

# **APLICACIÓN DE REDES NEURONALES ARTIFICIALES PARA LA SIMULACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS DINÁMICOS E INDUSTRIALES**

**L. M. Nieto Nieto, N. del Pozo Madroñal, N. Moreno Alfonso, G. Ortega  
Gómez, F. Aguayo González y J. R. Lama Ruiz**

Escuela Universitaria Politécnica. Sevilla

## **Resumen**

El comportamiento dinámico de las redes neuronales celulares (CNN) puede ser aprovechado para resolver cierto tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales, que representan el comportamiento de algunos sistemas de control continuo. La complejidad de los algoritmos que resuelven estos problemas mediante programación secuencial es muy elevada, generalmente de orden polinómico o superior, no así cuando éstos se resuelven mediante computación cooperativa.

El presente estudio comprende la primera fase en el desarrollo de una aplicación informática para la didáctica de control basado en redes neuronales, que posibilite la simulación y control de sistemas dinámicos. Por tanto, se pretende en este trabajo un avance didáctico en dos vertientes: por un lado progresar en nuevos paradigmas de control de determinados sistemas complejos y su posible inclusión en los correspondientes temarios, y por otra la simulación de tales sistemas para una mejor comprensión por parte de los alumnos.

## Introducción

### ¿Por qué usar redes neuronales?

En algunas aplicaciones prácticas, las técnicas y algoritmos digitales se muestran altamente ineficaces, como en el caso de ciertos problemas que implique reconocimiento de patrones, memoria asociativa, manipulación de información imprecisa, etc., por dos razones fundamentales:

Deben programarse con antelación todas las acciones posibles y si la operación a desarrollar es muy compleja, esto supone una extensa e inoperativa librería de información en la mayoría de los casos.

Si, de forma imprevista, deben realizarse acciones no contempladas inicialmente, el sistema no es capaz de actuar.

Esto ha motivado la conveniencia de utilizar procedimientos alternativos conducentes al paradigma de la Red Neuronal.

### ¿En qué consiste una red neuronal?

Las denominadas Redes Neuronales son sistemas dinámicos constituidos por múltiples procesadores elementales interconectados entre sí que operan colectivamente, y cuyas capacidades de cómputo dependen más de su número y topología que de su complejidad y precisión.

Los procesadores elementales que componen una red neuronal se suelen denominar *neuronas*, aunque también reciben otros nombres en la bibliografía especializada como; elementos de proceso, células de información, etc. En la figura 1, se esquematiza la estructura que presenta una neurona simple. Para formar una red neuronal, estos elementos de cómputo se interconectan entre sí (total o parcialmente) agrupados por capas, formando diversas estructuras de redes neuronales que existen.

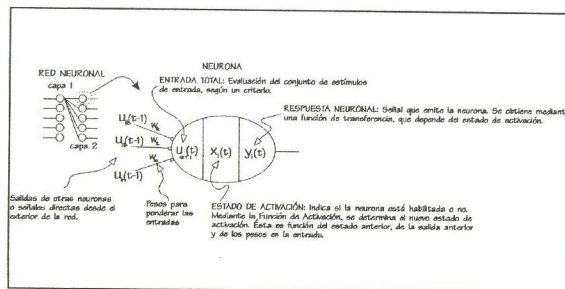


Figura 1: Estructura básica de una red neuronal artificial.

El funcionamiento de uno de estos elementos de cómputo seguiría el siguiente proceso:

1. En primer lugar se reciben las entradas a la neurona  $i$  ( $u_{ih}(t-1)$ ,  $\forall h$ ), desde el exterior, o bien desde otras neuronas.
2. Inmediatamente, se evalúa la entrada total hacia la neurona ( $U_{net\ i}(t)$ ), ponderando la importancia de cada una de las entradas con los distintos pesos que se les asignan. Es de suma importancia advertir que esta evaluación se hace para todas las entradas a la vez.
3. Se determina el estado de activación de la neurona ( $x_i(t)$ ,  $\forall h$ ).
4. Mediante una función de transferencia que fija el comportamiento de la neurona, y en función del estado de activación de la misma fundamentalmente, se determina la respuesta que proporcionará ( $Y_i(t)$ ,  $\forall h$ ).

En algunos casos, también se tiene en cuenta el estado de activación anterior de la neurona  $i$  ( $x_i(t-1)$ ,  $\forall h$ ), para evaluar la respuesta actual.

## Material y métodos

### Funcionamiento de una red neuronal celular

La metodología empleada para el desarrollo de la aplicación se basa en la operación de una arquitectura concreta de redes neuronales artificiales: las Redes Neuronales Celulares (más conocidas por su acrónimo en inglés, CNN). Desde su descripción a nivel algorítmico en 1988 [Chua], se han aplicado con éxito en campos diversos. lo que motiva el actual desarrollo de circuitos integrados específicos de tales sistemas (vid. [Cruz][Harrer][Rodr.]). A continuación explicaremos brevemente en qué se basa el funcionamiento de tal arquitectura.

La estructura básica que muestra una red de este tipo se muestra en la figura 2. Cada celda de las representadas es un elemento de proceso. En este tipo de redes adquiere especial importancia el concepto de **VECINDAD**, que explicaremos a continuación.



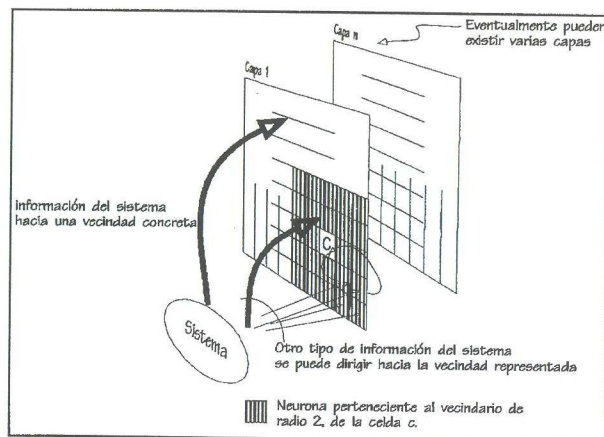


Figura 2: Estructura de una Red Neuronal Celular

La vecindad de radio  $r$ , de la neurona  $c$  (representada así:  $N_r(c)$ ), es el conjunto de neuronas (celdas) contiguas a la neurona  $c$ , hasta una distancia  $r$ . En la figura 2 se representa la vecindad de radio 2 de la neurona  $c$ .

De este modo, el conjunto de información que debe procesar la red, se divide en subconjuntos, y cada subconjunto de esta información es la entrada hacia una vecindad concreta, por donde circularán los datos en cuestión. La vecindad está totalmente interconectada: la neurona  $c$ , recibe como entradas las que vienen del exterior hacia ella misma, y también las que vienen del exterior hacia otras neuronas de su vecindad. Así mismo, puede realimentarse con su propia respuesta (salida) y también con las respuestas del resto de las neuronas que forman su vecindad.

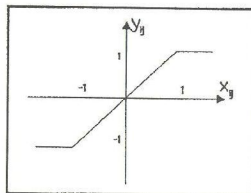


Figura 3: Ejemplo de la respuesta de la neurona  $ij$  ( $y_{ij}$ ) en función del estado de la neurona  $ij$  ( $x_{ij}$ )

En el funcionamiento de una neurona, el parámetro más característico es la función que determinará la respuesta de la misma, según hemos introducido en el punto anterior. En este caso, dicha función proporcionará la salida de la neurona  $ij$  ( $y_{ij}$ ), según una combinación lineal de entradas y salidas de las neuronas de la vecindad (ecuación 1).

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = x_{ij}(t) + \sum_{k,l} A(i,j;k,l) y_{kl} + \sum_{k,l} B(i,j;k,l) w_{kl} + D_{ij} \quad (1)$$

$$k = \{i-r, i-r+1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, i+r-1, i+r\}$$

$$l = \{j-r, j-r+1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, j+r-1, j+r\}$$

$$D_{ij} = \text{cte.}$$

$A$  y  $B$  son matrices  $\{(2r+1) \times (2r+1)\}$  que determinan las propiedades computacionales (relaciones) entre las neuronas. La matriz  $A$ , es la llamada "plantilla de realimentación" ("template" de realimentación) y la matriz  $B$  es la "plantilla de control" ("template" de control). Los coeficientes de la matriz o plantilla de realimentación, son los que multiplican a las respuestas de todo el vecindario, para reconducirlas a la neurona  $ij$ . Los coeficientes de la plantilla de control son los que multiplican a las entradas de todas las neuronas de un vecindario, antes de introducirlas en la neurona  $ij$ , según se indica en la función usada para obtener el estado de la neurona  $ij$ .

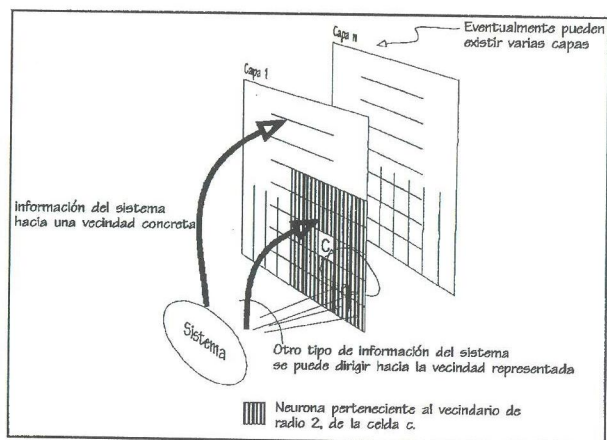
De acuerdo con la definición de Chua y Yang, una CNN presenta las siguientes características:

- Contiene un elevado número de procesadores con salida no lineal (células) organizados especialmente en redes 2D periódicas, (formando capas). Típicamente, son redes rectangulares que pueden ser replicadas para obtener redes CNN multicapa.
- A diferencia de otras redes neuronales, exhibe *conectividad local*: cada célula recibe señales del exterior de la red (estímulos externos) y de células vecinas, dentro de un entorno reducido de extensión predeterminada. Esta conectividad local puede configurarse mediante operadores definibles matricialmente (plantillas o "templates" en la bibliografía en inglés), que pueden diferir de una célula a otra.

Por otra parte y frente a otros tipos de redes neuronales, la conectividad local de las células permite fabricar, mediante las actuales tecnologías VLSI, redes con un elevado número de células (del orden de 10.000 por  $\text{cm}^2$  con tecnologías CMOS) [Dom.].

## Operación de la Red

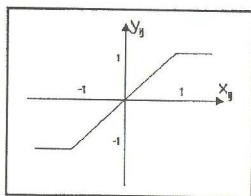
La compleja dinámica no lineal de una CNN, depende fuertemente de la definición de las plantillas. En el caso de una red con plantillas uniformes y



**Figura 2:** Estructura de una Red Neuronal Celular

La vecindad de radio  $r$ , de la neurona  $c$  (representada así:  $N_r(c)$ ), es el conjunto de neuronas (celdas) contiguas a la neurona  $c$ , hasta una distancia  $r$ . En la figura 2 se representa la vecindad de radio 2 de la neurona  $c$ .

De este modo, el conjunto de información que debe procesar la red, se divide en subconjuntos, y cada subconjunto de esta información es la entrada hacia una vecindad concreta, por donde circularán los datos en cuestión. La vecindad está totalmente interconectada: la neurona  $c$ , recibe como entradas las que vienen del exterior hacia ella misma, y también las que vienen del exterior hacia otras neuronas de su vecindad. Así mismo, puede realimentarse con su propia respuesta (salida) y también con las respuestas del resto de las neuronas que forman su vecindad.



**Figura 3:** Ejemplo de la respuesta de la neurona  $ij$  ( $y_{ij}$ ) en función del estado de la neurona  $ij$  ( $x_{ij}$ )

En el funcionamiento de una neurona, el parámetro más característico es la función que determinará la respuesta de la misma, según hemos introducido en el punto anterior. En este caso, dicha función proporcionará la salida de la neurona  $ij$  ( $y_{ij}$ ), según una combinación lineal de entradas y salidas de las neuronas de la vecindad (ecuación 1).

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = x_{ij}(t) + \sum_{k,l} A(i, j; k, l) y_{kl} + \sum_{k,l} B(i, j; k, l) w_{kl} + D_{ij} \quad (1)$$

$$k = \{i-r, i-r+1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, i+r-1, i+r\}$$

$$l = \{j-r, j-r+1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, j+r-1, j+r\}$$

$$D_{ij} = \text{cte.}$$

$A$  y  $B$  son matrices  $\{(2r+1) \times (2r+1)\}$  que determinan las propiedades computacionales (relaciones) entre las neuronas. La matriz  $A$ , es la llamada "plantilla de realimentación" ("template" de realimentación) y la matriz  $B$  es la "plantilla de control" ("template" de control). Los coeficientes de la matriz o plantilla de realimentación, son los que multiplican a las respuestas de todo el vecindario, para reconducirlas a la neurona  $ij$ . Los coeficientes de la plantilla de control son los que multiplican a las entradas de todas las neuronas de un vecindario, antes de introducirlas en la neurona  $ij$ , según se indica en la función usada para obtener el estado de la neurona  $ij$ .

De acuerdo con la definición de Chua y Yang, una CNN presenta las siguientes características:

- Contiene un elevado número de procesadores con salida no lineal (*células*) organizados especialmente en redes 2D periódicas, (formando *capas*). Típicamente, son redes rectangulares que pueden ser replicadas para obtener redes CNN multicapa.
- A diferencia de otras redes neuronales, exhibe *conectividad local*: cada célula recibe señales del exterior de la red (*estímulos externos*) y de células vecinas, dentro de un entorno reducido de extensión predeterminada. Esta conectividad local puede configurarse mediante operadores definibles matricialmente (*plantillas o "templates"* en la bibliografía en inglés). que pueden diferir de una célula a otra.

Por otra parte y frente a otros tipos de redes neuronales, la conectividad local de las células permite fabricar, mediante las actuales tecnologías VLSI, redes con un elevado número de células (del orden de 10.000 por  $\text{cm}^2$  con tecnologías CMOS) [Dom.].

## Operación de la Red

La compleja dinámica no lineal de una CNN, depende fuertemente de la definición de las plantillas. En el caso de una red con plantillas uniformes y



células idénticas, una versión de la ley que gobierna la evolución en tiempo continuo es descrita por la siguiente expresión:

$$\frac{dX_{ij}}{dt} = \sum_{k,l} C_{ij,kl} X_{kl}(t) + \sum_{k,l} A_{ij,kl} Y_{kl}(t) + \sum_{k,l} B_{ij,kl} W_{kl}(t) + D_{ij} \quad (2)$$

$$\frac{dY_{ij}}{dt} = X_{ij}$$

En la que  $x_{ij}(t)$  es el estado de la célula en un instante,  $y_{ij}(x_{ij}(t))$  la función de salida del procesador y  $w_{ij}(t)$  la señal externa que se le aplica. La CNN anterior usa plantilla de realimentación **A**, de una plantilla de control **B**, una plantilla adicional **C**, y un offset **D**. (En muchas ocasiones  $D_{ij}=1$ ).

Todos los estados al evolucionar en el tiempo establecen complejos patrones de interacción, dependientes de las plantillas, y en la red pueden propagarse por difusión entre células distantes.

Una característica de esta dinámica, que ha sido explotada por varios autores como [Gobovic] o [Kozec], consiste en la semejanza entre las CNN y algunos modelos mecánicos descritos en términos de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, con los que comparte la característica de que el comportamiento dinámico depende de interacciones espacialmente localizadas: problemas definidos en un dominio espacio-temporal (simulación de estructuras, procesamiento de imágenes, etc) con frecuencia pueden caracterizarse por el hecho que la información necesaria para determinar la futura evolución o el estado estacionario del sistema en un cierto punto está contenida, desde un instante inicial dado, en un entorno de radio finito. Tales problemas pueden ser resueltos mediante procesos de relajación y de difusión de información hacia todos los puntos del dominio espacial. Por tanto, el paradigma CNN puede aprovecharse para abordar la resolución de algunos tipos de sistemas de ecuaciones diferenciales mediante algoritmos neuronales celulares, gracias a la posibilidad de configurar las plantillas, y por tanto simular el comportamiento de sistemas que respondan a las mismas ecuaciones de evolución. Al tratar con sistemas continuos es necesaria la discretización espacial previa, que inevitablemente introduce errores. Sin embargo, en el resto de los aspectos, la red y el sistema que simula son cualitativamente idénticos, pudiendo operar en tiempo continuo con variables de estado, interacción y parámetros continuos.

Como ejemplo se muestra la determinación de la respuesta transitoria de una membrana elástica.

## Simulación de sistemas

### Sistemas Dinámicos

A continuación se muestra como puede una CNN simular el comportamiento dinámico de una membrana elástica bidimensional, cuyos puntos oscilan en el mismo plano. Sus ecuaciones dinámicas son las siguientes:

$$(1 + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$$(1 + \mu) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Los bordes de la misma se suponen fijos  $\pi$  y  $\rho$  son parámetros materiales.

Se trata de calcular los desplazamientos que se producen en los puntos de la membrana cuando actúa algún esfuerzo sobre ella que desplaza uno de los puntos. Es evidente que al reducir el problema a un caso bidimensional la fuerza aplicada no tendrá componente normal al plano del sistema, ni tampoco los desplazamientos de los puntos, que serán transversales,  $U(x,y,t)$ , y longitudinales,  $V(x,y,t)$ . Para mapear el sistema en la red, los desplazamientos de cada nodo, su velocidad y la fuerza externa que actúa sobre él tiene réplicas directas en los parámetros de la ec. dinámica de la célula. Los estímulos se dan mediante entradas adicionales.

Por otra parte, las condiciones de contorno en los bordes imponen que las células correspondientes no se desplacen. Esto se consigue utilizando plantillas ligeramente diferentes que dejen las células correspondientes en estados fijos. En el interior, para un material homogéneo e isótropo, las plantillas son invariantes espaciales. Como cada célula de la red tiene únicamente una salida real, se necesitan 2 capas.

Discretizando las ecuaciones en el espacio y en el tiempo obtenemos las siguientes expresiones:

$$\rho \frac{U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j}^{n-1} - 2U_{i,j}^n}{\Delta t^2} = -U_{i,j} \frac{2(2+\mu)}{\Delta^2} + U_{i+1,j} \frac{1+\mu}{\rho \Delta^2} +$$

$$+ U_{i-1,j} \frac{1+\mu}{\Delta^2} + U_{i,j+1} \frac{1}{\Delta^2} +$$

$$+ (V_{i+1,j+1} - V_{i,j+1} - V_{i+1,j} + V_{i,j}) \mu$$



$$\begin{aligned} q \frac{V_{i,j}^{n+1} + V_{i,j}^{n-1} - 2V_{i,j}^n}{\Delta t^2} = & -V_{i,j} \frac{2(2+\mu)}{\Delta^2} + V_{i+1,j} \frac{1+\mu}{\Delta^2} + \\ & + V_{i-1,j} \frac{1+\mu}{\Delta^2} + V_{i,j+1} \frac{1}{\Delta^2} + \\ & + (U_{i+1,j+1} - U_{i,j+1} - U_{i+1,j} + U_{i,j}) \mu \end{aligned}$$

Por lo tanto, por comparación con las ecuaciones dinámicas de la célula, se obtienen las plantillas que se muestran a continuación, siendo  $A_U$  y  $A_V$  las plantillas de interacción de la célula  $(i,j)$  con la vecindad de células en su misma capa,  $A_{UV}$  y  $A_{VU}$  los correspondientes al acoplamiento con células contiguas de la otra capa  $B_U$  y  $B_V$  los estímulos externos sobre una célula de cualquier capa, que supone un desplazamiento del nodo en cada una de las dos posibles direcciones en el plano de la membrana.

$$A = \frac{1}{q\Delta^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1+\mu & -2(2+\mu) & 1+\mu \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{UV} = A_{VU} = \frac{\mu}{q\Delta^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_U, B_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = 0$$

$$I_{ij} = 0$$

Se llevaron a cabo varias simulaciones con software escrito en lenguaje C, para sistemas con diversos tamaños e intervalos de discretización espacial. En todos los casos, se sometieron a estímulos que desplazaban un solo nodo en una sola dirección, obteniendo los mejores resultados en aquellos con el mayor número de células. Esto nos muestra que las fuentes de error proceden fundamentalmente de la cuantización espacial, y no a la técnica de integración numérica empleada. Por otro lado, la mayor parte del tiempo de simulación promediado al número de células se dedicaba a la integración numérica. Distintas optimizaciones pueden realizarse al respecto. Sólo indicar que la implementación física de la red involucraría construir células que realizaran la integración de forma analógica, con lo que sería posible la simulación de grandes sistemas prácticamente en tiempo real.

Por último, sólo notar que las plantillas de acoplamiento pueden simetrizarse adecuando la discretización, lo que implicaría interacciones locales isotropas entre células de capas distintas.

## Sistemas con muchos Grados de Libertad

La ingeniería de control se está abriendo a nuevos campos de aplicación, ofreciendo con éxito soluciones alternativas a ciertos problemas que tradicionalmente se han resuelto gracias a la mejora de las mismas técnicas básicas. Sirva de ejemplo la observación telescópica desde observatorios en tierra.

Es conocido que el efecto de las turbulencias atmosféricas producen un empobrecimiento en la calidad de las imágenes obtenidas. Como soluciones se incrementan los diámetros de los telescopios astronómicos, se instalan en montañas a gran altura, o se corrigen la imágenes aplicando procedimientos de mejora digital. Sin embargo, en todos estos casos se presentan limitaciones técnicas o económicas, que obligan a buscar nuevas alternativas. Una de ellas consiste en evitar las turbulencias utilizando observatorios espaciales. Esta solución, inevitable para observar cierto tipo de señales (de rayos X o ultravioleta, por ejemplo), es altamente costosa en lo que respecta a observaciones en el espectro visible, según se deduce de los resultados obtenidos con el proyecto del telescopio espacial de *Hubble*.

Otra vía de investigación consiste en aplicar principios de óptica adaptativa, equipando a los nuevos telescopios con espejos deformables [Beckers] para compensar, mediante una deformación controlada de la superficie, las distorsiones que las turbulencias producen sobre los frentes de onda de luz estelar. En el proceso se necesita el conocimiento previo del grado de distorsión y con tal fin se aplican técnicas de medida que, por lo general, se basan en utilizar como referencias fiables estrellas brillantes, o "estrellas artificiales" producidas con haces de rayos láser [Hardy].

La deformación se consigue mediante actuadores distribuidos. La compensación de distorsiones en el espectro visible precisan deformaciones locales de la superficie del orden de los micrómetros, que han de ser controladas con una precisión inferior al 1 por ciento. Tales deflexiones pueden conseguirse construyendo los espejos sobre substratos piezoeléctricos dotados de electrodos, con los que además pueden conseguirse tiempos de respuesta inferiores al milisegundo, suficientemente óptimos para aplicaciones en tiempo real.

El número de actuadores sobre el espejo deformable dependerá del grado de compensación deseado, y dependerá entre otros factores, del diámetro del telescopio. Por ejemplo, para uno de 4 metros se estima que se obtendrá una buena compensación utilizando unos 500, llegando a más de 1000 en algunos



casos. Entonces el problema consiste en controlar, en tiempo continuo, una planta con múltiples entradas y múltiples salidas, invariante en el tiempo y de parámetros distribuidos.

Es evidente que el estudio del comportamiento de un sistema con tantos grados de libertad puede simplificarse si se consigue una definición local y uniforme para todo el sistema. Para abordar el control de este sistema puede optarse por utilizar la técnica basada en comparar la planta con un modelo de referencia. Este método se ha aplicado con buenos resultados en problemas de control particularmente complicados (sistemas definibles en términos no lineales y/o variables en el tiempo). En este caso una red CNN podría utilizarse para modelarlo en tiempo real: la respuesta de la red se compara con la planta real, y la diferencia se utiliza para generar las debidas señales de control.

Como ejemplo, se estudia a continuación una aproximación del problema. Supondremos un sistema discreto, de una sola dimensión y constituido por una distribución uniforme de puntos de control sobre un segmento horizontal (figura 4). Este perfil de puntos se considera que es espacialmente periódico. Los actuadores consiguen deformar el perfil al causar distintos desplazamientos verticales. La distancia de cada punto a la posición de equilibrio viene dada por  $y_i$  y la fuerza de interacción entre puntos colindantes por  $F$  y  $F'$ . Se asume que las desviaciones de la posición de reposo que se desean, son dadas por un sistema que analiza la distorsión del frente de onda captado, para ofrecer como salida el perfil del espejo que compensaría la distorsión. Esto se efectúa con una frecuencia de varios cientos de veces por segundo, por lo que cabe indicar que una línea abierta de investigación consiste en utilizar redes neuronales para realizar el análisis de señales en tiempo real.

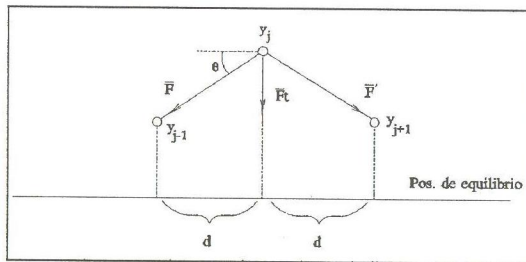


Figura 4: Sistema discreto para la resolución de su ecuación dinámica.

Cuando los desplazamientos locales son pequeños ( $< d$ ), el ángulo ( $\theta$ ) que forma la superficie con la horizontal da un valor del seno aproximadamente igual al de la tangente. Además permite suponer que la deformación provoca tensiones laterales compensadas, así que sólo se considera la existencia de una fuerza recuperadora sobre el elemento  $j$  actuando en sentido vertical. Si añadimos el efecto de un amortiguamiento proporcional a la velocidad, la ecuación dinámica puede expresarse de esta forma:

$$\ddot{y}_j = u_j - b(\dot{y}_j - \dot{y}_{j-1} - \dot{y}_{j+1}) - k(cy_j - y_{j-1} - y_{j+1})$$

siendo  $y_i$  la amplitud de la deformación relativa a posiciones de equilibrio, y los índices  $j-1$  y  $j+1$  denotan las posiciones inmediatas a ambos lados, que se suponen conocidas en cada instante, y por lo tanto la fuerza recuperadora. Esta es proporcional a la desviación de su posición de equilibrio y a la desviación relativa a los puntos del entorno inmediato por una constante  $k$ , que a su vez es inversamente proporcional a la distancia que separa dos posiciones consecutivas. La constante  $b$  es un factor de amortiguamiento. Esta fuerza debe ser compensada con otra externa  $u_j$  proporcionada por los elementos de control.

La representación de este sistema en la red requiere la reducción del orden de la ecuación, definiendo:

$$z_j = \dot{y}_j$$

la ecuación original pasa a ser:

$$\dot{z}_j = u_j - b(z_j - z_{j-1} - z_{j+1}) - k(cy_j - y_{j-1} - y_{j+1})$$

Por tanto, comparándola con la ec. dinámica de una red CNN de una dimensión, se tienen las siguientes plantillas:

$$A = k \cdot (1, c, 1)$$

$$B = (0, 1, 0)$$

$$C = b \cdot (1, 1, 1)$$

## Resultados y Discusión

Mediante todo lo anteriormente expuesto, se ha desarrollado una herramienta de simulación de tales sistemas implementada en lenguaje C. Dicha herramienta permite la resolución de sistemas de 1º y 2º orden.

En cuanto a innovación curricular se tienen los siguientes aspectos:

- Innovación en contenido al introducir el paradigma basado en redes neuronales celulares.
- Innovación en el planteamiento de actividades prácticas derivadas del diseño e implementación de herramientas software de simulación.
- Posterior uso del software elaborado para la simulación por parte de los alumnos.

El presente estudio supone por tanto un avance en la resolución de sistemas complejos mediante la aplicación de redes neuronales celulares, asimismo representa una posible vía de control de los sistemas mencionados.

## Bibliografía

- [Beckers] J.M. BECKERS: "Adaptative Optics for Astronomy: Principles, Performance and Applications". Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol31, 1993.
- [Chua] L.O. CHUA, L. YANG: "Cellular Neural Networks: Theory". IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol CAS-35, 1988.
- [Chua-2] L.O. CHUA, B. SHI: "Exploiting Cellular Automata in the Design of Cellular Neural Networks for Binary Image Processing", University of California at Berkeley, No. UCB/ERL M89/130, 1989.
- [Chua-3] L.O. CHUA, T. ROSKA: "The CNN Universal Machine- Part 1: The Architecture", Proceedings of CNNA-92, 1992.
- [Cruz] J.M. CRUZ, L.O. CHUA: "A CNN Chip for Connected Component Detection". IEEE Trans. Circuits and Systems. July, 1991.
- [Dom.] R. DOMÍNGUEZ CASTRO, et al. "A CNN Universal Chip in CMOS Technology". Proceedings of CNNA-94, 1994.
- [Gobovic] D. GOBOVIC, M.E. ZAGHLOUL: "Analog Cellular Neural Networks with Application to Partial Differential Equations", Proceedings of ISCAS-94, 1994.
- [Hardy] J.W. HARDY: "Óptica Adaptativa". Investigación y Ciencia, Agosto, 1994.
- [Harrer] H. HARRER, J.A. NOSSEK, R. STELTZ: "An Analog Implementation of Discrete Time CNN2. IEEE Trans. Neural Networks. May, 1992.
- [Kozek] T. KOZEC, T. ROSKA: "A Double Time-Scale CNN for Solving 2-D Navier-Stokes- Equations". Proceedings of CNNA-94, 1994.
- [Rodr.] RODRÍGUEZ-VÁZQUEZ, et. al. "Current-Mode Techniques for the Implementation of Continuous-Time and Discrete-Time Cellular Neural Networks". IEEE Trans. Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing. March 1993.
- [Roska] T. ROSKA, L.O. CHUA: "The Dual Analog Software", Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Hungary, No. DNS-2-1992.