

PRÁCTICA CON MATLAB EN ÁLGEBRA LINEAL EN INGENIERÍA INDUSTRIAL

*M. Dasullor Guzmán
M. D. Contreras
M. Heredia Zapata
A. López Armenteros
J. Oliveros Troncoso*

RESUMEN

En este trabajo, presentamos las principales líneas del desarrollo de la práctica con el programa MATLAB realizada en la Escuela Superior de Ingenieros en la asignatura Álgebra Lineal. Esta experiencia ha sido financiada por el I.C.E. de la Universidad de Sevilla.

ABSTRACT

In this paper, we describe the main ideas of the development of the practice with MATLAB realized in the Engineering Higher School in the subject Linear Algebra. This experience has been supported by the Educational Science Institute of the University of Sevilla.

INTRODUCCIÓN

La irrupción en la Comunidad Educativa de sistemas de computación algebraica, que pueden realizar cálculos muy complicados, junto con el desarrollo espectacular de las capacidades de los ordenadores personales, hacen conveniente una revisión crítica de la enseñanza de las matemáticas, especialmente en la forma de transmitir y organizar sus contenidos. Es importante hacer notar que nos enfrentamos a una de las ramas de la enseñanza con mayor fracaso escolar. Es por ello por lo que creemos prioritario el análisis de nuevas ideas que aporten luz sobre este problema.

De aquí surge la razón para la actividad de innovación realizada en la asignatura de Álgebra Lineal del primer curso de Ingenieros Industriales.

Las matemáticas proporcionan un lenguaje común a gran parte de la ciencia y la ingeniería. Las matrices, ecuaciones diferenciales y el estudio gráfico de funciones son los bloques de construcción básicos de las matemáticas aplicadas. En todos estos puntos pone especial énfasis el paquete MATLAB.

La primera versión de MATLAB, escrita en la Universidad de New México y en la Universidad de Stanford a finales de los años 70, tenía como finalidad utilizarse en cursos de teoría de matrices álgebra lineal y análisis numérico. Hoy en día, las capacidades de MATLAB se extienden mucho más allá del original "laboratorio de matrices".

Como se indica en la guía del usuario (ver The Mathworks Inc. (1995)), la manera más fácil de visualizar MATLAB es pensar en él como una calculadora totalmente equipada. Comparando con los diferentes tipos de calculadoras que solemos usar, se tiene que MATLAB realiza operaciones

con los diferentes tipos de calculadoras que solemos usar, se tiene que MATLAB realiza operaciones simples tales como suma, resta, multiplicación y división al igual que una calculadora básica. Como una calculadora científica, maneja números complejos, logaritmos y operaciones trigonométricas. Al igual que una calculadora programable, puede almacenar y recuperar datos; puede crear, ejecutar y guardar secuencias de órdenes para automatizar el cálculo de ecuaciones importantes; puede hacer comparaciones lógicas y controlar la secuencia en que se ejecutan las órdenes. De la misma forma que las calculadoras más potentes que hay disponibles, permite representar gráficamente los datos en una gran variedad de formas, ejecutar álgebra matricial, manipular polinomios, integrar funciones y manipular simbólicamente ecuaciones, etc.

En realidad, MATLAB ofrece muchas más características. Es una herramienta para hacer cálculos matemáticos. Es un lenguaje de programación con características muy avanzadas y fácil de usar. Proporciona grandes facilidades para la visualización de datos a través de sus poderosas capacidades gráficas.

MATLAB es un sistema interactivo y un lenguaje de programación para cálculos técnicos científicos en general. Permite la solución de muchos problemas numéricos en una pequeña fracción del tiempo que llevaría un programa en un lenguaje como Fortran, Basic e incluso en lenguaje C. A esta gran ventaja hay que añadir que las soluciones del problema se expresan en MATLAB de una manera muy similar a como se escriben matemáticamente. Estas consideraciones hacen que en un gran parte de las asignaturas que se imparten en la Escuela Superior de Ingenieros de la Universidad de Sevilla se esté utilizando el programa MATLAB como apoyo didáctico y que muchos ingenieros ya estén utilizando actualmente en las empresas donde están trabajando.

Cientos de universidades de todo el mundo están incorporando el programa MATLAB para actividades de innovación pedagógica y, en concreto, en asignaturas cuyo contenido es álgebra lineal. Esto ocurre, por ejemplo, en las Universidades de Michigan, California, Washington, Purdue, etc. En éstas los campos de aplicación son tan distantes como la creación de textos de referencia sobre MATLAB, aplicaciones a los sistemas de control automático, a la simulación y estudio de fenómenos geofísicos (como, por ejemplo, terremotos) o al estudio de la geometría del espacio. En este orden de ideas, creemos necesaria la incorporación de esta herramienta en el plan de estudios de la titulación de Ingeniería Industrial que se implantará próximamente en la Escuela Superior de Ingenieros de la Universidad de Sevilla.

Muchos de los libros de reciente aparición sobre álgebra lineal para estudiantes de ingeniería incorporan lecciones sobre este programa. Incluso la mayoría de las editoriales están sacando a la luz nuevas ediciones de textos de hace algunos años con la finalidad de incluir ejemplos y ejercicios con el programa, como por ejemplo el de Grossman (1996). En ellos se utiliza tanto como un herramienta para motivar resultados como para mostrar la fuerza que posee para la resolución de determinados problemas matemáticos.

Otra de las grandes ventajas, nada despreciable, de este programa es que existen versiones del programa MATLAB muy asequibles para el alumno ya que tienen un costo muy bajo y no necesitan un gran ordenador para que funcione el programa.

1. OBJETIVOS

Como queda dicho en el apartado anterior, la finalidad primera del programa MATLAB es su aplicación a los cursos de teoría de matrices, que es fundamentalmente el contenido de nuestra asignatura Álgebra Lineal. Es decir, nos planteamos aprovechar esta Práctica para ir calibrando las posibilidades de introducir el programa MATLAB de una manera sistemática en la metodología

de la asignatura en cursos venideros, coincidiendo con la reducción de horas lectivas que los nuevos planes de estudio le asignan al álgebra. Seguramente sea la manera de adaptarse a esa nueva situación, pues el uso de esta "poderosa herramienta" ahorrará mucho tiempo del que actualmente se dedica a los cálculos.

Este "objetivo" está enfocado desde el punto de vista del profesor. Para el alumno, los verdaderos objetivos que nos propusimos con esta Práctica fueron:

1. Poner en práctica la teoría estudiada en la asignatura.
2. Iniciarse en las posibilidades que MATLAB ofrece en la resolución de una amplia variedad de problemas relacionados con la Ingeniería.
3. Tener contacto con el Centro de Cálculo de la Escuela.

2. METODOLOGÍA

Lógicamente, la metodología seguida en esta Práctica está condicionada por el gran número de alumnos a los que va dirigida (aproximadamente los seiscientos alumnos de primer curso de Ingeniería Industrial, distribuidos en seis grupos). Eso hace que no se pueda impartir con un ordenador para cada alumno. La concebimos, pues, con una metodología compuesta de sesiones colectivas (con un ordenador en la mesa del profesor cuyas imágenes del monitor se proyectan en una pantalla grande), y prácticas individuales con ordenador (en el Centro de Cálculo de la Escuela).

A este respecto hay que comentar que la Escuela Superior de Ingenieros dispone de dos aulas equipadas con un "cañón" que proyecta sobre una pantalla grande las imágenes del monitor de un ordenador situado en la mesa del profesor. Y dispone también de un Centro de Cálculo, compuesto por varias salas con un número suficiente de ordenadores personales, al que todos los alumnos tienen acceso libre durante toda la jornada.

Para el desarrollo de la Práctica, elaboramos un guión con los contenidos que íbamos a impartir y una relación de ejercicios correspondientes. El alumno disponía de ellos con anterioridad a la exposición del profesor en las aulas antes mencionadas.

Hemos tenido seis sesiones de una hora cada una con una frecuencia de una sesión semanal. En ellas el alumno veía en la pantalla la exposición del profesor y, posteriormente, disponía de una semana para acceder al Centro de Cálculo con el objeto de trabajar personalmente y consolidar los conocimientos adquiridos. Cada alumno lo hacía a la hora que más le interesaba y avanzaba al ritmo que se imponía él mismo. Naturalmente, el alumno podía consultar a su profesor las dudas que le surgieran en el horario de tutoría establecido.

Para la gran mayoría de nuestros alumnos, que es el primer año que están en la Escuela, esta Práctica les ha servido, además, para conocer este Centro de Cálculo del que se van a servir repetidamente a lo largo de su carrera.

3. EVALUACIÓN

Al tratarse de una actividad de innovación no hemos considerado oportuno en una primera fase darle un carácter obligatorio. No obstante, para incentivar el interés del alumno, se efectuó un examen con carácter voluntario, de manera que aquél que obtuviera la calificación de APTO vería incrementada su nota final en 0.5 puntos.

Este examen constó de dos ejercicios, que el alumno realizó en un ordenador del Centro de Cálculo bajo la supervisión de un profesor de la asignatura, de forma que su evaluación se hizo en ese momento observando los resultados obtenidos en pantalla. Para facilitar una evaluación más

completa de los contenidos, uno de los ejercicios incidía en los aspectos de cálculo y el otro incluía una representación gráfica.

Con este planteamiento, realizaron el examen 206 alumnos de los que 184 obtuvieron la calificación de APTO.

4. DESARROLLO

Si nuestro interés se centraba en que el alumno sacara provecho del curso, era imprescindible exponer los contenidos de una forma escalonada, es decir, empezar por lo más básico e ir, de modo gradual, aumentando el nivel. Con esta idea y, ayudados por los textos de K. Sigmon (1989) y D.M. Etter (1993), desarrollamos la experiencia que resumimos a continuación.

Nuestra *primera sesión* estuvo dedicada a la introducción de números y matrices. Para ello analizamos las matrices que están disponibles en MATLAB y a las que se pueden acceder fácilmente. Si la matriz con la que trabajamos en un determinado momento no la posee MATLAB, entonces es necesario construirla. Así que dimos diversas maneras de poder conseguir la matriz deseada. De esta forma, cada alumno puede optar en cada caso por el método que resulte más cómodo. Además vimos cómo se puede operar con las matrices; las operaciones habituales (adición, sustracción, multiplicación, potenciación, traspuesta conjugada y división) se realizan de una manera fácil con MATLAB.

En las clases teóricas de la asignatura (y desde el comienzo del curso), dada una matriz, hemos intentado sacar de ella la mayor información posible: hemos conseguido su inversa y su pseudoinversa, hemos obtenido diversas factorizaciones, hemos visto si la matriz era diagonalizable estudiando sus autovalores y un sinnúmero de resultados más. Por eso, el siguiente paso que nos planteamos fue hacer llegar al alumno muchas de las funciones a las que podemos acceder con MATLAB y que nos permiten conseguir todos estos resultados que antes habíamos hecho con lápiz y papel.

La *segunda sesión* se centró en explicar cómo "crear" nuevas funciones y guardar determinadas informaciones utilizando los archivos.m. Para crear nuevas funciones accesibles para MATLAB hay que elaborar programas, y esto nos llevó a exponer los bucles *for*, *while* e *if-else*. Todo esto nos permite fabricar gran cantidad de funciones y utilizarlas al igual que otras funciones de MATLAB.

La primera aplicación de los contenidos teóricos expuestos en la asignatura de Álgebra la dimos en la *tercera sesión*. Analizamos la descomposición en valores singulares de una matriz y vimos cómo se puede aplicar esta descomposición en el almacenamiento y transmisión de fotografías. La descripción de la sesión queda plasmada al final de esta sección y está basada en el texto de Noble y Daniel (1989).

La *cuarta sesión* la dedicamos a la implementación en MATLAB de diversos métodos iterativos para resolver de forma numérica un sistema de ecuaciones lineales. Dichos métodos consisten en construir, a partir de un vector inicial, una sucesión de vectores que aproximan la solución del sistema. Como el número de operaciones a realizar para resolver un sistema de ecuaciones lineales por estos métodos es muy grande, creímos necesario impartir esta sesión. Construimos programas que nos permiten efectuar las iteraciones de una manera fácil y rápida, así como observar la convergencia o divergencia de la sucesión generada y obteniendo en cada situación las conclusiones apropiadas.

En la *quinta sesión*, hicimos uso de la excelente capacidad de MATLAB para producir gráficos planos. Explicamos cómo hacer una gráfica de una determinada función o, incluso, varias gráficas de distintas funciones a la vez, permitiéndonos esto el poder compararlas. Además, vimos cómo construir, a partir de una tabla de datos, las rectas de regresión estudiadas por el alumno (la de

sobre y , la de y sobre x y la generalizada) comprobando cuál de las tres era la que mejor se adaptaba a los datos iniciales dados.

Dedicamos la *sexta* y última *sesión* a mostrar algunas de las posibilidades de MATLAB para obtener gráficas de funciones de dos variables. Todo esto permitió que el alumno tuviera una imagen espacial de una superficie de una forma fácil, cómoda y más exacta que la que se puede conseguir a través de explicaciones en la pizarra.

DESCRIPCIÓN DE LA TERCERA SESIÓN

El ejercicio consistía en almacenar con el menor costo de memoria posible una fotografía que representaba una cruz. El primer paso fue discretizar la fotografía, obteniendo la siguiente figura.

A partir de aquí, se construyó una matriz A que reflejaba la figura discretizada, formada por unos y ceros, donde un 1 indicaba un cuadrado negro y un 0 un cuadrado blanco. Esta matriz se almacenó en un archivo llamado *datos.m*. Si la matriz A tiene m filas y n columnas, para guardarla necesitamos mn datos. Para dimensiones grandes este número es elevado, por ello, nos interesa sustituirla por una matriz que no sea muy diferente a la de partida, pero que su almacenamiento requiera menos memoria. Se intentará hacer esta sustitución de manera que los errores cometidos sean los menores posibles. Para ello utilizamos el siguiente resultado:

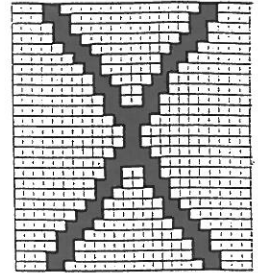


IMAGEN DISCRETIZADA

Teorema Sea $A=VSU$ una descomposición en valores singulares de A , donde S es una matriz del mismo rango que A con ceros fuera de la diagonal y cuyos elementos diagonales son los valores singulares de A colocados en orden decreciente y las matrices U y V unitarias. Tomemos $A(k)=V(k)S(k)U(k)$ donde $V(k)$ está formada por las k primeras columnas de V , $S(k)$ por las k primeras columnas y las k primeras filas de S y $U(k)$ por las k primeras filas de U . Se tiene que la matriz $A(k)$ es, de todas las matrices de rango menor o igual que k , la que más se aproxima a A .

De esta forma, la matriz $A(k)$ es la más parecida posible a A y para almacenarla sólo necesitaremos $k(m+n+1)$ datos, con lo que el ahorro es considerable. Por ejemplo, si $m=n=1000$, una aproximación de rango 10 sólo necesita 20010 datos, frente al millón de entradas de la matriz A , es decir, el ahorro es del 98%. En la práctica es frecuente que la matriz que proviene de discretizar una fotografía, tenga solamente un pequeño número de valores singulares significativos frente a la dimensión de la matriz, con lo cual se consiguen buenas aproximaciones con matrices de rango bajo. Para encontrar esas aproximaciones, se utilizó la siguiente función que construimos y guardamos en un fichero llamado *aproxsvd.m* para llamarla con posterioridad.

```
function B=aproxsvd(A,k)
% APROXSVD proporciona la suma de los k primeros términos
% de la descomposición en valores singulares de la matriz A.
% Ha de ser k menor o igual que el rango de la matriz A.
[V,S,U]=svd(A);
if k<=rank(A)
    s=diag(S);
    B=zeros(A);
```

```

for l=1:k
    B=B+s(l)*V(:,l)*U(:,l)';
end
end
    
```

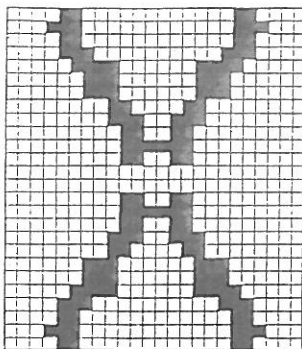
Esta función construye la matriz $A(k)$ del teorema anterior. Como lo lógico era obtener una matriz de aproximación también de ceros y unos, se elaboró una función que redondeaba la matriz resultado, creando el siguiente archivo llamado *redondeo.m*

```

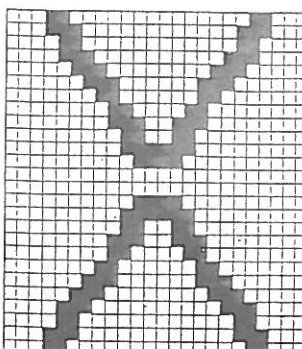
function X=redondeo(A)
% REDONDEO aplicado a una matriz produce otra formada por
% unos y ceros obtenida redondeando desde 0.5
s=size(A); m=s(1);
n=s(2);
for l=1:m
    for r=1:n
        if A(l,r)<0.5
            X(l,r)=0;
        else
            X(l,r)=1;
        end
    end
end
end
    
```

Finalmente, para obtener las correspondientes matrices de rango 3, 4 y 5 simplemente hay que teclear $B=\text{redondeo}(\text{aproxsvd}(A,k))$ para $k=3,4$ y 5. Si, además, se quería saber cuántos cuadrados habían pasado de negros a blancos o viceversa, es decir, el número de cuadrados erróneos, bastaría con hacer $\text{error}=\text{sum}(\text{sum}(\text{abs}(A-B)))$.

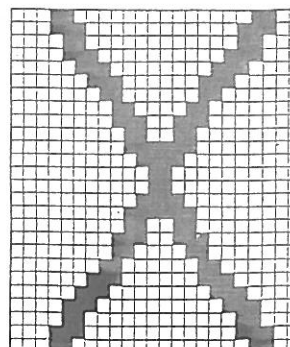
En las figuras siguientes se muestran las distintas aproximaciones de bajo rango obtenidas. Destaquemos que la aproximación de rango 5 coincide con la original.



RECONSTRUCCIÓN, rango 3
error 23 cuadros = 4,5%



RECONSTRUCCIÓN, rango 4
error 4 cuadros = 0,6%



RECONSTRUCCIÓN, rango 5
error 0 cuadros

6. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Los alumnos han tenido un primer contacto con el programa MATLAB que, como hemos indicado, cada día tiene más aplicaciones, no ya dentro de las matemáticas, sino en otras ciencias, en la técnica e incluso en la industria. Concretamente este programa es utilizado en varias asignaturas que se imparten en esta Escuela de Ingenieros.

Por otra parte, hemos constatado que el alumno lo ha utilizado durante el curso para resolver problemas, comprobar los resultados que había obtenido por otros métodos en la resolución de distintos problemas y para representar gráficamente funciones.

Al terminar la Práctica los alumnos contestaron de manera individualizada un cuestionario, que elaboró el I.C.E., en el que se solicitaba información sobre distintos aspectos de la Práctica llevada a cabo.

De los 206 alumnos que siguieron la actividad, 149 contestaron el cuestionario. A continuación reseñamos algunos de los ítems que se adecuan más a la asignatura en la que hemos realizado la Práctica. En cada caso indicamos el tanto por ciento de alumnos que están TOTALMENTE DE ACUERDO o DE ACUERDO:

- La actividad clarifica los contenidos difíciles de la materia para hacerlos comprender mejor: 64%.
- La actividad relaciona la nueva información o problema con lo que he aprendido previamente: 89%.
- Esta actividad me motiva más a trabajar en la asignatura: 71%.
- Me siento más implicado en esta asignatura que si trabajase de forma más teórica (visión útil): 79%.
- Pienso que la generalización de este tipo de iniciativas mejoraría significativamente la calidad de la docencia universitaria: 86%.

De lo anterior creemos que se puede deducir que el grado de satisfacción de los alumnos es muy alto.

Ello nos motiva a ampliar esta actividad de innovación tratando de cubrir otros aspectos. Uno de ellos sería el uso de este programa para una mejor comprensión de los contenidos de la asignatura a lo largo de todo el curso. En los últimos años hemos podido comprobar que ha ido descendiendo la capacidad de abstracción de los alumnos. Es evidente cómo influye esto en la actitud de los mismos frente a las matemáticas en general y frente a la asignatura de Álgebra Lineal muy especialmente. Pensamos utilizar este programa para tratar de ayudar al alumno en este aspecto. Por ejemplo, antes de explicar una determinada lección entregaremos una hoja con distintos ejercicios prácticos relacionados con algunos resultados que demostraremos en la exposición teórica.

Como resumen podemos decir que el resultado global de esta experiencia lo consideramos muy positivo, teniendo en cuenta los objetivos que nos habíamos propuesto y el aprovechamiento por parte de los alumnos.

BIBLIOGRAFÍA

- ETTER, D. M. (1993). *Engineering Problem Solving with MATLAB*. Engelwood Cliffs, Prentice Hall.
- GROSSMAN, S.I. (1996). *Álgebra Lineal*. México, McGraw-Hill.

- THE MATHWORKS INC. (1995). *MATLAB. Edición de Estudiante. Guía de usuario*. Madrid, Prentice-Hall.
- NOBLE, B. y DANIEL, J. W. (1989). *Álgebra Lineal Aplicada*. México, Prentice-Hall Hispanoamericana.
- SIGMON, K. (1989). *Introduction to MATLAB*. Florida, Universidad de Florida.