

Proyecto Fin de Máster
Máster en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Diagramas de bifurcación con interfaz gráfica

Autor: Juan José Correa Martín

Tutor: Emilio Freire Macías, Juan Bosco García Archilla

Dep. Matemática Aplicada
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016



Proyecto Fin de Máster
Máster en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Diagramas de bifurcación con interfaz gráfica

Autor:

Juan José Correa Martín

Tutor:

Emilio Freire Macías

Juan Bosco García Archilla

Dep. de Matemática Aplicada
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2016

Índice

1.	Introducción y objetivos.....	4
2.	Sistemas dinámicos y estáticos	5
2.1.	Definición	5
2.2.	Grados de libertad o variables de estado	5
2.3.	Acciones externas.....	5
2.4.	Parámetros.....	6
2.5.	Ecuaciones de comportamiento	6
2.6.	Soluciones de equilibrio	6
2.7.	Obtención de las ecuaciones de equilibrio	7
2.7.1.	Equilibrio estático.....	7
2.7.2.	Energía potencial.....	7
2.7.3.	Notación empleada	9
2.7.4.	Continuación en parámetros de la solución de equilibrio	9
2.8.	Estabilidad de las soluciones de equilibrio.....	10
2.9.	Evaluación de la estabilidad de la solución de equilibrio.....	11
2.9.1.	Matriz jacobiana.....	11
2.9.2.	Autovalores y autovectores	11
2.9.3.	Evaluación de la estabilidad	12
2.9.4.	Cambios de estabilidad	13
2.9.5.	Puntos críticos	13
2.9.6.	Tipos de puntos críticos.....	14
2.9.6.1.	Pliegue	14
2.9.6.2.	Pitchfork	15
3.	Cálculo de la solución de equilibrio: Método de Newton-Raphson.....	16
3.1.	Método de Newton - Raphson en una variable	16
3.2.	Método de Newton - Raphson en varias variables	17
3.3.	Criterio de parada	18
3.4.	Convergencia.....	19
4.	Continuación en parámetros de la solución de equilibrio	20
4.1.	Continuación en un parámetro de la solución de equilibrio.....	20
4.1.1.	Continuación en el parámetro	23
4.1.1.1.	Incremento del parámetro continuado.....	24
4.1.1.2.	Problema en los pliegues	24
4.1.2.	Continuación en la pseudo - longitud del arco	25

4.1.2.1.	Pseudo-longitud del arco	26
4.1.2.2.	Método de Newton para la pseudo-longitud.....	27
4.1.2.3.	Cálculo de la tangente	28
4.1.2.4.	Valores iniciales	29
4.1.2.5.	Valores iniciales en rama bifurcada	29
4.1.2.6.	Variación de la pseudo-longitud del arco.....	30
4.1.3.	Estabilidad y puntos críticos.....	30
4.1.3.1.	Estabilidad	30
4.1.3.2.	Cambios de estabilidad	30
4.1.3.3.	Cálculo del punto crítico: Método de la bisección-bifurcación.....	31
4.1.3.4.	Evaluación del tipo de punto crítico.....	31
4.2.	Continuación en dos parámetros de la solución de equilibrio en punto crítico	31
4.2.1.	Punto crítico tipo Pliegue	32
4.2.1.1.	Equilibrio	32
4.2.1.2.	Punto crítico	32
4.2.1.3.	Pseudo-longitud del arco	33
4.2.1.4.	Tangente.....	34
4.2.1.5.	Valores iniciales	34
4.2.2.	Punto crítico tipo Pitchfork	34
5.	Implementación	36
5.1.	Planteamiento de dos sistemas	38
5.1.1.	Sistema 1	38
5.1.2.	Sistema 2	40
5.2.	Funcionamiento de la interfaz gráfica.....	42
5.2.1.	Datos del problema	42
5.2.1.1.	Grados de libertad.....	43
5.2.1.2.	Parámetros	44
5.2.1.3.	Ecuaciones de equilibrio.....	45
5.2.1.4.	Energía potencial.....	46
5.2.2.	Aceptar	46
5.2.3.	Cálculos y Gráfica de las soluciones de equilibrio	47
5.2.3.1.	Precisión numérica	49
5.2.3.2.	Ramas	49
5.2.3.3.	Cambio de valor del parámetro constante secundario.....	55
5.2.4.	Dibujo del sistema	58
5.2.4.1.	Parámetros adicionales	59

Diagramas de Bifurcación con Interfaz Gráfica

5.2.4.2.	Puntos.....	59
5.2.4.3.	Barras.....	60
5.2.4.4.	Dibujo	60
5.3.	Programación	61
5.3.1.	Interacción entre las funciones	62
5.3.1.1.	Funciones de manipulación de los datos de entrada.....	62
5.3.1.2.	Funciones de cálculo numérico	64
6.	Conclusiones.....	67
7.	Líneas futuras	67
8.	Bibliografía	68

1. Introducción y objetivos

El presente texto comprende el Trabajo Fin de Máster (TFM) del Máster en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos (MICCP) de la Escuela Superior de Ingeniería (ESI) de la Universidad de Sevilla (US) realizado por Juan José Correa Martín y supervisado por Emilio Freire Macías y Juan Bosco García Archilla.

El título de publicación del mismo es “Diagramas de Bifurcación con Interfaz Gráfica”. Se trata de elaborar los programas de cálculo y la interfaz gráfica correspondiente para la continuación en un parámetro de soluciones de equilibrio, detección de puntos críticos tipo Pliegue y Pitchfork, continuación de ramas bifurcadas y continuación en dos parámetros de soluciones de equilibrio en punto crítico, en sistemas dinámicos con un número reducido de grados de libertad.

En el **apartado 2** de este trabajo se hace referencia al marco teórico sobre el que se trabaja en el resto del texto. Se explica el concepto de sistema dinámico, así como los elementos que lo definen. Posteriormente se explican los conceptos de equilibrio y estabilidad cuando el sistema es estático así como toda la formulación matemática implicada.

En el **apartado 3** se explica el método de Newton-Raphson, que es el método numérico empleado para la resolución de los distintos sistemas de ecuaciones que se plantean.

En el **apartado 4** se explican los métodos de continuación en uno y dos parámetros de la solución de equilibrio, donde se calculan soluciones de equilibrio para distintos valores de los parámetros del problema. Se explica el algoritmo de los métodos de continuación de soluciones de equilibrio en uno y dos parámetros implementados.

En el **apartado 5** se presenta el software desarrollado, explicando en primer lugar su funcionamiento de cara a su interacción con el usuario (mediante la resolución con el software de dos sistemas planteados a modo de ejemplo), y en segundo lugar la estructura del programa, es decir, las distintas funciones que componen tanto la interfaz gráfica como el motor de cálculo numérico, haciendo referencia en este último caso a los apartados anteriores en los que se explica la formulación en cuestión.

Finalmente, en el **apartado 6** se exponen las conclusiones fruto de la elaboración del trabajo y en el **apartado 7** se plantean una serie de líneas futuras.

El **apartado 8** recoge la bibliografía a la que se hace referencia durante el texto.

En el **CD adjunto** se encuentra la presente memoria en formato “.pdf”, así como los programas de Matlab en formato “.m” que forman el software desarrollado.

2. Sistemas dinámicos y estáticos

En este apartado se explica el marco teórico sobre el que se trabaja en el resto del texto.

Se explica el concepto de sistema dinámico, así como los elementos que lo definen.

Posteriormente se explican los conceptos de equilibrio y estabilidad cuando el sistema es estático así como toda la formulación matemática implicada.

2.1. Definición

En este trabajo, un sistema dinámico es un sistema de ecuaciones diferenciales suficientemente regular como para que todo problema de valor inicial tenga solución única en un intervalo de tiempo (que puede variar con el problema de valor inicial).

Típicamente en ingeniería son de interés sistemas dinámicos que representa un problema físico, químico o incluso abstracto (económico, poblacional,...).

La representación matemática del problema se consigue mediante el proceso de “modelización”.

Las variables matemáticas involucradas representarán magnitudes de tipo físico, químico o abstracto, acorde con el tipo de problema y de la magnitud en cuestión.

2.2. Grados de libertad o variables de estado

Se trata de una serie de valores que representan una configuración determinada del sistema.

En un “sistema dinámico”, estos grados de libertad serán variables función del tiempo (t):

$$\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_N(t) \end{bmatrix}$$

El número de grados de libertad N define la “dimensión del sistema”, siempre y cuando los grados de libertad sean independientes, es decir, que ninguno de ellos se pueda expresar en función de los otros.

Ejemplos de grados de libertad en un sistema físico podrían ser la posición (coordenadas) de ciertos puntos.

2.3. Acciones externas

Se trata de una serie de valores que representan una interacción del exterior con el sistema, por lo que influyen directamente sobre los valores de los grados de libertad $\vec{u}(t)$.

Pueden tener también carácter dinámico:

$$\vec{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \dots \\ q_Q(t) \end{bmatrix}$$

Ejemplos de acciones externas en un sistema físico podrían ser fuerzas, momentos, velocidades impuestas,...

2.4. Parámetros

Se trata de una serie de valores que definen características del sistema en cuanto a la interacción entre las acciones externas y los grados de libertad. Por tanto influyen en este caso de manera indirecta sobre los valores de los grados de libertad $\vec{u}(t)$.

Se trata en este caso de valores constantes, es decir que no varían con el tiempo:

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_p \end{bmatrix}$$

Ejemplos de parámetros en un sistema físico podrían ser dimensiones (longitud, área, volumen), masas, resistencias mecánicas,...

2.5. Ecuaciones de comportamiento

Son un conjunto de ecuaciones matemáticas (que pueden ser diferenciales y no lineales) que relacionan los grados de libertad (y sus derivadas) y las acciones externas (y sus derivadas), y en la que intervienen también los parámetros del sistema:

$$\vec{f}(\vec{u}(t), \vec{u}'(t), \vec{u}''(t), \dots; \vec{q}(t), \vec{q}'(t), \vec{q}''(t), \dots; \vec{p}) = \begin{bmatrix} f_1(\dots) \\ f_2(\dots) \\ \dots \\ f_N(\dots) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

El apóstrofe en las funciones indica su derivada respecto al tiempo.

La obtención de estas ecuaciones es el objeto de la modelización, y se realiza mediante la aplicación de leyes de carácter acorde al tipo de problema (físicas,...) y la manipulación de las ecuaciones obtenidas.

Deben tenerse N ecuaciones, es decir, el mismo número que grados de libertad independientes.

La resolución de estas ecuaciones requiere la integración de las mismas (con la consecuente definición de los valores iniciales de las variables integradas) de manera analítica o numérica, hasta llegar a la solución $\vec{u}(t)$.

2.6. Soluciones de equilibrio

Si las acciones que actúan sobre el sistema son constantes:

$$\vec{q}(t) = \vec{q}_0$$

El sistema puede tener soluciones que no dependen del tiempo, pues si se impone que:

$$\vec{u}(t) = \vec{u}_{eq}$$

$$\vec{u}'(t) = \vec{u}''(t) = \dots = 0$$

Las ecuaciones de comportamiento serían ahora “ecuaciones de equilibrio”:

$$\vec{f}_{eq}(\vec{u}_{eq}; \vec{q}_0; \vec{p}) = \vec{0}$$

Que como se observa, no dependen del tiempo.

Esto quiere decir que para un valor determinado (y constante) de las acciones externas, pueden existir soluciones que no dependen del tiempo, que se denominan “soluciones de equilibrio”.

Cabe destacar que como “solución de equilibrio”, se entiende que puede ser más de una, pues esto depende de la naturaleza de la función.

Consecuentemente, el sistema ahora no es dinámico, sino “estático”.

2.7. Obtención de las ecuaciones de equilibrio

La obtención de las ecuaciones de equilibrio puede realizarse de varias maneras, comentándose a continuación dos de las más habituales para un sistema físico.

2.7.1. Equilibrio estático

Puede plantearse el equilibrio estático de las distintas fuerzas que actúan en el problema en función de éstas (que son estáticas) y los valores de los grados de libertad (que serían las soluciones de equilibrio).

Al igual que en el caso de las ecuaciones de comportamiento, para que el sistema tenga solución deben existir N ecuaciones para las N incógnitas que existen.

2.7.2. Energía potencial

En el caso de que el sistema sea conservativo (es decir, que solamente actúan fuerzas conservativas), las soluciones de equilibrio coinciden con los extremos (máximos y mínimos locales o puntos de silla) de la energía potencial del sistema:

$$E(\vec{u})$$

Encontrar los extremos de un campo escalar $F(\vec{x})$ es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones resultante de igualar su vector gradiente al vector nulo:

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} F(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F(\vec{x})}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial F(\vec{x})}{\partial x_N} \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Por tanto, las ecuaciones de equilibrio se obtienen como su gradiente respecto a los grados de libertad:

$$\vec{f}(\vec{u}) = \vec{\nabla}_{\vec{u}} E(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E(\vec{u})}{\partial u_1} \\ \frac{\partial E(\vec{u})}{\partial u_2} \\ \dots \\ \frac{\partial E(\vec{u})}{\partial u_N} \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Sin embargo, si los grados de libertad (empleados en la definición de la energía potencial) no son independientes, existen tantas ecuaciones de ligadura como grados de libertad redundantes (M):

$$\begin{aligned} f_{lig,1}(\vec{u}) &= 0 \\ f_{lig,2}(\vec{u}) &= 0 \\ &\dots \\ f_{lig,M}(\vec{u}) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces se trataría ahora de encontrar los extremos del campo escalar $E(\vec{u}; \vec{p})$ sujeto a estas restricciones, lo que es equivalente a resolver el problema de “Multiplicadores de Lagrange” en la que ahora el vector de ecuaciones que se iguala al cero vectorial es el gradiente del Lagrangiano, que se define como:

$$L(\vec{u}, \vec{m}) = E(\vec{u}) - \sum_i m_i \cdot f_{lig,i}(\vec{u})$$

Donde $\vec{m} = [m_1, m_2, \dots, m_M]$ son los multiplicadores de Lagrange.

El vector de ecuaciones de equilibrio quedaría ahora como:

$$\vec{f}(\vec{u}, \vec{m}) = \vec{\nabla}_{\vec{u}, \vec{m}} L(\vec{u}, \vec{m}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\vec{u}, \vec{m})}{\partial u_1} \\ \frac{\partial L(\vec{u}, \vec{m})}{\partial u_2} \\ \dots \\ \frac{\partial L(\vec{u}, \vec{m})}{\partial u_N} \\ \frac{\partial L(\vec{u}, \vec{m})}{\partial m_1} \\ \frac{\partial L(\vec{u}, \vec{m})}{\partial m_2} \\ \dots \\ \frac{\partial L(\vec{u}, \vec{m})}{\partial m_M} \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Ahora existen “N+M” ecuaciones y “N+M” incógnitas, con lo que el problema no está sobredeterminado.

Se observa que ahora existen nuevos grados de libertad: aparte de \vec{u} , se han introducido los multiplicadores de Lagrange \vec{m} . Los grados de libertad \vec{m} tienen la función de forzar a que se cumplan las ecuaciones de ligadura entre los grados de libertad no independientes \vec{u} .

2.7.3. Notación empleada

Como se ha explicado, la solución de equilibrio de un sistema dinámico con grados de libertad $\vec{u} \in R^N$, es la solución de un sistema de ecuaciones $N \times N$:

$$\vec{f}_{eq}(\vec{u}_{eq}) = \vec{0} / \vec{f}_{eq}(\vec{u}): R^N \rightarrow R^N$$

Por sencillez en la notación, se elimina el subíndice "eq", de la función \vec{f}_{eq} . No se elimina este subíndice en \vec{u}_{eq} , para distinguir entre \vec{u} como variable de la que depende la función \vec{f}_{eq} y \vec{u}_{eq} como solución al sistema resultante de igualar dicha función al cero vectorial.

$$\vec{f}(\vec{u}) \quad ; \quad \vec{f}(\vec{u}_{eq}) = \vec{0}$$

Como se sabe, en la función \vec{f} también se incluyen una serie de acciones externas \vec{q} y parámetros \vec{p} que definen el sistema para el que se calculan las soluciones de equilibrio:

$$\vec{f}(\vec{u}_{eq}; \vec{q}; \vec{p}) = \vec{0}$$

Debido al carácter constante (dentro de un mismo sistema, para el que se calculan las soluciones de equilibrio) de las acciones externas y de los parámetros, se agrupan ambas en el mismo vector de parámetros, por lo que a partir de aquí se entienden como parámetros ambos conceptos.

$$\vec{f}(\vec{u}_{eq}; \vec{p}) = \begin{bmatrix} f_1(\vec{u}_{eq}; \vec{p}) \\ f_2(\vec{u}_{eq}; \vec{p}) \\ \dots \\ f_N(\vec{u}_{eq}; \vec{p}) \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Sin embargo, si se tienen distintos valores de los parámetros \vec{p} , estos representan distintos problemas, y cada uno tendrá una solución de equilibrio distinta:

$$\vec{f}(\vec{u}_{eq1}; \vec{p}_1) = \vec{0}$$

$$\vec{f}(\vec{u}_{eq2}; \vec{p}_2) = \vec{0}$$

...

Estos distintos valores de los parámetros representarían distintos problemas de equilibrio, que pueden tratarse de un mismo sistema (mismas características) sometido a distintas acciones externas, o de un sistema distinto (distintas características) sometido a las mismas acciones externas.

2.7.4. Continuación en parámetros de la solución de equilibrio

El objetivo principal de este trabajo es la implementación de métodos numéricos que resuelven "métodos de continuación en parámetros de la solución de equilibrio", que consiste en calcular las distintas soluciones de equilibrio cuando varían algunos parámetros del sistema.

Si se deja variar un solo parámetro, se pueden obtener "curvas" (o "ramas") en dimensión $N+1$ de soluciones de equilibrio. Si se dejan variar dos se pueden obtener "superficies" en dimensión

$N+2$ de soluciones de equilibrio. Si se dejan variar dos pero se impone una condición adicional (como que la solución de equilibrio se trate de un punto crítico, lo cual se explicará a continuación) se tratarían de “ramas” en dimensión $N+2$ de soluciones de equilibrio en punto crítico.

En la **Figura 2.1** se muestra un ejemplo de curva de continuación de la solución de equilibrio \vec{u} respecto a un parámetro λ .

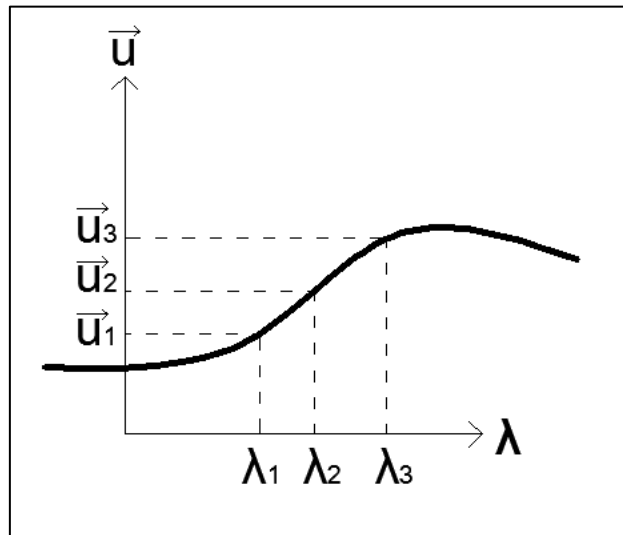


Figura 2.1. Curva de continuación de la solución de equilibrio \vec{u} respecto a un parámetro λ

Todo esto se explica con detalle en el **apartado 4**, habiéndose mencionado aquí para entender lo que se explica a continuación.

2.8. Estabilidad de las soluciones de equilibrio

En cuanto a las soluciones de equilibrio, cabe destacar que se supone que se parte de unas condiciones iniciales de valores de los grados de libertad iguales a la solución de equilibrio y que las acciones externas se mantienen indefinidamente en estos valores que las generan.

Sin embargo, si hay una variación (por pequeña que sea) de las acciones externas, éstas serían ahora dependientes del tiempo y el problema pasaría a ser dinámico, cuya evolución no puede conocerse sin la integración de las ecuaciones de comportamiento.

No obstante, las soluciones de equilibrio se pueden clasificar en dos categorías en cuanto a su “estabilidad”.

- Estable: Una pequeña perturbación de la solución de equilibrio (o de las acciones que las generan) hace que la solución dinámica se mantenga en un entorno de la misma.
- Inestable: Una pequeña perturbación en la solución de equilibrio (o de las acciones que las generan) hace que la solución dinámica no se mantenga en un entorno de la misma.

Si se define un “entorno” (en el espacio de dimensión N de los grados de libertad) alrededor de la solución de equilibrio, que se encuentra definido matemáticamente en (bibliografía) D. W. Jordan & P. Smith (1999), el sistema sería:

- Estable: Si para cualquier entorno alrededor de la solución de equilibrio existe otro entorno que si se toman sus elementos como condiciones iniciales, las correspondientes soluciones permanecen siempre dentro del primer entorno.
- Inestable: Si existe un entorno alrededor de la solución de equilibrio en el que no permanecen las soluciones por muy cercanas al equilibrio que se tomen las condiciones iniciales.

Desde el punto de vista del trabajo con sistemas en “equilibrio estático”, interesan las soluciones de equilibrio estables, debido a que las inestables son prácticamente imposibles de reproducir en la realidad, ya que también lo es conseguir la absoluta estaticidad de las acciones externas.

Sin embargo, desde el punto de vista de análisis de los sistemas, es interesante conocer todas las soluciones de equilibrio, así como su estabilidad, en aras de tener un conocimiento general en cuanto al comportamiento del mismo.

2.9. Evaluación de la estabilidad de la solución de equilibrio

La estabilidad de una solución de equilibrio puede estudiarse de manera matemática mediante el signo de los autovalores de la matriz jacobiana del vector de ecuaciones de equilibrio, evaluada en el punto de equilibrio.

2.9.1. Matriz jacobiana

Se define la matriz jacobiana del vector de ecuaciones de equilibrio como:

$$\vec{J}(\vec{u}; \vec{p}) = D_{\vec{u}}(\vec{f}(\vec{u}; \vec{p})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{f}(\vec{u}; \vec{p})}{\partial u_1} & \frac{\partial \vec{f}(\vec{u}; \vec{p})}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \vec{f}(\vec{u}; \vec{p})}{\partial u_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_N}{\partial u_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial u_N} \end{bmatrix}$$

Como se observa, la matriz jacobiana sólo incluye derivadas de los grados de libertad, y no de los parámetros.

La evaluación de esta matriz en el punto de equilibrio sería:

$$\vec{J}_{eq} = \vec{J}(\vec{u}_{eq}; \vec{p}) / \vec{f}(\vec{u}_{eq}; \vec{p}) = \vec{0}$$

Obsérvese la comentada diferencia entre \vec{u} y \vec{u}_{eq} (\vec{u} como variable de la que depende la función \vec{f}_{eq} y \vec{u}_{eq} como solución al sistema resultante de igualar dicha función al cero vectorial).

2.9.2. Autovalores y autovectores

Los autovalores de la matriz \vec{J}_{eq} (y de cualquier otra matriz cuadrada NxN) se definen como la solución al problema:

$$\vec{J}_{eq} \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{v}$$

Con:

$$\vec{v} \neq \vec{0}$$

Que, siendo \vec{I} la matriz identidad, es equivalente a:

$$(\vec{J}_{eq} - \alpha \cdot \vec{I}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

Lo cual implica, siendo “det” el determinante de una matriz, la solución de la ecuación:

$$\det(\vec{J}_{eq} - \alpha \cdot \vec{I}) = 0$$

Que se trata de un polinomio de grado “N”, por tanto con “N” soluciones: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ no necesariamente distintas, de las cuales serán distintas un número $k \leq N$

Cada solución $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tiene un vector $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ asociado que es el autovector asociado al autovalor.

Cada autovalor representa un grado de libertad del sistema, que no tiene que coincidir con alguno de los escogidos exactamente, sino que pueden expresarse como combinación de varios de ellos. Esta combinación la da el autovector asociado, que es un vector en el espacio de dimensión N de los grados de libertad.

2.9.3. Evaluación de la estabilidad

En un sistema de la forma:

$$\ddot{\vec{u}} = \vec{f}(\vec{u})$$

Se puede estudiar la estabilidad de la manera en que a continuación se explica, pudiendo consultarse (bibliografía) *Yuri A. Kuznetsov (1995)* para una demostración matemática.

Siendo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ los autovalores de la matriz \vec{J}_{eq} , la solución de equilibrio \vec{u}_{eq} es, en cuanto a estabilidad:

- Estable: Si todos los autovalores son negativos, pues todos los grados de libertad se encuentran en equilibrio estable.
- Inestable: Si existe uno (o más de uno) autovalor positivo, pues existe un (o más de un) grado de libertad en equilibrio inestable.

Si uno o más de los autovalores son nulos se trata de un “punto crítico”, del que se hablará a continuación.

Cabe destacar que si el vector de ecuaciones de equilibrio se ha obtenido mediante el gradiente de la energía potencial $E(\vec{u})$, entonces un equilibrio es estable si el Hessiano del potencial tiene sus autovalores positivos. Si se cambia de signo del gradiente de la energía potencial, se puede emplear el mismo criterio de evaluación que en el caso de las ecuaciones $\vec{f}(\vec{u})$.

Por tanto puede evaluarse la estabilidad de cada solución de equilibrio como el número de autovalores negativos $nNeg(\vec{u}_{eq})$, que podrá ser:

- $nNeg(\vec{u}_{eq}) = 0$: Equilibrio estable
- $nNeg(\vec{u}_{eq}) > 0$: Equilibrio inestable.

2.9.4. Cambios de estabilidad

Como se ha comentado, sobre un mismo tipo de sistema pueden plantearse distintos problemas si se varían las acciones externas o los parámetros del mismo, pudiendo dar lugar a distintas soluciones de equilibrio:

$$\vec{f}(\vec{u}_{eq1}; \vec{p}_1) = \vec{0}$$

$$\vec{f}(\vec{u}_{eq2}; \vec{p}_2) = \vec{0}$$

...

Estas soluciones de equilibrio, además de ser distintas, pueden tener también distintas características en cuanto a su estabilidad, pues son soluciones de distintos problemas de autovalores de la matriz jacobiana:

$$\vec{J}_{eq1} = \vec{J}(\vec{u}_{eq1}; \vec{p}_1)$$

$$\vec{J}_{eq2} = \vec{J}(\vec{u}_{eq2}; \vec{p}_2)$$

...

Por tanto, podrán tener también un número distinto de autovalores negativos:

$$nNeg(\vec{u}_{eq,1})$$

$$nNeg(\vec{u}_{eq,2})$$

...

Si se dispone de una “rama” de soluciones de equilibrio (concepto introducido en el **apartado 2.7.4** y en el que se profundiza en el **apartado 4**), pueden existir puntos consecutivos que tengan un número $nNeg$ distinto, y entre los que se ha producido un “cambio de estabilidad”.

Estos puntos definirán “tramos” dentro de una misma “rama” con características de estabilidad distinta.

Entre dos puntos con $nNeg$ distinto, debe existir un punto en el que el autovalor que cambia de signo es nulo. Se trata de un “punto crítico”.

2.9.5. Puntos críticos

Un “punto crítico” es por tanto una determinada solución equilibrio en la que uno (o más de uno) de sus autovalores es nulo. Si se está empleando una técnica de continuación, se trata de un valor crítico del parámetro continuado que produce un cambio de estabilidad.

Como se ha comentado, la condición de punto crítico exige que el problema de autovalores y autovectores:

$$\vec{J}_{eq} \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{v}$$

Tenga una solución nula, es decir, que para algún autovalor α_i , se cumpla:

$$\alpha_i = 0$$

$$\vec{J}_{eq} \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$$

Por tanto, esta condición, añadida al sistema de ecuaciones:

$$\vec{f}(\vec{u}) = \vec{0}$$

Forma un sistema de $2N$ ecuaciones con $2N$ incógnitas:

$$\vec{f}(\vec{u}) = \vec{0}$$

$$\vec{J}(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

Que sería la ecuación de una solución de equilibrio en punto crítico.

2.9.6. Tipos de puntos críticos

Existen múltiples tipos de puntos críticos. En este trabajo se tratan dos de ellos, que son los que más comúnmente se dan en la práctica: los tipo “Pliegue” y los tipo “Pitchfork”.

A efectos prácticos, se consideran en el presente trabajo únicamente las implicaciones que tiene cada tipo de punto crítico tratado en cuanto a los conceptos explicados (continuación en uno y dos parámetros y signo de los autovalores). Se puede encontrar demostración matemática acerca de lo que a continuación se expone en (bibliografía) *K. A. Cliffe, A. Spence and S. J. Tavener (2000)*.

2.9.6.1. Pliegue

En un punto crítico tipo pliegue se produce un cambio en la estabilidad, es decir, en el número de autovalores negativos.

Además se produce un retroceso en el parámetro continuado, es decir, que la rama de continuación del parámetro sufre un retroceso en esta variable.

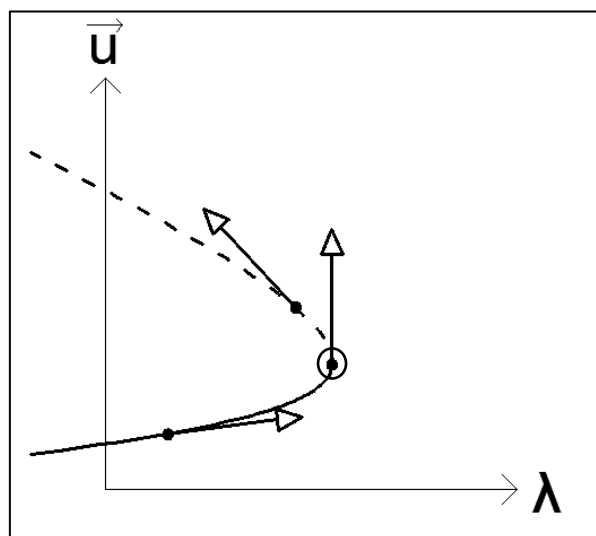


Figura 2.2. Punto crítico tipo Pliegue en una rama de continuación en un parámetro

En la **Figura 2.2** se muestra un pliegue de una rama de continuación de la solución de equilibrio en el parámetro, en el que el cambio de estabilidad se representa mediante el tipo de línea.

Esto implica, como se verá más adelante, que se produce un cambio de signo en la última componente del vector tangente a la curva (representado también en la Figura), que es de dimensión N (grados de libertad) + 1 (parámetro continuado), que es el relativo al parámetro continuado.

2.9.6.2. *Pitchfork*

En un punto crítico tipo Pitchfork (con rotura de simetría) se produce el cruce de dos ramas de continuación del parámetro.

Una de ellas presenta un cambio de estabilidad, y por tanto en el número de autovalores negativos.

La otra, pese a tener en el punto crítico un autovalor nulo, no cambia el signo de este (pues se trata de un máximo o mínimo local), por lo que no se produce un cambio de estabilidad. En esta rama se produce también un retroceso en el parámetro continuado.

En la **Figura 2.3** se muestra un punto crítico tipo Pitchfork de una rama de continuación de la solución de equilibrio en el parámetro, en el que el cambio de estabilidad se representa mediante el tipo de línea.

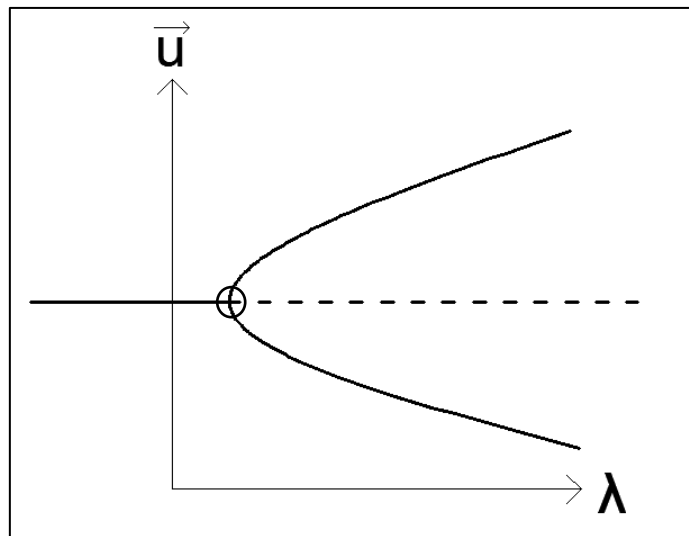


Figura 2.3. Punto crítico tipo Pitchfork en una rama de continuación en un parámetro

3. Cálculo de la solución de equilibrio: Método de Newton-Raphson

Para el cálculo de la configuración de equilibrio es necesaria la resolución de un sistema de N ecuaciones con N incógnitas. Es decir, para un valor determinado de los parámetros \vec{p}^* , la resolución en \vec{u} del sistema.

$$\vec{f}(\vec{u}; \vec{p}^*) = 0$$

Para su resolución numérica se emplea el "Método de Newton - Raphson", cuya formulación matemática se explica a continuación, en primer lugar el caso de $N = 1$ variable, y posteriormente su generalización a N variables.

En las explicaciones se obvia la referencia al vector de parámetros \vec{p}^* , que es constante en todo el proceso, y se sustituye el nombre de las variables \vec{u} por x , para una mayor familiaridad con la notación.

3.1. Método de Newton - Raphson en una variable

En el caso de $N = 1$, el sistema anterior queda como:

$$f(x) = 0$$

Que es la resolución de una ecuación con una incógnita.

Como se verá, para la aplicación del método es necesaria la disponibilidad de la derivada de f (de forma simbólica o numérica):

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Se trata de un proceso iterativo que, esquematizado en la *Figura X*, sigue los siguientes pasos:

- Necesita partir de un valor inicial de la incógnita (x_0) suficientemente cercano al buscado (según se comentará a continuación).
- Linealiza la función por la recta tangente en ese valor supuesto.

$$f(x) \cong f_{x_0}(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

- La abscisa en el origen de dicha recta será, según el método, una mejor aproximación de la raíz que el valor anterior.

$$f_{x_0}(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- Realiza sucesivas iteraciones hasta que el método haya convergido lo suficiente.

Es decir, se empieza con un valor inicial x_0 y se define para cada número natural n :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Una representación gráfica del método se muestra en la **Figura 3.1**.

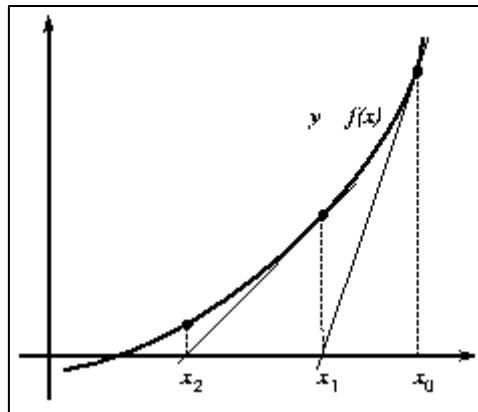


Figura 3.1. Método de Newton para una variable

El método de Newton-Raphson es un método abierto, en el sentido de que no está garantizada su convergencia global. La única manera de alcanzar la convergencia es seleccionar un valor inicial lo suficientemente cercano a la raíz buscada. En la **Figura 3.2** se muestran casos en los que el método puede no converger o incluso divergir.

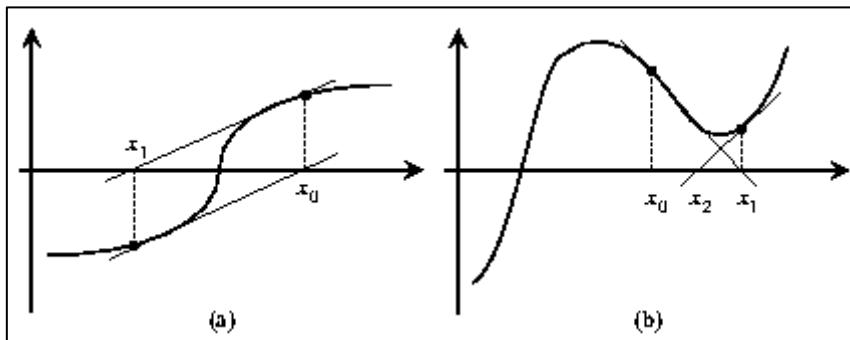


Figura 3.2. No convergencia del Método de Newton para una variable

3.2. Método de Newton - Raphson en varias variables

En el caso general de N variables, se trata de resolver el sistema:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$$

Donde:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{bmatrix} ; \quad \vec{f}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \dots \\ f_N(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

Que se trata de un sistema de N ecuaciones con N incógnitas.

El proceso es análogo al anterior, pero teniendo en cuenta que el problema ahora es multivariable.

En este caso se empieza con un valor (valores de cada una de las N variables) inicial \vec{x}_0 y se define para cada número natural n :

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \left(\vec{J}(\vec{x}_n)\right)^{-1} \cdot \vec{f}(\vec{x}_n)$$

En este caso el término $\vec{\Delta x} = \left(\vec{J}(\vec{x}_n)\right)^{-1} \cdot \vec{f}(\vec{x}_n)$ es equivalente a la solución algebraica del sistema de ecuaciones lineal:

$$\vec{J}(\vec{x}_n) \cdot \vec{\Delta x} = -\vec{f}(\vec{x}_n)$$

En este caso multivariable del método de Newton-Raphson se han de tener en cuenta las mismas consideraciones acerca de la elección del punto inicial. La adopción del valor de este punto inicial se justificará en el siguiente apartado, cuando se expliquen el resto de conceptos necesarios.

3.3. Criterio de parada

De cara a la implementación del método de Newton – Raphson, es necesario definir un criterio que establezca si una solución es o no aceptable en cuanto a su precisión numérica.

Típicamente dicho criterio es que el incremento entre dos iterantes consecutivos sea suficientemente pequeño, o menor que un valor prefijado de antemano, que suele tomarse como:

$$tol_{abs} + tol_{rel} \cdot |\vec{x}|$$

Donde se emplean las definiciones de tolerancia. Existen dos tipos de tolerancias de una magnitud estimada (x) respecto a su valor real (x^*):

- Tolerancia absoluta:

$$tol_{Abs} = x - x^*$$

- Tolerancia relativa:

$$tol_{Rel} = \frac{x - x^*}{x^*}$$

En el caso multivariable, los valores que se comparan son los valores de las normas de los vectores: $|\vec{x}|$

El criterio empleado maneja estas dos tolerancias, de manera que el error cometido debe ser inferior a:

$$e \leq tol_{abs} + tol_{rel} \cdot |\vec{x}|$$

Para conocer el error en cada iteración, se observa en la ecuación:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \left(\vec{J}(\vec{x}_n)\right)^{-1} \cdot \vec{f}(\vec{x}_n)$$

Que el término:

$$\vec{\Delta x} = \left(\vec{J}(\vec{x}_n)\right)^{-1} \cdot \vec{f}(\vec{x}_n) = -(\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n)$$

Se trata del incremento (vector diferencia) entre la solución actual y la anterior, y por tanto debe tener el orden de magnitud del error que se está cometiendo.

Por tanto, el criterio de tolerancias en la iteración n puede formularse como:

$$\vec{e} = \overline{\Delta x} = \left(\vec{J}(\vec{x}_n)\right)^{-1} \cdot \vec{f}(\vec{x}_n)$$

$$e = |\vec{e}|$$

$$e \leq tol_{abs} + tol_{rel} \cdot |\vec{x}_n|$$

Si se cumple, se deja de calcular, y si no, se realiza la siguiente iteración:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \overline{\Delta x} = \left(\vec{J}(\vec{x}_n)\right)^{-1} \cdot \vec{f}(\vec{x}_n)$$

...

3.4. Convergencia

Por otro lado, debe evitarse de alguna manera que se produzcan excesivas (incluso infinitas) iteraciones en un proceso que puede no ser convergente, por lo que es necesario realizar un conteo de las iteraciones realizadas, y si se supera un número establecido (por ejemplo 10) detener el método, entendiéndose que la solución no se ha calculado correctamente, o al menos no cumple con los criterios establecidos.

4. Continuación en parámetros de la solución de equilibrio

Resulta interesante estudiar cómo varían las soluciones de equilibrio (en cuanto a su valor y a su estabilidad) de un mismo sistema al variar algunos de sus parámetros, de manera que se conozca el comportamiento en cuanto a equilibrio y estabilidad de un mismo tipo de sistema para distintas acciones externas (ver cómo se puede actuar sobre el sistema) y/o características del mismo (ver cómo se puede diseñar el sistema), de forma que se comporte de una manera deseada.

La continuación de la solución de equilibrio de un sistema consiste en calcular distintas soluciones de equilibrio de un mismo tipo de sistema cuando alguno(s) de sus parámetros varía(n).

Existen múltiples tipos y se hace a continuación referencia a las más utilizadas de manera general, profundizando posteriormente en las que se utilizan en este trabajo.

- Continuación en un parámetro de la solución de equilibrio:
 - Se deja variar un único parámetro, que se denomina “parámetro continuado”.
 - Se calculan las distintas soluciones de equilibrio para distintos valores del parámetro continuado.
 - Existe una solución de equilibrio (de dimensión N) para cada valor del parámetro continuado (dimensión 1), por lo que la solución se trata de “ramas de equilibrio”, que son curvas en un espacio de dimensión “ $N+1$ ”.
- Continuación en dos parámetros de la solución de equilibrio:
 - En este caso existen dos “parámetros continuados”.
 - Existe una solución de equilibrio (de dimensión N) para cada par de valores de los parámetros continuados (dimensión 1 cada uno), por lo que se tratan de “superficies de equilibrio”, que son superficies en un espacio de dimensión “ $N+2$ ”.
- Continuación en dos parámetros de la solución de equilibrio en punto crítico:
 - En este caso se dejan variar dos parámetros, pero además de la condición de equilibrio, se impone que se trate de un punto crítico.
 - De esta manera se tratan de “ramas de equilibrio en punto crítico” en un espacio de dimensión “ $N+2$ ”.

El presente trabajo implementa el primer y el tercer tipo de continuación expuesto, desarrollándose su formulación a continuación. El segundo método, aparte de resultar demasiado complejo de implementar, también proporciona una información que puede ser complicada de visualizar. Además, como se explicará, con el uso conjunto de los dos métodos explicados puede obtenerse una información más sencilla de visualizar y con una información más selectiva de las soluciones de equilibrio del sistema cuando se dejan variar dos parámetros.

4.1. Continuación en un parámetro de la solución de equilibrio

Como se ha comentado, en este método de continuación se deja variar un único parámetro, que se denomina “parámetro continuado”. Es decir, de todos los parámetros (que son constantes dentro de un mismo problema, del que se calcula la solución de equilibrio), se va variando uno y se van calculando las distintas soluciones de equilibrio, de manera que se tienen tantas soluciones de equilibrio como valores del parámetro continuado.

De aquí en adelante el parámetro continuado se denominará λ , y se representará a parte del vector de parámetros \vec{p} , que incluirá el resto de parámetros constantes.

$$\vec{f}(\vec{u}_{eq1}; \vec{p}_1) = \vec{f}(\vec{u}_{eq1}; \lambda_1; \vec{p}) = \vec{0}$$

$$\vec{f}(\vec{u}_{eq2}; \vec{p}_2) = \vec{f}(\vec{u}_{eq2}; \lambda_2; \vec{p}) = \vec{0}$$

...

Además, este último se omitirá debido a que estos parámetros no variaran a lo largo del proceso:

$$\vec{f}(\vec{u}_{eq1}; \lambda_1) = \vec{0}$$

$$\vec{f}(\vec{u}_{eq2}; \lambda_2) = \vec{0}$$

...

En la **Figura 4.1** se observa, para el caso de $N = 1$ grado de libertad, una curva de continuación de la solución de equilibrio, en la que se representan en abscisas los distintos valores del parámetro continuado (λ) y en ordenadas los distintos valores de la solución de equilibrio, que en este caso corresponde a una variable (u).

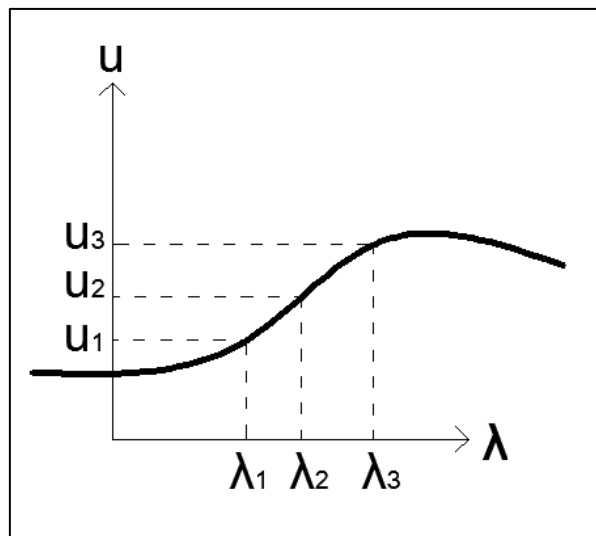


Figura 4.1. Curva de continuación de la solución de equilibrio u respecto a un parámetro λ

En casos de que exista más de un grado de libertad existirá un único eje de abscisas (pues solamente se continúa un parámetro), pero varios ejes de ordenadas: uno por cada variable del problema. En la **Figura 4.2** se observa una curva de continuación de la solución de equilibrio para el caso de $N = 2$ variables: $\vec{u} = [u, v]$

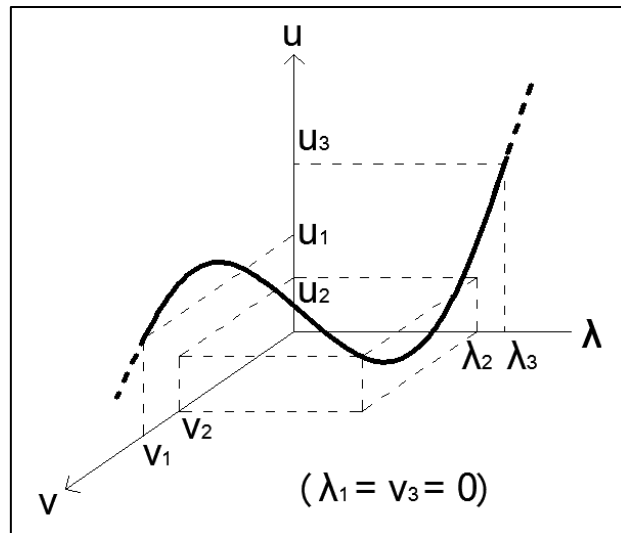


Figura 4.2. Curva de continuación de la solución de equilibrio $\vec{u} = [u, v]$ respecto a un parámetro λ

Por sencillez y para no perder la generalidad del planteamiento, a partir de aquí se representarán estas curvas con un único eje de ordenadas, entendiéndose que éste representa los N grados de libertad que pueda tener el problema. En la **Figura 4.3** se observa un ejemplo de esto.

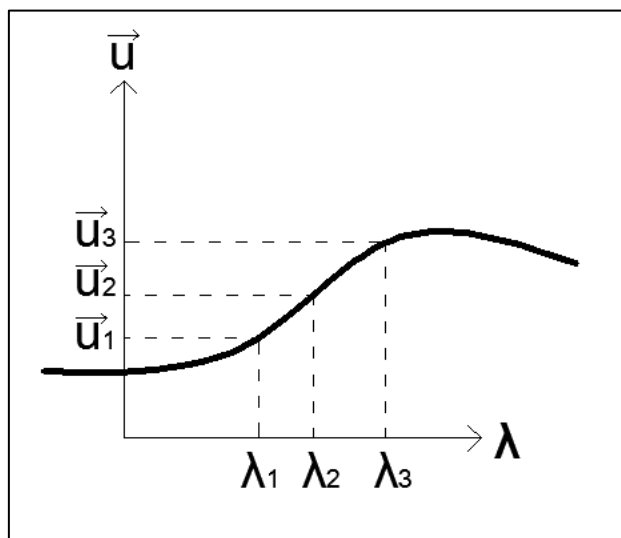


Figura 4.3. Curva de continuación de la solución de equilibrio \vec{u} respecto a un parámetro λ

La variación del parámetro continuado puede hacerse de distintas maneras. Se explican a continuación dos: Una primera, que es más intuitiva pero presenta una limitación, y una segunda, que remedia esta limitación y es la que se implementa en el presente trabajo.

4.1.1. Continuación en el parámetro

La manera más intuitiva de variar el parámetro continuado λ es ir incrementando (con un valor razonablemente pequeño $\Delta\lambda$) el mismo a partir de un valor inicial λ_0 , y para cada valor del mismo λ_i calcular la solución de equilibrio correspondiente \vec{u}_{eqi} , es decir:

- Se parte de λ_0
- Se resuelve $\vec{f}(\vec{u}_{eq0}; \lambda_0) = \vec{0}$; se obtiene \vec{u}_{eq0}
- Se incrementa: $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda$
- Se resuelve $\vec{f}(\vec{u}_{eq1}; \lambda_1) = \vec{0}$; se obtiene \vec{u}_{eq1}
- Se incrementa: $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$
- ...

La resolución del sistema de ecuaciones $\vec{f}(\vec{u}_{eq*}; \lambda_*) = \vec{0}$ en cada iteración se lleva a cabo mediante el “Método de Newton – Raphson” para varias variables, que se ha explicado en el **apartado 3**.

Como se explica en el mismo, este método necesita partir de una solución cercana a la de equilibrio buscada $\vec{u}_{eq*inicial}$.

La solución que se utiliza como solución de partida en una determinada iteración es la solución de equilibrio correspondiente a la iteración anterior: al ser cercano el valor del parámetro continuado en una iteración al de la anterior, se entiende que la solución de equilibrio también lo será, por lo que el método de Newton – Raphson no debería tener problemas.

Para el valor inicial del parámetro continuado (λ_0) no existe una iteración anterior de la que se conozca la solución de equilibrio (y por lo tanto de la que partir para calcular la actual), por lo que se debe conocer de antemano la solución en este punto. Para ello, debe tratarse de una solución trivial que pueda calcularse analíticamente y que sirva como punto de partida al resto.

Es decir, el procedimiento sería el siguiente:

- Se parte de un valor inicial del parámetro que se desea continuar (λ_0), del cual se conoce la solución de equilibrio (\vec{u}_{eq0}).
- Se incrementa el valor del parámetro continuado una cantidad $\Delta\lambda$:

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda$$

- Se calcula con el Método de Newton-Raphson (tomando como punto inicial \vec{u}_0) el sistema:

$$\vec{f}(\vec{u}_{eq1}; \lambda_1) = \vec{0}$$

- Se obtiene un valor (\vec{u}_1), que se emplea como punto inicial en la siguiente iteración:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda \quad ; \quad \vec{f}(\vec{u}_{eq2}; \lambda_2) = \vec{0} \text{ Con solución inicial } \vec{u}_{eq1}$$

...

4.1.1.1. *Incremento del parámetro continuado*

Puede ocurrir que, dependiendo de la naturaleza de la función en el entorno del punto en cuestión, el valor del incremento $\Delta\lambda$ empleado sea demasiado grande (la función varía muy rápido y se requieren incrementos menores) o demasiado pequeño (la función varía muy lento y se pueden emplear incrementos mayores). En la **Figura 4.4** se muestra un ejemplo de esto.

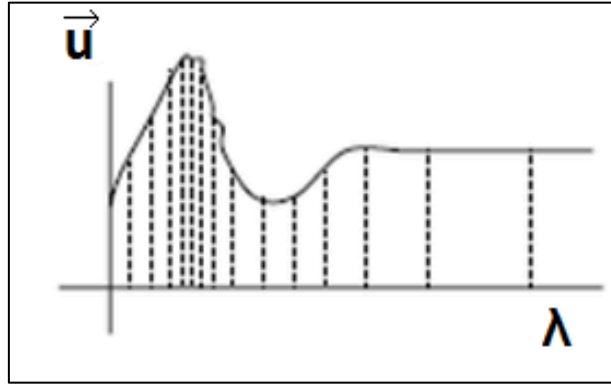


Figura 4.4. *Variación del incremento del parámetro continuado $\Delta\lambda$*

Esto se puede cuantificar mediante el número de iteraciones empleado en el método de Newton-Raphson para el cálculo de la solución de equilibrio en el punto anterior. Se compara éste con un número de iteraciones “apropiado” (por ejemplo 3), y:

- Si ha sido mayor, se entiende que se requiere un incremento menor, por lo que se toma:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\lambda}{2}$$

- Si ha sido menor, se entiende que se puede usar un incremento mayor, por lo que se toma:

$$\Delta\lambda = 2 \cdot \Delta\lambda$$

Siempre dentro de unos valores $\Delta\lambda_{\min} < \Delta\lambda < \Delta\lambda_{\max}$ que se deben fijar.

Aunque este método no se implementa debido al problema que a continuación se describe, se ha explicado porque se trata de una versión más intuitiva que el que sí se implementa, que tiene la misma filosofía aunque un punto de vista algo más complicado.

4.1.1.2. *Problema en los pliegues*

El método de continuación en el parámetro presenta una complicación cuando se llega a un punto crítico tipo pliegue, en el que como se explicó, se produce un retroceso de la rama de equilibrio en el parámetro continuado.

Como se observa en la **Figura 4.5**, a medida que la solución calculada se acerca al pliegue, el incremento del parámetro continuado debe ser cada vez menor, tratándose de un límite en el que, por más que se reduzca el incremento del parámetro continuado, no se va a avanzar más en el pliegue.

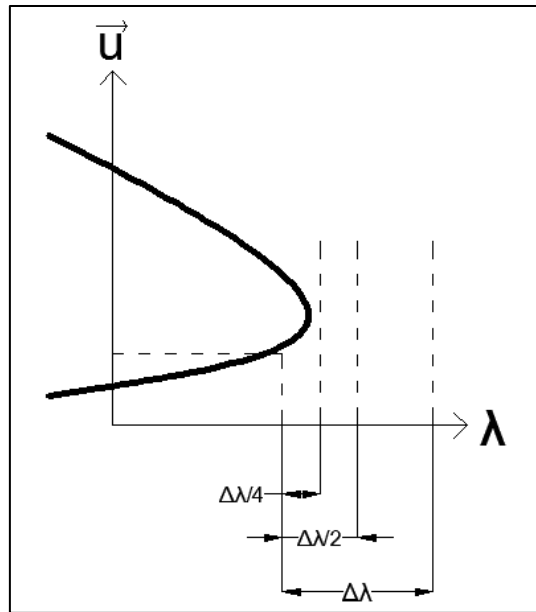


Figura 4.5. Problema en los Pliegues del método de continuación en el parámetro

Debería implementarse un método que detectara cuando se llega a un punto de este tipo y utilizase ahora incrementos negativos.

Sin embargo, esto no es necesario si se implementa otro método de continuación más genérico, esta vez no en el parámetro, sino en la “pseudo-longitud del arco”, que se explica a continuación.

4.1.2. Continuación en la pseudo - longitud del arco

Se trata de otra manera de calcular soluciones de equilibrio variando el parámetro continuado y que no presenta problemas al llegar a puntos en los que se produce un pliegue en alguna de las variables.

En este caso, al contrario que en el anterior, no se distingue una abscisa (parámetro continuado) que varíe, y unas ordenadas (variables) cuyo valor hay que calcular para el valor de la abscisa mediante la ecuación de equilibrio.

Se toma el parámetro continuado (λ) como una variable más que se añade a las variables del problema (\vec{u}). Se agrupan en un nuevo vector, de dimensión $N+1$:

$$\vec{u}_b \in R^{N+1} = \begin{bmatrix} \vec{u} \in R^N \\ \lambda \in R \end{bmatrix}$$

Se puede ver un ejemplo gráfico en la **Figura 4.6**.

Se tiene que resolver la ecuación de equilibrio:

$$\vec{f}(\vec{u}; \lambda) = \vec{f}(\vec{u}_b) = \vec{0}$$

Ahora existen N ecuaciones y $N + 1$ incógnitas, por lo que se necesita una ecuación más para que el sistema tenga solución única.

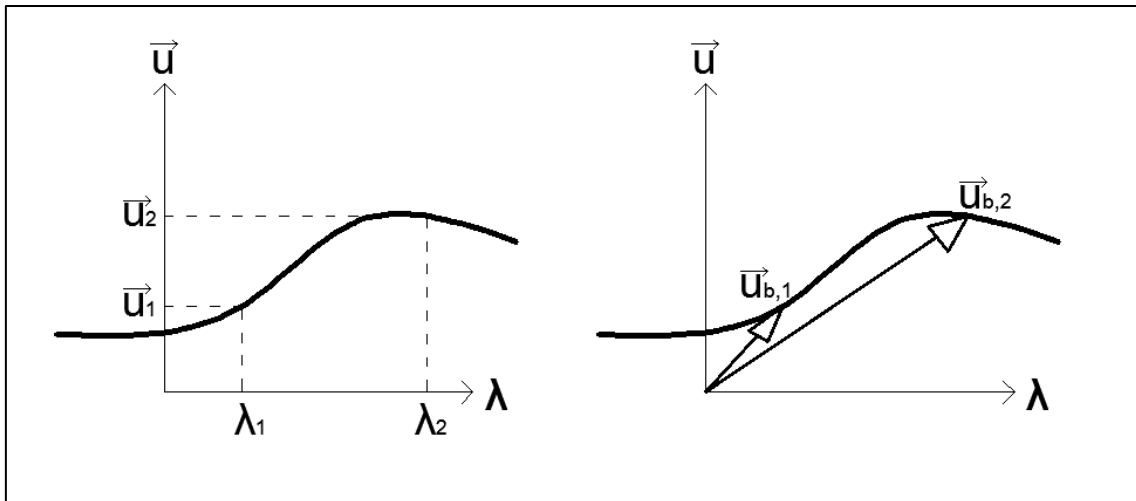


Figura 4.6. Vector de variables en el método de continuación en la pseudo-longitud de arco

4.1.2.1. Pseudo-longitud del arco

Se toma como condición adicional que la pseudo – longitud del arco de la curva solución (que es de dimensión $N+1$) entre el punto en una iteración (\vec{u}_{b_n}) y el punto en la siguiente ($\vec{u}_{b_{n+1}}$) sea igual a un incremento establecido Δs .

La pseudo-longitud de arco entre estos dos puntos es un valor que representa la longitud del arco comprendida entre ellos, sin serlo: se define como la proyección del vector que une los dos puntos ($\vec{u}_{b_{dif}} = \vec{u}_{b_{n+1}} - \vec{u}_{b_n}$) sobre el vector tangente unitario a la curva en el primer punto (\vec{t}_{b_n}). Esto se representa gráficamente en la **Figura 4.7**. (El cálculo del vector tangente en un punto se explicará al final del apartado).

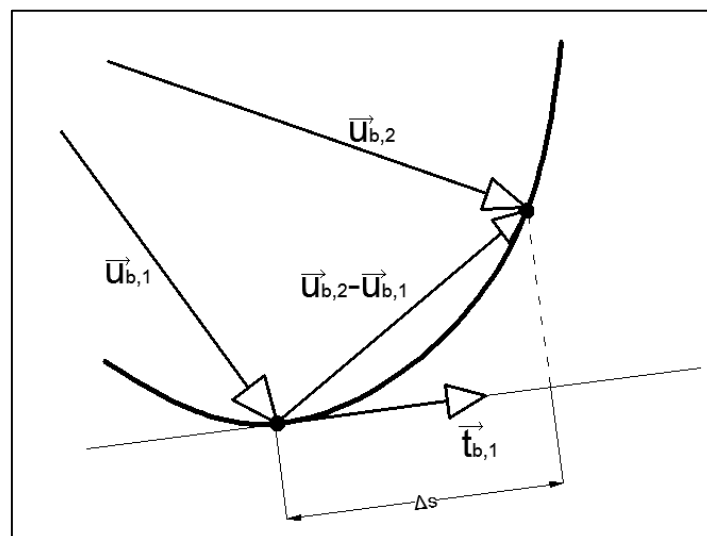


Figura 4.7. Iteración del método de continuación en la pseudo-longitud de arco

Esta última condición se puede expresar matemáticamente como:

$$(\vec{u}_{b_{n+1}} - \vec{u}_{b_n}) \cdot \vec{t}_{b_n} = \Delta s$$

En la iteración actual, los valores de la iteración anterior son conocidos (la tangente también, como se explicará al final del apartado), por lo que son valores de referencia:

$$\vec{u}_{b_n} = \vec{u}_{b_{ref}}; \vec{t}_{b_n} = \vec{t}_{b_{ref}}$$

El valor de la iteración actual es desconocido, por lo que se trata de la incógnita a calcular:

$$\vec{u}_{b_{n+1}} = \vec{u}_b$$

Teniendo esto en cuenta y juntando la ecuación de equilibrio y la condición de la pseudo-longitud del arco, el sistema queda como:

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{u}_b) &= \vec{0} \\ (\vec{u}_b - \vec{u}_{b_{ref}}) \cdot \vec{t}_{b_{ref}} - \Delta s &= 0 \end{aligned}$$

Tratándose ahora de un sistema de $N + 1$ ecuaciones y $N + 1$ incógnitas.

4.1.2.2. Método de Newton para la pseudo-longitud

Para la resolución de este sistema se emplea también el Método de Newton-Raphson en varias variables, pero ahora:

- El vector de incógnitas \vec{x} no es \vec{u} , sino $\vec{u}_b = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \lambda \end{bmatrix}$.
- El vector de ecuaciones no es $\vec{f}(\vec{u})$, sino $f_a(\vec{u}_b) = \begin{bmatrix} \vec{f}(\vec{u}_b) \\ (\vec{u}_b - \vec{u}_{b_{ref}}) \cdot \vec{t}_{b_{ref}} - \Delta s \end{bmatrix}$

Para la resolución de este sistema mediante el método de Newton-Raphson es necesario disponer de la matriz jacobiana respecto a \vec{u}_b del vector de ecuaciones $\vec{f}_a(\vec{u}_b)$, que se puede expresar en función de $\vec{u}_b = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \lambda \end{bmatrix}$ como:

$$\vec{J}_a(\vec{u}_b) = \begin{bmatrix} \vec{J}(\vec{u}_b) & \vec{J}_\lambda(\vec{u}_b) \\ * & * \end{bmatrix}$$

Donde $\vec{J}(\vec{u}_b)$ es la matriz jacobiana "N×N" de $\vec{f}(\vec{u}_b)$ respecto de \vec{u} y $\vec{J}_\lambda(\vec{u}_b)$ es la derivada parcial (vectorial "N×1") respecto a λ de la función $\vec{f}(\vec{u}_b)$:

$$\vec{J}_\lambda(\vec{u}_b) = \frac{\partial \vec{f}(\vec{u}_b)}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{u}_b)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2(\vec{u}_b)}{\partial \lambda} \\ \dots \\ \frac{\partial f_N(\vec{u}_b)}{\partial \lambda} \end{bmatrix}$$

En los dos asteriscos "*" iría un único vector horizontal de dimensión "N+1" igual a $\vec{t}_{b_{ref}}$, que es el gradiente respecto de \vec{u}_b de la función escalar: $(\vec{u}_b - \vec{u}_{b_{ref}}) \cdot \vec{t}_{b_{ref}} - \Delta s$

Por tanto, para la implementación de este método, se necesita a parte de la matriz jacobiana $\vec{J}(\vec{u}_b)$, el vector gradiente $\vec{J}_\lambda(\vec{u}_b)$. Como se observa, ambos deben estar en función de \vec{u}_b , es decir, de los grados de libertad y del parámetro continuado.

4.1.2.3. Cálculo de la tangente

También se observa que se necesita calcular la tangente a la curva en cada punto, de manera que se pueda usar ésta como tangente de referencia en el punto siguiente.

Para ello, una vez que se ha calculado la solución $\vec{u}_{b,eq}$ del sistema $\vec{f}_a(\vec{u}_b) = \vec{0}$, se resuelve el sistema en \vec{t} :

$$\vec{J}_{a,eq} \cdot \vec{t}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donde $\vec{J}_{a,eq} = \vec{J}_a(\vec{u}_{b,eq})$.

La explicación de esto se realiza continuación.

Al haberse parametrizado la curva solución \vec{u}_b mediante la longitud del arco s : $\vec{u}_b(s)$:

$$\vec{f}(\vec{u}_b(s)) = \vec{0}$$

Los vectores tangentes a dicha curva deben satisfacer la ecuación:

$$D_{\vec{u}}(\vec{f}(\vec{u}_b(s))) \cdot \frac{d\vec{u}_b(s)}{ds} = 0$$

Donde:

$$D_{\vec{u}}(\vec{f}(\vec{u}_b(s))) = \vec{J}(\vec{u}_b)$$

Y el vector tangente unitario es:

$$\vec{t}_b = \frac{d\vec{u}_b(s)}{ds}$$

Por lo tanto, consistiría en resolver el sistema:

$$\vec{J}(\vec{u}_b) \cdot \vec{t}_b = \vec{0}$$

Sin embargo, este sistema tiene “N” ecuaciones y “N+1” incógnitas, y por tanto infinitas soluciones, que se corresponden con los infinitos vectores tangentes a la curva (una única dirección que puede ser representada por un vector multiplicado por un valor escalar cualquiera).

Por tanto, se debe imponer una ecuación adicional acerca de este vector tangente. Se escoge, por sencillez en el planteamiento (como se verá inmediatamente), que la proyección del vector tangente que se quiere calcular sobre el vector tangente de la iteración anterior (que es unitario) sea igual a la unidad. Matemáticamente se expresa mediante el producto escalar:

$$\vec{t}_{b,ref} \cdot \vec{t}_b = 1$$

Entonces el sistema de ecuaciones queda como:

$$\begin{aligned}\vec{J}(\vec{u}_b) \cdot \vec{t}_b &= \vec{0} \\ \vec{t}_{b,ref} \cdot \vec{t}_b &= 1\end{aligned}$$

Que, como se observa, es equivalente al sistema planteado al principio del apartado:

$$\vec{J}_{a,eq} \cdot \vec{t}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Este vector no tiene por qué ser unitario, por lo que se normaliza para emplearlo como vector tangente (unitario) de referencia en la iteración siguiente:

$$\vec{t}_{b,norm} = \frac{\vec{t}_b}{|\vec{t}_b|}$$

Siendo $|\vec{t}|$ la norma del vector.

4.1.2.4. Valores iniciales

Al igual que en el caso anterior, para el cálculo de la solución de equilibrio $\vec{u}_{b(n)}$ en una iteración (mediante el método de Newton-Raphson) se parte de la solución de equilibrio en la iteración anterior $\vec{u}_{b(n-1)}$. Se observa que estos valores de arranque del método son también los valores que se usan como referencia para medir la pseudo-longitud del arco, desde el punto anterior hasta el actual.

De la misma manera, para la primera iteración se debe partir de un valor del que se conozca la solución analítica: Al igual que en el caso anterior, debe tratarse de una solución $\vec{u}_{b0} = (\vec{u}_0, \lambda_0)$ trivial.

También se necesita una tangente inicial, ya que no se dispone de un cálculo anterior. Ésta debe ser una tangente que represente una “dirección inicial” de avance en el espacio de dimensión $N+1$. Una dirección inicial de $[0,0,\dots,1]$ supondría una dirección inicial de avance en el parámetro continuado, es decir, igual que la continuación en el parámetro.

4.1.2.5. Valores iniciales en rama bifurcada

Los valores iniciales (solución de equilibrio y dirección de avance) pueden no corresponder a una solución trivial, sino que se traten de un punto crítico (calculado anteriormente) en el que se produce una bifurcación, concepto explicado en el **apartado 2.9.6**.

Como valor inicial de la solución de equilibrio en la rama bifurcada se toma el valor del punto crítico calculado con precisión, como se explica en el **apartado 4.1.3.3**.

Como tangente de partida se toma:

$$\vec{t}_{bif} = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde \vec{v} es el autovector asociado al autovalor que cambia de signo, es decir, que cumple:

$$\vec{J}_{eq} \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

Se trata de una “tangente de partida ficticia”, pero con garantías de funcionar, pues ofrece la garantía de que es independiente al vector tangente a la curva, ya que el éste último es:

$$\vec{t}_b = \begin{bmatrix} \vec{t} \in R^N \\ \tau \end{bmatrix}$$

Y, al no tratarse de un pliegue, se sabe que $\tau \neq 0$, por lo que si la última componente de \vec{t}_{bif} es nula, estos vectores serán independientes.

4.1.2.6. Variación de la pseudo-longitud del arco

De la misma manera que en la continuación del parámetro en el **apartado 4.1.1.1**, el incremento en el mismo $\Delta\lambda$ podía variar en función de la naturaleza de la función, en este caso ocurre con el valor de la pseudo-longitud del arco Δs , que varía la misma en función de las mismas condiciones dentro de un rango: $\Delta s_{mín} < \Delta s < \Delta s_{máx}$, con el mismo criterio.

4.1.3. Estabilidad y puntos críticos

4.1.3.1. Estabilidad

En cada punto (solución de equilibrio) de una curva de continuación en un parámetro se puede evaluar la estabilidad de la solución de equilibrio con el test que se explicó en el **apartado 2.9**.

Se dispone la matriz jacobiana, pues es necesaria para el método de Newton, así que solo es necesario evaluarlo en la solución de equilibrio calculada y resolver el problema de autovalores y autovectores, que es inmediato en un lenguaje como Matlab.

Como se comentó en dicho apartado, se puede tomar el número de autovalores negativos ($nNeg$) como magnitud representativa de la inestabilidad (siendo estable si es cero e inestable si es mayor) de la solución de equilibrio, debido a que cada uno representa el número de grados de libertad que son estables (o inestables) en una solución de equilibrio determinado.

Se puede calcular este número de autovalores negativos para cada punto (solución de equilibrio) de la curva de continuación en el parámetro y crear un vector de longitud el número de puntos calculados:

$$\overrightarrow{nNeg} \in R^{nPuntos}$$

4.1.3.2. Cambios de estabilidad

Cuando entre dos puntos cambia el número de autovalores positivos (o negativos), entre estos dos puntos se encuentra un punto crítico o punto de cambio de estabilidad.

Resulta necesario calcular con precisión los puntos críticos, para conocer el valor exacto y, si procede (no es un pliegue), poder calcular la tangente de partida de las ramas bifurcadas.

Para ello, cuando se tengan dos puntos de una rama de continuación en un parámetro que sean consecutivos y tengan distinto número de autovalores positivos (o negativos), se implementa un método de bisección, que a continuación se explica y se ha denominado “método de la bisección-bifurcación”.

4.1.3.3. *Cálculo del punto crítico: Método de la bisección-bifurcación*

Si se tienen dos puntos (soluciones de equilibrio) consecutivos con un número distinto de autovalores negativos se sabe que entre ellos hay un punto crítico.

Un posible procedimiento iterativo para encontrarlo podría ser:

- Calcular el punto (solución de equilibrio) que se encuentra en la mitad de la “pseudo-longitud del arco” (concepto ya explicado) comprendida entre los dos puntos.
- Evaluar el número de autovalores negativos en este punto “medio”.
- Buscar qué punto de los dos iniciales es el que tiene el número de autovalores negativos distinto
- Repetir la misma operación de bisección.

Iterar hasta cumplirse criterios de tolerancias y convergencias explicados para el método de Newton.

4.1.3.4. *Evaluación del tipo de punto crítico*

Para evaluar el tipo de bifurcación que se tiene, se recurre a dos propiedades de la misma:

- Número de autovalores que cambian de signo: determina la “dimensión de la bifurcación”.
- Si se trata de un pliegue: se evalúa si se produce el retroceso en la curva de alguno de los grados de libertad frente al parámetro continuado. Esto se hace evaluando la tangente a la curva (de la que, como se ha explicado, se dispone en cada punto): en concreto su componente relativa al parámetro continuado.
 - Si es cero (numéricamente hablando, es decir, en términos de los conceptos de tolerancia explicados) puede producirse este retroceso. Se comprueba si se produce un cambio de signo y si es así (y también se produce un cambio de estabilidad) el punto crítico se trata de un pliegue.
 - Si no es cero, no ocurre lo anterior y por tanto el punto crítico no es un pliegue, es decir, debe ser un punto de bifurcación.

4.2. Continuación en dos parámetros de la solución de equilibrio en punto crítico

Este método de continuación tiene la misma filosofía que el de continuación en la pseudo-longitud del arco, pero en este caso se dejan variar dos parámetros. El arco es ahora en dimensión $N+2$ (las N de \vec{u} , 1 de λ y otra de μ).

Por tanto, es necesaria una condición adicional, la cual es que la solución de equilibrio sea además un punto crítico (punto de cambio de estabilidad).

Este método tiene sentido como complemento a la continuación en un parámetro de la siguiente manera:

- 1) Se emplea en primer lugar la continuación en un parámetro (en la pseudo-longitud del arco) para calcular las ramas de las soluciones de equilibrio de distintos problemas al variar un parámetro.

2) En los puntos de bifurcación de estas ramas, se aplica este nuevo método para continuar estos puntos de bifurcación en dos parámetros (en la pseudo-longitud del arco): el parámetro continuado y otro nuevo, que se denominará “parámetro secundario”. Este nuevo parámetro, en las ramas de equilibrio de continuación de un parámetro tiene un valor constante (de ahí su adjetivo) y sólo se deja variar cuando se emplea este segundo método.

Este parámetro secundario se denominará μ , y al igual que se hizo en la continuación en la pseudo-longitud del arco, se sacará del vector de parámetros \vec{p} y se incluirá en un vector de

$$\text{variables } \vec{u}_b = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix}.$$

$$\vec{f}(\vec{u}_{eq1}; \vec{p}_1) = \vec{f}(\vec{u}_{eq1}; \lambda_1; \mu_1; \vec{p}) = \vec{f}(\vec{u}_{b,eq1}; \vec{p}) = \vec{0}$$

$$\vec{f}(\vec{u}_{eq2}; \vec{p}_2) = \vec{f}(\vec{u}_{eq2}; \lambda_2; \mu_2; \vec{p}) = \vec{f}(\vec{u}_{b,eq2}; \vec{p}) = \vec{0}$$

...

Además, el vector de parámetros resultante nuevamente se omitirá debido a que ahora estos parámetros no variaran a lo largo del proceso:

$$\vec{f}(\vec{u}_{b,eq1}) = \vec{0}$$

$$\vec{f}(\vec{u}_{b,eq2}) = \vec{0}$$

...

La formulación que a continuación se presenta es ligeramente distinta en función de que el punto crítico sea tipo “Pliegue” o “Pitchfork”, por lo que se explica en primer lugar el primer tipo y posteriormente se comentan los aspectos adicionales del segundo.

Esta formulación se ha tomado de (bibliografía) A. G. Salinger, E. A. Burroughs, R. P. Pawlowski, E. T. Phipps & L. A. Romero (2004).

4.2.1. Punto crítico tipo Pliegue

4.2.1.1. Equilibrio

La condición de equilibrio, al igual que antes, se impone con la resolución del propio sistema:

$$\vec{f}(\vec{u}_b) = \vec{0}$$

Que en este caso tiene N ecuaciones y N+2 incógnitas.

4.2.1.2. Punto crítico

La condición de punto crítico, como se ha explicado, se impone de la siguiente manera:

$$\vec{J}(\vec{u}_b) \cdot \vec{w} = \vec{0}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{w}_{ref} = 1$$

El vector \vec{w} , que es de dimensión “N”, representa la dirección en el espacio de \vec{u} en el que se da la bifurcación. Existe pues una nueva variable aparte de \vec{u}_b , que es \vec{w} .

Teniendo en cuenta que la matriz jacobiana $\vec{J}(\vec{u}_b)$ es NxN, se añaden N+1 ecuaciones y N incógnitas, existiendo ahora 2N+1 ecuaciones y 2N+2 incógnitas.

4.2.1.3. *Pseudo-longitud del arco*

Como última condición se establece de nuevo la relativa a la pseudo-longitud del arco, este caso para una curva en dimensión "2N+2":

$$(\vec{u}_b - \vec{u}_{bref}) \cdot \vec{t}_{bref} = \Delta s$$

El sistema de ecuaciones, ahora de dimensión "2N+2" sería:

$$\vec{f}(\vec{u}_b) = \vec{0}$$

$$\vec{J}(\vec{u}_b) \cdot \vec{w} = \vec{0}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{w}_{ref} = 1$$

$$(\vec{u}_b - \vec{u}_{bref}) \cdot \vec{t}_{bref} = \Delta s$$

Al igual que en el caso de un parámetro, este sistema se resuelve mediante el método de Newton. Para su implementación, es necesaria, por un lado, disponer del vector de ecuaciones:

$$\vec{f}_a(\vec{u}_b, \vec{w}) = \begin{bmatrix} \vec{f}(\vec{u}_b) \\ \vec{J}(\vec{u}_b) \cdot \vec{w} \\ \vec{w} \cdot \vec{w}_{ref} - 1 \\ (\vec{u}_b - \vec{u}_{bref}) \cdot \vec{t}_{bref} - \Delta s \end{bmatrix}$$

Y por otro de su matriz jacobiana:

$$\vec{J}_a(\vec{u}_b, \vec{w}) = \begin{bmatrix} \vec{J}(\vec{u}_b) & \vec{J}_\lambda(\vec{u}_b) & \vec{J}_\mu(\vec{u}_b) & 0 \\ \vec{J}\vec{J}(\vec{u}_b, \vec{w}) & \vec{J}\vec{J}_\lambda(\vec{u}_b, \vec{w}) & \vec{J}\vec{J}_\mu(\vec{u}_b, \vec{w}) & \vec{J}(\vec{u}_b) \\ 0 & 0 & 0 & \vec{w}_{ref} \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Al igual que en el caso de un parámetro, $\vec{J}(\vec{u}_b)$ es la matriz jacobiana de $\vec{f}(\vec{u}_b)$ respecto a \vec{u} , y $\vec{J}_\lambda(\vec{u}_b)$ la derivada vectorial de $\vec{f}(\vec{u}_b)$ respecto a λ . Ahora también existe $\vec{J}_\mu(\vec{u}_b)$, la derivada vectorial de $\vec{f}(\vec{u}_b)$ respecto a μ .

En los asteriscos "*" iría (al igual que en el caso de un parámetro y por el mismo motivo) el vector \vec{t}_{bref} , que sería ahora de dimensión "2N+2" en horizontal.

La matriz $\vec{J}\vec{J}(\vec{u}_b, \vec{w})$ sería la matriz jacobiana respecto a \vec{u} del vector:

$$\vec{J}\vec{J}(\vec{u}_b, \vec{w}) = \vec{J}(\vec{u}_b) \cdot \vec{w}$$

Es decir:

$$D_{\vec{u}}(\vec{J}(\vec{u}_b) \cdot \vec{w})$$

Y los vectores $\vec{J}\vec{J}_\lambda(\vec{u}_b, \vec{w})$ y $\vec{J}\vec{J}_\mu(\vec{u}_b, \vec{w})$ serían las derivadas (vectoriales) respecto a λ y μ , respectivamente, de este mismo vector:

$$\vec{J}\vec{J}_\lambda(\vec{u}_b, \vec{w}) = \frac{\partial(\vec{J}(\vec{u}_b) \cdot \vec{w})}{\partial \lambda} \quad ; \quad \vec{J}\vec{J}_\mu(\vec{u}_b, \vec{w}) = \frac{\partial(\vec{J}(\vec{u}_b) \cdot \vec{w})}{\partial \mu}$$

4.2.1.4. Tangente

Al igual que en el caso de un parámetro, en cada iteración, después de calcular la solución de equilibrio, se calcula la tangente en el punto actual como:

$$\vec{J}_{a,eq} \cdot \vec{t}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donde $\vec{J}_{a,eq} = \vec{J}_a(\vec{u}_{b,eq}, \vec{w}_{eq})$.

La tangente de partida inicial se toma en este caso con dirección de avance en la dimensión del parámetro secundario, es decir:

$$\vec{t}_{b,ref,0} = \begin{bmatrix} \vec{0} \in R^N \equiv \vec{u} \\ 0 \equiv \lambda \\ 1 \equiv \mu \\ \vec{0} \in R^N \equiv \vec{w} \end{bmatrix}$$

4.2.1.5. Valores iniciales

Al igual que en el caso de un parámetro, se parte de una solución trivial conocida $\vec{u}_{b0} = \begin{bmatrix} \vec{u}_0 \\ \lambda_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix}$.

En este caso se trata de un punto crítico, cuyo valor exacto se conoce, pues ya se ha explicado el método de cálculo de los puntos críticos.

El valor inicial del vector \vec{w} es el autovector asociado al autovalor que cambia de signo en la bifurcación: \vec{w}_0

4.2.2. Punto crítico tipo Pitchfork

En el caso de que el punto crítico sea tipo Pitchfork, la formulación es muy similar, cambiando únicamente en los siguientes aspectos:

La ecuación de equilibrio ahora es:

$$\vec{f}(\vec{u}_b) - \sigma \cdot \vec{w}_{ref} = \vec{0}$$

Se añade una ecuación más:

$$\vec{w}_{ref} \cdot \vec{u} = 0$$

Se observa que existe una ecuación más y una variable más (σ) por lo que el vector de ecuaciones y su matriz jacobiana (necesarios para la implementación del método de Newton-Raphson) son ahora:

$$\vec{f}_a(\vec{u}_b, \vec{w}, \sigma) = \begin{bmatrix} \vec{f}(\vec{u}_b) - \sigma \cdot \vec{w}_{ref} \\ \vec{J}(\vec{u}_b) \cdot \vec{w} \\ \vec{w} \cdot \vec{w}_{ref} - 1 \\ \vec{w}_{ref} \cdot \vec{u} \\ (\vec{u}_b - \vec{u}_{bref}) \cdot \vec{t}_{bref} - \Delta s \end{bmatrix}$$

$$\vec{J}_a(\vec{u}_b, \vec{w}, \sigma) = \begin{bmatrix} \vec{J}(\vec{u}_b) & \vec{J}_\lambda(\vec{u}_b) & \vec{J}_\mu(\vec{u}_b) & 0 & -\vec{w}_{ref} \\ \vec{J}\vec{J}(\vec{u}_b, \vec{w}) & \vec{J}\vec{J}_\lambda(\vec{u}_b, \vec{w}) & \vec{J}\vec{J}_\mu(\vec{u}_b, \vec{w}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vec{w}_{ref} & 0 \\ \vec{w}_{ref} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

En los asteriscos “*” vuelve a estar en horizontal la tangente a la curva, que en este caso es en dimensión “2N+3”.

Los distintos elementos en la matriz tienen el mismo significado que el explicado en los apartados anteriores.

Las condiciones iniciales son las mismas, destacando únicamente que la condición inicial para σ es $\sigma_0 = 0$. Además, se observa que la variable σ debe valer 0 en todo punto, para que se trate de una solución de equilibrio:

$$\vec{f}(\vec{u}_b) - \sigma \cdot \vec{w}_{ref} = \vec{0} \rightarrow \sigma = 0 \rightarrow \vec{f}(\vec{u}_b) = \vec{0}$$

Una vez implementado, es una forma de comprobar que la solución es correcta.

5. Implementación

En este apartado se explican las distintas partes de la implementación de toda la formulación que se ha explicado en los apartados anteriores.

El resultado es el desarrollo de un software con interfaz gráfica, cuyo aspecto se muestra en las Figuras 5.1 y 5.2.

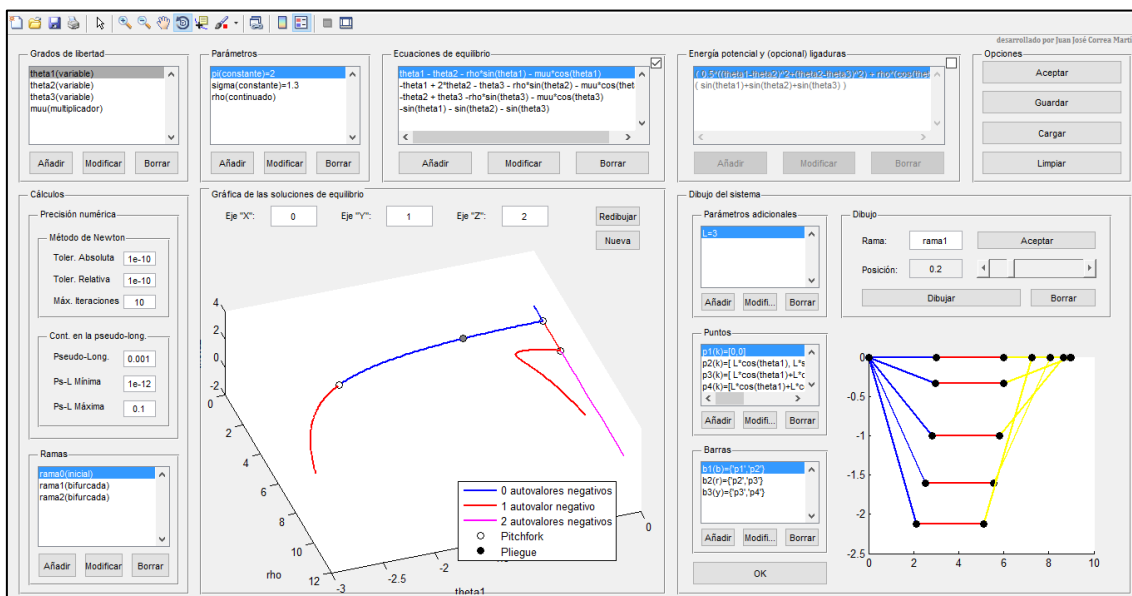


Figura 5.1. Aspecto de la interfaz gráfica elaborada aplicada al caso del sistema 1

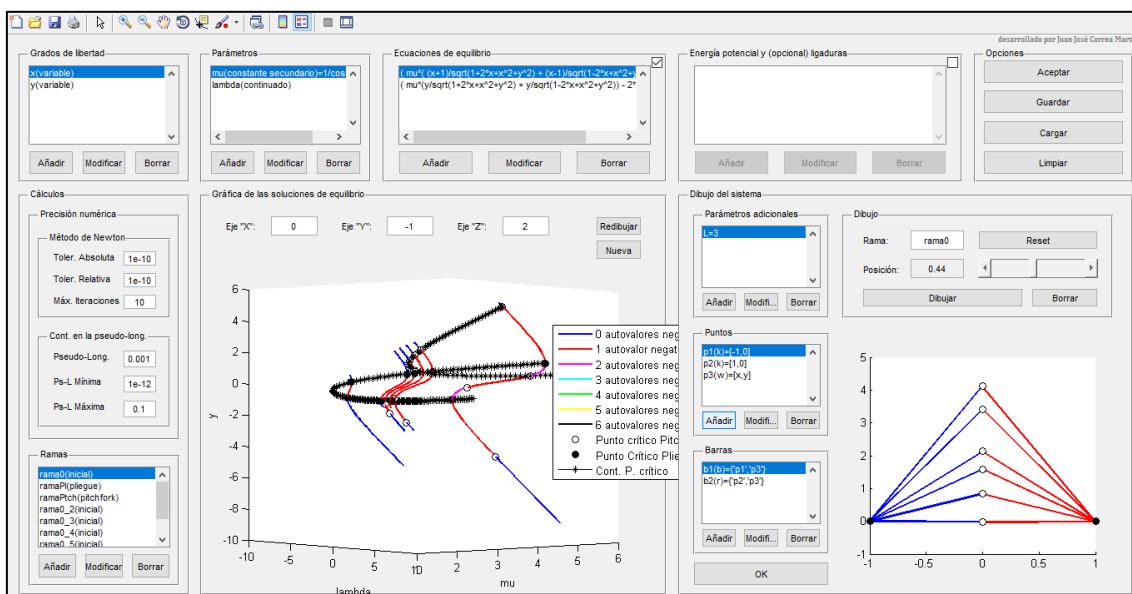


Figura 5.2. Aspecto de la interfaz gráfica elaborada aplicada al caso del sistema 2

El empleo del software Matlab se ha escogido por dos razones fundamentales:

- Se trata de un lenguaje de alto nivel, con una amplia librería de funciones matemáticas.
- Se pueden crear interfaces gráficas, y existe también una amplia librería de elementos y manipulación de datos para la creación de las mismas.

Se ha creído conveniente realizar una interfaz gráfica por dos razones fundamentales:

- Las técnicas de continuación de soluciones de equilibrio tienen un carácter interactivo, en el sentido de que se pueden continuar varias ramas en un sistema partiendo de puntos distintos, con direcciones distintas, continuar ramas que bifurcan de otras, cambiar ciertos parámetros del sistema y comparar con resultados anteriores,...
- Permitir al usuario definir un sistema de una manera visual y sencilla, mediante el mínimo número posible de datos de entrada, dejando al programa el resto de operaciones que no sean imprescindibles de realizar por el usuario.

El software desarrollado realiza las siguientes tareas:

- Define un sistema a través de una serie de:
 - Grados de libertad
 - Parámetros
 - Ecuaciones de equilibrio en función de los grados de libertad y los parámetros
 - Opcionalmente a lo anterior, energía potencial y (opcionalmente) ecuaciones de ligadura entre los grados de libertad.
- Calcula ramas de soluciones de equilibrio resultado de:
 - Continuación en un parámetro de las soluciones de equilibrio partiendo de una solución inicial y una dirección de partida.
 - La misma continuación anterior pero partiendo de un punto de bifurcación de otra rama.
 - Continuación en dos parámetros de las soluciones de equilibrio en punto crítico para:
 - Punto crítico tipo Pliegue
 - Punto crítico tipo Pitchfork
- Dibuja el sistema (para las soluciones de equilibrio calculadas) mediante una serie de:
 - Puntos, cuyas coordenadas dependen de los grados de libertad y los parámetros del sistema
 - Barras, que conectan puntos dos a dos.

Este apartado consta de tres partes principales:

- En primer lugar se plantean dos problemas tipo relativos a toda la formulación empleada:
 - Un modelo de barras inextensibles con muelles helicoidales (a torsión) en las uniones sometida a una carga axial de compresión: representa el pandeo de una barra (pilar) a compresión
 - Un modelo de dos barras con rigidez a deformación longitudinal en forma de lados superiores de un triángulo sometido a una carga vertical de flexión: representa el pandeo de un arco a flexión
- A continuación se muestra el funcionamiento de la interfaz de cara a su interacción con el usuario, mediante la introducción en el programa de los datos relativos a los dos problemas anteriores.

- Finalmente se hace referencia a las distintas funciones programadas en MATLAB (que son llamadas desde la interfaz durante la interacción) y que realizan los distintos cálculos, cuya formulación se ha explicado en los apartados anteriores (haciéndose referencia en cada una al apartado correspondiente).

Como se comentará más adelante, no se realiza una explicación detallada del código de las distintas funciones, pues éstas se adjuntan en el CD del trabajo y se hace referencia a las mismas conforme se va explicando el proceso. Las funciones vienen acompañadas de comentarios explicativos a cada uno de los pasos.

Tampoco se explica la manera en que se programa la interfaz, debido a que es un asunto de Programación Orientada a Objetos (P.O.O) y trabajo con estructuras de datos, que si bien ha sido imprescindible y ha requerido un esfuerzo similar al resto del trabajo, es prescindible para entender los aspectos que conciernen al trabajo y haría este demasiado extenso.

5.1. Planteamiento de dos sistemas

Se modelizan dos tipos de sistema:

5.1.1. Sistema 1

Se estudia el sistema de barras inextensibles de longitud L m, con muelles torsionales de constante $k \frac{N \cdot m}{rad}$ en las articulaciones y sometido a una carga p N axial de compresión.

Representa el pandeo de una barra (pilar) a compresión

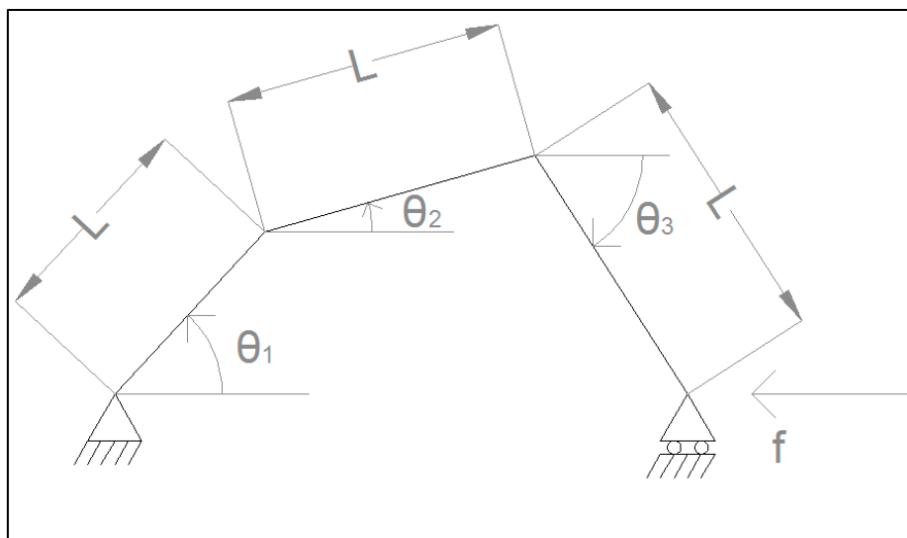


Figura 5.3. Sistema 1

Los grados de libertad son:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Existe una ecuación de ligadura entre ellos:

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 = 0$$

La energía potencial elástica almacenada por los muelles, de rigidez torsional k , es:

$$U_{muelle} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta\theta^2$$

$$U_{muelles} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\theta_2 - \theta_3)^2$$

Y el trabajo realizado por la carga p :

$$U_{fuerza} = - \int_{s_0}^s p(s) \cdot ds$$

$$U_{fuerza} = - \int_{x_0}^x -p \cdot dx = f \cdot (x - x_0)$$

Y teniendo en cuenta que el desplazamiento $x - x_0$ se puede poner en función de los grados de libertad:

$$x - x_0 = l \cdot \cos \theta_1 + l \cdot \cos \theta_2 + l \cdot \cos \theta_3$$

La expresión de la energía potencial queda como:

$$U(\theta_1, \theta_2, \theta_3; l, k, p) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot ((\theta_1 - \theta_2)^2 + (\theta_2 - \theta_3)^2) + f \cdot l \cdot (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3)$$

Si se realiza la siguiente adimensionalización:

$$u = \frac{U}{k}$$

$$\rho = \frac{f \cdot l}{k}$$

La expresión de la energía potencial adimensionalizada queda como:

$$u(\theta_1, \theta_2, \theta_3; \rho) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot ((\theta_1 - \theta_2)^2 + (\theta_2 - \theta_3)^2) + \rho \cdot (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3)$$

Como se observa, tras la adimensionalización solamente existe un parámetro adimensional en el problema (carga adimensional), que será el continuado.

Sólo con estos datos ya se puede entrar en el programa, utilizando la opción de introducir la energía potencial y, en este caso, la ecuación de ligadura, que es:

$$f_{ligadura}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 = 0$$

No obstante, también se pueden introducir las ecuaciones de equilibrio, que se pueden calcular a partir de la energía potencial (y, como se ha explicado, es precisamente lo que realiza el programa) resolviendo el problema de multiplicadores de Lagrange:

$$L(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \nu) = u(\theta_1, \theta_2, \theta_3) - \nu \cdot f_{\text{ligadura}}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

Según:

$$\vec{\nabla}L(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \nu) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial L}{\partial \nu} \end{bmatrix} = \vec{0}$$

El vector de ecuaciones de equilibrio a introducir en el programa mediante esta otra opción sería:

$$\vec{f}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \nu; \rho) = \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_2 - \rho \cdot \sin \theta_1 - \nu \cdot \cos \theta_1 \\ -\theta_1 + 2 \cdot \theta_2 - \theta_3 - \rho \cdot \sin \theta_2 - \nu \cdot \cos \theta_2 \\ -\theta_2 + \theta_3 - \rho \cdot \sin \theta_3 - \nu \cdot \cos \theta_3 \\ -(\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3) \end{bmatrix}$$

Una solución trivial del sistema con la que empezar es:

$$\rho = 0 \rightarrow \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \nu = 0$$

Con una tangente de partida en el parámetro continuado: [0,0,0,0,1].

5.1.2. Sistema 2

Se estudia el sistema consistente en un pórtico en equilibrio formado por dos barras (de comportamiento similar a un muelle con constante $k \frac{N}{m}$ y de longitud natural $l_0 \text{ m}$) apoyadas en los puntos de coordenadas $(-l, 0)$ y $(l, 0)$ (en metros), articuladas en su unión y en sus soportes y soportando una carga de $p \text{ N}$

Representa el pandeo de un arco a flexión.

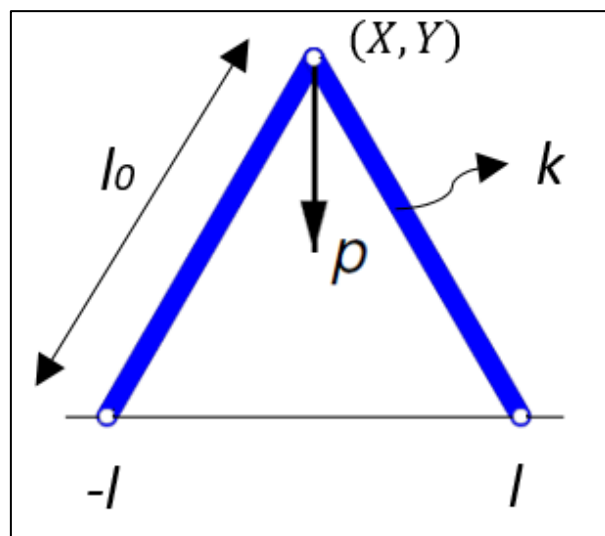


Figura 5.4. Sistema 2

Los grados de libertad son, que son las coordenadas del punto más alto del pórtico.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

La energía potencial del sistema es:

$$U(X, Y) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (r_1 - l_0)^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (r_2 - l_0)^2 + p \cdot (Y - Y_0)$$

Donde:

$$r_1 = \sqrt{l^2 + 2 \cdot l \cdot X + X^2 + Y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{l^2 - 2 \cdot l \cdot X + X^2 + Y^2}$$

$$Y_0 = \sqrt{l_0^2 - l^2}$$

Las ecuaciones de equilibrio serían:

$$\vec{f}(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial U}{\partial X} \\ -\frac{\partial U}{\partial Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot l_0 \cdot \left(\frac{X+l}{r_1} + \frac{X-l}{r_2} \right) - 2 \cdot k \cdot X \\ k \cdot l_0 \cdot \left(\frac{Y}{r_1} + \frac{Y}{r_2} \right) - 2 \cdot k \cdot Y - p \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Que adimensionalizando mediante la división por $k \cdot l$ queda:

$$x = \frac{X}{k \cdot l} \quad ; \quad y = \frac{Y}{k \cdot l}$$

$$\lambda = \frac{p}{k \cdot l} \quad ; \quad \mu = \frac{l_0}{l}$$

$$\vec{f}(x, y; \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \mu \cdot \left(\frac{x+1}{d_1} + \frac{x-1}{d_2} \right) - 2 \cdot x \\ \mu \cdot \left(\frac{y}{d_1} + \frac{y}{d_2} \right) - 2 \cdot y - \lambda \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Siendo:

$$d_1 = \sqrt{1 + 2 \cdot x + x^2 + y^2}$$

$$d_2 = \sqrt{1 - 2 \cdot x + x^2 + y^2}$$

Se observa que en este caso, la adimensionalización produce dos parámetros adimensionales: uno relativo a la carga adimensional (λ) y otro relativo a la geometría (μ). Un esquema del sistema adimensional se representa en la **Figura 5.5**.

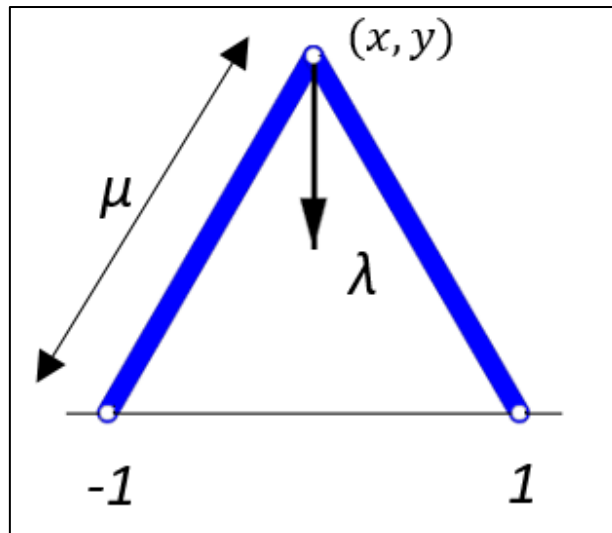


Figura 5.5. Sistema 2 adimensionalizado

Lo más lógico es tomar λ como parámetro continuado en la solución de equilibrio debido a que representa una variación en la acción externa. Posteriormente, se pueden continuar las soluciones de equilibrio en puntos críticos con el parámetro secundario μ para observar como varían los mismos con la configuración geométrica del sistema.

Una solución trivial del sistema con la que empezar es, para un valor del ángulo que forman las barras γ :

$$\mu = \frac{1}{\cos \gamma}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow x = 0; y = \tan \gamma$$

Con un vector tangente de partida en el parámetro continuado: [0,0,1].

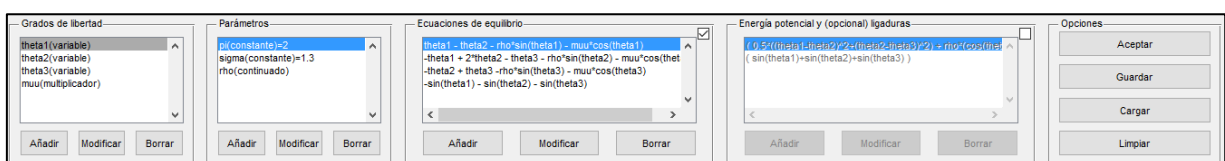
5.2. Funcionamiento de la interfaz gráfica

Se explica en esta sección lo relativo al manejo de la interfaz gráfica. Las explicaciones se irán complementando con ejemplos a los dos sistemas planteados de manera que se reduzca el nivel de abstracción.

5.2.1. Datos del problema

En primer lugar se debe definir el sistema con el cual se va a trabajar mediante “datos”.

Estos datos son los grados de libertad, los parámetros y las ecuaciones de equilibrio (o la energía potencial), y se introducen mediante los paneles de la parte superior de la interfaz, habiendo uno para cada tipo de dato.



Cada panel tiene tres botones:

- “Añadir”: Abre una ventana en el que se rellenan una serie de campos que definen el dato en cuestión. Cuando se introduzcan, se pulsa “OK” en la ventana y el dato se añade a la lista.
- “Modificar”: Habiendo seleccionado en la lista un dato ya definido, se abre una ventana igual que la anterior pero con los campos rellenos. Cuando se modifiquen, se pulsa “OK” en esta ventana y el dato de la lista se modifica.
- “Borrar”: Habiendo seleccionado en la lista un dato ya definido, se borra este dato de la lista.

A continuación se explican las consideraciones necesarias a los distintos tipos de datos:

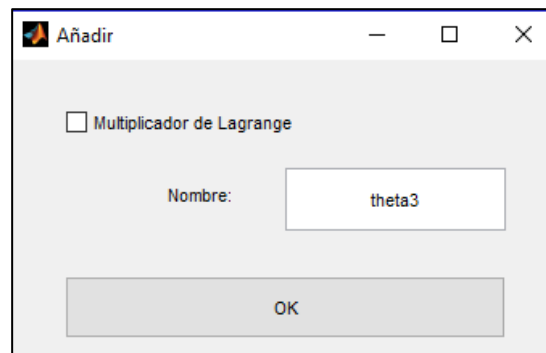
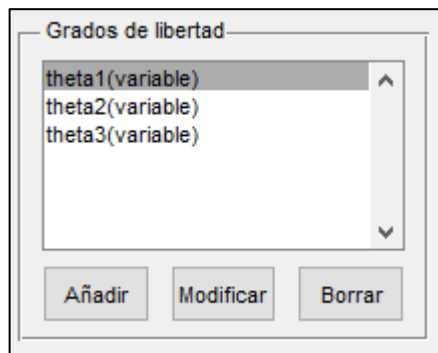
5.2.1.1. Grados de libertad

Nombre que se asigna a los distintos grados de libertad que definen el problema.

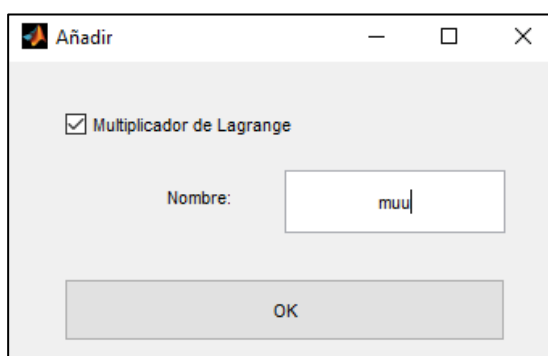
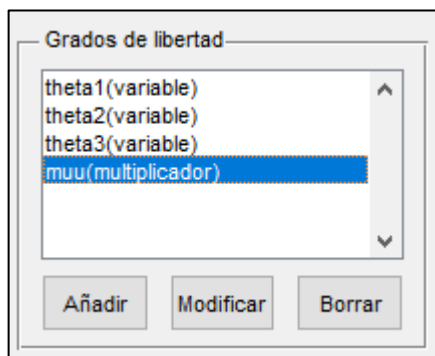
Deben ser cadenas de texto.

En el caso de que se trate de un multiplicador de Lagrange que aparece en las ecuaciones de equilibrio debe indicarse.

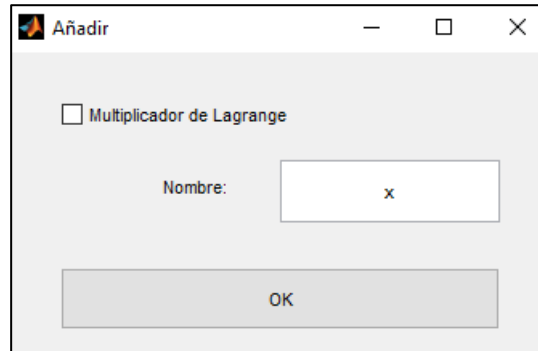
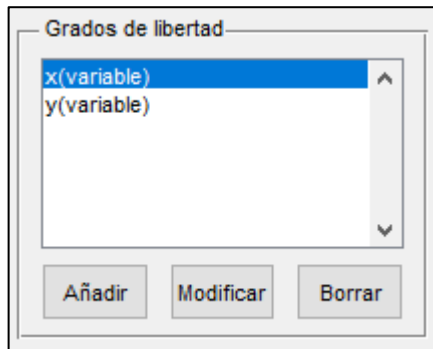
- Caso de sistema 1:
 - Si se va a introducir la energía potencial:



- Si se van a introducir las ecuaciones de equilibrio:



- Caso de sistema 2:
 - Si se van a introducir las ecuaciones de equilibrio:



5.2.1.2. Parámetros

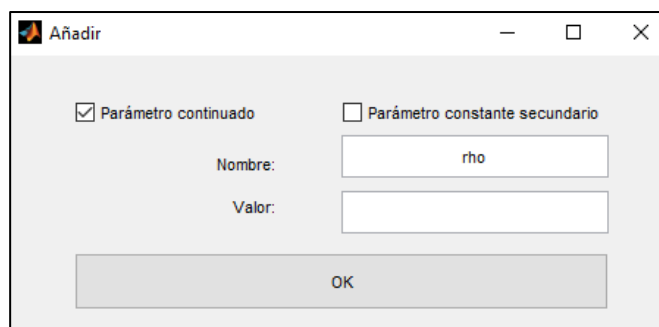
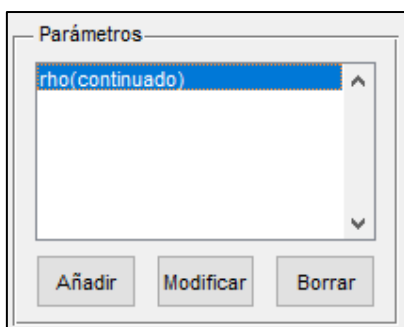
Nombre (cadena de texto) que se asigna a los distintos parámetros del problema y su valor numérico.

Por defecto, serán parámetros constantes.

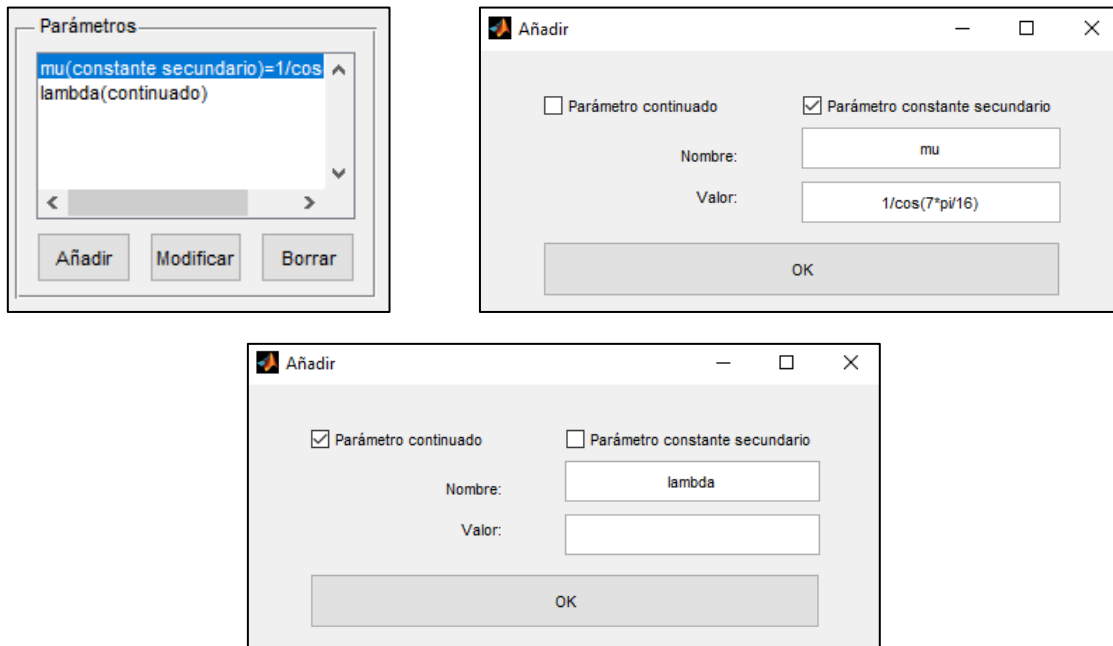
Se debe marcar uno de ellos como “parámetro continuado”, que será aquél que se quiera continuar en las distintas soluciones de equilibrio. En este caso no es necesaria la introducción de su valor numérico (pues en la continuación del mismo se establecerán distintos valores iniciales).

Se puede marcar uno de ellos como “parámetro secundario”, en el caso de que se quiera realizar la continuación de los puntos críticos en un segundo parámetro. En este caso sí es necesaria la introducción de su valor (pues antes de continuar en este segundo parámetro, debe de tener un valor determinado, con el que se continúa el primer parámetro).

- Caso de sistema 1:



- Caso de sistema 2:



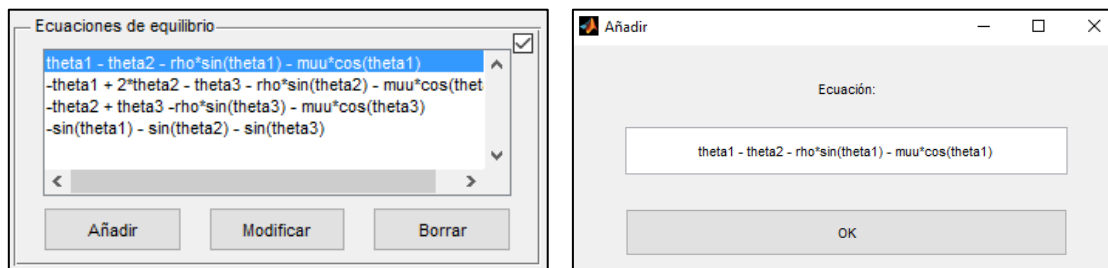
5.2.1.3. Ecuaciones de equilibrio

Se introducen las distintas ecuaciones de equilibrio que gobiernan el problema.

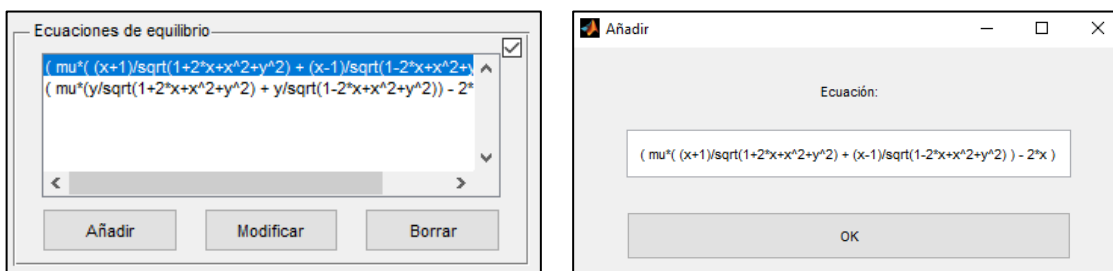
Se trata de cadenas de texto que expresan las operaciones matemáticas de cada una, en función de los nombres de los grados de libertad y de los parámetros, introducidos en los paneles anteriores.

Hay que incluir sólo la función que se iguala a cero, es decir, sin el “=0”.

- Caso de sistema 1:
 - Si se introducen las ecuaciones de equilibrio (en función también del multiplicador de Lagrange):



- Caso del sistema 2:



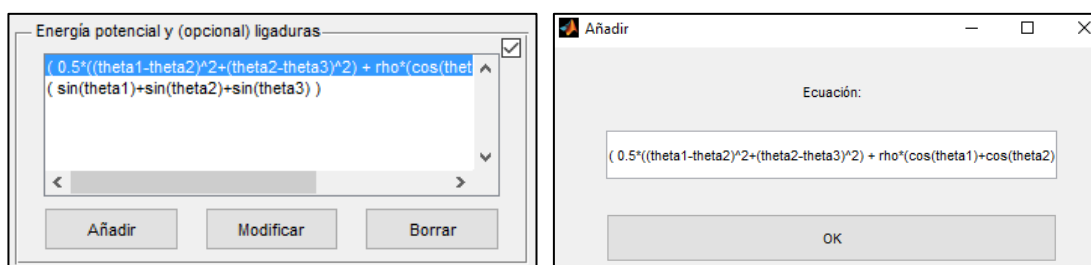
5.2.1.4. *Energía potencial*

Alternativamente a la definición de ecuaciones de equilibrio, se puede introducir (de la misma manera que éstas) la expresión de la energía potencial del sistema, de cuyo gradiente se obtendrán las ecuaciones de equilibrio.

Debe activarse el panel usando su casilla de verificación, desactivándose el panel de las ecuaciones de equilibrio.

En el caso de que existan ecuaciones de ligaduras entre los grados de libertad, estas deben introducirse a continuación de la primera: es decir, debe haber una ecuación (de la energía potencial) y opcionalmente alguna(s) más que definan(n) la(s) ligadura(s).

- Caso del sistema 1:
 - Si se introducen las ecuaciones de equilibrio (y la de ligadura). Esta vez no hay multiplicador de Lagrange:

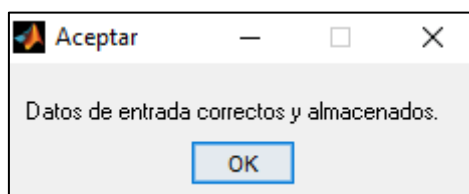


5.2.2. Aceptar

Cuando los datos descritos se hayan introducido, debe pulsarse el botón “Aceptar” en el panel superior derecho.

Este leerá los datos de entrada introducidos en los paneles anteriores y trabajará con ellos de manera que obtenga una serie de “datos manipulados”, los cuales usará para realizar los distintos cálculos que el usuario solicite en los siguientes paneles (que a continuación se explican).

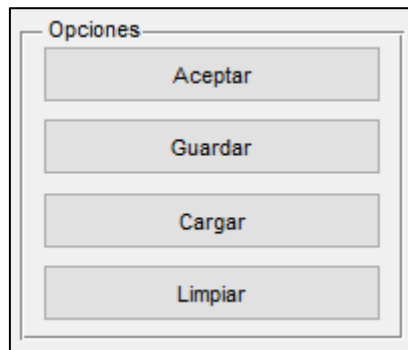
Si no se ha producido ningún error, el programa informa de ello:



También existen otros botones en el panel superior derecho:

- “Guardar”: Abre una ventana en la que se debe introducir el nombre del archivo que almacenará los datos de entrada introducidos. Cuando se pulse “OK” se creará un archivo “.mat” que almacenará los datos de entrada para poder cargarlos en otra ocasión.
- “Cargar”: Abre una ventana en la que se debe introducir el nombre del archivo (previamente guardado) que almacena los datos de entrada. Cuando se pulse “OK” se cargarán estos datos en el programa.

- “Limpiar”: Elimina los datos de entrada introducidos para la definición de un nuevo problema.

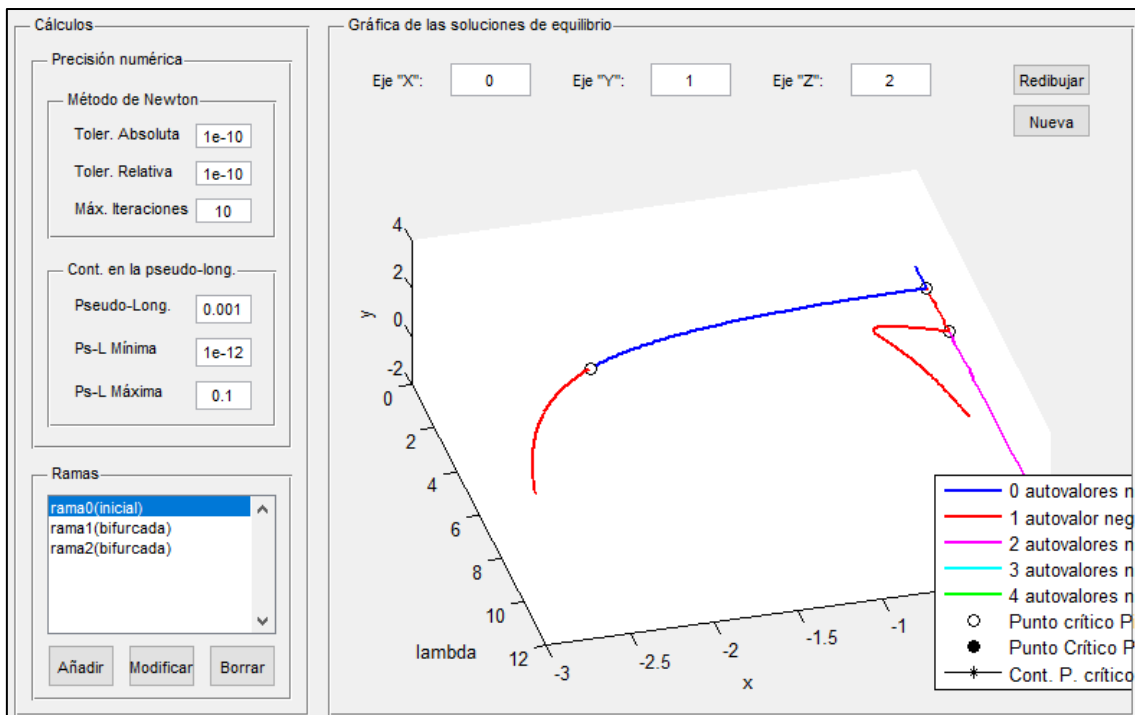


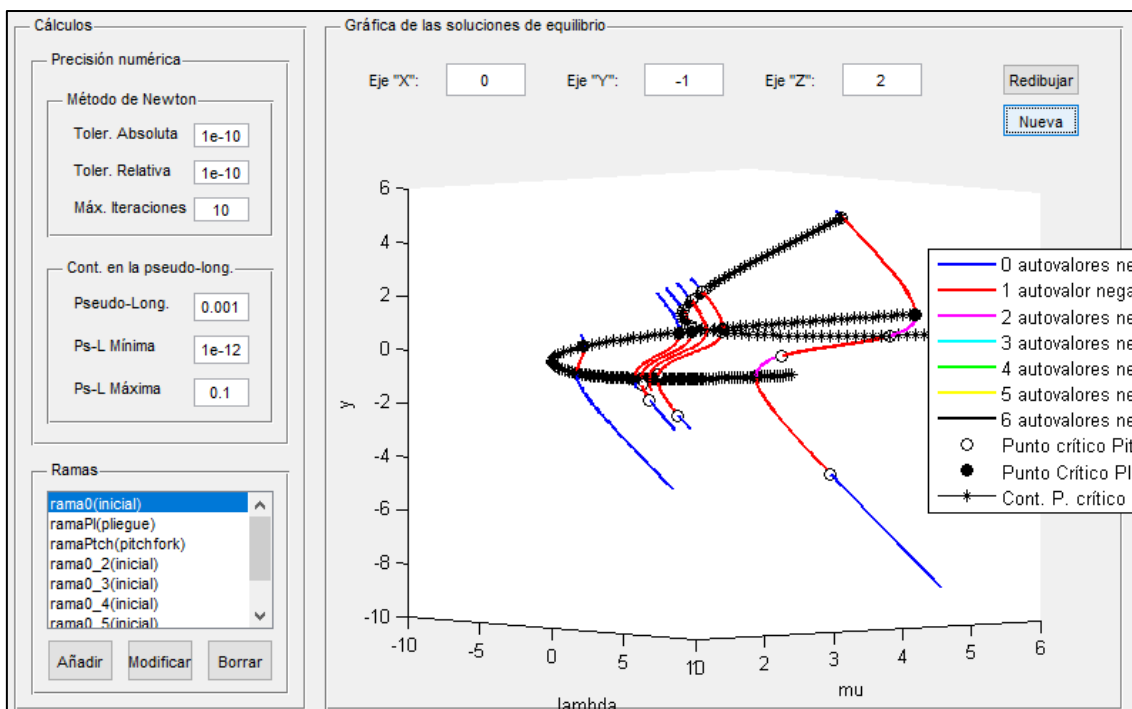
Se incluyen en el mismo directorio que las funciones de Matlab dos ficheros “.mat” que se pueden cargar desde el software y que se tratan de los sistemas que se están estudiando. Sus nombres son “sistema1.mat” y “sistema2.mat”.

5.2.3. Cálculos y Gráfica de las soluciones de equilibrio

Esta sección del programa usa los “datos manipulados” creados una vez aceptado un problema y realiza los cálculos oportunos para realizar cálculos de “ramas de soluciones de equilibrio” de la manera en que se explica.

Consta de los paneles “Cálculos” y “Gráfica de las soluciones de equilibrio”.





En el panel de “Cálculos” estas ramas se definen de manera interactiva y representan la continuación en el parámetro (que se ha elegido como continuado) de las soluciones de equilibrio o la continuación en dos parámetros (el continuado y el constante secundario) de las soluciones de equilibrio con punto crítico.

A medida que se van calculando, estas ramas se van dibujando en una gráfica que se encuentra en el panel a la derecha de éste, llamado “Gráfica de las soluciones de equilibrio”.

Se trata de una gráfica tridimensional en la cual se deben definir las variables que se desean representar en cada eje. Se ha de asignar una variable a cada eje de la gráfica con el siguiente criterio:

- Los números $i=1,2,3,\dots$ hacen referencia a las componentes u_i del vector de grados de libertad \vec{u}
- EL número 0 hace referencia al parámetro continuado
- El número -1 hace referencia al parámetro constante secundario

En el caso de que se cambien los ejes de una determinada gráfica, debe pulsarse el botón “Redibujar”, que vuelve a dibujar todas las ramas calculadas.

El botón “Nueva gráfica” abre la gráfica actual en una nueva ventana, de manera que se pueda visualizar mejor o guardar para su comparación con otra.

La gráfica cuenta con una leyenda que indica el criterio de colores empleado para definir el grado de estabilidad/inestabilidad (número de autovalores negativos) y los puntos que representan los puntos críticos: pliegues y Pitchforks.

En la parte superior del programa existe un menú de herramientas con el que manipular las vistas de la gráfica (zoom, rotación,...) y consultar valores de los puntos, entre otros.



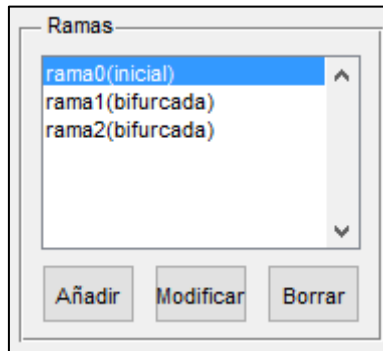
5.2.3.1. Precisión numérica

Para realizar estos cálculos es necesario definir unos criterios de tolerancia, convergencia y pseudo-longitud del arco (cuya formulación ya se ha explicado). Esto se hace en el panel de “Precisión numérica”, en la parte superior del panel “Cálculos”.

Existen unos valores ya introducidos por defecto que son valores típicos: tolerancias (absoluta y relativa): 1e-10; máximo de iteraciones: 10; pseudo-longitud del arco: 0.001; pseudo-longitud del arco máxima: 0.1; pseudo-longitud del arco mínima: 1e-12.

5.2.3.2. Ramas

En la parte inferior, en el panel de “Ramas”, el usuario define de manera interactiva una serie de “ramas” que representan la continuación en el parámetro (que se ha elegido como continuado) de las soluciones de equilibrio o la continuación en dos parámetros (el continuado y el constante secundario) de las soluciones de equilibrio con punto crítico.



El funcionamiento de los botones “Añadir”, “Modificar” y “Borrar” es el mismo que para los datos de entrada.

Para todas las ramas se debe introducir:

- Un nombre, para poder hacer referencia a la misma posteriormente
- Un número de puntos, que es el empleado en el método de continuación que se use

Existen cuatro tipos de rama:

5.2.3.2.1. Rama inicial

Se trata de una “rama de continuación en un parámetro (el continuado) de la solución de equilibrio” cuyo punto (solución de equilibrio) inicial es una solución conocida del sistema, normalmente trivial.

El usuario debe definir:

- El punto (solución de equilibrio) de partida
- Una tangente de partida (dirección de arranque).

Cabe destacar que, tanto el punto como la tangente es el vector “ampliado”, en el espacio de dimensión N (grados de libertad) + 1 (parámetro continuado). Es decir, los vectores $\vec{u}_b = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \lambda \end{bmatrix}$ y \vec{t}_b .

Diagramas de Bifurcación con Interfaz Gráfica

- Caso de sistema 1:

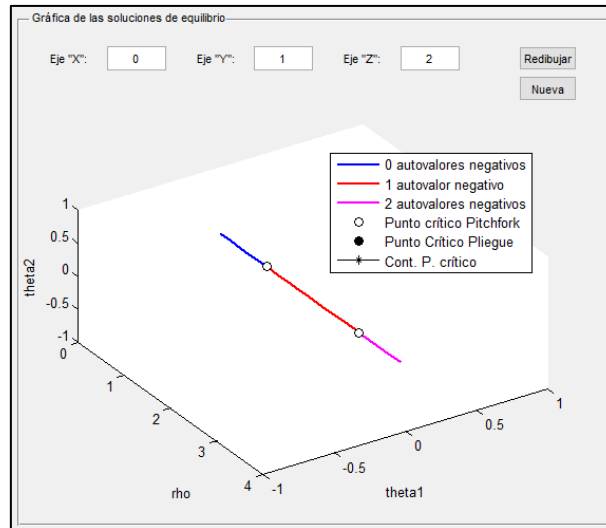
Añadir

Punto inicial Bifurcación Pliegue Pitchfork

Nombre: Número de puntos:

Punto inicial: Tangente de partida:

OK



- Caso de sistema 2:

Añadir

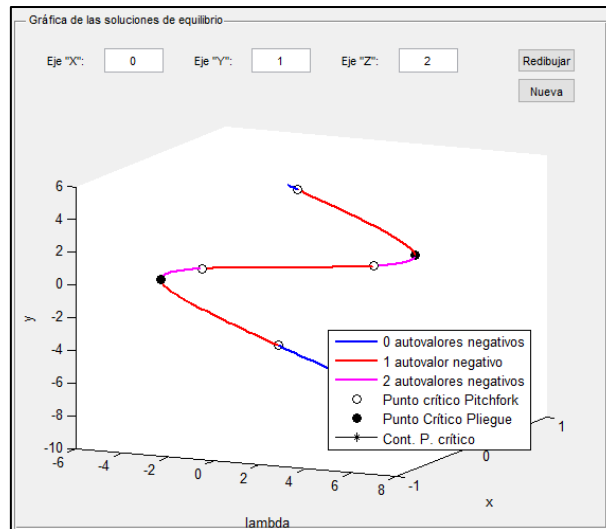
Punto inicial Bifurcación Pliegue Pitchfork

Nombre: Número de puntos:

Punto inicial: Tangente de partida:

OK

Diagramas de Bifurcación con Interfaz Gráfica



5.2.3.2.2. Rama bifurcada

Se trata de una “rama de continuación en un parámetro (el continuado) de la solución de equilibrio” bifurcada de una rama ya calculada, naciendo en un determinado punto crítico (que debe ser tipo Pitchfork u otro, pero no un pliegue) y con una tangente de partida perpendicular a la misma (ya explicado) al que se hace referencia mediante:

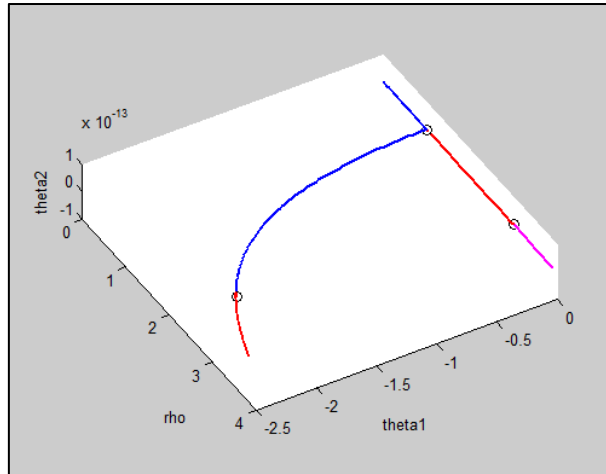
- Rama padre: Nombre de la rama que posee el punto de bifurcación que se quiere usar como inicial.
- Posición de la bifurcación: Contando desde el inicio de la rama padre, el número cardinal que define la posición del punto crítico sobre la misma. Si es positivo se usa la tangente de partida de la bifurcación calculada positiva, y si es negativo es que la tangente es negativa.

- Caso de sistema 1:

Ventana de configuración 'Añadir' con los siguientes campos:

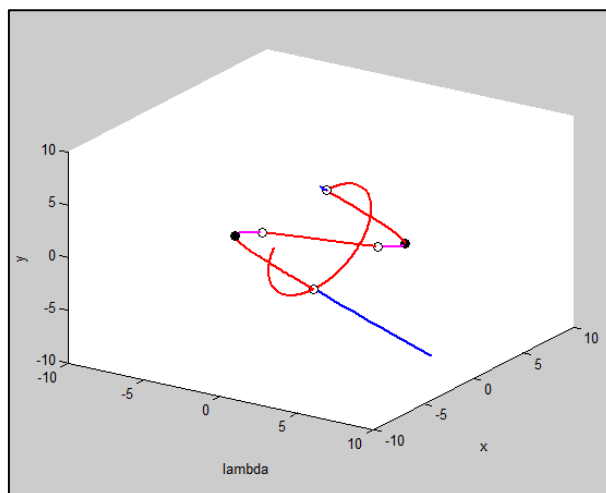
- Radio buttons: Punto inicial, Bifurcación, Pliegue, Pitchfork
- Nombre:
- Número de puntos:
- Punto inicial:
- Tangente de partida:
- Botón:

Diagramas de Bifurcación con Interfaz Gráfica



- Caso de sistema 2:

A screenshot of a dialog box titled "Añadir". It contains four radio buttons: "Punto inicial", "Bifurcación" (which is selected), "Pliegue", and "Pitchfork". Below the radio buttons are four input fields: "Nombre:" with the value "rama1", "Número de puntos:" with the value "400", "Rama padre:" with the value "rama0", and "Posición bifurcación:" with the value "1". At the bottom of the dialog box is an "OK" button.

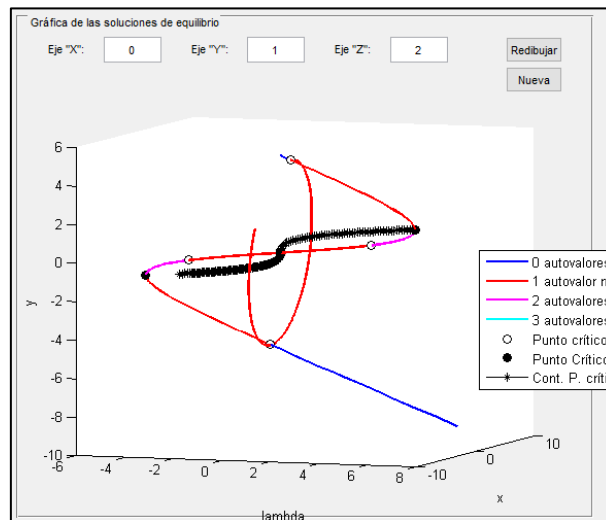
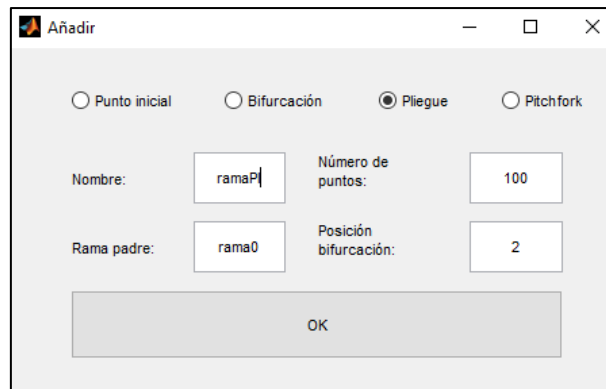


5.2.3.2.3. Rama pliegue

Se trata de una “rama de continuación en dos parámetros (el continuado y el secundario) de la solución de equilibrio en punto crítico tipo pliegue”, naciendo en un determinado punto crítico (que debe ser tipo Pliegue) al que se hace referencia de la misma manera:

- Rama padre: Nombre de la rama que posee el punto de bifurcación que se quiere usar como inicial.
- Posición de la bifurcación: Contando desde el inicio de la rama padre, el número cardinal que define la posición del punto crítico sobre la misma.

Caso de sistema 2 (en el 1 no se producen pliegues ni existe un parámetro secundario):

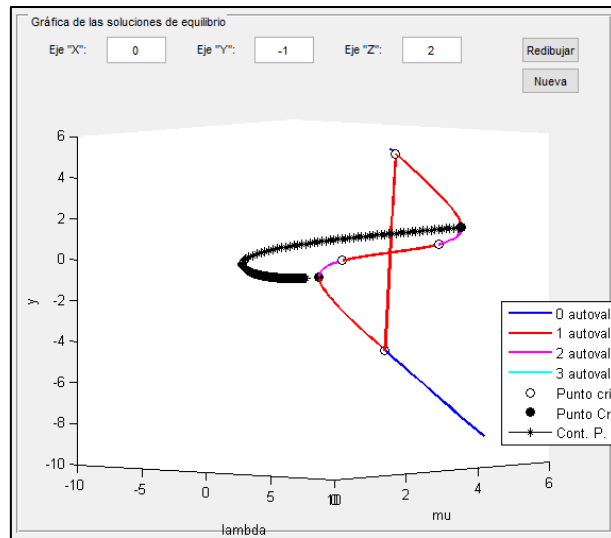


Se observa que no existe un eje asignado al parámetro constante secundario, por lo que la continuación en el mismo aparece proyectada en los grados de libertad representados.

Si quiere asignarse un eje al mismo, debe indicarse en la casilla del eje correspondiente, y pulsarse el botón “Redibujar”.

Usando el eje de las y (que representa la variable x, poca información) para representar este parámetro secundario, se tendría:

Diagramas de Bifurcación con Interfaz Gráfica



Donde se observa que ahora la variable x no tiene ningún eje asociado y aparece proyectada en los demás.

5.2.3.2.4. Rama Pitchfork

Se trata de una “rama de continuación en dos parámetros (el continuado y el secundario) de la solución de equilibrio en punto crítico tipo Pitchfork”, naciendo en un determinado punto crítico (que debe ser tipo Pitchfork) al que se hace referencia de la misma manera que antes.

Caso de sistema 2 (en el 1 no se producen no existe un parámetro secundario):

Añadir

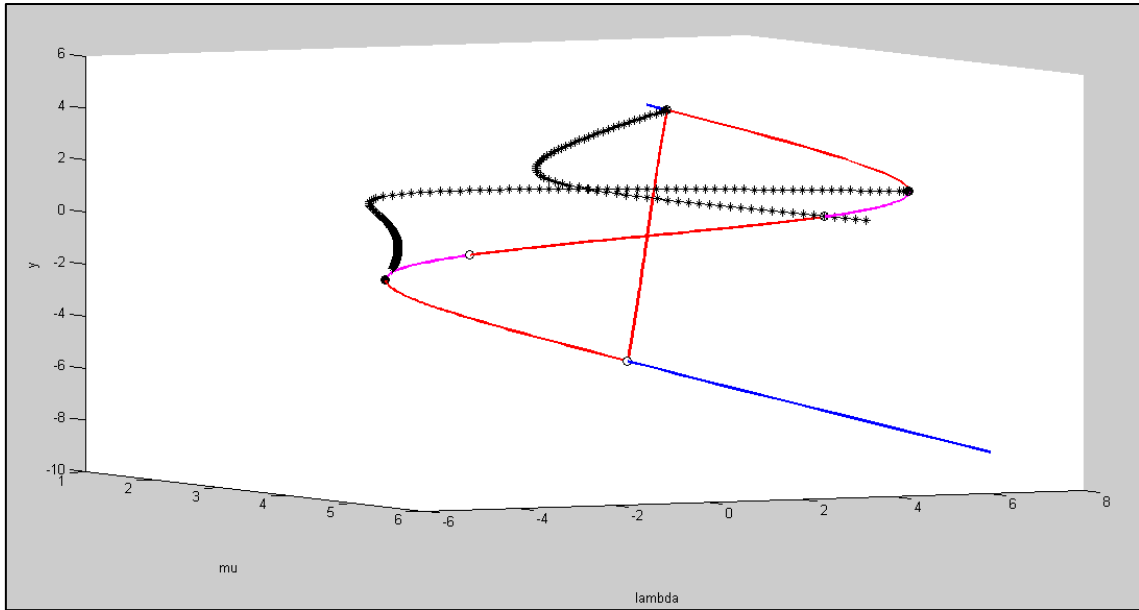
Punto inicial Bifurcación Pliegue Pitchfork

Nombre: ramaPitch Número de puntos: 75

Punto inicial: rama0 Tangente de partida: 1

OK

Detailed description: This is a configuration dialog box titled 'Añadir'. It contains four radio buttons for selecting the type of bifurcation: 'Punto inicial', 'Bifurcación', 'Pliegue', and 'Pitchfork'. The 'Pitchfork' option is selected. Below the radio buttons, there are two rows of input fields. The first row has 'Nombre:' with the value 'ramaPitch' and 'Número de puntos:' with the value '75'. The second row has 'Punto inicial:' with the value 'rama0' and 'Tangente de partida:' with the value '1'. At the bottom of the dialog is an 'OK' button.

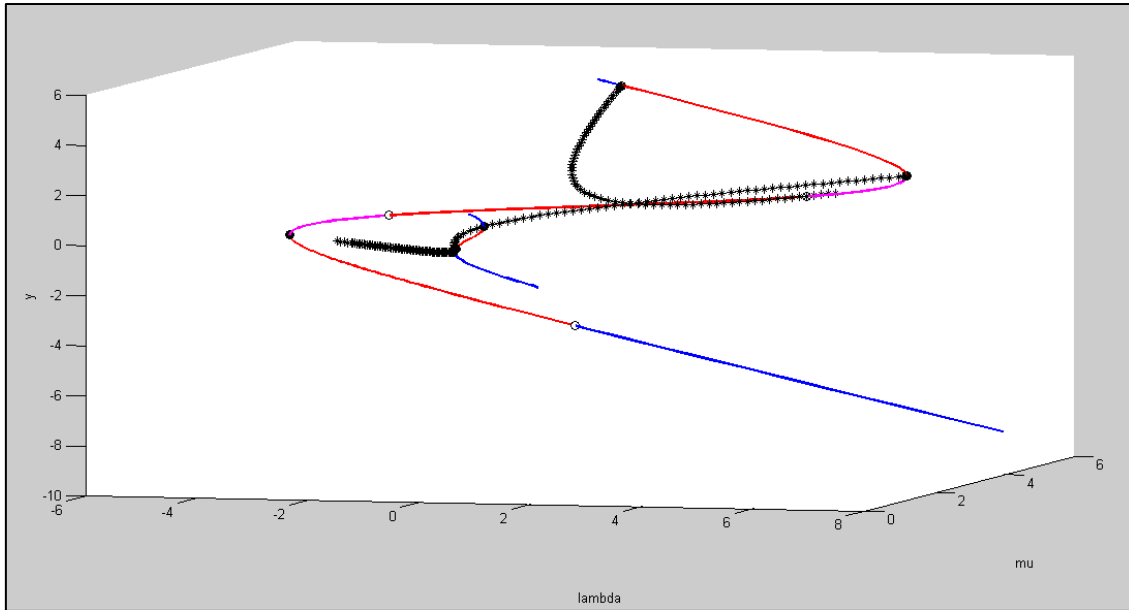


5.2.3.3. *Cambio de valor del parámetro constante secundario*

En caso de que se quieran resolver y comparar problemas con distintos valores del parámetro constante secundario, se debe modificar éste en los datos de entrada:

Pulsarse de nuevo el botón “Aceptar” y crear ramas con este otro valor del parámetro secundario; si no se borran las anteriormente calculadas, se dibujarán encima y se podrán comparar:

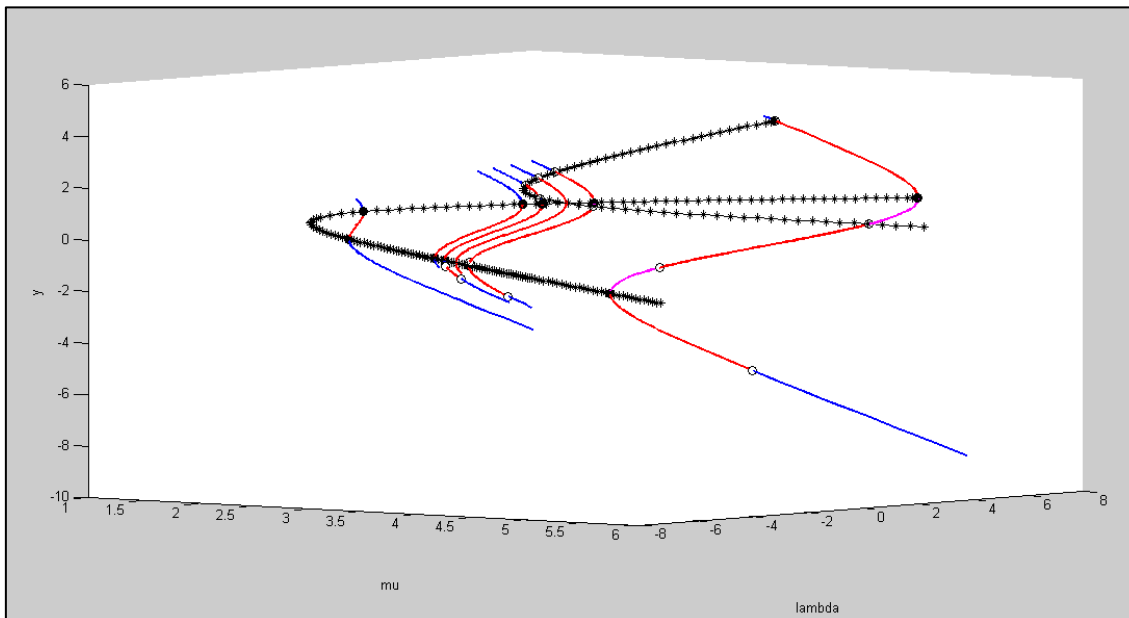
Diagramas de Bifurcación con Interfaz Gráfica



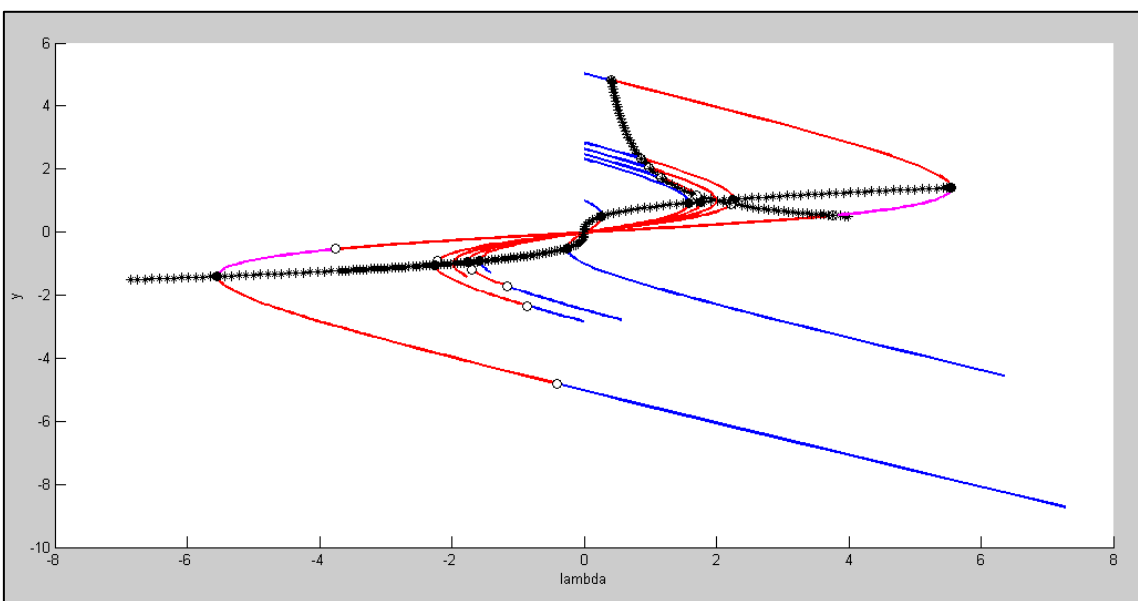
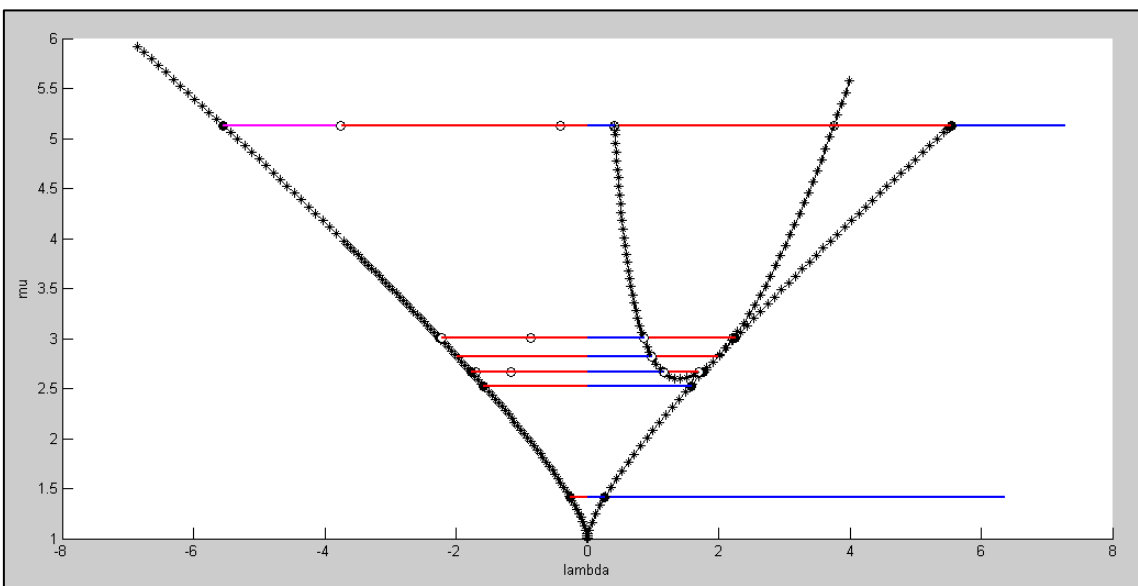
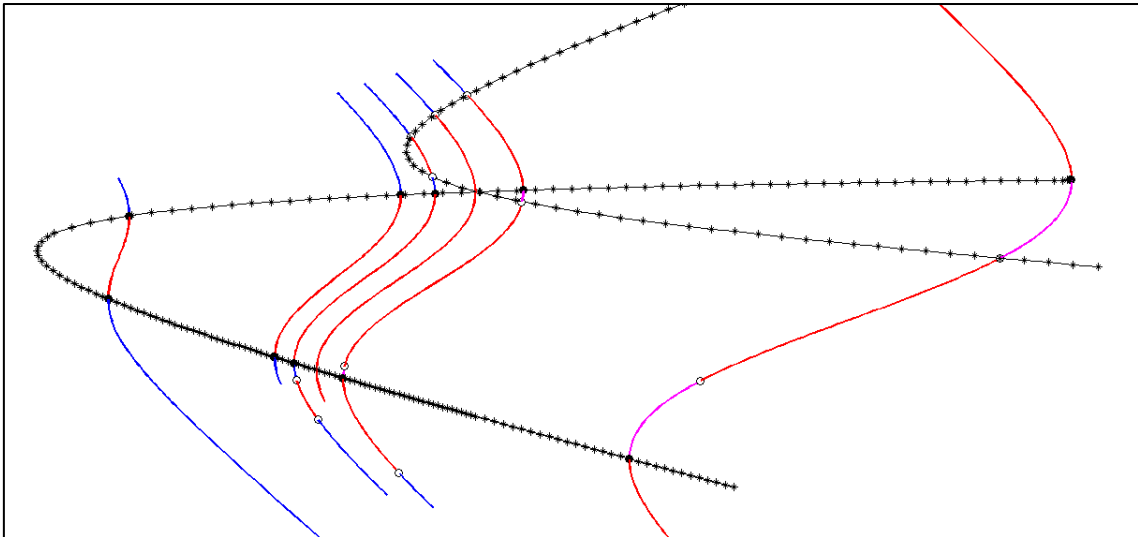
Se observa que la nueva rama calculada para otro valor del parámetro secundario (μ) tiene la misma forma que la anterior pero es bastante distinta en cuanto a estabilidad y puntos críticos.

Se aprecia también la coincidencia de los puntos críticos en esta nueva rama con las ramas de continuación de equilibrio en punto crítico, que se calcularon a partir de la rama original.

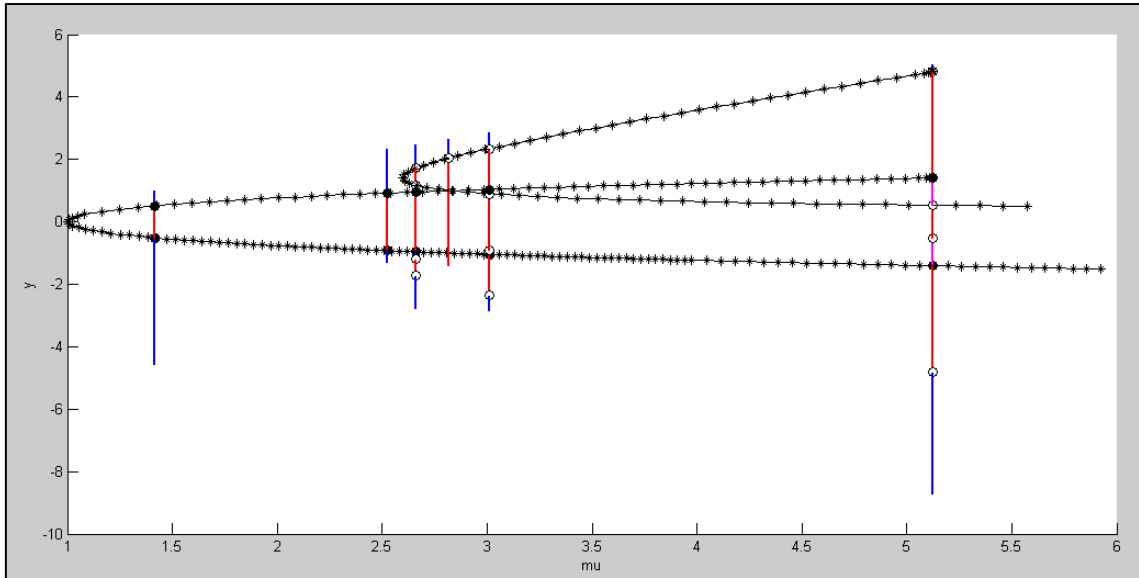
Si se resuelven de esta manera varios problemas con un valor distinto del parámetro secundario se obtiene lo siguiente:



Diagramas de Bifurcación con Interfaz Gráfica



Diagramas de Bifurcación con Interfaz Gráfica



Se vuelve a poner de manifiesto lo anteriormente comentado sobre la misma forma de las distintas ramas pero sus diferencias en cuanto a estabilidad, puntos críticos y coincidencia de estos con las ramas de continuación de equilibrio en punto crítico.

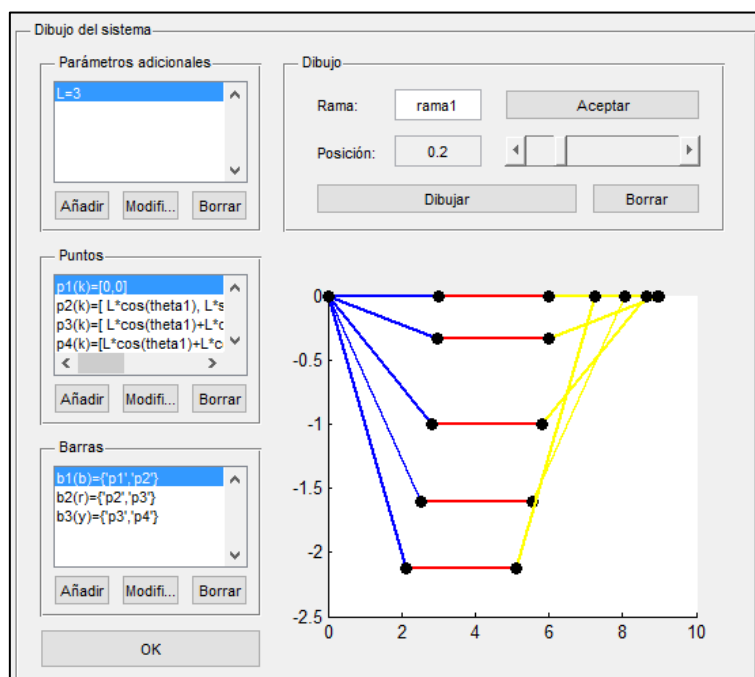
Es posible imaginarse con esta gráfica el aspecto de la superficie de continuación en dos parámetros.

5.2.4. Dibujo del sistema

Por último existe un módulo que sirve para dibujar las distintas soluciones de equilibrio calculadas anteriormente mediante “ramas”.

Este dibujo se realiza a partir de una serie de “puntos” y de “barras” que define el usuario para la representación visual del sistema.

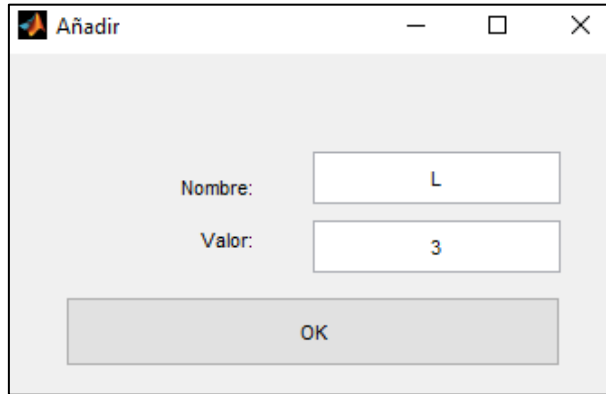
Los datos se introducen en el panel situado abajo a la derecha “Dibujo del sistema”.



Mediante la misma forma de añadir datos vista de los botones “Añadir”, “Modificar” y “Borrar”, se deben introducir los siguientes datos:

5.2.4.1. *Parámetros adicionales*

Serie de valores numéricos que pueden usarse adicionalmente a las variables del problema para representar las coordenadas de los puntos del sistema.



5.2.4.2. *Puntos*

Serie de puntos cuyas coordenadas se pueden poner en función de las variables del problema: grados de libertad y parámetros y, también, los parámetros adicionales introducidos.

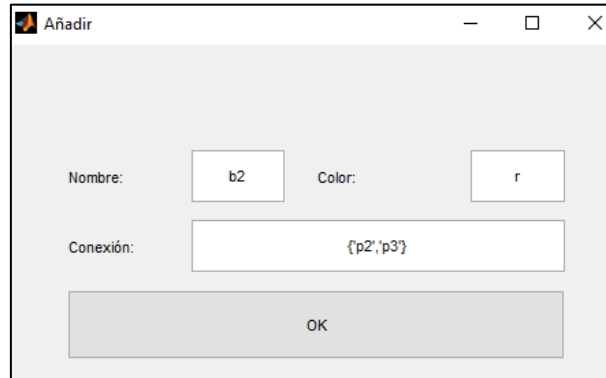


De cada punto debe introducirse:

- Nombre, con el que poder hacer referencia
- Color elegido para su representación visual, en formato de Matlab → azul: b , rojo: r ,...
- Ecuación: vector de dos o tres componentes con las coordenadas del punto en función de:
 - Grados de libertad
 - Parámetros
 - Parámetros adicionales

5.2.4.3. Barras

Serie de barras que unen (cada una) dos puntos de los introducidos.

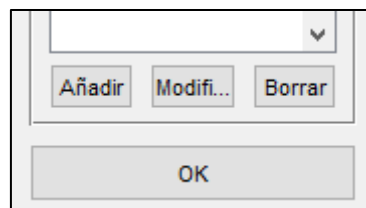


De cada barra debe introducirse:

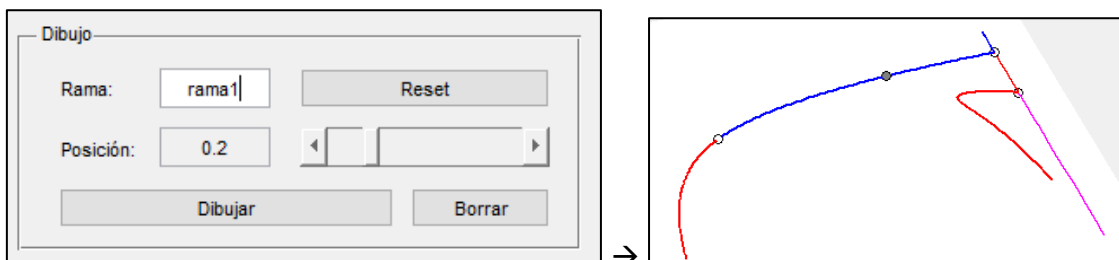
- Nombre, con el que poder hacer referencia
- Color elegido para su representación visual, en formato de Matlab: 'b' (azul), 'r' (rojo),...
- Conectividad: punto inicial y final en formato: {'p1','p2'}

5.2.4.4. Dibujo

Una vez que se han introducido los datos anteriores, debe pulsarse el botón "OK" situado debajo de estos paneles.



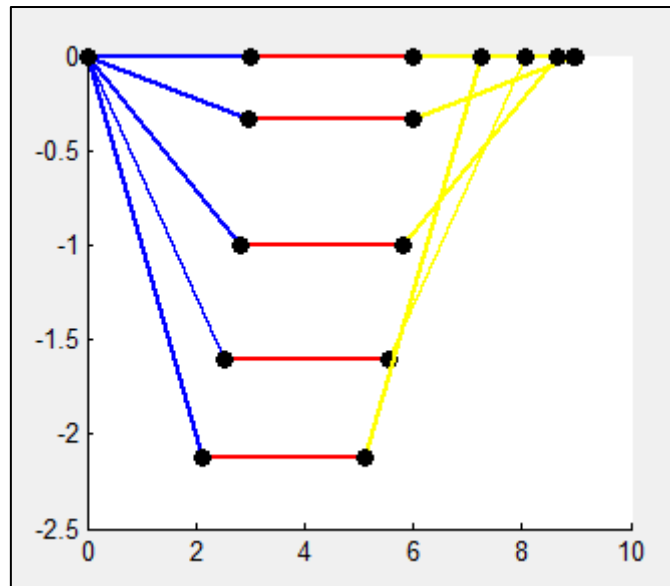
Posteriormente, en el panel "Dibujo", se debe introducir el nombre de una rama que se haya calculado, y seleccionar una posición entre 0% y 100%, que representa el punto de la rama desde su comienzo. En la gráfica de equilibrio aparecerá un punto gris en él, situando gráficamente el punto actual.



Cuando se quiera dibujar el sistema para esa configuración de equilibrio, debe pulsarse el botón "Dibujar", y el mismo se dibujará en la gráfica inferior.

Los sucesivos dibujos se representarán uno encima de otro, a no ser que se pulse el botón "Borrar", que limpiará la gráfica.

El botón "Reset" elimina el punto gris.



5.3. Programación

Para la obtención de los datos de salida, el software explicado trabaja con los datos de entrada introducidos en la interfaz mediante una serie de funciones de Matlab.

Por un lado, existe una función que crea la interfaz gráfica ("interfaz.m"), es decir, la figura y todos sus componentes (campos de texto, listas, botones, gráficas,...).

Mediante la "Programación Orientada a Objetos" (POO), se definen atributos (propiedades) y métodos o "Callbacks" (funciones) de estos elementos, lo que permite la interacción entre ellos: por ejemplo, cuando se pulsa un objeto "botón" se llama a su método (función) que debe tomar los atributos (datos) de ciertos objetos "campo de texto" o "lista", realizar los cálculos pertinentes, y modificar los atributos de otros objetos, por ejemplo dibujar en alguna "gráfica".

Estos cálculos son la implementación en Matlab de la formulación que se ha explicado en los apartados anteriores, como la continuación de la solución de equilibrio en un parámetro, continuación de la solución de equilibrio y punto crítico en dos parámetros, el método de Newton para el cálculo de la solución de equilibrio en un punto, evaluación de la estabilidad,...

En el presente apartado se explican las funciones que realizan estos cálculos numéricos de manera general, es decir:

- Las funciones que existen
- Las tareas que realizan cada una: de manera cualitativa, sin entrar a explicar cada línea de código. No obstante:
 - En cada una se hace referencia al (los) apartado(s) del presente trabajo en donde se explica la formulación relativa a cada función.
 - Al final del trabajo se adjuntan los códigos impresos, de manera que mediante la explicación que se realiza y su consulta se puede tener un conocimiento completo, pues van acompañadas de comentarios que explican cada uno de los pasos.
- La relación entre ellas: La encapsulación de las funciones, de manera que algunas son llamadas por otras para tratar los datos de manera deseada.

Las funciones que definen la interacción entre los elementos de la interfaz cae fuera del alcance del presente trabajo debido a que, a pesar de ser algo fundamental en su desarrollo, haría demasiado extenso el mismo y no es necesaria para comprender nada acerca de la materia que se trabaja. No obstante, ha supuesto una inversión de tiempo y de esfuerzo similar o incluso mayor a las otras partes del trabajo.

5.3.1. Interacción entre las funciones

Se pueden agrupar las funciones que realizan los distintos cálculos en dos grupos fundamentales.

- Funciones de manipulación de los “datos de entrada”: Se trata de funciones que usan los datos de entrada para crear otros datos o “datos manipulados”
- Funciones de cálculo numérico: Trabajan con los “datos manipulados” para calcular los “datos de salida”.

5.3.1.1. *Funciones de manipulación de los datos de entrada*

Como se ha explicado, los datos de entrada hacen referencia a las características del sistema:

- Grados de libertad
- Parámetros
- Ecuaciones de equilibrio (o energía potencial).

Estas funciones manipulan estos datos para obtener a partir de ellos una serie de “datos manipulados”, con los que se trabajan en el cálculo numérico.

Como se ha explicado en el apartado anterior, las técnicas de continuación de las soluciones de equilibrio resuelven mediante el método de Newton, el cual requiere del montaje de una función vectorial y una matricial, que dependiendo del caso, están compuestas por diferentes vectores y matrices. Dependiendo del caso, son las siguientes:

- En la “continuación de la solución de equilibrio en un parámetro en la pseudo-longitud del arco”, como se explica en el **apartado 4.1.2.2**:
 - El vector de ecuaciones de equilibrio: $\vec{f}(\vec{u}, \lambda)$
 - La matriz jacobiana del vector de ecuaciones de equilibrio: $\vec{J}(\vec{u}, \lambda)$
 - La derivada vectorial respecto al parámetro continuado del vector de ecuaciones de equilibrio: $\vec{J}_\lambda(\vec{u}, \lambda)$
 - En este caso, las funciones deben depender de:
 - Los grados de libertad \vec{u}
 - El parámetro continuado λ
- En la “continuación de la solución de equilibrio en punto crítico tipo Pliegue en dos parámetros en la pseudo-longitud del arco”, como se explica en el apartado **apartado 4.2.1.3**:
 - El vector de ecuaciones de equilibrio: $\vec{f}(\vec{u}, \lambda)$
 - La matriz jacobiana del vector de ecuaciones de equilibrio: $\vec{J}(\vec{u}, \lambda)$
 - La derivada vectorial respecto al parámetro continuado (λ) del vector de ecuaciones de equilibrio: $\vec{J}_\lambda(\vec{u}, \lambda)$

- La derivada vectorial respecto al parámetro secundario (μ) del vector de ecuaciones de equilibrio: $\vec{J}_\mu(\vec{u}, \lambda)$
- La matriz $\vec{J}\vec{J}(\vec{u}, \vec{w})$, que es la matriz jacobiana respecto a \vec{u} y \vec{w} del vector:

$$\vec{J}\vec{J}(\vec{u}, \vec{w}) = \vec{J}(\vec{u}) \cdot \vec{w}$$
- Y los vectores $\vec{J}\vec{J}_\lambda(\vec{u}, \vec{w})$ y $\vec{J}\vec{J}_\mu(\vec{u}, \vec{w})$ serían las derivadas (vectoriales) respecto a λ y μ , respectivamente, de este mismo vector.
- En este caso, las funciones deben depender de:
 - Los grados de libertad \vec{u}
 - El parámetro continuado λ
 - El autovector \vec{w}
- En la “continuación de la solución de equilibrio en punto crítico tipo Pitchfork en dos parámetros en la pseudo-longitud del arco”, como se explica en el apartado **apartado 4.2.2:**
 - Las mismas funciones que en el caso anterior, pero esta vez en función de una variable más: σ

También es necesaria la definición de los valores iniciales de las variables, habiéndose explicado en los apartados dichos la metodología en cada caso.

Para la obtención de las funciones explicadas, se crean las siguientes funciones:

- “*datosManipulacion.m*”
- “*datosManipulacion_bif.m*”
- “*datosManipulacion_bifSigma.m*”

Que, a partir de los datos de entrada, calculan (respectivamente) las funciones explicadas para los tres tipos de continuaciones.

La manera de trabajar de estas funciones se puede dividir dos en fases:

5.3.1.1.1. Obtención de funciones genéricas

En primer lugar deben transformarse las variables introducidas (grados de libertad y parámetros) y las ecuaciones de equilibrio en función de estas a un formato genérico, debido a que los nombres asignados a estas variables por el usuario son cadenas de texto cualquiera.

La nomenclatura de estas variables será la misma empleada en el apartado en el que se explica la resolución numérica, es decir:

- Grados de libertad: Vector \vec{u}
- Parámetro continuado: Variable λ
- Parámetro constante secundario: Variable μ
- Parámetros constantes: Vector \vec{p}

La transformación de las funciones se realiza mediante una serie de funciones de Matlab:

- Funciones de manipulación de cadenas de texto: Permiten reemplazar determinadas cadenas de texto (variables del usuario) dentro de una cadena mayor (función del usuario, en función de las variables del usuario) por otras cadenas (variables genéricas), de manera que se obtiene la cadena de texto mayor modificada (función genérica, en función de las variables genéricas).

- Funciones de conversión de cadenas de texto a funciones de Matlab: Permiten crear una función a partir de una cadena de texto que incluya la expresión matemática correspondiente.

5.3.1.1.2. Cálculo simbólico con las funciones genéricas

Una vez que se dispone de la expresión simbólica en Matlab del vector de ecuaciones de equilibrio en función de las variables genéricas, se puede trabajar de manera genérica con ella.

Matlab dispone de un “ToolBox” de manipulación simbólica que permite el cálculo diferencial de funciones.

Por tanto, a partir de la expresión del vector de ecuaciones de equilibrio:

$$\vec{f}(\vec{u}; \lambda; \mu; \vec{p})$$

Se utiliza el cálculo simbólico diferencial con vectores y matrices para obtener las derivadas que se han explicado.

También se crean las funciones en función de las nuevas variables (dependiendo del caso: \vec{w} y σ).

5.3.1.2. Funciones de cálculo numérico

Una vez que se dispone de las funciones vectoriales y matriciales necesarias para la implementación de los métodos de continuación de las soluciones de equilibrio, que se implementan mediante el método de Newton, deben implementarse éstos.

Como se ha comentado, existen cuatro tipos de ramas. En el cálculo de las mismas, a partir de los datos de entrada que introduce el usuario, se emplean las siguientes funciones:

5.3.1.2.1. Caso de rama continuación de equilibrio en un parámetro con punto inicial

Continuación

Existe una función: “*continuapseudo2.m*” que implementa el método de continuación explicado en el **apartado 4.1.2**.

Toma como datos de entrada:

- El vector de ecuaciones de equilibrio y su matriz jacobiana (en función de las variables explicadas), de los “datos manipulados”.
- El punto inicial, la tangente de partida y el número de puntos a calcular, que son “datos de entrada”.
- Los criterios de tolerancia y convergencia explicados.

Y devuelve las coordenadas \vec{u}, λ de las soluciones de la rama.

Esta función se sirve a su vez de otra, “*método_newton_sp2.m*” que monta y resuelve el método de Newton para la pseudo-longitud de arco, explicado también en el **apartado 4.1.2**.

Estabilidad

Cuando se ha calculado una rama de equilibrio, se emplea la función “*estabilidad3.m*”:

La formulación que implementa esta función es la explicada en el **apartado 4.1.3**, y realiza las siguientes tareas;

- Evaluar la estabilidad en cada uno de sus puntos
- Entre aquellos que se produzca un cambio de estabilidad, calcular con precisión el punto crítico, mediante la función "*biseccion_bifurcacion2.m*" (que implementa el método de bisección-bifurcación explicado en el apartado) así como:
 - Su tipo
 - Su dimensión: número de autovalores que cambian de signo. Y en el caso de dimensión 1:
 - Tangente de partida para una rama bifurcada
 - Autovalor que se hace nulo y autovector asociado

Esta función toma como datos de entrada la rama calculada por la función anterior y la matriz jacobiana del vector de ecuaciones de equilibrio.

Devuelve una estructura de datos que engloba los datos relativos a la solución de equilibrio y su estabilidad.

Gráfica

Por último, una función ("*grafica33.m*") se encarga de representar gráficamente la rama calculada, en los ejes que el usuario define, indicando la estabilidad (número de autovalores positivos) en cada punto, así como los puntos críticos.

5.3.1.2.2. Caso de rama de continuación de equilibrio en un parámetro bifurcada de otra

Se usan exactamente las mismas funciones que en el caso anterior. Sin embargo, se necesita un punto de partida y una dirección de arranque. Para obtener este valor, se consulta la estructura de datos relativa a la "rama padre" y se toman los valores correspondientes al punto crítico en cuestión. Estos valores se calcularon cuando se calculó la rama padre, de la manera en que se ha explicado.

5.3.1.2.3. Caso de rama de continuación de equilibrio en punto crítico en dos parámetros

Como se sabe (**apartado 4.2**), dependiendo de si se trata un Pliege o un Pitchfork, la formulación de la continuación es ligeramente distinta (**apartados 4.2.1 y 4.2.2**), por lo que existe una función para cada tipo:

- Tipo Pliege: "*continuapseudo2_bifx.m*"
- Tipo Pitchfork: "*continuapseudo2_bifxSigma.m*"

Toman como datos de entrada:

- El vector de ecuaciones de equilibrio y su matriz jacobiana, y el resto de vectores y matrices necesarios para este método, que se han explicado (en función de las variables explicadas) de los "datos manipulados".
- El punto inicial, la tangente de partida y el número de puntos a calcular, que son "datos de entrada".
- Los criterios de tolerancia y convergencia explicados.

Y devuelve las coordenadas \vec{u} , λ , μ de las soluciones de la rama.

Estas funciones se sirven a su vez de otras, respectivamente "*metodo_newton_sp2_bifx.m*" y "*metodo_newton_sp2_bifxSigma.m*" que monta y resuelve el método de Newton para la pseudo-longitud de arco, explicado en los **apartados 4.2.1 y 4.2.2**.

En este caso no existe una función que evalúe la estabilidad de la rama, ya que se sabe que se trata de un punto crítico.

Existe otra función ("*grafica33_bif.m*") que, al igual que en el caso anterior, realiza la gráfica de la rama en cuestión.

6. Conclusiones

Por un lado, se podría destacar lo sencilla que se ha conseguido hacer la resolución de problemas de equilibrio, estabilidad, puntos críticos y bifurcaciones, pues se permite al usuario definir un sistema de una manera visual y sencilla, mediante el mínimo número posible de datos de entrada, dejando al programa el resto de operaciones que no sean imprescindibles de realizar por el usuario.

Como se ha comentado, la interactividad que ofrece la interfaz gráfica es especialmente ventajosa en los problemas de continuación, debido a que tienen un alto carácter interactivo, en el sentido de que se pueden continuar varias ramas en un sistema partiendo de puntos distintos, con direcciones distintas, continuar ramas que bifurcan de otras, cambiar ciertos parámetros del sistema y comparar con resultados anteriores,... También la consulta e interpretación de datos mediante gráficas dota al problema de este elevado carácter interactivo.

Como contrapartida se podría comentar que no se trata de un software adecuado para sistemas con un número muy elevado de grados de libertad. Esto es debido a que no son apropiados para este fin ni la manera en que se introducen los datos (cadenas de texto individuales) ni su manipulación (mediante herramientas de manipulación de cadenas de texto y de cálculo simbólico), haciendo el proceso de introducción de los datos demasiado tedioso y suponiendo un mayor tiempo de computación. Sin embargo, en cuanto a la aplicación para la que se ha concebido presenta ventajas en cuanto a los aspectos comentados.

También cabe destacar, como ya se ha comentado, que no se realiza una explicación detallada del código de las distintas funciones, de la manera en que se programa la interfaz y en que se trabaja con estructuras de datos, que si bien han sido imprescindibles y han requerido un esfuerzo similar al resto del trabajo, es prescindible para entender los aspectos que conciernen al trabajo y haría este demasiado extenso.

Por último, comentar que, aunque no ha sido parte de este trabajo, sería interesante el uso del programa elaborado para el análisis (y la correspondiente obtención de conclusiones) de diferentes tipos de sistemas en cuanto a soluciones de equilibrio y estabilidad, sensibilidad en la variación de parámetros,... ya sea con carácter académico o de investigación.

7. Líneas futuras

En primer lugar, se podrían perfeccionar varios aspectos de lo que ya se ha desarrollado, que irían en dos líneas:

La primera, en el sentido de implementar una ayuda y una prueba de errores estricta que sirva de guía al usuario en los primeros usos y permita la rápida familiarización con el programa.

La segunda, con referencia al aspecto de la interfaz y la presentación de resultados, pudiéndose incluir de manera dinámica (solicitada por el usuario) información de la estabilidad (autovalores) de cada uno de los puntos, e información detallada de cada punto crítico (autovalor(es) que se hace(n) cero, dirección de autovector(es) asociado(s),...).

Por otra parte, existe una inmensa cantidad de ampliaciones a las que se podría someter el software elaborado, comentando la más inmediata, que podría ser, una vez resuelto el problema de equilibrio, la obtención del plano de fase, introduciendo la variable (hasta ahora ausente) temporal y la consiguiente integración para obtener las soluciones.

8. Bibliografía

D. W. Jordan & P. Smith (1999) – *Nonlinear Ordinary Differential Equations: An introduction to Dynamical Systems*, Third Edition. Oxford

Yuri A. Kuznetsov (1995). *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag

K. A. Cliffe, A. Spence and S. J. Tavener (2000). *The numerical analysis of bifurcation problems with application to fluid mechanics*. Acta Numerica 2000, 9, pp 39-131

A. G. Salinger, E. A. Burroughs, R. P. Pawlowski, E. T. Phipps & L. A. Romero (2004). *Bifurcation tracking algorithms and software for large scale applications* – International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 15, No 1 (2005) 1015-1032