)$$

Unida a esta escala usaremos la norma DIN 4022 para la nomenclatura y segmento de los diferentes tipos de sólidos: arcilla, limo, arena, gravas, y piedras. Se dibuja una línea de separación para distinguir las partículas finas ( $\phi < 62.5 \mu\text{m}$ : limo y arcilla) de las demás.

TABLA 8.1: Clasificación de sólidos en suspensión en función de su diámetro

Tipo de sólido	$\phi$	$\Phi$
Piedras	$[64, \infty]\text{mm}$	$[-\infty, -6]$
Gravas	$[2, 64]\text{mm}$	$[-6, -1]$
Arena	$[1/16, 2] \text{ mm} = [0.0625, 2]\text{mm}$	$[-1, 4]$
Limo	$[1/512, 1/16] \text{ mm} \cong [2, 62.5]\mu\text{m}$	$[4, 9]$
Arcilla	$[0, 1/512] \text{ mm} \cong [0, 2]\mu\text{m}$	$[9, \infty]$

## 2. DINÁMICA GENERAL DE PARTÍCULAS SUSPENDIDAS EN EL OCÉANO

Ya se ha explicado que las partículas suspendidas participan pasivamente del movimiento del fluido cuyo modelo y solución conocemos de los bloques previos. Lo que ahora toca es poner sobre la mesa las condiciones bajo las cuales las partículas rompen la disciplina del fluido y se mueven respecto a él apareciendo un problema sólido–fluido que es representado principalmente por los siguientes procesos:

- (a) **Deposición** hacia el fondo marino.
- (b) **Resuspensión** desde el fondo marino.

Una expresión muy usada en la literatura [75, 117, 119, 208, 150] para el flujo por deposición es la siguiente:

$$\text{DEP} = w_s m_s \left( 1 - \frac{T^b}{T_{cd}} \right) \quad (8.6)$$

donde  $w_s$  es la velocidad de deposición de las partículas suspendidas,  $m_s$  es la función concentración de partículas suspendidas (materia en suspensión),  $T^b$  es la tensión en el

fondo marino, y  $T_{cd}$  la tensión crítica para la deposición de las partículas suspendidas. La tensión  $T_{cd}$  es un valor por encima del cual el proceso de deposición –o sedimentación– no tiene lugar.

La velocidad de deposición será calculada a partir de la ley de Stokes (Skreen, Irlanda, 1819–Cambridge, R.U., 1903) para el movimiento de caída –o sedimentación– de un sólido esférico en el seno de un fluido

$$w_s = \frac{\rho - \rho_w}{\rho_w} \frac{g\phi^2}{18\nu} \quad (8.7)$$

donde  $\{\rho, \phi\}$  son respectivamente la densidad y el diámetro de la partícula suspendida, así como  $\{\rho_w, \nu\}$  son la densidad y la viscosidad cinemática del agua.

A efectos de cálculos tomaremos la viscosidad cinemática a temperatura ambiente [21] como  $\nu \simeq 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .

Y una fórmula estimativa para  $w_s$  en la región que nos interesa es:

$$w_s(\text{m s}^{-1}) \sim \phi^2(\mu\text{m}^2) \times 10^{-6} \quad (8.8)$$

que evaluada para tres diámetros concretos en el intervalo de interés nos da:

$$w_s(1\mu\text{m}) \sim 1 \times 10^{-6} \text{ m s}^{-1}, \quad w_s(2\mu\text{m}) \sim 4 \times 10^{-6} \text{ m s}^{-1}, \quad w_s(20\mu\text{m}) \sim 4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}. \quad (8.9)$$

Una expresión muy usada en la literatura [117, 118, 150, 75, 129] para el flujo por resuspensión –o erosión– es la siguiente:

$$\text{ER} = E f \left( \frac{T^b}{T_{ce}} - 1 \right) \quad (8.10)$$

donde  $E$  es la constante de erosión sobre el sedimento,  $f$  es la fracción de partículas finas en la superficie del sedimento,  $T^b$  es la tensión en el fondo marino, y  $T_{ce}$  es la tensión crítica para la erosión del sedimento. La tensión  $T_{ce}$  es un valor por debajo del cual el proceso de resuspensión –o erosión– no tiene lugar. En la literatura [143] pueden encontrarse valores para esta tensión en el siguiente intervalo

$$T_{ce} \in [0.1, 1.5] \text{ N m}^{-2}. \quad (8.11)$$

Para sedimentos no cohesivos [143] se trabaja admitiendo iguales las dos tensiones críticas, bajo la hipótesis:

$$T_{cd} = T_{ce} \quad (8.12)$$

Y la constante de erosión  $E$  alcanza valores [152] como el que sigue:

$$E = 0.04 \text{ g m}^2\text{s}^{-1} . \quad (8.13)$$

En el artículo publicado por Kuhrts [102] sobre una parte del Báltico se trabaja con los siguientes valores:

$$w_s = 4 \times 10^{-4} \text{ cm s}^{-1} \quad , \quad T_{cd} = T_{ce} = 0.4 \text{ N m}^{-2} . \quad (8.14)$$

En esta parte, nuestro modelo va a trabajar con las siguientes aproximaciones:

- (a) Las fuentes de materia en suspensión se han separado en orgánica e inorgánica.
- (b) Para la primera se usó una velocidad de sedimentación  $w_s = 4 \times 10^{-4} \text{ cm s}^{-1}$  y unas tensiones  $T_{cd} = T_{ce} = 0.4 \text{ N m}^{-2}$ , tomadas de un estudio del transporte de materia en suspensión [102] en el sur del Mar Báltico donde domina la producción primaria, de lo que, usando la fórmula de Stokes, se deducen densidades para los sólidos orgánicos ligeramente (del orden de un dos por ciento) superiores a la del agua.
- (c) La materia inorgánica se ha separado en tres tamaños de grano siguiendo un esquema similar al publicado en [143], con diámetros  $\{\phi_1 = 2\mu\text{m}, \phi_2 = 8\mu\text{m}, \phi_3 = 32\mu\text{m}\}$  y tensiones críticas  $\{0.3, 0.6, 1.2\} \text{ N m}^{-2}$  respectivamente.

### 3. CÁLCULO DE LA TENSIÓN DE FONDO $\vec{T}^b$ A PARTIR DEL MODELO HIDRODINÁMICO

#### 3.1 Modelo conceptual de $\vec{T}^b$

Nuestro modelo hidrodinámico, basado a su vez en otros modelos previos de los institutos IOPAN y SMHI respectivamente [80, 43], plantea una parametrización [101, 155, 168] de las tensiones  $\{T_x^b, T_y^b\}$  sobre el fondo marino análoga a la que se hace para las tensiones en la superficie: el vector de tensiones debido al fondo oceánico  $\vec{T}^b$  lleva la dirección del vector transporte de masa  $\vec{M}$  y su módulo  $T^b$  es proporcional al cuadrado del



vector  $\vec{M}$  y a la inversa del cuadrado de la profundidad total  $H + \zeta$ . Aquí se muestra su dependencia respecto a  $\vec{M}$ , su módulo y sus componentes, la profundidad y el coeficiente de fricción  $r$ :

$$\begin{aligned} \vec{T}^b \parallel \vec{u}_b &\equiv \frac{\vec{M}}{|\vec{M}|} , & T^b &\propto M^2 \frac{1}{(H + \zeta)^2} \Rightarrow T^b = rM^2 \frac{1}{(H + \zeta)^2} \\ &\Rightarrow T_x^b = r \frac{M}{(H + \zeta)^2} M_x , & T_y^b &= r \frac{M}{(H + \zeta)^2} M_y , \end{aligned} \quad (8.15)$$

donde  $\vec{u}_b$  es el unitario en la dirección del vector  $\vec{M}$  cuyo módulo se puede expresar en función de  $\{\bar{U}(x, y), \bar{V}(x, y)\}$ .

Recordemos que  $\vec{M}$  es el vector *transporte de masa*  $\vec{M}$  definido como la cantidad de masa por unidad de tiempo que atraviesa un rectángulo imaginario de base la unidad y de altura  $H + \zeta$  colocada perpendicularmente a al vector  $\vec{M} = [M_x \ M_y]$ :

$$M_x = \int_{-H}^{\zeta} \rho U dz \quad M_y = \int_{-H}^{\zeta} \rho V dz \quad (8.16)$$

siendo  $\{U, V\}$  las componentes horizontales del campo de velocidades del modelo del IOPAN [80]. En los cálculos se tomó [155, 168] un valor para el coeficiente de fricción  $r = 2.5 \times 10^{-3}$  (Sistema Internacional). Es de vital importancia recordar que del modelo del IOPAN [80] se obtienen unas gráficas (capítulo 4) sobre las velocidades horizontales promediadas a lo largo de la columna de líquido  $\{\bar{U}_0(x, y), \bar{V}_0(x, y)\}$  obtenidas para las 8 direcciones principales y una velocidad del viento tal que  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$ .

Lo importante es que estas velocidades  $\{\bar{U}(x, y), \bar{V}(x, y)\}$  están íntimamente ligadas, como ahora veremos, a las componentes del vector  $\vec{M}$ , funciones principales de las que depende nuestro objetivo ahora,  $T^b$ :

$$M_x = \int_{-H}^{\zeta} \rho U dz = \lambda \zeta \ll H , \rho \cong \text{cte } \lambda = \rho H \bar{U} , \quad (8.17)$$

$$M_y = \int_{-H}^{\zeta} \rho V dz \lambda \zeta \ll H , \rho \cong \text{cte } \lambda = \rho H \bar{V} , \quad (8.18)$$

y sustituyendo en  $T^b$  :

$$T^b(x, y) = r \rho^2 (\bar{U}^2 + \bar{V}^2)(x, y) \quad (r \sim 3 \cdot 10^{-3} (S.I.) , \rho \sim 10^3 \text{ kg m}^{-3}) . \quad (8.19)$$

Habíamos particularizado para los ocho soluciones del IOPAN [80]:

$$T_0^b(x, y) = r\rho^2 (\overline{U}_0^2 + \overline{V}_0^2)(x, y). \quad (8.20)$$

Teniendo en cuenta el algoritmo de modulación del apartado 5.2.1 del capítulo 4 que recordamos a continuación

$$T^b(x, y) = T_0^b(x, y) \left(\frac{U_a}{10}\right)^{\lambda_T}, \quad 1 \leq \lambda_T \leq 2. \quad (8.21)$$

siendo  $\lambda_T$  un coeficiente mayor o igual que 1 y menor o igual que 2, que haremos variar en las simulaciones para ver cómo afecta a la dispersión en el sistema. Un valor típico de trabajo es  $\lambda_T = 2$  que hace que las validaciones de nuestro modelo sean bastante aceptables en relación a la complejidad de los problemas que estamos manejando. Este proceso se extiende a las ocho direcciones principales de viento. El parámetro  $\lambda_T$  es sensible a la turbulencia del sistema y al espesor de la capa superficial influenciada por el viento (capa Ekman). Ambas variables físicas varían en función de las estaciones del año, por lo que se podrán adaptar los valores de  $\lambda_T$  a estas condiciones.

Es notable la influencia de la mayor estratificación durante el verano y de la picnoclina estacional en la disminución [86] de la tensión  $T^b$  por el efecto barrera que ella supone. Comparando los resultados de Jönsson con los que arrojan otros trabajos ajenos a este efecto [80, 86], es razonable introducir una disminución de un 50% en  $T^b$ , atenuación con la que trabajará nuestro modelo.

A modo de ilustración se muestran a continuación dos gráficas de tensiones inducidas por vientos del Oeste calculadas según la metodología anterior, para dos intensidades distintas de vientos. Una primera para  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$  cuyas velocidades horizontales 2D se obtienen directamente del trabajo del IOPAN [80], y una segunda ( $U_a = 5 \text{ m s}^{-1}$ ) en que se aplica el algoritmo de modulación citado anteriormente. Posteriormente se repetirá este proceso para tensiones inducidas por vientos del sur con idénticas intensidades a las dos primeras ilustraciones.

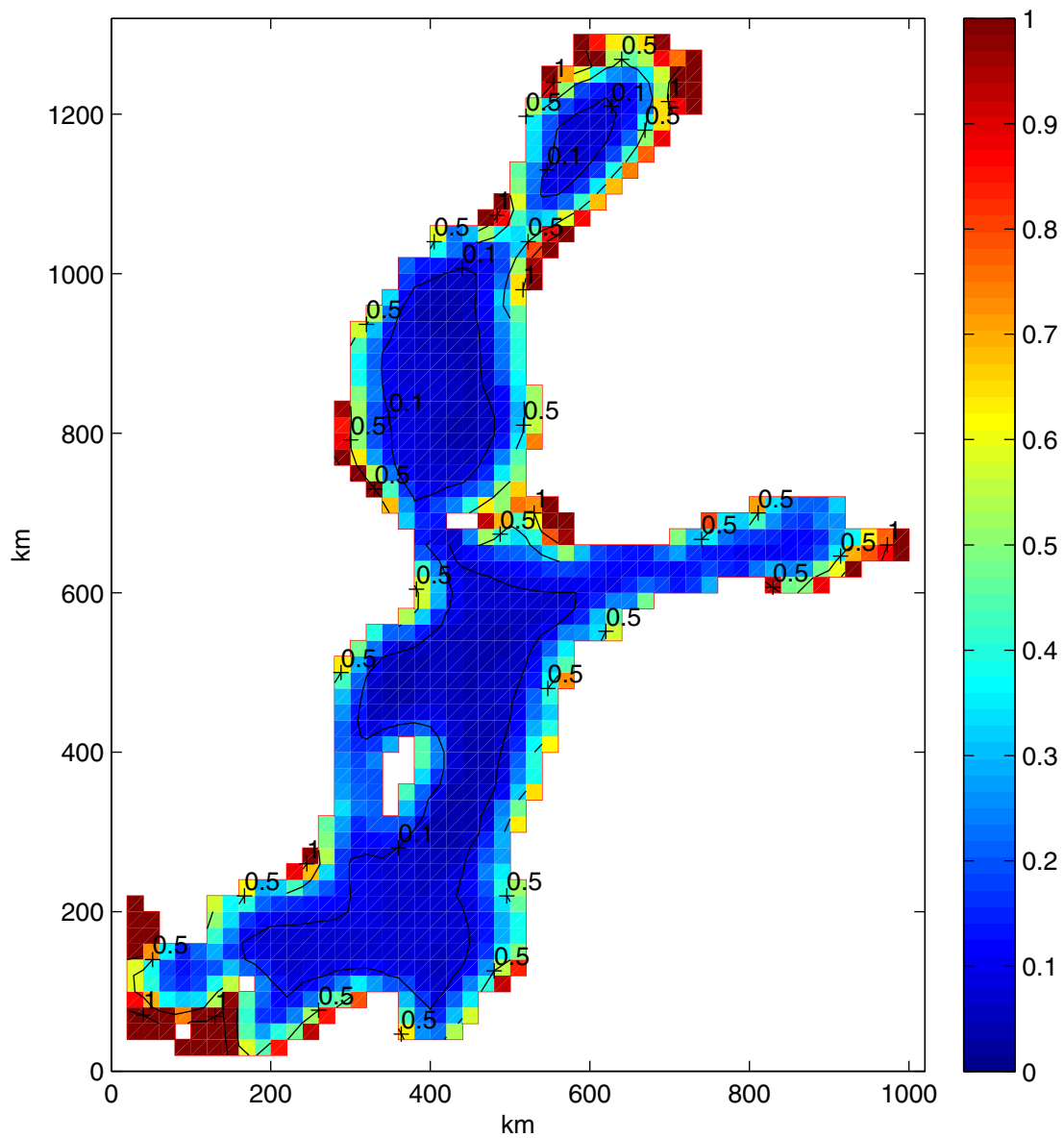


Figura 8.1: Gráfica calculada para las tensiones en el fondo del mar  $T^b$  ( $\text{N m}^{-2}$ ) inducidas por vientos del Oeste, tales que  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$ .

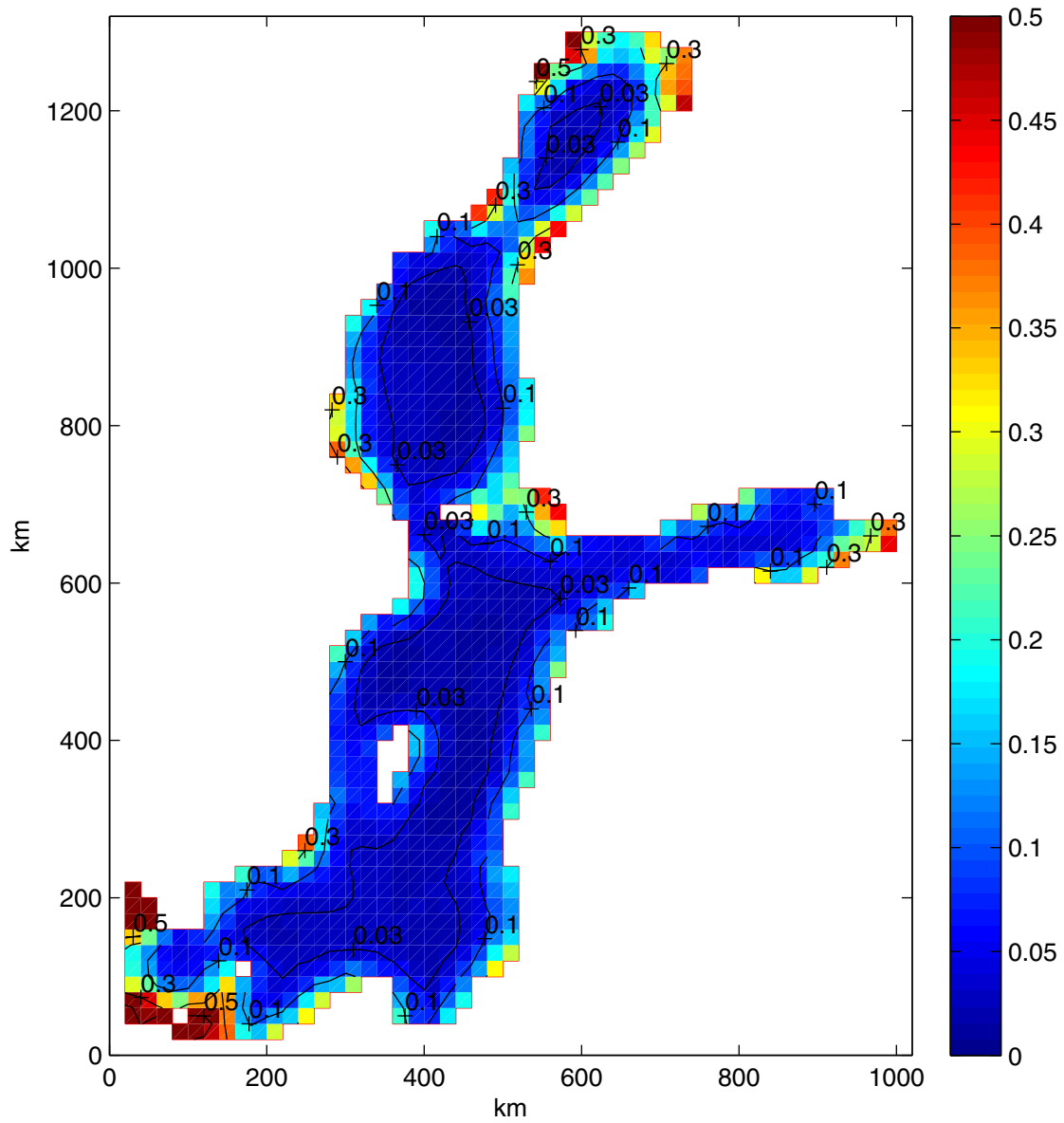


Figura 8.2: Gráfica calculada para las tensiones en el fondo del mar  $T^b$  ( $\text{N m}^{-2}$ ) inducidas por vientos del Oeste, tales que  $U_a = 5 \text{ m s}^{-1}$ , con  $\lambda_T = 2$ .

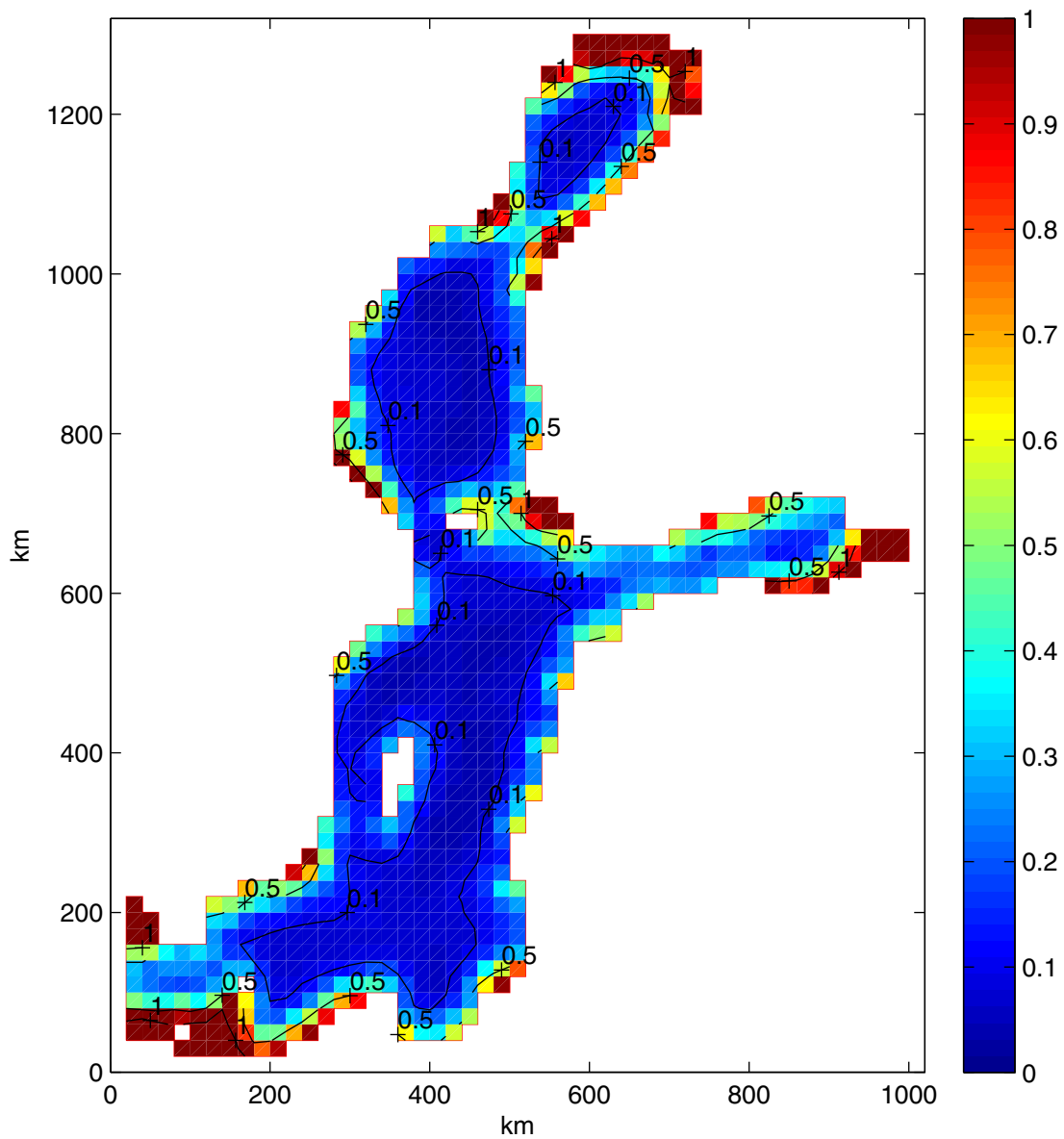


Figura 8.3: Gráfica calculada para las tensiones en el fondo del mar  $T^b$  ( $\text{N m}^{-2}$ ) inducidas por vientos del Sur, tales que  $U_a = 10 \text{ m s}^{-1}$ .

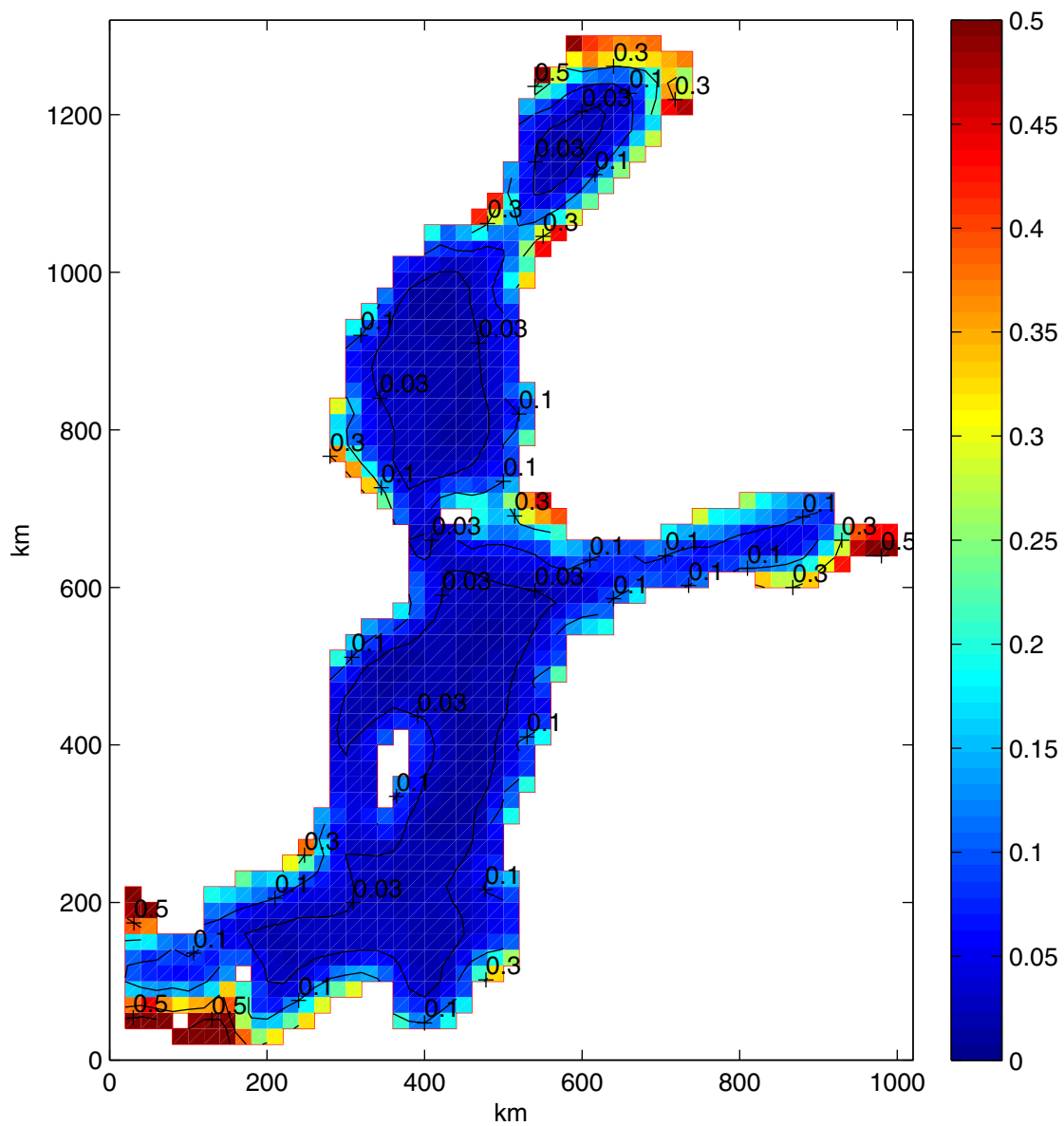


Figura 8.4: Gráfica calculada para las tensiones en el fondo del mar  $T^b$  ( $\text{N m}^{-2}$ ) inducidas por vientos del Sur, tales que  $U_a = 5 \text{ m s}^{-1}$ , con  $\lambda_T = 2$ .

### 3.2 Generación numérica de vientos responsables de la tensión de fondo $\vec{T}^b$

Una forma cómoda de escribir el vector de vientos es

$$\vec{U}_a = U_a \vec{u}_a \quad (8.22)$$

donde descomponemos el vector en el producto de su módulo  $U_a$  por su unitario  $\vec{u}_a$ .

Vamos a descomponer la generación numérica de  $\vec{U}_a$  en tres partes:

(a) Generación de  $U_a$ : Distribución de Weibull.

Trabajaremos con un valor medio  $\bar{U}_a$  durante cada estación del año. Los valores de referencia [115] de  $\bar{U}_a$  que vamos a tomar para las estaciones de invierno, primavera, verano y otoño son respectivamente  $\{8, 6, 5, 7\} \text{ m s}^{-1}$ . Las desviaciones respecto a  $U_a$  se generarán mediante la distribución de Weibull presentada en el capítulo 3 y que recordamos a continuación:

$$f_W(x; \lambda, k) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} \quad (8.23)$$

donde  $f_W$  es la función densidad de probabilidad,  $k$  es el parámetro de forma y  $\lambda$  es un parámetro de escala. La función es nula para valores negativos de  $x$ . Los resultados son muy buenos con un parámetro de forma  $k = 2$ , que es el que usaremos aquí. Es el valor más usado en otras aplicaciones como el diseño de aerogeneradores. Los valores de la moda ( $x_{max}$ ), de la mediana ( $x_{50}$ ) y de la media ( $\bar{x}$ ) difieren entre sí. Si trabajamos en una escala unitaria ( $\lambda = 1$ ) y normalizamos  $f_W$  para obtener su función densidad de probabilidad  $p_W(x)$  llegamos a

$$p_W(x) = 2xe^{-x^2}, \quad (8.24)$$

cuyos atributos estadísticos valen

$$x_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_{50} = \sqrt{\ln 2}, \quad \bar{x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (8.25)$$

La probabilidad de que  $x$  esté en el intervalo  $[x_0, x_1]$  será notada mediante  $p_{0,1}$  y valdrá:

$$p_{0,1} \equiv p(x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} p_W(x) dx = e^{-x_0^2} - e^{-x_1^2}, \quad \text{con } p(0, \infty) = 1. \quad (8.26)$$

Generemos sucesos de acuerdo con esa distribución. Si tenemos un total de  $N$  sucesos y llamamos  $N_{0,1}$  al número de ellos en el intervalo  $[x_0, x_1]$ , se cumplirá que:

$$N_{0,1} = N \left( e^{-x_0^2} - e^{-x_1^2} \right) \quad (8.27)$$

Si asignamos el primer suceso a  $x_0 = 0$  y el segundo a  $x_1$ :

$$N_{0,1} = 1 = N \left( 1 - e^{-x_1^2} \right) \implies x_1 = \sqrt{\ln \frac{N}{N-1}} \quad (8.28)$$

Si asignamos el tercero a  $x_2$  y generalizamos:

$$x_2 = \sqrt{\ln \frac{N}{N-2}}, \quad x_n = \sqrt{\ln \frac{N}{N-n}}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (8.29)$$

Para obtener  $x_n$  según la distribución de probabilidad  $p_W$  bastará generar números aleatorios enteros  $n$  entre 0 y  $N-1$ . Si usamos la función de  $\text{RAN}_W$  de MATLAB que los genera en el intervalo  $[0, 1]$  y redondeamos al entero más cercano, tendremos  $n$  y  $x_n$

$$n = (N-1) \text{RAN}_W : x_n = \sqrt{\ln \frac{N}{N - (N-1) \text{RAN}_W}}. \quad (8.30)$$

Para pasar al continuo, hacemos tender el número de sucesos  $N$  a infinito, con lo que  $N-1 \approx N$  y la expresión se simplifica:

$$x = \sqrt{\ln \frac{1}{1 - \text{RAN}_W}}, \quad (8.31)$$

donde  $\text{RAN}_W$  son números aleatorios entre 0 y 1 que se generan en un proceso de Monte Carlo. Si  $\bar{U}_a$  es el valor medio de la distribución de Weibull de las velocidades, y llamamos  $U_a$  a las velocidades que queremos generar, podremos dimensionar el esquema anterior

$$\frac{x}{\bar{x}} = \frac{U_a}{\bar{U}_a} \quad \left( \bar{x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \quad (8.32)$$

por lo que el algoritmo de generación de velocidades  $U_a$  será



$$U_a = \frac{2\bar{U}_a}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \frac{1}{1 - \text{RAN}_W}}, \quad (8.33)$$

donde  $\bar{U}_a$  van a ser las típicas velocidades estacionales medias  $\{8, 6, 5, 7\} \text{ m s}^{-1}$ . Nótese que estamos implícitamente asumiendo iguales tiempos de permanencia para los diferentes vientos de la distribución. Una forma más directa de llegar al resultado anterior es trabajar con una función generatriz  $G(x)$ : la función probabilidad entre 0 y un punto genérico  $x$  resultante de integrar la función densidad de probabilidad,  $G(x) = 1 - e^{-x^2}$ , cuyo recorrido va desde 0 hasta 1, como el generador de números aleatorios  $\text{RAN}_W$ . Si generamos números aleatorios entre 0 y 1 vamos obteniendo rectas horizontales cuyos cortes con  $G(x)$  originan los puntos cuyas abscisas nos van a dar las velocidades de vientos deseadas. Así funciona nuestro algoritmo estocástico para generación de velocidades de viento weibullianas:

$$G(x) = 1 - e^{-x^2} = \text{RAN}_W \implies x = \sqrt{\ln \frac{1}{1 - \text{RAN}_W}}, \quad (8.34)$$

(b) Generación de  $\vec{u}_a$ : Rosas de vientos.

Una vez generado  $U_a$  para un determinado día del año, pueden darse dos casos:

i.  $U_a < 6 \text{ m s}^{-1}$ .

En este caso generaremos  $\vec{u}_a$  aleatoriamente según lo visto en el capítulo 7. Dividiremos el segmento 0–1 en 8 trozos iguales, uno para cada tipo de viento y generaremos números aleatorios entre 0 y 1.

ii.  $U_a \geq 6 \text{ m s}^{-1}$ .

En esta situación utilizaremos las tablas 7.2 y 7.3 sobre probabilidades direccionales cuya representaciones geométricas constituyen las rosas de los vientos. Dividiremos el segmento 0–1 en 8 trozos proporcionales a la probabilidad de cada viento y finalmente, generaremos números aleatorios entre 0 y 1 para obtener el unitario  $\vec{u}_a$ .

(c) Generación de tiempos de permanencia  $t_w$ : Espectro de energía.

De los espectros de energía del capítulo 5, dedicado a la difusión y la energía en el Mar Báltico, se desprende que los picos energéticos asociados a los vientos se encuentran entre los periodos  $T = 3$  días y  $T = 4$  días, con caída hacia ambos lados del eje horizontal. Por ello se propone a continuación una función simple de

probabilidades cuyo perfil sea análogo al perfil de energías. Se trata de una función discreta de probabilidades con simetría en el intervalo  $T \in [1, 6]$  días, concentrada en los valores enteros del intervalo, y nula en el resto de la recta real positiva

$$\begin{aligned} p_w(T_i) &= \frac{1}{12}T_i \quad , \quad T_i = 1, 2, 3 ; \\ p_w(T_i) &= \frac{1}{12}(7 - T_i) \quad , \quad T_i = 4, 5, 6 . \\ p_w(T_i) &= 0 \quad , \quad \text{en el resto de casos .} \end{aligned} \tag{8.35}$$

Dividiremos el segmento 0–1 en 6 trozos proporcionales a la probabilidad de cada periodo y finalmente, generaremos números aleatorios entre 0 y 1 para obtener  $t_w$ .

## 4. MODELO DE TRANSPORTE DE LA MATERIA EN SUSPENSIÓN

### 4.1 Fuentes de materia en suspensión en el Mar Báltico

Ya que no podía ser de otro modo, las fuentes que vamos a considerar en el modelo de materia en suspensión, son también fuentes principales [29] en la inmensa mayoría de los ecosistemas del planeta:

- (a) Los ríos.
- (b) La producción primaria (materia orgánica).

Como primera aproximación y omitiendo muchos detalles sobre determinados puntos del sistema e instantes concretos a lo largo del año, se puede adelantar que ambas contribuciones van a estar normalmente en el mismo orden de magnitud, y que la aportación orgánica global será ligeramente mayor.

#### 4.1.1 Materia en suspensión por ríos

Según estudios publicados sobre esta materia [68] el aporte de los ríos al Mar Báltico en forma de materia en suspensión es del orden de  $10^{10}$  kg anuales.

El volumen anual de agua suministrado [209, 34, 35, 125] por los ríos al sistema es de unos  $15000 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ , que en otras unidades serían unos  $500 \text{ km}^3 \text{ a}^{-1}$ , lo que supone un 2.5 % del volumen del sistema.

El aporte al Mar Báltico proviene del drenaje en tierra llevado a cabo en todos los países de la cuenca báltica y suma un área unos  $1.7 \times 10^6 \text{ km}^2$ , unas cuatro veces

la superficie del Mar Báltico, más de tres veces la superficie de un país como España o Suecia. Como curiosidad [29] el volumen de agua recogido por todos ríos bálticos es similar al de uno sólo de los grandes ríos del planeta, como el Mississippi.

En la figura [68] se aprecia que son nueve los países costeros con el Báltico: Suecia, Finlandia, Rusia (territorios de Leningrado y Kaliningrado), Estonia, Letonia, Lituania, Polonia, Alemania y Dinamarca.



Figura 8.5: Mapa ilustrativo de las cuencas hidrográficas del Mar Báltico.

Para completar los de la cuenca báltica hay que añadir otros cuatro países, alguno de cuyos ríos termina vertiendo en el sistema que nos ocupa: República Checa, Eslovaquia, Ucrania y Bielorrusia. Ucrania y Bielorrusia también tienen tierras que dan a la cuenca del Mar Negro, entre las que se incluyen las afectadas por el desastre de Chernobyl, que drenaron primero hacia el río Pripyat, afluente del río Dnieper, perteneciente a la cuenca del Mar Negro.

Conectando el flujo de agua  $\Phi_w^{riv}$  y el de masa suspendida  $\Phi_m^{riv}$  podemos hacer una estimación sobre la concentración de la materia suministrada por los ríos:

$$\Phi_w^{riv} \sim 1.5 \times 10^4 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \quad , \quad (8.36)$$

$$\Phi_m^{riv} = \rho_m^{riv} \Phi_w^{riv} \sim 10^{10} \text{ kg a}^{-1} \quad \implies \quad \rho_m^{riv} \sim 20 \text{ g m}^{-3} . \quad (8.37)$$

Otro hecho destacable es que existen un grupo reducido de unos cinco ríos catalogables como medianos-grandes y un elevado número (unos sesenta) ríos medianos-pequeños que riegan de una manera más o menos uniforme [125] las costas bálticas.

Dentro del grupo de los ríos mayores los que más van a afectar a nuestro estudio son: Neva, Vístula, Óder, Neman, Kemijoki y Angermanalven. Para recoger esto en el modelo, trabajaremos teniendo en cuenta la aportación y flujos de los ríos mayores como fuentes puntuales, y trataremos el resto de las aportaciones como un continuo costero ponderando las descargas de los ríos pequeños en cada zona.

A partir de ahora llamaremos ríos grandes a los que modelemos como fuente puntual y pequeños a los que lo hagamos con fuente continua. Esta superposición de una distribución discreta de fuentes más una distribución continua para modelar los ríos pequeños es razonable dado el número de ríos pequeños, la resolución espacial de nuestro modelo y las escalas temporales con las que vamos a trabajar.

Tendremos unos 60 ríos pequeños y un contorno costero de unos 3000 km, lo que supone un río pequeño cada dos o tres nudos de nuestro mallado, que tiene 20 km de resolución espacial horizontal.

Para acercarnos un poco más a la realidad de estos ríos, podemos hacer una comparación entre ellos y los caudales medios anuales de algunos ríos españoles, anotando que

lugar ocuparían estos últimos en el ranking de los 65 ríos bálticos: el río Tajo ocuparía el lugar 9º, el Guadalquivir estaría en el puesto 25º, mientras que Júcar y el Segura estarían en los puestos 47º y 58º respectivamente.

En la tabla siguiente aparecen los cinco ríos que más influencia van a tener en nuestro estudio.

TABLA 8.2: Caudal de los grandes ríos de la cuenca báltica

Río	Neva	Vístula	Neman	Óder	Kemijoki	Ångermanälven
Aporte medio ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )	2460	1065	632	573	562	489

Si distribuimos los ríos por zonas compartimentales veremos una mayor aportación relativa mayor en las zonas del norte (Mar de Botnia, Bahía de Botnia) y Golfo de Finlandia respecto al Báltico Estricto (grueso del Báltico Central y Sur), con una ponderación por metro de línea de costa que puede ser entre dos y cinco veces superior, como puede comprobarse en la siguiente tabla.

TABLA 8.3: Aporte de agua dulce a los compartimentos bálticos

Compartimento	Aporte fluvial ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )
Bahía de Botnia	3104
Mar de Botnia	2860
Golfo de Finlandia	3556
Golfo de Riga	1020
Báltico Estricto	3610
Estrechos de Dinamarca, Kattegat	1159
TOTAL	15310

Si ponderamos la aportación de los ríos con los volúmenes de cada zona la desigualdad anterior es mayor, debido a que la zona Báltico Estricto es la más profunda y voluminosa, como puede comprobarse a continuación.

Para tener presente la variación mensual del caudal de los ríos, veamos el siguiente el perfil (figura 8.6), que es una curva media calculada a partir de datos experimentales [209, 125].

TABLA 8.4: Aporte de agua dulce en relación al volumen de los compartimentos  
bálticos

Compartimento	Incremento de volumen anual por ríos (%)
Mar de Botnia y Bahía de Botnia	2.8
Golfo de Finlandia	10.7
Golfo de Riga	6.5
Báltico Estricto	0.9
TOTAL	2.5

Aunque se representa un perfil medio (figura 8.6), existen pequeñas diferencias norte-sur, debido a una mayor y más tardía subida del caudal de los ríos del norte, cuyas aguas primaverales provienen en gran proporción de los deshielos de estas zonas frías.

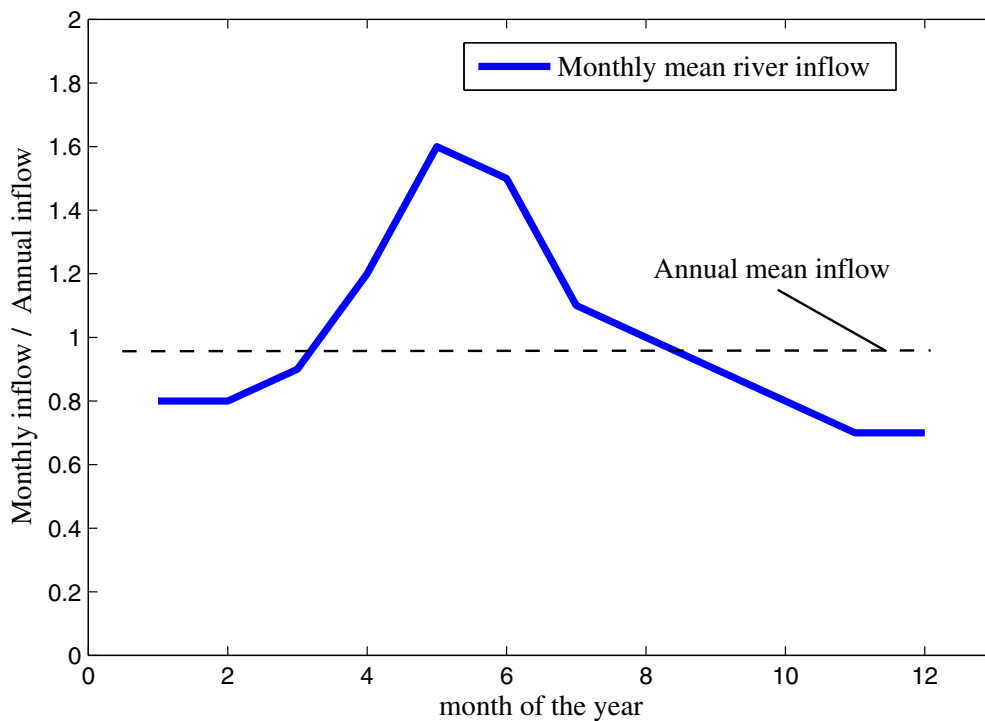


Figura 8.6: Caudal medio mensual de los ríos bálticos en unidades relativas de caudal medio anual.

#### 4.1.2 Fuentes de producción primaria

La información sobre las fuentes de producción primaria en el Mar Báltico se basan fundamentalmente en dos trabajos previos:

- (a) Un estudio sobre materia de suspensión en el Mar Báltico de Hakanson [58] donde se analizan y modelan con bastante detalle pequeños sistemas ( $2 - 20 \text{ km}^2$ ) repartidos por diferentes latitudes de este mar.

En este trabajo se establece una estrecha correlación matemática entre la tasa de producción primaria y la densidad de clorofila en el Báltico.

- (b) Un modelo sobre la dinámica anual de la clorofila en el Mar Báltico [37] de donde salen unos mapas con la densidad de clorofila mes a mes a lo largo del año.

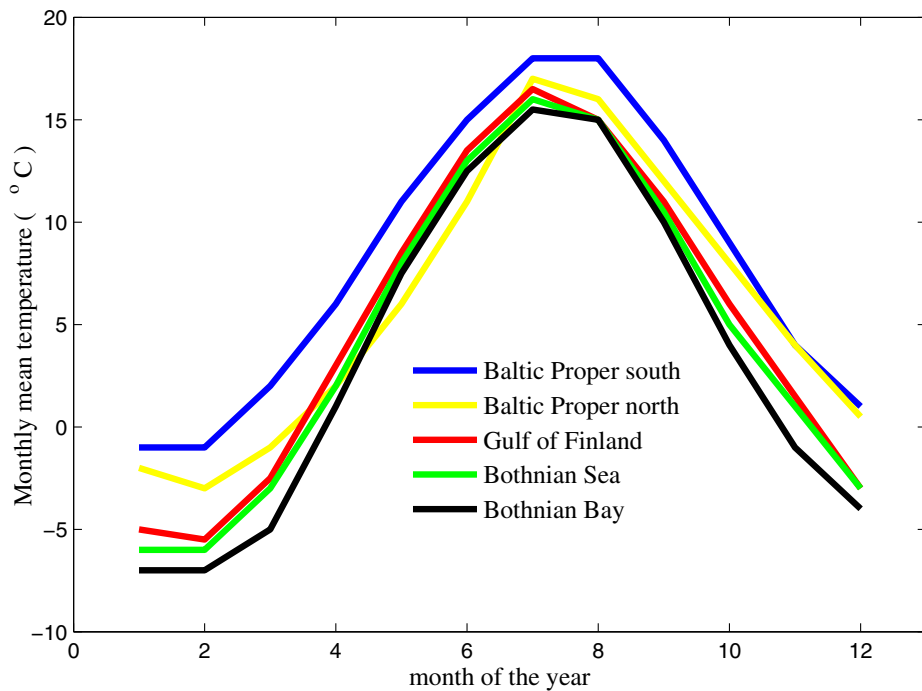


Figura 8.7: Curvas de temperatura media mensual [108] en diferentes zonas del Mar Báltico.

Aunque la relación es más complicada, se ha simplificado sustituyendo variables por valores medios que aparecen en el propio estudio ya citado [37], llegando a la siguiente ecuación para la tasa producción orgánica,  $\Phi_{org}$ , en función de la temperatura y la densidad de clorofila  $\rho_{chl}$ :

$$\Phi_{org} = c T^a \rho_{chl}^b \quad (8.38)$$

donde:

$$\Phi_{org} = \Phi_{org}(\text{g m}^{-2} \text{mes}^{-1}) \quad , \quad \rho_{chl} = \rho_{chl}(\text{mg m}^{-3}) \quad , \quad (8.39)$$

$$a = 1 \quad , \quad b = 0.93 \quad , \quad c = 0.35 \quad , \quad (8.40)$$

$$T = \frac{1}{10} + \theta \times \max(0, \text{sign } \theta) \quad \text{siendo } \theta = \theta(^{\circ}\text{C}) \quad . \quad (8.41)$$

La temperatura  $\theta(^{\circ}\text{C})$  es la temperatura media mensual de la superficie del agua. Como indicadores de estas temperaturas se pueden usar los anuarios de temperaturas de los institutos Suecia y Finlandia o el trabajo recopilatorio de Landsberg [108]. En la figura 8.7 se muestran unas gráficas sobre las temperaturas medias mensuales en una estación meteorológica representativa de cada zona del Báltico: Báltico Estricto Sur, Báltico Estricto Norte, Golfo de Finlandia, Mar de Botnia, Bahía de Botnia.

Respecto a las densidades de clorofila ( $\text{mg m}^{-3}$ ) a lo largo del año, se van a utilizar unas cartas mensuales existentes en la literatura [37] tomando valores medios en cada compartimento del Báltico y teniendo en cuenta los máximos locales en las desembocaduras de los ríos más importantes.

#### 4.2. Ajuste de la tensión crítica de resuspensión al tipo de fondo marino

Para acercarnos a esta cuestión es necesario describir aunque sea de una manera somera las características principales del fondo marino báltico.

La clasificación de la superficie sedimentaria más usada en este sistema es la llamada aproximación genética [78] basada en las características acústicas del sedimento. Los tipos básicos de suelo marino según esta clasificación son los siguientes:

- (a) Suelo duro (Hard bottom): formado por piedras y gravas gruesas.
- (b) Suelo arenoso (Sand bottom): formado por arena y gravas finas.
- (c) Suelo suave (Soft bottom): formado por limos y arcillas.

Cuando se hacen las mediciones sobre una zona concreta del fondo del mar se encuentra en muchos casos que la señal contiene información combinada de dos tipos distintos



de suelos. Así, podemos hablar de suelos binarios. Los suelos binarios pueden presentarse compensados (igual proporción entre sus partes) o descompensados (uno de los dos suelos es mayoritario). De ahí, que el mapa detallado del fondo marino báltico [115, 78] contenga doce variedades de suelos, que se muestran en la siguiente tabla:

TABLA 8.5: Tipos básicos de fondos marinos bálticos y sus abreviaturas

Tabla de suelos	SOFT	SAND	HARD
SOFT	SF	SF-SN , SF-sn , SN-sf	SF-H , SF-h , sf-H
SAND	-	SN	SN-H , SN-h , sn-H
HARD	-	-	H

Abreviaturas:

SOFT = SF , soft = sf ; SAND = SN , sand = sn ; HARD = H , hard = h.

La letra minúscula indica que se encuentra en una proporción menor.

A partir de esta bibliografía se ha elaborado, tras un largo trabajo de adaptación manual y digital a nuestro mallado, un mapa con los cinco tipos de suelos más abundantes, recogido todo ello en la figura 8.8.

Para llegar a este mapa, han sido despreciados los suelos muy minoritarios, a la vez que se han agrupado entre sí (por ejemplo, SN-h → SN) algunas clases de suelos por su muy similar comportamiento respecto a la dinámica de la materia en suspensión, que es lo que aquí nos convoca. Los cinco tipos de suelos que van a aparecer en nuestro modelo son:

SOFT    SOFT-HARD    SAND    HARD-soft    HARD.

El origen estos suelos binarios con una estructura tan irregular a pequeña escala, donde conviven texturas tan distintas, obedece al pasado glacial relativamente reciente del Mar Báltico, del que ya se habló en el capítulo 3. La última glaciación afectó severamente al Báltico Norte, y el sistema no terminó de formarse como tal hasta hace unos siete mil años (figura 3.3 del capítulo 3). Antes de adquirir su actual condición de mar salobre (7000 B.P.) pasó incluso por una fase de lago (*Ancylus Lake*; [41]) durante unos dos mil años, hasta que se abrieron los estrechos de Dinamarca, gracias a la recuperación de la forma de los suelos Báltico adentro.

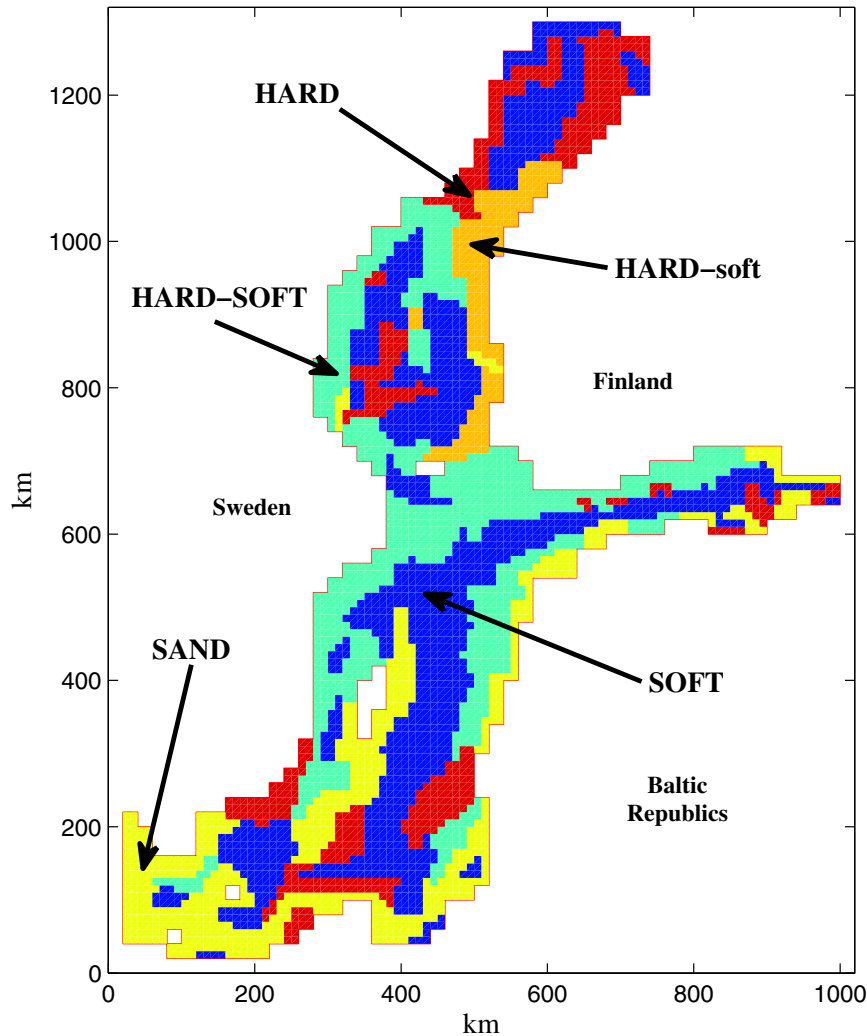


Figura 8.8: Mapa del fondo oceánico del Mar Báltico con los cinco tipos de suelos más abundantes.

Un consecuencia actual del pasado glacial es que el fondo del Báltico Norte aún recupera su forma y sube a un ritmo de  $1 - 9 \text{ mm a}^{-1}$ , mayor cuanto más al norte. Por todo ello, y resumiendo, la batimetría es muy suave al sur, con presencia de arenas de todo tipo, e irregular y escarpado a medida que avanzamos hacia el norte.

Los suelos mixtos presentan irregularidades [115, 78] con pequeñas fosas, salientes, valles y pequeñas mesetas que hacen que se vayan alternando zonas de erosión y sedimentación en una superficie de control como la típica que tiene nuestro modelo ( $20 \text{ km} \times 20$

km) o los modelos y estudios en que éste se basa. Estamos hablando por tanto de una escala fina por debajo de la resolución natural de nuestro estudio.

Las tensiones sobre sedimento  $T^b$  que usa por ahora nuestro modelo están asociadas a una capa límite de un tamaño mayor que la capa límite del fluido que circula por estas irregularidades y cuya tensión asociada es la que interviene más directamente en la resuspensión. Por tanto, habrá que corregir  $T^b$  en las zonas donde tengamos zonas mixtas con irregularidades caracterizadas por las etiquetas HARD-SOFT o HARD-soft. Recordemos [175] que la teoría de la capa límite de von Karman (1881–1963) es cierta bajo condiciones altas de suavidad:

$$V(z) = \frac{v^*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \quad (8.42)$$

$$\kappa = \frac{2}{5} : \text{constante de von Karman} \quad ; \quad z : \text{profundidad en la capa límite} \quad (8.43)$$

$$(v^*)^2 \equiv T/\rho \quad , \quad T : \text{Tensión} \quad , \quad z_0 : \text{longitud asociada a la rugosidad.} \quad (8.44)$$

Hay un interesante trabajo [102] que estudia los fenómenos de erosión en el Báltico sur-centro y que trabaja con dos capas límites para tener en cuenta estas dos escalas del problema: una conclusión que parece desprenderse del estudio es que el fenómeno de resuspensión se frena si las irregularidades de la escala fina son grandes, siendo necesaria una tensión mucho mayor en la capa límite superior para que el fenómeno tenga lugar. Este trabajo nos invita a reducir drásticamente  $T^b$  en las zonas mixtas.

Como consecuencia, una hipótesis de trabajo para esta versión del modelo será la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Si } P \in \text{H-SF} \cup \text{H-sf} &\implies T^b(P) \sim 0 : \\ &\implies T^b(P) < T_{ce}, \text{ y el punto } P \text{ no sufre erosión.} \end{aligned} \quad (8.45)$$

La condición anterior de reducción de  $T^b$  la aplicaremos a la fracción  $f_S$  de puntos "soft" en los sedimentos mixtos. Aquí, asumiremos los siguientes valores para  $f_S$ :

$$\text{Zona HARD-SOFT:} \quad f_S = \frac{1}{2} \quad (8.46)$$

$$\text{Zona HARD-soft:} \quad f_S = \frac{1}{5} \quad (8.47)$$

También apunta en este mismo sentido el trabajo de Jönson [86]. Se trata de un modelo para predecir cuáles son zonas de Erosión, Transporte y acumulación en el Mar Báltico. Lo más destacable de este estudio es que las discrepancias entre el modelo y la experiencia se producen en gran parte sobre las zonas de suelo mixto.

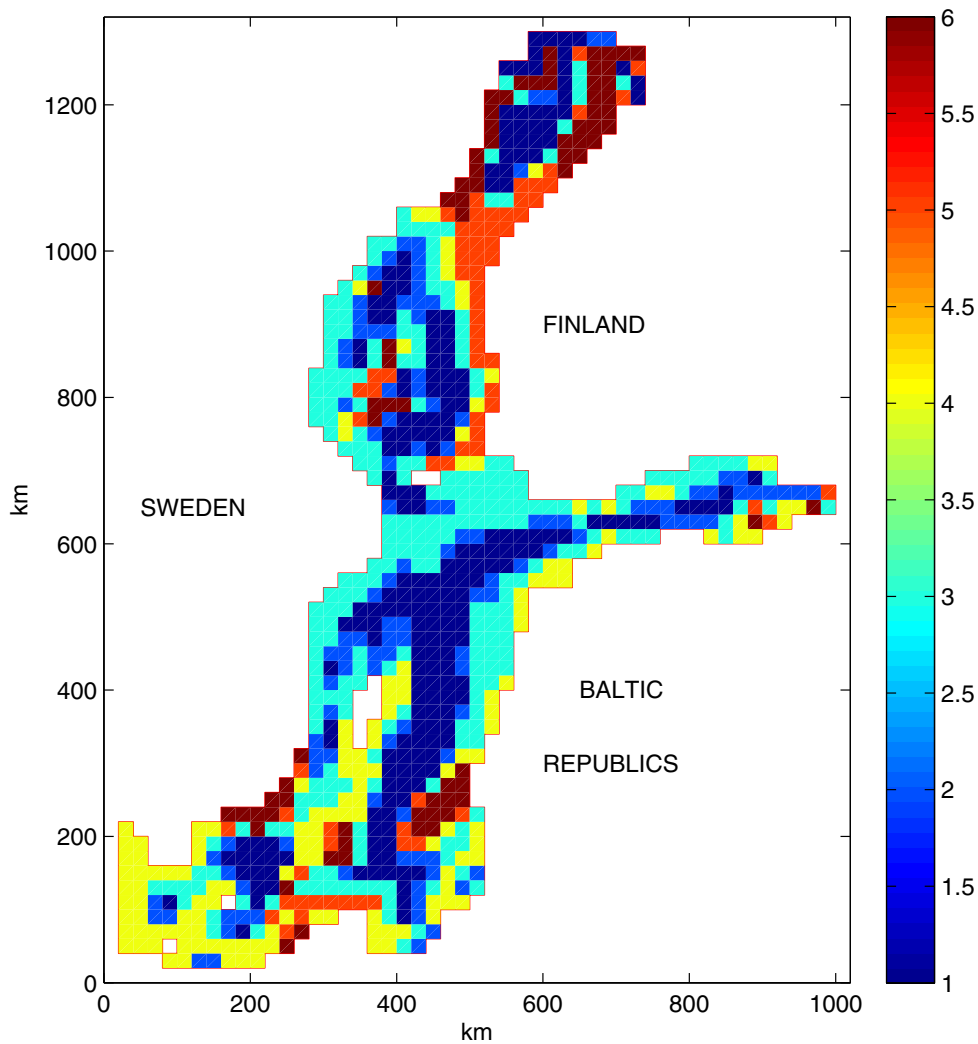


Figura 8.9: Mapa de tipologías de suelos calculado para una resolución horizontal de  $20 \text{ km} \times 20 \text{ km}$ , información necesaria en el modelo de transporte de materia en suspensión, cuya salida se incorpora como input numérico al modelo dispersión de radionúclidos. La asignación numérica a cada tipo de suelo se indica entre paréntesis:

SOFT (1); SOFT-hard (2); SOFT-HARD (3); SAND (4); HARD-soft (5); Hard(6).

### 4.3. Resultados y validación del modelo de materia en suspensión

Vamos a aplicar un Modelo Lagrangiano de Monte Carlo para la evolución Dinámica de la Materia en Suspensión por una serie de razones que exponemos a continuación:

- (a) El modelo de materia en suspensión es en principio, un submodelo del modelo completo de transporte de radionúclidos no conservativos, objetivo central de esta tesis.
- (b) En principio se diseñó un esquema de diferencias finitas, sometido a advección media anual (capítulo 7), donde se corregían los coeficientes de difusión físicos descontándoles [4, 149] la parte debida a la difusión numérica como se vio en las metodologías del capítulo 6:

$$K_{nd}(v) = v(\Delta x - v\Delta t) / 2. \quad (8.48)$$

Se intentaba minimizar este efecto numérico eligiendo el paso de tiempo adecuado jugando con la dependencia parabólica de la función  $K_{nd}(v)$ . Se manejó este esquema de trabajo porque resultaba tener menos coste computacional, pero por otro lado, esta elección acarrea ciertas limitaciones: una difusión numérica en las capas de fondo superior a la difusión física, y un algoritmo integrado posteriormente de una manera algo artificiosa y limitada en el modelo lagrangiano de transporte radionúclidos no conservativos. Así, finalmente, se decidió trabajar con un modelo lagrangiano para la materia en suspensión, familiar del desarrollado en el capítulo 7.

- (c) Una versión futura del modelo de materia en suspensión bajo diferencias finitas sería someterlo a advección media anual (capítulo 7) corregida a su vez por el método de limitación de flujo MSOU 3D expuesto en el capítulo 6.
- (d) Además, será también interesante en el futuro poder hacer ejercicios de comparación de metodologías, comparando la versión de diferencias finitas que limita los flujos advectivos (MSOU 3D) con la metodología lagrangiana de Monte Carlo.

Este modelo está encaminado a la obtención de las concentraciones de materia en suspensión en agua  $-\rho_S(\text{g m}^{-3})-$  y la masa acumulada en el fondo marino  $-\sigma_S(\text{g m}^{-2})-$  desde un instante ( $t = 0$ ) que tomaremos en una fecha inicial de nuestro problema que va a ser el 1 de mayo de 1986,

$$\sigma_S(t) = \int_0^t R_S(\tau) d\tau \quad , \quad R_S = \text{DEP} - \text{ER} \quad (8.49)$$

donde  $R_S$  es la tasa de sedimentación que suele expresarse en  $\text{g m}^{-2} \text{a}^{-1}$ . La tasa de sedimentación es la diferencia entre la tasa de deposición y la de erosión. Estas funciones serán un input para el modelo de transporte de radionúclidos no conservativos.

Con motivo del uso del esquema de corrientes advectivas anuales, trabajaremos con la tabla de coeficientes de difusión (tabla 8.6) elaborada para estos efectos en el capítulo 7, donde se muestran rangos de referencia para la difusión horizontal anual  $K_h^{anu}(\text{m}^2 \text{s}^{-1})$  y para la vertical  $K_v(\text{cm}^2 \text{s}^{-1})$  en la superficie del mar, variables según las estaciones el año y de implementación inmediata en las simulaciones de este capítulo.

TABLA 8.6: Rangos de referencia para los coeficientes de difusión horizontal y vertical

Tabla de Difusión	Invierno	Primavera	Verano	Otoño
$K_h^{anu} (\text{m}^2 \text{s}^{-1})$	400–800	200–400	150–300	300–600
$K_v (\text{cm}^2 \text{s}^{-1})$	15–30	5–10	1–3	10–20

Los perfiles verticales que se han aplicado a los coeficientes de difusión  $K_h^{anu}$  y  $K_v$  están contenidos en el capítulo 5 y el apartado 3.3 del capítulo 7.

Los coeficientes de difusión que se han usado para las capas no superficiales se han calculado a partir de los valores superficiales de la tabla de arriba teniendo en cuenta los perfiles verticales de  $K_h(\text{m}^2 \text{s}^{-1})$  y  $K_v(\text{cm}^2 \text{s}^{-1})$  que aparecen en las tablas del capítulo 5, que es la parte de esta tesis doctoral dedicada por entero a la difusión.

La tensión en el fondo de la columna de líquido  $T^S$  es una magnitud dinámica clave en este problema. Los valores altos de  $T^S$  son los que gobiernan los procesos de erosión y transporte de la materia suspendida, mientras que la sedimentación requiere condiciones energéticamente bajas para poder desarrollarse. La tensión es lógicamente más vigorosa en las zonas someras que en las más profundas y será modelada por los algoritmos descritos en el apartado 3 de este capítulo que incluyen tanto el modelo conceptual de la tensión  $T^S$  inducida por vientos como su generación numérica.

El aporte de ríos mayores como el Neva, el Vístula y el Oder se han tenido en cuenta como fuentes puntuales. Los demás se han tenido en cuenta computando en cada

compartimento la materia que llega cada mes y dividiendo por la longitud de la línea de costa, todo ello a partir de la información del apartado 4.1.1 de este capítulo; así, se ha introducido un aporte continuo de materia en suspensión por la costa. Del mismo modo, y de acuerdo a los detalles expuestos en el apartado 4.1.2, se ha implementado el aporte de materia en suspensión debido a fuentes de producción primaria. Para las simulaciones se han tomado los siguientes pasos de tiempo para la circulación y la difusión respectivamente:

$$\Delta t_{cir} = 6 \text{ h} \quad , \quad \Delta t_{dif} = 1 \text{ h} . \quad (8.50)$$

Con este esquema lagrangiano al esquema de diferencias finitas, los tiempos de CPU han sido del orden 120 minutos por cada año simulado; se ha simulado cinco años de transporte que permite alcanzar sobradamente el estado estacionario de la materia en suspensión; todo ello en una computadora estándar de 2.3 GHz y 3.0 GB de RAM.

Se parte de una concentración inicial  $\rho_S = 4 \text{ g m}^{-3}$  en las capas 1 y 2,  $3 \text{ g m}^{-3}$  en la capa 3,  $2 \text{ g m}^{-3}$  en la capa 4, y  $1 \text{ g m}^{-3}$  en las inferiores (5 y 6). En las simulaciones se hace constar que el estacionario se alcanza transcurrido aproximadamente un año de simulación. Si definimos *unidad práctica de volumen* ( $vol_{prac}$ ) como el volumen de una celda de nuestro modelo numérico que tiene una altura de 5 metros:

$$vol_{prac} = h_x \times h_y \times 5 \quad (8.51)$$

las partículas trazadoras se introducen inicialmente proporcionalmente a la función  $\rho_S(\text{g m}^{-3})$ , asignando 100 partículas por cada unidad práctica de volumen,

$$N_{ijk}(0) = 100 \times \rho_{S,ijk}(0) \times vol_{ijk}/vol_{prac} = 100 \times \rho_{S,ijk}(0) \times h_k/5 \quad (8.52)$$

donde  $h_k$  es el espesor de la capa  $k$ , con  $k = 1, \dots, 6$ .

Dado que conocemos los términos fuente de materia en suspensión provenientes de la costa ( $\dot{N}_{ij}^{cos}$ ) y de la producción primaria ( $\dot{N}_{ij}^{org}$ ), cada intervalo de tiempo  $\Delta t$ , inyectaremos partículas fuente al sistema:

$$\Delta N_{ij1} = \dot{N}_{ij} \Delta t \quad , \quad \dot{N}_{ij} = \dot{N}_{ij}^{org} + \dot{N}_{ij}^{cos} . \quad (8.53)$$

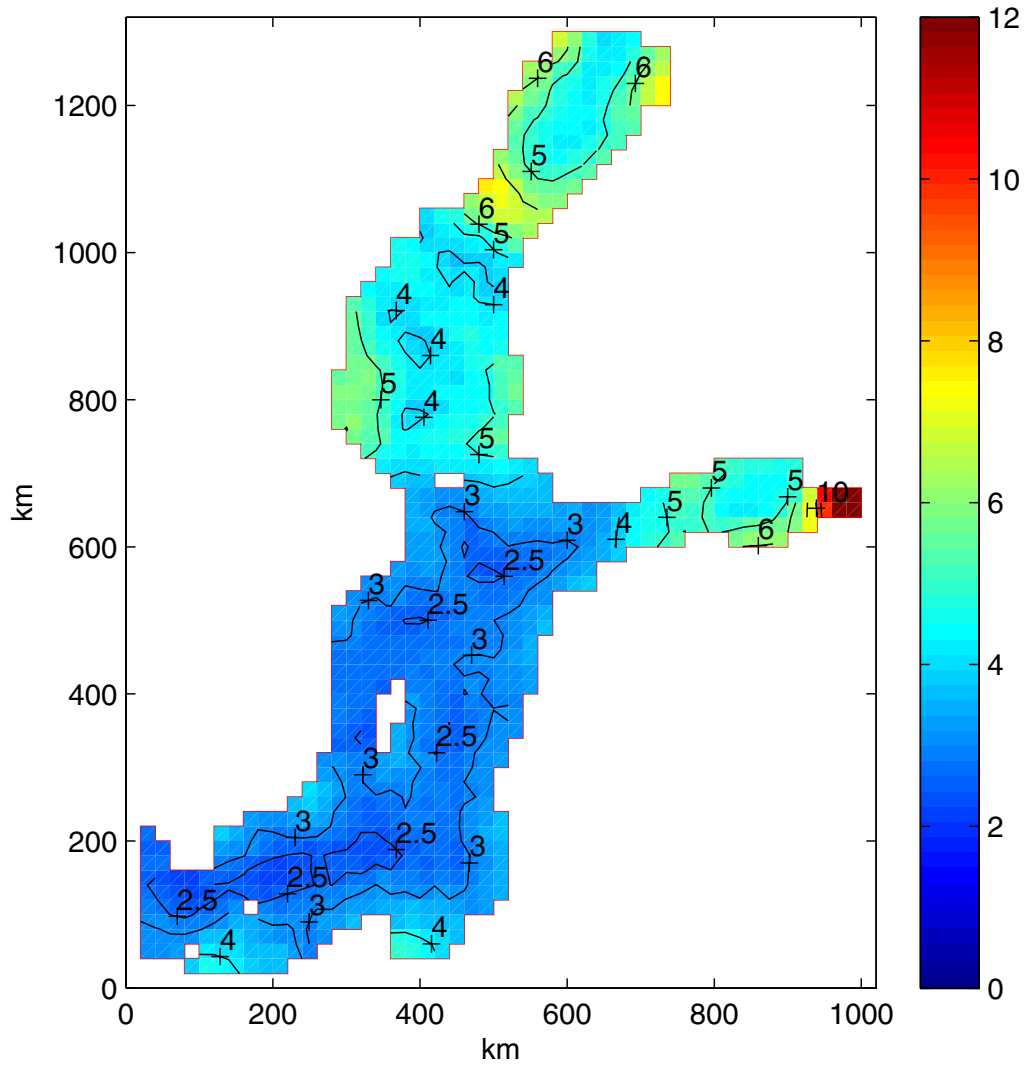


Figura 8.10: Salida del modelo de transporte de materia en suspensión para la función  $\rho_S(\vec{r}, t)$  expresada en  $\text{g m}^{-3}$  y evaluada para el instante del ciclo con fecha 1 de febrero.

El número de partículas trazadoras inicialmente colocadas en el sistemas ha sido  $N = 2096780$ . Con muy buena aproximación, los resultados de la función de concentración se repiten con periodicidad anual a partir del segundo ciclo anual de simulación:



$$\rho_S(\vec{r}, t) \approx \rho_S(\vec{r}, t + T) \quad , \quad t \geq 1 \text{ año} \quad , \quad T = 1 \text{ año} . \quad (8.54)$$

Se muestran a continuación el resultado de las simulaciones para la evolución de la materia en suspensión.

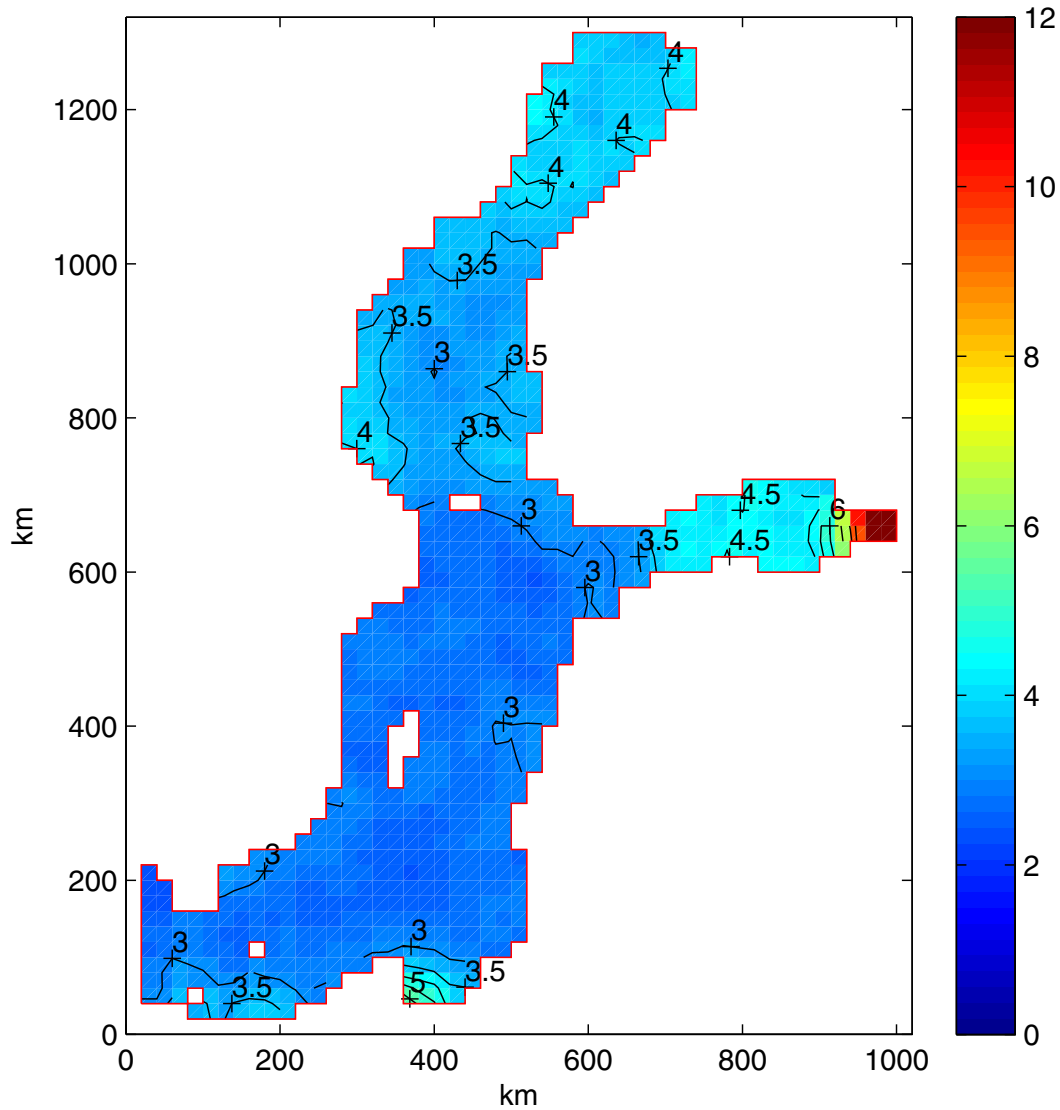


Figura 8.11: Salida del modelo de transporte de materia en suspensión para la función  $\rho_S(\vec{r}, t)$  expresada en  $\text{g m}^{-3}$  y evaluada para el instante del ciclo con fecha 1 de agosto.

Versiones anteriores de este modelo de materia en suspensión elaboradas por el autor de esta memoria se pueden encontrar en la bibliografía [191, 192].

Los resultados del modelo son muy consistentes con valores de materia en suspensión obtenidos en el Báltico, tanto por medidas directas [58], como indirectamente a través de relaciones empíricas con la profundidad Secchi medida en el sistema [1, 162, 58, 106].

Podemos hacer uso de una relación empírica [58] entre la profundidad Secchi  $SEC$  (m) y la densidad de materia en suspensión  $SPM$  ( $g\ m^{-3}$ ) en superficie:

$$SPM(g\ m^{-3}) = 10^{A+B \times SEC(m)} \quad , \quad A = \frac{17}{20} \quad , \quad B = -\frac{1}{20} \quad , \quad (8.55)$$

cuya confianza estadística es del 90 %.

Se muestra a continuación la tabla 8.7, que se ha calculado a partir de los datos de  $SEC$  (m) en diferentes compartimentos del Mar Báltico donde aparecen el valor medio y el rango de variación de la densidad de materia en suspensión .

TABLA 8.7: Profundidad Secchi y densidades medias de materia en suspensión en el Mar Báltico por compartimentos

Zona	Báltico Estricto	Golfo de Finlandia	Mar de Botnia	Bahía de Botnia
$SEC$ (m)	$7.5 \pm 2.5$	$2.0 \pm 1.0$	$4.0 \pm 2.0$	$3.0 \pm 1.5$
$SPM$ ( $g\ m^{-3}$ )	$3.0 \pm 1.5$	$5.5 \pm 1.5$	$4.5 \pm 1.5$	$5.0 \pm 1.5$

Hay que mostrar también que en los datos experimentales se observa un claro gradiente negativo desde la costa al interior, o dicho de una manera más dinámica, desde las zonas de erosión a las zonas de sedimentación, gobernadas ambas por tensiones de fondo cualitativamente distintas en relación a las tensiones críticas.

TABLA 8.8: Gradientes costa-interior e incrementos invierno-verano típicos de la densidad de materia en suspensión en el Mar Báltico por compartimentos

Zona	Báltico Estricto	Golfo de Finlandia	Mar de Botnia	Bahía de Botnia
$\Delta_x SPM$ ( $g\ m^{-3}$ )	[0.5, 1.5]	[1.0, 3.0]	[1.0, 2.0]	[1.0, 2.5]
$\Delta_t SPM$ ( $g\ m^{-3}$ )	[-0.5, 0.0]	[-1.5, -0.5]	[-1.0, -0.5]	[-1.0, -0.5]

A partir de las publicaciones mencionadas [1, 162, 58, 106] se ha elaborado la tabla 8.8 donde se han estimado los rangos de los gradientes de  $SPM$  costa-interior,  $\Delta_x SPM$  ( $g\ m^{-3}$ ).

También se muestran valores típicos de la variación invierno-verano,  $\Delta_t \text{SPM}$  ( $\text{g m}^{-3}$ ), que suele ser generalmente negativa por la mayor energía oceánica durante el invierno aunque hay factores atenuantes como la producción primaria, mayor en las épocas suaves.

Otra propiedad relacionada con la tabla anterior es que el gradiente espacial es menor en verano y más acusado en invierno.

La zona del Báltico Estricto (compartimento más al sur) presenta un comportamiento distinto al resto del sistema. Por un lado, tiene menor aporte fluvial (favorecedor del gradiente espacial de SPM) y por otro, debido a sus condiciones térmicas más suaves, una producción primaria que se convierte en la fuente dominante de la zona, generando la materia de una manera más homogénea que el aporte fluvial.

Los dos máximos relativos del sur corresponden a la desembocadura del Oder y del Vístula, respectivamente de oeste a este.

El máximo absoluto, en la parte más oriental del Golfo de Finlandia, es debido a las grandes descargas del río Neva, el mayor con diferencia de los ríos bálticos.

Se han mostrado los resultados de dos simulaciones del modelo de transporte de materia en suspensión en el Mar Báltico; la primera –figura 8.10– es una salida del modelo para invierno (1 de febrero), mientras que la segunda –figura 8.11– es otra salida, correspondiente a verano (1 de agosto).

Por lo general, los valores de la función densidad y los gradientes presentan un acuerdo aceptable con los valores experimentales mostrados en las tablas 8.7 y 8.8, máxime teniendo en cuenta la naturaleza de baja resolución de nuestro modelo numérico:

- (a) Se alcanza un buen acuerdo en las densidades materia en suspensión si comparamos la figura 8.10 con los rangos de la tabla 8.7 acompañada de la variación espacial expresada en la tabla 8.8.
- (b) La figura 8.11 es una simulación que representa valores alcanzados durante el verano y reproduce cualitativamente la variación estacional de la materia en suspensión contemplada en la literatura y resumida en la tabla 8.8.
- (c) La escasa variación estacional de materia en la zona del Báltico Estricto así como su distribución prácticamente homogénea en verano señalada en la literatura también se reproduce con aceptable corrección en el modelo.

En cuanto a la resolución vertical de función  $\rho_S(z)$ , también se ha comprobado que hay un buen acuerdo, tomando para comparar la capa próxima al sedimento de erosión y transporte, donde se aprecia una densidad  $1-2 \text{ g m}^{-3}$  por encima de la densidad en la capa superficial, de acuerdo con valores típicos de la literatura [58]. También hay un buen acuerdo del modelo con los valores de  $\rho_S$  en la capa de fondos de acumulación, que están [59] típicamente en el rango  $0.5 - 1.5 \text{ g m}^{-3}$ .

Veamos ahora la validación del modelo con medidas de materia en suspensión (tabla 8.9) acumulada en el sedimento en diferentes puntos del sistema.

A tenor de las características de nuestro modelo numérico de baja resolución, las medidas que se van a usar para la validación han sido seleccionadas descartando puntos experimentales [120] fuertemente influenciados por cuestiones locales como cercanía a desembocaduras de ríos o pertenencia a pequeñas fosas, factores ambos que elevan la tasa de sedimentación por encima de los valores promedios zonales representados por algunas estaciones de medida encontradas en la literatura científica y mostradas a continuación.

TABLA 8.9: Tasa de sedimentación experimental [120, 202] en diferentes puntos del Mar Báltico elegidos para la validación del modelo.

Compartimento	Posición	Tasa ( $\text{g m}^{-2} \text{ a}^{-1}$ )
Bahía de Botnia	64.70° N , 22.06° E	320
Bahía de Botnia	65.00° N , 22.25° E	220
Bahía de Botnia	64.31° N , 22.36° E	220
Mar de Botnia	62.60° N , 20.26° E	150
Mar de Botnia	61.08° N , 20.60° E	270
Golfo de Finlandia	59.58° N , 23.63° E	400
Golfo de Finlandia	60.13° N , 27.46° E	440
Báltico Estricto	56.94° N , 19.81° E	160
Báltico Estricto	56.95° N , 20.26° E	230
Báltico Estricto	57.31° N , 20.08° E	140

El error experimental de los valores que aparecen en la tabla 8.9 es muy variado, si bien el error medio relativo es del orden de un treinta por ciento. Las tasas de sedimenta-



en un factor 3 o superior, superando en algunos casos el nivel  $R_S = 1000 \text{ g m}^{-2} \text{ a}^{-1}$ . Las posiciones de los puntos validadores del modelo son más interiores de lo que parece al ver la figura en la primera impresión, ya que es la punta rigurosa de la flecha la que los define; de hecho, todos los puntos están en la zona de acumulación.

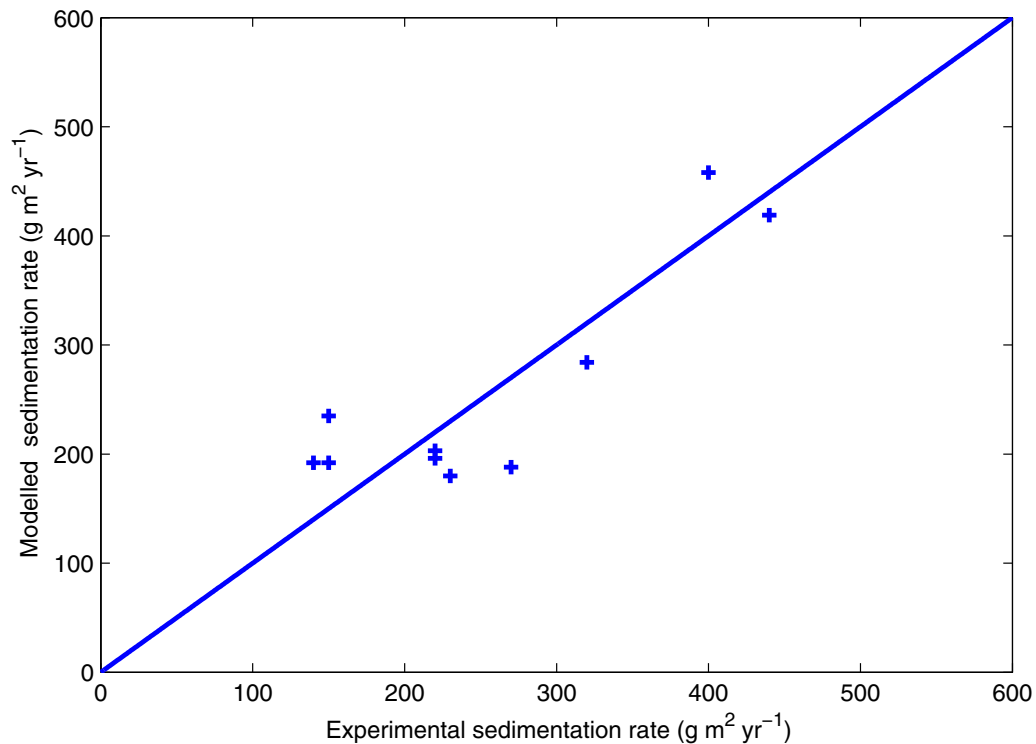


Figura 8.13: Gráfica comparativa de la tasa de sedimentación  $R_S$  ( $\text{g m}^{-2} \text{ a}^{-1}$ ) del modelo con la experimental, donde se representan los diez puntos de validación de la figura anterior 8.12.

Estas diferencias entre los valores normales y los extremos pueden verse amplificadas por el efecto local “focusing” de pequeña escala –no tenido en cuenta en este modelo de baja resolución– que afecta a depresiones en forma de “U” o en forma de “V” y que según Hakanson [58] puede aportar amplificaciones de  $R_S$  en el rango 1–3.

En la figura 8.13 se representan los 10 puntos de validación de la figura anterior, 8.12, junto a la recta de acuerdo total entre modelo y experiencia, apreciándose aceptables discrepancias modelo–experiencia en los dos sentidos.

Se muestra a continuación un resultado de la tasa de sedimentación no estacionaria, solución del problema que es interesante para identificar las zonas donde la materia en

suspensión se almacena provisionalmente. Se trata de la salida del modelo para la tasa de sedimentación  $R_S$  ( $\text{g m}^{-2} \text{ a}^{-1}$ ) no estacionaria, calculada entre el día 1 de agosto del ciclo y el 1 de febrero del ciclo siguiente.

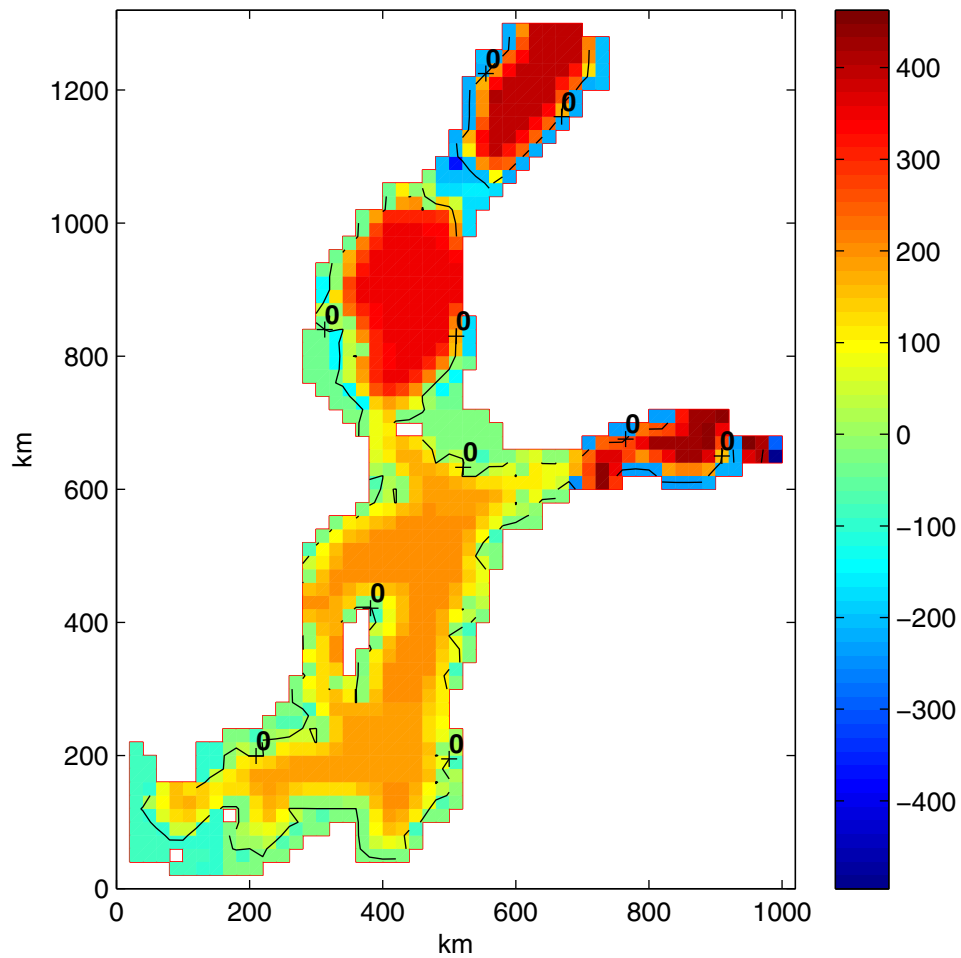


Figura 8.14: Salida del modelo de transporte de materia en suspensión de la tasa de sedimentación  $R_S$  ( $\text{g m}^{-2} \text{ a}^{-1}$ ) no estacionaria, calculada entre el 1 de agosto del ciclo y el 1 de febrero del ciclo siguiente.

Se tienen zonas tanto de signo positivo como negativo, pudiendo deducirse, por comparación con la gráfica anterior, el almacenamiento provisional en algunas zonas de mate-

ria durante primavera y verano que posteriormente, con la llegada del otoño y el invierno, es resuspendido y almacenado finalmente las zonas más profundas del sistema. En la figura 8.14 se representa la línea de nivel 0, criterio elegido para dividir el fondo marino en dos partes con comportamientos dinámicos distintos durante el ciclo anual de la materia en suspensión en el mar Báltico.

Los resultados que ofrecen las simulaciones de nuestro modelo son bastante congruentes con los datos experimentales, a pesar de la complejidad del sistema con el que estamos trabajando. Otros trabajos relacionados con la modelización de la dinámica de la materia en suspensión han sido publicados anteriormente [102, 59, 214] pero siempre estudiando una parte del Mar Báltico y no el sistema como un todo.

Un objetivo cumplido de este trabajo es haber conseguido, con todas las limitaciones expuestas aquí, un primer modelo, lógicamente de baja resolución, de la evolución de la materia en suspensión para todo el Mar Báltico, *como sistema completo*. Futuras ampliaciones del modelo basadas en aproximaciones más realistas y de mayor resolución como las ya comentadas en esta tesis, apoyadas incluso en un sub-modelo fino de las corrientes en el fondo marino [72], harán posible un acercamiento mayor del modelo a la realidad compleja del sistema.



# Capítulo 9

## Modelo del Transporte No Conservativo de Radionúclidos

### 1. INTRODUCCIÓN

En esta parte de la tesis se va a presentar un modelo de transporte de radionúclidos no conservativos del Mar Báltico que será validado con datos provenientes del accidente Chernobyl. Este estudio se apoya en anteriores partes de esta tesis como son, por un lado, el modelo de transporte conservativo que tiene en cuenta la evolución de todo aquello que sigue fielmente los movimientos del fluido oceánico, incluida la fase disuelta del radionúclido, y por otro, el modelo de transporte materia en suspensión a la que se encuentra ligada la fase suspendida del mismo. Los radionúclidos pueden cambiar de fase, pasando de la fase disuelta a una sólida (adsorción), o al contrario (desorción), mecanismos de los que a continuación daremos más detalles.

### 2. FASES: DISUELTA Y SÓLIDA EN SUSPENSIÓN O SEDIMENTO

Los mecanismos de adsorción y desorción se desarrollan en unos procesos cinéticos [157, 8, 9] con unos tiempos de relajación que conducen al equilibrio, y que en el isótopo que nos ocupa,  $^{137}\text{Cs}$ , presentan una fase de transición rápida (minutos), una intermedia (horas) y una lenta (días). Si trabajamos con un paso de tiempo suficientemente grande, podremos apoyarnos en la hipótesis de equilibrio entre la fase disuelta de  $^{137}\text{Cs}$  y las fases sólidas (suspendida y en sedimento) a través del coeficiente de distribución  $k_d$ :

$$k_d = \frac{A_s}{A_d}, \quad (9.1)$$

donde  $A_s(\text{Bq kg}^{-1})$  es la actividad del radionúclido en la fase sólida y  $A_d(\text{Bq m}^{-3})$  es la actividad en la fase disuelta. Una hipótesis de equilibrio, ajustando las funciones de concentración de  $^{137}\text{Cs}$  no conservativo cada pocos días (por ejemplo:  $\Delta t_{NC} = 2$  días) funcionará bien aquí porque los tiempos típicos dominantes del transitorio (horas–1 día) son inferiores a los periodos medios asociados a los eventos de resuspensión inducidos por el viento que gobiernan el problema (3–10 días); las frecuencias que dominan este problema en el mar Báltico son del orden de una semana y la resolución espacial del modelo es relativamente grande (20 km). En sistemas donde los eventos de resuspensión tienen una frecuencia mayor, como ocurre con aquellos gobernados por la marea astronómica, la hipótesis de equilibrio difícilmente encuentra cobijo, y se hacen imprescindibles los esquemas cinéticos [143]. Cuando existe una condición de desequilibrio entre la fase disuelta y una fase sólida se producirá un intercambio de radionúclidos en el sentido necesario para alcanzar el equilibrio. Una expresión de la literatura [202] para el coeficiente  $k_d$  como función de la salinidad es la que sigue:

$$k_d(\text{m}^3 \text{kg}^{-1}) = \alpha \exp(-\beta S) \quad , \quad \alpha = 30.0 \quad , \quad \beta = 0.117 \quad (9.2)$$

donde  $S$  es la salinidad en unidades PSU, función también conocida en cada punto del sistema según se detalló en el capítulo 3, descriptivo del Mar Báltico en general y de su naturaleza salobre en particular. Realmente  $k_d$  depende de otros muchos factores [7], como el pH del medio, pero por ahora esta aproximación nos será suficiente. Según se trate de sólidos suspendidos en agua o sólidos en sedimentos notaremos a  $k_d$  de una manera distinta:  $k_d^w$  para el primer caso, y  $k_d^s$  para el segundo.

Se distribuyen inicialmente las partículas de Monte Carlo tanto disueltas como en la fase sólida. La hidrodinámica del modelo va moviendo las partículas y tras cada instante de cómputo se establece el equilibrio entre las diferentes fases:

- (a) Fase 1. Fase disuelta.
- (b) Fase 2. Fase sólida en suspensión.
- (c) Fase 3. Fase sólida en el sedimento.

(d) Fase 4. Fase en forma final irreversible: partícula desintegrada radiactivamente.

Cada partícula tiene asignada una etiqueta que es la fase a la que pertenece. Mediante las probabilidades de cambio de fase una partícula puede cambiar de estatus, siendo regida desde entonces por otros procesos físicos distintos.

La matriz  $\vec{p}$  de probabilidades de transición de fase es:

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

Expresaremos  $\{p_{ij}\}$  en función de las variables salidas del modelo de materia en suspensión del capítulo anterior, de algunos parámetros geológicos del sistema como el espesor efectivo del sedimento, y del coeficiente de distribución  $k_d$ , y así, escribiremos el algoritmo para simular el posible cambio de fase del radionúclido. A partir de la matriz  $\vec{p}$  se generarán números aleatorios en función de las probabilidades y se calculará otra matriz salida con ceros y unos según se haya producido o no el cambio de fase.

Cada elemento de volumen ocupará  $V_1 = h_x h_y h_z$  en la columna de líquido. Si este elemento está en contacto con el fondo marino intercambiará materia a través de una superficie  $S_{sed} = h_x h_y$ .

La masa sólida de la fase 2 la notaremos mediante  $m_2$ , está relacionada con la función de concentración de materia en suspensión  $\rho_S(\vec{r}, t)$  :

$$\rho_S = \frac{m_2}{V_2} \equiv \rho_2. \quad (9.4)$$

La materia en suspensión evoluciona en el sistema sometida a su propio modelo lagrangiano, descrito en el capítulo 8.

La masa sólida del sedimento (fase 3) susceptible de cambio de fase la notaremos mediante  $m_3$ , que va a ser función del espesor efectivo  $l_{ef}$  [5] del sedimento y de la densidad aparente en seco del sedimento  $\rho_3$

$$\rho_3 = \frac{m_3}{S_{sed} \times l_{ef}}. \quad (9.5)$$

Las densidades  $\rho_3$  que se encuentran en literatura [66] para los sedimentos del Mar Báltico están mayoritariamente comprendidas en el intervalo  $\rho_3 \in [250, 500] \text{ kg m}^{-3}$  y se mantiene prácticamente constante [66] a lo largo de toda la zona de mezcla  $l_{mix}$  [5] del sedimento.

Valores de referencia para  $l_{ef}$  [5],  $l_{mix}$  [5, 74] y  $\rho_3$  [66, 67] avalados por la literatura y usados en esta versión del modelo son:

$$l_{ef} \sim 1 \text{ cm} \quad , \quad l_{mix} \sim 10 \text{ cm} \quad , \quad \rho_3 \sim 300 \text{ kg m}^{-3} . \quad (9.6)$$

Notemos mediante  $\{N_1, N_2, N_3\}$  al número de átomos de nuestro radionúclido  $^{137}\text{Cs}$  asociados a cada fase  $\{1, 2, 3\}$  y contenidos en un determinado volumen de control del sistema. Así, las actividades de cada fase vendrán dadas por:

$$A_1 = \frac{N_1}{V_1} \quad , \quad A_2 = \frac{N_2}{m_2} \quad , \quad A_3 = \frac{N_3}{m_3} . \quad (9.7)$$

Vamos ahora a estudiar el flujo de radionúclidos que se establece hasta llegar al equilibrio y lo haremos en tres etapas distintas, tal y como hace Abril [5] en su trabajo sobre el Mar de Irlanda.

- (a) Equilibrio en una situación aislada:  $1 \longleftrightarrow 2$ .
- (b) Equilibrio en una situación aislada:  $1 \longleftrightarrow 3$ .
- (c) Equilibrio en una situación simultánea:  $2 \longleftrightarrow 1 \longleftrightarrow 3$ .

Antes del cálculo de flujos de radionúclidos se supone que los radionúclidos y la materia asociados a las tres fases están previamente bien mezclados.

- Reescribamos el coeficiente de distribución  $k_d^w$

$$k_d^w = \frac{N_2^{eq}/m_2}{N_1^{eq}/V_1} = \frac{N_2^{eq}}{N_1^{eq}} \frac{V_1}{m_2} \quad (9.8)$$

y definimos –por su utilidad en las operaciones matemáticas– el cociente de distribución adimensional para el agua

$$\kappa_d^w \equiv \frac{N_2^{eq}}{N_1^{eq}} , \quad (9.9)$$

e introduciendo la densidad de materia en suspensión

$$\rho_2 = \frac{m_2}{V_2} = \frac{m_2}{V_1}, \quad (9.10)$$

llegamos a la relación entre los coeficientes de distribución para el agua

$$k_d^w = \kappa_d^w \frac{1}{\rho_2}, \quad (9.11)$$

donde ha de notarse que no es constante, inversamente proporcional a  $\rho_2$ .

- Procedamos ahora, análogamente, con el coeficiente de distribución  $k_d^s$

$$k_d^s = \frac{N_3^{eq}/m_3}{N_1^{eq}/V_1} = \frac{N_3^{eq}}{N_1^{eq}} \frac{V_1}{m_3}, \quad (9.12)$$

definiendo el coeficiente de distribución adimensional para el sedimento

$$\kappa_d^s \equiv \frac{N_3^{eq}}{N_1^{eq}}, \quad (9.13)$$

e introduciendo la densidad del sedimento  $\rho_3 = m_3/V_3$ , con

$$V_1 = S_{sed} \times h_1 \quad , \quad V_3 = S_{sed} \times l_{ef}, \quad (9.14)$$

llegamos a la relación entre los coeficientes de distribución para el sedimento

$$k_d^s = \kappa_d^s \frac{1}{\rho_3} \frac{h_1}{l_{ef}}. \quad (9.15)$$

### 3. EQUILIBRIO Y CÁLCULO DE LAS PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN DE FASE

Un formalismo similar al que se presenta ahora, aplicado al transporte no conservativo de radionúclidos, puede encontrarse en el trabajo de Periañez [141].

- (a) Equilibrio en una situación aislada:  $1 \longleftrightarrow 2$ .

Se tienen los siguientes números de radionúclidos  $\{N_1, N_2\}$ , siendo el total  $N_T = N_1 + N_2$ . Haciendo el balance de átomos:

$$N_T = N_1 + N_2 = N_1^{eq} + N_2^{eq}, \quad (9.16)$$

e introduciendo el coeficiente adimensional  $\kappa_d^w \equiv N_2^{eq}/N_1^{eq}$  se deduce fácilmente que

$$N_1^{eq} = \frac{1}{1 + \kappa_d^w} N_T, \quad N_2^{eq} = \frac{\kappa_d^w}{1 + \kappa_d^w} N_T. \quad (9.17)$$

Los incrementos absolutos y relativos se definen y expresan así

$$\Delta N_{1,2} \equiv N_1^{eq} - N_1, \quad \varepsilon_{1,2} \equiv \frac{\Delta N_{1,2}}{N_1}; \quad (9.18)$$

$$\Delta N_{2,1} \equiv N_2^{eq} - N_2, \quad \varepsilon_{2,1} \equiv \frac{\Delta N_{2,1}}{N_2}. \quad (9.19)$$

De este modo, las probabilidades de transición se calculan:

$$p_{12} = \max[0, -\varepsilon_{1,2}] \quad , \quad p_{21} = \max[0, -\varepsilon_{2,1}] \quad (\varepsilon_{1,2} \varepsilon_{2,1} \leq 0). \quad (9.20)$$

(b) Equilibrio en una situación aislada:  $1 \longleftrightarrow 3$ .

Se tienen los siguientes números de radionúclidos  $\{N_1, N_3\}$ , siendo el total  $N_T = N_1 + N_3$ . Haciendo el balance de átomos:

$$N_T = N_1 + N_3 = N_1^{eq} + N_3^{eq}, \quad (9.21)$$

e introduciendo el coeficiente adimensional  $\kappa_d^s \equiv N_3^{eq}/N_1^{eq}$  se deduce fácilmente que

$$N_1^{eq} = \frac{1}{1 + \kappa_d^s} N_T, \quad N_3^{eq} = \frac{\kappa_d^s}{1 + \kappa_d^s} N_T. \quad (9.22)$$

Los incrementos absolutos y relativos se definen y expresan así

$$\Delta N_{1,3} \equiv N_1^{eq} - N_1, \quad \varepsilon_{1,3} \equiv \frac{\Delta N_{1,3}}{N_1}; \quad (9.23)$$

$$\Delta N_{3,1} \equiv N_3^{eq} - N_3, \quad \varepsilon_{3,1} \equiv \frac{\Delta N_{3,1}}{N_3}. \quad (9.24)$$

De este modo, las probabilidades de transición se calculan:

$$p_{13} = \max[0, -\varepsilon_{1,3}] \quad , \quad p_{31} = \max[0, -\varepsilon_{3,1}] \quad (\varepsilon_{1,3} \varepsilon_{3,1} \leq 0). \quad (9.25)$$

(c) Equilibrio en una situación simultánea:  $2 \longleftrightarrow 1 \longleftrightarrow 3$ .

Se tienen los siguientes números de radionúclidos  $\{N_1, N_2, N_3\}$  siendo el total  $N_T = N_1 + N_2 + N_3$ . Haciendo el balance de átomos:

$$N_T = N_1 + N_2 + N_3 = N_1^{eq} + N_2^{eq} + N_3^{eq}, \quad (9.26)$$

e introduciendo los coeficientes adimensionales  $\kappa_d^w \equiv N_2^{eq}/N_1^{eq}$  y  $\kappa_d^s \equiv N_3^{eq}/N_1^{eq}$  se deduce fácilmente que

$$N_1^{eq} = \frac{1}{1 + \kappa_d^w + \kappa_d^s} N_T, \quad (9.27)$$

$$N_2^{eq} = \frac{\kappa_d^w}{1 + \kappa_d^w + \kappa_d^s} N_T, \quad (9.28)$$

$$N_3^{eq} = \frac{\kappa_d^s}{1 + \kappa_d^w + \kappa_d^s} N_T. \quad (9.29)$$

Los incrementos absolutos y relativos de las fases sólidas (2 y 3) con el la acuosa (1) se definen y expresan así

$$\Delta N_{2,1} \equiv N_2^{eq} - N_2 \quad , \quad \varepsilon_{2,1} \equiv \frac{\Delta N_{2,1}}{N_2}; \quad (9.30)$$

$$\Delta N_{3,1} \equiv N_3^{eq} - N_3 \quad , \quad \varepsilon_{3,1} \equiv \frac{\Delta N_{3,1}}{N_3}. \quad (9.31)$$

De este modo, las probabilidades de transición se calculan:

$$p_{21} = \max [0, -\varepsilon_{2,1}] \quad , \quad p_{31} = \max [0, -\varepsilon_{3,1}]. \quad (9.32)$$

Respecto al flujo de radionúclidos en sentido contrario, desde la fase líquida a las fases sólidas, se cumple evidentemente que

$$\Delta N_{1,2} = -\Delta N_{2,1} \quad , \quad \varepsilon_{1,2} \equiv \frac{\Delta N_{1,2}}{N_1}; \quad (9.33)$$

$$\Delta N_{1,3} = -\Delta N_{3,1} \quad , \quad \varepsilon_{1,3} \equiv \frac{\Delta N_{1,3}}{N_1}; \quad (9.34)$$

De este modo, las probabilidades restantes de transición se calculan:

$$p_{12} = \max [0, -\varepsilon_{1,2}] \quad , \quad p_{13} = \max [0, -\varepsilon_{1,3}] . \quad (9.35)$$

(d) Desintegración radiactiva [143]:

$$p_{i4} = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \quad , \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \quad , \quad i = 1, 2, 3 . \quad (9.36)$$

Esta forma matemática de expresar la probabilidad de transición es extensible [141] de una manera análoga al esquema cinético de no equilibrio, donde el papel jugado por la constante de desintegración  $\lambda$  lo jugarían los coeficientes de adsorción ( $k_1$ ) y de desorción ( $k_2$ ).

(e) Otras probabilidades simples:

$$p_{4i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad ; \quad p_{ii} = 1 - \sum_{j=1}^4 (1 - \delta_{ij}) p_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4 . \quad (9.37)$$

#### 4. MODELO DE TRANSPORTE, RESULTADOS Y VALIDACIÓN

El transporte advectivo de este modelo se rige por el esquema aplicado en el capítulo 7 –dedicado al transporte conservativo– tomando el modelo HD–3D de circulación anual detallado en el capítulo 4.

Debido al uso de un esquema de corrientes advectivas anuales, trabajaremos con la tabla de coeficientes de difusión (tabla 9.1.) elaborada para estos efectos en el capítulo 7, donde se muestran rangos de referencia para la difusión horizontal anual  $K_h^{anu} (\text{m}^2 \text{s}^{-1})$  y para la vertical  $K_v (\text{cm}^2 \text{s}^{-1})$  en la superficie del mar, variables según las estaciones el año y de implementación inmediata en las simulaciones de este capítulo.

TABLA 9.1: Rangos de referencia para los coeficientes de difusión horizontal y vertical

Tabla de Difusión	Invierno	Primavera	Verano	Otoño
$K_h^{anu} (\text{m}^2 \text{s}^{-1})$	400–800	200–400	150–300	300–600
$K_v (\text{cm}^2 \text{s}^{-1})$	15–30	5–10	1–3	10–20

Los coeficientes de difusión que se han usado para las capas no superficiales se han calculado a partir de los valores superficiales de la tabla de arriba teniendo en cuenta los



perfiles verticales de  $K_h(\text{m}^2\text{s}^{-1})$  y  $K_v(\text{cm}^2\text{s}^{-1})$  que aparecen en las tablas del capítulo 5, que es la parte de esta tesis doctoral dedicada por entero a la difusión.

En relación a las datos de actividad de  $^{137}\text{Cs}$  en el sistema, tenemos que en Agosto de 1987 se realizó una expedición científica llamada SWRV ATTAIR para analizar la evolución de la actividad por comparación con las medidas de 1986, gran parte de las cuales provienen del crucero científico RV GAUSS. Los datos de este último han sido muy útiles para elaborar las condiciones iniciales de la actividad en octubre de 1986, mientras que los datos de la SWRV ATTAIR junto con otros forman un conjunto [53, 54, 131, 66] de datos experimentales cuyas características fueron expuestas en el capítulo 7, conjuntamente a su adaptación a nuestra malla de cálculo cuyos resultados han sido validados por publicaciones internacionales relevantes.

Respecto a la actividad previa en agua y en sedimentos, el dato importante es que la actividad de  $^{137}\text{Cs}$  anterior a Chernobyl es [76, 66] aproximadamente uniforme en el Báltico y prácticamente independiente de la profundidad. El valor de fondo de referencia se sitúa en  $\sim 10\text{--}20\text{ Bq m}^{-3}$ . Es destacable que las medidas de  $^{137}\text{Cs}$  realizadas en otoño de 1986 en puntos por debajo de la pycnoclina permamente indican unos valores del mismo orden que los niveles de fondo antes citados, lo que indica un efecto barrera a considerar, a la vez que la relevancia en estas columnas de líquido del transporte de  $^{137}\text{Cs}$  a través de la materia en suspensión como principal mecanismo de dispersión. El gradiente de actividad disuelta es grande entre los puntos a ambos lados de la pycnoclina y la mayoría de los radionúclidos atraviesan la barrera ligados a la materia en suspensión; una vez en las capas más profundas una parte de ellos va pasando a la disolución hasta que se alcanza el equilibrio, mientras que el resto queda ligado a la materia suspendida que puede acabar definitivamente en el sedimento.

Se ha analizado abundante información de diferentes cores de sedimentos [76, 66] en el Báltico y la actividad integrada –anterior al accidente de Chernobyl– en el espesor de mezcla es muy congruente con este valor de fondo de  $\sim 10\text{--}20\text{ Bq m}^{-3}$ . Otro valor de referencia [65, 66, 67] para la actividad de  $^{137}\text{Cs}$  contenida en un core de 10 cm y anterior al accidente de Chernobyl es  $\sim 500\text{--}2000\text{ Bq m}^{-2}$ . Una ratio de referencia para la sedimentación (medida con  $^{210}\text{Pb}$ ) en el Mar Báltico [202] es  $\sim 0.5\text{--}1\text{ cm a}^{-1}$ . Toda esta información se ha utilizado para calcular la condiciones iniciales de actividad de  $^{137}\text{Cs}$  en los sedimentos.

La asignación de partículas representativas del proceso de Monte Carlo se ha hecho asignando inicialmente 1 partícula por cada  $\text{Bq m}^{-3}$  contenido cada unidad de volumen de dimensiones  $h_x \times h_y \times 5\text{m}$ , distribuidas uniformemente por las celdas del modelo. El número necesario de partículas trazadoras de  $^{137}\text{Cs}$  inicialmente en disolución ha sido  $N_{sol}(0) = 1786746$ .

Análogamente y tal como se vio en capítulo 8, se han distribuido partículas trazadoras de la materia en suspensión tanto en agua como en sedimento, asignando posteriormente las partículas trazadoras no conservativas de  $^{137}\text{Cs}$  a partir de la hipótesis inicial de equilibrio dada por  $k_d$ .

Se ha usado la metodología numérica lagrangiana expuesta en el capítulo 6, tomando para las simulaciones los siguientes pasos de tiempo para la circulación y la difusión respectivamente:

$$\Delta t_{cir} = 6 \text{ h} \quad , \quad \Delta t_{dif} = 1 \text{ h} . \quad (9.38)$$

Los intercambios de radionúclidos no conservativos se han computado bajo la hipótesis de equilibrio con un paso de tiempo  $\Delta t_{NC} = 2$  días .

El resto de parámetros físicos y numéricos usados son los que se exponen en la simulación tridimensional sobre el Mar Báltico efectuada en el apartado 3 del capítulo 7, y en los detalles del modelo de transporte de materia en suspensión del capítulo 8.

El tiempo de CPU necesario –en el ordenador personal especificado en el capítulo 6– para la simulación de 300 días de transporte ha sido del orden de 6 horas.

El resultado del modelo, simulando desde el 15 de Octubre de 1986 hasta el 15 de Agosto de 1987, tras computar el transporte de las partículas y toda la información detallada aquí, se muestra en la figura 9.1.

Con todas estas consideraciones se ha hecho la simulación y calculado la figura 9.1, que ha de ser comparada, a efectos de validación, con la figura experimental que le sigue inmediatamente (figura 9.2).

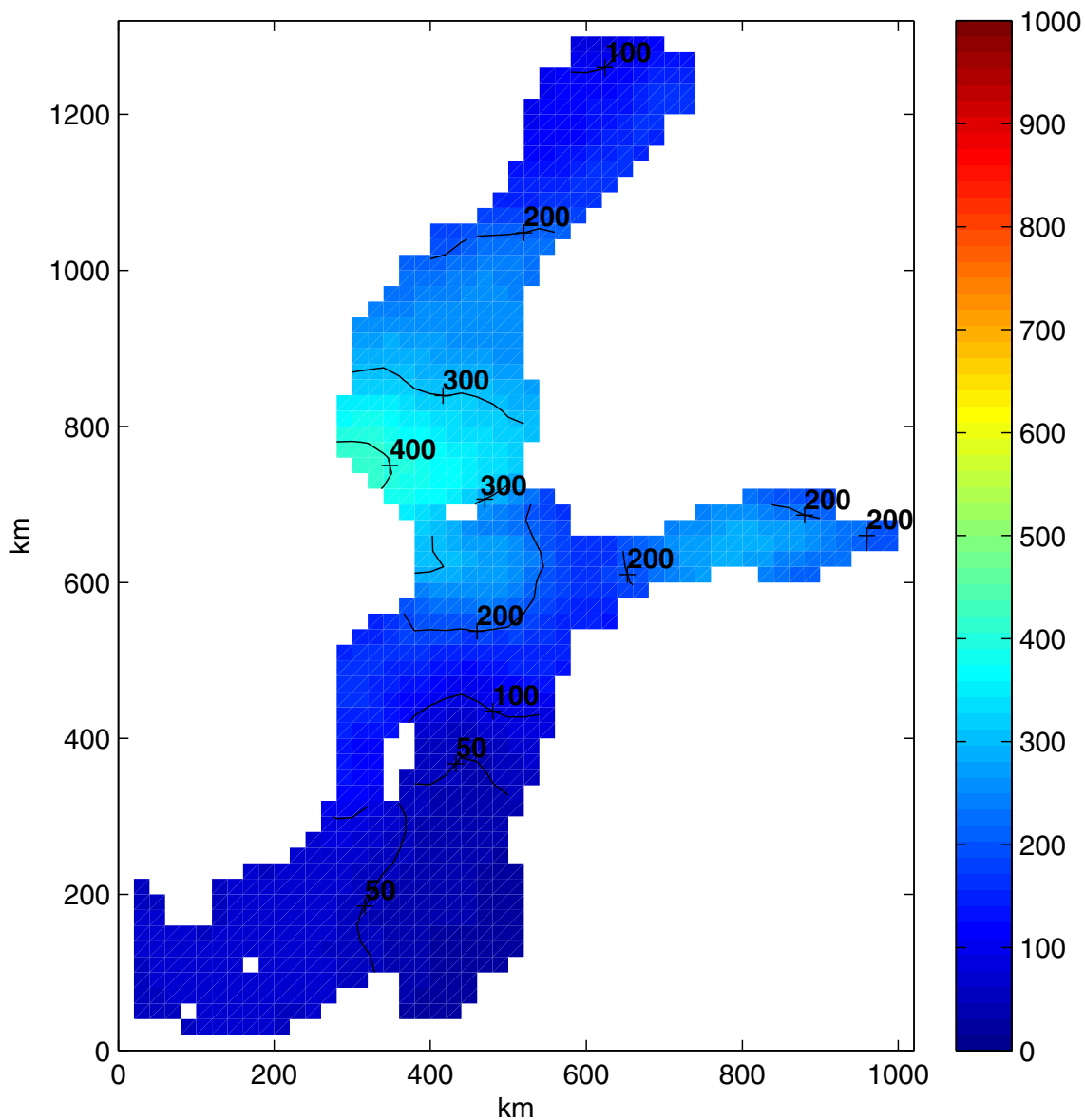


Figura 9.1: Actividad ( $\text{Bq m}^{-3}$ ) de  $^{137}\text{Cs}$  en la superficie del Mar Báltico resultado de la simulación del modelo, para el 15 de Agosto de 1987. Esta gráfica ha de utilizarse para validar el modelo con la siguiente gráfica experimental (figura 9.2).

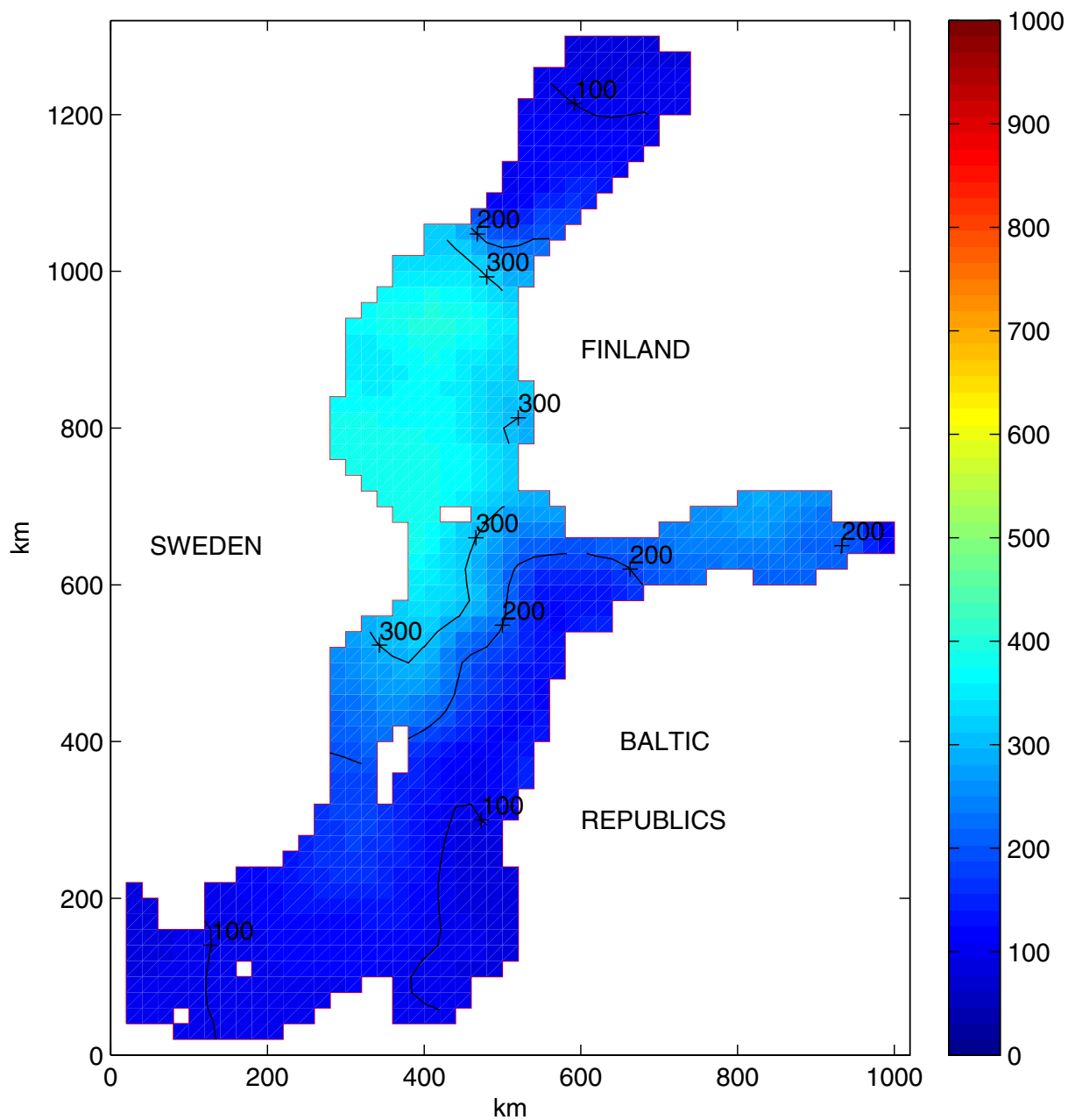


Figura 9.2: Actividad ( $\text{Bq m}^{-3}$ ) de  $^{137}\text{Cs}$  en la superficie del Mar Báltico durante Agosto de 1987, interpolada a partir de medidas experimentales contenidas en la literatura [53, 54, 131], útil para la validación del modelo la superficie del sistema.

El acuerdo entre el modelo y los valores experimentales es muy aceptable. Vuelven a aparecer discrepancias en la zona sureste, como ha ocurrido aquí en la validación en superficie, motivadas por las limitaciones de nuestro modelo de corrientes medias anuales.

A continuación se expondrá aquí otro proceso de validación mediante la tasa de actividad de  $^{137}\text{Cs}$ ,  $\Phi_A$  ( $\text{Bq m}^{-2} \text{ a}^{-1}$ ), sedimentada en ocho puntos del Báltico correspondientes a zonas de acumulación, seleccionados adecuadamente a la naturaleza de baja resolución de nuestro modelo.

Se ha seguido una metodología similar a la del capítulo 8 a la hora de seleccionar los puntos de simulación, descartando [120, 58] localizaciones sensibles a efectos locales como la cercanía a desembocaduras de río o la pertenencia a fondos marinos con "focusing costero" [59] relativamente frecuentes en muchos suelos mixtos del Mar Báltico.

Estos datos experimentales están contenidos en la literatura [120, 66, 67] y van a ser posteriormente comparados con el resultado de nuestro modelo cuyo intervalo de simulación va desde el año 1986 al 1987.

La mayoría de los cores elegidos para la validación coinciden con los del modelo de transporte de materia en suspensión del capítulo anterior y muestran la radiactividad acumulada durante una década (1986–1996) a partir de la que se ha calculado la parte correspondiente al año 1986–1987 teniendo en cuenta los siguientes factores:

- (a) Estimación de la distribución de la radiactividad a lo largo de los años de la década en cuestión utilizando como variable de ponderación los niveles típicos de  $^{137}\text{Cs}$  ( $\text{Bq m}^{-3}$ ) disuelto en la capa de fondo en contacto con el sedimento, información disponible en la literatura [69].
- (b) Decaimiento radiactivo del isótopo  $^{137}\text{Cs}$  en el intervalo considerado.

En lo que sigue (tabla 9.2), se presenta la información relacionada con datos experimentales [120, 66, 67] de actividad de  $^{137}\text{Cs}$  sedimentada,  $\Phi_A$  ( $\text{Bq m}^{-2} \text{ a}^{-1}$ ), en diferentes puntos del Mar Báltico fruto de la selección descrita anteriormente.

El error experimental de los valores que aparecen en la tabla 9.2. oscila típicamente entre el 10 y el 20 por ciento.

TABLA 9.2: Tasa de actividad de  $^{137}\text{Cs}$  sedimentada,  $\Phi_A$  ( $\text{Bq m}^{-2} \text{ a}^{-1}$ ), durante el intervalo de simulación, en diferentes puntos del Mar Báltico [120, 66, 67] elegidos para la validación del modelo.

Compartimento	Posición	$\Phi_A$ ( $\text{Bq m}^{-2} \text{ a}^{-1}$ )
Bahía de Botnia	64.70° N , 22.06° E	1180
Bahía de Botnia	65.00° N , 22.25° E	745
Bahía de Botnia	65.13° N , 23.56° E	520
Mar de Botnia	62.60° N , 20.26° E	1120
Mar de Botnia	61.08° N , 20.60° E	1420
Golfo de Finlandia	59.58° N , 23.63° E	1125
Golfo de Finlandia	60.24° N , 27.72° E	1255
Báltico Estricto	54.70° N , 19.35° E	130
Báltico Estricto	57.31° N , 20.08° E	52
Báltico Estricto	58.65° N , 18.50° E	280

Cabe destacar los valores tan bajos alcanzados en los sedimentos de la zona Báltico Estricto, en algún caso por debajo de 1 orden de magnitud respecto a otros puntos de la tabla. Son tres los factores que ayudan a crear esta diferencia:

- (a) A excepción de la zona norte que limita con Mar de Botnia, los valores de  $^{137}\text{Cs}$  en agua son inferiores o muy inferiores al resto.
- (b) El efecto barrera de la pycnoclina, que sobre todo en zonas muy profundas, hace que el aporte de  $^{137}\text{Cs}$  a las capas inferiores en un periodo de un año sea del mismo orden que la actividad anterior al accidente de Chernobyl.
- (c) La salinidad media de este compartimento es superior al resto por su influencia atlántica, lo que sube su coeficiente  $k_d$  y aumenta la capacidad de almacenar radionúclidos en disolución a costa de disminuir la proporción suspendida y su futura sedimentación.

En general, el acuerdo entre el modelo no conservativo y las medidas experimentales es bastante aceptable a tenor de la complejidad del problema que estamos estudiando.

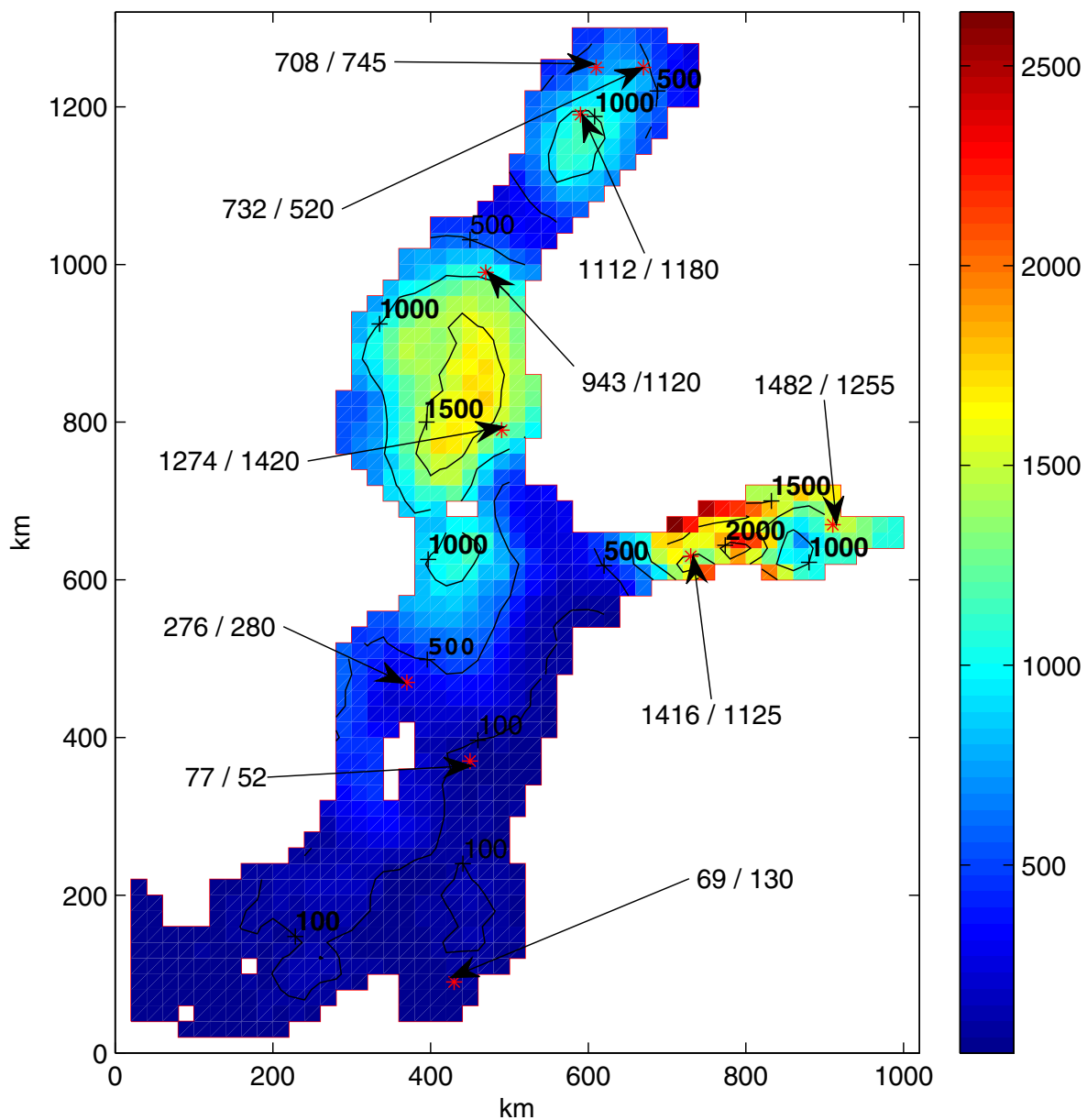


Figura 9.3: Salida del modelo de transporte de radionúclidos. La gráfica representa la actividad de  $^{137}\text{Cs}$  sedimentada,  $\Phi_A^{mod}(\text{Bq m}^{-2} \text{a}^{-1})$  en el intervalo de simulación. En los orígenes de las flechas el numerador representa el valor del modelo y el denominador el de la medidas experimentales,  $\Phi_A^{mod} / \Phi_A^{exp}$ . El extremo de la flecha está señalando la posición del punto elegido para la validación, simbolizado por una estrella roja de ocho puntas.

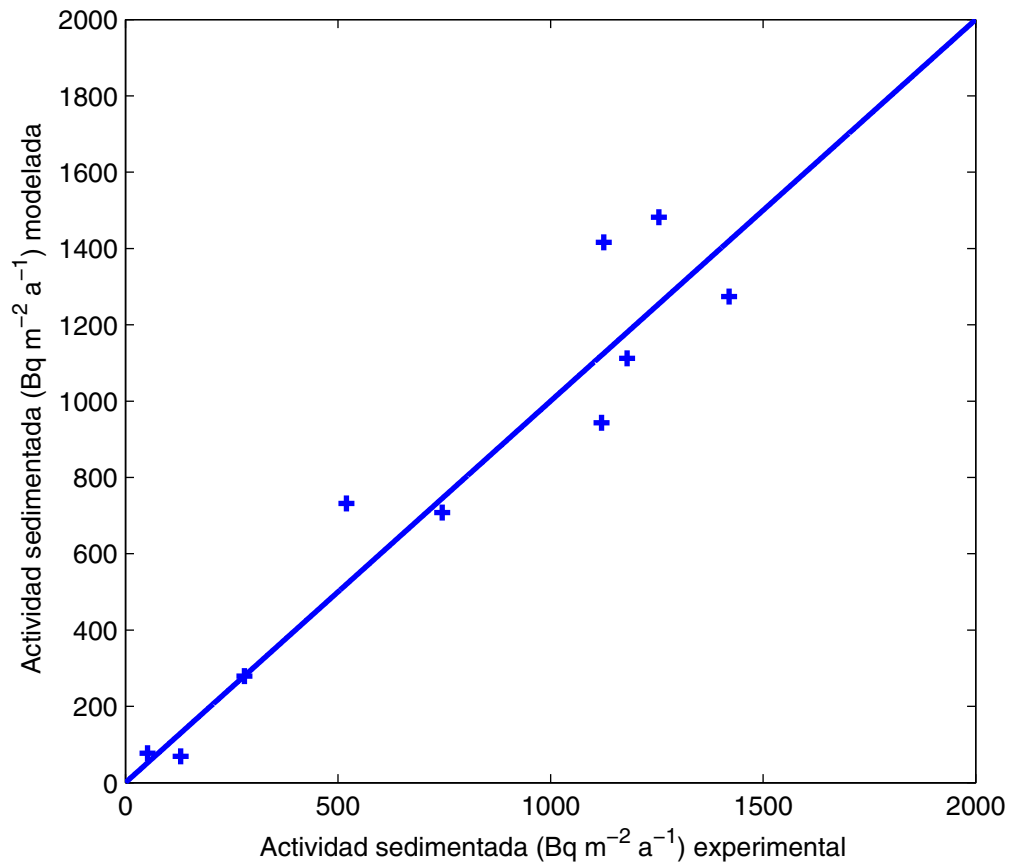


Figura 9.4: Comparación entre la actividad experimental sedimentada de  $^{137}\text{Cs}$ , medida en diferentes estaciones del Báltico y la salida del modelo. Se dibuja en azul la bisectriz del cuadrante materializando el acuerdo total entre el modelo y la experiencia.

A pesar de este buen acuerdo general, la mayor discrepancia se produce en el punto más al sur, 69/130, debido fundamentalmente, según vimos en el capítulo 7, a una desviación fruto de un flujo de corrientes advectivas del norte al sur, no contemplado en nuestro modelo de corrientes medias anuales, que pudo aumentar la actividad en esta zona colocándola muy por encima del modelo. En la zona sur, en general, la actividad sedimentada es menor por las tres razones expuestas anteriormente, siendo por tanto más sensible numéricamente a las fluctuaciones de nuestro método de Monte Carlo, por lo que las líneas de nivel de la figura 9.3 tienden a quebrarse más en esta parte del sistema.

Hay comentar el resultado del modelo en el Golfo de Finlandia, zona también influenciada por una pycnoclina permanente (en la cota aproximada de los cincuenta metros),



aunque no tan fuerte como la de Báltico Estricto debido sobre todo a su menor profundidad con espesores en la capa inferior de unos 20–40 m tales que la densidad de actividad varios meses después del accidente de Chernobyl fue notable aunque inferior a la de otras zonas del golfo no sometidas a esta influencia. Recordemos que la estructura de la actividad en superficie en otoño de 1986 era una mancha central en el golfo. El efecto del modelo de transporte en esta parte del sistema sobre esta función de actividad, con forma aproximada de campana, es una distribución de actividad en el sedimento cuya característica más destacable, si miramos con atención, es una especie de anillo de mínimos relativos que nos recuerda un poco la forma de las funciones potenciales con forma de sombrero mexicano. De los dos puntos de validación del Golfo de Finlandia, el punto más al este, experimentó más sedimentación ( $1255 \text{ Bq m}^{-2} \text{ a}^{-1}$ ) que el del oeste ( $1125 \text{ Bq m}^{-2} \text{ a}^{-1}$ ) a pesar de tener una actividad inicial en superficie del orden de la mitad y una similar tasa de sedimentación de materia en suspensión  $R_s$  ( $\text{g m}^{-2} \text{ a}^{-1}$ ). Nuestra conclusión es que la picnoclina es la responsable de esta diferencia cualitativa y nuestro modelo, a pesar de su naturaleza de baja resolución, consigue reproducir este efecto razonablemente bien, resolviéndolo y estableciendo diferencias contrastadas dentro de un mismo compartimento. Por tanto, subrayemos finalmente la capacidad que tiene nuestro trabajo, dentro de las limitaciones expuestas, de aportar esta herramienta relativamente poco presente en la literatura científica como es la modelización del transporte de radionúclidos bajo condiciones dominantes de picnoclina permanente.

El siguiente paso del modelo en el futuro sería abordar simulaciones para periodos de varios años, del orden de una década e incluso más allá en el tiempo. Esto sería factible a corto plazo mejorando la eficiencia de los algoritmos para no tener problemas de memoria en las simulaciones, teniendo definitivamente que abrir el sistema al Océano Atlántico para periodos de varios años en que su influencia empieza a no ser despreciable, sobre todo en la zona sur, habida cuenta de los tiempos de residencia del Mar Báltico que para una partícula media van de dos a tres décadas. Sería interesante llegar a una solución estacionaria de la distribución de  $^{137}\text{Cs}$  bajo la hipótesis de mar cerrado, e incluso, compararla con la misma para el caso de sistema abierto. Otra opción de trabajo futuro consiste en la posibilidad, si lo permite la red de estaciones de monitorización que coordina la HELCOM (Helsinki Commission; Baltic Marine Environment Protection Commission), de sacar una rama de nuestro modelo que permita hacer predicciones año a año como

una herramienta más dentro de los amplios servicios de seguridad nuclear del norte de Europa.

Este último capítulo incluye implícitamente una buena parte de las aportaciones de los demás, por lo que se van a hacer a continuación unas consideraciones generales sobre la obra, el trabajo y los proyectos futuros que pueden derivarse de la misma, que vienen a completar otros de la misma naturaleza expuestos aquí con anterioridad.

En la ciencia de la modelización medioambiental y dentro de la geofísica aplicada se trabaja fundamentalmente en dos problemas, el directo y el inverso. El primero utiliza como base los modelos más fundamentales de la geofísica, atmosféricos y oceanográficos, que son adaptados a su malla de cálculo concreta y convertidos en el pilar sobre el que se sostiene un determinado modelo de transporte de materia en suspensión, de radionúclidos o de cualquier materia pasiva natural o contaminante presente en el planeta. El problema inverso consiste en usar tanto información experimental como de modelos de transporte de una determinada sustancia –aquí destacan notablemente los radionúclidos– para avanzar científicamente en los modelos geofísicos más fundamentales de la meteorología y la oceanografía.

El problema directo es el que fundamentalmente ha protagonizado esta tesis doctoral, enmarcada claramente en el campo de la física aplicada, tan amplia en planteamiento y desarrollo, que no ha dejado mucho hueco para el análisis inverso, pero sí que pone sólidos cimientos para futuros estudios de esta naturaleza.

Una vez optimizado este problema, habría que, parte a parte, avanzar en el problema inverso para refinar el conocimiento de la física del Mar Báltico mediante el uso de la información radioecológica disponible y de las herramientas matemáticas desarrolladas en esta tesis doctoral. De este modo, al iniciarse una línea de trabajo en el problema inverso, se cerraría de algún modo el círculo entre estos dos itinerarios científicos, lo que me trae recuerdos de la reunión que mantuve al inicio de todo esto con los oceanógrafos expertos del SMHI en Nörköping (Suecia) donde señalaban al problema inverso como línea de interés particular para ellos, más si cabe que el problema directo, con todas las ventajas y aplicaciones futuras que esta herramienta pudiera tener en eventuales episodios con material radiactivo presente en otros sistemas oceánicos. Yo, que entonces era un joven investigador inexperto caminando prácticamente a solas en este terreno, entendí que era más natural que el problema inverso fuera una segunda fase de trabajo, es decir, el camino

de vuelta, y por eso decidí emprender el camino de ida trabajando, desde la lejanía del sur de España, en el problema directo del transporte de la contaminación nuclear en el Mar Báltico.

Por todo lo anterior, creo que ha llegado el momento de definir claramente una línea de trabajo futuro en el problema inverso para que allí retorne una parte del conocimiento aprendido y generado con la metodología directa. Llegado a este punto, probablemente lo más productivo sea trabajar paralelamente con ambas metodologías para aprovechar realimentaciones.

Estas conclusiones vienen de nuevo a señalarnos la conveniencia prácticamente ineludible de fortalecer o crear las colaboraciones y alianzas necesarias con las instituciones y departamentos dedicados total o parcialmente al estudio del Mar Báltico u otros sistemas naturales con problemas afines pendientes de ser resueltos.

# Capítulo 10

## Sumario, Conclusiones y Trabajo

### Futuro

#### 10.1. SUMARIO Y CONCLUSIONES

Una vez expuestos los capítulos introductorios 1, 2 y 3 nos adentramos en la parte de la tesis donde poco a poco se va montando una estructura de la que empiezan a surgir aportaciones, desde el capítulo 4, donde se introduce la modelización hidrodinámica, hasta la parte final, en que se desarrollan y validan las aplicaciones más sofisticadas. Un resumen de la obra en el que se señalan las conclusiones y aportaciones asociadas a cada capítulo se expone a continuación:

1. El modelo HD-3D de circulación media anual, adaptado de un modelo previo del SMHI a nuestra malla de cálculo, tiene un rendimiento óptimo para procesos de transporte que duran varios años, representando bien la circulación media en ese intervalo largo de tiempo en que se han cancelado las variaciones interanuales. Su rendimiento empeora si el año meteorológico que se simula se desvía mucho del año meteorológico típico con el que está diseñado. El modelo base del SMHI [43] es el último eslabón de una serie de modelos de circulación diseñados y validados gracias a una larga colaboración entre el SMHI (Suecia) y el Centro de Investigación de los Grandes Lagos (Ontario, Canadá), Su utilidad en esta tesis ha sido notable, aunque no puede explicar determinados fenómenos estacionales que se producen especialmente durante algunos periodos de verano. Para ello, es más indicado el otro modelo, el HD-C3D, que permite ajustarse a los vientos dominantes del intervalo de tiempo bajo estudio.

2. El modelo HD-C3D se ha adaptado de un modelo 2D de corrientes inducidas por los 8 vientos fundamentales (IOPAN, [80]) a nuestra malla de cálculo. Se ha aprovechado la formalización de su solución 3D [80] para implementarla numéricamente en un problema particular sensible a un fenómeno estacional (aplicación primera del capítulo 7) ocurrido en el verano de 1986 con una simulación y validación satisfactorias. Las ocho soluciones numéricas del trabajo original han sido moduladas y se han convertido en generatrices de soluciones numéricas del problema en unas condiciones físicas más generales. El modelo base es fruto de una serie de modelos corrientes estacionarias elaborados por científicos vinculados al Instituto de Oceanología de Polonia (Academia de Ciencias), entre los que destaca el profesor Z. Kowalik.
3. Para la construcción del modelo de difusión (capítulo 5) ha sido vital el estudio de una serie de espectros de corrientes y de energía en varios puntos del sistema representativos del Mar Báltico. Se ha comprobado que los factores energéticamente dominantes son: las fluctuaciones asociadas al giro de los vientos en la escala de la semana y en algunos puntos y momentos concretos, las oscilaciones inerciales provocadas por la fuerza de Coriolis.

Se han tenido en cuenta los fenómenos de transporte asociados a las fluctuaciones de los vientos en dirección e intensidad, así como en las diferentes escalas temporales; desde la diaria hasta la anual, a partir de lo cual se han elaborado, mediante el esquema de Taylor [182], una serie de tablas para los coeficientes de difusión turbulenta, que después se han introducido en las simulaciones.

Esta implementación de la metodología de la difusión de mesoescala ha estado acompañada de una revisión sobre este problema en el Báltico y en diferentes sistemas oceánicos del planeta cuyos resultados están de acuerdo con los esquemas conceptuales y numéricos que hemos presentado aquí.

La difusión vertical se ha modelado como función de la estratificación y estabilidad del sistema, muy variables con las estaciones del año según los perfiles verticales de la temperatura, salinidad y densidad. También se ha estimado la difusión horizontal por efecto cizalla provocado el perfil vertical de las velocidades horizontales para diferentes grosores de la capa de fluido.

Finalmente, esta metodología se ha relacionado con la difusión a gran escala en el espacio y el tiempo.

4. En el capítulo 6 se comparan y calibran el método de diferencias finitas (MDF) y el método de Monte Carlo (MMC), poniendo de manifiesto la utilidad del MMC en problemas con altos gradientes de función densidad del problema, tan difíciles de modelar con el MDF debido a la difusión numérica.
5. En relación con la difusión numérica, se ha trabajado con el método de diferencias finitas (MDF) y con los algoritmos de limitación de flujo del método MSOU (Monotonic Second Order Upstream; [143]). En primer lugar se ha hecho una breve descripción del método MSOU cuyos algoritmos [143] se han aplicado a sistemas 1D y a sistemas 2D con advección uniforme. Y en segundo lugar se ha desarrollado una ampliación del método a MSOU a sistemas 2D con advección no uniforme y a sistemas advectivos 3D con velocidades arbitrarias.
6. Al final del capítulo se ha realizado una aplicación al mar Báltico en unas condiciones idealizadas, con objeto de probar las diferentes partes del modelo. Se estudia una mancha oceánica cuyo centroide se desplaza en la dirección de los vientos hasta que **se detiene** una vez que finaliza el proceso de mezcla en la capa superficial. Se trata de un fenómeno muy sensible a las condiciones de alta estratificación (bajo coeficiente de difusión vertical) en superficie típicas de la estación de verano. Este fenómeno no es simulable en general con modelos 2D, lo que pone de manifiesto una ventaja interesante de nuestro modelo tridimensional.
7. El capítulo 7 empieza con una discusión sobre las propiedades de la rosa de los vientos, su variación con las estaciones del año, y su influencia en los coeficientes de difusión horizontal en la escala mensual y anual, estimándose unas tablas de la variación estacional de la difusión horizontal de gran utilidad en el resto de la tesis.

La primera primera de este capítulo supone una validación del modelo HD-C3D y del Método de Monte Carlo, capaces de reproducir en el Golfo de Finlandia la difusión y el arrastre (100–150 km en sentido NE, durante los primeros meses del verano de 1986) hasta su detención de la primera mancha que se detectó en el sistema proveniente de Chernobyl. Como curiosidad, este fenómeno de arrastre notable no se hubiera producido en otras épocas del año con menor estratificación (otoño, invierno, primavera temprana) en las que el arrastre hubiera sido prácticamente inapreciable: de haberse producido el accidente en otoño o invierno, las manchas posteriormente formadas hubieran tenido una

difusión turbulenta vertical tan rápida (tiempo de mezcla de pocos días) que sus centroides se habrían quedado muy cerca del punto de partida.

8. Las condiciones finales de la mancha de la aplicación al Golfo de Finlandia son una parte de las condiciones iniciales de la aplicación segunda, aplicación principal del capítulo 7, que simula el periodo 15.10.86–15.08.87 mediante el modelo de corrientes anuales HD–3D, cuyos resultados son buenos con la excepción comentada de la zona sureste. Aquí se culmina gran parte de los esfuerzos de mucho tiempo al conseguir un modelo 3D para el transporte de radionúclidos en el Mar Báltico, que a pesar de ser un modelo de baja resolución, supone un salto cualitativo respecto a las herramientas de modelización radioecológicas previas, cuyos trabajos más representativos son: un modelo de siete compartimentos [33] para todo el sistema; y un modelo unidimensional [157] en una columna de agua situada en un punto concreto del centro del mar Báltico.

Cada aplicación supone un test diferentes partes del modelo conservativo en su conjunto (tabla 1.1 del capítulo 1: circulación, difusión vertical, difusión horizontal, y transporte en la pycnoclina) constituyendo todo ello una validación favorable.

9. Se ha presentado aquí una aplicación reciente [194] a un sistema local, el estuario del Río Guadalquivir, aprovechando la metodología ya validada en el Báltico y la publicación meses antes de medidas sobre el sistema con motivo de un estudio [159] en relación al dragado del río para su navegación, que han facilitado la validación de una primera y sencilla versión de un modelo 1D del estuario para el transporte de sal. Se trata del primer modelo matemático de este sistema publicado internacionalmente y supone cierto retorno a la región de Andalucía del conocimiento adquirido por el autor de esta memoria en su carrera investigadora.
10. El capítulo 8 se consagra a la materia en suspensión en el mar Báltico, y la parte inicial destaca sobre todo por su algoritmo para la generación numérica de los vientos, basado en las propiedades de las rosas de los vientos bálticos y en sus tiempos típicos de permanencia, con objeto de calcular las tensiones de fondo que gobiernan los fenómenos de resuspensión tan importantes en esta parte del trabajo. Los resultados del modelo de materia en suspensión son bastante congruentes con los datos experimentales, a pesar de la complejidad del sistema con el que estamos trabajando. Otros trabajos relacionados con la modelización de la dinámica de la materia en suspensión han sido publicados anterior-

mente [102, 58, 214] pero siempre estudiando una parte del Mar Báltico y no el sistema como un todo. Un objetivo cumplido de este trabajo es haber conseguido, con todas las limitaciones expuestas aquí, un primer modelo, lógicamente de baja resolución, de la evolución de la materia en suspensión para todo el Mar Báltico, *como sistema completo*.

11. El modelo reproduce bien las densidades de materia en suspensión en la superficie del mar Báltico, habiendo un buen acuerdo con los valores medios experimentales, con los gradientes típicos costa-interior y con las variaciones a lo largo de las diferentes estaciones del año.
12. La validación en los sedimentos, teniendo en cuenta que se trata de un modelo de baja resolución y que siempre se han elegido puntos no sometidos a fluctuaciones locales, es muy aceptable, si tenemos en cuenta la dificultad del problema que estamos estudiando.
13. En el capítulo 9, el acuerdo entre el modelo no conservativo y las medidas experimentales es bastante aceptable. El mayor desacuerdo se produce en el punto de validación más al sur, debido fundamentalmente, según vimos en el capítulo 7, a una desviación fruto de un flujo de corrientes advectivas del norte al sur, no contemplado en nuestro modelo de corrientes medias anuales, que pudo aumentar la actividad en esta zona colocándola muy por encima del modelo.
14. Hay que comentar el resultado del modelo en el Golfo de Finlandia, zona también influenciada por una picnoclina permanente, aunque no tan fuerte como la del Báltico Estricto. Recordemos que la estructura de la actividad en superficie en otoño de 1986 era una mancha central en el golfo. El efecto del modelo de transporte en esta parte del sistema sobre esta función de actividad, con forma aproximada de campana, es una distribución de actividad en el sedimento cuya característica más destacable, si miramos con atención, es una especie de anillo de mínimos relativos que nos recuerda un poco la forma de las funciones potenciales con forma de sombrero mexicano. De los dos puntos de validación del Golfo de Finlandia, el punto más al este, experimentó más sedimentación de radiactividad que el del oeste a pesar de tener una actividad inicial en superficie del orden de la mitad y una similar tasa de sedimentación de materia en suspensión  $R_s$  ( $\text{g m}^{-2} \text{a}^{-1}$ ). Nuestra conclusión es que la picnoclina es la responsable de esta diferencia cualitativa y nuestro modelo, a pesar de su naturaleza de baja resolución, consigue reproducir este



efecto razonablemente bien, resolviéndolo y estableciendo diferencias contrastadas dentro de un mismo compartimento.

15. Por tanto, subrayemos finalmente la capacidad que tiene nuestro trabajo, dentro de las limitaciones expuestas, para aportar esta herramienta relativamente poco presente en la literatura científica como es la modelización del transporte de radionúclidos bajo condiciones dominantes de picnoclina permanente, además de las ventajas expuestas en los puntos anteriores.

## 10.2. TRABAJO FUTURO EN RELACIÓN A ESTA TESIS DOCTORAL

La tesis doctoral cuya memoria se presenta aquí es una especie de árbol con una serie de ramas por varias de las cuales podría avanzarse tanto como para desarrollar, con empeño, paciencia y curiosidad suficiente, otra tesis doctoral.

Nos encontramos por tanto, como no podía ser de otro modo, con una estructura casi fractal, como ocurre también en una escala superior con la estructura reticular de la ciencia como superestructura que abarca todo el conocimiento humano. A continuación, se irán apuntando las líneas de trabajo futuro conforme han ido surgiendo en el desarrollo de los capítulos que vertebran esta obra.

1. Como línea general de trabajo futuro, es interesante la idea de centrar todos los esfuerzos y las mejoras de la metodología de esta tesis doctoral en una parte del Mar Báltico, el Golfo de Finlandia, por una serie de razones que también se exponen a continuación. Aquí se reúnen una buena parte de los trabajos futuros relacionados con ampliaciones y refinamientos de las metodologías contenidas en los capítulos 4–7:
  - (a) El Golfo de Finlandia es una parte del sistema que representa como ninguna otra, los procesos físicos y medioambientales del Mar Báltico: alta concentración de materia en suspensión, picnoclina permanente y mar generalmente helado en invierno, entre otros.
  - (b) Si el Mar Báltico es uno de los mares más contaminados del mundo por su naturaleza estrechamente semicerrada, el Golfo de Finlandia es su compartimento más representativo por los aportes del mayor río, con diferencia, de la cuenca báltica: el río Neva.

- (c) El retorno de la inversión en trabajo nuevo de campo proveniente de la mejora de la resolución espacial y temporal del modelo se produciría en un tiempo razonable y permitiría pasar del actual modelo de baja resolución a uno de una generación posterior, con mayor resolución, similar al HIROMB del SMHI.
  - (d) Se podría diseñar en un tiempo aceptable un modelo hidrodinámico propio de corrientes inducidas por vientos que nos daría independencia respecto al SMHI. Una opción sería un modelo POM (Princeton Ocean Model) como el modelo interesante que Zhurbas [213] ha desarrollado para el sur del Báltico, con circulación inducida por los ocho vientos principales.
  - (e) Riqueza de aplicaciones del método de Monte Carlo en la zona del estuario del río Neva.
  - (f) El Golfo de Finlandia es una zona abierta al Báltico pero con un contorno no difícil de modelar numéricamente. La dispersión de la pluma contaminante del río Neva se podría tratar, como primera aproximación, mediante un sistema cerrado.
  - (g) El Golfo de Finlandia es el eje marino y comercial más importante del Mar Báltico, rodeado de ciudades notables (Estocolmo, San Petersburgo, Tallin y Helsinki), con intenso tráfico marítimo y problemas derivados de los vertidos petróleo, susceptibles de ser modelados.
  - (h) Importantes centros de investigación de la región –SMHI, Finnish Institute of Marine Research, Uppsala University, entre otros– podrían prestar y solicitar colaboración y apoyo.
- 2.** Un conocimiento más profundo sobre el estuario del Río Guadalquivir es demandado para aplicaciones tanto socioeconómicas como medioambientales: labores periódicas de dragado para mantener su navegabilidad, agricultura intensiva, turismo, y el impacto ecológico sobre el Parque Nacional de Doñana, entre otros. Para este complejo sistema, una ampliación futura de esta primera versión del modelo de transporte será necesaria.
- 3.** Son prometedoras las posibilidades de una línea de trabajo futura en ETSI de la Universidad de Sevilla –situada en el punto kilométrico 94 del estuario– con el diseño de una línea de proyectos fin de carrera que en el futuro pueden ir evolucionando hacia un proyecto de investigación mayor que todos creemos necesario. Ya hay en marcha un proyecto fin de carrera dirigido por mí en esta línea y la dirección de la escuela apoya la idea de trabajar

en este terreno, sobre todo pensando en las futuras promociones de alumnos de ingeniería civil que ya se están formando en el centro, que empezarán a trabajar en sus proyectos fin de carrera a partir del año que viene y que en el futuro podrán aportar y recibir mucho en relación a este campo. Además, existe un acuerdo con la profesora coordinadora de las asignaturas de hidráulica de esta titulación para trabajar en una línea común.

4. Otras colaboraciones que podrían ser interesantes en el futuro en relación con la investigación del estuario del río Guadalquivir son las relacionadas con los grupos andaluces implicados en el informe sobre el estuario [159].
5. Futuras ampliaciones del modelo de materia en suspensión del Báltico, basadas en aproximaciones más realistas y de mayor resolución como las ya comentadas en esta tesis, apoyadas incluso en un sub-modelo fino de las corrientes en el fondo marino (Hille et al., 2006), harán posible un acercamiento mayor del modelo a la realidad compleja del sistema.
6. Otra versión futura del modelo de materia en suspensión bajo diferencias finitas sería someterlo a advección media anual (capítulo 7) corregida a su vez por el método de limitación de flujo MSOU 3D expuesto en el capítulo 6.
7. Además, será también interesante en el futuro poder hacer ejercicios de comparación de metodologías. Primero, se podría hacer la comparación entre las dos versiones de diferencias finitas; la primera corrige los coeficientes de difusión y la segunda limita los flujos advectivos (MSOU 3D). Y segundo, se podrían comparar los resultados de las metodologías de diferencias finitas con los del modelo lagrangiano de Monte Carlo.
8. El siguiente paso en el futuro para el modelo de transporte de radionúclidos no conservativos sería abordar simulaciones para periodos de varios años, del orden de una década e incluso ir más allá en el tiempo. Esto sería factible a corto plazo mejorando la eficiencia de los algoritmos para no tener problemas de memoria en las simulaciones, teniendo definitivamente que abrir el sistema al Océano Atlántico ya que para periodos de varios años su influencia empieza a no ser despreciable, sobre todo en la zona sur, habida cuenta de los tiempos medios de residencia del Mar Báltico que para una partícula media oscilan entre las dos y las tres décadas.
9. Sería interesante llegar a una solución estacionaria de la distribución de  $^{137}\text{Cs}$  bajo la

hipótesis de mar cerrado, e incluso, compararla con la misma para el caso de sistema abierto provenientes de los valores experimentales de la literatura científica.

10. Otra opción de trabajo futuro consiste en la posibilidad, si lo permite la red de estaciones de monitorización que coordina la HELCOM (Helsinki Commission; Baltic Marine Environment Protection Commission), de sacar una rama de nuestro modelo que permita hacer predicciones año a año como una herramienta más dentro de los amplios servicios de seguridad nuclear del norte de Europa.
11. En la ciencia de la modelización medioambiental y dentro de la geofísica aplicada se trabaja fundamentalmente en dos problemas, el directo y el inverso. El primero utiliza como base los modelos más fundamentales de la geofísica (atmosféricos y oceanográficos) que son adaptados a su malla de cálculo concreta y convertidos en el pilar sobre el que se sostiene un determinado modelo de transporte de materia en suspensión, de radionúclidos o de cualquier materia pasiva natural o contaminante presente en el planeta.

El problema inverso consiste en usar tanto información experimental como de modelos de transporte de una determinada sustancia –aquí destacan notablemente los radionúclidos– para avanzar científicamente en los modelos geofísicos más fundamentales de la meteorología y la oceanografía.

12. El problema directo es que el que fundamentalmente ha protagonizado esta tesis doctoral, enmarcada claramente en el campo de la física aplicada, tan amplia en planteamiento y desarrollo, que no ha dejado mucho hueco para el análisis inverso, pero sí que pone los cimientos sólidos para futuros estudios de esta naturaleza.
13. Una vez optimizado este problema, habría que, parte a parte, avanzar en el problema inverso para refinar el conocimiento de la física del Mar Báltico mediante el uso de la información radioecológica disponible y de las herramientas matemáticas desarrolladas en esta tesis doctoral. De este modo, al iniciarse una línea de trabajo en el problema inverso, se cerraría de algún modo el círculo entre estos dos itinerarios científicos, lo que nos lleva a la reunión inicial que se mantuvo con los oceanógrafos expertos del SMHI en Nörköping (Suecia) donde se señalaba al problema inverso como línea de interés particular para ellos, más si cabe que el problema directo, con todas las ventajas y aplicaciones futuras que esta herramienta pudiera tener en eventuales episodios con material radiactivo presente en otros sistemas oceánicos. El autor de esta memoria era entonces un joven investigador

inexperto caminando prácticamente a solas en este terreno, y entendió que era más natural que el problema inverso fuera una segunda fase de trabajo, es decir, el camino de vuelta; por eso decidió emprender el camino de ida trabajando, desde la lejanía del sur de España, en el problema directo del transporte de la contaminación nuclear en el Mar Báltico.

14. Por todo lo anterior, creo que ha llegado el momento de definir claramente una línea de trabajo futuro en el problema inverso para que allí retorne una parte del conocimiento aprendido y generado con la metodología directa. Llegado a este punto, probablemente lo más productivo sea trabajar paralelamente con ambas metodologías para aprovechar realimentaciones.
15. Estas conclusiones vienen de nuevo a señalarnos la conveniencia prácticamente ineludible de fortalecer o crear las colaboraciones y alianzas necesarias con las instituciones y departamentos dedicados total o parcialmente al estudio del Mar Báltico u otros sistemas naturales con problemas afines pendientes de ser abordados, cuya resolución beneficie a todas las partes implicadas.

# Bibliografía

- [1] **Aarup T., 2002.** Transparency of North Sea and the Baltic Sea –a Secchi depth data mining study–. *Oceanologia* 44(3), 2002, pp.323–337.
- [2] **Abascal A.J., Castanedo S., Medina R., Losada I.J., and Alvarez–Fanjul E.; 2009.** Application of HF radar currents to oil spill modelling. *Marine Pollution Bulletin*, vol. 8, pp. 238–248. 2009.
- [3] **Abril J.M., Hernandez, Garcia–Leon M., 1991.** A Mathematical Approach for Modelling Radionuclide Dispersion Along the Marine Environment. *Journal of Environmental Radioactivity*, Vol. 13(1), pp. 39–54, 1991.
- [4] **Abril J.M. and M. Garcia–Leon, 1992.** A Marine Dispersion Model for Radionuclides and its Calibration from Non–radiological Information. *Journal of Environmental Radioactivity*, Vol. 16(2), pp. 127–46, 1992.
- [5] **Abril J.M. and M. Garcia–Leon, 1993.** A 2D 4–Phases marine dispersion model for non–conservative radionuclides. Part 1: Conceptual and computational model. *Journal of Environmental Radioactivity*, Vol. 20(2), pp. 71–88, 1993.
- [6] **Abril J.M. and M. Garcia–Leon, 1993.** A 2D 4–Phases marine dispersion model for non–conservative radionuclides. Part 2: Applications. *Journal of Environmental Radioactivity*, Vol. 20(2), pp. 89–115, 1993.
- [7] **Abril, J. M. and Fraga, E.; 1996.** Some physical and chemical features of the variability of kd distribution coefficients for radionuclides. *Journal of Environmental Radioactivity* 30, 253–270, 1996.

- [8] **Abril, J. M., 1998.** Basic microscopic theory of the distribution, transfer and uptake kinetics of dissolved radionuclides by suspended particulate matter. Part I: theory development. *Journal of Environmental Radioactivity* 41, 307–324, 1998.
- [9] **Abril, J. M., 1998.** Basic microscopic theory of the distribution, transfer and uptake kinetics of dissolved radionuclides by suspended particulate matter. Part II: applications. *Journal of Environmental Radioactivity* 41, 325–342, 1998.
- [10] **Abril J.M., Abdel–Aal M.M., 2000.** Marine Radioactivity Studies in the Suez Canal, Part I: Hydrodynamics and Transit Times. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 50, pp. 489–502, 2000.
- [11] **Abril J.M., Abdel–Aal M.M., Al–Gamal S.A., Abdel–Hay F.A., Zahar H.M.; 2000.** Marine Radioactivity Studies in the Suez Canal, Part II: Field Experiments and a Modelling Study of Dispersion. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 50, pp. 503–514, 2000.
- [12] **Albergel A., Martin D., Strauss B. and Gros J.M.; 1988.** The chernobyl accident: Modelling of dispersion over Europe of the radioactive plume and comparison with air activity measurements. *Atmospheric Environment Volume 22, Issue 11, 2431–2444, 1988.*
- [13] **Baretta–Bekker J.G., Duursma E.K., Kuipers B.R.; 1998.** Encyclopedia of Marine Sciences. *Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 1998.*
- [14] **Barrero, A., Pérez–Saborid M., 2005.** Fundamentos y Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos. *McGraw–Hill.*
- [15] **Bergström H., 1999** Offshore wind measurements for wind energy applications”. *Proceedings of the European Wind Energy Applications Conference. Nice, France, pp. 1212–1215.*
- [16] **Bobertz B. and Harff J., 2004.** Sediment facies and hydrodynamic setting: a study of the Baltic Sea. *Ocean Dynamics*, 54, 39–48.
- [17] **Bryan, K., 1969.** A numerical method for the study of ocean circulation. *J. Comput. Phys.*, 4, pp. 400–414.
- [18] **Chechko V.A., 2002.** Analysis of space and time variations in the suspended matter distribution in Kaliningrad Bay of the Baltic Sea. *Water Resources* 29, 4, pp. 388–395, 2002.

- [19] **Chen C.S., Reid R.O., Nowlin W.D., 1996.** Near-inertial oscillations over the Texas Louisiana shelf. *Journal of Geophysical Research–Oceans* 101 (C2), 3509–3524, 1996.
- [20] **Clark, M.J., Webb, G.A.M., 1980.** A model to assess exposure from releases of radioactivity into the seas of northern Europe. In: Impacts of radionuclide releases into the marine environment. *Proc. IAEA Symp., Vienna, 6–10 October 1980, pp. 629–48.*
- [21] **Colling A., Brown E., Park D., Phillips J., Rothery D., Wright J., 2004.** Ocean Circulation. *The Open University, Butterworth–Heinemann, 2004.*
- [22] **Csanady G.T., 1975.** Hydrodynamics of large lakes. *Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 72, No. 16, pp. 357–386.*
- [23] **Csanady G.T., 1982.** Circulation in the Coastal Ocean. *D. Reidel, Dordrecht, Holland.*
- [24] **Davis R.E., De Szoeko R., and Niiler P., 1981.** Variability in the upper ocean during MILE. Part II: Modeling the mixed layer response. *Deep–Sea Research* 28A (12): 1453–1475.
- [25] **D’Asaro E.A., 1989.** The decay of wind–forced mixed layer inertial oscillations due to the  $\beta$  effect. *J. Geophys. Res., 94 (C2), 2045–2056.*
- [26] **Defant A.I., 1961.** Physical Oceanography, vol. 1, *Pergamon Press, Oxford, 729 pp.*
- [27] **Douglas R. Hazell a, Matthew H. England, 2003.** Prediction of the fate of radioactive material in the South Pacific Ocean using a global high resolution ocean model. *Journal of Environmental Radioactivity* 65, 329–355, 2003.
- [28] **Eilola K., Stigebrandt A., 1998.** Spreading of juvenile freshwater in the Baltic Proper. *J. Geophys. Res., 103 (C12), 27795–27807.*
- [29] **Eisma D., 1993.** Suspended Matter in the Aquatic Environment. *Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 1993.*
- [30] **Ekman V.W., 1905.** On the influence of the Earth’s rotation on ocean currents. *Arkiv for Matematik, Astronomi, och Fysik, 2 (11).*
- [31] **Elliot A.J., Clarke S., 1998.** Shallow water tides in the Firth of Forth. *Hydrographic Journal, 87, 19–24.*



- [32] **Emeis K., Christiansen C., Edelvang K., et. al., 2002.** Material transport from the near shore to the basinal environmental in the southern Baltic Sea. II: Synthesis of data on origin and properties of material. *Journal of Marine Systems* 35, 2002, pp.151–168.
- [33] **Evans, S., 1985.** A box model for calculation of collective dose commitment from radioactive waterborne releases to the Baltic Sea. *Journal of Environmental Radioactivity* 2, 41–57.
- [34] **Falkenmark, M. ; Mikulski, Z.; 1975.** The Baltic Sea: A semi–enclosed sea, as seen by the hydrologist. *Nordic Hydrology*, 6, 115–136, 1975.
- [35] **Falkenmark, M. ; Mikulski, Z; 1988.** The Baltic Sea as an example: hydrological conditions as a determinant of the ecosystem in a semi–enclosed. *Nature and Resources*, 24, pp.14–25, 1988.
- [36] **Feistel R., Naush G., Wasmund N., 2008.** State and evolution of the Baltic Sea, 1952–2005. *John Wiley and Sons, Hobolken, NJ, 704 pp.*
- [37] **Fennel W., Neumann T., 2006.** Introduccion to the Modelling of Marine Ecosystems. *Elsevier Oceanography Series*, 72; 2006.
- [38] **Ferrari G.M., Bo F.G. and Babin M., 2003.** Geo–Chemical and optical charaterizations of suspended matter in European coastal waters. *Estuarine, coastal and shelf science* 57, pp.17–24, 2003.
- [39] **Forsythe G.E. , Malcom M.A., Moler C.N., 1977.** *Computer Methods for Mathematical Computations*, Prentice Hall, USA.
- [40] **Franke, E., 1981.** A contribution to the investigations of the current conditions in the surface layer in the area of Darss sill. *Proceedings of the 12th Baltic Oceanography Conference, Leningrad.*
- [41] **Freden C., 1967.** A historical review of the Ancylus Lake and the Svea River. *Geol. Fören. Stockholm Förh.*, 89, pp. 239–267.
- [42] **Frischmuth K., Jankowski A., 1996.** Estimation of period of free oscillations (seiches) in the Kirrbucht. *Oceanologia*, No. 38 (4), 503–526.

- [43] **Funkquist, L., Gidhagen, L., 1984.** A model for pollution studies in the Baltic Sea. *Swedish Meteorological and Hydrological Institute SMHI-Report, RHO-39.*
- [44] **Funkquist L., Kleine E., 2002.** An Introduction to HIROMB, an Operational Baroclinic Model for the Baltic Sea. *RO-39, SMHI, 2002.*
- [45] **Garbalewski C., Maliki J., 1971.** Influence of thermal stratification of the lower atmosphere and water temperature on wind velocity above the Baltic. *Hidrol. i Meteorol., 7, (19), 37-46, 1971.*
- [46] **Garratt, J. R., 1977.** Review of Drag Coefficients over Oceans and Continents. *Mon. Wea. Rev., 105, 915-929, 1977.*
- [47] **Gavrilov V.M., Gritchenko Z.G., Ivanova L.M., 1989.** Strontium-90, Cesium-134 and Cesium-137 in water reservoirs of the Soviet Union's Baltic region (1986-1988). *Baltic Sea Environmental Proceedings, vol. 31, pp. 62-80, 1989.*
- [48] **Gidhagen L., 1984.** Coastal upwelling in the Baltic. *RHO 37.*
- [49] **Gidhagen, L., Funkquist, L., Murthy, R., 1986.** Calculations of horizontal exchange coefficients series current meter data from the Baltic Sea. *Swedish Meteorological and Hydrological Institute SMHI-Report RO-1.*
- [50] **Gidhagen L., 2004.** Satellite and in situ measurements of sea-surface temperatures indicating coastal upwelling in the Baltic Sea. *Coastal and Shelf Science, Volume 24, Issue 4, November 2004, Pages 449-462.*
- [51] **Gomez-Gesteira M.; Montero P.; Prego R.; Taboada J.J.; Leitaó P.; Ruiz-Villarreal M.; Neves R.; Perez-Villar V., 1999.** A two-dimensional particle tracking model for pollution dispersion in A Coruna and Vigo Rias (NW Spain). *Oceanologica Acta, 22, pp. 167-177.*
- [52] **Griffa A., Kirwan A.D., Mariano A.J., Ozgokmen T.M., Rossby T.; 2007.** Lagrangian Analysis And Prediction Of Coastal And Ocean Dynamics. *Cambridge University Press, 2007.*
- [53] **Gritchenko, Z.G., Ivanova, L.M., Orlova, T.E., Tishkova, N.A., Toporkov, V.P., Tochilov I., 1989.** Radiation situation in the Baltic Sea in 1986 in sea water and sediments.

- In: Three years observations of the levels of some radionuclides in the Baltic Sea after the Chernobyl accident. *Baltic Sea environment proceedings, vol. 31, Helsinki, Finland, pp. 10–30.*
- [54] **Gritchenko, Z.G., Ivanova, L.M., Orlova T.E., Tishkova, N.A., Toporkov, V.P., Tochilov I., 1989b.** The results of determination of Sr-90, Cs-134, and Cs-137 in the water of the Baltic Sea in 1988. In: Three years observations of the levels of some radionuclides in the Baltic Sea after the Chernobyl accident. *Baltic Sea environment proceedings, vol. 31, Helsinki, Finland, pp. 52–61.*
- [55] **Gustafson T., Kullenberg G., 1933** Inertia currents in the Baltic. *Nature, 131 (3312), 586–587.*
- [56] **Gustafsson N. , 1993.** HIRLAM, *Technical Report 9, SMHI.*
- [57] **Haapala J., Lepparanta M., 1996.** Simulating the Baltic Sea ice season with a coupled ice–ocean model. *Tellus, 48 A, 622–643, 1996.*
- [58] **Hakanson L., Gyllenhammar A. and Brodin A., 2004.** A dynamic compartment model to predict sedimentation and suspended particulate matter in coastal areas. *Ecological Modelling 175, 2004, pp.353–384.*
- [59] **Hakanson L., Eckhell J., 2005.** Suspended Particulate matter (SPM) in the Baltic Sea. New empirical data and models. *Ecological Modelling, 189, pp. 130–150, 2005.*
- [60] **Hallstadius L., Garcia–Montaño E., Nilsson U., Boelskifte S.; 1987.** An Improved and Validated Dispersion Model for the North Sea and Adjacent Waters. *J. Environ. Radioactivity, 5, 261–274, 1987.*
- [61] **Hasselmann K., 1970.** Wind–driven inertial oscillations. *Geophysical Fluid Dynamics 1 (1): 463–502.*
- [62] **Haza A.C., Poje A.C., Ozgokmen T.M., Martin P., 2008.** Relative dispersion from a high–resolution coastal model of the Adriatic Sea. *Ocean Modelling, 22, pp. 48–65, 2008.*
- [63] **Hazell D.R., England M.H; 2003.** Prediction of the fate of radioactive material in the South Pacific Ocean using a global high resolution ocean model. *Journal of Environmental Radioactivity 65, pp. 329–355, 2003.*

- [64] **He, Q. and Walling, D.E., 1996.** Interpreting particle size effects in adsorption of  $^{137}\text{Cs}$  and unsupported  $^{210}\text{Pb}$  by mineral soils and sediments. *Journal of Environmental Radioactivity* 30, 117–137, 1996.
- [65] **HELCOM, 1989.** Three years observations of the levels of some radionuclides in the Baltic Sea after the Chernobyl accident. Baltic Sea Environment Proceedings, no. 31. *Baltic Marine Environmental Protection Commission (Helsinki Commission), 1989.*
- [66] **HELCOM, 1995.** Radioactivity in the Baltic Sea 1984–1991. Baltic Sea Environment Proceedings, no. 61. *Baltic Marine Environmental Protection Commission (Helsinki Commission), 1995.*
- [67] **HELCOM, 1996.** Database of the Environmental Data Center, *Baltic Marine Environmental Protection Commission (Helsinki Commission), 1996.*
- [68] **HELCOM, 1998.** Baltic Sea Environmental Commission. Helsinki Commission, 1998. Fourth periodic assessment of the state of the marine environment of the Baltic Sea, 1994–1998.
- [69] **HELCOM, 2003.** Radioactivity in the Baltic Sea 1992–1998. Baltic Sea Environment Proceedings, no. 85. *Baltic Marine Environmental Protection Commission (Helsinki Commission), 1995.*
- [70] **HELCOM, 2009.** Radioactivity in the Baltic Sea 1999–2006. Baltic Sea Environment Proceedings, no. 117. *Baltic Marine Environmental Protection Commission (Helsinki Commission), 2009.*
- [71] **Herman A., Jankowski A., 2001.** Wind- and density-driven water circulation in the southern Baltic Sea: A numerical analysis. *Task Quarterly*, 5, 1, pp. 29–58, 2001.
- [72] **Hille S., Leipe T., Seifert T., 2006.** Spatial variability of recent sedimentation rates in the Eastern Gotland Basin (Baltic Sea). *Oceanologia*, 48 (2), 2006. pp.297–317, 2006.
- [73] **Hilmer M., Jung T., 2000.** Evidence for a recent change in the link between the North Atlantic Oscillation and Arctic sea ice export. *Geophysical Research Letters* 27 (7), 989–992.
- [74] **Holby O., Evans S., 1996.** The Vertical Distribution of Chernobyl-Derived Radionuclides in a Baltic Sea Sediment. *J. Environ. Radioactivity*, Vol. 33 No. 2, pp. 129–145, 1996.

- [75] **Holt J.T., and James I.D., 1999.** *Continental Shelf Research*, 19, 1617–1642.
- [76] **IAEA, 1984.** Study of Radioactive Materials in the Baltic Sea. IAEA–TECDOC–362. Vienna.
- [77] **IAEA, 1986.** Monitoring the fallout. *IAEA Bulletin, Autumn*, pp.30–32, 1986.
- [78] **Ignatius H., Axberg L., Niemistö L., Winterhalter B.; 1981.** Geology of Baltic Sea, pp. 54–104. In: The Baltic Sea. *Elsevier Oceanography Series 30*, 1981.
- [79] **Jankowski A., Kowalik Z., 1980.** Diagnostic model of wind– and density–driven currents in the Baltic Sea. *Oceanologica Acta*, vol. 3, No. 3, 301–308.
- [80] **Jankowski A., 1983.** An model H–N for the calculation of wind– and density–driven circulation in the Baltic Sea. Part I. Theoretical basis. Wind–driven circulation in the homogeneous Baltic Sea. *Oceanologia*, 1983, No. 14, 23–75.
- [81] **Jankowski A., 1983b.** An model H–N for the calculation of wind– and density–driven circulation in the Baltic Sea. Part II. Density–driven circulation in the summer season. *Oceanologia*, No. 16, 17–40.
- [82] **Jankowski A., Zygmunt Catewicz Z., 1984.** Characteristics of Horizontal Macro turbulence due to the Currents in the Baltic Sea. *Ocean Dynamics* No. 37 (5), 173–200.
- [83] **Jankowski A., 1996.** Vertical water circulation in the southern Baltic Sea and its environmental implications. *Oceanologia*, No. 38 (4), 483–501.
- [84] **Jansen D.L., Lundqvist D.P., Christiansen C., Lars C. Lund–Hansen L.C., Balstrom T., Leipe T.; 2003.** Deposition of organic matter and particulate nitrogen and phosphorus at the North Sea – Baltic Sea transition. A GIS study. *Oceanologia*, 45 (1), 2003. pp. 283–303.
- [85] **Jaun A., 2005.** Numerical Methods for Partial Differential Equations. *Royal Institute of Technology, Stockholm*.
- [86] **Jonsson A., Danielsson A., Rahm L., 2005.** Bottom type distribution based on wave friction velocity in the Baltic Sea. *Continental Shelf Research* 25, (2005), pp.419–435.

- [87] **Karcher M.J., Gerland S., Harms I.H., Iosjpe M., Heldal H.E., Kershaw P.J., Sickel M., 2004.** The dispersion of  $^{99}\text{Tc}$  in the Nordic Seas and the Arctic Ocean: A comparison of model results and observations. *Journal of Environmental Radioactivity*, 74, 185–198, 2004.
- [88] **Kempe S., Nies H., 1987.** Chernobyl nuclide record from a North Sea sediment trap. *Nature*, pp.828–31, 1987.
- [89] **Keunecke, K.H., Kohn, H., Krauss, W., Miosga, G., Schott F., Speth, P., Willebrand, J. and Zenk, W., 1975.** Baltic 75, Physikalischer Teil., *Institut für Meereskunde, Universität Kiel, Bericht Nr. 11.*
- [90] **Kielmann, J., Krauss, W, and Kennecke, K.H., 1973.** Currents and stratification in the Belt Sea and the southern Arkona Basin during 1962–68. *Kierler Meeresforsch., vol. 29, No. 2.*
- [91] **Kielmann, J., 1981.** Grundlagen der Anwendung eines numerischen Modells der geschichteten Ostsee. *Berchte Institut Für Meereskunde Kiel, Nr. 87 a,b.*
- [92] **Kolmogorov A.N., 1941.** The local structure of turbulence in incompressible viscous fluids at very large Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR –Proceedings of the USSR Academy of Sciences–*, 30, 299–303.
- [93] **Kolmogorov A.N., 1941b.** On degeneration (decay) of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR –Proceedings of the USSR Academy of Sciences–*, 31, 538–540.
- [94] **Kolmogorov, A.N., 1941c.** Dissipation of energy in isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR –Proceedings of the USSR Academy of Sciences–*, 32, 19–21.
- [95] **Komar, P.D., 1976.** Beach processes and sedimentation. *Prentice-Hall, 1976.*
- [96] **Koslowsky, G. and Löwe, P., 1994.** The western Baltic Sea ice season in term of mass related severity index 1879–1992. Part I: Temporal variability and association with the North Atlantic Oscillation. *Tellus*, 46A, 66–74.
- [97] **Koslowsky, G. and Glaser, R., 1999.** Variations in reconstructed ice winter severity in the western Baltic from 1501 to 1995, and their implications for the North Atlantic Oscillation. *Climate Change*, 41, 175–191.

- [98] **Kousitas, C.G. and Gousidou–Koutita, M.; 1986.** A Comparative study of three mathematical models for wind-generated circulation in coastal areas. *Coastal Engineering*, vol. 10, pp.12–138.
- [99] **Kowalik Z., 1972.** Wind Driven Circulation in a Shallow Stratified Sea. *Ocean Dynamics*, 25, pp. 265–278, 1972.
- [100] **Kowalik Z., and Staskiewicz A., 1976.** Diagnostic Model of the Circulation in the Baltic Sea. *Ocean Dynamics*, 29, pp. 239–250, 1976.
- [101] **Kowalik Z., T.S. Murty, 1993.** Numerical modelling of ocean dynamics, *Advances Series on Ocean Engineering*, vol. 5, World Scientific, 1993, 481 pp.
- [102] **Kuhrts C., Fennel W. and Seifert T., 2004.** Model studies of transport of sedimentary material in the western Baltic. *Journal of Marine Systems* 52, 2004, pp.167–190.
- [103] **Kullenberg G., 1972.** Apparent horizontal diffusion in stratified vertical shear flow. *Tellus*, 24 (1), 17–28.
- [104] **Kullenberg G., 1981.** Physical Oceanography of the Baltic Sea. In: *The Baltic Sea*, 135–175.
- [105] **Laissaoui A., 1999.** Estudios sobre los procesos que regulan el comportamiento de los radionúclidos en aguas de estuario: aplicación a la ría de Huelva. Tesis doctoral. Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear. *Universidad de Sevilla*, 1999.
- [106] **Laamanen M., Fleming V. and Olsonen R., 2004.** Summer time Secchi depths in 1903–2003 in the Baltic Sea. *HELCOM Workshop 1/2004, Document 2/17*, pp.1–4.
- [107] **Lambe T.W., Whitman R.V., 1997.** Mecánica de suelos. *Limusa, Massachusetts*, 1997.
- [108] **Landsberg H.E., 1985.** World survey of climatology, vols. 1–15. *Elsevier, Amsterdam*, 1985.
- [109] **Lau Y.L., Krishnappan B.G., 1981.** Ice Cover Effects on Stream Flows and Mixing. *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 107, no. 10, pp. 1225–1242, 1981.

- [110] **Lehmann, A., 1995.** A three-dimensional baroclinic eddy-resolving model of the Baltic Sea. *Tellus 47A*, 1013–1031.
- [111] **Lehmann, A., Krauss, W., Hinrichsen, H.–H., 2002.** Effects of remote and local atmospheric forcing on circulation and upwelling in the Baltic Sea. *Tellus A*, 54, 299–316.
- [112] **Leonard, B. P., 1988.** Simple High-Accuracy Resolution Program for Convective Modelling of Discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 8, 1291–1318, 1988.
- [113] **Leonard, B. P., 1991.** The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 88, 17–74, 1991.
- [114] **Leppäranta, M., Zhang, Z.H., 1992.** A viscous-plastic ice dynamics test model for the Baltic Sea. *Internal report, Vol. 3, 14 pp., Finnish Institute of Marine Research.*
- [115] **Leppäranta, M., Myberg, K., 2009.** Physical Oceanography of the Baltic Sea. *Springer-Praxis, 2009.*
- [116] **Liñán A., Clavin P., 1987.** Premixed flames with non-branching chain reactions. *Combustion and Flame*, 70, 137–159, 1987.
- [117] **Liu J.T., Chao S., Hsu R.T., 2002.** Numerical modeling study of sediment dispersal by a river plume. *Continental Shelf Research, Vol.22, Issues 11–13, pp.1745–1773, 2002.*
- [118] **Liu W.C., Hsu M.H., Kuo A.Y., 2002.** Modelling of hydrodynamics and cohesive sediment transport in Tanshui River estuarine system, Taiwan. *Marine Pollution Bulletin*, 44(10), pp. 1076–88, 2002.
- [119] **Lumborg U., Windelin A., 2003.** Hydrography and cohesive sediment modelling: application to the Romo Dyb tidal area. *Journal of Marine Systems, Volume 38, N.3, pp. 287–303, 2003.*
- [120] **Mattila J., Kankaanpaa H., Ilus E., 2006.** Estimation of recent sediment accumulation rates in the Baltic Sea using artificial radionuclides Cs-137 and Pu-239,240 as time markers. *Boreal Environmental Research 11 (2), 95–107, 2006.*



- [121] McNally G.J., Patzert W.C., Kirwan A.D., and Vastano A.C., 1983. The near-surface circulation of the North Pacific using satellite tracked drifting buoys. *Journal of Geophysical Research* 88 (C12): 7507–7518.
- [122] Meier, H. E. M., 2001. On the parameterization of mixing in three-dimensional Baltic Sea models. *Journal of Geophysical Research*, 106(C12), 30997–31016.
- [123] Meier, H. E. M., 2002. Regional ocean climate simulations with a 3D ice–ocean model for the Baltic Sea. Part 1: Model experiments and results for temperature and salinity. *Climate Dynamics*, 19, 237–253.
- [124] Meier, H. E. M., 2002b. Regional ocean climate simulations with a 3D ice–ocean model for the Baltic Sea. Part 2: Results for sea ice. *Climate Dynamics*, 19, 255–266.
- [125] Mikulski Z., 1970. Inflow of river water to the Baltic Sea in the period 1951–1960. *Nordic Hydrology* 4, pp.216–227, 1970.
- [126] National Academy of Sciences, 1972. Numerical models of ocean circulation. *Proc. Symp. Durham, N.H., 1972*.
- [127] Nerheim S., 2004. Shear-generating motions at various length scales and frequencies in the Baltic Sea – an attempt to narrow down the problem of horizontal dispersion. *Oceanologia*, 46 (4), 2004. pp. 477–503.
- [128] Nakano M., Povinec P.P., 2003. Oceanic general circulation model for the assessment of the distribution of  $^{137}\text{Cs}$  in the world ocean. *Deep Sea Research, Part II*, 50, pp. 2803–2816.
- [129] Nicholson J., O'Connor B.A., 1986. Cohesive Sediment Transport Model. *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 112, 7, pp.621–640, 1986.
- [130] Nielsen S.P., 1995. A box model for North–East Atlantic coastal waters compared with radioactive tracers. *Journal of Marine Systems*, 6, 545–560, 1995.
- [131] Nies, H., 1989. The distribution of Chernobyl fallout over the Baltic Sea and its change during 1987 and 1988. In: Three years observations of the levels of some radionuclides in the Baltic Sea after the Chernobyl accident. *Baltic Sea environment proceedings, vol. 31, Helsinki, Finland, pp. 31–51*.

- [132] **Oh I.S., Zhurbas V., Park W., 2000.** Estimating horizontal diffusivity in the East Sea (Sea of Japan) and the northwest Pacific from satellite-tracked drifter data. *Journal Of Geophysical Research*, vol. 105, No. C3, pp. 6483–6492, 2000.
- [133] **Okubo A., 1971** Oceanic diffusion diagrams. *Deep-Sea Res.*, 18, 789–802.
- [134] **Omstedt, A., 1990.** Modelling the Baltic Sea as thirteen sub-basins with vertical resolution. *Tellus 42A*, 286–301.
- [135] **Omstedt, A., Nyberg, L., 1991.** Sea level variations during ice-covered periods in the Baltic Sea. *Geophysica*, 27(1–2), 41–61.
- [136] **Omstedt, A.; Nyberg L., 1996.** Response of Baltic Sea ice to seasonal, interannual forcing and climate change. *Tellus 48A*, 644–662.
- [137] **Omstedt, A., Axell, L.B., 1998.** Modeling the seasonal, interannual, and long-term variations of salinity and temperature in the Baltic Proper. *Tellus 50A*, 637–652.
- [138] **Omstedt A., Elken J., Lehmann A., Piechura J., 2004.** Knowledge of the Baltic Sea physics gained during the BALTEX and related programmes. *Progress in Oceanography*, 63 (1–2), 1–28, 2004.
- [139] **Osinski R., Rak D., Walczowski W., Piechura J., 2010.** Baroclinic Rossby radius of deformation in the southern Baltic Sea. *Oceanologia*, 52 (3), 2010. pp. 417–429, 2010.
- [140] **Periañez P., Abril J.M., Garcia-Leon M.; 1994.** A Modeling Study of Ra-226 Dispersion in an Estuarine System in South-West Spain. *Journal of Environmental Radioactivity*, vol. 24, no. 2, pp. 159–179; 1994.
- [141] **Periañez, R. and Elliott, A.J., 2002.** A particle tracking method for simulating the dispersion of non-conservative radionuclides in coastal waters. *Journal of Environmental Radioactivity* 58, 13–33.
- [142] **Periañez R., 2004.** A particle-tracking model for simulating pollutant dispersion in the Strait of Gibraltar. *Marine Pollution Bulletin* 49, 613–623.
- [143] **Periañez R., 2005.** Modelling the Dispersion of Radionuclides in the Marine Environment. An Introduction. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 2005.

- [144] **Periañez R., 2005b.** GISPART: a numerical model to simulate the dispersion of contaminants in the Strait of Gibraltar. *Environmental Modelling and Software* 20, 797–802.
- [145] **Periañez R., 2005c.** An operative lagrangian model for simulating radioactivity dispersion in the Strait of Gibraltar. *Journal of Environmental Radioactivity* 84, 95–101.
- [146] **Periañez R. and Pascual–Granged A., 2008.** Modelling surface radioactive, chemical and oil spills in the Strait of Gibraltar. *Computers and Geosciences* 34, 163–180.
- [147] **Periañez R., 2010.** Fundamentos de Oceanografía Dinámica. *Secretariado de Publicaciones, Universidad de Sevilla, 2010.*
- [148] **Persson, C., Rodhe, H. De Geer, L. E.; 1987.** The Chernobyl accident. A meteorological analysis of how radionuclides reached and were deposited in Sweden. *Ambio* 16, 20–31, 1987.
- [149] **Prandle D., 1984.** *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* 310, 407–36.
- [150] **Prandle D., Hargreaves J.C., McManus J.P., Campbell A.R., Duwe K., Lane A., Mahnke P., Shimwell S., Wolf J., 2000.** Tide, wave and suspended sediment modelling on an open coast, Holderness. *Coastal Engineering, Vol. 41, N.1, pp. 237–267, 2000.*
- [151] **Preller R.H., Cheng A., 1999.** Modeling the Transport of Radioactive Contaminants in the Arctic. *Marine Pollution Bulletin, Vol. 38, No. 2, pp. 71–91, 1999.*
- [152] **Puls W. and Sundermann J., 1990.** Simulation of suspended sediment dispersion in the North Sea. *In: Residual currents and long term transport. pp.356–372.*
- [153] **Radziejewska T., Chabior M., 2004.** Climatic and hydrological controls over the zoobenthos in a southern Baltic coastal lagoon. *Hydrobiologia, 514, pp.171–181, 2004.*
- [154] **Ralph E.A., Niiler P.P., 2000.** Wind–driven currents in the tropical Pacific. *Journal of Physical Oceanography* 29 (9): 2121–2129.
- [155] **Ramming H.G., Kowalik Z., 1980.** Numerical modelling of marine hydrodynamics, *Elsevier Oceanography Series, 26, 1980, 369 pp.*

- [156] **Reynolds O., 1883.** An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water will be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels. *Philosophical Transactions, Royal Society London 174: 935.*
- [157] **Ribbe, J., Müller–Navarra, S.H., Nies, H., 1991.** A one–dimensional dispersion model for radionuclides in the marine environment applied to the Chernobyl fallout over the Northern Baltic Sea. *Journal of Environmental Radioactivity 14, 55–72.*
- [158] **Richardson E.G., 1961.** 2nd edition *Dynamics of Real Fluids*. London: Edwards Arnold.
- [159] **Ruiz–Segura J., Losada–Rodríguez M.A., Polo–Gómez M.J., Bramato S., Díez–Minguito, M., 2010.** Propuesta metodológica para diagnosticar y pronosticar las consecuencias de las actuaciones humanas en el Estuario del Guadalquivir. 2010.
- [160] **Sanchez–Cabeza J.A., Ortega M., Merino J., Masque P.; 2002.** Long–term box modelling of  $^{137}\text{Cs}$  in the Mediterranean Sea. *Journal of Marine Systems 33–34, 457– 472, 2002.*
- [161] **Sankaranarayanan S., Shankan N.J., Cheong H.F., 1998.** Three–Dimensional Finite Difference Model for Transport of Conservative Pollutants. *Ocean Engineering, 25, 6, 425–442, 1998.*
- [162] **Savchuk O. and Rodriguez Medina M., 2003.** Secchi depth and nutrient concentrations in the Baltic Sea. *Technical Report, Dept. of Systems Ecology, Stockholm University.*
- [163] **Schrum, C., Hubner, U., Jacob, D. and Podzun, R., 2003.** A coupled atmosphere–ice–ocean model for the North Sea and the Baltic Sea. *Climate Dynamics, 21, 131–151.*
- [164] **Scott E.M., Gurbuttb P., Harms I., Heling R., Nielsen S.P., Osvat I., Preller R., Sazykina T., Wada A., Sjoebloom K.L; 1997.** Benchmarking of numerical models describing the dispersion of radionuclides in the Arctic Seas. *The Science of the Total Environment, 202, 123–134, 1997.*
- [165] **Skamarock W.C., 2006.** Positive–Definite and Monotonic Limiters for Unrestricted–Time–Step Transport Schemes. *Monthly Weather Review, 134, 2241–2250, 2006.*

- [166] **Shearman R.K., 2005.** Observations of near-inertial current variability on the New England shelf. *Journal of Geophysical Research-Oceans* 110 (C2), Art. No. C02012, 2005.
- [167] **Sheu W.H., Lee S-M, Wang M.T., 1997.** Multi-dimensional monotone flux discretization scheme for convection dominated flows. *International Journal for Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 7, 8, pp. 814-842, 1997.
- [168] **Simons, T.J., 1973.** Development of three-dimensional numerical model of the Great Lakes. *Inland Water Directorate Scientific Series No.12, Canada Centre for Inland Waters, Burlington, Ontario, 1973, 26pp.*
- [169] **Simons, T.J., 1974.** Verification of numerical models of Lake Ontario. Part 1: Circulation in spring and early summer. *J. Phys. Oceanogr.*, 4, 507-523.
- [170] **Simons, T.J., 1978.** Wind-driven circulation in southeast Baltic. *Tellus*, 30, 272-283.
- [171] **SMHI (Swedish Meteorological and Hydrological Institute), 2010.**  
<http://www.smhi.se/en/services/professional-services/data-and-statistics/wind-statistics-1.7664>. *Wind Statistics Service, SMHI.*
- [172] **Smolarkiewicz P.K., 1984.** A Fully Multidimensional Positive Definite Advection Transport Algorithm with small Implicit Diffusion. *Journal of Computational Physics*, 54, 325-362, 1984.
- [173] **Soomere T., Keevallik S., 2001.** Anisotropy Of Moderate And Strong Winds In The Baltic Proper. *Proc. Estonian Acad. Sci. Eng.*, 7, 1, 35-49; 2001.
- [174] **Stanev E.V., Buesseler K.O., Staneva J.V., Livingston H.D., 1999.** A comparison of modelled and measured Chernobyl <sup>90</sup>Sr distributions in the Black Sea. *Journal of Environmental Radioactivity*, 43(2), pp. 187-203.
- [175] **Stewart R.H., 2006.** Introduction To Physical Oceanography. *Texas A & M University.*
- [176] **Stigebrandt, A., 1983.** A model for the exchange of water and salt between the Baltic Skagerrak. *Journal of Physical Oceanography* 13, 411-427.
- [177] **Stigebrandt A., Lass H.U., Liljebladh B., Alenius P., Piechura J., Hietala R., Beszczynska A., 2002.** DIAMIX – An experimental study of diapycnal deepwater mixing in the virtually tideless Baltic Sea. *Boreal Environment Research*, 7 (4), 363-369, 2002.

- [178] **Stokes G.G., 1847.** On the theory of oscillatory waves. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 8, part 4, 441–455, 1847.
- [179] **Svansson A., 1972.** Canal models of sea level and salinity variations in the Baltic and adjacent waters, *Series Hydrography, Rap. 26, Fishery Board of Sweden*, 72 pp.
- [180] **Svansson, A., 1972b.** The water exchange of the Baltic. *Ambio Special Report 1*, 15–19.
- [181] **Svansson, A., 1980.** Exchange of water and salt in the Baltic and adjacent seas. *Oceanologica Acta 3*, 431–440.
- [182] **Taylor, G.I., 1921** Diffusion by continuous movements. *Proceedings of the London Mathematical Society (2)*, 20, 196.
- [183] **Toscano–Jimenez M., R. Garcia–Tenorio, 2001.** *Proceedings of I International Congress On Marine Science And Technology, Oceans III Millennium. Pontevedra, 2001.*
- [184] **Toscano–Jimenez M., Garcia–Tenorio R., 2002.** *Proceedings of 5th International Topical Meeting on Industrial Radiation and Radioisotope Measurement Applications, Bologna, Italy, 2002.*
- [185] **Toscano–Jimenez M., García–Tenorio R., 2002b.** *Proceedings of Computational and Mathematical Methods on Science and Engineering (CMMSE–2002 Conference), Alicante, Spain, 2002. Vol. II, p. 342. 2002.*
- [186] **Toscano–Jimenez M., Garcia–Tenorio R., 2002c.** *Proceedings of OCEANS 2002 MTS/IEEE, Biloxi (Mississippi, USA), pp. 2472–2476. 2002.*
- [187] **Toscano–Jimenez M. and R. García–Tenorio, 2003.** Modelling The Dispersion Of  $^{137}\text{Cs}$  In Marine Ecosystems With Monte Carlo Methods. *Nuclear Instruments and Methods B*, vol.213, pp. 789–793.
- [188] **Toscano–Jimenez M., Garcia–Tenorio R. and Abril J.M., 2003b.** *Proceedings of the First International Meeting on Applied Physics, Badajoz, Spain, 2003.*
- [189] **Toscano–Jimenez M. and García–Tenorio R., 2004.** A three–dimensional model for the dispersion of radioactive substances in marine ecosystems. Application to the Baltic Sea after the Chernobyl disaster. *Ocean Engineering 31*, pp. 999–1018. 2004

- [190] **Toscano–Jimenez M., Abril J.M. and Garcia–Tenorio R., 2004b.** *Proceedings of OCEANS 2004 MTS/IEEE Conference. Kobe (Japan), pp. 2362–2365, 2004.*
- [191] **Toscano–Jimenez M., Abril J.M. and Garcia–Tenorio R., 2005.** *Proceedings of OCEANS 2005, MTS/IEEE Conference, Brest (France), pp. 475–480, 2005.*
- [192] **Toscano–Jimenez M., Abril J.M., 2007** *Proceedings of OCEANS 2007 MTS/IEEE Conference, Aberdeen (Scotland, U.K.), pp. 521–526, 2007.*
- [193] **Toscano–Jimenez M., Abril J.M., 2010.** Modelling the transport of particles released from nuclear accidents. Validation in the Baltic Sea after Chernobyl disaster. *Abstract Book, International Conference on Engineering Failures Analysis, University of Cambridge, pp. 28–29, 2010.*
- [194] **Toscano–Jimenez M., Abril J.M., 2011.** A Lagrangian Transport Model Applied to two Different Brackish Systems: the Baltic Sea and the Guadalquivir River. *Proceedings of the OCEANS 2011 IEEE Conference, Santander (Spain), pp.1–8, 2011.*
- [195] **Tsanis I.K., Wu J., 2000.** Application and verification of a three–dimensional hydrodynamic model to Hamilton Harbour, Canada. *Global Nest: the International Journal, Vol. 2, No. 1, pp 77–89.*
- [196] **Udin I., Omsted A., 1976.** Sea Ice–75, Dynamical Report. *Winter Navigation Research. 16(8), 1–64.*
- [197] **Van Meurs P., 1998.** Interactions between near–inertial mixed layer currents and the mesoscale: The importance of spatial variability in the vorticity field. *Journal of Physical Oceanography 28 (7): 1363–1388.*
- [198] **Valli A., Leppäranta M., 1975.** Calculations of ice drift in the Bothnian Bay and the Quark. *Winter Navigation Research. 13, 1–14.*
- [199] **Vested H.J., Baretta J.W., Ekebjærg L.C., Labrosse A., 1996.** Coupling of hydrodynamical transport and ecological models for 2D horizontal flow. *Journal of Marine Systems, 8, 255–267, 1996.*
- [200] **Voipio, A., 1981.** The Baltic Sea. *Elsevier, Amsterdam, pp. 162–167.*

- [201] **Weller R.A., Plueddmann A.J., 1996.** Observations of the vertical structure of the oceanic boundary layer. *Journal of Geophysical Research* 101 (C4): 8, 789–806.
- [202] **Weiss, D., 1989.** The distribution of radionuclides in bottom sediments of the Open Baltic Sea and Greifswald Bodden. In: Three years observations of levels of some radionuclides in the Baltic Sea after the Chernobyl accident. *Baltic Sea environment proceedings, vol. 31, Helsinki, Finland, pp. 94–122.*
- [203] **Witting R., 1911.** Tidvatten i Osterjön och Finska viken. *Fennia, 29(2), 84 pp.*
- [204] **Wright J., Colling A., Park D., Brown E., Phillips J., Rothery D., 2005.** Waves, Tides and Shallow–Water Processes. *The Open University, Butterworth–Heinemann, 2005.*
- [205] **Wu J., 1975.** Wind–induced drift currents. *Journal of Fluid Mechanics, Vol. 68, No. 1, pp.49–70.*
- [206] **Wu J., 1993.** An Integrated Hydrodynamic and Pollutant Transport Model for the Nearshore Areas of the Great Lakes and Their Tributaries. Open Access Dissertations and Theses. pp.1–336, Paper 3117, *McMaster University, Ontario, Canada.*
- [207] **Wu J., and Tsanis I.K., 1995.** VHI3D: A vertical/horizontal integrating wind–induced circulation model. *Advances in Water Research, Vol. 18, No. 2, pp.77–87.*
- [208] **Wu Y., Falconer R.A. and Uncles R.J., 1999.** Modelling of Water Flows and Cohesive Sediment Fluxes in the Humber Estuary. *Marine Pollution Bulletin, Vol. 37, Issues 3–7, pp. 182–189, 1999.*
- [209] **Wulff F., Rahm L., Larsson P.; 2001.** A Systems Analysis of the Baltic Sea. *Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 2001.*
- [210] **Zhang, Z., Leppäranta, M., 1995.** Modelling the influence of ice on sea level variations in the Baltic Sea. *Geophysica, 31(2), 31–45.*
- [211] **Zhurbas V.M., Laanemets J., Kuzmina N.P., Muraviev S.S., Elken J., 2008.** Direct Estimates of the Lateral Eddy Diffusivity in the Gulf of Finland of the Baltic Sea (Based on the Results of Numerical Experiments with an Eddy Resolving Model). *Oceanology, 2008, Vol. 48, No. 2, pp. 175–181, 2008.*



- [212] **Zhurbas V., Laanemets J., Vahtera E., 2008 b.** Modeling of the mesoscale structure of coupled upwelling/downwelling events and the related input of nutrients to the upper mixed layer in the Gulf of Finland, Baltic Sea. *Journal of Geophysical Research*, vol. 113, C05004, 2008.
- [213] **Zhurbas, V. M., Elken, J., Väli, G., Kuzmina, N.P., Paka, V.T.; 2010.** Pathways of suspended particles transport in the bottom layer of the southern Baltic Sea depending on the wind forcing (Numerical Simulation). *Oceanology*, Volume 50, Issue 6, pp.841–854, 2010.
- [214] **Ziervogel K., and Bohling B., 2003.** Sedimentological parameters and erosion behaviour of submarine coastal sediments in the south–western Baltic Sea. *Geo–Marine Letters*, Vol. 23, No. 1, pp. 43–52, 2003.
- [215] **Zubov V.A., Rozanov E.V., Schlesinger M.E., 1999.** Hybrid Scheme for Three–Dimensional Advective Transport. *Monthly Weather Review*, 127, 1335–1346, 1999.