

Universidad de Sevilla  
Facultad de Ciencias Económicas  
Departamento de Economía Aplicada I

*La Dimensión Fractal*  
*en*  
*el Mercado de Capitales*

Memoria de Tesis presentada por  
Jesús Muñoz San Miguel  
para optar al grado de Doctor en Economía.

Director de Tesis  
Dr. D. Javier Busto Guerrero  
Departamento de Economía Aplicada I.  
Universidad de Sevilla

Sevilla, Junio 2002



*A María José, mi madre, mi hermano y en memoria de mi padre.*



## Agradecimientos

A Javier Busto, que me ha guiado en el terreno científico y siempre me ha apoyado.

A Loreto Delgado, que me introdujo en el mundo de los fractales.

A mis compañeros de Departamento y, en particular, a los amigos que allí tengo, que siempre se han preocupado por mí.

A todos mis amigos, que me han acompañado y “soportado” en los momentos difíciles.



# Índice General

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Los conjuntos fractales</b>	<b>15</b>
1.1 El espacio de los fractales . . . . .	16
1.2 Autosemejanza y autoafinidad: sistemas de funciones iteradas . . . . .	28
1.3 Representación de conjuntos fractales . . . . .	34
1.3.1 Código de un sistema de funciones iteradas . . . . .	35
1.3.2 Construcción del atractor de un sistema de funciones iteradas	37
1.3.3 Implementación . . . . .	41
Referencias . . . . .	43
<b>2 Dimensión de un conjunto fractal</b>	<b>45</b>
2.1 Medida de un conjunto fractal . . . . .	46
2.1.1 El problema de la medida de Lebesgue . . . . .	47
2.1.2 Medida de Hausdorff . . . . .	48
2.2 Dimensión de Hausdorff . . . . .	54
2.2.1 Definición . . . . .	55
2.2.2 Propiedades . . . . .	57
2.2.3 Cálculo de la dimensión . . . . .	61
2.3 Dimensión de recuento por cajas . . . . .	65
2.3.1 Definición . . . . .	66
2.3.2 Relación con la dimensión de Hausdorff . . . . .	69
2.3.3 Propiedades . . . . .	71

2.4	Dimensión del grafo de una función continua . . . . .	73
2.5	Otras medidas y dimensiones relacionadas . . . . .	77
2.6	Dimensión de autosemejanza . . . . .	78
	Referencias . . . . .	85
<b>3</b>	<b>Características fractales en un grafo</b>	<b>87</b>
3.1	Autoafinidad global: Funciones de interpolación fractal . . . . .	88
3.1.1	Proceso de construcción y autoafinidad . . . . .	89
3.1.2	Dimensión . . . . .	95
3.2	Autoafinidad local: La función de Weierstrass . . . . .	98
3.2.1	Proceso de construcción y dimensión . . . . .	99
3.2.2	Autoafinidad . . . . .	104
3.3	Autoafinidad estadística . . . . .	108
3.3.1	Procesos autoafines y exponente de autoafinidad . . . . .	114
3.3.2	Movimiento browniano . . . . .	118
	Referencias . . . . .	123
<b>4</b>	<b>Cálculo empírico de la dimensión</b>	<b>125</b>
4.1	Cálculo empírico de la dimensión de recuento por cajas de un grafo .	126
4.1.1	Cálculo del número de cajas . . . . .	127
4.1.2	Estimación del número de cajas . . . . .	128
4.1.3	Implementación . . . . .	130
4.2	Análisis empírico de la estimación . . . . .	132
4.3	Dimensión local y global . . . . .	144
	Referencias . . . . .	147
<b>5</b>	<b>Características fractales en el Ibex35</b>	<b>149</b>
5.1	Autoafinidad en el Ibex35 . . . . .	150
5.2	Dimensión en el Ibex35 . . . . .	153
5.3	Dependencia en el Ibex35 . . . . .	157
5.3.1	Movimiento browniano fraccionario . . . . .	158

5.3.2	Análisis R/S . . . . .	164
5.4	No normalidad en el Ibex35 . . . . .	170
5.4.1	Distribuciones estables . . . . .	176
5.4.2	Movimiento L-estable . . . . .	182
	Referencias . . . . .	187
	<b>Conclusiones y perspectivas</b>	<b>189</b>
	<b>A Aspectos Computacionales</b>	<b>193</b>
A.1	Construcción de conjuntos fractales . . . . .	193
A.2	Cálculo de la dimensión de recuento por cajas . . . . .	195
A.3	Cálculos estadísticos . . . . .	200
	<b>Bibliografía</b>	<b>209</b>



# Introducción

El desarrollo de la Geometría Fractal ha sido uno de los hitos dentro del campo de las Matemáticas, pues ha hecho posible describir formas naturales complejas en términos de reglas simples, entre otras cosas porque la forma de ver la realidad de la Geometría Fractal es muy diferente a la de la Geometría Euclídea, ya que mientras ésta intenta adecuar la realidad a un orden que emana de la razón, la Geometría Fractal asume que las estructuras naturales son desordenadas y busca describirlas.

El objetivo general de este trabajo es analizar el papel que la Geometría Fractal puede jugar a la hora de caracterizar la serie de cierres diarios del índice Ibex35 durante la década de los noventa (desde el día 2-01-1991 hasta el día 29-12-2000), a la que, por brevedad, nos referiremos como serie Ibex35.

Si somos algo más concretos, podemos decir que en realidad lo que pretendemos caracterizar es el grafo de este índice frente al tiempo (registro temporal del índice), pues presenta muchas de las características propias de los conjuntos fractales, que son los objetos que estudia la Geometría Fractal.

Esta última frase puede parecer redundante, pero se debe al hecho de que no existe una definición precisa ni de la Geometría Fractal ni de lo que es un conjunto fractal. En palabras de Benoît B. Mandelbrot (1924-), al que se considera como el padre de la Geometría Fractal:

...la definición informal: la Geometría Fractal es el estudio de la irregularidad que permanece tras un cambio de escala y localización, quizás sea la mejor caracterización de la Geometría Fractal que podemos conseguir. Una definición formal apropiada ni existe ni se debe esperar su desarrollo... (Mandelbrot [53] pg.9)

De hecho, aunque han habido varios intentos de dar una definición matemática de un fractal, no hay una definición satisfactoria en un contexto genérico, ya que todas excluyen algún conjunto con características que puede estudiar la Geometría Fractal.

Esto, que podría parecer un inconveniente, es, desde nuestro punto de vista, una ventaja, ya que no hay que preocuparse de si un conjunto es o no un fractal, sino de si la Geometría Fractal puede analizar las características que nos interesan del conjunto.

En concreto, la anterior definición informal de la Geometría Fractal hace que el grafo de una serie de precios, y en particular el grafo de la serie Ibex35, se encuentre dentro de su campo de acción, ya que en estos grafos aparecen numerosas irregularidades que se mantienen al observarlos a escalas cada vez menores.

Precisamente al intentar cuantificar este tipo de irregularidades es cuando surge la noción de dimensión fractal, que es el concepto que da título a este trabajo, y en el cual, de nuevo, nos encontramos con el término fractal como adjetivo, alguno de cuyos múltiples significados aparecen en unas palabras de Mandelbrot donde cuenta como acuñó este término:

Acuñé el término fractal a partir del adjetivo latino *fractus*. El verbo correspondiente es *frangere* que significa “romper en pedazos”. Es pues razonable, ..., que además de “fragmentado” (como en fracción) signifique también “irregular”, confluyendo ambos en el término fragmento (Mandelbrot [51] pg.19).

Esto hace que al utilizar el término fractal como calificativo de la dimensión estemos indicando, tanto que la dimensión puede tomar valores no enteros, como que la dimensión va a ser una medida de las irregularidades del conjunto.

Las distintas definiciones de dimensión fractal aparecen dependiendo de la forma en que abordemos el estudio de estas irregularidades y, en el caso particular del grafo de una función, debido a que las variaciones que experimentan los valores de la función entre puntos próximos están relacionadas con el valor de su dimensión,

cuanto mayor sea el valor de la dimensión, más errático será el comportamiento de su grafo.

Desde el punto de vista teórico, quizás la más importante sea la dimensión de Hausdorff, que recibe este nombre por Félix Hausdorff (1868-1942) y que aparece al adaptar a conjuntos irregulares la medida  $n$ -dimensional de Lebesgue, que, a su vez, recibe este nombre por Henri León Lebesgue (1875-1941). Desde el punto de vista práctico, la dimensión más adecuada para los cálculos empíricos es la dimensión de recuento por cajas, denominándose así esta dimensión por la forma en que se calcula.

Otro de los objetivos de este trabajo aparece al calcular empíricamente el valor de esta dimensión en un grafo, ya que para obtenerlo proponemos una estimación que sólo se utiliza en los cálculos teóricos y pretendemos ver que también es adecuada para los cálculos empíricos.

La aparición de patrones de comportamiento que se mantienen constantes al analizar un conjunto a distintas escalas, es una característica de los objetos que estudia la Geometría Fractal que pone de manifiesto que, aunque parezca que tenemos un conjunto extremadamente complejo e irregular, su apariencia se debe a la repetición de reglas simples a lo largo de estas escalas.

Como no existe una definición que englobe a todos los conjuntos fractales, esta característica hace que usemos como definición práctica que un fractal es un conjunto cuyas partes están relacionadas con el todo:

Informalmente, los fractales son formas irregulares, ..., donde cada pequeña parte es muy parecida a una imagen de tamaño reducido del todo (Mandelbrot [53] pg.9).

En este sentido, en un conjunto fractal podemos distinguir dos tipos de relaciones entre el conjunto y las partes en que se descompone: la autosemejanza, donde para que se parezcan sus representaciones a distintas escalas el factor de escala disminuye igual en todas las direcciones, y la más general de autoafinidad, en la cual este factor puede ser distinto en cada una de las direcciones.

Estas relaciones hacen que sea necesario distinguir entre dos tipos de conjuntos fractales: los fractales determinísticos, donde cada una de las partes es igual al todo

tras un cambio de escala y localización: autoafinidad determinística; y los fractales aleatorios, donde la igualdad entre las partes y el todo se da entre las distribuciones estadísticas tras el correspondiente cambio de escala y localización: autoafinidad estadística.

En el caso particular de los grafos de funciones, la autoafinidad tiene dos formas distintas de manifestarse: la que acabamos de comentar, autoafinidad global, donde cada una de las partes es igual al todo tras un cambio de escala y localización, y una segunda, autoafinidad local, que aparece en determinados casos y se manifiesta en la existencia de relaciones entre los grafos que se obtienen cuando representamos la función en intervalos de longitud cada vez menor.

Esta última manifestación de la proporcionalidad entre las partes, traducida en la existencia de autoafinidad estadística, es el denominador común de los grafos de los modelos que vamos a considerar para describir las características fractales de la serie Ibex35 y la que nos va a permitir utilizar las técnicas propias de la Geometría Fractal, para estudiar el papel que la dimensión puede jugar a la hora de describir su comportamiento.

A este respecto, los modelos que vamos a considerar son generalizaciones de uno de los primeros modelos utilizados para describir la evolución de los precios de una acción como un proceso a lo largo del tiempo gobernado por las leyes de la probabilidad (proceso estocástico): el movimiento browniano, que recibe este nombre por R. Brown, que en 1828 observó este movimiento en pequeñas partículas suspendidas en un fluido, o de proceso de Wiener, por N. Wiener, que dio una definición sistemática del mismo en 1923.

Este proceso está caracterizado fundamentalmente por dos de las propiedades de sus incrementos, la independencia y la normalidad de su distribución, y a la hora de describir la evolución de los precios de una acción, aunque aparece por primera vez en 1900 en la tesis de Louis Bachelier (1870-1946) *Théorie de la Speculation* ([2]), no cobra importancia hasta que en 1965 el premio nobel en Economía Paul A. Samuelson (1915-) propone en *Rational Theory of Warrant Pricing* ([67]) el movimiento browniano geométrico o económico, donde los que siguen un movimiento brownia-

no, con tendencia, no son los precios sino sus logaritmos <sup>1</sup>.

Aunque desde entonces es uno de los modelos más utilizados para describir el precio de una acción, se observa que, como sucede en la serie Ibex35, los datos empíricos no se ajustan del todo bien a este modelo, ya que los incrementos de los precios de la mayoría de las acciones presentan cierta dependencia y su distribución empírica difiere de la distribución normal, tanto en la parte central como en las colas.

Las generalizaciones del movimiento browniano que vamos a considerar para describir las características fractales de la serie Ibex35 son dos modelos que fueron desarrollados por Mandelbrot en los años sesenta <sup>2</sup>: los movimientos brownianos fraccionarios, que sólo tienen incrementos independientes en el modelo original y los procesos estables, cuyos incrementos son siempre independientes y donde las distribuciones que siguen estos incrementos son una generalización de la normal, que, al igual que el proceso, reciben el nombre de distribuciones estables.

Antes de ver las características fractales que tienen en común estos modelos con la serie Ibex35, vamos a crear el marco teórico que nos permiten analizar esta serie desde la perspectiva de la Geometría Fractal.

Así, vamos a dedicar un primer capítulo a ver que, aunque no existe una definición precisa de fractal, hay una serie de características que hacen que califiquemos a un conjunto como fractal y que la aparición de varias de estas características nos permiten estudiarlo dentro de la Geometría Fractal.

---

<sup>1</sup>La idea de trabajar con los logaritmos de los precios, en vez de con los precios, aparece en 1959 en un artículo de M. F. M. Osborne, *Brownian Motion in the Stock Market* ([59]) se ha mostrado tan prometedora en los resultados que se ha mantenido en los estudios posteriores, ya que, el comportamiento de los incrementos logarítmicos de los precios es más uniforme que el comportamiento de los precios en si mismos.

<sup>2</sup>El primero en 1968 junto a J. W. Van Ness en *Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications* [54] y el segundo en 1960, en *The Pareto-Lévy Law and the Distribution of Income* [46]

Como la generación de la mayoría de los conjuntos fractales se realiza mediante un proceso iterativo cuyo límite es el conjunto fractal que se desea obtener, la primera de estas características es que un conjunto fractal sólo puede ser representado con una cierta aproximación, que dependerá del número de iteraciones, siempre finito, que realicemos en el proceso de su construcción.

Este proceso se realiza mediante conjuntos que forman las sucesivas aproximaciones al conjunto fractal, por lo que para estudiar la convergencia del proceso mediante el concepto de límite, partiendo del espacio métrico donde están inmersos estos conjuntos, construiremos en la primera sección del primer capítulo, sección 1.1, un espacio métrico del que los conjuntos fractales serán elementos: el espacio de los fractales.

Este espacio, que será completo si el espacio métrico original lo es; va a estar formado por el conjunto de los subconjuntos compactos no vacíos del espacio métrico original y una distancia, que también se obtiene a partir de la original, y en él, considerando la nueva distancia, el concepto usual de límite permite estudiar el proceso a través del cual se generan la mayoría de conjuntos fractales.

En la siguiente sección del capítulo, sección 1.2, vamos a analizar las características de escala de un conjunto fractal, asociando a cada conjunto fractal una transformación definida dentro del espacio de los fractales.

Esta transformación, que recibe el nombre de transformación de Hutchinson, se construye a partir de un conjunto de aplicaciones definidas sobre el espacio donde originalmente está inmerso el fractal, conjunto de aplicaciones que recibe el nombre de sistema de funciones iteradas. La transformación de Hutchinson bajo determinadas condiciones será contractiva, en este caso, el sistema de funciones iteradas se califica de hiperbólico y el único punto fijo de la transformación o atractor del sistema será el conjunto fractal.

De esta forma, un conjunto fractal se podrá representar por un conjunto de aplicaciones contractivas, sin más que identificar el atractor del sistema con el propio sistema y tener en cuenta que la representación del conjunto no será única, pues un conjunto puede ser atractor de más de un sistema de funciones iteradas.

Esta representación de un conjunto fractal nos permite poner de manifiesto las características de escala del conjunto y distinguir entre los fractales autosemejantes, donde el sistema está formado sólo por semejanzas, y los fractales autoafines, donde también aparecen afinidades; que es una transformación más general donde los factores de escala pueden ser distintos en cada una de las direcciones de los ejes.

En la última sección del primer capítulo, sección 1.3, vamos a utilizar los sistemas de funciones iteradas para construir una aproximación al conjunto fractal de forma efectiva.

Para construir esta aproximación al conjunto fractal, que además permite representarlo gráficamente, en primer lugar vamos a asociar un código al sistema de funciones iteradas del que es atractor, el cual se obtiene a través de las afinidades que forman el sistema y permite estudiarlo sin más que extraer de él las matrices correspondientes a cada una de las transformaciones (sección 1.3.1).

A continuación, para poder trabajar con listas de puntos, lo que nos va a permitir obtener la aproximación al conjunto fractal de forma efectiva implementando estos algoritmos en el entorno de cálculo MATHEMATICA (sección 1.3.3), modificaremos los dos algoritmos más utilizados para la construcción de fractales como atractores de un sistema de funciones iteradas: el algoritmo determinístico y el algoritmo de iteración aleatoria (sección 1.3.2).

En el siguiente capítulo, capítulo 2, vamos a ver que existen distintos conceptos de dimensión fractal y que la mayor parte de estos conceptos están relacionados con la manera de asignar una medida a un conjunto.

Por este motivo, antes de entrar en el concepto de dimensión, dedicaremos una primera sección, sección 2.1, a la medida de los conjuntos fractales, donde veremos que ninguna de las medidas  $n$ -dimensionales de Lebesgue (longitud, área, volumen, etc.) da una idea válida del tamaño de un conjunto fractal (sección 2.1.1).

Para obtener una medida adecuada a los conjuntos fractales, generalizaremos la medida  $n$ -dimensional de Lebesgue a una medida  $s$ -dimensional válida para valores de  $s$  no necesariamente enteros. Esta medida recibe el nombre de medida  $s$ -dimensional de Hausdorff (sección 2.1.2).

La dimensión de Hausdorff se define en la sección 2.2 y aparece cuando calculamos todas las medidas  $s$ -dimensionales del conjunto y observamos que, al aumentar  $s$ , existe un valor crítico para el cual la cuantía de la medida  $s$ -dimensional de Hausdorff pasa de infinito a cero y que en la mayoría de los conjuntos fractales esta cuantía es finita.

Esto hace que este valor crítico de  $s$  sea el más adecuado para medir este tipo de conjuntos y que, en todos los casos, se defina la dimensión de Hausdorff como el valor crítico de  $s$  donde la medida  $s$ -dimensional de Hausdorff del conjunto pasa de infinito a cero (sección 2.2.1).

Una vez definida la dimensión de Hausdorff, estudiaremos algunas de sus propiedades (sección 2.2.2) y veremos el “principio de distribución de masa”, que nos va a permitir la obtención de cotas inferiores de la dimensión de Hausdorff de un conjunto fractal, lo que, junto con las cotas superiores que surgen de la construcción del conjunto, hace que podamos calcular esta dimensión (sección 2.2.3).

Tras la definición de la dimensión de Hausdorff como referente teórico, en la sección 2.3 nos centraremos en la dimensión de recuento por cajas, cuyo cálculo empírico es posible y que surge cuando se ignoran las irregularidades de un cierto tamaño al calcular la medida del conjunto.

Esta dimensión admite distintas definiciones, todas equivalentes, entre las que está la definición que le da nombre, que aparece cuando recubrimos el conjunto por cajas (cubos  $n$ -dimensionales) de tamaño cada vez menor y se analiza la evolución del número de cajas que lo cortan (sección 2.3.1).

Al estudiar la relación de la dimensión de recuento por cajas con la dimensión de Hausdorff veremos que ésta última siempre es menor o igual que la primera, que la igualdad no se da en general y que sí lo hace bajo ciertas condiciones de regularidad (sección 2.3.2).

Después de estudiar algunas de sus propiedades (sección 2.3.3), en la sección 2.4 veremos que el cálculo de la dimensión de recuento por cajas del grafo de una función continua se simplifica, al relacionar el número de cajas que cortan al grafo con el rango de la función.

Esta relación nos va a llevar a plantear una estimación de la dimensión de recuento por cajas del grafo de una función, estimando a su vez el número de cajas que lo cortan, cuyo análisis realizaremos en el capítulo 4, que es el capítulo donde abordaremos el cálculo empírico de la dimensión.

En la siguiente sección, sección 2.5, veremos que el procedimiento utilizado para construir la medida y la dimensión de Hausdorff permite construir otras medidas que darán lugar a nuevos conceptos de dimensión, relacionados tanto con ésta como con la dimensión de recuento por cajas.

En la última sección del capítulo, sección 2.6, veremos un concepto de dimensión, la dimensión de autosemejanza, que sólo tiene sentido en el caso particular de los fractales autosemejantes y, por tanto, no es aplicable a los fractales autoafines.

Esta dimensión aparece al asociar un sistema de funciones iteradas al conjunto fractal, sistema que en este caso está formado sólo por semejanzas, y en realidad es una dimensión del sistema de funciones iteradas del que es atractor.

Como un conjunto puede ser el atractor de más de un sistema de funciones iteradas, la dimensión de autosemejanza no es una dimensión propia del conjunto fractal, ya que este conjunto puede tener asociada más de una dimensión de autosemejanza.

Sin embargo, veremos que esta dimensión se pueda asociar al conjunto fractal cuando podemos encontrar un abierto no vacío cuyas imágenes por cada una de las transformaciones del sistema sean disjuntas y estén contenidas en este abierto. Además, en este caso, la dimensión de autosemejanza coincide tanto con la dimensión de Hausdorff como con la dimensión de recuento por cajas.

En el capítulo siguiente, capítulo 3, vamos a ver que al estudiar la existencia de relaciones entre los grafos que se obtienen cuando representamos una función en intervalos de distinta longitud, aparecen dos formas de autoafinidad y que una de ellas nos permitirá extender el concepto de autoafinidad a un proceso estocástico para hablar de autoafinidad estadística.

Para analizar ambas formas de autoafinidad, vamos a utilizar distintos modelos de grafos, modelos que además se usarán en el siguiente capítulo para analizar la estimación de la dimensión de recuento por cajas que hemos propuesto.

Así, en la primera sección del capítulo, sección 3.1, vamos a utilizar las funciones de interpolación fractal para ver una primera forma de autoafinidad: la autoafinidad global.

Estas funciones se construyen como atractores de un sistema de funciones iteradas hiperbólico dependiente de una serie de parámetros, por lo que el tipo de autoafinidad que presenta el grafo de la función es el mismo que aparecía en el primer capítulo, en el cual un conjunto fractal se descomponía en distintas partes que tras un cambio de escala y localización son iguales al todo (sección 3.1.1).

Por otra parte, la dimensión de recuento por cajas del grafo de estas funciones va a depender directamente de los parámetros del sistema de funciones iteradas mediante el que se construyen, pudiendo tomar cualquier valor comprendido entre uno y dos, y nos van a proporcionar un primer modelo para analizar empíricamente la estimación propuesta para la dimensión de recuento por cajas del grafo de una función.

En la siguiente sección del capítulo, sección 3.2, vamos a usar la función de Weierstrass, que recibe este nombre por Karl Weierstrass (1815-1897), para ver una nueva forma de autoafinidad: la autoafinidad local.

Antes de analizar este tipo de autoafinidad, veremos que la dimensión de recuento por cajas de su grafo está determinada por uno de los dos parámetros de los que depende, por lo que, al poder tomar este parámetro cualquier valor entre uno y dos, tenemos un nuevo modelo para el análisis empírico de la estimación propuesta (sección 3.2.1).

Aunque el grafo de la función de Weierstrass no se puede descomponer en partes parecidas al todo, en torno al origen aparece la autoafinidad de su grafo cuando, manteniendo el origen como extremo inferior del intervalo, la representamos en intervalos cada vez más pequeños (reducimos la escala horizontal) y observamos que las representaciones obtenidas son prácticamente iguales (sólo difieren en la escala vertical)<sup>3</sup> (sección 3.2.2).

---

<sup>3</sup>En realidad, en un sentido estricto, en la función de Weierstrass no deberíamos hablar de autoafinidad, ya que la igualdad a distintas escalas sólo aparece cuando el factor de reducción

En la siguiente sección, sección 3.3, vamos a extender a un proceso estocástico este tipo de autoafinidad: autoafinidad estadística.

Si interpretamos la primera variable de la función como el tiempo, teniendo en mente la función de Weierstrass, podemos decir que una función es autoafín cuando al cambiar la escala temporal se obtiene una función que sólo difiere de la original en la escala espacial.

Esta interpretación nos permite definir un proceso autoafín como un proceso en el que al cambiar la escala temporal se obtiene un proceso que sólo difiere del original en la escala espacial.

Continuaremos la sección viendo que, bajo ciertas condiciones, el cambio de escala espacial y el cambio de escala temporal están relacionados por una relación de tipo exponencial, donde el exponente que aparece en esta relación recibe el nombre de exponente de autoafinidad del proceso (sección 3.3.1).

En la última sección del capítulo vamos a estudiar las características fractales del movimiento browniano, que es el proceso estocástico del que van a surgir los distintos modelos que vamos a considerar en el último capítulo para describir el comportamiento fractal de la serie Ibex35.

Así, de este proceso, que es un proceso gaussiano con incrementos independientes, veremos que está incluido dentro de los procesos autoafines y que la dimensión del grafo de sus caminos muestrales no es entera (sección 3.3.2).

En el siguiente capítulo, capítulo 4, abordaremos el cálculo empírico de la dimensión de recuento por cajas de un grafo, que se basa en el cálculo del número de cajas que lo cortan cuando se recubre por cajas, y analizaremos si la dimensión que se obtiene mediante la estimación de este número de cajas (estimación propuesta en la sección 2.4), refleja de manera adecuada las características fractales del grafo.

En la sección 4.1 veremos cual es el procedimiento que se sigue habitualmente para el cálculo de la dimensión de recuento por cajas de un conjunto plano y lo adaptaremos para calcular empíricamente la dimensión del grafo de una serie temporal de dos formas: calculando directamente el número de cajas que lo cortan

---

vertical es una potencia del segundo parámetro del que depende la función.

(sección 4.1.1) y estimando este número de cajas mediante su relación con el rango de la función (sección 4.1.2).

Una vez implementado este procedimiento en el entorno MATHEMATICA (sección 4.1.3), en la sección 4.2 vamos a comparar la dimensión que se obtiene mediante el número de cajas que se calcula directamente con la obtenida mediante el número de cajas estimado, utilizando, para ello, series temporales generadas mediante las funciones de interpolación fractal y la función de Weierstrass.

En la siguiente sección, sección 4.3, vamos a ver que si se modifica la definición de dimensión de recuento por cajas y se hace tender el tamaño de las cajas del recubrimiento a infinito, en vez de a cero, se obtiene un nuevo concepto de dimensión: la dimensión global.

Como veremos al analizar el movimiento browniano, esta dimensión hace que, si el tamaño de las cajas del recubrimiento es grande en comparación con los incrementos de la serie, los valores obtenidos mediante el cálculo directo sean los correspondientes a la dimensión global del grafo y que con ellos no sea posible apreciar la dimensión real de éste (a la que por contraposición nos referiremos como dimensión local).

En el último capítulo del trabajo, capítulo 5, analizaremos las características fractales de la serie Ibex35 y propondremos distintos modelos para describirla desde el punto de vista de la Geometría Fractal.

Así, en la primera sección, sección 5.1, analizaremos la autoafinidad estadística de la serie, que se manifiesta tanto en su grafo como en la distribución de sus incrementos, y veremos que es la característica de esta serie que hace que tenga sentido calcular su dimensión de recuento por cajas.

La dimensión que se obtiene empíricamente, en la sección 5.2, no es compatible con el valor que correspondería al movimiento browniano, por lo que a continuación estudiaremos las dos hipótesis que lo definen: la normalidad de la distribución de sus incrementos y la independencia de éstos.

Así, en la sección 5.3, veremos que los incrementos de la serie presentan cierta dependencia, y para describirla, vamos a considerar los movimientos brownia-

nos fraccionarios (sección 5.3.1), que son compatibles con la dimensión obtenida empíricamente y que, como confirma el análisis R/S de la serie (sección 5.3.2), presentan el mismo tipo de dependencia que ésta.

En la última sección, sección 5.4, veremos que la distribución empírica de los incrementos difiere de la distribución normal tanto en la parte central como en las colas y plantearemos describir estas colas mediante las distribuciones estables (sección 5.4.1). Estas distribuciones dan lugar a los movimientos L-estables (sección 5.4.2), que muestran el mismo tipo de comportamiento en las colas que la serie y que, al igual que los movimientos brownianos fraccionarios, son compatibles con la dimensión obtenida empíricamente.



# Capítulo 1

## Los conjuntos fractales

Dentro de la geometría fractal no existe una definición precisa del término fractal que englobe a todos los conjuntos que presentan complejidad a todas las escalas, sino que hay una serie de características que nos permiten hablar de conjuntos fractales.

La primera de las características comunes a los conjuntos fractales es que estos conjuntos se obtienen en el límite de un proceso iterativo, por lo que el primer problema que aparece es analizar si su proceso de construcción es convergente.

Para abordar este problema, en vez de tratar a los conjuntos fractales como subconjuntos del espacio métrico donde están definidos, vamos a considerarlos como elementos de un espacio métrico completo: el espacio de los fractales, espacio que está formado por el conjunto de los subconjuntos compactos no vacíos del espacio métrico original y una distancia, distancia que recibe el nombre de distancia de Hausdorff y es la simetrización de la distancia habitual entre conjuntos.

Este espacio métrico, que tiene la ventaja de incluir a conjuntos que no presentan características propiamente fractales, nos permitirá tratar a los conjuntos fractales como límites de una sucesión de conjuntos y estudiar la convergencia de su proceso de formación mediante el análisis de esta sucesión.

En segundo lugar veremos que estos conjuntos están formados, en cierto sentido, por copias del conjunto total y que la relación que existe entre el conjunto y sus partes hace que los podamos incluir dentro de un marco general para su representación: los sistemas de funciones iteradas.

Los sistemas de funciones iteradas están formados por un conjunto de transformaciones afines cuyas iteraciones convergen, bajo determinadas condiciones a un conjunto límite o atractor.

En este marco, cada fractal será el atractor de un sistema de funciones iteradas y podremos identificar el atractor con el propio sistema, siempre teniendo en cuenta que un conjunto va a poder ser atractor de más de uno de estos sistemas y que, por tanto, esta representación de un conjunto fractal no tiene por que ser única.

De este modo, los sistemas de funciones iteradas ponen de manifiesto las características de escala de un conjunto fractal y nos hacen distinguir entre dos tipos de relaciones entre el conjunto y sus partes: autosemejanza y autoafinidad.

Así, sólo podremos hablar de autosemejanza cuando el sistema de funciones iteradas esté formado por semejanzas y de autoafinidad en el caso más general de los sistemas formados por transformaciones afines, donde los factores de escala en cada una de las direcciones de los ejes pueden ser distintos y las copias no tienen por que ser semejantes.

Terminaremos el capítulo representando un conjunto fractal por una lista de puntos que lo aproxima, obtenida como el atractor de un sistema de funciones iteradas, lo que nos permitirá construir de forma efectiva modelos de grafos con características fractales.

## 1.1 El espacio de los fractales

Para obtener el espacio métrico del que serán elementos los conjuntos fractales, el espacio de los fractales, partimos de un espacio métrico completo  $(X, d)$  y denotamos por  $H(X)$  al conjunto que tiene como elementos todos los subconjuntos compactos de  $X$  no vacíos <sup>1</sup>,

$$H(X) = \{A \subseteq X / A \text{ es compacto no vacío}\},$$

---

<sup>1</sup>Nótese que dados dos conjuntos de  $H(X)$  su unión también pertenece a  $H(X)$ , por ser un conjunto compacto no vacío, y, sin embargo, su intersección puede ser vacía y no estar en  $H(X)$ .

de esta forma, una vez que tengamos definida una distancia, la distancia de Hausdorff, tendremos un espacio métrico que, al igual que el espacio original, será un espacio métrico completo y donde los conjuntos fractales estarán incluidos junto a otros conjuntos.

La distancia entre elementos de  $H(X)$  va a ser la simetrización de la distancia habitual entre conjuntos:

**Definición 1.1** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo <sup>2</sup>.

La distancia del punto  $x \in X$  al conjunto  $B \in H(X)$  se define como

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) / y \in B\}$$

La distancia del conjunto  $A \in H(X)$  al conjunto  $B \in H(X)$  se define como

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) / x \in A\}$$

La distancia de Hausdorff entre dos conjuntos  $A, B \in H(X)$  se define como

$$h_d(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$$



**Proposición 1.1** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo.

La distancia de Hausdorff,  $h_d$ , es una distancia en  $H(X)$ .

### Demostración

Veamos que cumple las propiedades que definen una distancia:

---

<sup>2</sup>En general, en las definiciones se utiliza el ínfimo y el supremo, pero al ser  $A$  y  $B$  compactos, tanto el mínimo como el máximo existen y se alcanzan, con lo que además:

- $\exists y \in B$  tal que  $d(x, B) = d(x, y)$
- $\exists x \in A$  tal que  $d(A, B) = d(x, B)$
- $\exists x \in A, \exists y \in B$  tales que  $d(A, B) = d(x, y)$
- $\exists x \in A, \exists y \in B$  tales que  $h_d(A, B) = d(x, y)$

1.-Simétrica: se sigue directamente de la definición.

2.-Sean  $A, B \in H(X)$ :

- $h_d(A, A) = 0$ : se sigue trivialmente de la definición.
- Si  $A \neq B$  entonces  $h_d(A, B) > 0$ :

Si  $A \neq B$  existe un  $x \in A$  con  $x \notin B$  o existe un  $x \in B$  con  $x \notin A$ , supondremos el primer caso pues en el segundo se demuestra análogamente:

Como  $x$  no pertenece a  $B$  se tiene que  $d(x, B) > 0$ , con lo que al estar  $x$  en  $A$  tenemos que  $d(A, B) > 0$  y, por tanto,  $h_d(A, B) > 0$ .

3.- $h_d(A, B) \leq h_d(A, C) + h_d(C, B)$   $A, B, C \in H(X)$ :

$$\begin{aligned} h_d(A, B) &= \max\{d(A, B), d(B, A)\} \leq \max\{d(A, C) + d(C, B), d(B, C) + d(C, A)\} \\ &\leq \max\{d(A, C), d(C, A)\} + \max\{d(C, B), d(B, C)\} = h_d(A, C) + h_d(C, B). \quad \clubsuit \end{aligned}$$

La generación de conjuntos fractales se realiza, en la mayoría de los casos, mediante un proceso iterativo cuyo límite es el conjunto fractal que se desea obtener. Para ver que este límite coincide con el concepto usual de límite en  $H(X)$ , considerando la distancia de Hausdorff  $h_d$ , conviene utilizar una definición equivalente de esta distancia:

**Proposición 1.2** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo.*

*La distancia de Hausdorff verifica para  $A, B \in H(X)$  y cada  $\epsilon > 0$ <sup>3</sup>:*

$$h_d(A, B) \leq \epsilon \Leftrightarrow A \subseteq B + \epsilon \text{ y } B \subseteq A + \epsilon,$$

con lo que

$$h_d(A, B) = \min\{\epsilon > 0 / A \subseteq B + \epsilon, B \subseteq A + \epsilon\}$$

### Demostración

Demostraremos que  $d(A, B) \leq \epsilon \Leftrightarrow A \subseteq B + \epsilon$ , y por simetría quedará demostrado que  $d(B, A) \leq \epsilon \Leftrightarrow B \subseteq A + \epsilon$ :

- Supongamos que  $d(A, B) \leq \epsilon$  y veamos que  $A \subseteq B + \epsilon$ :

---

<sup>3</sup>La **dilatación de un conjunto**  $S$  mediante bolas de radio  $r$ ,  $S + r$ , es la unión de todas las bolas cerradas de radio  $r$  y centro los puntos de  $S$ , es decir, no es más que añadir una corona de amplitud  $r$  alrededor de todos sus puntos.

Si  $x \in A$ , al ser  $d(A, B) \leq \epsilon$ , se tiene que  $d(x, B) \leq \epsilon$ , con lo que  $x \in B + \epsilon$ .

- Supongamos que  $A \subseteq B + \epsilon$  y veamos que  $d(A, B) \leq \epsilon$ :

Sea  $x \in A$ , como  $A \subseteq B + \epsilon$ ,  $\exists y \in B/d(x, y) \leq \epsilon$ , con lo que  $d(x, B) \leq \epsilon$ . ♣

De esta forma, tenemos una definición de la distancia de Hausdorff que nos permite tratar adecuadamente el concepto de límite de una sucesión de conjuntos de  $H(X)$ ,  $\{E_n : n \geq 1\}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E \iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 / \forall n \geq n_0 : E_n \subseteq E + \epsilon \text{ y } E \subseteq E_n + \epsilon.$$

En primer lugar, vamos a ver que el límite de una cadena descendente de compactos no vacíos es la intersección de la cadena y que esta intersección también es un compacto no vacío, de esta forma, un proceso de eliminación de abiertos que parte de un compacto para la obtención de un conjunto fractal, convergerá en la métrica de Hausdorff a este mismo conjunto fractal.

**Teorema 1.3** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo.*

*Sea  $\{E_n : n \geq 1\} \subseteq H(X)$  una cadena descendente de compactos no vacíos,*

$$E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots$$

*y sea  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$  su intersección, entonces:*

$$E \in H(X) \text{ y } E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \text{ en la métrica de Hausdorff}$$

### Demostración

1.- $E$  es no vacío pues tenemos una cadena descendente de subconjuntos cerrados, al ser compactos, del compacto  $E_1$ .

2.- $E$  es compacto pues es cerrado, al ser intersección de cerrados, y está contenido en el compacto  $E_1$ .

3.-Para ver que  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E$  basta ver que existe un  $N$  tal que  $E_N \subseteq E + \epsilon$ , al ser  $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$  una cadena descendente:

Consideremos el conjunto

$$G = \bigcup \{B(x, \epsilon) / x \in E\}$$

que es abierto, está contenido en  $E + \epsilon$  y contiene a  $E$ .

Como  $E$  es la intersección de una cadena descendente de conjuntos cerrados, al ser compactos, existirá un elemento de la cadena,  $E_N$ , contenido en el conjunto abierto y, por tanto, contenido en  $E + \epsilon$ . ♣

**Ejemplo 1.1** *El triángulo de Sierpinski.*

El primer conjunto fractal que vamos a ver recibe el nombre de triángulo de Sierpinski, por el matemático polaco Wadaw Sierpinski (1882-1969) que la introdujo en 1915, y también recibe el nombre de alfombra con motivos triangulares por su aspecto (figura 1.1).

El triángulo de Sierpinski, al igual que otros fractales, se obtiene como límite al aplicar un proceso iterativo, con lo que sólo puede ser representado con una cierta aproximación, que dependerá del número de iteraciones, siempre finito, que realicemos en el proceso de su construcción.

El proceso de construcción comienza considerando un triángulo equilátero  $E_0$ , por ejemplo el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $(1, 0)$  (figura 1.1):

$$E_0 = T[(0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (1, 0)].$$

Al unir los puntos medios de sus lados este triángulo queda dividido en cuatro triángulos iguales, de los cuales se elimina el triángulo central para quedarnos con los tres triángulos restantes.

Así, en esta primera fase, tenemos un conjunto  $E_1$  formado por tres triángulos equiláteros, cada uno con la cuarta parte del área del triángulo de partida y, por tanto, semejantes con razón de semejanza  $\frac{1}{2}$ :

$$E_1 = E_{11} \cup E_{12} \cup E_{13}.$$

El proceso se repite con cada uno de los tres triángulos, de forma que después de  $k$ -aplicaciones del proceso obtenemos la  $k$ -ésima aproximación al conjunto, que se nota por  $E_k$  y recibe el nombre de prefractal, formada por  $3^k$  triángulos, cada uno

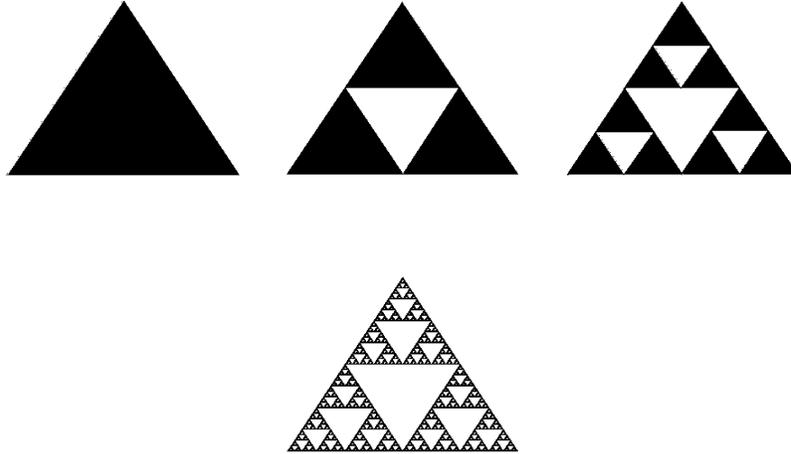


Figura 1.1: Construcción del triángulo de Sierpinski

con área  $(\frac{1}{4})^k$  del área del triángulo de partida:

$$E_k = \bigcup_{i=1}^{3^k} E_{ki}.$$

El triángulo de Sierpinski será el conjunto de puntos del plano que permanecen después de aplicar infinitas veces el proceso:

$$E = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k.$$

En este proceso los conjuntos  $E_k$  forman una sucesión decreciente de conjuntos compactos, ya que  $E_{k+1}$  está incluido en  $E_k$  para todo  $k$ ,  $E_1$  está acotado y los conjuntos  $E_k$  son cerrados por ser unión finita de intervalos cerrados, por lo que el teorema anterior nos garantiza que el triángulo de Sierpinski es no vacío y que es el límite de la sucesión en la métrica de Hausdorff. ♣

Finalizaremos viendo que  $(H(X), h_d)$  es un espacio métrico completo, con lo que para garantizar la convergencia del proceso de construcción de un conjunto fractal sólo tendremos que probar que la sucesión de conjuntos que da lugar al conjunto fractal es una sucesión de Cauchy en la métrica de Hausdorff.

Para ver que  $(H(X), h_d)$  es un espacio métrico completo, partiremos de una sucesión de conjuntos que cumpla la condición de Cauchy en la métrica de Hausdorff

y construiremos una cadena descendente de conjuntos con el mismo límite que la sucesión original, contenida en la unión de todos los conjuntos que la forman.

Como necesitamos que el conjunto de partida sea compacto, consideramos la clausura de esta unión para obtener un conjunto cerrado y nos aseguraremos que está totalmente acotada <sup>4</sup>, ya que, en un espacio métrico completo un conjunto es compacto si y sólo si es cerrado y está totalmente acotado <sup>5</sup>:

**Lema 1.4** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo.*

*Si  $\{E_n : n \geq 1\} \subseteq H(X)$  satisface la condición de Cauchy para la métrica de Hausdorff, el conjunto*

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$$

*está totalmente acotado*

### Demostración

Para ver que  $F = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$  está totalmente acotado, para cada  $\epsilon > 0$  construiremos una  $\epsilon$ -red que lo recubra, así, sea  $\epsilon > 0$ :

Como  $\{E_n : n \geq 1\}$  satisface la condición de Cauchy para la métrica de Hausdorff  $\exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 E_n \subseteq E_m + \epsilon'$  y  $E_m \subseteq E_n + \epsilon'$ . En particular

$$\forall n \geq n_0 E_n \subseteq E_{n_0} + \epsilon'.$$

Al ser  $E_1 \cdots E_{n_0}$  compactos su unión también lo es, con lo que  $E_1 \cup \cdots \cup E_{n_0}$

<sup>4</sup>Un conjunto  $A \subseteq X$  está **totalmente acotado** si  $\forall \epsilon > 0$  existe un conjunto finito de puntos ( $\epsilon$ -red)  $\{y_1, \dots, y_k\} \subseteq X$  tal que  $\forall x \in A d(x, y_i) < \epsilon$  para algún  $y_i$ . Es decir:

$$\forall \epsilon > 0 \exists y_1, \dots, y_k \in X / A \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \epsilon).$$

Un conjunto totalmente acotado está acotado y, aunque en general el recíproco no es cierto, en el caso particular de  $(\mathbb{R}^n, d_e)$  son condiciones equivalentes (Barnsley [4] pg. 20 y pg. 423).

<sup>5</sup>En un espacio métrico (completo o no) un conjunto es compacto si y sólo si es completo y está totalmente acotado (Franz [38] pg. 79), como además el espacio métrico es completo y, en este caso, un conjunto es completo si y sólo si es cerrado (Franz [38] pg. 73) se tiene que, efectivamente, un conjunto es compacto si y sólo es cerrado y está totalmente acotado.

En el caso particular de  $(\mathbb{R}^n, d_e)$ , como totalmente acotado es equivalente a acotado, tenemos la caracterización habitual donde un conjunto es compacto si y sólo es cerrado y está acotado.

está totalmente acotado y, por tanto, existe una  $\epsilon'$ -red  $\{y_1, \dots, y_k\}$  tal que

$$E_1 \cup \dots \cup E_{n_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \epsilon').$$

Veamos que  $\{y_1, \dots, y_k\}$  es una  $\epsilon$ -red para  $F$ , es decir,  $F \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \epsilon)$ . Para ello, sea  $x \in F$  y veamos que  $x \in \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \epsilon)$ :

Como  $F = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$ , existe un  $x' \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  tal que  $d(x, x') < \epsilon'$  y como  $x' \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , existe un  $N$  tal que  $x' \in E_N$ :

Si  $N > n_0$ , tenemos que  $E_N \subseteq E_{n_0} + \epsilon'$ , como  $x' \in E_N$ , existe  $x'' \in E_{n_0}$  tal que  $d(x', x'') < \epsilon'$ , como  $E_{n_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \epsilon')$ , existe  $y_i$  tal que  $d(x'', y_i) < \epsilon'$ , con lo que  $d(x, y_i) \leq d(x, x') + d(x', x'') + d(x'', y_i) < \epsilon' + \epsilon' + \epsilon' < \epsilon$  y, por tanto,  $x \in \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \epsilon)$ .

Si  $N \leq n_0$  tenemos que  $E_N \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \epsilon')$ , con lo que existe  $y_i$  que cumple  $d(x', y_i) < \epsilon'$ , de esta forma  $d(x, y_i) \leq d(x, x') + d(x', y_i) < \epsilon' + \epsilon' < \epsilon$ , y, por tanto también  $x \in \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \epsilon)$ . ♣

Estamos ya en condiciones de demostrar que  $(H(X), h_d)$  es un espacio métrico completo <sup>6</sup>, una vez probado, podremos obtener un conjunto fractal como el conjunto límite de una sucesión de conjuntos sin más que comprobar que esta sucesión es una sucesión de Cauchy en la métrica de Hausdorff.

**Teorema 1.5** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo.*

*$(H(X), h_d)$  es un espacio métrico completo.*

### Demostración

Sea  $\{E_n : n \geq 1\} \subseteq H(X)$  satisfaciendo la condición de Cauchy para la métrica de Hausdorff. Definimos

$$F_n = \overline{\bigcup_{k \geq n} E_k}$$

---

<sup>6</sup>Una demostración distinta se puede encontrar en Barnsley[4] pp. 35-37. En esta demostración se establece además que el conjunto límite de la sucesión  $\{E_n\}_{n \geq 1}$  es el conjunto de puntos a los que convergen las sucesiones de Cauchy de la forma  $\{x_n : x_n \in E_n\}_{n \geq 1}$ .

1.-Cada  $F_n$  es compacto pues son cerrados contenidos en  $F_1$  y  $F_1$  es compacto, al ser cerrado y estar totalmente acotado por el lema anterior.

2.- $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$  es el límite de  $\{F_n : n \geq 1\}$  en la métrica de Hausdorff al ser una cadena descendente  $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$  (teorema 1.3).

3.-Veamos que  $F$  es también el límite de la sucesión original  $\{E_n : n \geq 1\}$ :

Sea  $\epsilon > 0$

• Por el apartado 2

$$\exists N_1 / \forall n > N_1 \quad F \subseteq F_n + \frac{\epsilon}{2} \text{ y } F_n \subseteq F + \frac{\epsilon}{2},$$

para  $n > N_1$  tenemos que  $\bigcup_{k \geq n} E_k \subseteq \overline{\bigcup_{k \geq n} E_k} = F_n \subseteq F + \frac{\epsilon}{2} \subseteq F + \epsilon$  con lo que

$$\forall n > N_1 \quad E_n \subseteq F + \epsilon.$$

• Al ser  $\{E_n : n \geq 1\}$  de Cauchy en la métrica de Hausdorff:

$$\exists N_2 / \forall n, m > N_2 \quad E_m \subseteq E_n + \frac{\epsilon}{2} \text{ y } E_n \subseteq E_m + \frac{\epsilon}{2},$$

para  $n > N_2$  y  $\forall m > N_2 \quad E_m \subseteq E_n + \frac{\epsilon}{2}$  entonces  $\bigcup_{m \geq N_2} E_m \subseteq E_n + \frac{\epsilon}{2}$  tomando clausura

$$F_{N_2} = \overline{\bigcup_{m \geq N_2} E_m} \subseteq \overline{E_n + \frac{\epsilon}{2}} \subseteq E_n + \epsilon$$

y por tanto  $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F_{N_2} \subseteq E_n + \epsilon$  con lo que

$$\forall n > N_2 \quad F \subseteq E_n + \epsilon.$$

En resumen, para  $n > \max\{N_1, N_2\}$  se tiene que

$$E_n \subseteq F + \epsilon \text{ y } F \subseteq E_n + \epsilon$$

con lo que  $F = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ . ♣

En el caso particular de una cadena ascendente de compactos no vacíos que satisface la condición de Cauchy para la métrica de Hausdorff se tiene:

**Corolario 1.6** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo.*

Sea  $\{E_n : n \geq 1\} \subseteq H(X)$  una cadena ascendente de compactos no vacíos,

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots$$

que satisface la condición de Cauchy para la métrica de Hausdorff:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}.$$

### Demostración

En la demostración del teorema se ve que este límite es  $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$  con  $F_k = \overline{\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n}$ . Como la cadena es ascendente, todos los  $F_k$  son iguales al primero y, por tanto, su intersección es  $F_1 = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$ . ♣

Como para que una cadena ascendente satisfaga la condición de Cauchy para la métrica de Hausdorff es suficiente que esté totalmente acotada, una cadena ascendente contenida en un compacto siempre tiene límite y éste es la clausura de la unión de todos los conjuntos de la cadena.

### **Ejemplo 1.2** *La curva de von Koch.*

La curva de von Koch recibe este nombre por el matemático sueco Helge von Koch que fue quien la introdujo. Como su nombre indica este conjunto fractal es una curva, y al igual que el triángulo de Sierpinski (ejemplo 1.1) se obtiene mediante un procedimiento iterativo sencillo.

El proceso de construcción parte de un segmento rectilíneo horizontal  $E_0$ , por ejemplo el segmento de extremos los puntos  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$

$$E_0 = L[(0, 0), (1, 0)].$$

Este segmento se divide en tres partes iguales y reemplazamos el tercio central por un triángulo equilátero del que hacemos desaparecer su base.

Así, en esta primera, fase tenemos un conjunto  $E_1$  formado por cuatro segmentos con longitud  $1/3$  del de partida,

$$E_1 = E_{11} \cup E_{12} \cup E_{13} \cup E_{14},$$

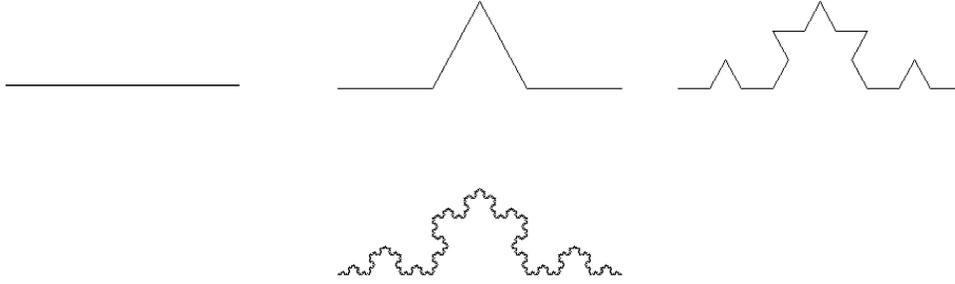


Figura 1.2: Construcción de la curva de Von Koch

que en este caso son los segmentos que unen los puntos  $(0, 0)$ ,  $(\frac{1}{3}, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$ ,  $(\frac{2}{3}, 0)$  y  $(1, 0)$ .

Repitiendo el proceso sobre cada uno de los segmentos, en el paso  $k$ -ésimo tendríamos  $4^k$  segmentos, cada uno de longitud  $(\frac{1}{3})^k$  del de partida.

El conjunto que obtenemos después de haber realizado la  $k$ -ésima fase del proceso, prefactal o  $k$ -ésima aproximación al conjunto, se nota por  $E_k$ :

$$E_k = \bigcup_{i=1}^{4^k} E_{ki}.$$

La curva límite obtenida después de aplicar infinitas veces este proceso es lo que denominamos curva de von Koch:

$$E = \lim_{k \rightarrow \infty} E_K$$

Al contrario que en la construcción del triángulo de Sierpinski el proceso de construcción no se hace mediante una cadena descendente de compactos, con lo que no tenemos garantía de la convergencia de este proceso. Sin embargo, como hemos probado que  $(H(\mathbb{R}^2), h_d)$  es completo, sólo necesitamos ver que la sucesión de conjuntos que da lugar a la curva de von Koch es de Cauchy en la métrica de Hausdorff.

Para ello, basta observar que en cada paso la distancia de Hausdorff de un prefactal a otro disminuye en un tercio, con lo que si consideramos  $n, m \in \mathbb{N}$  y suponemos que  $n$  es mayor que  $m$  se tiene que:

$$h_d(E_m, E_n) \leq h_d(E_m, E_{m+1}) + \cdots + h_d(E_{n-1}, E_n) =$$

$$\frac{1}{3^m}h_d(E_0, E_1) + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}h_d(E_0, E_1) \leq \frac{h_d(E_0, E_1)}{3^m(1 - \frac{1}{3})},$$

que, a su vez, es menor que  $\epsilon$  para todo  $n$  y  $m$  mayores que un cierto  $n_0$ . ♣

**Ejemplo 1.3** *La curva de von Koch (construcción alternativa).*

En la demostración del teorema anterior hemos visto que si el proceso de construcción de un fractal no se hace mediante una cadena descendente de compactos, como sucede con la curva de von Koch, se puede obtener una cadena descendente de conjuntos compactos no vacíos,  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$  con  $F_n = \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k}$  y  $E_k$  la  $k$ -ésima aproximación al conjunto, cadena que da lugar al mismo conjunto y que a veces se usa para el estudio de alguna de sus características.

Sin embargo, en el caso de la curva de von Koch se utiliza una construcción alternativa mediante una cadena descendente de conjuntos compactos no vacíos que es más sencilla de manejar.

Esta construcción (figura 1.3) parte de un triángulo isósceles cuyo ángulo mayor es de  $120^\circ$ ,  $E'_0$ .

En este triángulo, tomando como base el lado mayor, hacemos desaparecer un triángulo con la misma altura y un tercio de la base, de forma que obtenemos un conjunto formado por dos triángulos iguales, sobre los que repetimos el proceso.

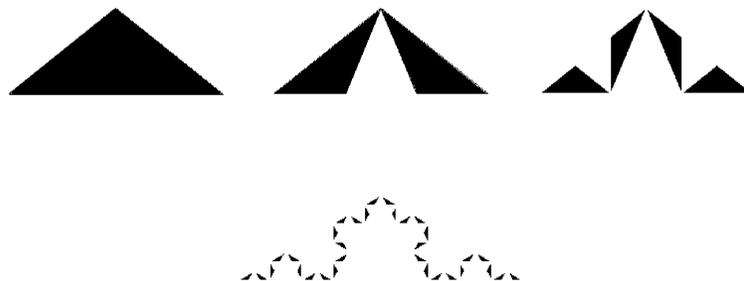


Figura 1.3: Construcción alternativa de la curva de Von Koch

Después de  $k$ -aplicaciones de este proceso, obtenemos  $2^k$  triángulos que forman la  $k$ -ésima aproximación al conjunto

$$E'_k = \bigcup_{i=1}^{2^k} E'_{ki}.$$

Estos conjuntos  $E'_k$  son cerrados y forman una sucesión decreciente, de este modo, como  $E'_1$  está acotado, tenemos una cadena descendente de conjuntos cerrados contenidos en un compacto, con lo que su intersección es un compacto no vacío

$$E = \bigcap_{k=0}^{\infty} E'_k,$$

que, aplicando el teorema 1.3, coincide con el límite de la cadena en la métrica de Hausdorff.

Quedaría por ver que este límite coincide con el límite de la anterior construcción de la curva de von Koch, lo que tendrá que esperar a la siguiente sección, donde vamos a asociar a cada conjunto fractal una aplicación contractiva cuyo único punto fijo será el conjunto fractal. Una vez que veamos como se obtiene esta aplicación, podremos garantizar que ambos procesos de construcción coinciden si establecemos que las aplicaciones que surgen de cada una de las construcciones tienen el mismo atractor. ♣

## 1.2 Auto semejanza y autoafinidad: sistemas de funciones iteradas

Para analizar las características de escala de los conjuntos fractales, vamos a asociar a cada conjunto una aplicación en el espacio métrico completo  $(H(X), h_d)$ , de forma que bajo determinadas condiciones esta aplicación sea contractiva y su único punto fijo sea el conjunto fractal <sup>7</sup>.

Esta transformación en  $H(X)$  la vamos a construir a partir de un conjunto de transformaciones en el espacio original  $X$ :

---

<sup>7</sup>En un espacio métrico  $(X, d)$  una **transformación**  $T : X \mapsto X$  es **contractiva** si existe una constante  $0 \leq c < 1$ , que se denomina factor de contracción de  $T$ , tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq c d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

En este caso, la transformación es continua y tiene un único punto fijo  $\hat{x} \in X$ , que es el límite de la sucesión  $\{x_n\}$  con  $x_n = T(x_{n-1})$  para cualquier punto inicial  $x_0 \in X$ , verificándose además que  $d(x_n, x_0) = \frac{d(x_1, x_0)}{1-c}$ . (Delgado [23] pp. 59-63).

**Definición 1.2** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo.

Un conjunto finito de transformaciones continuas en  $(X, d)$

$$w_n : X \mapsto X, \quad 1 \leq n \leq N,$$

recibe el nombre de **sistema de funciones iteradas**, IFS (del inglés “Iterated Function System”), y se denota por  $\{X, w_n, n = 1, \dots, N\}$ .

Este sistema tiene asociada una transformación en  $(H(X), h_d)$  que recibe el nombre de **transformación de Hutchinson** del sistema y se define por

$$W : A \in H(X) \mapsto \bigcup_{n=1}^N w_n(A) \in H(X). \quad \clubsuit$$

Si  $A$  es un compacto no vacío cada  $w_i(A)$  pertenece a  $H(X)$ , pues  $w_i(A)$  es compacto, al ser  $w_i$  continua <sup>8</sup>, y no es vacío, al no serlo  $A$ . De esta forma, como  $W(A)$  es la unión de todos los  $w_i(A)$  y esta unión es finita,  $W(A)$  es compacto no vacío y, por tanto, pertenece a  $H(X)$ , con lo que la transformación de Hutchinson asociada al sistema está bien definida.

Para que esta transformación sea contractiva y tenga un punto fijo, necesitamos imponer que las transformaciones originales sean contractivas:

**Proposición 1.7** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo.

Sea  $\{X, w_n, n = 1, \dots, N\}$  un sistema de funciones iteradas formado por aplicaciones contractivas en  $(X, d)$ , con factores de contracción respectivos  $r_1, \dots, r_n$ .

La transformación de Hutchinson asociada al sistema es contractiva en  $(H(X), h_d)$ , con factor de contracción  $r = \max\{r_1, \dots, r_n\}$ .

### Demostración

• Veamos en primer lugar que cada  $w_i$  es contractiva en  $(H(X), h_d)$ .

Sean  $A, B \in H(X)$ :

$$\begin{aligned} d(w_i(A), w_i(B)) &= \max_{x \in w_i(A)} \min_{y \in w_i(B)} \{d(x, y)\} = \max_{x \in A} \min_{y \in B} \{d(w_i(x), w_i(y))\} \leq \\ \max_{x \in A} \min_{y \in B} \{r_i d(x, y)\} &= r_i \max_{x \in A} \min_{y \in B} \{d(x, y)\} = r_i d(A, B). \end{aligned}$$

<sup>8</sup>En un espacio métrico, la imagen de un conjunto compacto por una aplicación continua es un conjunto compacto (Franz [38] pg. 65.)

Análogamente se prueba que  $d(w_i(B), w_i(A)) \leq r_i d(B, A)$ , con lo que

$$h_d(w_i(A), w_i(B)) \leq r_i h_d(A, B).$$

• Veamos que  $W$  es contractiva en  $(H(X), h_d)$  con factor de contracción  $r$ :

Sean  $A, B \in H(X)$  y sea  $s = h_d(A, B)$ :

Por la definición de distancia de Hausdorff, a través de la dilatación de un conjunto (proposición 1.2),  $A \subseteq B + s$  y, al ser  $w_i$  contractiva con factor de contracción  $r_i$ ,  $w_i(A) \subseteq w_i(B) + r_i s$ . Si consideramos la unión en  $i$  se tiene que

$$W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A) \subseteq \bigcup_{n=1}^N (w_n(B) + r_n s) \subseteq \left( \bigcup_{n=1}^N w_n(B) \right) + \max_{1 \leq i \leq N} \{r_i s\} = W(B) + rs.$$

Análogamente se tiene que  $W(B) \subseteq W(A) + rs$ , y, por tanto,

$$h_d(W(A), W(B)) \leq rs = r h_d(A, B). \quad \clubsuit$$

**Definición 1.3** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo.

Diremos que un sistema de funciones iteradas,  $\{X, w_n, n = 1, \dots, N\}$ , es **hiperbólico** si está formado por transformaciones contractivas.

En este caso, el único punto fijo de la transformación de Hutchinson del sistema,  $F \in H(X)$ , recibe el nombre de **atractor del sistema** y verifica

$$F = \bigcup_{n=1}^N w_n(F)$$

con  $F = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(A) \quad \forall A \in H(X)$ . ♣

En los sistemas de funciones iteradas formados sólo por semejanzas, **sistemas de funciones iteradas autosemejantes**, su atractor está formado por varias copias a escala del conjunto total

$$F = \bigcup_{n=1}^N w_n(F) = \bigcup_{n=1}^N r_n F,$$

con  $r_n$  el factor de escala de la transformación  $w_n$ .

Esta característica recibe el nombre de autosemejanza y es importante señalar que sólo podemos hablar de ella cuando el sistema de funciones iteradas es autosemejante, ya que en el caso más general de los sistemas formados por transformaciones

afines, **sistemas de funciones iteradas autoafines**, los factores de escala en cada una de las direcciones de los ejes son distintos y las copias no son semejantes. Como estas copias son afines, en este caso hablaremos de autoafinidad.

En ambos casos, un conjunto fractal se podrá representar por un conjunto de aplicación contractivas, sin más que identificar el atractor del sistema con el propio sistema y tener en cuenta que la representación del conjunto no será única, pues un conjunto puede ser atractor de más de un sistema <sup>9</sup>.

**Ejemplo 1.4** *La curva de von Koch (ejemplos 1.2 y 1.3).*

En la primera construcción de la curva de von Koch se observa que si construimos la curva sobre cada uno de los cuatro segmentos que forman la primera aproximación se obtienen cuatro versiones a escala  $\frac{1}{3}$  de la curva completa, con lo que si consideramos las semejanzas que transforman esta primera aproximación en cada una de las cuatro partes que forman la segunda aproximación,

$$\begin{aligned} w_1(t, x) &= \left(\frac{t}{3}, \frac{x}{3}\right) & w_2(t, x) &= \left(\frac{2+t-\sqrt{3}x}{6}, \frac{\sqrt{3}t+x}{6}\right) \\ w_3(t, x) &= \left(\frac{3+t+\sqrt{3}x}{6}, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}t+x}{6}\right) & w_4(t, x) &= \left(\frac{2+t}{3}, \frac{x}{3}\right), \end{aligned}$$

obtenemos un sistema de funciones iteradas contractivo formado por cuatro semejanzas de razón  $\frac{1}{3}$ , cuyas transformaciones hacen que en cada paso de la construcción de la curva se tenga que  $E_n = W(E_{n-1})$  y, por tanto,  $E_n = W^n(E_0)$ . De esta forma, el sistema de funciones iteradas tiene como punto fijo la curva de von Koch.

En la segunda construcción de la curva se observa que si la construimos sobre cada uno de los dos triángulos que forman la primera aproximación, se obtienen dos versiones a escala  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  de la curva completa, con lo que de forma análoga podemos representarla mediante un sistema de funciones iteradas formado por dos semejanzas de razón  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

---

<sup>9</sup>El problema de encontrar un sistema del que sea atractor un conjunto dado nos lo resuelve el teorema del collage, este teorema nos garantiza que si tengo un conjunto cualquiera,  $I$ , y consigo encontrar un conjunto de aplicaciones contractivas  $w_1, \dots, w_N$  de forma que la imagen de  $I$  por  $W$  se parezca a  $I$ ,  $h_d(I, W(I)) < \epsilon$ , el atractor del sistema,  $F$ , también se parecerá a  $I$ ,  $h_d(I, F) < \frac{\epsilon}{1-s}$  (Delgado[23] pp. 72-73).

Para ver que los sistemas de funciones iteradas asociados a cada una de las construcciones de la curva de von Koch tienen el mismo atractor, en la segunda construcción nos quedamos con los términos pares de la sucesión y observamos que las transformaciones que pasan de uno a otro son las mismas que aparecen en la primera construcción de la curva. Al ser único el atractor de un sistema de funciones iteradas, el límite de la sucesión asociada a la primera construcción coincide con el límite de la sucesión de términos pares asociada a la segunda construcción y, por tanto, con el límite de la sucesión completa. ♣

Cuando estemos interesados en ver como un sistema de funciones iteradas actúa sobre un conjunto compacto concreto, los sistemas de funciones iteradas con condensación nos van a permitir construir un sistema equivalente, cuyo espacio métrico es compacto y que contiene al conjunto en el que estamos interesados.

Así, dado un conjunto  $C \in H(X)$  y un sistema de funciones iteradas, obtenemos un **sistema de funciones iteradas con conjunto de condensación  $C$**  cuando añadimos la transformación de condensación asociada al conjunto al sistema de funciones iteradas, donde la **transformación de condensación** asociada al conjunto  $C \in H(X)$  no es más que la aplicación constante

$$T_C : A \in H(X) \mapsto C \in H(X).$$

Como esta transformación es contractiva con factor de contracción 0, cuando se añade a un sistema de funciones iteradas se obtiene un nuevo sistema de funciones iteradas que mantiene el mismo factor de contracción que el sistema original, de esta forma, cuando el sistema de funciones iteradas original es hiperbólico el sistema de condensación asociado también lo es:

**Teorema 1.8** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo.*

*Sean  $\{X, w_n : n = 1, \dots, N\}$  un sistema de funciones iteradas hiperbólico con factor de contracción  $r$  y  $w_0$  una transformación de condensación con conjunto de condensación  $C$ .*

La transformación en  $(H(X), h_d)$  asociada al nuevo sistema de funciones

$$W_0 : A \in H(X) \mapsto \bigcup_{n=0}^N w_n(A) \in H(X)$$

es contractiva con factor de contracción  $r$  y su único punto fijo es

$$\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} W^n(C)}$$

donde  $W$  es la transformación de Hutchinson asociada al sistema original.

### Demostración

$W_0$  es contractiva con factor de contracción  $r$ :

Al ser el sistema original hiperbólico con factor de contracción  $r$  se tiene que  $h_d(W(A), W(B)) \leq r h_d(A, B)$ , con lo que

$$h_d(W_0(A), W_0(B)) = h_d(C \cup W(A), C \cup W(B)) \leq \max\{h_d(C, C), h_d(W(A), W(B))\} = h_d(W(A), W(B)) \leq r h_d(A, B).$$

Por tanto,  $W_0$  tiene un único punto fijo,  $F$ , que verifica

$$F = \bigcup_{n=0}^N w_n(F) \text{ con } F = \lim_{n \rightarrow \infty} W_0^n(A) \quad \forall A \in H(X),$$

con lo que si tomamos como conjunto inicial  $A = C$ , se tiene que  $F = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$  con  $C_n = W_0^n(C)$ .

Veamos por inducción que  $C_n = C \cup W(C) \cup \dots \cup W^n(C)$ :

- $W_0(C) = w_0(C) \cup W(C) = C \cup W(C)$
- $W_0^k(C) = W_0(W_0^{k-1}(C)) = w_0(W_0(C)) \cup W(W_0^{k-1}(C)) = C \cup W(W_0^{k-1}(C))$   
por hipótesis de inducción esto es  
 $C \cup W(C \cup W(C) \cup \dots \cup W^{k-1}(C)) = C \cup W(C) \cup W^2(C) \cup \dots \cup W^k(C)$ .

Como  $C_n$  es una cadena ascendente de conjuntos, su límite se obtiene por el corolario 1.6 y es  $\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n}$ , es decir,  $\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} W^n(C)} = \overline{C \cup W(C) \cup \dots \cup W^n(C) \dots}$ . ♣

De esta forma, el atractor de un sistema de funciones iteradas con conjunto de condensación  $C$  se obtiene como el límite de una cadena ascendente en la que en

cada paso se añaden copias a escala cada vez menor del conjunto  $C$ , lo que hace que sean especialmente útiles en los procesos de ramificación donde a partir de un conjunto se van añadiendo nuevos conjuntos de tamaño más pequeño (figura 1.4).

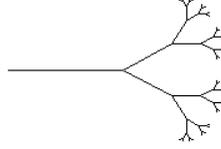


Figura 1.4: Un proceso de ramificación donde a partir de un segmento se van añadiendo en uno de sus extremos segmentos de tamaño más pequeño

**Corolario 1.9** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo.

Sean  $\{X, w_n : n = 1, \dots, N\}$  un sistema de funciones iteradas hiperbólico y  $K$  un compacto no vacío.

Existe otro compacto no vacío,  $\tilde{K}$ , que contiene a  $K$  y tal que

$$\{\tilde{K}, w_n : n = 1, \dots, N\}$$

es un sistema de funciones iteradas cuyo espacio métrico es compacto.

### Demostración

Si consideramos el sistema de funciones iteradas con conjunto de condensación  $K$  asociado al sistema  $\{X, w_n : n = 1, \dots, N\}$ , su atractor,  $\tilde{K} = \bigcup_{n=0}^{\infty} W^n(K)$ , es un compacto no vacío y tal que  $\tilde{K} \supseteq K$  y  $w_n(\tilde{K}) \subseteq \tilde{K} \forall n$ . ♣

## 1.3 Representación de conjuntos fractales

En esta última sección vamos a representar, como el atractor de un sistema de funciones iteradas, un conjunto fractal por una lista de puntos que lo aproxime, lo que nos permitirá utilizar las funciones de interpolación fractal como modelos de grafos con características fractales, funciones que veremos en la sección 3.1 y que utilizaremos en el análisis empírico del cálculo de la dimensión de recuento por cajas (sección 4.2).

Para obtener la lista de puntos que aproxima al atractor vamos a utilizar los dos algoritmos que aparecen normalmente en la literatura, determinístico y de iteración aleatoria, modificándolos de forma que podamos representar cada conjunto por una lista de puntos <sup>10</sup>.

### 1.3.1 Código de un sistema de funciones iteradas

Cuando el sistema de funciones iteradas está formado sólo por afinidades para describir el sistema, y por tanto el atractor, nos basta con dar los elementos de las matrices asociadas a las afinidades y sus vectores de traslación, con lo que si disponemos estos elementos en una matriz el atractor del sistema quedará representado por dicha matriz, matriz que recibe el nombre de **código del sistema de funciones iteradas**. De esta forma, cada conjunto fractal que sea atractor de un sistema de funciones iteradas tiene asociado un código que, aunque no permite identificar de forma única al fractal, identifica de forma única al sistema del que es atractor.

En el caso particular de  $\mathbb{R}^2$ , un sistema de funciones iteradas formado por  $n$  afinidades

$$w_i(t, x) = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}$$

podemos describirlo mediante el código:

$w_1$	$a_1$	$b_1$	$c_1$	$d_1$	$e_1$	$f_1$
$\vdots$						
$w_n$	$a_n$	$b_n$	$c_n$	$d_n$	$e_n$	$f_n$

De esta forma, un sistema de funciones iteradas se identifica con una matriz sobre la que podemos estudiar distintas características del sistema, sin más que extraer de cada una de sus filas las matrices correspondientes a cada una de las transformaciones del sistema.

---

<sup>10</sup>Para ver otras construcciones de conjuntos fractales distintas a los sistemas de funciones iteradas, se puede utilizar Aguilera, [1], que también usa para las implementaciones el entorno MATHEMATICA.

En particular, podemos comprobar que el sistema es hiperbólico, calcular el factor de contracción del sistema y ver si las transformaciones del sistema son semejanzas <sup>11</sup>

Cuando las transformaciones afines son semejanzas y están dadas por la razón de semejanza,  $r_n$ , el ángulo de rotación,  $\theta_n$ , y el vector de traslación,  $(e_n, f_n)$ ,

$$h_n \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = r_n \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\text{sen}(\theta_n) \\ \text{sen}(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

tenemos otro código para el sistema.

Este código recibe el nombre de código corto y se representa por una matriz con sólo cuatro columnas:

$w_1$	$r_1$	$ang_1$	$e_1$	$f_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$w_n$	$r_n$	$ang_n$	$e_n$	$f_n$

### Ejemplo 1.5 *La curva de Dragón*

La curva de Dragón (figura 1.5) se obtiene sustituyendo un segmento por otros dos segmentos de forma que: el primer segmento tiene como extremo inicial el extremo inicial del segmento sustituido y forma un ángulo  $\theta$  con él, el segundo segmento tiene como extremo inicial el extremo final del segmento sustituido y forma un ángulo  $\pi - \theta$  con él, por último, ambos segmentos se contraen con el mismo factor de contracción para que sus extremos finales coincidan.

---

<sup>11</sup>Para comprobar que el sistema es hiperbólico, comprobaremos que los autovalores de las correspondientes matrices son menores que uno; para calcular el factor de contracción del sistema, basta tener en cuenta que el factor de contracción de cada transformación es la raíz cuadrada del valor absoluto del determinante de la matriz correspondiente y que el factor de contracción del sistema es el máximo de los factores de contracción de cada transformación; por último, para ver si las transformaciones del sistema son semejanzas, se estudia si éstas verifican las ecuaciones (lo que se puede ver, por ejemplo, en Rey Pastor [60]):

$$\begin{aligned} a_i^2 + c_i^2 &= b_i^2 + d_i^2 \\ a_i b_i + c_i d_i &= 0. \end{aligned}$$

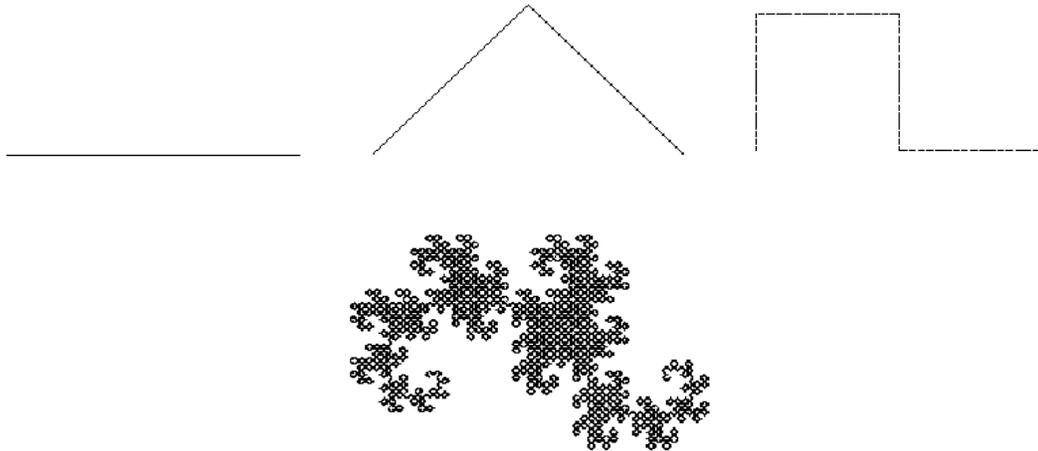


Figura 1.5: Curva de dragón para  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

Por tanto, si tomamos como segmento inicial el segmento  $L[(0,0), (0,1)]$ , el correspondiente sistema de funciones iteradas está formado por dos semejanzas de razón  $r = \frac{1}{2 \cos(\theta)}$ , con ángulos de giro respectivos  $\theta$  y  $\pi - \theta$ , y cuyos vectores de traslación son  $(0,0)$  y  $(0,1)$  respectivamente.

Como son semejanzas, podemos representar el sistema por su código corto:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2 \cos(\theta)} & \theta & 0 & 0 \\ \frac{1}{2 \cos(\theta)} & \pi - \theta & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

o por el código completo, utilizando su expresión como afinidades:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\text{tg}(\theta)}{2} & \frac{\text{tg}(\theta)}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\text{tg}(\theta)}{2} & -\frac{\text{tg}(\theta)}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En ambos casos, el código corresponde a las transformaciones

$$w_1(t, x) = \left( \frac{t-x \text{tg}(\theta)}{2}, \frac{t \text{tg}(\theta)+x}{2} \right) \quad w_2(t, x) = \left( \frac{-t-x \text{tg}(\theta)}{2} + 1, \frac{t \text{tg}(\theta)-x}{2} \right). \quad \clubsuit$$

### 1.3.2 Construcción del atractor de un sistema de funciones iteradas

Para construir la aproximación al conjunto fractal, que además permite representarlo gráficamente, vamos a considerar los dos algoritmos más utilizados para la

construcción de fractales como atractores de un sistema de funciones iteradas: el algoritmo determinístico y el algoritmo de iteración aleatoria.

### Algoritmo determinístico

El **algoritmo determinístico** está basado directamente en la definición de sistema de funciones iteradas y en él se calculan imágenes sucesivas de un conjunto inicial  $E_0 \in H(X)$  por todas y cada una de las transformaciones que componen el sistema:

$$E_k = W(E_{k-1}) = \bigcup_{n=1}^N w_n(E_{k-1}).$$

Como el sistema de funciones iteradas es hiperbólico, la sucesión  $\{E_n\}$  converge al atractor del sistema en la métrica de Hausdorff y después de realizar  $n$  iteraciones obtenemos la  $n$ ésima aproximación del atractor.

### Algoritmo 1.1

#### ENTRADAS:

- Matriz con el código del sistema:  $A$ .
- Lista con el conjunto inicial:  $l$ .
- Número de iteraciones a realizar:  $n$ .

#### PASOS:

**Desde**  $k = 1$

**Sea**  $l = W(l) = \bigcup_{n=1}^N w_n(l)$

**Hasta**  $k = n$

#### SALIDA:

- Lista con la  $n$ ésima aproximación del atractor:  $l$ .



Este algoritmo se puede modificar para construir el atractor de un sistema de funciones iteradas con conjunto de condensación,  $l$ , sin más que tener en cuenta que el atractor se obtiene al tomar como conjunto inicial el conjunto de condensación y, en cada paso, añadir al conjunto ya construido su imagen por las transformaciones del sistema:

**Algoritmo 1.2** (Modificación algoritmo 1.1).

**ENTRADAS:**

- Matriz con el código del sistema:  $A$ .
- Lista con el conjunto de condensación:  $l$ .
- Número de iteraciones a realizar:  $n$ .

**PASOS:**

**Desde**  $k = 1$

**Sea**  $l = l \cup W(l)$

**Hasta**  $k = n$

**SALIDA:**

- Lista con la  $n$ -ésima aproximación del atractor:  $l$ .



### Algoritmo de iteración aleatoria

En el **algoritmo de iteración aleatoria** se calculan imágenes sucesivas de un punto  $x_0 \in X$  por una transformación que, en cada paso, se elige aleatoriamente entre las transformaciones que componen el sistema.

Despreciando los primeros  $n_0$  puntos, para asegurarnos que el primer punto que tomamos está dentro del atractor del sistema, después de realizar  $n$  iteraciones obtenemos como imagen del atractor el conjunto

$$E_n = \{x_k \in X / n_0 \leq k \leq n\}.$$

En este algoritmo, para representar el sistema de funciones iteradas añadimos al código matricial del sistema una nueva columna con las probabilidades de elección de cada transformación. Denotando por  $p_i$  la probabilidad de elección de la transformación  $w_i$ , obtenemos un nuevo código matricial para el sistema, que denominaremos **código con probabilidades**:

$w_1$	$a_1$	$b_1$	$c_1$	$d_1$	$e_1$	$f_1$	$p_1$
$\vdots$							
$w_n$	$a_n$	$b_n$	$c_n$	$d_n$	$e_n$	$f_n$	$p_n$

De esta forma, el algoritmo de iteración aleatoria queda:

**Algoritmo 1.3****ENTRADAS:**

- Código con probabilidades del sistema:  $A$ .
- Número de iteraciones a realizar:  $n$ .

**PASOS:**

**Desde**  $k = 1$

**Sea**  $(t, x) = w_i(t, x)$

**Hasta**  $k = n_0$

**Desde**  $k = n_0 + 1$

**Sea**  $(t, x) = w_i(t, x)$

**Sea**  $l = l \cup \{(t, x)\}$

**Hasta**  $k = n$

**SALIDA:**

- Lista que aproxima al atractor del sistema:  $l$ .



Al transformar en cada paso un único punto por una única aplicación, el consumo de memoria es menor que en el algoritmo determinístico, donde trabajamos con los conjuntos completos y calculamos la imagen de todos sus puntos. Por el contrario, el consumo de tiempo aumenta, ya que, para que la imagen tenga la misma resolución, el número de iteraciones necesarias es mucho mayor.

Además, aunque en el límite el atractor del sistema es único, la imagen del atractor que obtenemos mediante este algoritmo, depende de las probabilidades de elección asignadas a cada transformación del sistema, ya que, si las probabilidades cambian, el número de puntos que aparecen en las distintas partes del atractor también lo hace <sup>12</sup>.

**Ejemplo 1.6** *El triángulo de Sierpinski (ejemplo 1.1).*

Si en el sistema de funciones iteradas que da lugar al triángulo de Sierpinski consideramos dos elecciones de probabilidades distintas, en el primer caso todas las

---

<sup>12</sup>Aunque para asignar valores a las probabilidades hay diversas opciones, lo que se puede ver en Gutierrez, Iglesias, Rodríguez y Rodríguez [39], vamos a seguir la sugerida por Barnsley [4] pg. 85

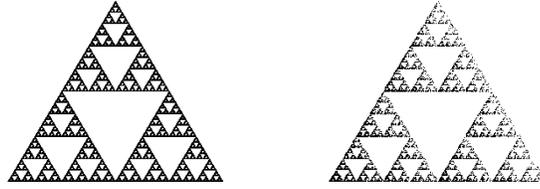


Figura 1.6: Triángulos de Sierpinski con  $p_1 = p_2 = p_3$  y  $p_1 = 2p_2, p_2 = p_3$

probabilidades iguales y en el segundo caso la probabilidad de elección de la primera transformación doble que las otras, las imágenes del atractor del sistema también son distintas (figura 1.6). ♣

Para asignar a cada transformación del sistema de funciones iteradas una probabilidad de elección, hay que tener en cuenta que su suma debe de ser uno y que todas las probabilidades deben de ser positivas, de esta forma, intervendrán todas las transformaciones del sistema.

Por otra parte, para que se mantengan bien las proporciones de puntos en cada región del atractor y, por tanto, la imagen se parezca al conjunto fractal, cuando el sistema está formado por transformaciones afines, se asigna a cada transformación una probabilidad proporcional al determinante de la transformación, ya que, el factor de proporcionalidad entre el área de un conjunto y su imagen por una transformación afín es el determinante de la matriz asociada a la aplicación

$$p_i = \frac{|\det(A_i)|}{\sum_{k=1}^n |\det(A_k)|} \text{ con } A_i \text{ matriz de } w_i.$$

Si alguno de los determinantes anteriores fuera 0, se le asigna a la transformación correspondiente una probabilidad positiva muy pequeña ( $p_i \approx 0.01$ ) y se ajustan el resto de las probabilidades para que su suma siga siendo 1.

### 1.3.3 Implementación

En esta última parte vamos a implementar los algoritmos anteriores en el entorno de cálculo MATHEMATICA 3.0, que es donde vamos a movernos para nuestro trabajo empírico, mediante la construcción de la función

```
Ifs[A, lis, n, ver]
```

donde la primera variable, **A**, representa el código del sistema, la variable **lis** el conjunto inicial en forma de lista, la variable **n** el número de iteraciones y la variable **ver** el algoritmo a utilizar.

Como cada sistema de funciones iteradas autoafín está representado por su código matricial, **A**, y las transformaciones son de la forma  $M[n] \cdot t, x+v[n]$ , tenemos que definir una función para obtener las transformaciones que van a actuar (sección A.1 del apéndice),

```
CalculaTransformaciones[A].
```

Por otra parte, como las transformaciones del sistema no actúan de la misma forma en todos los algoritmos, necesitamos definir una función que aplique las transformaciones del sistema a cada punto y que actúe de forma distinta dependiendo del algoritmo que utilicemos (sección A.1 del apéndice),

```
TransformaPunto[pta,ptb, ver].
```

Una vez definidas las transformaciones del sistema y las funciones para que actúen sobre las distintas listas, podemos pasar a definir la función con la que obtener una aproximación del conjunto fractal: `Ifs[A, lis, n, ver]`.

Para la implementación del algoritmo determinístico, **ver=1**, partimos de la lista inicial, **lis**, a la que aplicamos todas las transformaciones del sistema, sustituimos la primera lista por esta última y calculamos una sucesión de listas, repitiendo el proceso hasta obtener la *n*-ésima aproximación del atractor.

```
Ifs[A_,lis_,n_,1]:= Block[{} ,
  CalculaTransformaciones[A];
  Nest[Flatten[Map[TransformaPunto[# ,1]& ,#] ,1]& ,lista,n]]
```

```
Ifs[A_,n_,1]:=
  Ifs[A,Segmento[{0,0},{0,1}],n,1]
```

donde por defecto el conjunto de partida será el segmento  $L[(0,0),(0,1)]$  (pues podemos elegir un conjunto cualquiera) y donde la función que construye una lista que

representa el segmento  $L[a, b]$ , `Segmento[a,b]`, se define en el apéndice (sección A.1).

Para implementar el algoritmo determinístico con conjunto de condensación `lis`, `ver=2`, sólo tenemos que modificar la función anterior y en cada paso, en vez de sustituir, unir en una única lista la lista a la que aplicamos las transformaciones con la lista transformada:

```
Ifs[A_, lis_, n_, 2] := Block[{ll},
  CalculaTransformaciones[A];
  ll=NestList[Flatten[Map[TransformaPunto[#, 2]&, #], 1]&, lis, n];
  Flatten[ll, 1]]
```

En el algoritmo de iteración aleatoria calculamos una sucesión de puntos comenzando por el punto contenido en la lista `lis`, que por defecto será el punto  $x_0 = (0, 0)$  (pues podemos elegir un punto cualquiera), y, una vez despreciados los primeros cien, estos puntos formarán la lista que aproxima al atractor del sistema:

```
Ifs[A_, lis_, n_, 3] := Block[{}],
  CalculaTransformaciones[A];
  NestList[TransformaPunto[#, 3]&,
    Nest[TransformaPunto[#, 3]&, First[lis], 100], n]]
```

```
Ifs[A_, n_, 3] := Ifs[A, {{0., 0.}}, n, 3]
```

Una vez obtenida la aproximación al conjunto fractal, para representarlo gráficamente utilizamos la función `DibujaPto[lis]`, que represente los puntos contenidos en la lista `lis` y que se define en el apéndice (sección A.1).

## Referencias

Entre las principales referencias para profundizar en el estudio de los conjuntos fractales, están las obras de Mandelbrot a las que nos referiremos como *selecta*, donde recoge sus trabajos fundamentales y les da una nueva visión, Mandelbrot [50],

Mandelbrot [52] y Mandelbrot [53] y el ensayo fundacional de la Geometría Fractal, “La Geometría Fractal de la Naturaleza” (Mandelbrot [51]), en esta última se puede estudiar el origen de los conjuntos fractales y de sus múltiples aplicaciones.

Dentro de los sistemas de funciones iteradas, tanto en sí misma como por las referencias que contiene, un papel similar lo juega “Fractals Everywhere”, Barnsley [4].

Otras referencias interesantes son Guzmán, Martín, Morán y Reyes [21] y Peitgen, H. Jürgens y D. Saupe [61].

## Capítulo 2

# Dimensión de un conjunto fractal

Una de las diferencias fundamentales entre los conjuntos fractales y los conjuntos considerados por la Geometría Euclídea, es que los primeros presentan irregularidades al observarlos a escalas cada vez menores y que al intentar cuantificarlas no existe una dimensión entera adecuada para medirlas, pues si utilizamos la medida de Lebesgue  $n$ -dimensional correspondiente a una determinada dimensión (longitud para dimensión uno, área para dimensión dos, ...) para unas dimensiones obtenemos una medida infinita, que es excesiva para cuantificar las irregularidades, y para otras dimensiones obtenemos una medida nula, que en este caso es insuficiente.

La primera aproximación al problema la realizaremos utilizando las medidas  $s$ -dimensionales de Hausdorff que coinciden con la medida de Lebesgue  $s$ -dimensional cuando  $s$  es entero (salvo en una constante que sólo depende de  $s$ ) y admiten valores no enteros para  $s$ .

Las medidas  $s$ -dimensionales de Hausdorff no sólo nos van a permitir obtener una medida adecuada a los conjuntos fractales sino que va a dar lugar a uno de los conceptos fundamentales de la Geometría Fractal: la dimensión de Hausdorff, dimensión que admite valores no enteros y se define como el valor de  $s$  cuya medida  $s$ -dimensional es adecuada para medir el conjunto.

Como el concepto de dimensión fractal está relacionado con la forma de asignar un tamaño numérico a un conjunto, dependiendo de la forma en que se aborde el problema, aparecen distintas definiciones.

Así, la dimensión de recuento por cajas, que va a ser la llave para el análisis de las irregularidades de las gráficas de las series temporales de precios desde el punto de vista de la Geometría Fractal, surge cuando al abordar el problema de la medida de un conjunto, se ignoran las irregularidades de un determinado tamaño,  $\delta$ , y se estudia como se comporta la medida cuando hacemos tender  $\delta$  a cero.

Como al calcular la dimensión de recuento por cajas del grafo de una función continua se observa que esta medida está relacionada con el rango de la función, vamos a plantear el cálculo empírico de la dimensión de recuento por cajas de un grafo, cálculo que abordaremos en el capítulo 4, mediante una estimación relacionada con el rango de la función.

La última dimensión que abordaremos, la dimensión de autosemejanza, está relacionada con las características de escala de un conjunto y nos permite tener otro concepto distinto de dimensión, concepto que no sólo no tiene sentido cuando el conjunto es autoafín, sino que cuando el conjunto es autosemejante no tiene por que coincidir con la dimensión de Hausdorff.

## 2.1 Medida de un conjunto fractal

En esta sección vamos a ver que la adaptación de la medida  $n$ -dimensional de Lebesgue a conjuntos irregulares da lugar a una medida  $s$ -dimensional válida para cualquier valor de  $s$ , con  $s$  no necesariamente entero: la medida  $s$ -dimensional de Hausdorff.

Esta medida tienen una propiedad fundamental: sin un conocimiento previo de la dimensión del conjunto, podemos calcular todas las medidas  $s$ -dimensionales del conjunto.

De este modo, una vez calculadas todas las medidas  $s$ -dimensionales del conjunto, consideraremos que el valor de  $s$  que más sentido tiene para medir es la dimensión del conjunto.

### 2.1.1 El problema de la medida de Lebesgue

A la hora de calcular la medida de un conjunto fractal se puede utilizar la medida de Lebesgue  $s$ -dimensional, donde la medida unidimensional es la longitud del conjunto, la medida bidimensional el área y la medida tridimensional el volumen, sin embargo, cuando el conjunto irregular, en la mayoría de los casos estas medidas no transmiten ninguna información y no tiene sentido su uso.

**Ejemplo 2.1** *El triángulo de Sierpinski (ejemplo 1.1).*

Si queremos medir el triángulo de Sierpinski, como este conjunto está contenido en el plano parece lógico utilizar como medida de Lebesgue el área, sin embargo, este conjunto tiene área nula, ya que en la etapa  $k$ -ésima del proceso eliminamos  $3^{k-1}$  triángulos disjuntos con una cuarta parte del área del triángulo anterior, con lo que al ser  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{4^k} = 1$ , el área total eliminada coincide con el área original.

Si utilizamos como medida de Lebesgue la longitud nos encontramos con un problema parecido, el conjunto tiene longitud infinita, pues en la etapa  $k$ -ésima del proceso tenemos  $3^k$  triángulos con perímetros  $\frac{3}{2^k}$ , con lo que el perímetro total del prefractal  $E_k$  es  $\frac{3^{k+1}}{2^k}$ , que tiende a infinito al hacerlo  $k$ .

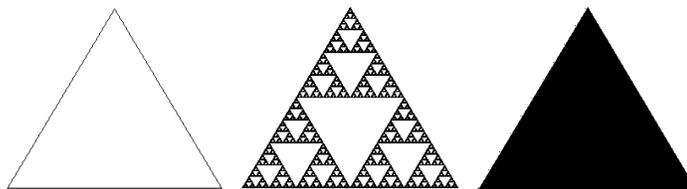


Figura 2.1: Tres triángulos

Así, si lo comparamos con los otros triángulos que aparecen en la figura 2.1, observamos que desde el punto de vista del área el triángulo de Sierpinski es pequeño para ser un conjunto plano, como el tercer triángulo donde tiene sentido el área, y que desde el punto de vista de la longitud es demasiado grande para ser un conjunto unidimensional, como el primer triángulo donde tiene sentido la longitud. ♣

De esta forma, para calcular la medida de un conjunto fractal necesitamos encontrar una medida que nos de mayor información sobre su tamaño. Esta medida

es la medida de Hausdorff  $s$ -dimensional y surge de forma natural al adaptar la construcción de la medida de Lebesgue a conjuntos irregulares donde ésta no tiene sentido.

Las medidas  $s$ -dimensionales de Hausdorff, al contrario que las medidas  $s$ -dimensionales de Lebesgue, van a admitir valores no enteros para  $s$  y no va a ser necesario fijar previamente un valor de  $s$  para realizar su cálculo.

Esta propiedad nos va a permitir definir la dimensión de un conjunto fractal como el valor de  $s$  para el que la medida  $s$ -dimensional de Hausdorff da una idea adecuada del tamaño del conjunto. Además, el procedimiento que vamos a seguir permite obtener distintas definiciones de dimensión fractal, sin más que realizar algunas modificaciones en la construcción de la medida.

### 2.1.2 Medida de Hausdorff

Para calcular la medida bidimensional de Lebesgue (área) de una figura plana, se recubre el conjunto por cuadrados cada vez más pequeños y se estima el área total como la suma de las áreas de estos cuadrados, es decir del lado del cuadrado elevado a la dimensión.

Si en vez de cuadrados se utilizan bolas de diámetro  $\delta$ , se debe estimar el área sumando el área de estas bolas,

$$\pi \left(\frac{\delta}{2}\right)^2,$$

por lo que en nuestro caso, como queremos calcular todas las medidas  $s$ -dimensionales y ver cual tiene sentido, aunque seguiremos utilizando bolas de diámetro  $\delta$ , sumaremos expresiones del tipo

$$C(\delta) = \gamma(s) \left(\frac{\delta}{2}\right)^s,$$

donde  $\gamma(s)$  es una constante que sólo depende del valor de  $s$  considerado <sup>1</sup>, con lo que para calcular cada medida  $s$ -dimensional sólo tenemos que cambiar las expresiones a sumar y no los recubrimientos.

---

<sup>1</sup>Cuando  $s$  es un entero no negativo  $\gamma(s) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^s}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)}$  es la medida  $s$ -dimensional de la bola unidad (Mandelbrot [51] pg. 500).

De esta forma, si sumamos en cada bola  $\gamma(1) \left(\frac{\delta}{2}\right)^1 = \delta$ , al estar sumando los diámetros de las bolas, lo que obtenemos es la longitud del conjunto, y si sumamos  $\gamma(2) \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$ , lo que obtenemos es el área, ya que estamos calculando el área de cada una de las bolas que forman el recubrimiento.

Para simplificar los cálculos podemos utilizar la expresión

$$C(\delta) = \delta^s,$$

obteniendo una medida equivalente, que sólo difiere en una constante dependiente de la dimensión.

Si además de las bolas de diámetro  $\delta$  admitimos en los recubrimientos a otros conjuntos y el papel de  $\delta$  lo hace el diámetro <sup>2</sup>; obtenemos una mejor adaptación a las irregularidades que pueda presentar el conjunto al que estamos calculando la medida.

Una vez que obtengamos todas las medidas del conjunto y veamos cual de ellas es la que tiene más sentido, estaremos en condiciones de definir la dimensión como el valor de  $s$  correspondiente a dicha medida.

El siguiente lema nos garantiza que el procedimiento seguido construye una medida, independientemente de la función de evaluación considerada.

En realidad la medida construida es una medida exterior, pero como toda medida se puede extender a una medida exterior y una medida exterior restringida a los conjuntos medibles es una medida, hablaremos siempre de medida por medida exterior. De esta forma tenemos la medida definida sobre cualquier conjunto y sólo debemos tener en cuenta que, al haber conjuntos medibles y conjuntos no medibles, la aditividad numerable sólo se da para los conjuntos medibles <sup>3</sup>.

<sup>2</sup>El **diámetro** de un conjunto  $A$  se define por  $|A| = \sup\{d(x, y) / x, y \in A\}$ .

<sup>3</sup>Una **medida exterior** es una aplicación  $\mu : \mathcal{P}(X) \mapsto [0, +\infty]$  cumpliendo:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$   $A, B \subseteq X$  (monotonía)
3.  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$   $A_n \subseteq X$  (subaditividad numerable)

**Lema 2.1** Dado un conjunto,  $X$ , un recubrimiento de  $X$ ,  $\mathcal{A}$ , y una función de evaluación,  $C : \mathcal{A} \mapsto [0, +\infty]$ , sea

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} C(A_i) \right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre los recubrimientos numerables de  $E$  por conjuntos  $A_i \in \mathcal{A}$ .

La medida  $\mu$  es la única que verifica:

1.  $\mu(A) \leq C(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$
2. Si  $\nu$  es otra medida con  $\nu(A) \leq C(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$  se tiene que

$$\nu(B) \leq \mu(B) \quad \forall B \subseteq X$$

### Demostración

• Veamos en primer lugar que es una medida:

1.- Como el conjunto vacío está contenido en el recubrimiento vacío y la suma vacía es 0 se tiene que  $\mu(\emptyset) = 0$ .

2.-  $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$  pues todo recubrimiento de  $B$  lo es de  $A$ .

3.-  $\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ :

Si algún  $A_n$  tiene medida infinita es cierto trivialmente.

El concepto de **medida** es más restrictivo, pues  $\mu$  sólo se define sobre una  $\sigma$ -álgebra de conjuntos.  $\mathcal{M}$ , cuyos elementos reciben el nombre de conjuntos medibles y en vez de la subaditividad, se impone la aditividad para medibles disjuntos.

Para pasar de una medida exterior,  $\mu$ , a una medida se restringe  $\mu$  a la  $\sigma$ -álgebra

$$\mathcal{M} = \{A \subseteq X / \mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A) \quad \forall E \subseteq X\}$$

pues se tiene la aditividad numerable cuando son disjuntos (Edgar [25] pg. 135-136).

Para pasar de una medida,  $\mu$ , a una medida exterior se considera

$$\mu(A) = \inf \{ \mu(B) / B \supseteq A \text{ y } B \in \mathcal{M} \}$$

pues está definida para cualquier  $A \subseteq X$  y coincide con la medida sobre  $\mathcal{M}$  (Mattila [55] pg. 8).

Supongamos pues que  $\mu(A_n) < \infty \forall n$ :

Sea para cada  $n$  un recubrimiento  $\mathcal{R}_n$  con  $\sum_{R \in \mathcal{R}_n} C(R) \leq \mu(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$ .

Sea  $\mathcal{R}$  el recubrimiento de  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  formado por la unión de los  $\mathcal{R}_n$ , se tiene que:

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{R \in \mathcal{R}} C(R) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{R \in \mathcal{R}_n} C(R) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0.$$

- Que es única es fácil: si dos medidas verifican las condiciones 1. y 2. cada una es menor o igual que la otra, con lo que deben de ser iguales.
- La primera condición se verifica tomando  $\{A\}$  como recubrimiento de  $A$ .
- Para la segunda condición: supongamos que  $\nu$  es una medida con  $\nu(A) \leq C(A) \forall A \in \mathcal{A}$  y sea  $B \subseteq X$  un conjunto cualquiera. Consideremos  $\mathcal{R}$  un recubrimiento de  $B$  formado por conjuntos de  $\mathcal{A}$ , se tiene que

$$\sum_{R \in \mathcal{R}} C(R) \geq \sum_{R \in \mathcal{R}} \nu(R) \geq \nu \left( \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \right) \geq \nu(B),$$

con lo que  $\mu(B) \geq \nu(B)$ . ♣

A continuación, vamos a mejorar este procedimiento para conseguir la máxima economía en el recubrimiento y evaluar las irregularidades por pequeñas que sean.

Para ello, se consideran los recubrimientos con conjuntos de diámetros menores que un cierto  $\delta$ , que reciben el nombre de  $\delta$ - **recubrimientos**, se busca el ínfimo

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} C(A_i) : |A_i| < \delta \right\}$$

y se hace tender  $\delta$  a 0.

De esta forma, la condición  $|A_i| < \delta$  se hace cada vez más restrictiva, con lo que la expresión anterior crece y tiene límite. Este límite será la  $C$ -medida del conjunto, que puede ser finita y positiva, infinita o nula.

El siguiente teorema, al que nos referiremos como construcción de Caratheodory, nos va a garantizar que, cuando en el recubrimiento haya conjuntos con diámetros tan pequeños como queramos, se obtiene una medida <sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>Este tipo de recubrimientos reciben el nombre de **recubrimientos de Vitali** y se caracterizan

Esta medida es una medida de Borel, que además es Borel regular cuando el recubrimiento está formado por conjuntos de Borel. En este caso, es posible trabajar sólo con conjuntos de Borel y aproximar cualquier otro conjunto por uno de éstos <sup>5</sup>.

**Teorema 2.2 Construcción de Caratheodory.**

Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $\mathcal{A}$  un recubrimiento de Vitali y una función de valoración  $C : \mathcal{A} \mapsto [0, +\infty]$ .

Para cada  $\delta > 0$  consideramos:

$$\mu_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} C(A_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, |A_i| < \delta, A_i \in \mathcal{A} \right\}.$$

Se tiene entonces que

$$\mu(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mu_\delta(A) = \sup \{ \mu_\delta(A) : \delta > 0 \}$$

es una medida de Borel.

Más aún, si el recubrimiento está formado por conjuntos de Borel, la medida es Borel regular.

**Demostración**

- Para ver que  $\mu$  es una medida basta con comprobar sus propiedades utilizando que  $\mu_\delta$  es la medida dada por el lema 2.1 con  $\mathcal{A}_\delta = \{A \in \mathcal{A} : \delta(A) \leq \delta\}$  y  $C : \mathcal{A}_\delta \mapsto [0, +\infty]$ .

- Veamos que es una medida de Borel:

por verificar que

$$\forall x \in X \text{ y } \forall \delta > 0 \quad \exists A \in \mathcal{A} / x \in A \text{ y } |A| \leq \delta.$$

<sup>5</sup>Los **conjuntos de Borel** son los elementos de la  $\sigma$ -álgebra generada por los abiertos, por tanto están incluidos entre ellos los cerrados y sus uniones e intersecciones.

Una **medida de Borel** es una medida donde los conjuntos de Borel son medibles y en espacios métricos es equivalente a que la medida sea una medida métrica (Mattila [55] pg. 9-10), donde una medida,  $\mu$ , es una **medida métrica** si

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \forall A, B \subseteq X / d(A, B) > 0,$$

Una medida de Borel es una **medida Borel regular** si para cualquier conjunto es posible encontrar un conjunto de Borel contenido en él con la misma medida.

Sean  $A, B \subseteq X$  con  $d(A, B) > 0$ :

Sea  $\delta : 0 < \delta < \frac{d(A, B)}{2}$ , dado un recubrimiento  $\mathcal{R}$  de  $A \cup B$  formado por conjuntos de  $\mathcal{A}_\delta$  podemos separarlo en dos recubrimientos  $\mathcal{R}_1$  de  $A$  y  $\mathcal{R}_2$  de  $B$ , pues para  $R \in \mathcal{R}$  se tiene que  $|R| < \delta$  y  $\delta < \frac{d(A, B)}{2}$ , con lo que

$$\sum_{R \in \mathcal{R}} C(R) = \sum_{R \in \mathcal{R}_1} C(R) + \sum_{R \in \mathcal{R}_2} C(R) \geq \mu_\delta(A) + \mu_\delta(B),$$

por tanto  $\mu_\delta(A \cup B) \geq \mu_\delta(A) + \mu_\delta(B)$  y, al ser una medida,

$$\mu_\delta(A \cup B) = \mu_\delta(A) + \mu_\delta(B).$$

Tomando límite cuando  $\delta$  tiende a cero, se tiene  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ .

• Por último consideremos que  $\mathcal{A}$  está formado por conjuntos de Borel y veamos que la medida es Borel regular:

Sea  $A \subseteq X$ , para cada  $m, m = 1, 2, \dots$ , consideremos un recubrimiento de  $A$ :

$$\mathcal{A}_m = \{A_{n,m} : n = 1, 2, \dots\} \text{ con } |A_{n,m}| < \frac{1}{m} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} C(A_{n,m}) \leq \mu_{\frac{1}{m}}(A) + \frac{1}{m}.$$

Se tiene que

$$B = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,m}$$

es un conjunto de Borel que contiene a  $A$  y tiene la misma medida que  $A$ . ♣

En nuestro caso se obtiene una medida Borel regular, pues si en vez de un recubrimiento cualquiera tomamos recubrimientos formados sólo por cerrados la medida es la misma, ya que, el diámetro de un conjunto coincide con el de su clausura; además, también se pueden considerar recubrimientos formados sólo por abiertos, pues cualquier conjunto está contenido en un abierto, con el diámetro tan próximo al diámetro del conjunto como se quiera.

En resumen, mediante la construcción de Caratheodory con

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(X) \quad \text{y} \quad C(A) = |A|^s,$$

hemos obtenido para cada  $s > 0$  una medida Borel regular. Estas medidas nos van a permitir obtener la dimensión buscada, cuando veamos el valor de  $s$  para el cual tienen sentido pleno.

**Definición 2.1** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $F \subseteq X$ .

Para cada  $s > 0$  y cada  $\delta > 0$  sea

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^s : \{A_i\} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } E \right\}$$

Para cada  $s > 0$  la medida

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) = \sup \{ \mathcal{H}_\delta^s(E) : \delta > 0 \}$$

recibe el nombre de **medida s-dimensional de Hausdorff**. ♣

Cuando se toma

$$C(A) = \gamma(s) \left( \frac{|A|}{2} \right)^s,$$

la medida recibe el nombre de **medida s-dimensional normalizada**.

Esta medida sólo difiere de la medida de Hausdorff en una constante dependiente de la dimensión y coincide con la medida de Lebesgue cuando  $s$  es entero <sup>6</sup>, o visto de otra forma, la medida de Hausdorff  $p$ -dimensional para valores enteros de  $p$  difiere de la medida de Lebesgue en una constante,  $\gamma(p)$ , que sólo depende de la dimensión.

En el caso 0-dimensional, como la medida 0-dimensional de un conjunto con sólo un punto es uno, ambas medidas son medidas de recuento, es decir, su valor es el número de puntos del conjunto, si este es finito, y  $+\infty$ , en caso contrario.

## 2.2 Dimensión de Hausdorff

Al contrario que para la medida de Lebesgue, donde debemos fijar previamente la dimensión del conjunto a medir, la construcción de la medida de Hausdorff nos permite calcular todas las medidas  $s$ -dimensionales y encontrar la dimensión del conjunto, eligiendo aquel valor de  $s$  para el que la medida tiene sentido.

Para esta elección, nos basaremos en que la medida  $n$ -dimensional de Lebesgue es apropiada cuando al considerar dimensiones inferiores la medida resultante es infinita y al considerar dimensiones superiores la medida es cero; por ejemplo, en

---

<sup>6</sup>Federer [35] pg. 197

una figura plana sólo el área tiene sentido, ya que su longitud es infinita y su volumen es cero.

### 2.2.1 Definición de la dimensión de Hausdorff

El siguiente teorema nos va a permitir definir la dimensión de Hausdorff de un conjunto, ya que vamos a ver que para las medidas  $s$ -dimensionales de Hausdorff existe un valor  $s_0$ , no necesariamente entero, tal que la medida  $s$ -dimensional es cero para valores de  $s$  superiores a  $s_0$  y infinita para valores de  $s$  inferiores a  $s_0$ .

**Teorema 2.3** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $F \subseteq X$ :

Para  $0 < s < t$  se tiene

1.  $\mathcal{H}^s(F) \geq \mathcal{H}^t(F)$ .
2. (a)  $\mathcal{H}^s(F) < +\infty \implies \mathcal{H}^t(F) = 0$ .  
(b)  $\mathcal{H}^t(F) > 0 \implies \mathcal{H}^s(F) = +\infty$ .

#### Demostración

1.- Si tenemos un  $\delta$ -recubrimiento de  $F$ ,  $\mathcal{R}$ , con  $\delta < 1$  para  $R \in \mathcal{R}$  se tiene que  $|R| < \delta < 1$ , con lo que al ser  $s < t$  se tiene también que  $|R|^s > |R|^t$ , tomando el ínfimo de sus sumas nos queda  $\mathcal{H}_\delta^s(F) \geq \mathcal{H}_\delta^t(F)$ , así, al tomar límite cuando  $\delta$  tiende a 0 se tiene la desigualdad buscada.

2.- Consideremos un  $\delta$ -recubrimiento de  $F$ ,  $\mathcal{R}$ , con  $\sum_{R \in \mathcal{R}} |R|^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(F) + 1$ , se tiene:

$$\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \sum_{R \in \mathcal{R}} |R|^t \leq \delta^{t-s} \sum_{R \in \mathcal{R}} |R|^s \leq \delta^{t-s} (\mathcal{H}_\delta^s(F) + 1),$$

en esta desigualdad basta tomar límite cuando  $\delta$  tiende a 0 para obtener la primera implicación.

La segunda implicación es la recíproca de la primera. ♣

Como conclusión inmediata del teorema se tiene que:

- Si existe un valor  $s_0$  para el que la medida  $s_0$ -dimensional es finita y positiva: para los valores de  $s$  menores que  $s_0$  la medida  $s$ -dimensional es infinita y para los valores superiores es cero.

- Si existe un valor  $s_0$  para el que la medida  $s_0$ -dimensional es cero: para los valores de  $s$  superiores a  $s_0$  la medida  $s$ -dimensional también es cero.
- Si existe un valor  $s_0$  para el que la medida  $s_0$ -dimensional es infinita: para los valores de  $s$  inferiores a  $s_0$  la medida  $s$ -dimensional también es infinita.

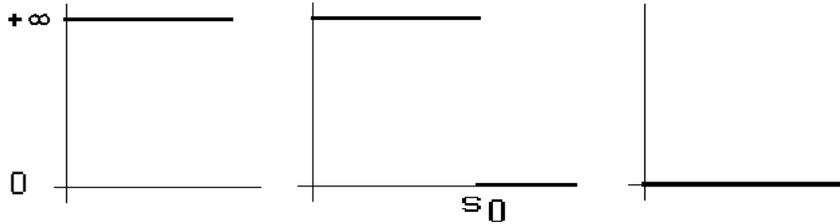


Figura 2.2: dimensión  $s = +\infty$ ,  $s = s_0$  y  $s = 0$

Estamos ya en condiciones de definir la dimensión de un conjunto como el valor crítico de  $s$  para el que las medidas  $s$ -dimensionales pasan de infinito a cero, sin más que tener en cuenta que cuando  $\mathcal{H}^s(F)$  es cero  $\forall s > 0$ , el valor de la dimensión es  $0$  y si  $\mathcal{H}^s(F)$  es infinito  $\forall s > 0$ , este valor es  $+\infty$ .

**Definición 2.2** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $F \subseteq X$ :

El único valor crítico  $s_0$ ,  $0 \leq s_0 \leq +\infty$  y tal que

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} +\infty & \forall s < s_0 \\ 0 & \forall s > s_0 \end{cases}$$

recibe el nombre de **dimensión de Hausdorff** y se nota por  $\dim_{\text{H}} F$ .

$$\dim_{\text{H}} F = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) > 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

$$\dim_{\text{H}} F = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) < \infty\} = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\}$$

♣

De esta forma, la dimensión es el único valor de  $s$  para el que las medidas  $s$ -dimensionales de Hausdorff tienen pleno sentido, ya que, la medida  $s$ -dimensional de un conjunto es infinito para valores de  $s$  inferiores a la dimensión, cero para valores superiores y sólo para  $s$  igual a la dimensión la medida  $s$ -dimensional del conjunto puede tomar todos los valores, es decir, puede ser finita y positiva, nula o infinita.

Así, si tenemos un conjunto con medida  $s$ -dimensional finita y positiva, podemos afirmar que su dimensión es  $s$ . Estos conjuntos reciben el nombre genérico de **s-conjuntos**.

La dimensión de Hausdorff definida extiende bien el concepto clásico de dimensión en  $\mathbb{R}^p$ , ya que <sup>7</sup>,

$$B \subseteq \mathbb{R}^p \text{ contiene una bola abierta} \implies \dim_{\text{H}} B = p.$$

Con lo que

$$\dim_{\text{H}} \mathbb{R}^p = p$$

y, por tanto,

$$F \subseteq \mathbb{R}^p \implies 0 \leq \dim_{\text{H}} F \leq p.$$

Aunque la dimensión de Hausdorff extienda bien el concepto clásico de dimensión en  $\mathbb{R}^p$ , esto no quiere decir que el asociar a un conjunto,  $F$ , una dimensión no necesariamente entera,  $\dim_{\text{H}}(F)$ , sea algo caprichoso y sólo válido para unos pocos conjuntos extraños, ya que <sup>8</sup>,

$$\forall s : 0 \leq s \leq p \quad \exists F \subseteq \mathbb{R}^p / \dim_{\text{H}} F = s.$$

Cuando restrinjamos nuestra atención al caso de  $\mathbb{R}^p$ , nos podemos centrar en los conjuntos de medida finita, pues <sup>9</sup>

$$\forall F : \dim_{\text{H}}(F) = s \text{ con } \mathcal{H}^s(F) = +\infty \quad \exists E \subseteq F / \dim_{\text{H}}(E) = s \text{ y } \mathcal{H}^s(E) < +\infty,$$

y, posteriormente, interpretar los resultados obtenidos en el contexto del conjunto original.

### 2.2.2 Propiedades

La dimensión de Hausdorff no es un invariante topológico (invariante por homeomorfismos), ya que, al depender de la distancia, es un concepto métrico y las

---

<sup>7</sup>Edgar [25] pg. 153.

<sup>8</sup>Mattila [55] pg. 59.

<sup>9</sup>Falconer [29] pg. 62

imágenes de puntos próximos pueden estar muy alejadas. Si queremos encontrar aplicaciones para las que sea invariante, necesitamos imponer condiciones de regularidad sobre ellas, de forma que sigan siendo continuas y la distancia entre dos puntos esté relacionada con la distancia entre sus imágenes.

En primer lugar vamos a ver que sucede cuando la distancia entre dos puntos y la distancia entre sus imágenes está relacionada por una condición de Hölder de exponente  $\alpha$ :

**Definición 2.3** Sean  $(X, d)$ ,  $(X', d')$  espacios métricos.

$f : X \mapsto X'$  verifica una **condición de Hölder de exponente  $\alpha$**  si

$$d'(f(x), f(y)) \leq c d(x, y)^\alpha \quad \forall x, y \in X. \quad \clubsuit$$

**Proposición 2.4** Sean  $(X, d)$ ,  $(X', d')$  espacios métricos,  $F \subseteq X$ .

Si  $f : X \mapsto X'$  verifica una condición de Hölder de exponente  $\alpha$ , entonces:

1.  $\forall s \quad \mathcal{H}_\alpha^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F)$ .
2.  $\dim_{\mathbb{H}}(f(F)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_{\mathbb{H}}(F)$ .

### Demostación

1.-Si  $\{A_i\}$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $F$ , entonces dado que

$$|f(F \cap A_i)| \leq c |A_i|^\alpha,$$

$\{f(F \cap A_i)\}$  es un  $\epsilon$ -recubrimiento de  $f(F)$ , donde  $\epsilon = c\delta^\alpha$ . Con lo que al ser

$\sum_i |f(F \cap A_i)|^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \sum_i |A_i|^s$ , se tiene que

$$\mathcal{H}_\epsilon^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Cuando  $\delta \rightarrow 0$  también lo hace  $\epsilon$ , obteniéndose:

$$\mathcal{H}_\alpha^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F)$$

2.-Si  $s > \dim_{\mathbb{H}} F$  entonces  $\mathcal{H}^s(F) = 0$  con lo que al ser  $\mathcal{H}_\alpha^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F)$  necesariamente  $\mathcal{H}_\alpha^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) = 0$ , pues una medida ha de ser positiva o nula. Así,  $\dim_{\mathbb{H}}(f(F)) \leq \frac{s}{\alpha} \forall s > \dim_{\mathbb{H}}(F)$  y, por tanto,  $\dim_{\mathbb{H}}(f(F)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_{\mathbb{H}}(F)$ .  $\clubsuit$

En particular, nos interesan las aplicaciones que verifican una condición de Hölder de exponente  $\alpha = 1$ , pues entre ellas están las aplicaciones que preservan la dimensión de Hausdorff.

**Definición 2.4** Sean  $(X, d)$ ,  $(X', d')$  espacios métricos.

$f : X \mapsto X'$  es una **aplicación lipschiziana** si

$$d'(f(x), f(y)) \leq c d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Si además es biyectiva y su inversa también es lipschiziana recibe el nombre de **aplicación bi-lipschiziana**.

Cuando  $f$  es sobreyectiva la condición de aplicación bi-lipschiziana equivale a

$$c_1 d(x, y) \leq d'(f(x), f(y)) \leq c_2 d(x, y) \quad c_1, c_2 > 0 \quad \forall x, y \in X \quad \clubsuit$$

**Corolario 2.5** Sean  $(X, d)$ ,  $(X', d')$  espacios métricos y  $f : X \mapsto X'$  una aplicación lipschiziana

1.  $\forall s \quad \mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F)$ .
2.  $\dim_{\mathbb{H}}(f(H)) \leq \dim_{\mathbb{H}}(H)$ .

### Demostración

Se obtiene directamente de la proposición anterior, teniendo en cuenta que verifica una condición de Hölder de exponente  $\alpha = 1$ . ♣

**Teorema 2.6** Sean  $(X, d)$ ,  $(X', d')$  espacios métricos y  $f : X \mapsto X'$  bi-lipschiziana, entonces:

$$\dim_{\mathbb{H}}(X) = \dim_{\mathbb{H}}(f(X))$$

### Demostración

Se obtiene directamente de la definición y el corolario anterior. ♣

De esta forma, la dimensión de Hausdorff es invariante por aplicaciones bi-lipschizianas, al igual que la dimensión topológica es invariante por homeomorfismos,

pues dos conjuntos en correspondencia biunívoca por aplicaciones bi-lipschizianas tienen siempre la misma dimensión. Pero al contrario que sucede para la dimensión topológica, donde dos conjuntos con la misma dimensión están siempre relacionados por un homeomorfismo, el recíproco no es cierto en general y entre dos conjuntos con la misma dimensión de Hausdorff no tiene por que haber una aplicación bi-lipschiziana que los relacione.

Como consecuencia inmediata se tiene que las transformaciones afines (semejanzas, isometrías, traslaciones,...), al ser bi-lipschizianas, preservan la dimensión de Hausdorff.

A continuación vamos a ver las propiedades de escala de la medida de Hausdorff, análogas a las de la medida de Lebesgue, que además de ser fundamentales en la teoría de fractales, nos van a permitir calcular la dimensión de algunos conjuntos:

**Proposición 2.7** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $F \subseteq X$ .*

*Para  $\lambda > 0$  y para cada  $s$ :*

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

### Demostración

• Si  $\{A_i\}$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $F$  entonces  $\{\lambda A_i\}$  es un  $\lambda\delta$ -recubrimiento de  $\lambda F$ . Por lo tanto,

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \sum_i |\lambda A_i|^s = \lambda^s \sum_i |A_i|^s,$$

como la expresión anterior es válida para cada  $\delta$ -recubrimiento de  $F$

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

y cuando  $\delta$  tiende a cero tendremos que:

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

• Para obtener la desigualdad contraria consideramos  $\{A_i\}$  un  $\delta$ -recubrimiento de  $\lambda F$ , con lo que  $\{\frac{1}{\lambda} A_i\}$  es un  $\frac{\delta}{\lambda}$ -recubrimiento de  $F$ . Procediendo de manera análoga se tiene que

$$\mathcal{H}^s(F) \leq \frac{1}{\lambda^s} \mathcal{H}^s(\lambda F)$$

y, por tanto,

$$\lambda^s \mathcal{H}^s(F) \leq \mathcal{H}^s(\lambda F),$$

con lo que, junto a la primera desigualdad, se obtiene la igualdad. ♣

De esta forma, se mantienen las propiedades de escala que tiene la medida de Lebesgue, ya que, cuando reducimos o aumentamos el conjunto en un factor  $\lambda$  la medida  $s$ -dimensional del conjunto lo hace en un factor  $\lambda^s$ , al igual que la longitud de un conjunto lo hace en un factor  $\lambda$ , el área en un factor  $\lambda^2$  y el volumen en un factor  $\lambda^3$ .

Otras propiedades de la dimensión de Hausdorff que vamos a necesitar más tarde son las relativas a las relaciones entre subconjuntos: la monotonía y la estabilidad numerable.

**Proposición 2.8** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $E, F \subseteq X$  y  $F_i \subseteq X \quad \forall i \geq 1$ :

1.  $E \subseteq F \implies \dim_{\mathbb{H}}(E) \leq \dim_{\mathbb{H}}(F)$  (Monotonía)
2.  $\dim_{\mathbb{H}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sup(\dim_{\mathbb{H}}(F_i))$  (Estabilidad numerable)

### Demostración

1.- Se deduce trivialmente de la monotonía de la medida de Hausdorff.

2.- Que  $\dim_{\mathbb{H}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \geq \dim_{\mathbb{H}}(F_i) \forall i$  se obtiene por la monotonía. La desigualdad opuesta también se tiene, pues si  $s > \dim_{\mathbb{H}}(F_i) \forall i$ , entonces  $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$ , con lo que

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = 0. \quad \clubsuit$$

### 2.2.3 Cálculo de la dimensión de Hausdorff

En general, el uso directo de la definición para calcular la dimensión de Hausdorff de un conjunto no siempre es posible, ya que, debemos evaluar las sumas  $\sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^s$  para todos los  $\delta$ -recubrimientos  $\{A_i\}$  del conjunto; pues evaluando recubrimientos específicos, sólo se obtiene una cota superior.

Utilizando los recubrimientos sugeridos por la construcción del conjunto, la cota superior que se obtiene suele coincide con la dimensión real; aunque, demostrarlo suele ser difícil, ya que, para obtener una cota inferior, debemos considerar todos los  $\delta$ -recubrimientos y ver que las sumas,  $\sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^s$ , son mayores que una constante, con el inconveniente de que estos recubrimientos pueden estar formados por conjuntos de tamaños muy distintos.

Una manera de superar esta dificultad, es ver que ningún conjunto individual  $A_i$  cubre demasiado de  $F$  en comparación con su tamaño, medido como  $|A_i|^s$ . Para ver esto, basta con encontrar una distribución de masa sobre  $F$ <sup>10</sup>,  $\mu$ , de forma que para cada uno de los conjuntos  $A_i$ , el valor de  $|A_i|^s$  sea mayor que la masa,  $\mu(A_i)$ , que los recubre.

**Teorema 2.9** *Principio de distribución de masa.*

Sea  $\mu$  una distribución de masa sobre  $F$  y supongamos que para cierto  $s$  hay números  $c > 0$  y  $\delta > 0$  tales que

$$\mu(A) \leq c |A|^s \quad \forall A : |A| \leq \delta,$$

entonces  $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$  y, por tanto,

$$s \leq \dim_{\mathbb{H}}(F)$$

### Demostración

Sea  $\{A_i\}$  un recubrimiento de  $F$ , se tiene

$$0 < \mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq c \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^s$$

tomando ínfimo,

$$\mathcal{H}_{\delta}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$$

con lo que al tomar límite cuando  $\delta$  tiende a cero

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}. \quad \clubsuit$$

---

<sup>10</sup>Una **distribución de masa**,  $\mu$ , sobre un conjunto,  $F$ , no es más que una medida de Borel con soporte contenido en  $F$  verificando  $0 < \mu(F) < \infty$ , donde el **soporte** de  $\mu$ ,  $\text{spt}(\mu)$  es el menor cerrado con complementario de medida nula

Cuando los conjuntos fractales se construyen por eliminación sucesiva de partes de un conjunto es posible obtener una distribución de masa siguiendo un procedimiento general, paralelo a la construcción del conjunto:

- Partimos de un conjunto de Borel  $E_0$ , al que se le asocia una masa finita:

$$\bar{\mu}(E_0) = m \quad m \in \mathbb{R}, 0 < m < +\infty$$

- El conjunto  $E_1$  se construye como la unión de una colección finita de conjuntos disjuntos contenidos en  $E_0$  y su masa,  $\bar{\mu}(E_0)$ , se reparte entre los conjuntos que forman  $E_1$ :

$$E_1 = \bigcup_{i=1}^{n_1} E_{1i} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n_1} \bar{\mu}(E_{1i}) = \bar{\mu}(E_0).$$

- En cada paso, se construye el conjunto  $E_k$  como la unión de una colección finita de conjuntos disjuntos, de forma que cada uno de ellos está contenido en un único conjunto construido en el paso anterior, y la masa correspondiente a cada uno de los conjuntos  $E_{k-1j}$  ( $1 \leq j \leq n_{k-1}$ ) se reparte entre los conjuntos  $E_{ki}$  ( $1 \leq i \leq n_k$ ) que contiene:

$$E_k = \bigcup_{i=1}^{n_k} E_{ki} \quad \text{y} \quad \forall j \sum_{i \in I_j} \bar{\mu}(E_{ki}) = \bar{\mu}(E_{k-1j}) \quad \text{con} \quad I_j = \{i : E_{k-1j} \supseteq E_{ki}\}$$

**Proposición 2.10** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.*

*Si al tender  $k$  a infinito, el diámetro máximo de los  $E_{ki}$  tiende a cero, existe una distribución de masa que coincide con  $\bar{\mu}$  sobre cada uno de los conjuntos  $E_{ki}$  y cuyo soporte está contenido en  $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{E_k}$ .*

### Demostración

Para cada  $k$ , sea  $\mathcal{E}_k = \{E_{ki} / 1 \leq i \leq n_k\}$ .

Si añadimos a  $\mathcal{E}_k$  el complementario de la unión de los conjuntos  $E_{ki}$ , al que asociamos una masa cero,  $\mu(\mathbb{R} \setminus E_k) = 0$ , obtenemos recubrimientos de  $X$  formados por conjuntos de Borel y cuyo diámetro máximo tiende a cero.

La medida que se obtiene mediante la construcción de Caratheodory al utilizar estos recubrimientos (teorema 2.2)

$$\mu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(A) \quad \text{con} \quad \mu_k(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \mathcal{E}_k \right\}$$

es una distribución de masa, que coincide con  $\bar{\mu}$  sobre los  $E_k$ , al ser conjuntos disjuntos pertenecientes a  $\mathcal{E}_k$  y estar contenidos en un único conjunto  $E_{k-1}$ .

Que su soporte está contenido en  $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{E}_k$  se verifica trivialmente pues el soporte de  $\mu$  está contenido en  $\bar{E}_k$  para todo  $k$ , ya que, si  $A$  es un abierto que para algún  $k$  no corta a  $E_k$ , su medida es cero al ser  $\mu(\mathbb{R} \setminus E_k) = 0$ . ♣

**Ejemplo 2.2** *El triángulo de Sierpinski (ejemplo 1.1).*

Como vimos en la primera sección (ejemplo 2.1) el triángulo de Sierpinski tiene área nula y longitud infinita, con lo que con dimensiones enteras lo único que podemos afirmar es que su dimensión está comprendida entre uno y dos, y necesitamos el uso de dimensiones fraccionarias para tener una información completa sobre su medida.

Para calcular la dimensión de Hausdorff de este conjunto vamos a utilizar la cadena descendente de conjuntos que aparece en su proceso de construcción.

- Para obtener una cota superior, vamos a buscar un valor de  $s$  de forma que la  $s$ -medida de Hausdorff del recubrimiento que aparece al construir el conjunto sea finita:

Así, consideramos para  $\delta_k = (\frac{1}{2})^k$  el  $\delta_k$ -recubrimiento de  $E$ ,  $\{E_{ki}\}_{i=1}^{3^k}$ , este recubrimiento verifica

$$\mathcal{H}_{\delta_k}^s(E) \leq \sum_{i=1}^{3^k} |E_{ki}|^s = 3^k \left(\frac{1}{2^k}\right)^s.$$

Esta última expresión vale 1 para  $s = \frac{\log 3}{\log 2}$ , con lo que, tomando límite cuando  $\delta_k$  tiende a cero ( $k$  a infinito),  $\mathcal{H}^s(E) \leq 1$  y, por tanto,

$$\dim_{\text{H}}(E) \leq s = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

- Para ver que este valor de  $s$  es la dimensión del conjunto, vamos a probar la desigualdad contraria utilizando el principio de distribución de masa (teorema 2.9)

y la distribución de masa la vamos a obtener a través del proceso de construcción del conjunto siguiendo el procedimiento general (proposición 2.10):

Así, asociamos masa unidad al triángulo original  $E_0$  y repartimos esta masa entre los tres triángulos que forman el primer prefractal,  $E_{11}$ ,  $E_{12}$  y  $E_{13}$ .

Repitiendo el proceso, en el paso  $k$  repartimos la masa de cada triángulo entre los triángulos que contiene, con lo que tenemos  $3^k$  triángulos disjuntos,  $E_{ki}$ , cada uno con masa  $\mu(E_{ki}) = \frac{1}{3^k}$ .

La proposición 2.10 nos garantiza que existe una distribución de masa,  $\mu$ , tal que la masa de cada uno de los conjuntos utilizados en esta construcción coincide con la masa que se les asigna en ella y cuyo soporte está contenido en la intersección de todos los conjuntos, es decir, en el triángulo de Sierpinski  $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ .

Sólo nos queda por ver que para cada conjunto lo suficientemente pequeño,  $A$ , el valor de  $|A|^s$  con  $s = \frac{\log 3}{\log 2}$  es mayor de la masa que le asocia esta distribución.

Así, para cada conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  con  $|A| < 1$ , sea  $k$  tal que  $2^{-(k+1)} \leq |A| < 2^{-k}$ .

Como  $A$  puede interceptar a lo más a uno de los triángulos  $E_{ki}$ :

$$\mu(A) \leq \mu(E_{ki}) = 3^{-k} = (2^{-k})^{\frac{\log 3}{\log 2}} = (2^{-k})^s = 2^s (2^{-(k+1)})^s \leq b |A|^s.$$

Por el principio de distribución de masa  $\dim_{\text{H}}(E) \geq s = \frac{\log 3}{\log 2}$  y, por tanto, junto a la desigualdad ya obtenida,

$$\dim_{\text{H}}(E) = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5850.$$



## 2.3 Dimensión de recuento por cajas

Cuando al abordar el problema de la medida de un conjunto se ignoran las irregularidades de tamaño menor que  $\delta$  y se estudia como se comporta la medida cuando hacemos tender  $\delta$  a cero, surge la dimensión de recuento por cajas o dimensión caja (del inglés “box-counting dimension”).

Esta medida aparece al tomar en vez de  $\delta$ -recubrimientos numerables del conjunto, recubrimientos finitos por conjunto de diámetro exactamente  $\delta$ . Al evaluar

las sumas, las medidas  $s$ -dimensionales se obtienen como el producto del número mínimo de conjuntos de diámetro  $\delta$  necesarios para recubrirlo,  $N(\delta)$ , por el diámetro elevado a  $s$ ,  $\delta^s$ ; es decir, la medida  $s$ -dimensional va a ser  $N(\delta)\delta^s$ . Esta cantidad, aunque no es formalmente una medida, también cambia con  $s$  de infinito a cero en un valor crítico,  $D$ , que va a ser la nueva dimensión: la dimensión de recuento por cajas. Entre sus ventajas está que  $N(\delta)$  es proporcional a  $\delta^{-D}$ , con lo que la podemos obtener como el límite,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N(\delta))}{-\log(\delta)}$ .

Cuando utilicemos una  $\delta$ -malla para la obtención de  $N(\delta)$ , podremos abordar el problema del cálculo empírico de la dimensión de recuento por cajas.

### 2.3.1 Definición de la dimensión de recuento por cajas

Para definir esta dimensión, al igual que en la medida de Hausdorff, se toma como función de evaluación  $C(\delta) = \delta^s$ , pero en vez de estudiar

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^s : \{A_i\} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } F \right\}$$

cuando  $\delta$  tiende a cero, se estudia

$$M_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_i \delta^s : \{A_i\} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento finito de } F \right\} = N(\delta, F)\delta^s,$$

donde  $N(\delta, F)$ , que también se nota por  $N_\delta$  o  $N(\delta)$  cuando no hay lugar a confusión, es el número mínimo de conjuntos de diámetro  $\delta$  necesarios para recubrir a  $F$ .

Como  $M_\delta^s(F)$  depende de la elección de  $s$ , existe un valor crítico,  $D$ , para el que  $M_\delta^s(F)$  cambia de infinito a cero, cuando  $\delta$  tiende a 0:

$$M_\delta^s(F) = N(\delta, F)\delta^s \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & s > D \\ +\infty & s < D \end{cases}$$

con lo que para valores pequeños de  $\delta$

$$N(\delta, F) \sim \frac{1}{\delta^D} = \delta^{-D}.$$

Tomando logaritmos y haciendo tender  $\delta$  a 0 se define:

**Definición 2.5** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $F$  un subconjunto de  $X$ , compacto y no vacío.

Sea  $N(\delta, F)$  el menor número de conjuntos de diámetro  $\delta$  necesarios para recubrir a  $F$ , definimos la **dimensión de recuento por cajas** como

$$\dim_{\text{B}} F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta, F)}{-\log \delta}$$

si tal límite existe. ♣

En el caso de que este límite no exista, se puede distinguir entre límite superior e inferior hablando de dimensión superior e inferior de recuento por cajas, aunque, salvo que sea necesario, no haremos esta distinción y supondremos que existe el límite o que nos referimos a la dimensión superior de recuento por cajas.

El número de subconjuntos de diámetro máximo  $\delta$  necesarios para recubrir un conjunto es un indicador de lo irregular que es este conjunto cuando se examina a escala  $\delta$ , por lo que la dimensión de recuento por cajas refleja la rapidez con la que se desarrollan estas irregularidades cuando  $\delta$  tiende a 0.

En el caso particular de un subconjunto de  $\mathbb{R}^p$ , para estudiar lo irregular que es cuando se examina a escala  $\delta$  podemos utilizar recubrimientos formados por  $p$ -cubos de lado  $\delta$ , recubrimientos que reciben el nombre de  $\delta$ -mallas y son de la forma

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \dots \times [m_p\delta, (m_p + 1)\delta], \quad m_k \in \mathbb{Z},$$

con lo que si en la definición de la dimensión de recuento por cajas tomamos como  $N(\delta, F)$  el número de  $p$ -cubos de esta  $\delta$ -malla que cortan al conjunto se obtiene una definición de dimensión, que aunque en un principio puede parecer que da lugar a una dimensión distinta, pues el número de  $p$ -cubos de una  $\delta$ -malla que cortan al conjunto no es el número mínimo de conjuntos necesario para recubrirlo, también da lugar a la dimensión de recuento por cajas.

**Proposición 2.11** Sea  $F$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^p$ , compacto y no vacío:

$$\dim_{\text{B}} F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta, F)}{-\log \delta},$$

donde  $N(\delta, F)$  es el número de  $p$ -cubos de una  $\delta$ -malla que cortan al conjunto  $F$ .

**Demostración**

Sea  $N'(\delta)$  el número de cubos de una  $\delta$ -malla que cortan a  $F$ :

- Como estos cubos tienen diámetro  $\sqrt{p}\delta$ , se tiene que  $N(\sqrt{p}\delta) \leq N'(\delta)$ , con lo que

$$\dim_{\text{B}}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\sqrt{p}\delta)}{-\log(\sqrt{p}\delta)} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'(\delta)}{-\log(\sqrt{p}\delta)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'(\delta)}{-\log(\delta)}.$$

- Por otra parte, un conjunto de diámetro  $\delta$  está contenido como máximo en  $3^p$  cubos de lado  $\delta$ , con lo que  $N'(\delta) \leq 3^p N(\delta)$  y, por tanto,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'(\delta)}{-\log(\delta)} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log[3^p N(\delta)]}{-\log(\delta)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{-\log(\delta)} = \dim_{\text{B}}(F). \quad \clubsuit$$

Esta definición de dimensión de recuento por cajas es la definición que se usa para estimar empíricamente la dimensión de un conjunto contenido en el plano y el proceso que normalmente se sigue para estimarla es el que hace que la dimensión de recuento por cajas reciba este nombre, ya que básicamente consiste en dibujar sobre una representación gráfica del conjunto una  $\delta$ -malla y contar el número de  $p$ -cubos que cortan al conjunto,  $p$ -cubos que en este caso son cuadrados y que reciben el nombre de cajas (sección 4.1).

De manera análoga se pueden obtener otras definiciones equivalentes de dimensión de recuento por cajas que algunas veces son más sencillas de utilizar para calcular la dimensión de un conjunto y que añadidas a las dos anteriores permiten tomar <sup>11</sup>:

$\mathbf{N}(\delta)$  menor número de conjuntos de diámetro máximo  $\delta$  necesarios para recubrir  $F$ ,

$\mathbf{N}(\delta)$  número de cubos de una  $\delta$ -malla que cortan a  $F$  (en  $\mathbb{R}^p$ ),

$\mathbf{N}(\delta)$  menor número de cubos de lado  $\delta$  necesarios para recubrir  $F$  (en  $\mathbb{R}^p$ ),

$\mathbf{N}(\delta)$  menor número de bolas cerradas de radio  $\delta$  necesarios para recubrir  $F$ ,

$\mathbf{N}(\delta)$  mayor número de bolas disjuntas de radio  $\delta$  con centro en  $F$ .

---

<sup>11</sup>Falconer [29] pp. 39-41

### 2.3.2 Relación con la dimensión de Hausdorff

La dimensión de recuento por cajas y la dimensión de Hausdorff tienen en común que ambas evalúan el valor crítico,  $D$ , para el cual las “medidas”  $s$ -dimensionales del conjunto pasan de valer infinito a valer cero, y que a los conjuntos que forman el recubrimiento se les asigna como peso su diámetro elevado a  $s$ .

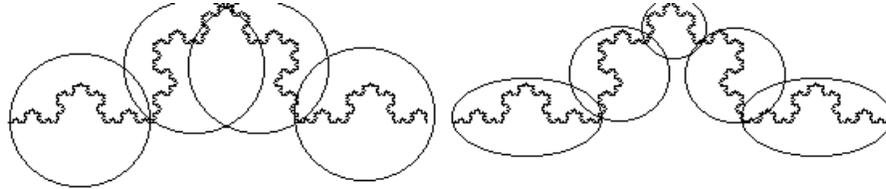


Figura 2.3: Dos recubrimientos, donde el segundo no es válido para el cálculo de la dimensión de recuento por cajas

Sin embargo, este valor no tiene por que coincidir, ya que, en la dimensión de recuento por cajas, el recubrimiento utilizado es finito y está formado por conjuntos de igual tamaño; mientras que en la dimensión de Hausdorff, el recubrimiento del conjunto puede ser numerable y se hace por conjuntos de tamaños distintos.

Utilizando estas relaciones, vamos a ver que la dimensión de Hausdorff nunca será mayor que la dimensión de recuento por cajas:

**Teorema 2.12** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $F$  un subconjunto de  $X$ , compacto y no vacío.

$$\dim_{\text{H}}(F) \leq \dim_{\text{B}}(F)$$

#### Demostración

Sea  $D = \dim_{\text{B}}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta, F)}{-\log \delta}$ , se tiene que para cada  $\delta$

$$N_{\delta} = N(\delta, F) \sim \frac{1}{\delta^D} = \delta^{-D}.$$

Como el recubrimiento de  $F$  asociado a  $N(\delta, F)$ ,  $\{A_i\}$ , es un  $\delta$ -recubrimiento, pues  $|A_i| = \delta$ , se tiene:

$$\sum_i |A_i|^D = \sum_{i=1}^{N_{\delta}} \delta^D = N_{\delta} \delta^D \sim 1,$$

con lo que  $\mathcal{H}_\delta^D(F) < +\infty$  y, por tanto,  $\mathcal{H}^D(F) < +\infty$ , con lo que por la definición de dimensión de Hausdorff

$$D \geq \dim_{\mathbb{H}}(F). \quad \clubsuit$$

Aunque en la mayoría de los conjuntos se da la igualdad la desigualdad a veces es estricta. Una condición suficiente para que se de esta igualdad, es la existencia de una distribución de masa sobre  $F$  lo suficientemente regular:

**Proposición 2.13** *Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $F$  un subconjunto de  $X$ , compacto y no vacío.*

*Si existen  $a, b, s, \delta_0 > 0$  y una distribución de masa,  $\mu$ , sobre  $F$  cumpliendo*

$$0 < a\delta^s \leq \mu(B(x, \delta)) \leq b\delta^s < \infty \quad \forall x \in F, 0 < \delta \leq \delta_0$$

*entonces*

$$\dim_{\mathbb{H}}(F) = \dim_{\mathbb{B}}(F)$$

### Demostración

• Veamos que  $s \leq \dim_{\mathbb{H}}(F) \leq \dim_{\mathbb{B}}(F)$ :

Sea  $\{A_i\}$  un  $\delta$ -recubrimiento de  $F$  con  $0 < \delta < \delta_0$ :

Eliminando del recubrimiento aquellos conjuntos que no lo corten, podemos elegir puntos  $x_i \in A_i \cap F$  de forma que  $F$  esté recubierto también por  $\{B(x_i, |A_i|)\}$ , con lo que

$$b \sum_i |A_i|^s \geq b \sum_i \mu(B(x_i, |A_i|)) \geq \mu(F) > 0,$$

por tanto  $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{b} > 0$  y  $s \leq \dim_{\mathbb{H}}(F)$ .

• Veamos que  $\dim_{\mathbb{H}}(F) \leq \dim_{\mathbb{B}}(F) \leq s$ :

Dado  $\delta > 0$ :

Tomamos como  $N(\delta)$  el mayor número de bolas disjuntas de radio  $\delta$  con centro en  $F$  (que es una definición equivalente de  $N(\delta)$ , proposición 2.11), eligiendo tales bolas se tiene que

$$aN(\delta)\delta^s \leq \sum_{i=1}^{N(\delta)} \mu(B(x_i, \delta)) \leq \mu(X) < +\infty$$

y, por tanto,  $\dim_{\mathbb{B}}(F) \leq s$ . ♣

**Ejemplo 2.3** *El triángulo de Sierpinski (ejemplo 1.1).*

Para ver que en este conjunto la dimensión de recuento por cajas coincide con la dimensión de Hausdorff, vamos a ver que la distribución de masa que utilizamos para calcular esta última dimensión (ejemplo 2.2), verifica las condiciones de regularidad de la proposición anterior.

Así, para cada  $x \in E$  y cada  $\delta$  con  $\delta < 1$ , análogamente a lo hecho para el cálculo de la dimensión de Hausdorff, tomamos  $k$  tal que  $2^{-(k+1)} \leq \delta < 2^{-k}$ :

- La bola de centro  $x$  y radio  $\delta$  está contenida en un único  $E_{ki}$ , con lo que:

$$\mu(B(x, \delta)) \leq \mu(E_{ki}) = 3^{-k} = (2^{-k})^{\frac{\log 3}{\log 2}} \leq b \delta^s.$$

- Por otra parte, esta bola contiene un triángulo  $E_{k+1i}$ , con lo que

$$\mu(B(x, \delta)) \geq \mu(E_{k+1i}) = 3^{-(k+1)} = (2^{-(k+1)})^{\frac{\log 3}{\log 2}} = (2^{-1} 2^{-k})^s \geq a \delta^s.$$

De esta forma, tenemos que para cada  $x \in E$  y cada  $\delta$  lo suficientemente pequeño,

$$0 < a \delta^s \leq \mu(B(x, \delta)) \leq b \delta^s < \infty,$$

y por tanto, por la proposición anterior,

$$\dim_{\text{B}}(E) = \dim_{\text{H}}(E) = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5850. \quad \clubsuit$$

### 2.3.3 Propiedades

La dimensión de recuento por cajas se comporta como la dimensión de Hausdorff bajo el efecto de las transformaciones lipschizianas y bi-lipschizianas, con lo que, también es invariante por éstas:

**Proposición 2.14** *Sean  $(X, d)$ ,  $(X', d')$  espacios métricos y  $F$  un subconjunto de  $X$ , compacto y no vacío.*

*Si  $f : X \mapsto X'$  es lipschiziana:*

$$\dim_{\text{B}}(f(F)) \leq \dim_{\text{B}}(F)$$

**Demostración**

Si  $F$  puede recubrirse por  $N(\delta)$  conjuntos de diámetro máximo  $\delta$ , al verificarse que  $d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y)$ , las  $N(\delta)$  imágenes de estos conjuntos bajo  $f$  formarán un recubrimiento por conjuntos de diámetro máximo  $c\delta$ . ♣

**Corolario 2.15** Sean  $(X, d)$ ,  $(X', d')$  espacios métricos compactos.

Si  $f : X \mapsto X'$  es bi-lipschiziana:

$$\dim_{\text{B}}(X) = \dim_{\text{B}}(f(X))$$

**Demostración**

Se obtiene directamente de la proposición anterior. ♣

Las propiedades de la dimensión de Hausdorff relativas a las operaciones entre conjuntos se verifican parcialmente, ya que, aunque la monotonía se da trivialmente, la estabilidad numerable no se tiene; pudiendo sólo hablar de estabilidad finita, cuando las dimensiones superior e inferior de recuento por cajas coinciden. Si estas dimensiones no coinciden, sólo se da para la dimensión superior de recuento por cajas:

**Proposición 2.16** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $E, F$  subconjuntos de  $X$ , compactos y no vacíos.

Se tiene:

1.  $E \subseteq F \implies \dim_{\text{B}}(E) \leq \dim_{\text{B}}(F)$  (Monotonía)
2.  $\dim_{\text{B}}(E \cup F) = \max\{\dim_{\text{B}}(E), \dim_{\text{B}}(F)\}$  (Estabilidad finita)

**Demostración**

1.- Trivial pues  $N(\delta, E) \leq N(\delta, F)$ .

2.- Para demostrarlo supondremos que  $\dim_{\text{B}}(F) \leq \dim_{\text{B}}(E)$  y probaremos que  $\dim_{\text{B}}(E \cup F) = \dim_{\text{B}}(E)$ , pues de manera análoga se puede probar que cuando  $\dim_{\text{B}}(F) \geq \dim_{\text{B}}(E)$ , se tiene  $\dim_{\text{B}}(E \cup F) = \dim_{\text{B}}(F)$ .

Para ello basta probar que  $\dim_{\text{B}}(E \cup F) \leq \dim_{\text{B}}(E)$ , pues la otra desigualdad se tiene por la monotonía:

Para cada  $\delta > 0$  se tiene que  $N(\delta, E \cup F) \leq N(\delta, E) + N(\delta, F)$ , con lo que

$$\begin{aligned} \dim_{\text{B}}(E \cup F) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta, E \cup F)}{-\log \delta} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log[N(\delta, E) + N(\delta, F)]}{-\log \delta} \\ &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta, E)}{-\log \delta} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \left[ 1 + \frac{N(\delta, F)}{N(\delta, E)} \right]}{-\log \delta} \end{aligned}$$

Como  $\frac{N(\delta, F)}{N(\delta, E)}$  no diverge, pues  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta, F)}{-\log \delta} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta, E)}{-\log \delta}$ , el primer sumando converge a  $\dim_{\text{B}}(E)$  y el segundo 0.  $\clubsuit$

La última proposición que vamos a ver nos permite calcular la dimensión de recuento por cajas de un conjunto utilizando la sucesión  $\delta_k = \frac{C}{2^k}$ , donde  $C$  es una constante que dependerá del tamaño del conjunto a analizar.

**Proposición 2.17** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $F$  un subconjunto de  $X$ , compacto y no vacío, y  $\{\delta_k\}$  una sucesión decreciente tendiendo a 0 tal que

$$\delta_{k+1} \geq c\delta_k \text{ con } 0 < c < 1,$$

se tiene que

$$\dim_{\text{B}} F = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(\delta_k)}{-\log \delta_k}.$$

### Demostración

Si  $\delta_{k+1} \leq \delta < \delta_k$  se tiene que

$$\frac{\log N(\delta)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N(\delta_{k+1})}{-\log \delta_k} \leq \frac{\log N(\delta_{k+1})}{-\log \delta_{k+1} + \log(\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k})} \leq \frac{\log N(\delta_{k+1})}{-\log \delta_{k+1} + \log c}$$

con lo que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{-\log \delta} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(\delta_k)}{-\log \delta_k}$$

y la desigualdad opuesta es trivial.  $\clubsuit$

## 2.4 Dimensión del grafo de una función continua

En esta sección vamos a ver que el calculo de la dimensión de recuento por cajas del grafo de una función continua se simplifica cuando utilizamos la definición

de dimensión de recuento por cajas a través del recubrimiento por una  $\delta$ -malla (proposición 2.11) y relacionamos el número de cajas que en la  $\delta$ -malla cortan al grafo de la función con el rango de la función en cada uno de los intervalos sobre los que la construimos; donde el rango de una función,  $f$ , en un intervalo,  $[a, b]$ , es

$$R_f[a, b] = \sup_{a < u, v < b} |f(u) - f(v)|.$$

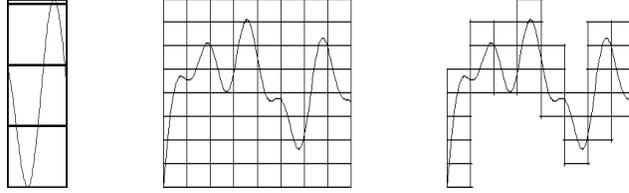


Figura 2.4: Relación entre el rango una función y el número de cajas no vacías en un recubierto por una  $\delta$ -malla

Cuando calculamos el cociente entre el rango de una función en un intervalo y la longitud del intervalo,  $\delta$ , estamos midiendo en pasos de longitud  $\delta$  la distancia entre los valores extremos de la función en este intervalo, por lo que obtenemos el número de cajas de lado  $\delta$  necesario para recubrir el grafo de la función sobre el intervalo (figura 2.4-a).

En realidad, como el número de cajas es entero, lo que obtenemos es una cota inferior, ya que el número de cajas de lado  $\delta$  necesario para recubrir el grafo de la función es el menor de los enteros mayores que este cociente, o, en el peor de los casos, incluso una unidad más, ya que, como estamos recubriendo el grafo por una  $\delta$ -malla (figura 2.4-b), la base de la columna de cajas que aparece sobre el intervalo no tiene que coincidir con el mínimo de la función sobre el intervalo (figura 2.4-c).

Para utilizar esta relación en el cálculo teórico de la dimensión de recuento por cajas del grafo de una función continua escribimos:

**Proposición 2.18** *Sea  $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$  continua y sea  $F$  su grafo.*

1. *El número de cuadrados de la  $\delta$ -malla que intersecan a  $F$  sobre el intervalo*

*$[i\delta, (i + 1)\delta]$ ,  $N_\delta[i\delta, (i + 1)\delta]$ , verifica*

$$\frac{R_f[i\delta, (1 + i)\delta]}{\delta} \leq N_\delta[i\delta, (i + 1)\delta] \leq \frac{R_f[i\delta, (1 + i)\delta]}{\delta} + 2$$

2. Sea  $\delta : 0 < \delta < 1$  y  $m$  el menor entero mayor o igual que  $\frac{1}{\delta}$ :

El número de cuadrados de la  $\delta$ -malla que intersecan a  $F$ ,  $N_\delta(F)$ , verifica

$$\delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_f[i\delta, (1+i)\delta] \leq N_\delta(F) \leq 2m + \delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_f[i\delta, (1+i)\delta],$$

### Demostración

El primer apartado ya lo hemos visto y el segundo se obtiene al sumar sobre todos los intervalos. ♣

Imponiendo condiciones adicionales las relaciones que acabamos de ver nos permiten obtener cotas superiores e inferiores para la dimensión de recuento por cajas:

**Corolario 2.19** *Sea  $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$  continua y sea  $F$  su grafo.*

*Sean  $c, c' > 0$ ,  $\delta_0, \delta'_0 > 0$  y  $1 \leq s \leq 2$ :*

1. *Si se verifica una condición de Holder de exponente  $2 - s$ ,*

$$|f(u) - f(v)| \leq c|u - v|^{2-s} \quad 0 \leq u, v \leq 1,$$

$$\dim_B(F) \leq s,$$

*resultado también válido si la condición se verifica sólo cuando  $|u - v| < \delta_0$ .*

2. *Si se verifica*

$$\forall u \in [0, 1] \quad \forall \delta : 0 < \delta \leq \delta'_0 \quad \exists v : |u - v| \leq \delta \text{ y } |f(u) - f(v)| \geq c' \delta^{2-s}$$

*entonces*

$$s \leq \dim_B(F)$$

*Se tiene, además, que toda función satisfaciendo esta condición es no diferenciable en todos sus puntos.*

### Demostración

1.- De  $|f(u) - f(v)| \leq c|u - v|^{2-s}$  se tiene que  $R_f[u_1, u_2] \leq c|u_1 - u_2|^{2-s}$  para  $0 \leq u_1, u_2 \leq 1$ , y, con la notación de la proposición anterior,

$$R_f[i\delta, (1+i)\delta] \leq c\delta^{2-s}.$$

Teniendo en cuenta que  $m < 1 + \delta^{-1}$  y que podemos tomar  $\delta : \delta < 1$  con lo que  $m < 2\delta^{-1}$  se tiene:

$$N_\delta \leq 2m + \delta^{-1}mc\delta^{2-s} \leq 4\delta^{-1} + \delta^{-1}2\delta^{-1}c\delta^{2-s} \leq 4\delta^{-s} + 2c\delta^{-s} = (4 + 2c)\delta^{-s},$$

por lo que  $\dim_B(F) \leq s$ .

2.- Análogamente, de  $|f(u) - f(v)| \geq c\delta^{2-s}$  se tiene que

$$R_f[i\delta, (1+i)\delta] \geq c\delta^{2-s},$$

como se verifica  $m > \delta^{-1}$  tenemos:

$$N_\delta \geq \delta^{-1}mc\delta^{2-s} > c\delta^{-s},$$

con lo que  $\dim_B(F) \geq s$ .

Por otra parte, dado  $u \in [0, 1]$ , sustituyendo  $\delta$  por  $h$ , se tiene que  $\forall h > 0$  suficientemente pequeño, existe  $u_h : |u - u_h| \leq h$  y  $|f(u) - f(u_h)| \geq ch^{2-s}$ , con lo que

$$\left| \frac{f(u) - f(u_h)}{u - u_h} \right| \geq \frac{ch^{2-s}}{h} = ch^{1-s}.$$

Como  $s$  es mayor o igual que uno, el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u+h) - f(u)}{h}$$

no converge a cero y, por tanto, la función no es diferenciable en  $u$ . ♣

Este último corolario nos permitirá calcular la dimensión de recuento por cajas del grafo de una función, ya que relaciona las variaciones que experimentan los valores de una función entre puntos próximos con la dimensión de su grafo.

Esta relación hace que, cuanto mayores son estas variaciones, mayor es la dimensión del grafo, y que, sólo cuando las variaciones son tales que la función no es diferenciable, el grafo tiene una dimensión mayor que uno.

Por otra parte, como el cociente entre el rango de la función en el intervalo y  $\delta$  parece una buena medida, en el sentido laxo de la palabra, del “tamaño del grafo” y, como se ve en la demostración del corolario, cuando  $\delta$  tiende a cero es este cociente el que determina la dimensión, parece una buena idea utilizar esta estimación para el cálculo empírico de la dimensión de recuento por cajas, estimación que analizaremos cuando abordemos este cálculo en el capítulo 4.

## 2.5 Otras medidas y dimensiones relacionadas

El método utilizado para definir la medida de Hausdorff nos permite obtener otras medidas sin más que realizar sobre él algunas modificaciones. Estas medidas dan lugar a otras definiciones de dimensión que, dependiendo del problema tratado, unas veces son más fáciles de utilizar y otras veces dan más información.

Así, la medida  $s$ -dimensional esférica,  $\mathcal{B}^s$ , se obtiene cuando en la definición de medida de Hausdorff, en vez de tomar recubrimientos por conjuntos de diámetro menor que  $\delta$ , tomamos las bolas abiertas de radio menor que  $\delta$ . Aunque esta medida es distinta de la medida de Hausdorff, la dimensión definida por ella sí coincide, con lo que si nuestro interés está en la dimensión y no en la medida, podemos restringir nuestra atención a recubrimientos formados sólo por bolas abiertas <sup>12</sup>.

Si en vez del diámetro del conjunto elevado a  $s$ ,  $\delta^s$ , utilizamos una función de valoración  $C(A) = h(\delta(A))$  con  $h(\delta)$  positiva y que tienda a 0 con  $\delta$ , se obtiene otra medida  $\mathcal{H}^h$  que recibe el nombre de  $h$ -medida de Hausdorff y que, utilizando una función de valoración adecuada al contexto, transmite una información más refinada sobre la estructura del conjunto.

La última medida que vamos a ver, que da lugar a una nueva dimensión, aparece cuando buscamos una medida relacionada con la cantidad

$$M^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} M_\delta^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta, F)\delta^s$$

que utilizamos para definir la dimensión de recuento por cajas y que no es formalmente una medida.

Esta medida se define siguiendo un método parecido al de la definición de la medida de Hausdorff utilizando los recubrimientos por bolas disjuntas con centros en el conjunto, cuyo número máximo es equivalente a  $N(\delta, F)$ :

$$\mathcal{P}_\delta^s(F) = \sup \left\{ \sum_i \delta(B_i)^s : |B_i| < \delta \right\},$$

donde, en este caso, el supremo se toma sobre los recubrimientos con bolas disjuntas con centros en  $F$ .

---

<sup>12</sup>Delgado [23] pp. 92-93

Como  $\mathcal{P}_\delta^s(F)$  decrece con  $\delta$ , el límite

$$\mathcal{P}_0^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{P}_\delta^s(F)$$

existe y, como todavía  $\mathcal{P}_0^s(F)$  no es una medida, la tomamos como función de valoración para obtener una medida aplicando el lema 2.1:

$$\mathcal{P}(F) = \inf \left\{ \sum_i \mathcal{P}_0^s(A_i) : F \subseteq \bigcup_i A_i \right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los recubrimientos  $\{A_i\}$  de  $F$ .

Esta medida recibe el nombre de **medida de empaquetado s-dimensional** (del inglés “s-dimensional packing measure”) y el valor crítico donde pasa de infinito a cero el de **dimensión de empaquetado** (del inglés “packing dimension”):

$$\dim_P(F) = \sup\{s : \mathcal{P}^s(F) = \infty\} = \inf\{s : \mathcal{P}^s(F) = 0\}$$

Esta dimensión está entre la dimensión de Hausdorff y la dimensión (superior) de recuento por cajas,

$$\dim_H(F) \leq \dim_P(F) \leq \dim_B(F),$$

por lo que cuando la dimensión de Hausdorff coincide con la dimensión de recuento por cajas también coincide con ellas <sup>13</sup>.

## 2.6 Dimensión de autosemejanza

Cuando el conjunto está formado por copias a escala del conjunto total, la autosemejanza del conjunto nos permite, bajo ciertas condiciones, determinar su dimensión por métodos indirectos, así, si se cumple:

- $F = \bigcup_{n=1}^N F_n$ , con  $F_n = r_n F$  (conjunto autosemejante),
- para su dimensión,  $s$ , se verifica  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$  ( $s$ -conjunto),

---

<sup>13</sup>Edgar [25] pg. 182

- las copias son o bien disjuntas, o bien sus intersecciones tienen  $\mathcal{H}^s$ -medida nula (conjunto no solapado),

por las propiedades de la medida de Hausdorff se tiene

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{n=1}^N r_n F\right) = \sum_{n=1}^N \mathcal{H}^s(r_n F) = \sum_{n=1}^N r_n^s \mathcal{H}^s(F),$$

con lo que, dividiendo por  $\mathcal{H}^s(F)$ , la dimensión de Hausdorff del atractor,  $s$ , es solución de la ecuación:

$$1 = \sum_{n=1}^N r_n^x,$$

ecuación que tiene una única solución no negativa <sup>14</sup>.

De esta forma, cuando el conjunto es autosemejante vamos a definir una nueva dimensión como la solución de esta ecuación. Esta dimensión recibe el nombre de dimensión de autosemejanza y no sólo no tiene sentido cuando el conjunto no es autosemejante, sino que cuando el conjunto es autosemejante no tiene por que coincidir con la dimensión de Hausdorff, ya que, a pesar de que en el caso particular que hemos utilizado para construir esta dimensión coinciden, si las copias se superponen veremos pronto que la dimensión obtenida no tiene por que coincidir con la dimensión de Hausdorff.

**Definición 2.6** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo.*

*Sea  $\{X, w_n : n = 1, \dots, N\}$  un sistema de funciones iteradas hiperbólico autosemejante, con razones de semejanza respectivas  $r_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ .*

*La única solución de la ecuación*

$$\sum_{n=1}^N r_n^x = 1$$

*recibe el nombre de **dimensión de autosemejanza** y se nota por  $\dim_S F$ .* ♣

---

<sup>14</sup>Al ser  $\phi(x) = \sum_{n=1}^N r_n^x$  continua y estrictamente decreciente en  $[0, \infty)$  con  $\phi(0) = N \geq 1$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$ , el teorema del valor intermedio nos garantiza que existe un único  $x$ , con  $0 \leq x < \infty$ , tal que  $\phi(x) = 1$ . Además, este  $x$  es cero si y sólo si  $N = 1$ , ya que,  $\phi(0) = N \geq 1$ .

Cuando todos las razones de semejanza son iguales,  $r_n = r$ ,  $n = 1, \dots, N$ , podemos calcular la dimensión de autosemejanza de una forma sencilla, como el cociente entre el logaritmo del número de copias,  $N$ , y el logaritmo del inverso de la razón de semejanza,  $\frac{1}{r}$ , ya que

$$\sum_{n=1}^N r^x = 1 \iff Nr^x = 1 \iff x = \frac{\log(N)}{\log(1/r)}.$$

Es importante señalar que esta dimensión no es una dimensión del conjunto, sino una dimensión del sistema de funciones iteradas, ya que un conjunto puede ser el atractor de más de un sistema y, por ello, puede tener asociada más de una dimensión de autosemejanza.

**Ejemplo 2.4** *El conjunto de Cantor.*

El conjunto de Cantor recibe este nombre porque fue utilizado por el matemático alemán Georg Cantor (1845-1918) para demostrar que  $\mathbb{R}$  no era numerable, al no serlo este conjunto que está contenido en él, y, al igual que otros fractales, se obtiene como límite al aplicar un proceso iterativo.

El proceso de construcción comienza considerando un intervalo  $E_0$ , por ejemplo

$$E_0 = [0, 1].$$

Este intervalo lo dividimos en tres partes iguales y eliminamos el tercio central  $(1/3, 2/3)$  para obtener una primera aproximación, que se nota por  $E_1$  y está formada por los intervalos restantes  $E_{11} = [0, 1/3]$  y  $E_{12} = [2/3, 1]$ , de forma que:

$$E_1 = E_{11} \cup E_{12}.$$

Después de esta primera fase, tenemos dos intervalos, cada uno de longitud  $1/3$  del de partida, sobre los que repetimos la misma operación, volviéndolos a dividir en tres trozos iguales y deshaciéndonos del central, por lo que después de  $k$  aplicaciones del citado proceso obtenemos  $2^k$  intervalos, cada uno de longitud  $(\frac{1}{3})^k$  del de partida.



Figura 2.5: Construcción del conjunto de Cantor

El conjunto de puntos de los intervalos que quedan después de haber realizado la  $k$ -ésima fase del proceso forma la  $k$ -ésima aproximación al conjunto

$$E_k = \bigcup_{i=1}^{2^k} E_{ki}$$

y el conjunto de puntos del intervalo  $[0, 1]$  que permanecen después de aplicar infinitas veces el proceso es el conjunto de Cantor:

$$E = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k.$$

En este proceso los conjuntos  $E_k$  forman una sucesión decreciente de conjuntos compactos, ya que  $E_{k+1}$  está incluido en  $E_k$  para todo  $k$ ,  $E_1$  está acotado y los conjuntos  $E_k$  son cerrados por ser unión finita de intervalos cerrados, por lo que el teorema 1.3 nos garantiza que el conjunto de Cantor es un compacto no vacío y que es el límite de la sucesión en la métrica de Hausdorff.

El conjunto de Cantor es autosemejante, ya que si lo construimos a partir del intervalo  $[0, 1/3]$  obtenemos una copia del conjunto a escala  $1/3$  y si lo hacemos a partir del intervalo  $[2/3, 1]$  obtenemos una copia a la misma escala del conjunto total.

De esta forma, podemos representar el conjunto de Cantor en el plano mediante un sistema de funciones iteradas formado por las transformaciones

$$w_1(t, x) = \left(\frac{t}{3}, \frac{x}{3}\right) \quad w_2(t, x) = \left(\frac{t+2}{3}, \frac{x}{3}\right)$$

y donde la dimensión de autosemejanza del sistema, al ser las copias disjuntas, coincide con su dimensión de Hausdorff:

$$\dim_{\text{H}}(E) = \dim_{\text{S}}(E) = \frac{\log(\text{número de copias})}{\log(\text{inverso de la razón})} = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.6309.$$

Siguiendo este mismo proceso, podemos sustituir el intervalo  $[0, 1]$  por los intervalos  $[0, \frac{1}{2}]$  y  $[\frac{1}{2}, 1]$  obteniendo un sistema de funciones iteradas formado por dos semejanzas de razón  $\frac{1}{2}$ , cuyo atractor es el intervalo original, intervalo  $[0, 1]$ , y cuya dimensión de autosemejanza es

$$\dim_s([0, 1]) = \frac{\log(N)}{\log(1/r)} = \frac{\log(2)}{\log(2)} = 1.$$

De manera análoga, si sustituimos el intervalo  $[0, 1]$  por los intervalos  $[0, \frac{2}{3}]$  y  $[\frac{1}{3}, 1]$  obtenemos un sistema de funciones iteradas formado por dos semejanzas de razón  $\frac{2}{3}$ , cuyo atractor también es el intervalo  $[0, 1]$  pero con dimensión de autosemejanza

$$\dim_s([0, 1]) = \frac{\log(N)}{\log(1/r)} = \frac{\log(2)}{\log(3/2)} \approx 1.7095.$$

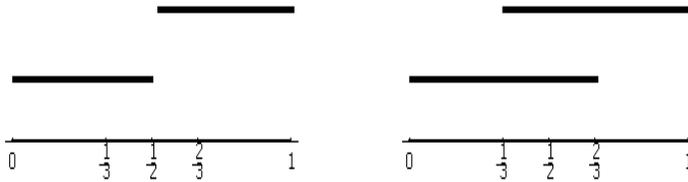


Figura 2.6: El intervalo  $[0, 1]$  como atractor de dos sistemas de funciones iteradas

En el primer caso las imágenes no se superponen demasiado, ya que sólo coinciden en un punto y éste tiene  $\mathcal{H}^1$ -medida nula, por lo que coincide la dimensión de autosemejanza y la dimensión de Hausdorff del atractor, que es uno, pues el intervalo  $[0, 1]$  tiene longitud ( $\mathcal{H}^1$ -medida) finita y positiva (figura 2.6-a).

Sin embargo, en el segundo caso las copias sí se superponen mucho y no podemos deducir que su dimensión de Hausdorff es 1.7095, pues su intersección es el intervalo  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  que tiene  $\mathcal{H}^{1.7095}$ -medida nula, al tener longitud ( $\mathcal{H}^1$ -medida) finita y positiva (figura 2.6-b). ♣

El siguiente teorema <sup>15</sup>, garantiza que si podemos encontrar un abierto no vacío, cuyas imágenes por cada una de las transformaciones del sistema de funciones itera-

<sup>15</sup>Hutchinson [40]

das están contenidas en dicho abierto y son disjuntas, la dimensión de autosemejanza asociada al sistema coincide con la dimensión de Hausdorff del atractor.

**Teorema 2.20** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo.*

*Un sistema de funciones iteradas, hiperbólico y auto semejante  $\{X, w_n, n = 1, \dots, N\}$  con atractor  $F$  verifica la **condición de abierto (de Moran)**<sup>16</sup> si existe un abierto no vacío,  $\mathcal{O}$ , que verifica:*

$$1. w_i(\mathcal{O}) \cap w_j(\mathcal{O}) = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$2. \bigcup_{n=1}^N w_n(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}$$

*En este caso, la dimensión de semejanza coincide con la dimensión de Hausdorff,*

*s,*

$$\dim_{\text{H}} F = \dim_{\text{S}} F$$

*verificándose además que  $0 < \mathcal{H}^s(F) < +\infty$  con las intersecciones de medida nula.*

*En otro caso se tiene que*

$$\dim_{\text{H}} F \leq \dim_{\text{S}} F$$



De esta forma, aunque un conjunto fractal sea atractor de más de un sistema de funciones iteradas y pueda tener asociada más de una dimensión de semejanza, si uno de estos sistemas verifica la condición de abierto, podemos garantizar que la dimensión de semejanza asociada a él, coincide con la dimensión de Hausdorff del atractor.

En cambio, en los sistemas de funciones iteradas que no la verifiquen, sólo podemos garantizar, que la dimensión de semejanza asociada al sistema es una cota superior de la dimensión de Hausdorff del atractor.

---

<sup>16</sup>Esta condición permite, además, clasificar el IFS según el solapamiento de las partes:

**Totalmente desconectado** (del inglés “totally disconnected”) si  $w_i(F) \cap w_j(F) = \emptyset \quad \forall i \neq j$ .

**Apenas contactado** (del inglés “just-touching”) si verifica la condición de abierto y no está totalmente desconectado (si está totalmente desconectado también la verifica con  $\mathcal{O} = \text{int}(F)$ ).

**Solapado** (del inglés “overlapping”) en otro caso.

Además, cuando el sistema de funciones iteradas verifica la condición de abierto, su atractor es un  $s$ -conjunto formado por copias del conjunto total cuyas intersecciones tienen  $\mathcal{H}^s$  medida nula.

Estos conjuntos fueron los que nos sirvieron para definir la dimensión de autosemejanza, puesto que su dimensión de Hausdorff,  $s$ , era solución de la ecuación mediante la que la definimos. Sin embargo, para que la dimensión de autosemejanza del sistema,  $s'$ , coincida con la dimensión de Hausdorff del conjunto,  $s$ , no es suficiente que las copias del conjunto tengan intersecciones con  $\mathcal{H}^{s'}$ -medida nula, ya que, como hemos visto en el ejemplo anterior, si la dimensión de autosemejanza es estrictamente mayor que la dimensión de Hausdorff, la  $\mathcal{H}^{s'}$ -medida de la intersección es nula, tenga esta intersección la  $\mathcal{H}^s$ -medida que tenga.

**Ejemplo 2.5** *La curva de von Koch (ejemplos 1.2 y 1.3).*

En el ejemplo 1.4 vimos que la curva de von Koch tiene asociados dos sistemas de funciones iteradas, cada uno correspondiente a las dos formas de construirla.

En la primera construcción de la curva, se obtenían cuatro versiones a escala  $\frac{1}{3}$  de la curva completa si la construíamos sobre cada uno de los cuatro segmentos que formaban la primera aproximación, por lo que tenía asociado un sistema de funciones iteradas formado por cuatro semejanzas de razón  $\frac{1}{3}$ , con lo que tiene como dimensión de autosemejanza

$$\dim_s(E) = \frac{\log(\text{número de copias})}{\log(\text{inverso de la razón})} = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

Aunque en este caso las copias no son disjuntas, como sucedía con el conjunto de Cantor, las dimensiones de Hausdorff y de autosemejanza coinciden, pues se verifica la condición de abierto (teorema 2.20) con  $\mathcal{O}$  el interior del triángulo  $E'_0$  que aparece en la construcción alternativa de la curva, ya que este abierto es no vacío y sus imágenes por cada una de las transformaciones del sistema son disjuntas y están contenidas en dicho abierto.

En la segunda construcción, el sistema de funciones iteradas asociado estaba formado por cuatro semejanzas de razón  $\frac{1}{3}$ , con lo que su dimensión de autosemejanza

es

$$\dim_S(E) = \frac{\log(\text{número de copias})}{\log(\text{inverso de la razón})} = \frac{\log 2}{\log \sqrt{3}}.$$

Como este sistema también verifica la condición de abierto esta dimensión también coincide con la dimensión de Hausdorff, por lo que, como es natural, coincide con la dimensión obtenida anteriormente,

$$\dim_H(E) = \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{\log 2}{\log \sqrt{3}} \approx 1.2619,$$

poniendo de manifiesto que, aunque el sistema de funciones iteradas asociado a un fractal no es único, la dimensión de semejanza asociada al sistema coincide con la dimensión de Hausdorff del atractor, siempre y cuando el sistema de funciones iteradas verifique la condición de abierto. ♣

## Referencias

Entre las referencias que mejor tratan la relación de la medida y dimensión de Hausdorff con la dimensión de recuento por cajas se encuentran tres obras de Falconer: Falconer [28], Falconer [29] y Falconer [30], y en ellas se pueden ver en contextos muy variados otras características de los conjuntos fractales distintas a la dimensión.

Aunque dentro de la teoría de la medida hay referencias muy completas, por ejemplo Rogers [65] o Federer [35], una buena referencia para el estudio de la medida y la dimensión de Hausdorff es Edgar [25], donde también se analiza la relación entre las dimensiones de Hausdorff y de recuento por cajas, y en la cual además se puede ver la relación de la dimensión de Hausdorff con la dimensión topológica.

A la hora de profundizar en la conexión entre la dimensión y los sistemas de funciones iteradas destacamos Barnsley [4], donde la dimensión de recuento por cajas recibe el nombre de dimensión fractal, y Edgar [26].



## Capítulo 3

# Características fractales en un grafo

Cuando decimos que un grafo tiene características fractales, no sólo queremos decir que es irregular a todas las escalas y que su dimensión no es entera, sino que también queremos decir que existe una relación de escala entre las partes en las que se puede descomponer.

En este capítulo vamos a ver que, en el caso concreto del grafo de una función, la relación de escala que éste tiene con los grafos de la función que se obtienen en subintervalos del intervalo completo de definición, autoafinidad, tiene distintas formas de manifestarse y para estudiarlas vamos a considerar modelos de grafos de funciones, todos con dimensiones no enteras.

La primera forma de autoafinidad, autoafinidad global, es la misma que vimos en el primer capítulo, ya que aparece cuando el grafo de una función está formado por copias reducidas suyas, y para su estudio vamos a considerar las funciones de interpolación fractal (sección 3.1), donde su grafo se obtiene como el atractor de un sistema de funciones iteradas.

La segunda forma de autoafinidad, autoafinidad local, aparece en los grafos de funciones cuando las representamos en intervalos cada vez menores y obtenemos una representación que, salvo por escala, es igual a la representación del grafo de la función en su intervalo de definición.

Este tipo de autoafinidad lo veremos en la función de Weierstrass (sección 3.2) y es el que nos va a permitir hablar de autoafinidad estadística cuando extendamos el concepto de autoafinidad a un proceso estocástico.

La autoafinidad estadística aparecerá en la última sección del capítulo en el primer modelo fractal aleatorio que vamos a ver: el movimiento browniano; que es la base de los modelos que vamos a considerar para describir el comportamiento fractal de la serie de cierres diarios del índice Ibex35 (capítulo 5).

### 3.1 Autoafinidad global: Funciones de interpolación fractal

En esta sección vamos a ver que el tipo de autoafinidad que presentan las funciones de interpolación fractal es el mismo que vimos en el capítulo 1, ya que al construirse como atractores de un sistema de funciones iteradas, su grafo está formado por varias copias del conjunto total.

Por otra parte, las funciones de interpolación fractal nos van a proporcionar el primer modelo de grafo con características fractales que necesitamos para el análisis empírico de la estimación del número de cajas que en una  $\delta$ -malla cortan al grafo de una función.

Al igual que sucedía en los conjuntos que vimos en el capítulo 1, cuando el sistema de funciones iteradas está formado sólo por semejanzas, sistema autosemejante, las copias que lo forman son semejantes al conjunto y, por tanto, reducciones a escala del conjunto total.

En el caso general, el sistema está formado por transformaciones afines y el atractor por copias afines del conjunto, por lo que las copias que lo forman no tienen por que ser reducciones a escala del conjunto total, sino que los factores de reducción en cada una de las direcciones de los ejes pueden ser distintos.

Aunque no las vamos a utilizar para interpolar series de datos, hemos mantenido el nombre de funciones de interpolación fractal para poner de manifiesto que, al contrario que las funciones de interpolación que se utilizan tradicionalmente para

aproximar un conjunto finito de datos (rectas, polinomios del menor grado posible, combinaciones lineales de funciones elementales, ...) cuya dimensión siempre es uno, las funciones de interpolación fractal permiten asegurar que la dimensión fractal coincide con la dimensión de los datos en un rango apropiado de escalas, sin perder las características deseables en una función de interpolación:

- Se pueden representar por formulas (mediante el código del sistema).
- Son computables (mediante las aplicaciones afines del sistema).
- Se puede medir su aproximación a los datos experimentales (mediante la distancia de Hausdorff entre el atractor y los datos).

### 3.1.1 Proceso de construcción y autoafinidad

El proceso de construcción de una función de interpolación fractal parte de un conjunto finito de puntos, que reciben el nombre de **puntos de interpolación**:

$$\{(t_i, x_i) : 0 \leq i \leq N\} \text{ con } t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N$$

y un sistema de funciones iteradas,  $\{\mathbb{R}^2, w_n, n = 1, \dots, N\}$ , formado por transformaciones afines cuyo término  $b_n$  es cero

$$w_n(t, x) = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Para que el atractor de este sistema pase por los puntos de interpolación, imponemos que los extremos del segmento  $L[(t_0, x_0), (t_N, x_N)]$  se transformen por cada aplicación  $w_n$  en los extremos del segmento  $L[(t_{n-1}, x_{n-1}), (t_n, x_n)]$ :

$$w_n(t_0, x_0) = (t_{n-1}, x_{n-1}) \quad w_n(t_N, x_N) = (t_n, x_n) \quad \forall n = 1, \dots, N$$

obteniendo para cada una de las  $N$  transformaciones que forman el sistema de funciones iteradas un sistema con 4 ecuaciones y 5 incógnitas:

$$\begin{cases} a_n t_0 & + e_n & = & t_{n-1} \\ c_n t_0 & + d_n x_0 & + f_n & = x_{n-1} \\ a_n t_N & & + e_n & = t_n \\ c_n t_N & + d_n x_N & + f_n & = x_n \end{cases}$$

Si en cada transformación consideramos a  $d_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ) como un parámetro libre, una vez fijado éste, el sistema tiene una única solución dada para cada  $n$  ( $n = 1, \dots, N$ ) por:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{t_n - t_{n-1}}{t_N - t_0} & e_n &= \frac{t_N t_{n-1} - t_0 t_n}{t_N - t_0} \\ c_n &= \frac{x_n - x_{n-1}}{t_N - t_0} - d_n \frac{x_N - x_0}{t_N - t_0} & f_n &= \frac{t_N x_{n-1} - t_0 x_n}{t_N - t_0} - d_n \frac{t_N x_0 - t_0 x_N}{t_N - t_0} \end{aligned}$$

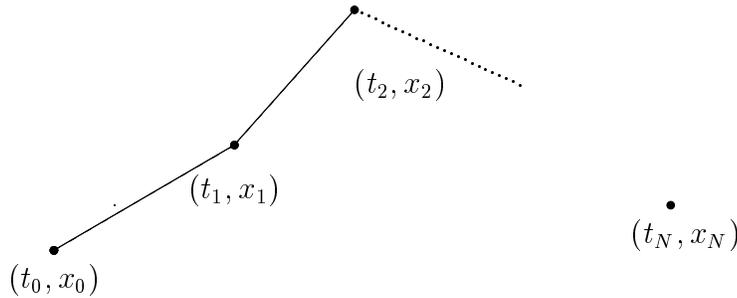


Figura 3.1: Función de interpolación lineal

Cuando tomamos  $d_n = 0$ ,  $\forall n = 1, \dots, N$ , se obtiene como atractor del sistema el grafo de la función de interpolación lineal, que pasa por los puntos

$$f(t) = x_{i-1} + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) \quad x \in [t_{i-1}, t_i] \quad i = 1, \dots, N,$$

pues este grafo es el único subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  compacto no vacío que verifica

$$G = \bigcup_{n=1}^N w_n(G),$$

ya que, en primer lugar  $\bigcup_{n=1}^N w_n(G) \subseteq G$ , al ser la imagen de  $G$  por la transformación  $w_n$  el segmento de extremos  $(x_{n-1}, t_{n-1})$  y  $(x_n, t_n)$  y, en segundo lugar la aplicación de Hutchinson es sobreyectiva, al transformarse por la aplicación  $w_n$  los puntos extremos del grafo en los puntos extremos de cada segmento, con lo que se alcanza la igualdad.

En el caso general, si consideramos a  $d_n$  como parámetro libre podemos fijar la escala vertical producida por cada una de las transformaciones, ya que  $|d_n|$  es

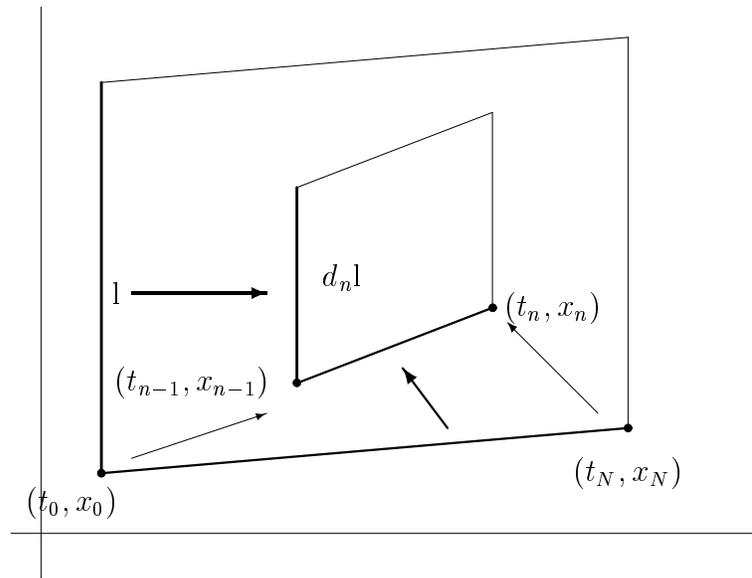


Figura 3.2: Interpretación de  $d_n$ : la transformación  $w_n$  reduce la escala vertical en un factor  $|d_n|$

la razón entre la longitud de cada segmento paralelo al eje  $Y$  y la longitud de su imagen, que también es paralela al eje  $Y$  (figura 3.2). Por este motivo, se obtenía la función de interpolación lineal cuando los factores de escala vertical eran cero.

Cuando los factores de escala vertical son menores que uno en valor absoluto, el siguiente teorema nos garantiza que el sistema de funciones iteradas asociado a los puntos tiene como atractor el grafo de una función continua que pasa por los puntos de interpolación.

Este atractor se obtiene como el punto fijo de un funcional contractivo, que se puede utilizar sin necesidad de tener una expresión explícita de la función de interpolación.

**Teorema 3.1** *Sea  $\{\mathbb{R}^2, w_n, n = 1, \dots, N\}$  el sistema de funciones iteradas asociado a los puntos*

$$\{(t_i, x_i) : 0 \leq i \leq N\} \quad t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N,$$

*donde los factores de escala vertical verifican  $|d_n| < 1 \forall n = 1, \dots, N$ .*

*Para cada elección de los  $d_n$ :*

1. El sistema anterior tiene un único atractor,  $G$ , compacto no vacío, que verifica

$$G = \bigcup_{n=1}^N w_n(G).$$

2. El atractor del sistema es el grafo de una función continua

$$f : [t_0, t_N] \mapsto \mathbb{R}$$

que pasa por los puntos de interpolación.

Además, esta función verifica

$$f(t) = c_n l_n^{-1}(t) + d_n f(l_n^{-1}(t)) + f_n \quad t \in [t_{n-1}, t_n] \quad n = 1, \dots, N$$

donde cada  $l_n(t) = a_n t + e_n$  es la función lineal que transforma el intervalo  $[t_0, t_N]$  en el intervalo  $[t_{n-1}, t_n]$ ,  $n = 1, \dots, N$ .

### Demostración

1.- Basta ver que existe una distancia en  $\mathbb{R}^2$  equivalente a la euclídea de tal forma que el sistema anterior es hiperbólico, para lo que a su vez basta ver que las aplicaciones  $w_n$  son contractivas respecto a dicha distancia  $\forall n = 1, \dots, N$ :

Consideremos la distancia:

$$d[(t, x), (t', x')] = |t - t'| + \theta |x - x'|$$

donde  $\theta > 0$  se definirá posteriormente.

Esta distancia es equivalente a la euclídea pues es equivalente a la distancia,  $d[(t, x), (t', x')] = |t - t'| + |x - x'|$ , que a su vez es equivalente a la euclídea.

Sea  $n$  con  $1 \leq n \leq N$ , veamos que la aplicación  $w_n$  es contractiva respecto a dicha distancia:

$$d[w_n(t, x), w_n(t', x')] = d[(a_n t + e_n, c_n t + d_n x + f_n), (a_n t' + e_n, c_n t' + d_n x' + f_n)] =$$

$$|a_n(t - t')| + \theta |c_n(t - t') + d_n(x - x')| \leq (|a_n| + \theta |c_n|)|t - t'| + \theta |d_n||x - x'| = (*)$$

a) Supongamos que  $c_i = 0 \forall i = 1, \dots, N$ . Sea  $\theta = 1$ :

$$(*) \leq \max\{a_n, d_n\}(|t - t'| + \theta|x - x'|) = s_n d[(t, x), (t', x')] \text{ con } 0 \leq s_n < 1$$

Donde  $s_n = \max\{a_n, d_n\}$  verifica  $0 \leq s_n < 1$  pues  $0 \leq |a_n| = \frac{|t_n - t_{n-1}|}{|t_N - t_0|} < 1$  y  $0 \leq |d_n| < 1$ .

b) Supongamos que  $\exists c_i \neq 0 \ i = 1, \dots, N$ . Sea

$$\theta = \frac{\min\{1 - |a_n| : n = 1, \dots, N\}}{\max\{2|c_n| : n = 1, \dots, N\}}$$

que cumple  $\theta > 0$  pues  $|a_n| < 1$  y sea  $s'_n = |a_n| + \theta|c_n|$ :

$$(*) = s'_n |t - t'| + \theta |d_n| |x - x'| \leq \max\{s'_n, d_n\}(|t - t'| + \theta|x - x'|) = s_n d[(t, x), (t', x')] \text{ con } 0 \leq s_n < 1$$

con  $0 \leq s_n < 1$

Donde  $s_n = \max\{s'_n, d_n\}$  verifica  $0 \leq s_n < 1$  al ser  $0 \leq |d_n| < 1$  y  $0 \leq s'_n < 1$

pues  $s'_n = |a_n| + |c_n| \frac{1 - \max\{|a_n| : n = 1, \dots, N\}}{2 \max\{|c_n| : n = 1, \dots, N\}} \leq$

$$|a_n| + \frac{1 - \max\{|a_n| : n = 1, \dots, N\}}{2} < 1.$$

2.-Vamos a construir la función continua que pasa por los puntos de interpolación como el punto fijo de un funcional contractivo,  $T$ , en  $(\mathbb{F}, d)$  donde

$$\mathbb{F} = \{f : [t_0, t_N] \mapsto \mathbb{R} / f \text{ es continua y } f(t_0) = x_0, f(t_N) = x_N\} \text{ y}$$

$$d(f, g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in [t_0, t_N]\} \quad f, g \in \mathbb{F},$$

que es un espacio métrico completo pues  $[t_0, t_N]$  es compacto y  $\mathbb{R}$  es completo <sup>1</sup>.

• Definimos  $T : f \in \mathbb{F} \mapsto Tf \in \mathbb{F}$  como

$$Tf(t) = c_n l_n^{-1}(t) + d_n f(l_n^{-1}(t)) + f_n \quad t \in [t_{n-1}, t_n] \quad n = 1, \dots, N$$

donde cada  $l_n(t) = a_n t + e_n$  es la función lineal que transforma el intervalo  $[t_0, t_N]$  en el intervalo  $[t_{n-1}, t_n]$  para  $n = 1, \dots, N$ .

• Veamos que  $Tf \in \mathbb{F}, \forall f \in \mathbb{F}$ :

---

<sup>1</sup>Franz [38] pp. 85-87.

$Tf$  está bien definida y es continua en cada  $[t_{n-1}, t_n] : n = 1, \dots, N$ .

Por la izquierda en los puntos  $t_n : n = 0, \dots, N - 1$  se tiene:

$$Tf(t_n) = c_n l_n^{-1}(t_n) + d_n f(l_n^{-1}(t_n)) + f_n = c_n t_N + d_n f(t_N) + f_n = c_n t_N + d_n x_N + f_n = x_n.$$

Por la derecha en los puntos  $t_n : n = 1, \dots, N$  se tiene:

$$Tf(t_n) = c_{n+1} l_{n+1}^{-1}(t_n) + d_{n+1} f(l_{n+1}^{-1}(t_n)) + f_{n+1} = c_{n+1} t_0 + d_{n+1} f(t_0) + f_{n+1} = c_{n+1} t_0 + d_{n+1} x_0 + f_{n+1} = x_n.$$

De esta forma, coincide en los puntos de unión,  $f(t_0) = x_0$  y  $f(t_N) = x_N$ ; con lo que efectivamente  $Tf \in \mathbb{F}$  para  $f \in \mathbb{F}$ .

• Veamos que  $T$  es contractivo:

Sean  $f, g \in F$  y  $c = \max\{|d_n| : n = 1, \dots, N\} < 1$ .

Para cada  $n : n = 1, \dots, N$  y cada  $t \in [t_{n-1}, t_n]$  se tiene que

$$|Tf(t) - Tg(t)| = |d_n| |f(l_n^{-1}(t)) - g(l_n^{-1}(t))| \leq cd(f, g).$$

De esta forma,  $d(Tf, Tg) \leq cd(f, g)$ , siendo  $c < 1$ , con lo que, efectivamente,  $T$  es contractivo en  $(\mathbb{F}, d)$ .

• Por el teorema de la aplicación contractiva,  $T$  tiene un único punto  $f \in \mathbb{F}$  que además pasa por los puntos de interpolación, pues para  $t_n : n = 0, \dots, N$  tenemos que  $f(t_n) = Tf(t_n) = c_n l_n^{-1}(t_n) + d_n f(l_n^{-1}(t_n)) + f_n = c_n t_N + d_n x_N + f_n = x_n$ .

• En resumen, hemos construido una función continua que pasa por los puntos de interpolación,

$$f : [t_0, t_N] \mapsto \mathbb{R}, \text{ verificando } Tf(t) = f(t) \ t \in [t_0, t_N]$$

y sólo nos queda probar que el grafo de  $f$ ,  $\tilde{G}$ , coincide con el atractor del sistema, para lo que vamos a ver que es el punto fijo del sistema de funciones iteradas:

Para cada  $t \in [t_0, t_N]$  y cada  $n : n = 1, \dots, N$  se tiene que  $a_n t + e_n \in [t_{n-1}, t_n]$  con lo que

$$f(a_n t + e_n) = Tf(a_n t + e_n) = c_n l_n^{-1}(a_n t + e_n) + d_n f(l_n^{-1}(a_n t + e_n)) + f_n = c_n t + d_n f(t) + f_n$$

y al ser

$$w_n(t, x) = (a_n t + e_n, c_n t + d_n x + f_n)$$

el grafo de  $f$  verifica

$$\tilde{G} = \bigcup_{n=1}^N w_n(\tilde{G}).$$



### 3.1.2 Dimensión de una función de interpolación fractal

En el siguiente teorema vamos a ver que si los puntos de interpolación no están alineados, la dimensión de recuento por cajas del grafo de una función de interpolación fractal depende de los parámetros de escala y es independiente de la segunda coordenada de los puntos de interpolación.

Veremos después que si además los puntos están igualmente distribuidos sobre el eje temporal, la dimensión tampoco dependen de la primera coordenada, por lo que sólo lo hace de los factores de escala verticales. Esto nos va a permitir obtener modelos de grafos con características fractales, modelos que necesitamos para el análisis empírico de la estimación del número de cajas que en una  $\delta$ -malla cortan al grafo de una función.

**Teorema 3.2** *Sea  $\{\mathbb{R}^2, w_n, n = 1, \dots, N\}$  el sistema de funciones iteradas asociado a los puntos*

$$\{(t_i, x_i) : 0 \leq i \leq N\} \quad t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N,$$

*donde los factores de escala vertical verifican  $|d_n| < 1 \forall n = 1, \dots, N$ .*

*Si los puntos no están alineados y*

$$\sum_{n=1}^N |d_n| > 1$$

*la dimensión de recuento por cajas del grafo de la función de interpolación fractal que pasa por los puntos de interpolación (atractor del sistema) es la única solución real,  $D$ , de la ecuación*

$$\sum_{n=1}^N |d_n| a_n^{D-1} = 1.$$

*En otro caso, su dimensión de recuento por cajas es 1.*

**Demostración**

En este teorema no vamos a ver la demostración formal y sólo vamos a ver una idea general sobre como se calcula esta dimensión en el caso

$$|d_n| > a_n, \quad \forall n = 1, \dots, N,$$

que es una condición más restrictiva que la que aparece como hipótesis, y donde cada transformación tiene el factor de escala vertical,  $d_n$ , mayor que el factor de escala horizontal,  $a_n$ <sup>2</sup>.

Como este grafo verifica

$$\tilde{G} = \bigcup_{n=1}^N w_n(\tilde{G}),$$

y las copias que lo forman sólo coinciden en un punto, podemos suponer que se cumple

$$N(\tilde{G}, \delta) \approx \sum_{n=1}^N N(w_n(\tilde{G}), \delta).$$

Si recubrimos el grafo por una  $\delta$ -malla y calculamos la imagen de la parte de la  $\delta$ -malla que recubre al grafo completo por la transformación  $w_n$ , obtenemos un recubrimiento de la copia  $w_n(\tilde{G})$ .

Como esta transformación reduce la escala horizontal en un factor  $a_n$  y la escala vertical en un factor  $|d_n|$ , si este recubrimiento se divide en cajas de tamaño  $\frac{\delta}{a_n}$ , obtenemos un recubrimiento formado por  $\frac{|d_n|}{a_n}$  cajas

$$N(w_n(\tilde{G}), \delta) \approx \frac{|d_n|}{a_n} N(\tilde{G}, \frac{\delta}{a_n}),$$

por lo que

$$N(\tilde{G}, \delta) \approx \sum_{n=1}^N N(w_n(\tilde{G}), \delta) \approx \sum_{n=1}^N \frac{|d_n|}{a_n} N(\tilde{G}, \frac{\delta}{a_n}).$$

Si suponemos que el grafo tiene dimensión  $D$  entonces

$$\frac{|d_n|}{a_n} N(\tilde{G}, \frac{\delta}{a_n}) \approx N(w_n(\tilde{G}), \delta)$$

y obtenemos la ecuación buscada al sustituir. ♣

---

<sup>2</sup>La demostración formal se puede ver en Barnsley, Elton, Hardin y Massopust [5] o, para los puntos igualmente distribuidos sobre el eje temporal, en Falconer [29] pp 153-154.

En el caso particular de puntos no alineados e igualmente distribuidos sobre el eje temporal, el factor de escala horizontal es igual en todas las transformaciones

$$a_n = \frac{1}{N}, \quad \forall n = 1, \dots, N,$$

y la dimensión de recuento por cajas del grafo de la función de interpolación fractal que pasa por los puntos de interpolación, sólo depende de los factores de escala verticales.

De esta forma, cuando los factores de escala vertical verifican

- $|d_n| < 1 \quad \forall n = 1, \dots, N$
- $\sum_{n=1}^N |d_n| > 1$

la dimensión de recuento por cajas del grafo de la función de interpolación fractal que pasa por los puntos de interpolación es

$$D = 1 + \frac{\log\left(\sum_{n=1}^N |d_n|\right)}{\log(N)}.$$

Esta dimensión es siempre menor que dos, ya que, al ser el valor absoluto de los factores de escala verticales menor que uno, su suma es menor que  $N$ . Por otra parte, como esta suma es mayor que uno, la dimensión es siempre mayor que uno, con lo que bajo estas hipótesis

$$1 < D < 2.$$

Sin embargo, eligiendo adecuadamente los factores de escala vertical, la dimensión puede ser tan próxima como se quiera a cualquiera de los dos valores y podemos estudiar familias de funciones de interpolación con la misma dimensión, sin más que mantener sobre ellos la restricción

$$\sum_{n=1}^N |d_n| = N^{D-1}.$$

En particular, si tomamos todos los factores de escala verticales iguales,  $d_n = d \quad \forall n$ , las hipótesis del teorema se verifican si y sólo si

$$\frac{1}{N} < |d| < 1$$

y nos encontramos con distintas posibilidades:

- para  $d = 0$  se obtiene la función de interpolación lineal,
- para  $d : 0 < |d| < \frac{1}{N}$  se obtienen funciones con dimensión  $D = 1$  y
- para  $d : \frac{1}{N} < |d| < 1$  se obtienen funciones con dimensión no entera.

Por ejemplo, si para el conjunto de puntos  $\{(0, 0), (1, 2), (2, 6)\}$  tomamos todos los factores de escala verticales iguales, para  $d = 0$  se obtiene la función de interpolación lineal, para  $d = \frac{1}{4}$  la parábola  $f(x) = x + x^2$  con  $x : 0 \leq x \leq 2$  y para  $d = \frac{1}{2}$  se obtiene una función con dimensión  $D = 1.3691$  (figura 3.3).

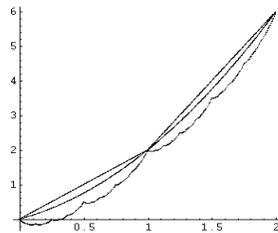


Figura 3.3: Funciones de interpolación lineal con  $d = 0$ ,  $d = \frac{1}{4}$  y  $d_n = \frac{1}{2}$

De esta forma, si queremos obtener una función de interpolación fractal cuyo grafo tenga como dimensión de recuento por cajas un valor  $D$  comprendido entre uno y dos, podemos tomar todos los factores de escala verticales iguales,

$$d_n = d = N^{D-2} \quad \forall n = 1, \dots, N,$$

ya que en este caso, se verifica  $\frac{1}{N} < |d| < 1$  y la dimensión es

$$D = 2 + \frac{\lg d}{\lg N} = 2 + \frac{\lg N^{D-2}}{\lg N} = D.$$

### 3.2 Autoafinidad local: La función de Weierstrass

En esta sección vamos a ver la forma de autoafinidad que aparece en el grafo de una función cuando la representamos en intervalos cada vez menores y obtenemos una representación que, salvo por escala, es igual a la representación del grafo de la función en su intervalo de definición.

Este tipo de autoafinidad, autoafinidad local, es distinto al que presentan las funciones de interpolación fractal y lo vamos a ver en la función de Weierstrass, que al igual que estas, permite obtener distintos grafos con dimensión de recuento por cajas comprendida entre uno y dos.

### 3.2.1 Proceso de construcción y dimensión

La función de Weierstrass es en realidad una familia de funciones que surge de una función utilizada por el matemático alemán Karl Weierstrass como ejemplo de función que es continua en todos sus puntos pero que no es diferenciable en ninguno de ellos, y es producto de sucesivas generalizaciones realizadas por Mandelbrot para obtener modelos con características comunes a otros conjuntos fractales; de aquí que a cualquier función de esta familia se la conozca como función de Weierstrass, en honor del primero, o, reconociendo el papel del segundo, como función de Weierstrass-Mandelbrot.

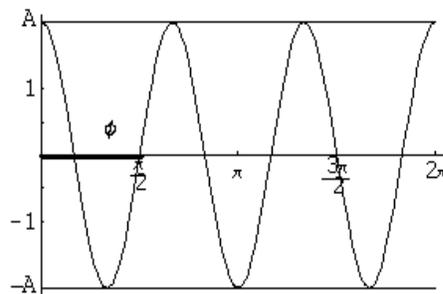


Figura 3.4:  $f(t) = A \text{sen}(\omega t + \phi)$  con  $A = 2$ ,  $\omega = 3$  y  $\phi = \frac{\pi}{2}$ .

En general, la función de Weierstrass se construye como una suma infinita de ondas sinusoidales

$$f(t) = A \text{sen}(\omega t + \phi)$$

con frecuencias (angulares) crecientes y amplitudes decrecientes <sup>3</sup>(figura 3.4).

---

<sup>3</sup>Una interpretación de estos términos, podemos verla en el movimiento de una partícula que vibra respecto a su posición de equilibrio (movimiento armónico simple). Este movimiento es periódico, donde el periodo es el tiempo que tarda la partícula en completar una vibración, y en

Comenzaremos viendo una primera versión de la función de Weierstrass que tiene todas las características dimensionales de las diferentes versiones que de ella vamos a estudiar. Esta función depende de dos parámetros,  $\lambda$  con  $\lambda > 1$  y  $s$  con  $1 < s < 2$ , y su construcción comienza tomando como base la función seno

$$f_0(t) = \text{sen}(t)$$

de frecuencia  $\omega_0 = 1$  y amplitud  $A_0 = 1$ , a la que añadimos una función de frecuencia  $\omega_1 = \lambda > 1$ , y amplitud  $A_1 = \lambda^{s-2} < 1$

$$f_1(t) = \lambda^{s-2} \text{sen}(\lambda t).$$

En cada paso añadimos una función cuya frecuencia es una potencia de  $\lambda$ , y cuya amplitud es la misma potencia de  $\lambda^{s-2}$ , por tanto, la frecuencia es mayor que la frecuencia anterior y la amplitud es menor que la amplitud anterior (figura 3.5):

$$f_n(t) = \lambda^{(s-2)n} \text{sen}(\lambda^n t)$$

La suma de todas estas funciones periódicas da como resultado **la función de Weierstrass**

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \text{sen}(\lambda^n 2\pi t),$$

que es una función continua, ya que las sumas trigonométricas

$$h_k(t) = \sum_{n=0}^k \lambda^{(s-2)n} \text{sen}(\lambda^n 2\pi t)$$

---

él, la posición de la partícula con respecto al tiempo viene descrita por la ecuación

$$y(t) = A \text{sen}(\omega t + \phi),$$

que depende de tres parámetros:

- La fase inicial o fase,  $\phi$ , que marca las condiciones iniciales (realmente la fase es  $\omega t + \phi$ ).
- La frecuencia angular,  $\omega$ , que es  $2\pi$  veces la frecuencia,  $f$ , o número de vibraciones por unidad de tiempo,  $w = 2\pi f$  (a su vez, la frecuencia es el inverso del periodo,  $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ ).
- La amplitud,  $A$ , que es la máxima distancia de la partícula a su posición de equilibrio.

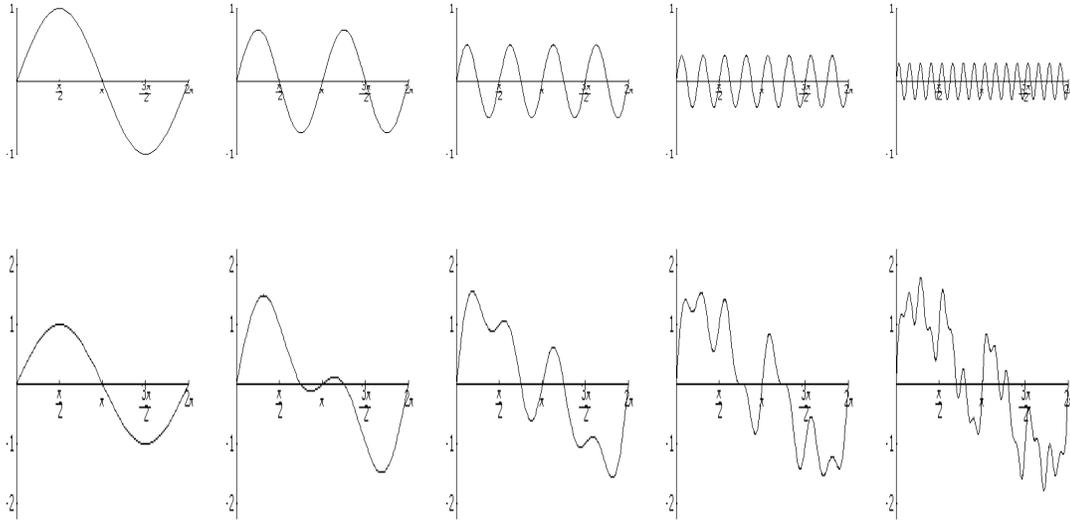


Figura 3.5:  $f_k(t)$  en  $[0, 2\pi]$  y  $h_k(t)$  en  $[0, 2\pi]$   $k = 0, \dots, 4$  ( $s = 1.5$   $\lambda = 2$ ).

convergen uniformemente, pues  $\lambda^{(s-2)} < 1$  ( $\lambda > 1$ ,  $1 < s < 2$ ) y se verifica

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(t)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^{(s-2)n} \text{sen}(\lambda^n 2\pi t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(s-2)n}.$$

Una de las características de este grafo, que también aparece en la mayoría de los conjuntos fractales, es que sólo puede ser representado con una cierta aproximación, ya que la función está definida mediante una suma infinita y el grafo que obtengamos dependerá del número de iteraciones, siempre finito, que realicemos en el proceso de su construcción, proceso que puede interpretarse como el límite de sucesivas aproximaciones prefractales, formadas por los grafos de las sumas  $h_k(t)$ , y donde el paso de un prefractal a otro es producto de la perturbación aditiva  $f_k(t)$  (figura 3.5).

Como podemos ver en su definición, la función de Weierstrass depende de dos parámetros,  $\lambda$  y  $s$ , y es el segundo el parámetro que determina la dimensión del grafo de la función, ya que, si  $\lambda$  es lo suficientemente grande, este parámetro,  $s$ , coincide con la dimensión de recuento por cajas de su grafo.

Aunque sólo vamos a considerar la dimensión de recuento por cajas, queremos comentar que la dimensión de Hausdorff del grafo de la función de Weierstrass no se ha obtenido todavía a pesar de que se cree que para la mayor parte de los valores

de  $\lambda$  coincide con la dimensión de recuento por cajas <sup>4</sup>.

**Teorema 3.3** *Dada la función de Weierstrass*

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \operatorname{sen}(\lambda^n t) \in \mathbb{R},$$

con  $\lambda > 1$  y  $1 < s < 2$ .

*Si  $\lambda$  es lo suficientemente grande, el grafo de  $f$  (en un intervalo finito cualquiera) verifica:*

$$\dim_{\mathbb{B}} \operatorname{grafo}(f) = s.$$

### Demostración

• Veamos que  $\dim_{\mathbb{B}}(F) \leq s$ :

Dado  $h : 0 < h < 1$ , sea  $N$  el entero tal que  $\lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^{-N}$ :

$$|f(t+h) - f(t)| \leq$$

$$\sum_{n=1}^N \lambda^{(s-2)n} |\operatorname{sen}(\lambda^n(t+h)) - \operatorname{sen}(\lambda^n t)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} |\operatorname{sen}(\lambda^n(t+h)) - \operatorname{sen}(\lambda^n t)|$$

aplicando el teorema del valor medio a la función seno en los primeros  $N$  términos y tomando uno como cota para el seno en los restantes

$$|f(t+h) - f(t)| \leq \sum_{n=1}^N \lambda^{(s-2)n} \lambda^n h + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2\lambda^{(s-2)n}$$

Sumando estas series se tiene

$$|f(t+h) - f(t)| \leq \frac{h\lambda^{(s-1)N}}{1 - \lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1 - \lambda^{s-2}}$$

al ser  $\lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^{-N}$  se tiene

$$|f(t+h) - f(t)| \leq ch^{2-s}$$

---

<sup>4</sup>De todas formas si se ha probado que existe una constante  $C$  de tal forma que

$$s - \frac{C}{\lambda} \leq \dim_{\mathbb{H}} \operatorname{graf}(f) \leq s$$

con lo que para valores grandes de  $\lambda$  la dimensión no puede ser mucho menor que el valor conjeturado (Mauldin y Williams [56]).

donde  $c$  no depende de  $h$ .

Por el corolario 2.19 apartado 1 se tiene que  $\dim_{\mathbb{B}} F \leq s$ .

• Por último, veamos que  $\dim_{\mathbb{B}}(F) \geq s$ :

Suponiendo que  $\lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^{-N}$ , análogamente al punto anterior pero separando el  $N$ -ésimo término, se tiene:

$$\begin{aligned} & |f(t+h) - f(t) - \lambda^{(s-2)N}(\operatorname{sen}(\lambda^N(t+h)) - \operatorname{sen}(\lambda^N t))| \leq \\ & \sum_{n=1}^{N-1} \lambda^{(s-2)n} |\operatorname{sen}(\lambda^n(t+h)) - \operatorname{sen}(\lambda^n t)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} |\operatorname{sen}(\lambda^n(t+h)) - \operatorname{sen}(\lambda^n t)| \leq \\ & \frac{\lambda^{(s-2)N-s+1}}{1 - \lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1 - \lambda^{s-2}} \end{aligned}$$

Suponiendo que  $\lambda$  es mayor que 2 y lo suficientemente grande para que esta última expresión sea menor que  $\frac{1}{20}\lambda^{(s-2)N}$  tenemos

$$|f(t+h) - f(t) - \lambda^{(s-2)N}(\operatorname{sen}(\lambda^N(t+h)) - \operatorname{sen}(\lambda^N t))| \leq \frac{1}{20}\lambda^{(s-2)N}.$$

Si para  $\delta < \lambda^{-1}$  tomamos  $N$  tal que  $\lambda^{-N} \leq \delta < \lambda^{-(N-1)}$ , como para cada  $t$  podemos tomar  $h$  de forma que  $|\operatorname{sen}(\lambda^N(t+h)) - \operatorname{sen}(\lambda^N t)| > \frac{1}{10}$  y se cumpla además que  $\lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^{-N}$ , se debe de verificar que

$$|f(t+h) - f(t)| \geq \frac{1}{20}\lambda^{(s-2)N}$$

y por tanto

$$|f(t+h) - f(t)| \geq \frac{1}{20}\lambda^{s-2}\delta^{2-s}.$$

Por el apartado 2 del corolario 2.19 se tiene que  $\dim_{\mathbb{B}} F \geq s$ . ♣

Como consecuencia del corolario 2.19, la función de Weierstrass es continua en todos los puntos y no es diferenciable en ninguno de ellos.

La no diferenciableidad de esta función, y de cualquier función con dimensión mayor que uno, se debe a que hay puntos muy próximos donde la función toma valores muy distintos.

Además, como las variaciones que experimentan los valores de una función entre puntos próximos están relacionadas con el valor de su dimensión, cuanto mayor es este valor, más errático es el comportamiento de la función (figura 3.6).

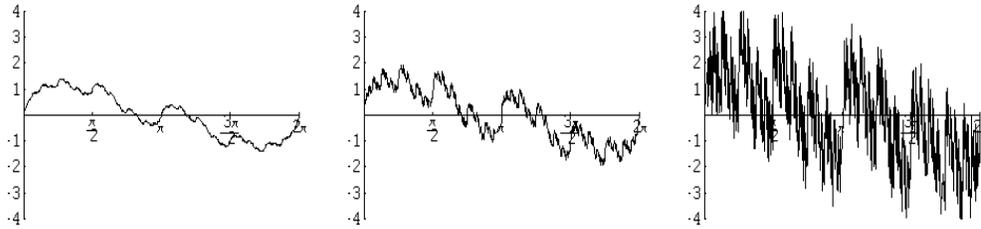


Figura 3.6:  $f$  para  $s = 1.1$ ,  $s = 1.5$  y  $s = 1.9$  ( $\lambda = 2$ )

Si repetimos todo lo visto sustituyendo la función seno por la función coseno, obtenemos una nueva función de Weierstrass

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \cos(\lambda^n t)$$

con las mismas características (Figura 3.7).

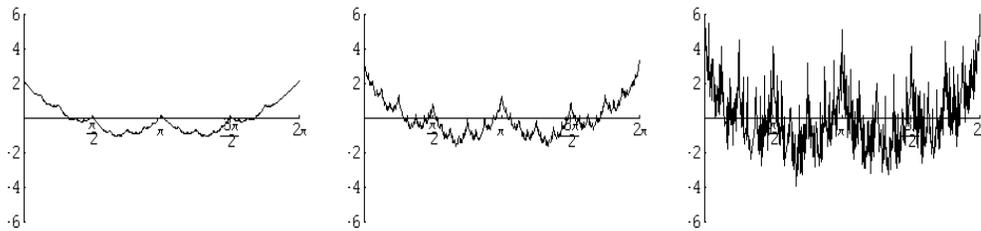


Figura 3.7:  $g$  para  $s = 1.1$ ,  $s = 1.5$  y  $s = 1.9$  ( $\lambda = 2$ )

### 3.2.2 Autoafinidad en la función de Weierstrass

Si extendemos la suma para los valores negativos de  $n$ , obtenemos una nueva función de Weierstrass

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \text{sen}(\lambda^n 2\pi t),$$

donde los términos añadidos dan lugar a una función diferenciable,

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \lambda^{(s-2)n} \text{sen}(\lambda^n 2\pi t).$$

Al ser diferenciable esta última función su grafo tiene dimensión de recuento por cajas uno, como esta dimensión es menor que la dimensión de recuento por cajas

del grafo de la función original, la nueva función de Weierstrass mantiene la misma dimensión <sup>5</sup> y lo que hacemos es reproducir el comportamiento dimensional de la función de Weierstrass sobre el eje de tiempos, a lo largo de la función  $r(t)$  (figura 3.8).

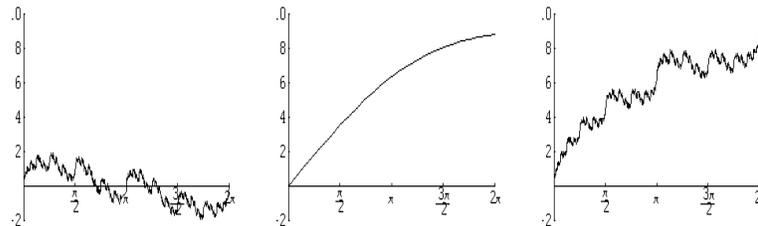


Figura 3.8:  $f(t)$ ,  $r(t)$  y  $\widehat{f}(t)$  ( $s = 1.5$  y  $\lambda = 2$ )

Se puede comprobar, sin más que sustituir en la expresión de la función  $t$  por  $\lambda t$  y multiplicar el resultado por  $\lambda^{s-2}$ , que esta nueva función de Weierstrass verifica

$$\widehat{f}(t) = \lambda^{s-2} \widehat{f}(\lambda t).$$

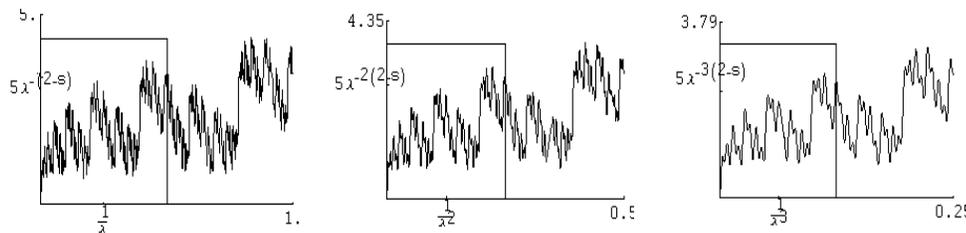


Figura 3.9:  $(t, \widehat{f}(t))$   $t \in [0, \lambda^{-n}]$   $n = 0, 1, 2$  ( $s = 1.8$ ,  $\lambda = 2$ )

Esta propiedad es la que refleja las características de escala del grafo de esta función en torno al origen, ya que si disminuimos la escala en la que representamos la función  $\widehat{f}(t)$  y la representamos en los intervalos  $[0, 1]$ ,  $[0, \lambda^{-1}]$  y  $[0, \lambda^{-2}]$  (figuras 3.9), obtenemos la misma gráfica, sólo que a distinta escala.

Aunque esto parece una muestra de autosemejanza tenemos que hablar de autoafinidad pues el factor en el que disminuye la escala es distinto en cada uno de los

---

<sup>5</sup>Dadas  $f, g : t \in [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$  continuas tales que  $\dim_{\mathbb{B}}(\text{grafo}(f)) \neq \dim_{\mathbb{B}}(\text{grafo}(g))$ , se tiene que  $\dim_{\mathbb{B}}(\text{grafo}(f + g)) = \max\{\dim_{\mathbb{B}}(\text{grafo}(f)), \dim_{\mathbb{B}}(\text{grafo}(g))\}$  Falconer [29] pg. 159.

ejes: el factor de reducción horizontal es  $\frac{1}{\lambda}$  y el factor de reducción vertical es  $\lambda^{s-2}$ .

Por otra parte, el grafo de la primera función de Weierstrass presenta una propiedad de escala parecida, ya que de forma análoga se tiene:

$$\lambda^{s-2} f(\lambda t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(s-2)(n+1)} \operatorname{sen}(\lambda^{n+1} t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \operatorname{sen}(\lambda^n t)$$

con lo que  $f(t)$  y  $\lambda^{s-2} f(\lambda t)$  sólo se diferencian en la función diferenciable  $\operatorname{sen}(t)$ .

Aunque la primera versión de la función no sea autoafín, esta propiedad hace que para el estudio de propiedades relacionadas con la dimensión sea esta versión la que se utiliza.

En el caso de la función coseno, para obtener la versión autoafín de la función de Weierstrass la idea es la misma: extender la suma a los valores negativos de  $n$ ,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \cos(\lambda^n t).$$

Sin embargo, aunque formalmente la función es autoafín, lo que se puede comprobar análogamente al caso anterior, los términos añadidos son divergentes y para obtener una serie convergente consideramos la expresión

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} (1 - \cos(\lambda^n t)),$$

que tiene el mismo comportamiento dimensional que la función  $g(t)$ , ya que sólo se diferencia de ella en la constante  $c = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(s-2)n}$ .

Utilizando esta expresión, extendemos la suma para los valores negativos de  $n$  y obtenemos una nueva función de Weierstrass

$$\widehat{g}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} (1 - \cos(\lambda^n t)),$$

donde los términos añadidos no sólo convergen, sino que dan lugar a una función diferenciable  $r(t)$ , por lo que en este caso también reproducimos a lo largo de una función diferenciable el comportamiento de la anterior función de Weierstrass, ya que ambas versiones verifican la relación

$$\widehat{g}(t) = c - g(t) + r(t),$$

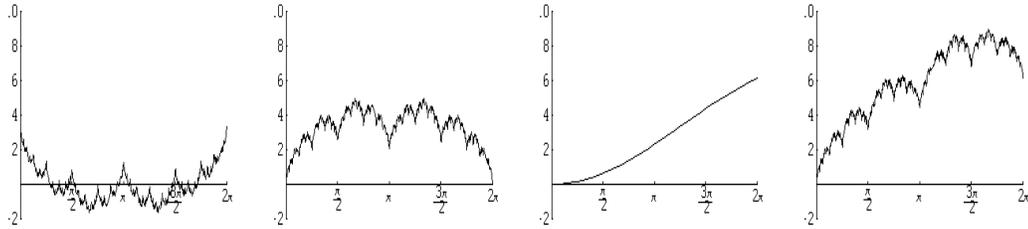


Figura 3.10:  $g(t)$ ,  $c - g(t)$ ,  $r(t)$  y  $\widehat{g}(t)$  ( $s = 1.5$  y  $\lambda = 2$ )

donde  $c$  es una constante y  $r(t)$  es una función diferenciable (figura 3.10).

Así, al ser diferenciable esta última función, la dimensión de recuento por cajas del grafo de la función de Weierstrass  $\widehat{g}(t)$  sigue siendo  $s$  y, como era nuestro objetivo al modificar la función  $g(t)$ , el grafo de la función es autoafín

$$\widehat{g}(t) = \lambda^{s-2}\widehat{g}(\lambda t),$$

lo que se puede comprobar análogamente a los casos anteriores (figura 3.11).

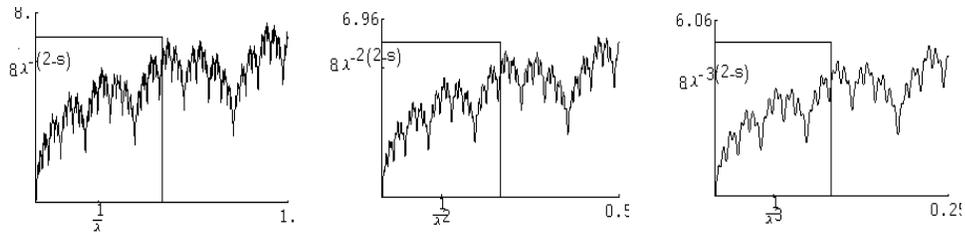


Figura 3.11:  $(t, \widehat{g}(t))$   $t \in [0, \lambda^{-n}]$   $n = 0, 1, 2$  ( $s = 1.8$ ,  $\lambda = 2$ )

Las funciones  $\widehat{f}$  y  $\widehat{g}$  reciben los nombres respectivos de **funciones seno y coseno de Weierstrass-Mandelbrot**, pues son respectivamente las partes imaginaria y real de la función:

$$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - e^{i\lambda^n t})\lambda^{(s-2)n}, \quad \lambda > 1 \text{ y } 1 < s < 2,$$

que es la función que realmente se conoce con el nombre de **función de Weierstrass-Mandelbrot** <sup>6</sup>:

<sup>6</sup>Un estudio de esta función se puede ver en Berry y Lewis [8].

$$C_1(t) = \operatorname{Re}[W(t)] = \widehat{g}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} (1 - \cos(\lambda^n t)),$$

$$C_2(t) = \operatorname{Im}[W(t)] = \widehat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \operatorname{sen}(\lambda^n t).$$

El siguiente teorema resume las propiedades de estas funciones que acabamos de ver:

### Teorema 3.4

Las funciones de Weierstrass-Mandelbrot coseno y seno,  $C_1(t)$  y  $C_2(t)$ , verifican:

1.  $C_i(t) = \lambda^{-(2-s)} C_i(\lambda t)$

2.  $\dim_{\text{B}} \operatorname{grafo}(C_i) = s$ , si  $\lambda$  es lo suficientemente grande. ♣

En realidad no podemos hablar de la autoafinidad de esta función en un sentido estricto, ya que la igualdad a distintas escalas sólo aparece cuando el factor de reducción vertical es una potencia de  $\lambda$ . Sin embargo, la primera propiedad nos va a permitir extender el concepto de autoafinidad a un proceso estocástico y hablar de autoafinidad estadística en la siguiente sección.

## 3.3 Autoafinidad estadística

En esta sección vamos a extender el concepto de autoafinidad a un proceso estocástico, autoafinidad estadística, para lo que definiremos un proceso estocástico autoafín, como un proceso donde al cambiar la escala temporal se obtiene un proceso que sólo difiere del original en la escala espacial.

---

Por otra parte, al multiplicar esta función por el factor  $e^{i\phi_n}$ , con  $\phi_n$  una fase arbitraria, se obtiene una nueva versión

$$\widetilde{W}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - e^{i\lambda^n t}) e^{i\phi_n} \lambda^{(s-2)n} \quad (\lambda > 1 \text{ y } 1 < s < 2),$$

que se puede aleatorizar al elegir la fase inicial siguiendo la misma distribución, normalmente la distribución uniforme en  $[0, 2\pi]$ ; lo que se puede ver en Mandelbrot [51] pp. 542-543 o en Mandelbrot [53] pp. 142-154.

Veremos además que en este caso, el cambio de escala espacial y el cambio de escala temporal verifican una relación de tipo exponencial, cuyo exponente recibe el nombre de exponente de autoafinidad del proceso.

Para terminar la sección analizaremos las características fractales del movimiento browniano y, en particular, veremos que es un proceso autoafín donde la dimensión de su grafo no es entera.

Esta dimensión está relacionada con el exponente de autoafinidad del proceso y esta característica se va a mantener en las generalizaciones del movimiento browniano que vamos a considerar para modelizar la serie de cierres diarios del índice Ibex35 (capítulo 5); generalizaciones que surgen al modificar las propiedades de sus incrementos que lo definen: la independencia y la normalidad de la distribución.

## Preliminares

Antes de definir un proceso autoafín, vamos a ver una serie de conceptos relativos a los procesos estocásticos que posteriormente vamos a necesitar.

### Definición de proceso estocástico

#### Definición 3.1

Un **proceso estocástico** es una colección de variables aleatorias,  $\{X_t, t \in T\}$ , parametrizadas por un conjunto de índices,  $T$ , definidas sobre un mismo espacio de probabilidad,  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , y con el mismo espacio final <sup>7</sup>. ♣

El espacio final de las variables aleatorias recibe el nombre de **espacio de estados** del proceso, nombre que se debe a la interpretación de un proceso estocástico como un proceso donde se pasa de un estado a otro a lo largo del tiempo, y en nuestro caso va a ser siempre  $\mathbb{R}$  (**proceso estocástico real**).

---

<sup>7</sup>Para garantizar la medibilidad de algunos conjuntos vamos a suponer que el espacio donde están definidas las variables aleatorias es completo, donde un **espacio de probabilidad completo** es un espacio de probabilidad en el que todo subconjunto de un conjunto de medida nula es medible,

$$\forall A \in \mathcal{F}/P(A) = 0 \quad B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{F} \quad (P(B) = 0).$$

El conjunto de parámetros o índices, que se utiliza para representar el tiempo, en nuestro caso va a ser  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$  y el proceso toma valores en cualquier instante de tiempo posterior al origen (**procesos estocásticos en tiempo continuo**)<sup>8</sup>.

Para cada  $t$  perteneciente al conjunto de índices tenemos una variable aleatoria

$$X_t = X(t) = X(t, \cdot) : \omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R},$$

con lo que nos encontramos con una función de dos variables

$$X = X(\cdot, \cdot) : (t, \omega) \in T \times \Omega \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R}$$

y podemos interpretar el proceso como una variable aleatoria,  $X$ , que a cada  $\omega$  del espacio muestral le hace corresponder una función muestral,

$$X(\omega) = X(\cdot, \omega) : t \in T \mapsto X_t(\omega).$$

Esta función recibe el nombre de **camino muestral** o **trayectoria** del proceso y su grafo,

$$\{(t, X_t(\omega)) / t \in T\},$$

el nombre de **registro temporal** del proceso.

### Descripción de un proceso estocástico

A la hora de describir un proceso estocástico, en primer lugar nos fijamos en la distribución de probabilidad de la variable aleatoria  $X_t$  para cada  $t$ , a continuación nos interesamos por las relaciones que existen entre los valores del proceso en dos instantes distintos y consideramos las distribuciones conjuntas de cada dos variables aleatorias  $X_{t_1}, X_{t_2}$ .

En general, nos interesan las distribuciones conjuntas de las variables aleatorias  $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$  para cualquier conjunto finito de índices,  $t_1, \dots, t_n$ , que reciben el nombre

---

<sup>8</sup>En los **procesos estocásticos en tiempo discreto** el conjunto de índices es  $\mathbb{Z}^+ = 0, 1, \dots$  y el proceso no es más que una sucesión de variables aleatorias  $\{X_n\}_{n \geq 0}$ .

de **distribuciones finito dimensionales** <sup>9</sup>.

Las distribuciones finito dimensionales del proceso están plenamente determinadas por las funciones de distribución conjuntas,

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P[\{\omega \in \Omega / X_{t_1}(\omega) \leq x_1, \dots, X_{t_n}(\omega) \leq x_n\}],$$

y determinan sus propiedades fundamentales, lo que nos lleva a definir:

**Definición 3.2** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  un espacio de probabilidad completo.

Dos proceso estocásticos  $\{X_t, t \in T\}$  y  $\{Y_t, t \in T\}$  definidos sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  son **iguales en distribución**,

$$\{X_t\} \stackrel{d}{=} \{Y_t\},$$

si todas sus distribuciones finito dimensionales son iguales. ♣

Sin embargo, dos procesos con las mismas distribuciones finito dimensionales no tienen por que tener caminos muestrales con las mismas propiedades y necesitamos un concepto más fuerte de igualdad:

**Definición 3.3** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  un espacio de probabilidad completo.

Dos proceso estocásticos  $\{X_t, t \in T\}$  y  $\{Y_t, t \in T\}$  definidos sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  son **estocásticamente equivalentes**,

$$\{X_t\} \sim \{Y_t\},$$

si en cada instante son iguales con probabilidad uno

$$P[X_t = Y_t] = P[\{\omega \in \Omega / X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}] = 1 \quad \forall t \in T.$$

En este caso, diremos que  $\{Y_t, t \in T\}$  es una versión de  $\{X_t, t \in T\}$ . ♣

<sup>9</sup>Cuando la media y la varianza del proceso son finitas, muchas de las propiedades que interesan del proceso se pueden describir mediante sus distribuciones bivariantes, por lo que para caracterizarlos sólo se consideran éstas, y se estudian a través de las medias, varianzas (de cada variable) y covarianzas (de cada par de variables).

Estos procesos reciben el nombre de **procesos estocásticos de segundo orden** y para su definición formal se impone que

$$\mathbf{E}[X_t^2] < +\infty \quad \forall t \in T.$$

De esta forma, aunque las distribuciones finito dimensionales no garantizan que los caminos muestrales tengan una propiedad determinada, podemos centrarnos en el estudio de las distribuciones finito dimensionales del proceso y plantearnos en su momento si existe una versión que cumpla la propiedad deseada <sup>10</sup>.

En particular para ver que existe una versión del proceso cuyos caminos muestrales son continuos utilizaremos el test de continuidad de Kolmogorov:

**Teorema 3.5** (*Test de continuidad de Kolmogorov*) <sup>11</sup>

Sean  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  un espacio de probabilidad completo,  $\{X_t, t \in T\}$  un proceso estocástico real, definido sobre él, y  $T$  un intervalo compacto.

Si existen constantes  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y  $C > 0$  tales que

$$E [|X_{t+h} - X_t|^\alpha] \leq Ch^{1+\beta},$$

el proceso tiene una versión cuyos caminos muestrales son continuos en  $T$  (con probabilidad uno). ♣

### Algunas hipótesis sobre un proceso estocástico

En general no es posible conseguir caminos muestrales continuos, pero si los caminos muestrales no tienen discontinuidades esenciales y suponemos que el proceso es estocásticamente continuo, podemos garantizar la existencia de una versión del proceso cuyos caminos muestrales son continuos a la derecha y tienen límites a la izquierda (este tipo de funciones reciben el nombre de **funciones cadlag** del francés

<sup>10</sup>El problema de si existe un proceso estocástico con una colección de funciones de distribución conjuntas dadas,  $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$  (con variables reales,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  y definidas para cada subconjunto finito de índices  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T$ ), lo resuelve afirmativamente la construcción de Kolmogorov (Todorovic [70] pp. 7-8), siempre y cuando la colección de funciones de distribución conjuntas verifique las siguientes condiciones de consistencia

- $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_{k_1}, \dots, t_{k_n}}(x_1, \dots, x_n)$  para toda permutación  $\{t_{k_1}, \dots, t_{k_n}\}$  de  $\{t_1, \dots, t_n\}$
- $F_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k) = \lim_{x_{k+1}, \dots, x_n \rightarrow \infty} F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \forall k : 1 \leq k < n$  y  $\forall x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ .

<sup>11</sup>Se puede ver, por ejemplo, en Todorovic [70] pg. 25

“Continue à Droite, Limits à Gauche”) <sup>12</sup>.

**Definición 3.4** Sea  $\{X_t, t \in T\}$  un proceso estocástico real.

El proceso es **estocásticamente continuo**, continuo en probabilidad, en  $t \in T$ , si cuando  $h$  tiende a 0,  $X_{t+h}$  converge en probabilidad a  $X_t$ , es decir,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0} P[|X_{t+h} - X_t| > \epsilon] = 0. \quad \clubsuit$$

En toda esta sección vamos a imponer que en el punto de partida del proceso, instante  $t_0 = 0$ , el proceso tenga el valor cero, con probabilidad uno,

$$P[X_0 = 0] = P[\{\omega \in \Omega : X_0(\omega) = 0\}] = 1,$$

y diremos que **el proceso comienza en el origen** (casi seguro); en este caso el proceso coincide con el incremento respecto al origen, lo que nos va a permitir analizar el proceso estudiando sus incrementos.

Para eliminar los procesos que no son más que una tendencia también vamos a suponer que el proceso no es trivial.

**Definición 3.5** Sea  $\{X_t, t \in T\}$  un proceso estocástico real.

Diremos que el proceso es un **proceso trivial** (degenerado) si existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tal que, con probabilidad uno

$$X_t = \gamma t \quad \forall t \in T. \quad \clubsuit$$

Otra de las hipótesis que vamos a hacer es que la distribución de cada incremento sólo depende de la longitud del intervalo de tiempo y no de su posición.

**Definición 3.6** Sea  $\{X_t, t \in T\}$  un proceso estocástico real.

Diremos que el proceso es un **proceso con incrementos estacionarios** si para cada conjunto finito y ordenado de índices  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T$ , con  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , la distribución conjunta de

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

---

<sup>12</sup>En un espacio de probabilidad completo, cuando los caminos muestrales no tienen discontinuidades esenciales y el proceso es estocásticamente continuo para cada  $t \in T$ , existe una versión del proceso donde los caminos muestrales son continuos a la derecha y tienen límites a la izquierda (Todorovic [70] pp. 25-27.)

no cambia al sustituir cada  $t_i$  por  $t_i + h$ , con  $h > 0 : t_i + h \in T$ .

O equivalentemente, cuando el proceso comienza en el origen casi seguro, si

$$X_{s+t} - X_s \stackrel{d}{=} X_t \quad \forall s \in T. \quad \clubsuit$$

Junto al tipo de distribución de los incrementos, la hipótesis fundamental en la descripción del proceso es la independencia o dependencia de dichos incrementos, ya que, al contrario que cuando son independientes, cuando el proceso tiene incrementos dependientes el pasado del proceso influye en su comportamiento futuro y los valores del proceso en distintos instantes de tiempo están relacionados.

En la definición general de un proceso con incrementos independientes se impone que los incrementos del proceso sean independientes del proceso, sin embargo, como estamos considerando procesos que comienzan en el origen casi seguro, donde el proceso es el incremento con respecto al origen, no es necesario incluirlo.

**Definición 3.7** Sea  $\{X_t, t \in T\}$  un proceso estocástico real.

Diremos que el proceso es un **proceso con incrementos independientes** si para cada conjunto finito y ordenado de índices  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T$ ,  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , son independientes las variables aleatorias

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}. \quad \clubsuit$$

En un proceso con incrementos independientes, para determinar sus distribuciones finito dimensionales son necesarias las distribuciones unidimensionales tanto de  $X_t$ , para cada  $t \in T$ , como de  $X_{t_2} - X_{t_1}$ , para cada  $t_1, t_2 \in T$  con  $t_1 < t_2$ , sin embargo, como estamos suponiendo que el proceso comienza en el origen y que los incrementos son estacionarios, las distribuciones finito dimensionales quedan totalmente determinadas por la distribución unidimensional de  $X_t$ , para cada  $t \in T$ .

### 3.3.1 Procesos autoafines y exponente de autoafinidad

Las funciones de Weierstrass-Mandelbrot coseno y seno,  $C_1(t)$  y  $C_2(t)$ , eran funciones autoafines pues se verifica

$$C_i(t) = \lambda^{-(2-s)} C_i(\lambda t), \quad i = 1, 2$$

con lo que al cambiar la escala temporal en el factor  $\lambda$  y la escala espacial en un factor  $\lambda^{-(2-s)}$  la función que se obtiene es la misma, o visto de otra forma, al cambiar la escala temporal en el factor  $\lambda$  se obtiene una función que sólo difiere de la original en un factor  $\lambda^{2-s}$ ,

$$C_i(\lambda t) = \lambda^{2-s} C_i(t) \quad i = 1, 2.$$

En un proceso estocástico aparece la característica fractal de autoafinidad estadística si al cambiar la escala temporal en cualquier factor  $a > 0$ , el proceso que se obtiene difiere del original en la escala espacial en un factor  $b > 0$  (que depende de  $a$ )<sup>13</sup>

### Definición 3.8

Un proceso estocástico  $\{X_t, t \in T\}$  es un **proceso autoafín** si

$$\forall a > 0 \quad \exists b > 0 \text{ tal que } \{X_{at}\} \stackrel{d}{=} \{bX_t\}. \quad \clubsuit$$

Si suponemos que el proceso comienza en el origen (casi seguro), que es estocásticamente continuo (en  $t$  para todo  $t \in T$ ) y que el proceso no es trivial, el cambio de escala espacial,  $a$ , y el cambio de escala temporal,  $b$ , verifican una relación de tipo exponencial,  $b = a^H$ .

**Teorema 3.6**<sup>14</sup> Sea  $\{X_t, t \in T\}$  un proceso estocástico autoafín, no trivial, estocásticamente continuo (en  $t \forall t \in T$ ) y que comienza en el origen (casi seguro).

Existe un único  $H > 0$ , que recibe el nombre de **exponente de autoafinidad** del proceso, tal que

$$\{X_{at}\} \stackrel{d}{=} \{a^H X_t\}. \quad \clubsuit$$

Si queremos explicitar el valor de  $H$  diremos que el proceso es **H-autoafín**, en este caso, damos por supuesto que es un proceso estocástico no trivial, estocásticamente continuo (en  $t \forall t \in T$ ) y que comienza en el origen (casi seguro).

---

<sup>13</sup>Como los factores pueden ser distintos hemos preferido seguir a Mandelbrot y usar el término de proceso autoafín (del inglés “self-affine process”), en vez del término proceso auto-semejante (“del inglés self-similar process”) que aparece en la literatura específica sobre el tema.

<sup>14</sup>Lamperti [42]

Cuando consideramos procesos con incrementos estacionarios, el exponente de autoafinidad del proceso permite relacionar la distribución del proceso en un instante cualquiera  $t \in T$ , con la distribución del proceso en el instante  $t = 1$ .

**Teorema 3.7** *Sea  $\{X_t, t \in T\}$  un proceso estocástico  $H$ -autoafín,  $H > 0$ , cuyos incrementos son estacionarios.*

1.  $E[X_t] = t^H E[X_1]$ .
2.  $Var[X_t] = t^{2H} Var[X_1]$  ( $D[X_t] = t^H D[X_1]$ ).
3.  $Cov[X_s, X_t] = E[X_s X_t] - (st)^H E[X_1]^2$   
 con  $E[X_s X_t] = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |s - t|^{2H})E[X_1^2]$ .

### Demostración

Sin más que sustituir  $a$  por  $t$  y  $t$  por uno en la definición de proceso autoafín

$$\{X_t\} \stackrel{d}{=} \{t^H X_1\},$$

con lo que, por las propiedades de la esperanza,

$$E[X_t] = E[t^H X_1] = t^H E[X_1].$$

Las otras dos igualdades también son consecuencia de las propiedades de la esperanza, al expresar en función de ésta las varianzas y las covarianzas, en particular, se expresa  $E[X_s X_t]$  como  $\frac{1}{2}(E[X_s^2] + E[X_t^2] - E[(X_s - X_t)^2])$  y se utiliza que, al ser los incrementos estacionarios,  $X_s - X_t \stackrel{d}{=} X_{|s-t|}$ . ♣

De esta forma, la esperanza y varianza de un proceso autoafín van a ser finitas siempre y cuando lo sean las de  $X_1$ , más aún, cuando el proceso tiene esperanza finita, el siguiente teorema garantiza que el exponente de autoafinidad del proceso es menor o igual uno.

**Teorema 3.8** <sup>15</sup> *Sea  $\{X_t, t \in T\}$  un proceso estocástico  $H$ -autoafín,  $H > 0$ , cuyos incrementos son estacionarios.*

---

<sup>15</sup>Embrechts y Maejima [27]

Si  $E[|X_1|] < +\infty$  se tiene

$$0 < H \leq 1.$$

Además,

1. si  $H = 1$  entonces el proceso es  $X_t = tX_1$  (con probabilidad uno),
2. si  $0 < H < 1$  entonces  $E[X_1] = 0$  (por tanto  $E[X_t] = 0$ ). ♣

Como vamos a suponer que el exponente de autoafinidad del proceso verifica  $0 < H < 1$ , cuando el proceso tenga esperanza finita también tendrá esperanza nula.

Además, cuando suponemos que se verifica  $0 < H < 1$  en un proceso con varianza finita, como también tiene esperanza finita, las relaciones de dependencia entre las variables del teorema 3.7 se pueden expresar:

**Corolario 3.9** Sea  $\{X_t, t \in T\}$  un proceso estocástico  $H$ -autoafín,  $0 < H < 1$ , cuyos incrementos son estacionarios.

Si el proceso tiene varianza finita,  $\sigma^2 = E[X_1^2] < +\infty$  se verifica:

1.  $E[X_t] = 0$
2.  $\text{Var}[X_t] = t^{2H} \sigma^2$ .
3.  $\text{Cov}[X_s, X_t] = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |s - t|^{2H})\sigma^2$ . ♣

De esta forma, como en el caso gaussiano las distribuciones finito dimensionales del proceso están determinadas por su media y sus covarianzas, un proceso  $H$ -autoafín gaussiano con  $H : 0 < H < 1$  está unívocamente determinado por su exponente de autoafinidad.

En la siguiente sección vamos a ver un proceso autoafín donde la dimensión del grafo de sus caminos muestrales no es entera: el movimiento browniano. Como este proceso es gaussiano con incrementos independientes, va a estar unívocamente determinado por su exponente de autoafinidad, que veremos que es  $\frac{1}{2}$ .

### 3.3.2 Movimiento browniano

El movimiento browniano se define como un proceso que comienza en el origen, cuyos incrementos son independientes y están idénticamente distribuidos según una normal con media cero y varianza proporcional al incremento temporal:

#### Definición 3.9 <sup>16</sup>

Un **movimiento browniano**, *BM* (del inglés Brownian Motion), es un proceso estocástico,  $\{B_t\}_{t \geq 0}$ , verificando:

1. El proceso comienza en el origen casi seguro.
2. El proceso tiene incrementos independientes.
3.  $\forall t \geq 0, \forall h \geq 0 \quad B_{t+h} - B_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 h)$ .

Para  $\sigma = 1$  diremos que es un movimiento browniano estándar. ♣

Estas propiedades nos van a permitir generalizar el movimiento browniano a los procesos estables, al mantener la independencia de estos incrementos y cambiar la distribución que siguen por una distribución estable (esta distribución a su vez generaliza a la normal), y a los movimientos brownianos fraccionarios, manteniendo la normalidad de la distribución y suprimiendo la independencia de los incrementos.

Como los incrementos del proceso,  $B_{t+h} - B_t$ , están idénticamente distribuidos según una normal con media cero y varianza proporcional al incremento temporal, estos incrementos no dependen de  $t$  y sólo dependen del incremento temporal  $h$ , con lo que los incrementos del proceso son estacionarios.

Al comenzar el proceso en el origen y tener los incrementos estacionarios se tiene:

$$B_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t), \quad \forall t \geq 0.$$

---

<sup>16</sup>La existencia de un proceso estocástico que verifique estas propiedades se deduce al determinar las distribuciones finito dimensionales del proceso y ver que se verifican las condiciones de consistencia de Kolmogorov, para lo que se utiliza que el proceso tiene incrementos independientes,  $B_{t+h} - B_t$ , cuya distribución viene dada por  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 h)$  (Todorovic [70] pg. 63).

En el siguiente teorema vamos a ver que los caminos muestrales de este proceso son continuos (con probabilidad uno) <sup>17</sup>.

**Proposición 3.10** *Sea  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano.*

*El proceso tiene una versión cuyos caminos muestrales son continuos (con probabilidad uno).*

### Demostración

Como  $B_{t+h} - B_t$  sigue una distribución  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 h)$  y los momentos de orden  $n$  ( $n > 1$ ) de una variable aleatoria,  $X$ , que sigue una distribución normal,  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , son

$$E[X^n] = \begin{cases} \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma^{2k} & n = 2k \\ 0 & n = 2k - 1 \end{cases}$$

se tiene que

$$E[(B_{t+h} - B_t)^4] = E[(B_{t+h} - B_t)^4] = 3\sigma^4 h^2$$

con lo que para  $\alpha = 4$  y  $\beta = 1$  se verifica el test de continuidad de Kolmogorov (Teorema 3.5) y podemos garantizar que el proceso tiene una versión cuyos caminos muestrales son continuos (con probabilidad uno). ♣

Si consideramos los incrementos correspondientes a intervalos de longitud entera,

$$\{\varepsilon_n\}_{n \geq 0} \text{ con } \varepsilon_n = B_{n+1} - B_n, \quad n \geq 0,$$

tenemos una sucesión de variables aleatorias independientes con esperanza nula. Esta tipo de sucesiones en general recibe el nombre de ruido blanco, en nuestro caso, donde la distribución es una normal, recibe el de ruido blanco gaussiano, que se califica de estándar si la varianza es unitaria.

---

<sup>17</sup>Por este motivo en la definición de movimiento browniano se suele incluir que sus caminos muestrales son continuos con probabilidad uno.

En este caso se puede suprimir la condición de independencia de los incrementos, ya que, un proceso estocástico que comience en el origen (con probabilidad uno), que tenga incrementos normalmente distribuidos, con media cero y varianza proporcional al incremento temporal, y cuyos caminos muestrales sean continuos (con probabilidad uno) tiene que tener los incrementos independientes (Falconer [29] pg. 238).

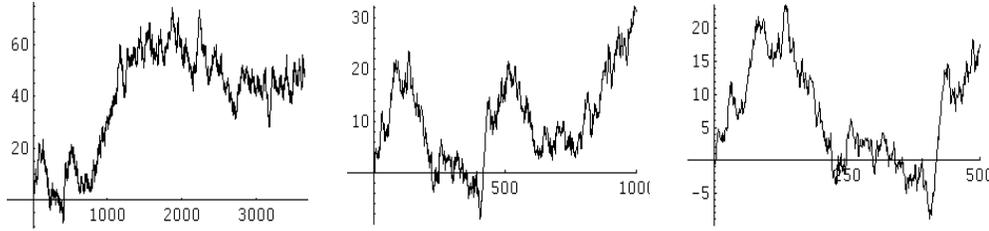


Figura 3.12: Grafos de un movimiento browniano (en distintos intervalos)

Cuando consideramos un ruido blanco gaussiano estándar, sus sumas acumuladas permiten obtener una aproximación al movimiento browniano que muestra que la autoafinidad del proceso no es determinística, ya que, cuando la representamos en intervalos donde disminuye la escala temporal, los grafos tienen el mismo aspecto pero no son exactamente iguales (figura 3.12).

La invarianza de la distribución bajo un cambio adecuado de escala en el tiempo y en el espacio, es la primera de las características fractales de este proceso que hace que lo podamos incluir dentro del marco de la Geometría Fractal.

En concreto, vamos a ver que el movimiento browniano es un proceso autoafín con exponente de autoafinidad  $\frac{1}{2}$ , de esta forma, si cambiamos la escala temporal en un factor  $a > 0$  y la escala espacial en un factor  $a^{-\frac{1}{2}}$  se obtiene un proceso indistinguible del original.

**Proposición 3.11** Sean  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano y  $a > 0$ :

$$B_{at} \stackrel{d}{=} a^{\frac{1}{2}} B_t$$

### Demostración

Para verlo sólo hay que probar que  $a^{-\frac{1}{2}} B_{at}$  verifica la última de las propiedades de la definición, ya que las dos primeras se deducen inmediatamente de las correspondientes para  $B_t$ . Además, como  $B_t$  sigue una distribución normal,  $a^{-\frac{1}{2}} B_{at}$  también sigue una distribución normal y basta ver que coinciden su media y varianza:

- $E[a^{-\frac{1}{2}} B_{at}] = a^{-\frac{1}{2}} E[B_{at}] = 0$
- $E[(a^{-\frac{1}{2}} B_{at})^2] = E[a^{-1} B_{at}^2] = a^{-1} E[B_{at}^2] = a^{-1} \sigma^2 at = \sigma^2 t$



Para ver que el exponente de autoafinidad es único, sólo faltaría ver que el proceso es estocásticamente continuo; para lo que habría que ver que cuando  $h$  tiende a cero el incremento  $B_{t+h} - B_t$  converge en probabilidad a cero; lo que se puede comprobar sin más que ver que lo hace su distribución,  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 h)$ .

Al estar incluido dentro de los procesos autoafines podemos determinar fácilmente las covarianzas entre los distintos instantes del proceso:

**Corolario 3.12** *Sea  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano*

$$\text{Cov}(B_s, B_t) = \min\{s, t\}\sigma^2.$$

### Demostración

Como  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  es autoafín con exponente de autoafinidad  $\frac{1}{2}$  y  $E[B_1^2] = \sigma^2 < +\infty$  el corolario 3.9 al teorema 3.7 nos da sus covarianzas:

$$\text{Cov}(B_s, B_t) = \frac{1}{2}(s + t - |s - t|)\sigma^2 = \min\{s, t\}\sigma^2. \quad \clubsuit$$

Como las distribuciones finito dimensionales de un proceso gaussiano están determinadas por su media y sus covarianza, estas covarianzas caracterizarán al movimiento browniano y cualquier proceso gaussiano con media cero y covarianzas como las del corolario anterior debe ser un movimiento browniano.

Junto a la autoafinidad estadística del proceso, la dimensión no entera de su grafo es la otra característica que permite incluir al movimiento browniano dentro de la categoría de los procesos fractales y que además muestra que el movimiento browniano, a pesar de que ser continuo, no es lo suficientemente regular como para ser diferenciable.

**Proposición 3.13** <sup>18</sup> *Sea  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano.*

*Con probabilidad uno el grafo  $\{(t, B_t)/t \in [0, 1]\}$ , que recibe el nombre de registro temporal del proceso, tiene dimensión de recuento por cajas*

$$d = 2 - \frac{1}{2}.$$

---

<sup>18</sup>Una demostración formal de este resultado, donde además se ve que la dimensión de Hausdorff coincide con la dimensión de recuento por cajas, se puede ver en Falconer [29] pp. 244-245.

**Demostración (cálculo)**

Al ser el grafo  $\{(t, B_t), t \in [0, 1]\}$  continuo, podemos determinar su dimensión de recuento por cajas estimando el número de cuadrados de la  $\delta$ -malla que intersecan al grafo sobre cada subintervalo de longitud  $\delta$  como

$$N_\delta[i\delta, (1+i)\delta] \approx \frac{R_f[i\delta, (1+i)\delta]}{\delta},$$

donde  $R_f[i\delta, (1+i)\delta]$  es el rango de la función en dicho intervalo.

El rango de la función en el intervalo se puede estimar como el valor esperado del incremento absoluto de  $B_t$ ,

$$R_f[i\delta, (1+i)\delta] \approx E[|B_{(1+i)\delta} - B_{i\delta}|],$$

que a su vez es igual a  $E[|B_\delta|]$ , con lo que el rango no depende del intervalo considerado y lo podemos escribir como  $R_f[\delta]$ , con

$$R_f[\delta] \approx E[|B_\delta|].$$

Para determinar el rango de la función en un intervalo de longitud  $\delta$ ,  $R_f[\delta]$ , podemos calcular directamente el valor esperado del incremento absoluto de  $B_t$  en el intervalo,

$$E[|B_\delta|] = E[|\mathcal{N}(0, \sigma^2\delta)|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\delta^{\frac{1}{2}},$$

o bien utilizar que el proceso es autoafín con exponente de autoafinidad  $\frac{1}{2}$ ,

$$E[|B_\delta|] = E[|\delta^{\frac{1}{2}}B_1|] = \delta^{\frac{1}{2}}E[|B_1|], \text{ con } E[|B_1|] < +\infty.$$

En ambos casos se tiene que el incremento absoluto de  $B_t$  en el intervalo es proporcional a  $\delta^{\frac{1}{2}}$ , con lo que tenemos

$$R_f[\delta] \propto \delta^{\frac{1}{2}}.$$

Como en el intervalo  $[0, 1]$  hay  $\frac{1}{\delta}$  subintervalos de longitud  $\delta$ , el número total de cuadrados de la  $\delta$ -malla que intersecan al grafo sobre el intervalo  $[0, 1]$  es

$$N_\delta[0, 1] = \frac{1}{\delta}N_\delta[i\delta, (1+i)\delta] \approx \frac{1}{\delta} \frac{R_f[\delta]}{\delta} = \delta^{-2}R_f[\delta] \approx \delta^{-2}E[|\delta|] \propto \delta^{-2}\delta^{\frac{1}{2}} = \delta^{-\frac{3}{2}},$$

con lo que la dimensión de recuento por cajas es:

$$d = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta)}{-\log(\delta)} = \frac{3}{2}. \quad \clubsuit$$

La estimación del número de cuadrados de la  $\delta$ -malla que intersecan al grafo sobre cada subintervalo de longitud  $\delta$  como el cociente entre el rango de la función en dicho intervalo y  $\delta$ , cuyo papel en el cálculo empírico de la dimensión veremos en el siguiente capítulo, nos va a permitir el cálculo de la dimensión de recuento por cajas de las generalizaciones del movimiento browniano que vamos a considerar para modelizar la serie de cierres diarios del índice Ibex35 en el capítulo 5: los procesos estables donde los incrementos son independientes y la distribución normal se cambia por una distribución estable (distribución que a su vez generaliza a la normal) y el movimiento browniano fraccionario, donde los incrementos si están normalmente distribuidos pero no tienen por que ser independientes.

En ambos casos veremos que sus grafos tienen dimensión de recuento por cajas

$$d = 2 - H \quad (1 < d < 2),$$

donde  $H$  ( $0 < H < 1$ ) es el exponente de autoafinidad del proceso. Como este exponente corresponde a  $H = \frac{1}{2}$  para el movimiento browniano, hemos escrito la dimensión de su grafo como  $2 - \frac{1}{2}$ , en vez de decir que es 1.5.

## Referencias

Para el estudio del papel de las funciones de interpolación fractal en la interpolación de datos, además del artículo donde aparecen por primera vez, Barnsley [3], y al igual que para muchos de los temas relacionados con los sistemas de funciones iteradas, se puede utilizar como referencia Barnsley [4].

Otras versiones de la función de Weierstrass distintas a las que hemos analizado aquí, se pueden ver en Mandelbrot [53].

Sobre procesos estocásticos, entre las referencias que pueden ser de utilidad están Todorovic [70], adecuada para una primera aproximación formal, Brock y

Malliariis [10], donde, al igual que en Shiryaev [68], aparecen muchas de sus aplicaciones a la Economía y, en el caso concreto de los procesos autoafines, Embrech y Maejima [27].

Aunque el concepto de movimiento browniano aparece en todas las referencias que acabamos de mencionar, la base fundamental del análisis de las características fractales del proceso se encuentra en Feder [34], Falconer [29] y, dentro de las obras de Mandelbrot, en Mandelbrot [51] y Mandelbrot [53].

# Capítulo 4

## Cálculo empírico de la dimensión

En este capítulo vamos a abordar el cálculo empírico de la dimensión, para lo que utilizaremos la dimensión de recuento por cajas, que es el concepto de dimensión adecuado para ello.

El método general para el cálculo empírico de la dimensión de recuento por cajas de un conjunto contenido en el plano, consiste en recubrir una representación gráfica del conjunto por una  $\delta$ -malla y estudiar la evolución del número de cajas que cortan al grafo, cuando, dentro de un rango de escalas para  $\delta$ , disminuye el tamaño de las cajas que forman la  $\delta$ -malla.

En el caso particular del grafo de una serie aparece la posibilidad de estimar el número de cajas, que en una  $\delta$ -malla intersecan al grafo sobre cada uno de los intervalos de longitud  $\delta$ , como la diferencia entre los valores máximos y mínimos de la serie sobre el intervalo dividida por  $\delta$ .

Para ver la validez de esta estimación, en la sección 4.2 compararemos empíricamente el cálculo directo del número de cajas que en la  $\delta$ -malla intersecan al grafo de una serie sobre cada uno de estos intervalos con dicha estimación, utilizando distintas series temporales cuyos grafos tienen características fractales y donde la dimensión teórica se conoce.

En este análisis vamos a ver que cálculo directo del número de cajas que cortan al grafo de una serie no siempre es adecuado para obtener valores precisos de la dimensión, y que parte del problema se soluciona con la estimación del número de

cajas que cortan al grafo utilizando el rango de la serie.

Así, en primer lugar veremos que a medida que el valor de  $\delta$  se acerca a la separación existente entre los datos, el número de cajas obtenido por cálculo directo se aleja de los valores teóricos y se aproxima al número de datos, lo que no sucede con los valores obtenidos mediante la estimación del número de cajas basada en el cálculo del rango de la serie en cada intervalo.

Esto hace que el rango de escalas de  $\delta$  que podemos considerar al trabajar con los valores calculados directamente, sea más pequeño que el correspondiente a los valores obtenidos mediante la estimación a través del rango.

En la sección 4.3 vamos a ver que si el lado de las cajas que utilizamos para calcular la dimensión de recuento por cajas,  $\delta$ , es mayor que el incremento de la serie en cada uno de los intervalos  $[i\delta, (i+1)\delta]$  aparece una nueva dimensión: la dimensión global del grafo. Esto hace que la dimensión obtenida utilizando el número de cajas no vacías calculado directamente, dependa de la elección de las unidades. Por el contrario, la dimensión obtenida utilizando el número de cajas estimado, es independiente de esta elección.

## 4.1 Cálculo empírico de la dimensión de recuento por cajas de un grafo

El procedimiento típico para el cálculo empírico de la dimensión de recuento por cajas de un conjunto contenido en el plano comienza por su representación gráfica en un rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$  y se basa en la definición de dimensión de recuento por cajas que nos da la proposición 2.11, por lo que una vez representado el conjunto se consideran una serie de valores de  $\delta$  y para cada uno de estos valores se divide el rectángulo en cajas de lado  $\delta$  formando una  $\delta$ -malla sobre la que se cuenta el número de cajas que cortan al conjunto,  $N(\delta)$ .

Si este conjunto tiene dimensión  $d$ , cuando  $\delta$  tiende a cero, el número de cajas

de la  $\delta$ -malla que cortan al conjunto crece proporcionalmente a  $\delta^{-d}$

$$N(\delta) \approx c\delta^{-d},$$

con lo que si tomamos logaritmos en la ecuación anterior,

$$\log N(\delta) = \log c - d \log(\delta),$$

podemos estimar la dimensión de recuento por cajas del conjunto como la pendiente de la recta de mínimos cuadrados que aproxima a los pares  $(-\log(\delta), \log[N(\delta)])$  formados con los valores obtenidos anteriormente.

Como la proposición 2.17 nos garantiza que se pueden tomar sucesiones de la forma  $\delta_k = \frac{C}{2^k}$  y estamos considerando que el conjunto está contenido dentro de un rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$ , tomando  $C$  como la longitud del intervalo  $[a, b]$ , los valores de  $\delta$  que utilizamos van a estar comprendidos dentro de un rango de escalas que queda determinado al elegir unos valores mínimos y máximos para  $k$ .

Como veremos cuando analicemos empíricamente el cálculo de la dimensión de recuento por cajas (sección 4.2), la estimación de la dimensión va a depender de la elección del rango de escalas en el que nos movamos, por lo que este rango debe incluir un número suficiente de valores de  $\delta$  para estudiar como se comporta el número de cajas de la  $\delta$ -malla que cortan al conjunto cuando  $\delta$  tiende a cero.

### 4.1.1 Cálculo del número de cajas

Cuando calculamos el número de cajas que cortan al conjunto utilizando la representación gráfica de los datos <sup>1</sup>, puede producirse una pérdida de información que afecte a la precisión en cálculo del número de cajas que cortan al conjunto y a la dimensión que se obtiene. Como en nuestro estudio empírico los datos son listas

---

<sup>1</sup>Cuando hablamos de la representación gráfica de un conjunto, aunque se puede aplicar lo dicho a su representación sobre papel, nos referimos a la que se realiza en un ordenador utilizando una matriz formada por ceros y unos, donde los unos corresponden a los “pixels” que forman el conjunto representado, que es la que se usa en el algoritmo propuesto por Crownover en [19](pp. 119-122) para calcular de forma mecánica el número de cajas que cortan al conjunto.

con pares de la forma  $(t, x_t)$ , para minimizar esta pérdida de información, vamos a trabajar directamente con las listas de puntos siguiendo el procedimiento descrito, que recogemos en el algoritmo:

### Algoritmo 4.1

#### ENTRADAS:

- Lista con el conjunto a estudiar:  $l$ .
- Rango de escalas:  $k_{\text{mín}}$  y  $k_{\text{máx}}$ .

#### PASOS:

**Sean**  $a, b, c$  y  $d$  las dimensiones de la  $\delta$ -malla  $[a, b) \times [c, d)$ .

**Desde**  $k = k_{\text{mín}}$

**Sean**  $\delta = \frac{b-a}{2^k}$  y  $N(\delta) = 0$ .

\* {

**Desde**  $i = 0$

**Desde**  $j = 0$

**Si** hay puntos en la caja

$[a + i\delta, a + (i + 1)\delta) \times [c + j\delta, c + (j + 1)\delta)$

**Sea**  $N(\delta) = N(\delta) + 1$

**Hasta**  $j = \text{parte entera de } \frac{d-c}{\delta}$

**Hasta**  $i = \text{parte entera de } \frac{b-a}{\delta}$

**Hasta**  $k = k_{\text{máx}}$

#### SALIDA:

- Pendiente cambiada de signo de la recta de mínimos cuadrados de  $(\log[\delta], \log[N(\delta)])$  con  $\delta = \frac{b-a}{2^k} : k_{\text{mín}} \leq k \leq k_{\text{máx}}$ . ♣

### 4.1.2 Estimación del número de cajas

Al calcular de forma empírica la dimensión de recuento por cajas del grafo de una serie temporal se recubre el grafo con una  $\delta$ -malla y se estudia la evolución del número de cajas que cortan al grafo cuando disminuye el tamaño de las cajas que forman la  $\delta$ -malla.

Cuando la serie temporal proviene de una función continua el número de cajas que en la  $\delta$ -malla intersecan al grafo de la función sobre cada uno de los intervalos  $[i\delta, (i+1)\delta]$  está muy próximo al cociente entre el rango de la función en el intervalo y  $\delta$ , (proposición 2.18).

Si extendemos esta estimación a todos los casos, y estimamos el número de cajas no vacías sobre el intervalo  $[i\delta, (i+1)\delta]$  como

$$N_i(\delta) \approx \frac{R_i(\delta)}{\delta},$$

donde  $R_i(\delta)$  es la diferencia entre los valores máximos y mínimos de la serie sobre el intervalo  $[i\delta, (i+1)\delta]$ , mediante esta estimación se consideran como no vacías todas las cajas que aparecen entre los valores máximo y mínimo de la serie en cada uno de los intervalos sobre los que se construye la malla,  $[i\delta, (i+1)\delta]$ , por lo que será adecuada si efectivamente no aparecen cajas vacías, como sucede cuando la función es continua, o si su número es despreciable frente al cociente entre el rango de la función en el intervalo y  $\delta$ .

Esta estimación da lugar a una segunda versión del algoritmo 4.1 sin más que modificar el cuerpo central (marcado con \*):

**Algoritmo 4.2** Modificación algoritmo 4.1

$$* \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Desde} \quad i = 0 \\ \mathbf{Sea} \quad N(\delta) = N(\delta) + \frac{R_f[i\delta, (i+1)\delta]}{\delta} \\ \mathbf{Hasta} \quad i = \text{parte entera de } \frac{b-a}{\delta} \end{array} \right. \clubsuit$$

En la sección 4.2 vamos a comparar empíricamente esta estimación con el cálculo directo del número de cajas no vacías utilizando series temporales generadas por las funciones de interpolación fractal (sección 3.1), que nos permiten construir series temporales fijando la dimensión de recuento por cajas a priori y donde, al comparar los resultados que se obtienen mediante ambos métodos con los resultados que teóricamente se deben de obtener, vamos a ver cual es el procedimiento adecuado para el cálculo la dimensión de recuento por cajas de una serie.

### 4.1.3 Implementación

En esta sección vamos a implementar en el entorno MATHEMATICA las funciones necesarias para el cálculo empírico de la dimensión de recuento por cajas del grafo de una serie temporal, utilizando tanto el cálculo directo del número de cajas que lo cortan como su estimación.

En ambos casos, algoritmos 4.1 y 4.2, se recubre el grafo con una  $\delta$ -malla y se estudia la evolución del número de cajas que cortan al grafo cuando disminuye el tamaño de las cajas que forman la  $\delta$ -malla, por lo que para realizar los cálculos empíricos de la dimensión de recuento por cajas lo fundamental es obtener dicho número de cajas dentro de un rango de escalas para  $\delta$ .

La lista con los valores de delta, para el rango de escalas comprendido entre  $\frac{C}{2^{k_{\min}}}$  y  $\frac{C}{2^{k_{\max}}}$ , frente al correspondiente número de cajas que cortan al grafo de la serie “datos”, se obtiene a través de la función

```
ListaCajas[datos_,kmin_,kmax_,ver_] :=
  Block[{a = Min[First /@ datos], b = Max[First /@ datos],
        c = Min[Last /@ datos], d = Max[Last /@ datos],
        CC= b-a, l11={}, delta, lisdeltas},
  lisdeltas=Table[CC/(2^k),{k,kmin,kmax}];
  While[lisdeltas!={},
    delta=First[lisdeltas]; lisdeltas=Rest[lisdeltas];
    l11=Append[l11,{delta,NumeroCajas[datos,delta,ver]}]];
  l11];
```

donde incluimos una variable “ver” que nos permite tratar los dos procedimientos de forma conjunta y que toma el valor uno cuando se calcula el número de cajas directamente y dos cuando se estima este número a través del rango de la serie.

El núcleo central del problema es el cálculo del número de cajas de amplitud  $\delta$  correspondiente a los distintos valores de  $\delta$  y se realiza al recorrer los intervalo  $[a + i\delta, a + (i + 1)\delta)$  y calcular el número de cajas no vacías de amplitud  $\delta$  que hay sobre cada uno de ellos:

```

NumeroCajas[l_,delta_,ver_] :=
  Block[{Ncajas=0, dd=delta,
        Mx=IntegerPart[N[(b-a)/dd]], My=IntegerPart[N[(d-c)/dd]]},
  Do[Ncajas=Ncajas
    + NumeroCajasSobre[Select[l,a+(i+1) dd>First[#1]>=a+i dd&],ver],
    {i,0,Mx}];
  Ncajas]

```

El cálculo del número de cajas de amplitud  $\delta$  que contienen puntos de  $l$  sobre cada intervalo  $[a+i\delta, a+(i+1)\delta)$  lo hace la función `NumeroCajasSobre[l, ver]`, que es la que realmente tiene las dos versiones, pues es la parte donde hemos sustituido el cálculo directo por una estimación:

```

NumeroCajasSobre[l1_,1] :=
  Block[{Ncj=0, lista={}},
  Do[lista=Select[l1,c+(j+1) dd>Last[#1]>=c+j dd&];
    Ncj=Ncj+If[Length[lista]==0,0,1],
    {j,0,My}];
  Ncj];

```

```

NumeroCajasSobre[l1_,2] :=
  (Max[Last /@ l1] - Min[Last /@ l1])/dd

```

Como la dimensión de recuento por cajas es la pendiente cambiada de signo de la recta de regresión de los pares

$$\log(\delta), \log(N(\delta))$$

podemos obtener la dimensión de recuento por cajas de la lista “datos”, para el rango de escalas comprendido entre  $\frac{C}{2^{k_{\min}}}$  y  $\frac{C}{2^{k_{\max}}}$ , como:

```

DimensionCajas[datos_,kmin_,kmax_,ver_] :=
  -Pte[Map[Log,ListaCajas[datos,kmin,kmax,ver]]];

```

donde utilizamos como funciones auxiliares (definidas en el apéndice A sección A.2):

- La función `RectaReg[1, x]` para el cálculo de la recta de regresión de los puntos en la lista 1.
- La función `Pte[1]` para el cálculo de la pendiente de la recta de regresión de los puntos en la lista 1.

Para comparar empíricamente la estimación con el calculo directo del número de cajas no vacías utilizaremos series temporales generadas por las funciones de interpolación fractal. Para obtener estas series usamos un conjunto de  $N$  puntos no alineados e igualmente distribuidos sobre el eje temporal, `datos` y generamos los valores de una función de interpolación fractal que pase por lo datos y cuyo grafo tenga la dimensión de recuento por cajas requerida, `Dim`.

Para obtener los valores de esta función construimos, mediante cualquiera de los algoritmos que vimos en la sección 1.3, un sistema de funciones iteradas, donde, para que la dimensión de recuento por cajas del grafo sea `Dim`, imponemos que todos los factores de escala verticales sean iguales a  $d = N^{\text{Dim}-2}$ .

La función que calcula el código de este sistema,

$$\text{CalculaCodigo}[\text{datos}, \text{Dim}],$$

la hemos definido en el apéndice A, sección A.2, como un caso particular de la función

$$\text{CalculaCodigo}[\text{datos}, \text{factores}],$$

que dado un conjunto de datos, `datos`, y fijados los factores de escala, `factores`, calcula el código del sistema asociado a la función de interpolación fractal para estos datos y para los correspondientes factores de escala vertical.

## 4.2 Análisis empírico de la estimación del número de cajas a través del rango frente a su cálculo directo

Cuando calculamos el número de cajas que cortan al grafo de la serie, no obtene-

mos el número de cajas correspondiente al grafo del proceso que da lugar a la serie bajo estudio, ya que, provenga o no de un proceso continuo, en esta serie temporal siempre tendremos un conjunto discreto de datos, por lo que el cálculo directo del número de cajas no vacías se convierte en una estimación, estimación que empeora al disminuir el tamaño de las cajas que forman la malla y que no es lo suficientemente adecuada para obtener valores precisos de la dimensión.

En esta sección, donde además determinaremos cual es el procedimiento adecuado para obtener la dimensión de recuento por cajas de una serie, vamos a comparar empíricamente el cálculo directo del número de cajas que cortan al grafo de la serie sobre cada uno de los intervalos de longitud  $\delta$ , con la estimación de este número de cajas como el cociente entre el rango de la serie en el intervalo y  $\delta$ .

## Funciones de interpolación fractal

Un primer análisis lo vamos a realizar utilizando series temporales generadas por las funciones de interpolación fractal, ya que nos permiten construir series temporales fijando la dimensión de recuento por cajas a priori y comparar los resultados que se obtienen mediante ambos métodos con los que teóricamente se deben obtener.

Para ello, vamos a aproximar la serie de cierres diarios del índice Ibex35 durante la década de los noventa considerando como puntos de interpolación los cierres anuales de la serie (incluyendo como origen el último valor de la década anterior).

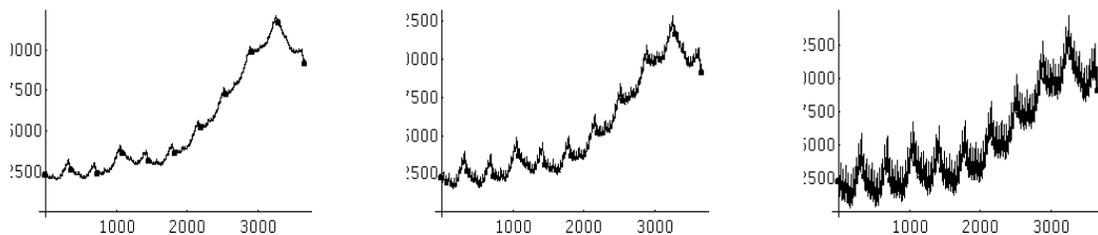


Figura 4.1: Funciones de interpolación fractal basadas en los cierres anuales del Ibex35, con  $d = 1.25, 1.50, 1.75$

Aunque el estudio empírico de la dimensión de recuento por cajas lo vamos a realizar con distintas dimensiones teóricas para la serie temporal (figura 4.1), la

comparación detallada de las dos estimaciones la vamos a realizar sólo en el caso  $s = 1.5$ .

Como las funciones de interpolación fractal se construyen como atractores de un sistema de funciones iteradas, lo único que tenemos que fijar son los factores de escala vertical de las transformaciones que componen el sistema, ya que los otros coeficientes quedan determinados por los puntos de interpolación (teorema 3.1).

En nuestro caso, como los puntos de interpolación están igualmente distribuidos, para que la función de interpolación tenga la dimensión requerida tomamos todos los factores de escala vertical iguales.

A continuación construimos mediante el algoritmo determinístico una lista con los puntos correspondientes al grafo de la función de interpolación, para lo que debemos fijar un número de iteraciones adecuado, ya que, como en todo conjunto fractal, estos puntos son siempre aproximaciones del grafo de la función de interpolación que se obtiene en el límite.

En nuestro caso, como tenemos once cierres anuales, el sistema de funciones iteradas está formado por diez funciones y, por tanto, el número de puntos que aparecen tras cada iteración se multiplica por diez. De este modo, si tomamos como conjunto de partida los cierres anuales, en la tercera iteración tendremos una lista formada por 11000 puntos ( $11 \cdot 10^3$ ), que permite una buena aproximación.

De esta forma, aunque la función que da lugar a la serie tiene como dimensión de recuento por cajas teórica  $s = 1.5$ , la serie obtenida es discreta y el valor que obtengamos de la dimensión sólo será válido dentro de un rango de escalas adecuado al número de elementos de la serie.

Para estudiar el comportamiento frente a  $\delta$  del número de cajas de lado  $\delta$  que se necesita para recubrir su grafo, la proposición 2.17 nos garantiza que podemos tomar los valores de  $\delta$  correspondientes a la sucesión  $\delta_k = \frac{C}{2^k}$ , donde  $C$  es la longitud del intervalo en el cual toma valores la función.

En una primera aproximación consideramos que los valores de  $\delta$  van desde un primer valor  $\delta_1 = \frac{C}{2} = \frac{3650}{2} = 1825$  correspondiente a periodos de cinco años ( $C = 3650$  es el número de días transcurridos entre los valores considerados), hasta un

valor  $\delta_k = \frac{C}{2^k} \approx 3.56$  con  $k = 10$ , que corresponde a periodos cercanos a la semana.

Una vez fijado el primer rango de escalas en el que se moverá  $\delta$ , para cada uno de los valores de  $\delta$  considerados calculamos el número de cajas de lado  $\delta$  que se necesita para recubrir el grafo de la serie, tanto directamente como mediante la estimación a través del rango, tabla 4.1.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\delta_k$	1825	912	456	228	114	57	28	14	7	4
$N(\delta_k)$	8	20	58	155	419	1141	2843	5472	8007	9307
$\frac{R[\delta_k]}{\delta_k}$	7	16	51	139	388	1088	3112	8203	21309	55671

Tabla 4.1: Número de cajas no vacías de lado  $\delta_k = \frac{C}{2^k}$

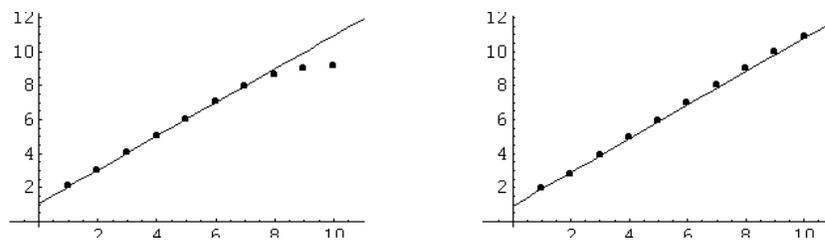


Figura 4.2: Logaritmos del número de cajas no vacías de lado  $\delta = 2^{-k}$ , calculados directamente y estimados a través del rango, frente a  $k$ , con  $k = 1, \dots, 10$

La dimensión de recuento por cajas se obtiene como la pendiente de la recta de regresión de los pares

$$(\log \delta^{-1}, \log N_\delta)$$

para los valores de  $\delta$  correspondientes a este rango de escalas, por lo que para ver si el rango de escalas elegido es adecuado representamos estos pares junto a la recta de regresión de los primeros valores en la figura 4.2 (figura donde hemos sustituido  $\log \delta_k^{-1}$  por  $k$  pues ambos son proporcionales).

Al analizar ambos gráficos se observa que a partir de  $k = 6$  los logaritmos del número de cajas no vacías de lado  $\delta_k$  calculados directamente se desvían de la recta de regresión correspondiente a los valores  $k = 1, 2, 3$  para alinearse casi horizontalmente

(figura 4.2-a) y que esta desviación no se produce con los valores correspondientes a la estimación a través del rango (figura 4.2-b).

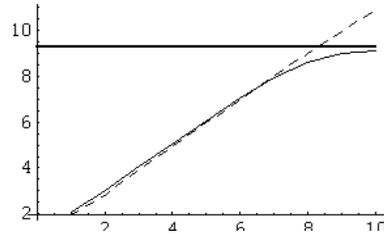


Figura 4.3: Comparación del número de cajas no vacías de lado  $\delta = 2^{-k}$  calculado directamente y mediante su estimación a través del rango (en logaritmos)

En la figura 4.3 podemos ver que el logaritmo del número de cajas se mantiene cerca de la estimación a través del rango sólo hasta  $k = 6$  y que a partir de  $k = 7$  se desvía para aproximarse asintóticamente al logaritmo del número de datos.

La desviación de los logaritmos del número de cajas no vacías calculados directamente se debe a que estamos trabajando con una serie discreta y entre los valores extremos de la función en cada intervalo hay cajas vacías que, como la función es continua, en realidad no deberían estarlo.

De esta forma, a medida que el valor de  $\delta$  se acerca a la separación existente entre los datos, el número de cajas obtenido por cálculo directo se aleja de los valores teóricos y se aproxima al número de datos, que es el número máximo de cajas no vacías que podemos obtener.

Por el contrario, la estimación del número de cajas basada en el cálculo del rango de la serie en cada intervalo sí tiene en cuenta todas las cajas intermedias, estén o no vacías, por lo que incluso para valores pequeños de  $\delta$ , su cálculo está cerca de los valores teóricos; que tampoco alcanza, ya que en la serie tenemos un número finito de valores de la función entre los que no tienen por que estar ni el mínimo ni el máximo.

Como consecuencia, cuando trabajamos con los valores calculados directamente, hay que reducir el rango de escalas de  $\delta$  a los valores comprendidos entre  $\delta_1$  y  $\delta_6$ , reducción que no es necesaria si trabajamos con los valores obtenidos mediante la

estimación a través del rango.

Aunque sólo es necesario reducir el rango de escalas cuando trabajamos con los valores calculados directamente, lo que representa la primera de las ventajas de la estimación, para poder comparar los dos métodos en ambos casos vamos a obtener los valores para la dimensión de recuento por cajas dentro del rango de escalas comprendidos entre  $\delta_1$  y  $\delta_6$ .

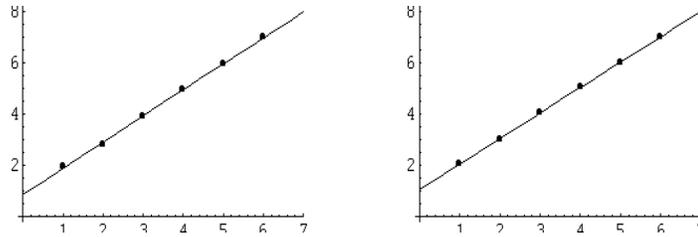


Figura 4.4: Logaritmos del número de cajas no vacías de lado  $\delta = 2^{-k}$  frente a  $k$ ,  $k = 1, \dots, 6$  y la recta de regresión correspondiente a estos valores

Dentro del rango de escalas comprendidos entre  $\delta_1$  y  $\delta_6$  obtenemos como valores para la dimensión de recuento por cajas,

$$d_1 = 1.4429 \text{ (cálculo directo) y } d_2 = 1.47623 \text{ (estimación).}$$

Aunque estos valores parecen adaptarse bien a los valores del número de cajas obtenido en cada caso (figura 4.4), si consideramos los valores centrales del rango de escalas,  $k = 2, 3, 5$ , y procedemos de forma análoga se obtienen dimensiones de recuento por cajas distintas,

$$d_1 = 1.45848 \text{ y } d_2 = 1.50725,$$

lo que hace que sea necesario admitir un cierto margen de error para poder hablar de un valor de la dimensión adecuado al rango de escalas en su conjunto.

Así, para asignar a la serie una dimensión adecuada al rango de escalas en el que nos movemos, vamos a obtener todos los valores de la dimensión que aparecen al tomar los distintos valores mínimos y máximos de  $k$  comprendidos en este rango, imponiendo que su cálculo comprenda un número mínimo de puntos, que, al tener sólo seis puntos, en este caso va a ser de tres.

Una vez obtenidos los distintos valores de la dimensión, que se obtienen de forma análoga a los anteriores, tomamos como dimensión su valor medio y consideramos como error la desviación absoluta media,  $d_1 = 1.44 \pm 0.01$  y  $d_2 = 1.48 \pm 0.02$ , tabla 4.2.

	Cálculo directo de $N(\delta)$				Estimación de $N(\delta)$			
$k_{\text{máx}}$	3	4	5	6	3	4	5	6
$k_{\text{mín}} = 1$	1.4290	1.4364	1.4376	1.4390	1.4244	1.4500	1.4615	1.4685
$k_{\text{mín}} = 2$		1.4771	1.4585	1.4521		1.5302	1.5072	1.4988
$k_{\text{mín}} = 3$			1.4264	1.4329			1.4641	1.4729
$k_{\text{mín}} = 4$				1.4400				1.4846
Media	1.4429				1.4762			
Desv. Media	0.0118				0.0232			

Tabla 4.2: Distintas dimensiones obtenidas en el rango de escalas comprendido entre  $k = 1$  y  $k = 6$  (dimensión teórica  $d = 1.5$ )

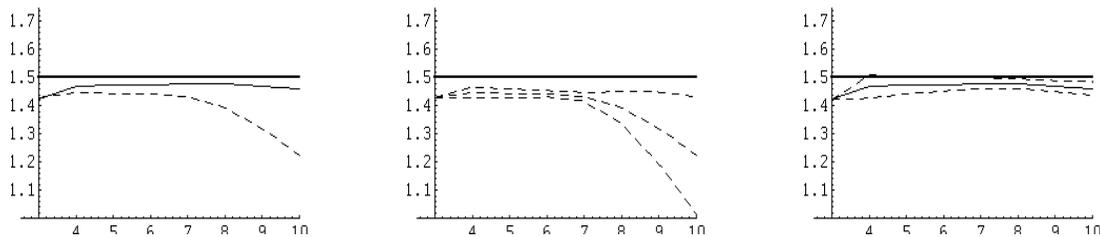


Figura 4.5: Dimensiones en el rango de escalas completo

Dentro del rango de escalas completo, aunque sabemos que no podemos utilizar el cálculo directo del número de cajas, procedemos de forma análoga al caso anterior y representamos los valores de la dimensión que se obtienen, figura 4.5, donde podemos observar que los valores obtenidos mediante la estimación a través del rango de la serie, al contrario que los obtenidos mediante el cálculo directo, se mantienen estables hasta que el máximo del rango de escalas se acerca al final, figura 4.5-a, y que con los márgenes de error considerados también sucede lo mismo, figuras 4.5-b y 4.5-c.

De esta forma, el valor obtenido para la dimensión mediante la estimación

$$d = 1.48 \pm 0.02,$$

es válido en un rango de escalas más amplio y se aproxima bastante más al valor teórico de la dimensión que el obtenido mediante el cálculo directo del número de cajas.

Dimensión teórica	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
Cálculo directo	1.16	1.21	1.26	1.33	1.44	1.51	1.57	1.62	1.65
Cálculo estimado	1.22	1.26	1.32	1.40	1.48	1.56	1.64	1.71	1.78

Tabla 4.3: Comparación de las dimensiones obtenidas con las dimensiones teóricas en el rango de escalas comprendido entre  $k = 1$  y  $k = 6$

Repetiendo el proceso por ambos métodos con series de distintas dimensiones teóricas, tabla 4.3, se observa que, salvo para  $d = 1.1$  y  $d = 1.2$ , los valores obtenidos para la dimensión de recuento por cajas mediante la estimación del número de cajas no vacías están más cerca de los valores teóricos que los correspondientes al cálculo directo del número de cajas no vacías.

## Función de Weierstrass

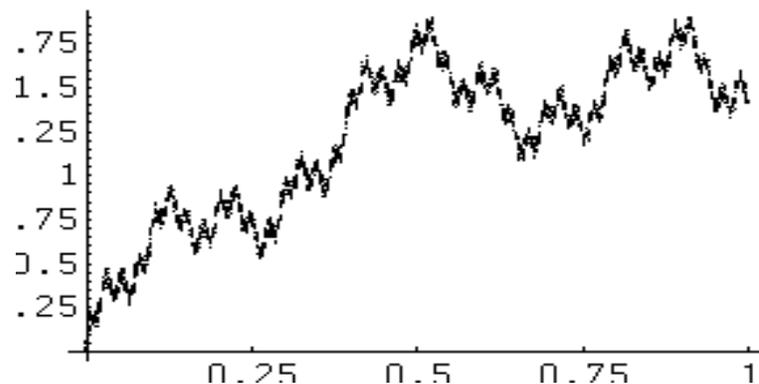


Figura 4.6: 3.650 valores de la función de Weierstrass en el intervalo  $[0, 1]$  ( $s = 1.5$ )

Para terminar esta sección vamos a ver que los fenómenos que hemos observado cuando calculábamos la dimensión de una serie temporal generada por una función de interpolación fractal, se repiten al generar la serie mediante la función de Weierstrass seno autoafín,

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \text{sen}(\lambda^n t),$$

con  $\lambda = 4$  y donde el número de términos a considerar (grado de aproximación) va a ser de ciento uno ( $n=50$ ).

◇ Además, para determinar cual es el procedimiento adecuado para obtener la dimensión de recuento por cajas de una serie temporal y ver como se utilizan las funciones definidas en este trabajo (secciones 1.3.3 y 4.1.3), en este estudio vamos a incluir como se realizan los cálculos en el entorno MATHEMATICA 3.0 en separatas señaladas con las marcas que abren y cierran este párrafo. ◇

En este estudio empírico vamos a ver el caso  $s = 1.5$ , que corresponde a la misma dimensión que utilizamos en la sección anterior, considerando una serie temporal con 3650 valores igualmente distribuidos en el intervalo  $[0, 1]$ , número de valores que corresponde al número de días abarca el estudio del índice Ibex35 que abordaremos en el siguiente capítulo (figura 4.6).

De esta forma, aunque la función que da lugar a la serie tiene como dimensión de recuento por cajas teórica  $s = 1.5$ , la serie obtenida es discreta y el valor que obtengamos de la dimensión sólo será válido dentro de un rango de escalas adecuado al número de elementos de la serie.

◇ Este estudio lo vamos a realizar en el entorno de cálculo MATHEMATICA 3.0 utilizando las funciones definidas en este trabajo, por lo que vamos a suponer que estas funciones han sido cargadas previamente.

Para generar esta serie, `LisFunWei`, utilizamos una función basada en la versión de la función de Weierstrass considerada, `FunWei[N, Dim]`, que construye una serie temporal de longitud `N` y cuyo grafo tiene dimensión de recuento por cajas `Dim` (sección A.2 del apéndice):

```
LisFunWei=FunWei[3650,1.5];
```

◇

De manera análoga al caso anterior consideramos una primer rango de escalas, donde  $\delta$  va desde un valor máximo  $\delta_1 = \frac{C}{2^1} = \frac{1}{2} = 0.5$  hasta un valor mínimo  $\delta_{10} = \frac{C}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \approx 0.001$ , y para cada uno de los valores de  $\delta$  considerados calculamos el número de cajas de lado  $\delta$  que se necesita para recubrir el grafo de la serie tanto directamente como mediante la estimación a través del rango, tabla 4.4.

◇ Estos valores los obtenemos en listas formadas por pares con los valores de  $\delta$  utilizados frente al número de cajas de lado  $\delta$ , `LisCajFunWei1` y `LisCajFunWei2`, correspondientes respectivamente al cálculo directo y la estimación a través del rango, utilizando la función `ListaCajas[datos,kmin,kmax,ver]` con `ver=1` para realizar el cálculo directo del número de cajas y `ver=2` para su estimación a través del rango (sección 4.1):

`LisCajFunWei?=ListaCajas[LisFunWei,1,10,?];`

◇

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\delta$	0.5	0.25	0.125	0.062	0.031	0.016	0.008	0.004	0.002	0.001
$N(\delta_k)$	7	19	49	126	325	839	1750	2784	3344	3566
$\frac{R[\delta_k]}{\delta_k}$	5	15	39	107	289	815	2135	5698	13709	30844

Tabla 4.4: Número de cajas no vacías de lado  $\delta = 2^{-k}$

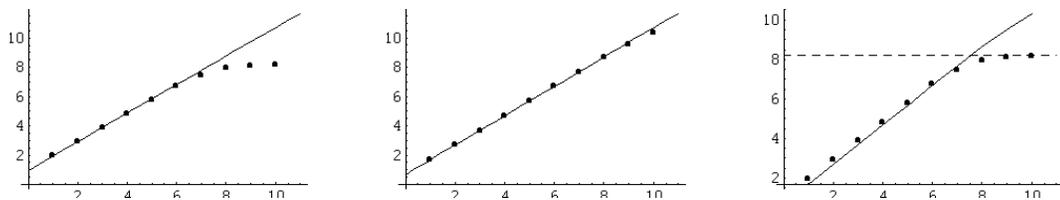


Figura 4.7: Logaritmos del número de cajas no vacías de lado  $\delta = 2^{-k}$ , calculados directamente y estimados a través del rango, frente a  $k$ , con  $k = 1, \dots, 10$

Al igual que sucedía con la serie generada mediante las funciones de interpolación fractal, cuando representamos los pares  $(\log \delta^{-1}, \log N_\delta)$  para los valores de  $\delta$

correspondientes a este rango de escalas junto a la recta de regresión de los primeros valores se observa que a partir de  $k = 6$  los logaritmos del número de cajas no vacías de lado  $\delta_k$  calculados directamente se desvían de la recta de regresión correspondiente a los valores  $k = 1, 2, 3$  para aproximarse asintóticamente al logaritmo del número de datos y que esta desviación no se produce con los valores correspondientes a la estimación a través del rango (figura 4.7).

Para asignar a la serie una dimensión, reducimos el rango de escalas de  $\delta$  a los valores comprendidos entre  $\delta_1 = 2^{-1} = 0.5$  y  $\delta_6 = 2^{-6} = 0.015625$  y obtenemos todos los valores de la dimensión que aparecen al tomar los distintos valores mínimos y máximos de  $k$  comprendidos en este rango, imponiendo que su cálculo comprenda un número mínimo de puntos, que, al tener sólo seis puntos, en este caso va a ser de tres.

Una vez obtenidos estos valores, tomamos como dimensión su valor medio y consideramos como error la desviación absoluta media,  $d_1 = 1.38 \pm 0.01$  y  $d_2 = 1.44 \pm 0.01$ , tabla 4.5.

◇ Aunque estas dimensiones se pueden obtener de forma directa utilizando la función `DimensionCajas[datos, kmin, kmax, ver]` (sección 4.1), para no repetir los cálculos extraemos de la lista `LisCajFunWei`, formada por los valores de  $\delta$  y los correspondientes números de cajas no vacías de tamaño  $\delta$ , los valores correspondientes al rango de escalas y calculamos la pendiente cambiada de signo de la recta de regresión correspondiente (función definida en la sección A.2 del apéndice).

La dimensión asociada a la serie dentro del rango de escalas es la media de estas dimensiones y el error la desviación absoluta media <sup>2</sup>:

```
l1=Table[-Pte[Take[Map[Log,LisCajFunWei?],{i,j}]],
        {i,1,4},{j,i+2,6}];
l1=Flatten[l1];
dimm=Mean[l1];
err=Mean[Map[Abs[#-dimm]&,l1]];
```

---

<sup>2</sup>Esta forma de asociar una dimensión a una serie la vamos a implementar en apéndice A sección A.2



	Cálculo directo de $N(\delta)$				Estimación de $N(\delta)$			
$k_{\text{máx}}$	3	4	5	6	3	4	5	6
$k_{\text{mín}} = 1$	1.4037	1.3877	1.3803	1.3765	1.4410	1.4384	1.4355	1.4432
$k_{\text{mín}} = 2$		1.3647	1.3651	1.3659		1.4118	1.4207	1.4375
$k_{\text{mín}} = 3$			1.3648	1.3660			1.4417	1.4564
$k_{\text{mín}} = 4$				1.3676				1.4611
Media	1.3742				1.4387			
Desv. Media	0.0102				0.0099			

Tabla 4.5: Distintas dimensiones obtenidas en el rango de escalas comprendido entre  $k = 1$  y  $k = 6$



Figura 4.8: Dimensiones en el rango de escalas completo

Dentro del rango de escalas completo, valores de  $\delta$  que van desde  $\delta_1 = \frac{C}{2^1} = \frac{1}{2}$  hasta  $\delta_{10} = \frac{C}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \approx 0.001$ , se observan los mismos fenómenos que en el caso anterior, ya que tanto los valores obtenidos mediante la estimación a través del rango de la serie como los márgenes de error considerados se mantienen estables hasta que el máximo del rango de escalas se acerca al final y esto no sucede con los obtenidos mediante en el cálculo directo (figura 4.8).

De esta forma, al igual que sucedía con la serie generada mediante las funciones de interpolación fractal, el valor obtenido para la dimensión mediante la estimación es válido en un rango de escalas más amplio

$$d = 1.44 \pm 0.01.$$

### 4.3 Dimensión local y global

En esta sección vamos a ver que si el lado de las cajas que utilizamos para calcular la dimensión de recuento por cajas,  $\delta$ , es mayor que el incremento de la serie en cada uno de los intervalos  $[i\delta, (i+1)\delta]$  aparece una nueva dimensión: la dimensión global del grafo.

Para ver esta dimensión vamos a considerar una serie que aproxima a un movimiento browniano y que se obtiene como las sumas acumuladas de un ruido blanco gaussiano estándar, con lo que la serie parte del origen y sus incrementos siguen una normal con media cero y varianza unitaria.

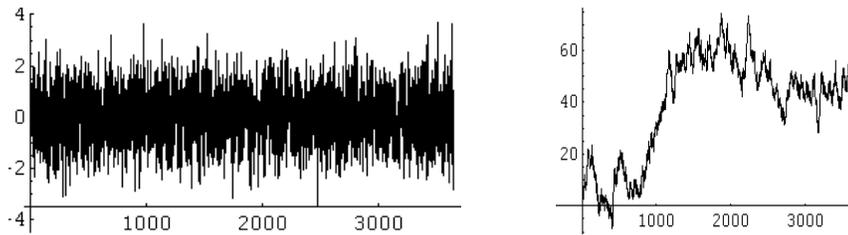


Figura 4.9: Ruido blanco gaussiano estándar y sus sumas acumuladas

Al igual que hicimos en la serie generada mediante la función de Weierstrass, vamos a tomar el mismo número de incrementos que días abarca el estudio del índice Ibex35 que abordaremos en el siguiente capítulo: 3650 incrementos. Sin embargo, en este caso vamos a considerar que, al igual que en el índice Ibex35, estos incrementos corresponden a un intervalo de tiempo unitario, por lo que vamos a trabajar en el intervalo  $[0, 3650]$  en vez de hacerlo en el intervalo  $[0, 1]$  (4.9).

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\delta$	1825	912	456	228	114	57	28	14	7	4
$N(\delta)$	3	5	9	17	33	81	162	344	734	1479
$\frac{R[\delta]}{\delta}$	0.07	0.17	0.48	1.54	4.54	12.56	33.89	88.04	216.01	466.59

Tabla 4.6: Número de cajas de lado  $\delta$

Procediendo de forma análoga a los casos anteriores, recubrimos el grafo de esta

serie por  $\delta$ -mallas dentro de un primer rango de escalas, que va desde  $\delta_1 = \frac{C}{2} = 1825$  hasta  $\delta_{10} = \frac{C}{2^{10}} = 3.5644$  ( $C = 3650$  es la longitud del intervalo), y calculamos el número de cajas que cortan al grafo de la serie, tabla 4.6.

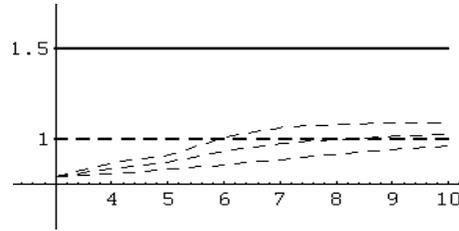


Figura 4.10: Dimensiones y márgenes de error obtenidos en el rango de escalas completo mediante el cálculo directo del número de cajas

Si representamos los valores de la dimensión y los correspondientes errores que se obtienen para un valor mínimo  $k = 3$  y un valor máximo variable <sup>3</sup>, figura 4.10, podemos observar que estos valores están más cerca de una dimensión  $d = 1$  que de la dimensión teórica de la serie,  $d = 1.5$ , (dentro del rango de escalas completo la dimensión obtenida corresponde a una dimensión,  $d = 1.07 \pm 0.03$ ).

Este hecho se debe a que el lado de las cajas que utilizamos para calcular la dimensión,  $\delta$ , es mayor que el incremento de la serie en cada intervalo  $[i\delta, (i + 1)\delta]$ , con lo que en cada uno de estos intervalos basta con una caja para recubrir el grafo de la serie y, al tener  $\frac{C}{\delta}$  intervalos, el número total de cajas que se obtiene es

$$N(\delta) = 1 \times \frac{C}{\delta} \propto \delta^{-1},$$

que corresponde a una dimensión de recuento por cajas  $d = 1$ .

Este fenómeno aparece siempre que los valores de  $\delta$  son grandes en comparación con el incremento de la serie en cada intervalo de longitud  $\delta$ , por lo que al calcular

---

<sup>3</sup>Para calcular estos valores procedemos de forma análoga a los casos anteriores, para lo que obtenemos todos los valores de la dimensión que aparecen al tomar los distintos valores mínimos y máximos de  $k$  comprendidos en cada rango de escalas, imponiendo que su cálculo comprenda un número mínimo de tres puntos, y tomamos como dimensión el valor medio y consideramos como error la desviación absoluta media.

la dimensión de recuento por cajas considerando que  $\delta$  tiende a infinito, en vez de considerar que  $\delta$  tiende a cero, obtenemos como dimensión de recuento por cajas

$$d_G = 1,$$

y hablamos de la dimensión global del grafo cuando  $\delta$  tiende a infinito y de la dimensión local cuando  $\delta$  tiende a cero.

De este modo, si las unidades en las que está expresada la serie son pequeñas en comparación con las unidades en las que medimos el tiempo, como sucede en nuestro caso, al calcular la dimensión de recuento por cajas se obtiene como dimensión la dimensión global del grafo y no es posible apreciar su dimensión local, ya que, aunque teóricamente se obtendría la dimensión local al hacer tender  $\delta$  a cero, los valores de  $\delta$  que podemos utilizar en el cálculo directo del número de cajas están limitado por el número de datos, como hemos visto en la sección 4.2, y no podemos salir del rango de escalas.

Para ver este fenómeno hemos cambiado las unidades de la serie con la que estamos trabajando multiplicando por potencias de diez y calculado el número de cajas no vacías en cada caso, junto a las dimensiones correspondientes, dentro del rango de escalas que va desde  $\delta_1 = \frac{C}{2} = 1825$  hasta  $\delta_6 = \frac{C}{2^6} = 57.03$ , tabla 4.7.

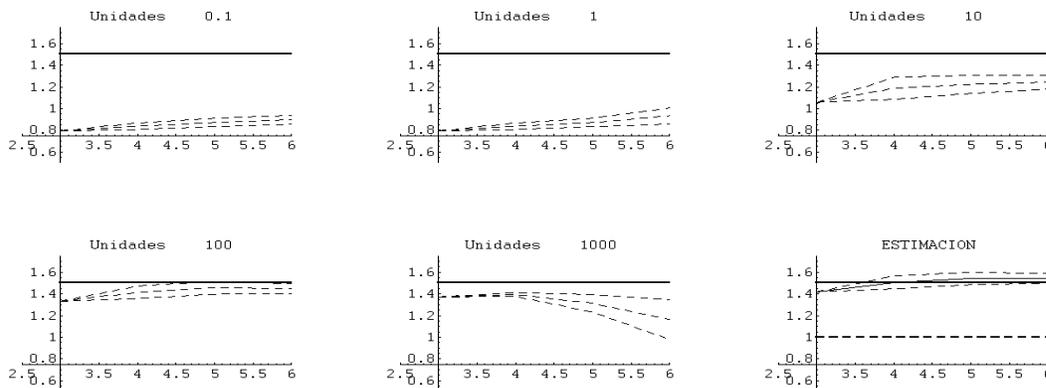


Figura 4.11: Dimensiones y márgenes de error en las distintas unidades

Los resultados obtenidos muestran que para calcular empíricamente la dimensión de una serie, utilizando el número de cajas no vacías que se obtiene directamente, la

elección de las unidades es fundamental, ya que cuando cambiamos las unidades de la serie, el número de cajas calculado directamente es distinto dentro del mismo rango de escalas y los valores de la dimensión correspondientes oscilan entre la dimensión global, para unidades pequeñas, y la dimensión local, para unidades grandes, donde además está el problema del límite del número de datos (figura 4.11).

Por el contrario, los valores del número de cajas estimados, como el cociente del rango de la serie en el intervalo y la longitud del intervalo, mantienen la misma estructura en todos los casos, ya que sólo cambian las unidades, y, aunque difieren de los calculados directamente, siempre dan lugar a la misma dimensión, que corresponde a la dimensión teórica (dimensión local).

Cálculo directo de $N(\delta)$							
Unidades	$N(\delta_1)$	$N(\delta_2)$	$N(\delta_3)$	$N(\delta_4)$	$N(\delta_5)$	$N(\delta_6)$	Dim.
$10^{-1}$	3	5	9	17	33	65	$0.90 \pm 0.04$
$10^0$	3	5	9	17	33	81	$0.93 \pm 0.07$
$10^1$	3	5	13	32	76	188	$1.24 \pm 0.06$
$10^2$	9	21	57	168	480	1155	$1.45 \pm 0.04$
$10^3$	70	173	469	1238	2293	3064	$1.16 \pm 0.18$
Estimación de $N(\delta)$							
Unidades	$N(\delta_1)$	$N(\delta_2)$	$N(\delta_3)$	$N(\delta_4)$	$N(\delta_5)$	$N(\delta_6)$	Dim.
$10^{-1}$	0.0067	0.01686	0.04840	0.1538	0.4541	1.2556	$1.54 \pm 0.04$
$10^0$	0.0677	0.1686	0.4840	1.5379	4.5411	12.5560	$1.54 \pm 0.04$
$10^1$	0.6772	1.6858	4.8401	15.3794	45.4112	125.5597	$1.54 \pm 0.04$
$10^2$	6.772	16.858	48.401	153.794	454.112	1255.597	$1.54 \pm 0.04$
$10^3$	67.72	168.58	484.01	1537.94	4541.12	12555.97	$1.54 \pm 0.04$

Tabla 4.7: Número de cajas de lado  $\delta$  y dimensión frente a unidades

## Referencias

El uso del cálculo empírico de la dimensión de recuento por cajas en distintos

contextos se puede ver en las obras de Mandelbrot, por ejemplo en Mandelbrot[51] y Mandelbrot[53], o en Barnsley [4], donde se trata la relación de los resultados con el rango de escalas utilizado para su cálculo, y otros métodos para su cálculo en Feder [34] y Vicsek [73], que son dos referencias en las que se trata la dimensión global de un grafo autoafín.

# Capítulo 5

## Características fractales en el Ibex35

Comenzaremos este estudio analizando la autoafinidad estadística de la serie de cierres diarios del índice Ibex35 durante la década de los noventa (desde el día 2-01-1991 hasta el día 29-12-2000), autoafinidad que se manifiesta tanto en su grafo (registros temporales del índice) como en sus incrementos.

La autoafinidad de la serie hace que nos movamos dentro del marco de los procesos autoafines a la hora de describirla desde el punto de vista de la Geometría Fractal y que podamos calcular empíricamente la dimensión de recuento por cajas de sus registros temporales.

Como el valor obtenido para la dimensión de recuento por cajas de sus registros temporales, aunque no es compatible con el valor que correspondería al movimiento browniano, no permite determinar que modelo es adecuado para describir el índice Ibex35, continuaremos nuestro estudio empírico analizando otros motivos que hacen que consideremos que el movimiento browniano no es el modelo más adecuado para describir este índice: la no normalidad de la distribución de los incrementos de la serie y su dependencia.

En la sección 5.3 veremos que la dependencia entre las distintas observaciones de la serie no es compatible con el movimiento browniano clásico y sí lo es con el movimiento browniano fraccionario, donde la distribución de los incrementos tam-

bién es la distribución normal pero los incrementos del proceso no tienen que ser independientes.

En la sección 5.4 veremos que en la distribución empírica de los incrementos logarítmicos de esta serie aparecen diferencias con la distribución normal, que es la distribución que siguen los incrementos de un movimiento browniano, y que estas diferencias son compatibles con un movimiento L-estable o proceso estable de Pareto-Lévy, donde las distribuciones que siguen los incrementos son una generalización de la normal que reciben el nombre de distribuciones estables.

Terminaremos cada una de las secciones, viendo que la correspondiente generalización del movimiento browniano clásico es un proceso autoafín, en el que la dimensión de su grafo está relacionada con el exponente de autoafinidad del proceso.

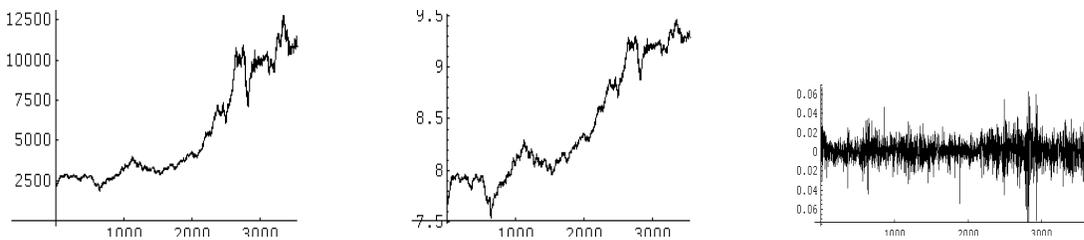


Figura 5.1: Series de cierres diarios del índice Ibex35 durante la década de los noventa (en valores reales y logaritmos) y los incrementos logarítmicos de la serie

## 5.1 Autoafinidad en el Ibex35

La característica fractal de autoafinidad estadística dentro de una serie aparece cuando reducimos la escala temporal para representar la serie en intervalos de tiempo con una duración cada menor y obtenemos grafos con una apariencia similar.

En la serie de cierres diarios del índice Ibex35, serie cuyo grafo aparece representado en la figura 5.1-a, se manifiesta cuando, eliminando las escalas de los ejes, mezclamos representaciones de la serie correspondientes a periodos de distinta duración dentro de la década estudiada y no podemos distinguir por su apariencia a

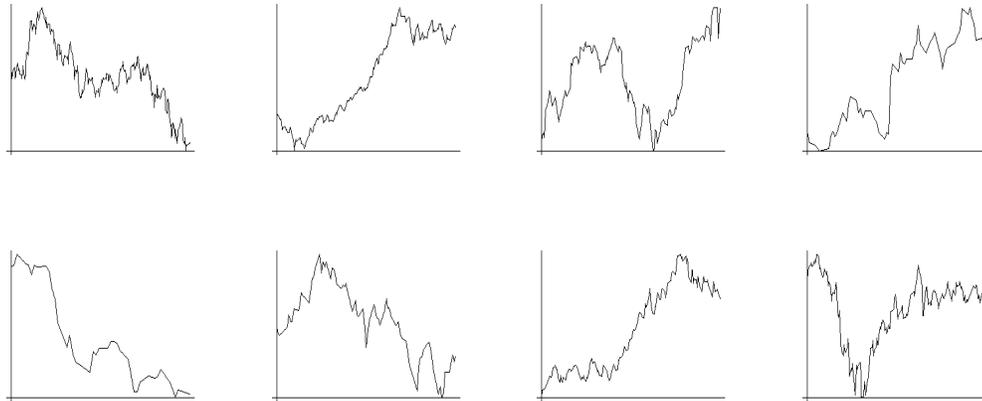


Figura 5.2: Series de cierres diarios correspondientes a distintos periodos de distinta duración dentro de la década de los noventa

que tipo de periodo corresponden (años, semestres, cuatrimestres, etcétera), figura 5.2 <sup>1</sup>.

A este respecto, como la dimensión de recuento por cajas aparece cuando recubrimos el grafo de la serie con una  $\delta$ -malla y estudiamos la evolución del número de cajas no vacías al disminuir la longitud de los lados de la malla, la presencia de autoafinidad estadística en la serie es lo que hace que tenga sentido utilizar la dimensión de recuento por cajas para el análisis de su grafo.

De esta forma, cuando consideramos una caja de longitud  $\delta$  en el eje de tiempos,  $\delta$  corresponde a la duración del intervalo de tiempo en el que analizamos el grafo de la serie y el número de cajas no vacías se convierte en una medida relativa de la escala que debemos considerar en el eje de abscisas para que este grafo sea similar al grafo de la serie en el intervalo completo.

Así, cuando estimamos el número de cajas no vacías sobre cada intervalo de duración  $\delta$  como el cociente entre el rango de la función en el intervalo y  $\delta$ , estamos estimando esta escala como el cociente entre la altura del grafo en el intervalo, rango de la función, y la longitud de la base,  $\delta$ .

Como los modelos que se proponen para describir la evolución de los precios de

---

<sup>1</sup>Los grafos corresponden a periodos con duraciones de 12, 9, 6, 3, 2, 4, 8 y 10 meses, respectivamente (en todos los casos corresponden al décimo periodo de la década).

una acción se basan en los logaritmos de estos precios, a la hora de tratar los incrementos de la serie de cierres diarios del índice, vamos a considerar sus incrementos logarítmicos.

Para analizar la distribución de estos incrementos, que aparecen representados en la figura 5.1-b, obtenemos su histograma de frecuencias relativas en el intervalo  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$  (considerando como unidades un cuarto de la desviación típica muestral  $ud = \frac{\sigma}{4} = 0.00315307$ ) y representamos a ambos lados de la gráfica sendas barras con las colas acumuladas correspondientes a los valores que aparecen en los intervalos  $(-\infty, \mu - 3\sigma)$  y  $(\mu + 3\sigma, +\infty)$ , figura 5.3-a.

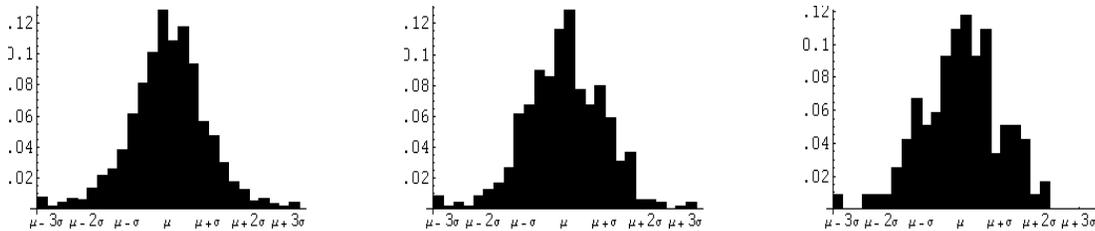


Figura 5.3: Histogramas de frecuencias relativas correspondientes a los incrementos logarítmicos de la serie de cierres diarios, semanales y mensuales del Ibex35 durante la década de los noventa

De manera análoga construimos los histogramas de frecuencias relativas correspondientes a los cierres semanales y mensuales, figura 5.3 (en cada caso las unidades son un cuarto de la desviación típica muestral).

Al analizar estos histogramas observamos que el tipo de distribución es parecido, lo que es una muestra de autoafinidad estadística, ya que en un proceso autoafín la distribución de los incrementos correspondientes a periodos de distinta duración debe mantenerse.

Esta muestra de autoafinidad estadística hace que nos movamos dentro del marco de los procesos autoafines a la hora de proponer alternativas al movimiento browniano, que, como veremos en la siguiente sección, no es compatible con la dimensión del grafo de la serie de cierres diarios del índice Ibex35.

Antes de estudiar la dimensión del grafo de la serie de cierres diarios del índice

Ibex35, queremos comentar que en el análisis de la existencia de autoafinidad estadística hemos considerado las series de incrementos de los cierres semanales y mensuales con los valores correspondientes a semanas y meses reales teniendo en cuenta los días en los que no ha habido actividad, por lo que para manejar las distintas series temporales ha sido necesario obtener previamente estos datos, obtención que no sólo es bastante laboriosa cuando, como ha sido nuestro caso, tenemos las fechas reales de estos cierres, sino que no es posible cuando sólo tenemos la serie temporal de cierres diarios.

Por este motivo se suele considerar una única serie temporal, la serie de cierres diarios, que se divide en distintos periodos sin tener en cuenta los días en los que no ha habido actividad, con lo que, por ejemplo, cada semana corresponde siempre a cinco cierres, independientemente del día al que correspondan los datos, lo que no supone una gran diferencia, sobre todo cuando hay un gran número de datos (figura 5.4).

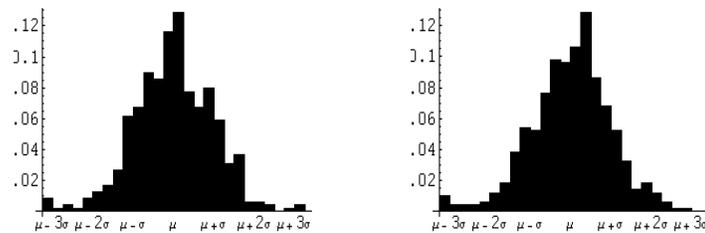


Figura 5.4: Histogramas de frecuencias relativas correspondientes a los incrementos logarítmicos de la serie de cierres semanales reales y de cinco en cinco días, durante la década de los noventa

## 5.2 Dimensión en el Ibex35

En la sección anterior hemos visto que el grafo de la serie de cierres diarios del índice Ibex35 (durante la década de los 90) presenta autoafinidad estadística y que esto hace que tenga sentido estudiar su dimensión de recuento por cajas.

En esta sección vamos a ver que el valor de la dimensión de recuento por cajas

de este grafo, que se obtiene al estudiar el comportamiento frente a  $\delta$  del número de cajas de lado  $\delta$  que aparecen como no vacías en un recubrimiento por una  $\delta$ -malla, no es compatible con la hipótesis de que la serie bajo análisis sigue un movimiento browniano.

En el capítulo anterior vimos que el número de cajas de lado  $\delta$  que aparecen como no vacías en un recubrimiento por una  $\delta$ -malla se puede calcular directamente (algoritmo 4.1) o mediante la estimación del número de cajas de lado  $\delta$  que se necesita para recubrir su grafo en cada intervalo de longitud  $\delta$  como el cociente entre el rango de la función en este intervalo y  $\delta$  (algoritmo 4.2).

En ambos casos, se considera la serie formada por los pares (día, cierre) y se calcula el número de cajas de lado  $\delta$  necesarios para recubrir el grafo teniendo en cuenta que la proposición 2.17 nos garantiza que podemos tomar los valores de  $\delta$  correspondientes a una sucesión de la forma  $\delta_k = \frac{C}{2^k}$ .

En nuestro caso tomamos como  $C$  el número de días que abarca nuestro estudio,  $C = 3649$ , y para una primera aproximación consideramos que los valores de  $\delta$  van a ir desde un primer valor  $\delta_1 = \frac{C}{2}$ , que corresponde a periodos de cinco años, hasta un valor  $\delta_9 = \frac{C}{2^9}$ , que corresponde a periodos de aproximadamente una semana (tabla 5.1).

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\delta$	1824.5	912.25	456.12	228.06	114.03	57.02	28.51	14.25	7.13
$N(\delta)$	9	21	49	129	315	687	1252	1817	2240
$\frac{R[\delta]}{\delta}$	6	16	41	112	292	748	1958	4905	11256

Tabla 5.1: Número de cajas de lado  $\delta$

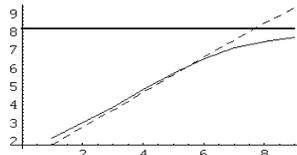


Figura 5.5: Logaritmo del número de cajas de lado  $\delta$  frente a  $k$

La dimensión de recuento por cajas se obtiene como la pendiente de la recta de regresión de los pares

$$(\log \delta^{-1}, \log N_\delta)$$

para los valores de  $\delta$  correspondientes a este rango de escalas, por lo que para ver si el rango de escalas elegido es adecuado representamos estos pares junto a la recta de regresión de los primeros valores en la figura 5.5 (figura donde hemos sustituido  $\log \delta_k^{-1}$  por  $k$  pues ambos son proporcionales).

En esta figura observamos que los valores del logaritmo del número de cajas de lado  $\delta$  se distribuyen a lo largo de una recta y comienzan a desviarse de ella en los últimos valores (trazo continuo), desviación que no se produce con los valores correspondientes a la estimación a través del rango (trazo discontinuo).

En el primer caso la desviación era de esperar ya que, como vimos en el capítulo anterior, cuando el valor de  $\delta$  se va aproximando a la unidad de medida el número de cajas no vacías se mantiene próximo al número de datos, que es el número máximo de cajas no vacías que podemos obtener.

Por este motivo para el número de cajas no vacías calculado directamente vamos a considerar como valor mínimo de  $\delta$  el correspondiente a un valor máximo de  $k = 6$ .

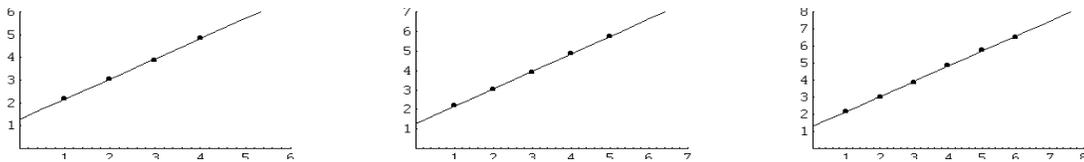


Figura 5.6: Ajuste de la dimensión obtenida para un valor mínimo  $k = 1$  y valores máximos  $k = 4, 5, 6$

Como vimos en el capítulo anterior, si consideramos distintos valores mínimos y máximos para  $k$ , tabla 5.2, los valores de la dimensión obtenidos, son cada uno de ellos adecuados al correspondiente rango de escalas (figura 5.6) y para hablar de un valor global de la dimensión tenemos que admitir un cierto margen de error.

De esta forma, para asignar a la serie una dimensión adecuada al rango de escalas en el que nos movemos, consideramos los valores de la dimensión que aparecen al

	Cálculo directo de $N(\delta)$				Estimación de $N(\delta)$			
$k_{\text{máx}}$	3	4	5	6	3	4	5	6
$k_{\text{mín}} = 1$	1.2224	1.2746	1.2877	1.2682	1.3766	1.3893	1.3899	1.3852
$k_{\text{mín}} = 2$		1.3094	1.3117	1.2748		1.3840	1.3876	1.3820
$k_{\text{mín}} = 3$			1.3422	1.2716			1.4062	1.3884
$k_{\text{mín}} = 4$				1.2065				1.3678
Media	1.2769				1.3857			
Desv. Media	0.0287				0.0066			

Tabla 5.2: Distintas dimensiones obtenidas en el rango de escalas comprendido entre  $k = 1$  y  $k = 6$

tomar los distintos valores mínimos y máximos de  $k$  cuyo cálculo comprenda un mínimo de tres puntos, tomamos como dimensión su valor medio y como error la desviación absoluta media

$$d = 1.2769 \pm 0.0287.$$

De forma análoga al caso anterior y considerando el mismo rango de escalas, correspondiente a un valor máximo de  $k = 6$ , para el número de cajas no vacías estimado a través del rango se obtiene como dimensión

$$d = 1.3857 \pm 0.0066.$$

Si dentro del rango de escalas completo consideramos valores crecientes para el máximo valor de  $k$  y procedemos de forma análoga obtenemos distintos valores de la dimensión.

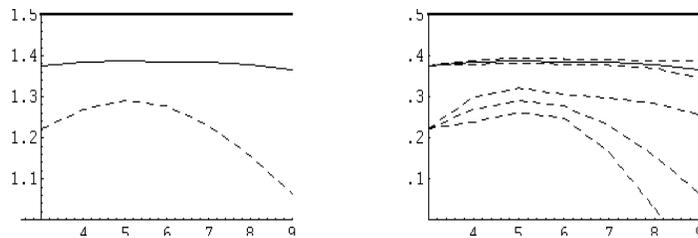


Figura 5.7: Dimensiones en el rango de escalas completo

Como al representar los valores correspondientes al número de cajas calculado directamente frente al número de cajas estimado, figura 5.7 izquierda, se observa que los valores obtenidos mediante la estimación a través del rango se mantienen estables hasta que el máximo del rango de escalas se acerca al final (trazo continuo) y que esto no sucede con los que se obtienen mediante el cálculo directo (trazo discontinuo), para obtener un valor de la dimensión válido en todo el rango de escalas tomamos como dimensión el valor correspondiente al número de cajas obtenidos mediante la estimación, donde además los márgenes de error se mantienen estables (figura 5.7 derecha),

$$d = 1.3663 \pm 0.0202.$$

Este valor de la dimensión, al igual que el resto de valores obtenidos, es inferior al correspondiente al grafo de un movimiento browniano.

En las siguientes secciones vamos a ver que esta diferencia puede deberse a dos causas: la no normalidad de la distribución de los incrementos de la serie y su dependencia.

### 5.3 Dependencia en el Ibex35

En esta sección vamos a ver que en la serie de cierres diarios del índice Ibex35 durante la década de los noventa, hay dependencia entre las distintas observaciones del proceso y que esta dependencia no casa con el modelo de movimiento browniano, pero sí lo hace con una generalización suya: el movimiento browniano fraccionario, donde la distribución de los incrementos también es la distribución normal pero los incrementos del proceso no tienen que ser independientes.

Para estudiar la dependencia en la serie de cierres diarios del índice Ibex35 durante la década de los noventa obtenemos los primeros cien valores de la función de autocorrelación empírica,  $\rho(k)$ , que, aunque son pequeños, entendemos son significativamente distintos de cero, ya que, partiendo de un primer valor  $\rho(1) = 0.091$ , para retardos de todos los órdenes aparecen valores superiores a su mitad en módulo, figura 5.8-a.

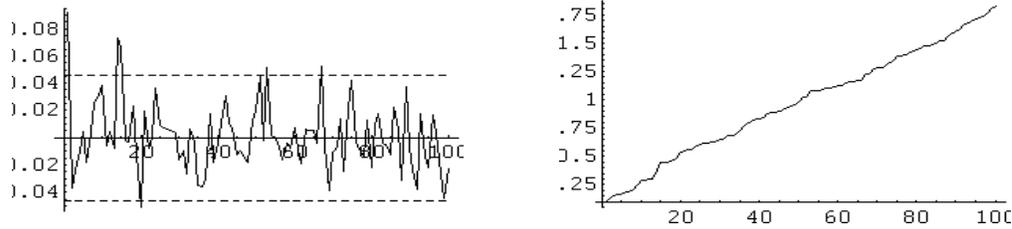


Figura 5.8: Autocorrelaciones empíricas de los incrementos logarítmicos de los cierres diarios del Ibex35 durante la década de los noventa

Estos valores de la función de autocorrelación empírica parecen indicar que la dependencia de esta serie no llega a desaparecer, más aún cuando se observa que la suma de sus valores absolutos, aunque lentamente, diverge, figura 5.8-b.

Esta presencia de dependencia en la serie de cierres diarios del Ibex35 durante la década de los noventa no es compatible con el movimiento browniano clásico y sí con el movimiento browniano fraccionario que veremos a continuación.

### 5.3.1 Movimiento browniano fraccionario

El movimiento browniano fraccionario es la generalización del movimiento browniano, al que a partir de ahora calificaremos como clásico, obtenida cuando mantenemos la normalidad de los incrementos y suprimimos su independencia.

Aunque en el movimiento browniano fraccionario la distribución de los incrementos también es la distribución normal, la varianza en vez de ser proporcional al incremento temporal,  $h$ , lo es a una potencia suya,  $h^{2H}$ , donde el exponente  $H$ ,  $0 < H < 1$ , recibe el nombre de índice del proceso y cuando toma el valor  $\frac{1}{2}$  hace que el proceso coincida con el movimiento browniano clásico, único caso donde los incrementos van a ser independientes.

Así, para definir el movimiento browniano fraccionario suprimimos la independencia de los incrementos del proceso e imponemos que su distribución sea normal con media cero y varianza proporcional a  $h^{2H}$ , donde  $h$  es el incremento temporal.

**Definición 5.1**

Un movimiento browniano fraccionario de índice  $H$ ,  $0 < H < 1$ , es un proceso estocástico  $\{B_t^H\}_{t \geq 0}$ , que notaremos  $\{\widehat{B}_t\}_{t \geq 0}$ , verificando:

1. El proceso comienza en el origen casi seguro.
2.  $\forall t \geq 0, \forall h \geq 0 \quad \widehat{B}_{t+h} - \widehat{B}_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 h^{2H})$ .

Diremos que es un movimiento browniano fraccionario estándar si  $\sigma = 1$ . ♣

La distribución de los incrementos del proceso,  $\widehat{B}_{t+h} - \widehat{B}_t$ , al igual que en el movimiento browniano clásico, no depende de  $t$  y sólo depende del incremento temporal  $h$ , con lo que los incrementos del proceso son estacionarios y, al comenzar el proceso en el origen, se tiene:

$$\widehat{B}_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t^{2H}), \quad \forall t \geq 0.$$

En la siguiente proposición vamos a ver que, al igual que en el movimiento browniano clásico, los caminos muestrales de este proceso son continuos (con probabilidad uno), motivo por el cual en la definición de movimiento browniano fraccionario se suele incluir que sus caminos muestrales son continuos con probabilidad uno:

**Proposición 5.1** Sea  $\{\widehat{B}_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano fraccionario.

El proceso tiene una versión cuyos caminos muestrales son continuos (con probabilidad uno).

**Demostración**

Si consideramos un entero positivo  $k$  tal que  $0 < \frac{1}{2k} < H$ , como  $\widehat{B}_{t+h} - \widehat{B}_t$  sigue una distribución  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 h^{2H})$ , se tiene

$$E[(\widehat{B}_{t+h} - \widehat{B}_t)^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma^{2k} h^{2Hk},$$

y, análogamente al movimiento browniano clásico, podemos aplicar el test de continuidad de Kolmogorov (teorema 3.5), para  $\alpha = 2k$  y  $\beta = 2kH - 1$ , con lo que podemos garantizar que el proceso tiene una versión cuyos caminos muestrales son continuos (con probabilidad uno). ♣

La característica fractal de invarianza de la distribución, bajo un cambio adecuado de escala en el tiempo y en el espacio, hace que podamos incluir al movimiento browniano fraccionario dentro de los procesos autoafines, generalizando el resultado obtenido para el movimiento browniano clásico.

**Proposición 5.2** Sean  $\{\widehat{B}_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano fraccionario de índice  $H$  y  $a > 0$ .

$$\widehat{B}_{at} \stackrel{d}{=} a^H \widehat{B}_t.$$

Es decir, el movimiento browniano fraccionario es un proceso autoafín con exponente de autoafinidad  $H$ .

### Demostración

Análogamente al movimiento browniano, para ver esto basta ver que  $a^{-H} \widehat{B}_{at}$  verifica la última de las propiedades de la definición, para lo que, a su vez, basta ver que coinciden su media y varianza:

- $E[a^{-H} B_{at}] = a^{-H} E[B_{at}] = 0$
- $E[(a^{-H} B_{at})^2] = E[a^{-2H} B_{at}^2] = a^{-2H} E[B_{at}^2] = a^{-2H} \sigma^2 (at)^{2H} = \sigma^2 t^{2H}$  ♣

Por ser un proceso autoafín con exponente de autoafinidad  $H$ ,  $0 < H < 1$ , y tener varianza finita,  $E[\widehat{B}_1^2] = \sigma^2 < +\infty$ , las covarianzas entre los distintos instantes del proceso están determinadas por su exponente de autoafinidad y coinciden con las de cualquier otro proceso autoafín con varianza finita y exponente de autoafinidad  $H$ , con lo que todo proceso autoafín gaussiano tiene que ser un movimiento browniano fraccionario.

Además, como las distribuciones finito dimensionales de un proceso gaussiano están determinadas por su media y sus covarianzas, cualquier proceso gaussiano con media cero y covarianzas como las de un movimiento browniano fraccionario tiene que ser un movimiento browniano fraccionario, por lo que a veces se definen los movimientos brownianos fraccionarios a través de estas covarianzas.

**Corolario 5.3** Sea  $\{\widehat{B}_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano fraccionario de índice  $H$ .

$$\text{Cov}(\widehat{B}_s, \widehat{B}_t) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |s - t|^{2H})\sigma^2.$$

**Demostración**

Análogamente al movimiento browniano, las covarianzas del proceso se obtienen directamente del corolario 3.9 al teorema 3.7. ♣

Estas covarianzas nos van a permitir analizar la dependencia, o independencia, de los incrementos del proceso, para lo que vamos a considerar dos intervalos consecutivos,  $[0, t]$  y  $[t, t + h]$ , junto con los correspondientes incrementos,  $\widehat{B}_t - \widehat{B}_0$ ,  $\widehat{B}_{t+h} - \widehat{B}_t$ .

**Proposición 5.4** *Sea  $\{\widehat{B}_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano fraccionario de índice  $H$ .*

$$\text{Cov}[(\widehat{B}_t - \widehat{B}_0), (\widehat{B}_{t+h} - \widehat{B}_t)] = \frac{1}{2} [(t+h)^{2H} - t^{2H} - h^{2H}] \sigma^2.$$

**Demostración**

Si escribimos

$$\text{Cov}[(\widehat{B}_t - \widehat{B}_0), (\widehat{B}_{t+h} - \widehat{B}_t)] = E[(\widehat{B}_t - \widehat{B}_0) (\widehat{B}_{t+h} - \widehat{B}_t)],$$

al desarrollar el producto esta expresión queda

$$\text{Cov}[\widehat{B}_t, \widehat{B}_{t+h}] - \text{Cov}[\widehat{B}_t, \widehat{B}_t] - \text{Cov}[\widehat{B}_0, \widehat{B}_{t+h}] + \text{Cov}[\widehat{B}_0, \widehat{B}_t + h]$$

y sólo queda sustituir las covarianzas por el valor que nos da el corolario 5.3. ♣

Estas covarianzas sólo valen cero cuando  $H$  es igual a  $\frac{1}{2}$ , por lo que el movimiento browniano clásico es el único movimiento browniano fraccionario donde los incrementos son independientes.

En el resto de los casos, los incrementos son dependientes y el tipo de dependencia que presentan se puede clasificar dependiendo del signo de estas covarianzas en persistencia cuando son positivas,  $H > \frac{1}{2}$ , y en anti-persistencia cuando son negativas,  $H < \frac{1}{2}$ .

Para poner de manifiesto esta dependencia, en contraposición a un camino aleatorio donde los incrementos son independientes, a veces hablaremos de **camino aleatorio sesgado**.

En un **movimiento browniano fraccionario persistente**,  $\frac{1}{2} < H < 1$ , los incrementos correspondientes a los intervalos  $[0, t]$  y  $[t, t + h]$  tienden a ser del mismo

signo, con lo que si  $\widehat{B}_t$  ha crecido en el intervalo  $[0, t]$  tiende a aumentar en el intervalo  $[t, t + h]$ , o a disminuir si ha decrecido en el otro.

En un **movimiento browniano fraccionario anti-persistente**,  $0 < H < \frac{1}{2}$ , los incrementos correspondientes a los intervalos  $[0, t]$  y  $[t, t + h]$  tienden a ser de distinto signo y si  $\widehat{B}_t$  ha crecido en el intervalo  $[0, t]$  tiende a disminuir en el intervalo  $[t, t + h]$ , o a aumentar si ha decrecido en el otro.

Para ver con más detalle este tipo de dependencia, vamos a considerar los incrementos correspondientes a intervalos de longitud entera,  $\{\widehat{\varepsilon}_n\}_{n \geq 0}$ ,

$$\widehat{\varepsilon}_n = \widehat{B}_{n+1} - \widehat{B}_n, \quad n \geq 0,$$

incrementos que como en el único caso donde son independientes, movimiento browniano clásico, forman un ruido blanco, en el resto de los casos reciben nombres del mismo tipo, **ruido negro** (del inglés “black noise”) en el movimiento browniano persistente y **ruido rosa** (del inglés “pink noise”) en el antipersistente.

La función de autocorrelación de los incrementos  $\widehat{\varepsilon}_n$  y  $\widehat{\varepsilon}_{n+k}$  se puede obtener fácilmente escribiendo la covarianza análogamente al caso anterior y es

$$\rho(k) = \frac{\text{Cov}(\widehat{\varepsilon}_n, \widehat{\varepsilon}_{n+k})}{D\widehat{\varepsilon}_n} = \frac{1}{2} [(k+1)^{2H} + (k-1)^{2H} - 2k^{2H}],$$

que cuando  $k$  tiende a infinito se comporta como

$$\rho(k) \sim H(2H-1)k^{-2(1-H)} \quad (k \rightarrow +\infty).$$

De esta forma, al ser  $1-H > 0$ , la función de autocorrelación decrece hiperbólicamente cuando  $k$  tiende a infinito y la dependencia no llega a desaparecer, salvo en los ruidos blancos, donde los incrementos son independientes.

A este respecto, cuando en un proceso la dependencia se mantiene de forma que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\rho(k)| = +\infty,$$

nos encontramos con un tipo de dependencia que recibe el nombre de **dependencia de largo recorrido** (del inglés “long-range dependence”), y que, al sumar la serie, aparece en los ruidos negros (movimiento browniano persistente), cuya correlación es

positiva, pero no en los ruidos rosas (movimiento browniano antipersistente), donde la correlación es negativa.

Este es el tipo de dependencia que presentaba la serie de cierres diarios del Ibex35 durante la década de los noventa, por tanto, aunque no es compatible con el movimiento browniano clásico, si lo es con el movimiento browniano fraccionario persistente.

Para ver si la dimensión del grafo de la serie es compatible con este proceso, vamos a determinar esta dimensión utilizando el mismo procedimiento que en el movimiento browniano clásico <sup>2</sup>.

**Proposición 5.5** *Sea  $\{\widehat{B}_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano fraccionario de índice  $H$ .*

*El grafo en el intervalo  $[0, 1]$ ,  $\{(t, \widehat{B}_t)/t \in [0, 1]\}$ , con probabilidad uno, tiene dimensión de recuento por cajas*

$$d = 2 - H \quad (1 < d < 2).$$

### Demostración (cálculo)

Para determinar la dimensión de recuento por cajas de este grafo, al igual que en el movimiento browniano clásico, vamos a calcular el número de cuadrados de una  $\delta$ -malla que intersecan al grafo sobre el intervalo  $[0, 1]$ , estimando el rango de la función en un intervalo de longitud  $\delta$  como el valor esperado del incremento absoluto de  $\widehat{B}_t$  en este intervalo.

Como los incrementos del proceso son estacionarios y el proceso comienza en el origen, este valor es igual al valor esperado del incremento absoluto de  $\widehat{B}_t$  en el intervalo  $[0, \delta]$ ,  $E[|\widehat{B}_\delta|]$ , con lo que el rango de la función en un intervalo de longitud  $\delta$  no depende del intervalo considerado y podemos escribirlo como  $R_f[\delta]$  con

$$R_f[\delta] \approx E[|\widehat{B}_\delta|].$$

Así, como el número de cuadrados de la  $\delta$ -malla que intersecan al grafo sobre un intervalo de longitud  $\delta$  se puede estimar dividiendo por  $\delta$  el rango de la función en

---

<sup>2</sup>Una demostración formal de este resultado, donde además se ve que la dimensión de recuento por cajas coincide con la dimensión de Hausdorff, se puede encontrar en Falconer [29] pp. 246-247.

el intervalo y en el intervalo  $[0, 1]$  hay  $\frac{1}{\delta}$  subintervalos de longitud  $\delta$ , se tiene

$$N_\delta[0, 1] = \frac{1}{\delta} N_\delta[i\delta, (1+i)\delta] \approx \frac{1}{\delta} \frac{R_f[\delta]}{\delta} = \delta^{-2} R_f[\delta].$$

Por último, para determinar el comportamiento con respecto a  $\delta$  de este rango utilizamos que el proceso es autoafín con exponente de autoafinidad  $H$ ,

$$E[|\widehat{B}_\delta|] = E[|\delta^H B_1|] = \delta^H E[|\widehat{B}_1|], \text{ con } E[|\widehat{B}_1|] < +\infty,$$

con lo que se tiene

$$R_f[\delta] \propto \delta^H.$$

En resumen, se tiene:

$$N_\delta = N_\delta[0, 1] \approx \delta^{-2} R_f[\delta] \approx \delta^{-2} E[|\widehat{B}_\delta|] \propto \delta^{-2} \delta^H = \delta^{H-2},$$

con lo que la dimensión de recuento por cajas es:

$$d = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta)}{-\log(\delta)} = 2 - H. \quad \clubsuit$$

En la siguiente sección vamos a confirmar la compatibilidad del movimiento browniano fraccionario utilizando una de las técnicas propuestas por Mandelbrot para el estudio de series temporales dentro de los procesos autoafines: el análisis R/S.

### 5.3.2 Análisis R/S

El **análisis R/S** (del inglés “rescaled range analysis”) es una de las herramientas fundamentales dentro de los procesos autoafines, para estudiar series temporales de precios con un gran número de datos y se basa en la relación que existe entre el rango ajustado estandarizado y el número de datos utilizado para su cálculo.

Si consideramos un proceso  $\{x_k\}_{k \geq 1}$  con incrementos  $\{y_k\}_{k \geq 1}$ ,

$$x_k = \sum_{i=1}^k y_i,$$

para cada  $n$ , el incremento medio de  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , es la media de los incrementos,

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

y el rango ajustado es la diferencia entre la máxima y la mínima desviación de los valores del proceso,  $x_k$ , respecto al incremento medio acumulado correspondiente a  $k$  periodos,  $k\bar{y}$ ,

$$R_n = \max\{z_1, \dots, z_n\} - \min\{z_1, \dots, z_n\}, \quad \text{con } z_k = x_k - k\bar{y} = \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y}).$$

El rango ajustado se estandariza dividiéndolo por la desviación típica de los incrementos,

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2,$$

obteniendo el **rango ajustado estandarizado**

$$(R/S)_n = \frac{R_n}{S_n}.$$

En el movimiento browniano, para valores grandes de  $n$ , el valor de  $(R/S)_n$  es proporcional a  $n^{\frac{1}{2}}$ , que corresponde a una relación más general en la que el valor de  $(R/S)_n$  aumenta con  $n$  según la ley

$$(R/S)_n \approx cn^J \quad (c \text{ constante}),$$

donde  $J$  recibe el nombre de **exponente de Hurst**<sup>3</sup> y la relación se puede escribir tomando logaritmos como

$$\log(R/S)_n \approx \log(c) + J \log(n).$$

Si consideramos una reordenación aleatoria de los incrementos de la serie,  $\{\tilde{y}_k\}_{k \geq 1}$ , obtenemos un nuevo proceso  $\{\tilde{x}_k\}_{k \geq 1}$ ,

$$\tilde{x}_k = \sum_{i=1}^k \tilde{y}_i.$$

Cuando los procesos  $\{x_k\}_{k \geq 1}$  y  $\{\tilde{x}_k\}_{k \geq 1}$  son autoafines, el exponente de Hurst,  $J$ , está relacionado con el exponente de autoafinidad del proceso,  $H$ , y el exponente

---

<sup>3</sup>La distinción entre el exponente de autoafinidad del proceso y el exponente de Hurst es reciente, Mandelbrot [53] pp. 161-165, y hasta hace poco se denotaba por  $H$

de autoafinidad del nuevo proceso,  $L$ , que recibe el nombre de exponente de autoafinidad latente y que, en general, no tienen por que coincidir con el exponente de autoafinidad del proceso original:

$$J = H - L + \frac{1}{2}.$$

Al igual que en el movimiento browniano, en un proceso con incrementos independientes el exponente de Hurst es  $J = \frac{1}{2}$ , ya que los exponentes de autoafinidad  $H$  y  $L$  coinciden <sup>4</sup>, pero esto no es cierto en general, ya que en el movimiento browniano fraccionario el exponente de Hurst coincide con el exponente de autoafinidad del proceso <sup>5</sup>, y éste puede ser distinto de  $\frac{1}{2}$ .

Esto hace que si en una serie el exponente de Hurst es distinto de  $\frac{1}{2}$  se diga que la serie presenta **R/S-dependencia** y que se suponga que la dependencia que muestra su análisis sea la misma que la que aparece en el movimiento browniano fraccionario <sup>6</sup>.

Para el cálculo empírico del valor del exponente de Hurst consideramos una serie temporal

$$\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$$

y para cada  $n$  tomamos como valor de  $(R/S)_n$  la media de los valores del rango ajustado y estandarizado de cada una de las subseries obtenidas al dividir la serie en  $m$  series de longitud  $\mathbf{n}$ , con  $mn \leq N$ ,

$$\{x_1, \dots, x_n\}, \{x_{n+1}, \dots, x_{2n}\}, \dots, \{x_{(m-1)n+1}, \dots, x_{mn}\},$$

para lo que, eventualmente, se desprecian los últimos datos.

Como estamos interesados en el comportamiento de  $(R/S)_n$  para valores grandes de  $n$ , consideramos un valor mínimo para el número de datos de cada subserie,  $n_{\min}$ .

<sup>4</sup>Este resultado, junto con los anteriores, se pueden ver en Mandelbrot [53], pp 155-171.

<sup>5</sup>Feder [34] pp. 178-180.

<sup>6</sup>En Lo [44] se discute este tema en profundidad y se propone una modificación del análisis R/S para el estudio de la dependencia.

Por otra parte, a la hora de calcular la media también debemos de tener un número suficiente de subseries, para lo que fijamos un valor mínimo de divisiones,  $k_{\min}$ , o, equivalentemente, un valor máximo para  $n$ ,  $n_{\max}$ .

Para obtener el exponente de Hurst de la serie,  $J$ , calculamos los valores de  $(R/S)_n$  para los valores de  $n$  comprendidos entre  $n_{\min}$  y  $n_{\max}$ , los ajustamos a la ecuación

$$\log(R/S)_n = \log(c) + J \log(n)$$

mediante la recta que aproxima, en el sentido de los mínimos cuadrados, a los puntos

$$(\log n, \log(R/S)_n) \quad n_{\min} \leq n \leq n_{\max}$$

y tomamos como exponente de Hurst de la serie la pendiente de esta recta.

El procedimiento completo para el cálculo del exponente de Hurst se puede ver en el algoritmo 5.1, donde el cálculo de los valores de  $(R/S)_n$  para cada una de las subseries lo hemos separado en el algoritmo 5.2.

### Algoritmo 5.1

#### ENTRADAS:

- Lista con la serie temporal:  $l = \{x_1, \dots, x_N\}$
- Número mínimo de datos en cada subserie:  $n_{\min}$
- Número máximo de datos en cada subserie:  $n_{\max}$

#### PASOS:

**Desde**  $n = n_{\min}$

**Sea**  $m = \text{parte entera } \frac{N}{n}$

**Sean**  $L_1 = \{x_1, \dots, x_n\}, \dots, L_m = \{x_{(m-1)n+1}, \dots, x_{mn}\}$ .

**Desde**  $j = 1$

**Sea**  $(R/S)_n^j$  el rango ajustado estandarizado de  $L_j$

**Hasta**  $j = m$

**Sea**  $(R/S)_n = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (R/S)_n^j$

**Hasta**  $n = n_{\max}$

#### SALIDA:

- Pendiente recta mínimos cuadrados  $(\log n, \log(R/S)_n) \quad n_{\min} \leq n \leq n_{\max}$ . ♣

**Algoritmo 5.2****ENTRADAS:**

- Lista  $L_j = \{x_1, \dots, x_n\}$

**PASOS:**

**Sea**  $x_0 = 0$

**Cálculo** de los incrementos  $y_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$

**Cálculo** de la media de los incrementos  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$

**Cálculo** de la desviación típica de los incrementos  $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$

**Cálculo** de las desviaciones de la media acumuladas  $k = 1, \dots, n$

$$z_k = \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})$$

**Cálculo** del rango ajustado  $R_n = \max\{z_1, \dots, z_n\} - \min\{z_1, \dots, z_n\}$

**SALIDA:**

- Rango ajustado y estandarizado de  $L_j$ ,  $(R/S)_n^j = \frac{R_n}{S_n}$  ♣

Como en el algoritmo 5.1 se toman todos los valores de  $n$  comprendidos entre  $n_{\min}$  y  $n_{\max}$ , y estos valores no tienen por que ser divisores del número de datos, los datos despreciados para cada valor de  $n$  son distintos.

Esto hace que en vez de utilizar todos los valores de  $n$ , sea mejor buscar un valor  $N'$ , con  $N' \leq N$ , que admitiendo al menos  $k_{\min}$  divisiones con  $n_{\min}$  datos en cada una de ellas, al considerar sólo estas divisiones, los datos que despreciamos sean siempre los mismos (bien los últimos  $N - N'$  datos o bien los primeros  $N - N'$  datos) <sup>7</sup>.

En el caso particular de la serie Ibex35 <sup>8</sup>, fijamos el número mínimo de datos que aparece en cada subserie considerando como agrupamiento mínimo la semana, que

<sup>7</sup>Este es el procedimiento que hemos implementado en el entorno de cálculo MATHEMATICA 3.0. para el cálculo empírico del exponente de Hurst (sección A.3 del apéndice).

<sup>8</sup>Los resultados que aparecen son un extracto de la aplicación al índice Ibex35 del análisis R/S, que realizamos junto a J. Busto y L. Delgado en Busto, Delgado, y Muñoz [12].

corresponde a un número mínimo de cinco datos, y, a la hora de calcular la media, imponemos que debemos tener al menos diez subseries, lo que, al tener 2.495 datos, equivale a considerar un agrupamiento máximo de 249 datos, que es el agrupamiento que corresponde aproximadamente a un año.

Una vez fijados estos valores, una primera opción sería considerar sólo los valores de  $n$  que sean divisores enteros del número de datos. Sin embargo, para poder estudiar el comportamiento de  $(R/S)_n$ , en nuestro caso no es posible obtener un número suficiente de divisores y, para que se puedan utilizar 14 valores de  $n$ , despreciamos los últimos 11 datos de la serie (0.44% del total de datos).

$n$	6	9	12	18	23	27	36
$(R/S)_n$	2.23348	2.91869	3.58578	4.52867	5.2735	5.67293	6.63608
$n$	46	54	69	92	108	138	207
$(R/S)_n$	7.92991	8.84838	10.1669	11.8877	13.1773	16.466	19.1048

Tabla 5.3: Valores del rango ajustado y estandarizado correspondientes a los 2484 primeros datos de la serie de incrementos logarítmicos del Ibex35

Una vez calculados los correspondientes valores  $(R/S)_n$ , tabla 5.3, los logaritmos de los valores  $(R/S)_n$  se representan gráficamente frente a los logaritmos de  $n$  junto a la recta de regresión (figura 5.9).

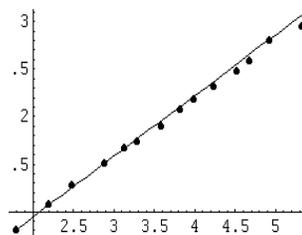


Figura 5.9: Logaritmos de los valores “ $(R/S)_n$ ” frente a los logaritmos de  $n$  y recta de regresión (tabla 5.3)

Los valores del exponente de Hurst correspondientes a un número creciente de puntos, que oscilan entre un valor máximo “ $H$ ”=0.68 y un valor mínimo “ $H$ ”=0.61,

son compatibles con el movimiento browniano fraccionario y en todos los casos son superiores al valor 0.5 que correspondería al movimiento browniano clásico.

## 5.4 No normalidad en el Ibex35

Como en un proceso autoafín las covarianzas entre los distintos instantes del proceso sólo tienen sentido cuando la varianza es finita y éstas únicamente dependen del exponente de autoafinidad del proceso, el movimiento browniano fraccionario abarca todos los casos posibles de estas covarianzas y podemos describir la dependencia de la serie tomándolo como modelo.

Sin embargo, la dependencia entre las distintas observaciones de la serie no es la única razón por la que el movimiento browniano clásico no es adecuado para describir la evolución de la serie de cierres diarios del índice Ibex35 durante la década de los noventa, ya que en la distribución empírica de los incrementos logarítmicos de esta serie (diarios, semanales y mensuales), aparecen diferencias con la distribución normal, que es la distribución que siguen los incrementos de un movimiento browniano clásico.

Como estas diferencias tampoco se pueden explicar mediante el movimiento browniano fraccionario, pues sus incrementos también siguen una distribución normal, ni el movimiento browniano fraccionario es la única generalización del movimiento browniano clásico cuyo grafo tiene una dimensión compatible con la dimensión que hemos obtenido para el grafo de la serie, vamos a considerar un proceso autoafín con incrementos independientes esencialmente distinto al movimiento browniano clásico: el movimiento L-estable o proceso estable de Pareto-Lévy; que es un proceso autoafín donde las distribuciones que siguen los incrementos son una generalización de la normal y reciben el nombre de distribuciones estables.

Las diferencias de la distribución empírica de los incrementos logaritmos de la serie (diarios, semanales y mensuales) con la distribución que correspondería a una normal aparecen cuando calculamos los principales estadísticos descriptivos de las

	Cierres diarios	Cierres semanales	Cierres mensuales
Número de datos	2495	491	119
Máximo	0.066950	0.135849	0.149711
Mínimo	-0.073367	-0.116311	-0.238774
Media	0.000568	0.002849	0.011445
Desviación típica	0.012612	0.0278155	0.062724
Asimetría	-0.252056	-0.102856	-0.455025
Curtosis	3.314135	2.127370	1.13757

Tabla 5.4: Principales estadísticos descriptivos de las series de incrementos logarítmicos de los cierres diarios, semanales y mensuales del Ibex35 durante la década de los noventa

distintas series <sup>9</sup>, tabla 5.4, y representamos los histogramas de frecuencias relativas obtenidos en la primera sección frente a una normal con la media y varianza correspondiente a cada caso.

Así, al analizar la representación correspondiente a los incrementos logarítmicos de los cierres diarios (figura 5.10 izquierda) y sus estadísticos descriptivos se observa que:

- Hay un fuerte nivel de apuntamiento con una curtosis muestral,  $\widehat{k}_n = 3.314135$ , marcadamente positiva (distribución empírica leptocúrtica).
- La distribución está ligeramente sesgada a la izquierda, pues su coeficiente de asimetría muestral,  $\widehat{\beta}_n = -0.252056$ , es negativo pero pequeño.

---

<sup>9</sup>Para una serie  $\{h_n\}_{n \geq 1}$  estos estadísticos son:

- media muestral  $\mu = \widehat{h}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i$ ,
- varianza muestral  $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h_i - \overline{h_n})^2$ ,
- curtosis muestral,  $\widehat{k}_n = \frac{\widehat{m}_4}{\widehat{m}_2^2} - 3$ ,
- coeficiente de asimetría muestral,  $\widehat{\beta}_n = \frac{\sqrt{n}\widehat{m}_3}{\sqrt{\widehat{m}_2^3}}$ ,

donde  $\widehat{m}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h_i - \overline{h_n})^k$  es el momento absoluto muestral de orden  $k$ .

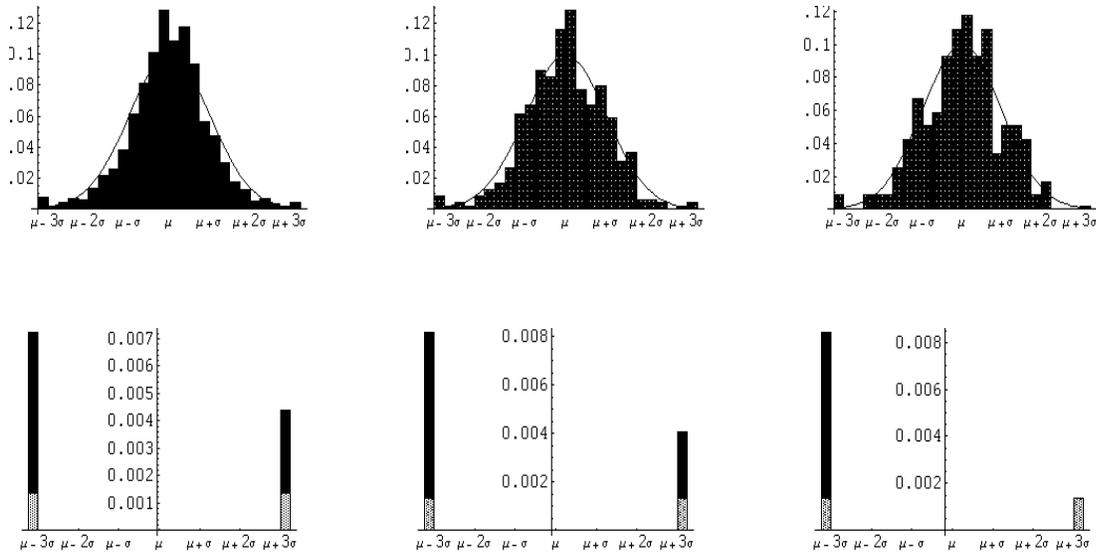


Figura 5.10: Distribución empírica de los incrementos logarítmicos de los cierres diarios, semanales y mensuales del Ibex35 durante la década de los noventa del Ibex35 frente los correspondientes a una normal

- Las colas de la distribución empírica son sensiblemente mayores que las correspondientes a la normal.

Estas discrepancias se repiten en la serie correspondiente a los cierres semanales (figura 5.10 centro): gran parte de la distribución se vuelve a agrupar en torno a la media y el valor de la curtosis muestral, aunque es menor que el correspondiente a la serie de incrementos diarios, también es marcadamente positivo, con lo que la distribución empírica sigue siendo leptocúrtica.

Además, esta distribución también está sesgada a la izquierda, aunque en este caso el valor del coeficiente de asimetría muestral es todavía más pequeño que en la serie de incrementos diarios y, por último, las colas de la distribución empírica también son sensiblemente mayores que las correspondientes a la normal.

Considerando los cierres mensuales se pueden observar los mismos fenómenos, salvo que la distribución está más sesgada a la izquierda que en los casos anteriores y en la cola derecha no aparecen valores más allá de la tercera desviación típica (figura 5.10 derecha).

Para analizar el decrecimiento de las colas de la distribución empírica vamos a comparar los valores que aparecen al aumentar  $k$  en los intervalos  $(-\infty, \mu - k\sigma/ud)$  y  $(\mu + k\sigma/ud, +\infty)$ , colas acumuladas izquierda y derecha respectivamente, con los valores de una normal.

En este análisis sólo vamos a considerar las colas acumuladas correspondientes a los cierres semanales y diarios, considerando con cierta prevención el correspondiente a los cierres semanales, ya que cuando consideramos cierres correspondientes a periodos grandes, al no haber datos entre alguno de los puntos de cálculo, empieza a notarse la escasez de datos en los valores de las colas empíricas.

En ambos casos vamos a comparar las colas acumuladas con las colas correspondientes a una normal con la misma media y varianza fijando como unidades un cuarto de la desviación típica muestral (figura 5.11).

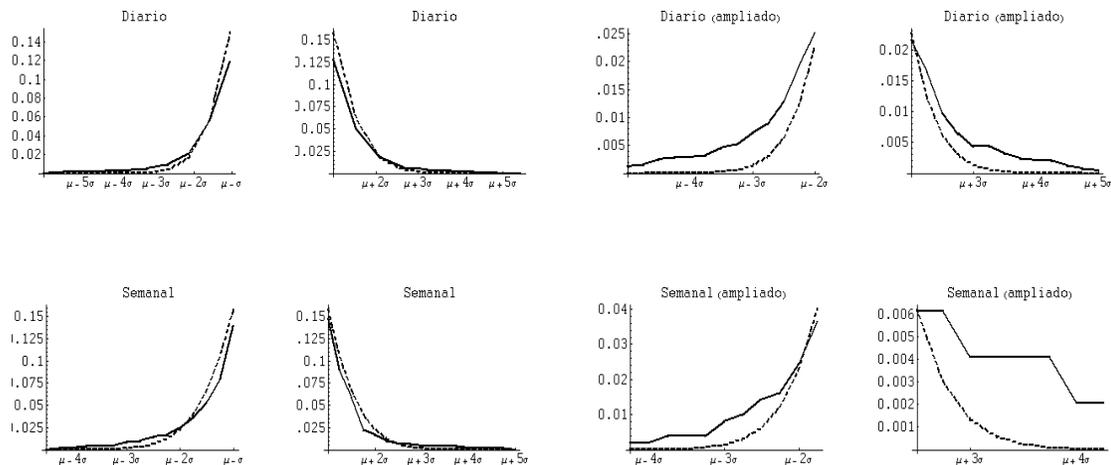


Figura 5.11: Distribución empírica de las colas acumuladas de los incrementos logarítmicos de los cierres diarios y semanales del Ibex35 durante la década de los noventa frente los correspondientes a una normal (trazo discontinuo)

En las colas de la izquierda correspondientes a los cierres diarios, podemos observar que en la primera desviación típica la cola empírica es menor que la cola de la normal (12.42% y 15.86% de los datos respectivamente) y se mantiene por debajo hasta que nos encontramos entre 1.75 y 2 veces la desviación típica, donde la cola empírica es mayor que la de la normal (2.52% y 2.27% de los datos respectivamente).

Desde la segunda desviación típica hasta que desaparece en la sexta desviación típica, es la cola empírica la que se mantiene por encima de la cola correspondiente a la normal, con diferencias en las desviaciones típicas tercera (0.72% y 0.13% de los datos respectivamente), cuarta (0.28% y 0.0032% de los datos respectivamente), y quinta (0.12% y 0.000029% de los datos respectivamente), que corresponden a la aparición de un número de datos en las colas empíricas superior al que sería de esperar (18, 7 y 3 datos respectivamente).

El comportamiento de las colas de la derecha es similar y la cola empírica comienza a ser mayor que la cola correspondiente a la normal aproximadamente a partir de la segunda desviación típica, manteniéndose esta diferencia hasta que nos quedamos sin datos al llegar a 5.5 veces la desviación típica.

En el caso correspondiente a los cierres semanales, en la cola izquierda se observa el mismo comportamiento. Así, aunque algo más parecidas que en los cierres diarios, la cola empírica también es menor que la cola de la normal en la primera desviación típica (14.05% y 15.86% de los datos respectivamente), manteniéndose también por debajo hasta que nos encontramos entre 1.75 y 2 veces la desviación típica, desde donde la cola empírica es mayor que la de la normal (2.44% y 2.27% de los datos respectivamente) hasta que desaparece, en este caso en 4.5 veces la desviación típica.

En las colas de la derecha también la parte final de la cola empírica es mayor que la cola correspondiente a la normal, pero en este caso el número de datos que forman la cola empírica es pequeño y disminuye a saltos. Así, la cola empírica supera la cola correspondiente a la normal aproximadamente en 2.5 veces la desviación típica donde tenemos sólo tres datos, aproximadamente el 0.60% de la distribución, y desaparece en la quinta desviación típica, cambiando sólo en la tercera y cuarta desviaciones típicas y siempre por un único dato, que representa el 0.20% de la distribución.

En todos los casos, las colas empíricas son mayores que las colas correspondientes a la distribución normal con diferencias que, salvo quizás en el último caso analizado, parecen lo bastante significativas como para pensar que la distribución normal no es el modelo adecuado para nuestra serie y, por tanto, el movimiento browniano tampoco.

Por otra parte, si consideramos la serie de cierres diarios y la dividimos en distintos periodos, sin tener en cuenta los días en los que no ha habido actividad, podemos analizar el comportamiento de los principales parámetros de la serie con respecto a la escala temporal sin más que aumentar el número de cierres considerados en cada periodo.

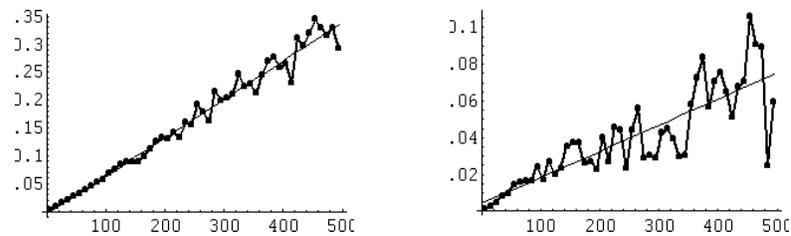


Figura 5.12: Media y varianza muestral de las series de incrementos logarítmicos correspondientes a cierres con distintos periodos frente al número de días que forman cada uno de los periodos

En particular, si representamos la media de las distintas series que se obtienen al considerar periodos cada vez mayores frente al número de días que forman cada periodo, se observa que estas medias muestran una tendencia lineal, agrupándose en torno a una recta de la que, salvo en la parte final, no se desvían demasiado (figura 5.12).

Como la pendiente de la recta de regresión obtenida considerando los primeros cincuenta periodos, 0.000608, es parecida a la media de la serie original, 0.000568, este comportamiento parece indicar que sería posible representar la serie como la suma de una tendencia y un proceso con media cero.

Sin embargo, el comportamiento de la varianza es errático, lo que no sucedería si este proceso fuese un movimiento browniano, ya que, en este caso, la varianza debería ser proporcional al incremento temporal, movimiento browniano clásico, o a una potencia suya, movimiento browniano fraccionario (figura 5.12).

Estos fenómenos pueden explicarse admitiendo como distribución de los incrementos logarítmicos una distribución estable distinta a la normal, ya que, como veremos a continuación, las distribuciones estables no normales tienen varianza in-

finita, no tienen por que ser simétricas, su distribución se agrupa en torno a la media y las colas son mayores que las correspondientes a la normal.

### 5.4.1 Distribuciones estables

Para definir las distribuciones estables vamos a considerar que no incluyen entre ellas a las variables aleatorias degeneradas <sup>10</sup> y las vamos a caracterizar por el hecho de que la suma ponderada de dos variables aleatorias estables e independientes es, salvo centrado y escala, una variable aleatoria estable:

**Definición 5.2** *Sea  $X$  una variable aleatoria no degenerada.*

$X$  es **estable**, o  $X$  tiene una **distribución estable**, si:

Para cada dos copias independientes de  $X$ ,  $X_1$  y  $X_2$ , y cada dos constantes positivas,  $a$  y  $b$ , existen constantes de normalización,  $c > 0$ , y centrado,  $d$ , tales que

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d.$$

Cuando  $d$  es igual a cero, diremos que  $X$  es estrictamente estable. ♣

Además la constante de normalización verifica la relación subsidiaria <sup>11</sup>

$$c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$$

para un único  $\alpha \in (0, 2]$ , cuyo valor es independiente tanto de  $a$  como de  $b$ , y que recibe el nombre de **exponente característico de la distribución**.

Este exponente característico va a determinar muchas de sus propiedades, por lo que cuando se quiere explicitar el valor de  $\alpha$  se dice que  $X$  es  **$\alpha$ -estable**.

En particular, la distribución normal es 2-estable, ya que, si  $X$  sigue una distribución normal,  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , y  $X_1, X_2$  son dos copias independientes de  $X$ , se tiene

$$aX_1 + bX_2 \sim \mathcal{N}((a+b)\mu, (a^2 + b^2)\sigma^2) \quad \text{y} \quad cX + d \sim \mathcal{N}(d + c\mu, c^2\sigma^2),$$

---

<sup>10</sup>Una variable aleatoria,  $X$ , es **no degenerada** si está concentrada en un punto, es decir,

$$\exists k \in \mathbb{R} : P(X = k) = 1.$$

<sup>11</sup>Mandelbrot [47]

con lo que  $aX_1 + bX_2$  sigue la misma distribución que  $cX + d$  y la constante de escala verifica  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Además, como la constante de centrado es  $d = (a + b)\mu - c\mu$ , la distribución normal es estrictamente estable si y sólo si tiene media cero.

Por otra parte, el papel que las distribuciones estables tienen en el límite de las sumas de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas también generaliza a la normal, que es el único límite posible cuando la varianza es finita, ya que, en todos los casos este límite tiene que ser una distribución estable.

**Proposición 5.6** *Sea  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.*

*Si existen constantes de normalización,  $c_n > 0$ , y centrado,  $b_n$ , tales que*

$$\frac{1}{c_n}(X_1 + \cdots + X_n - b_n) \xrightarrow{p} X \quad (\text{con } X \text{ no degenerada}),$$

*$X$  tiene una distribución estable.*



En el sentido contrario de la implicación se tiene aún más <sup>12</sup>:

**Proposición 5.7** *Sea  $X$  una variable aleatoria  $\alpha$ -estable (no degenerada).*

*Si  $X_1, \dots, X_n$  son copias independientes de  $X$ , existen constantes de normalización,  $c_n > 0$ , y centrado,  $b_n$ , ( $b_n = 0$  para  $X$  estrictamente estable) tales que*

$$\frac{1}{c_n}(X_1 + \cdots + X_n - b_n) \stackrel{d}{=} X.$$

*Además, las constantes de normalización verifican*

$$c_n = n^{\frac{1}{\alpha}}.$$



A este respecto, se dice que la distribución de una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas,  $\{X_n\}$ , pertenece al **dominio de**

---

<sup>12</sup>La primera parte de la proposición aparece, junto con la de la proposición anterior, en Petrov [64] pp. 88-89 y la segunda en Feller [37] pp. 206-207, donde se toma como definición de distribución estable la primera parte de la proposición.

**atracción** de la distribución de una variable aleatoria  $X$ , si existen constantes de normalización,  $c_n > 0$ , y centrado,  $b_n$ , tales que

$$\frac{1}{c_n}(X_1 + \cdots + X_n - b_n) \xrightarrow{d} X$$

con lo que los dos últimos resultados se pueden enunciar

### Teorema 5.8

*Una distribución es estable si y sólo si posee un dominio de atracción.* ♣

Las distribuciones estables tienen el inconveniente de no tener una expresión para su función de densidad, salvo en casos muy concretos, con lo que es necesario describirlas mediante su función característica, cuya expresión nos la da la siguiente proposición <sup>13</sup>:

**Teorema 5.9** *Sea  $X$  una variable aleatoria no degenerada.*

*$X$  es estable si y sólo si su función característica admite la representación*

$$\varphi(t) = \exp \left( i\mu t - \gamma |t|^\alpha \left[ 1 + \beta \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha) \right] \right) \quad \text{con } \omega(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\frac{\alpha\pi}{2}) & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \ln(|t|) & \alpha = 1 \end{cases}$$

donde los parámetros dan lugar a las distintas distribuciones estables, que notaremos por  $S_{\alpha, \beta}(\mu, \gamma)$ , y son:

- $\alpha \in (0, 2]$  (exponente característico),
- $\beta \in [-1, 1]$  (parámetro de asimetría),
- $\mu \in (-\infty, +\infty)$  (parámetro de localización)
- $\gamma \in [0, +\infty)$  (parámetro de escala)

Además, salvo para  $\alpha = 1$ , donde la distribución es estrictamente estable si y sólo si  $\beta = 0$ , la distribución es estrictamente estable si y sólo si  $\mu = 0$ . ♣

---

<sup>13</sup>Petrov [64] pp. 90 y Fama [31]

Como la función característica de una suma de variables aleatorias independientes es la suma de las funciones características de los sumandos, una consecuencia inmediata de esta expresión es que: la suma de variables aleatorias estables independientes con el mismo exponente característico también es una variable aleatoria estable con el mismo exponente característico.

En particular, si todas las distribuciones tienen los mismos parámetros de asimetría, localización y escala, el parámetro de asimetría no cambia y los parámetros de localización y escala quedan multiplicados por  $n$ , con lo que, salvo por localización y escala, la distribución de la suma de variables aleatorias estables independientes e idénticamente distribuidas tiene la misma distribución que cada uno de los sumandos.

**Corolario 5.10** Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias (no degeneradas)  $\alpha$ -estables e independientes, con  $X_i \stackrel{d}{=} S_{\alpha, \beta_i}(\mu_i, \gamma_i)$   $1 \leq i \leq n$ .

$$X_1 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} S_{\alpha, \hat{\beta}}(\hat{\mu}, \hat{\gamma}), \text{ con}$$

$$\hat{\mu} = \mu_1 + \dots + \mu_n \quad \hat{\gamma} = \gamma_1 + \dots + \gamma_n \quad \hat{\beta} = \frac{\beta_1 \gamma_1 + \dots + \beta_n \gamma_n}{\gamma_1 + \dots + \gamma_n}$$

Además, si  $\beta_i = \beta$ ,  $\mu_i = \mu$ ,  $\gamma_i = \gamma \forall i = 1, \dots, n$ :

$$X_1 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} S_{\alpha, \beta}(n\mu, n\gamma)$$



Aunque en general las distribuciones estables no tienen una expresión para su función de densidad, para  $\alpha = 2$ , donde se toma  $\beta = 0$ , la función característica resultante

$$\varphi(t) = e^{i\mu t - \gamma t^2}$$

corresponde una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $2\gamma$ , que sí tiene una expresión para su función de densidad.

Otro caso donde la distribución tiene una expresión para su función de densidad corresponde a  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0$ , donde la función característica que se obtiene,

$$\varphi(t) = e^{i\mu t - \gamma |t|},$$

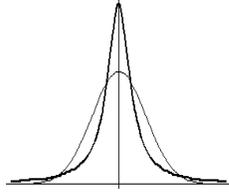


Figura 5.13:  $S_{2,0}(0, \frac{1}{2}) = Normal[0, 1]$  vs.  $S_{1,0}(0, \frac{1}{2}) = Cauchy[0, \frac{1}{2}]$

es la de una distribución de Cauchy con mediana  $\mu$  y parámetro de escala  $\gamma$ .

Como en la distribución de Cauchy ( $\alpha = 1$ ), al contrario que en la distribución normal ( $\alpha = 2$ ), la esperanza y varianza son infinitas, ambas distribuciones son los casos límite para la finitud de la esperanza y de la varianza <sup>14</sup>:

- si  $\alpha \in (0, 1]$  la distribución tiene media y varianza infinita,
- si  $\alpha \in (1, 2)$  la distribución tiene media finita pero varianza infinita,
- si  $\alpha = 2$  la distribución tiene tanto media como varianza finita.

En todos los casos, el parámetro de asimetría,  $\beta$ , como su nombre indica, determina el grado de asimetría de la distribución, de forma que la distribución sólo es simétrica para  $\beta = 0$  (motivo por el que se toma el valor  $\beta = 0$  en la distribución normal) y para  $\beta \neq 0$  es tanto más asimétrica cuanto mayor es el valor absoluto de  $\beta$ , estando sesgada a la derecha para  $\beta > 0$  y a la izquierda para  $\beta < 0$ .

El parámetro de localización de la distribución,  $\mu$ , es en cierto sentido, la media de la distribución, ya que, cuando la media es finita,  $\alpha > 1$ , es realmente esta media.

Sin embargo, cuando la media es infinita,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\mu$  simplemente es un parámetro que describe la localización de la distribución y que en el caso particular de una distribución simétrica ( $\beta = 0$ ) corresponde a la mediana.

El parámetro de escala de la distribución,  $\gamma$ , como su nombre indica, es un parámetro finito que, análogamente a la distribución de Cauchy, define la escala de la distribución y en el único caso donde la varianza es finita,  $\alpha = 2$ , corresponde

---

<sup>14</sup>Una variable aleatoria estable con exponente característico  $\alpha < 2$  tiene momentos absolutos de orden  $k$  ( $k \neq \alpha$ ) si y sólo si  $k < \alpha$  (Feller [37] pg. 643).

a la mitad de la varianza, por lo que a veces se escribe  $\gamma = \frac{\sigma^2}{2}$  y se toma  $\sigma$  como parámetro.

El exponente característico de la distribución,  $\alpha$ , determina el tamaño de las colas de la distribución, colas que en las distribuciones no normales son mayores que en la normal ( $\alpha = 2$ ) y cuyo tamaño aumenta a medida que el valor de  $\alpha$  disminuye. De hecho, a partir de la distribución de Cauchy ( $\alpha = 1$ ) la cola de la distribución aumenta tanto que la esperanza de la distribución es infinita.

En concreto, el comportamiento asintótico de estas colas viene dado por <sup>15</sup>:

$$P(X > x) \sim C_1 x^{-\alpha} \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$P(X < x) \sim C_2 |x|^{-\alpha} \quad (x \rightarrow -\infty)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes positivas, que pueden ser interpretadas como parámetros de escala de las colas positiva y negativa de la distribución.

Además ambas constantes verifican la relación

$$\beta = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2},$$

con lo que su tamaño relativo determina el valor del coeficiente  $\beta$ , de forma que si  $C_1$  es mayor que  $C_2$  la distribución es asimétrica a la derecha y si  $C_2$  es mayor que  $C_1$  la distribución es asimétrica a la izquierda, alcanzándose el mayor grado de asimetría cuando una de las dos se anula.

El comportamiento asintótico de estas colas es similar al que observábamos en las colas de la distribución empírica de los incrementos logarítmicos de la serie del índice Ibex35, por lo que para ajustar el comportamiento teórico de las colas de la distribución a los datos empíricos vamos a considerar procesos donde las distribuciones finito dimensionales son distribuciones estables.

Como entre las distribuciones estables está la distribución normal, estos procesos, que reciben el nombre de procesos estables, incluyen a los procesos gaussianos, en particular, a los movimientos brownianos clásico y fraccionario.

---

<sup>15</sup>Fama [31] o Mandelbrot [46]

Este último proceso abarca todos los casos posibles de las covarianzas de un proceso autoafín, que es el marco en el que nos movemos, por lo que para describir la dependencia de la serie lo tomamos como único modelo y para describir las diferencias con la distribución normal consideramos un proceso estable autoafín con incrementos independientes: el movimiento L-estable o proceso estable de Pareto-Lévy.

### 5.4.2 Movimiento L-estable

En este estudio teórico, al igual que en los procesos que hemos visto hasta ahora, vamos a considerar que tenemos un proceso con incrementos estacionarios que comienza en el origen y que es estocásticamente continuo.

Si además los incrementos son independientes, el proceso recibe el nombre de proceso de Lévy:

**Definición 5.3** *Sea  $\{X_t, t \in T\}$  un proceso estocástico real, definido sobre un espacio de probabilidad completo.*

*El proceso es un **proceso de Lévy** si <sup>16</sup>:*

1. *comienza en el origen (con probabilidad uno),*
2. *tiene incrementos estacionarios,*
3. *tiene incrementos independientes,*
4. *es estocásticamente continuo en  $T$ .*



En tiempo discreto, un proceso de Lévy no es más que la suma de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas

$$X_n = (X_1 - X_0) + (X_2 - X_1) + \cdots + (X_n - X_{n-1}),$$

---

<sup>16</sup>Como para ver que el proceso es estocásticamente continuo para cada  $t \in T$ , utilizando que los incrementos son estacionarios, basta ver que es estocásticamente continuo en  $t = 0$  y en un proceso de Lévy existe una versión del proceso cuyos caminos muestrales son continuos a la derecha y con límites a la izquierda (Shiryaev [68] pg. 200-201), a veces se sustituye en la definición estocásticamente continuo en  $T$  por estocásticamente continuo en  $t = 0$  y se incluye en la definición el hecho de que los caminos muestrales son continuos a la derecha y tienen límites a la izquierda.

por lo que estos procesos son la generalización a tiempo continuo de un camino aleatorio e incluyen, por tanto, al movimiento browniano, el cual se obtiene cuando se considera que la distribución del proceso es una distribución gaussiana.

En un proceso en tiempo continuo se tiene algo parecido para cada incremento  $X_t - X_s$  con  $s < t$ , ya que si para cada  $n$  consideramos  $n + 1$  puntos equidistantes  $s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ , el incremento se puede descomponer en la suma de  $n$  incrementos

$$X_t - X_s = X_{t_n} - X_{t_{n-1}} + \dots + X_{t_1} - X_{t_0},$$

que, a su vez, son independientes y con la misma distribución, por lo que la distribución de un proceso de Lévy tiene que ser infinitamente divisible<sup>17</sup>.

Las distribuciones estables están entre las distribuciones infinitamente divisibles y el siguiente teorema<sup>18</sup> hace que sean las únicas posibles en los procesos de Lévy que presenta la característica fractal de autoafinidad estadística.

**Teorema 5.11** *Sea  $\{X_t, t \in T\}$  un proceso de Lévy no trivial.*

*$\{X_t\}$  es  $H$ -autoafín si y sólo si  $\{X_t\}$  es estrictamente  $\alpha$ -estable ( $\alpha : 0 < \alpha \leq 2$ ).*

*En este caso,*

$$H = \frac{1}{\alpha}. \quad \clubsuit$$

Aunque los procesos de Lévy autoafines siempre son estrictamente estables y el exponente de autoafinidad está relacionado directamente con el exponente característico del proceso, los procesos autoafines que no son procesos de Lévy no tienen por que ser procesos estables y, aún cuando lo son, no tiene por que verificarse esta relación, ya que existen procesos estables con el mismo exponente característico,  $\alpha$ , y con distintos valores del exponente de autoafinidad,  $H$ , como se puede ver en los movimientos brownianos fraccionarios, que son procesos autoafines  $\alpha$ -estables con  $\alpha = 2$  y donde su exponente de autoafinidad varía entre cero y uno.

---

<sup>17</sup>La distribución de una variable aleatoria es **infinitamente divisible** si para cada  $n$ , la variable aleatoria se puede descomponer en la suma de  $n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

<sup>18</sup>Embrechts y Maejima [27]

De esta forma, para generalizar el movimiento browniano clásico dentro de los procesos autoafines con incrementos independientes, como el proceso tiene que ser un proceso de Lévy, la distribución de estos incrementos tiene que ser estrictamente estable.

Por tanto el único proceso con incrementos independientes y características autoafines que puede generalizar al movimiento browniano es el movimiento L-estable, el cual se obtiene al considerar que los incrementos del proceso siguen una distribución estable con exponente característico  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 2$ , en lugar de una distribución normal, estable con  $\alpha = 2$ , y donde como vamos a considerar que no tiene tendencia, el parámetro de localización,  $\mu$ , que en la distribución normal es la media, lo tomamos como cero.

#### Definición 5.4

*Un movimiento L-estable o proceso estable de Pareto-Lévy es un proceso estocástico  $\{L_t^{\alpha,\beta}\}_{t \geq 0}$ , que notaremos también por  $\{L_t^\alpha\}_{t \geq 0}$  y  $\{L_t\}_{t \geq 0}$ , verificando:*

1. *El proceso comienza en el origen casi seguro.*
2. *El proceso tiene incrementos independientes.*
3.  $\forall t \geq 0, \forall h \geq 0$ :

$$L_{t+h}^{\alpha,\beta} - L_t^{\alpha,\beta} \sim S_{\alpha,\beta}(0, \gamma h).$$



El parámetro de escala de la distribución,  $\gamma$ , va a establecer la proporcionalidad de los incrementos del movimiento L-estable con el incremento temporal, análogamente al movimiento browniano clásico, único caso con varianza finita ( $\alpha = 2$ ), donde con la sustitución  $\gamma = \frac{\sigma^2}{2}$ , la distribución de los incrementos es normal con media cero y varianza  $\sigma^2 h$ .

Como los incrementos del proceso están idénticamente distribuidos y sólo dependen del incremento temporal, los incrementos del proceso son estacionarios y, al comenzar en el origen, se tiene:

$$L_t \sim S_{\alpha,\beta}(0, \gamma t), \quad \forall t \geq 0.$$

En esta generalización del movimiento browniano clásico queremos que la característica fractal de autoafinidad estadística se mantenga y para que este proceso la presente, como estamos dentro de los procesos de Lévy <sup>19</sup>, el teorema 5.11 nos obliga a que la distribución sea estrictamente estable.

En este sentido, cuando el exponente característico de la distribución,  $\alpha$ , es distinto de uno, la distribución siempre es estrictamente estable, ya que, el parámetro de localización,  $\mu$ , es cero.

Sin embargo, cuando  $\alpha$  es igual a uno, la distribución es estrictamente estable sólo si es simétrica, motivo por el que vamos a imponer que lo sea, con lo que para  $\alpha = 1$  tomamos  $\beta = 0$ , caso que corresponde a la distribución de Cauchy y donde la mediana es cero, al coincidir con el parámetro de localización,  $\mu$ , que es cero en todos los casos.

**Proposición 5.12** Sean  $\{L_t : t \geq 0\}$  un movimiento  $L$ -estable con exponente característico  $\alpha$ , simétrico para  $\alpha = 1$ , y  $a > 0$ .

$$L_t \stackrel{d}{=} a^{-\frac{1}{\alpha}} L_{at}$$

*Es decir, el proceso es autoafín con exponente de autoafinidad*

$$H = \frac{1}{\alpha}.$$

### Demostración

Aunque como la distribución es estrictamente estable y estamos dentro de los procesos de Lévy, el teorema 5.11 nos garantiza que el proceso es autoafín con exponente de autoafinidad  $\frac{1}{\alpha}$ , preferimos ver este resultado directamente utilizando la función característica de la distribución. Para ello, sólo hay que ver que  $a^{-\frac{1}{\alpha}} L_{at}$  verifica la última de las propiedades de la definición, ya que las dos primeras se deducen inmediatamente de las correspondientes para  $L_t$ :

---

<sup>19</sup>Para que este proceso sea un proceso de Lévy, faltaría ver que el proceso es estocásticamente continuo, es decir,  $L_{t+h} - L_t \xrightarrow{P} 0$  ( $h \rightarrow 0$ ), que equivale a  $S_{\alpha,\beta}(0, \gamma h) \xrightarrow{P} 0$  ( $h \rightarrow 0$ ), lo que se puede comprobar que es cierto.

Como  $L_{t+h} - L_t \sim S_{\alpha,\beta}(0, \gamma h)$  la función característica de  $L_{t+h} - L_t$  es

$$\varphi_h(u) = \exp \left( -\gamma h |u|^\alpha \left[ 1 + \beta \frac{u}{|u|} \omega(u, \alpha) \right] \right)$$

donde  $\omega(u, \alpha)$  no depende de  $u$ , ya que, sólo depende de  $u$  para  $\alpha = 1$  y en este caso tenemos  $\beta = 0$ , con lo que  $\omega(u, \alpha)$  no aparece.

Si para  $a > 0$  sustituimos  $h$  por  $ah$  y  $u$  por  $a^{-\frac{1}{\alpha}}u$  se obtiene la misma función, con lo que  $L_t$  y  $a^{-\frac{1}{\alpha}}L_{at}$  tienen la misma distribución. ♣

En los movimientos brownianos, clásico y fraccionario, los caminos muestrales del proceso son continuos (con probabilidad uno), sin embargo, como en un proceso estocástico con incrementos independientes con caminos muestrales continuos (con probabilidad uno) los incrementos están normalmente distribuidos <sup>20</sup>, en el movimiento L-estable los caminos muestrales son discontinuos, salvo en el caso correspondiente al movimiento browniano, y sólo tenemos garantía de que, como en todo proceso de Lévy, son continuos a la derecha y con límites a la izquierda.

Para determinar si la dimensión de los registros temporales del proceso, dimensión del grafo de sus caminos muestrales, es compatible con la dimensión que hemos obtenido empíricamente vamos a calcular la dimensión de recuento por cajas del grafo de estos caminos muestrales, centrándonos en el caso  $1 < \alpha \leq 2$ , donde el proceso tiene esperanza finita, ya que en el caso  $0 < \alpha \leq 1$ , donde la esperanza es infinita, este grafo tiene dimensión uno <sup>21</sup>.

**Proposición 5.13** *Sea  $\{L_t : t \geq 0\}$  un movimiento L-estable con esperanza finita,  $1 < \alpha \leq 2$ :*

*El grafo en el intervalo  $[0, 1]$ ,  $\{(t, L_t) / t \in [0, 1]\}$ , tiene dimensión de recuento por cajas*

$$d = 2 - \frac{1}{\alpha} = 2 - H,$$

*con  $H$  el exponente de autoafinidad del proceso*

<sup>20</sup>Todorovic [70] pp. 79-81.

<sup>21</sup>Este resultado aparece en Falconer [29] pg. 249-250, donde se puede ver además que en ambos casos la dimensión de recuento por cajas coincide con la dimensión de Hausdorff

**Demostración (cálculo)**

Para determinar la dimensión de recuento por cajas de este grafo vamos a utilizar el procedimiento empleado en los movimientos brownianos y vamos a suponer que el número de cajas que quedan vacías cuando la función salta en un intervalo de longitud  $\delta$  es despreciable frente al cociente entre el rango de la función en el intervalo y  $\delta$ .

Así, vamos a estimar el número de cajas de una  $\delta$ -malla que intersecan al grafo sobre cada subintervalo de longitud  $\delta$ ,  $N_\delta[i\delta, (1+i)\delta]$ , como el rango de la función en dicho intervalo,  $R_f[i\delta, (1+i)\delta]$ , dividido por la longitud del intervalo,

$$N_\delta[i\delta, (1+i)\delta] \approx \frac{R_f[i\delta, (1+i)\delta]}{\delta}.$$

A su vez, el rango de la función en un intervalo de longitud  $\delta$  se puede estimar como el valor esperado del incremento absoluto del proceso en este intervalo,  $E[|L_{(1+i)\delta} - L_{i\delta}|]$ .

Como los incrementos del proceso son estacionarios y el proceso comienza en el origen, este valor es igual al valor esperado del incremento absoluto de  $L_t$  en el intervalo  $[0, \delta]$ ,  $E[|L_\delta|]$ , con lo que el rango de la función en un intervalo de longitud  $\delta$  no depende del intervalo considerado y podemos escribirlo como  $R_f[\delta]$  con

$$R_f[\delta] \approx E[|L_\delta|],$$

que, como el proceso es autoafín con exponente de autoafinidad  $H = \frac{1}{\alpha}$ , cumple

$$E[|L_\delta|] = E[|\delta^H L_1|] = \delta^H E[|L_1|].$$

Como estamos considerando que el proceso tiene esperanza finita,  $E[|L_1|] < +\infty$ , y en el intervalo  $[0, 1]$  hay  $\frac{1}{\delta}$  subintervalos de longitud  $\delta$ , se tiene:

$$N_\delta = N_\delta[0, 1] \approx \frac{1}{\delta} \frac{R_f[\delta]}{\delta} \approx \delta^{-2} E[|L_\delta|] \propto \delta^{-2} \delta^H = \delta^{H-2},$$

con lo que la dimensión de recuento por cajas es:

$$d = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta)}{-\log(\delta)} = 2 - H = 2 - \frac{1}{\alpha}.$$



## Referencias

La base fundamental para ampliar el estudio de las características fractales del movimiento browniano fraccionario es Mandelbrot [53], selecta que además incluye el primer artículo donde apareció este proceso, Mandelbrot y Van Ness [54].

Otras referencias que se pueden utilizar son Falconer [29] y Feder [34], en el último de los cuales aparece un estudio completo, tanto teórico como empírico, de la relación entre este movimiento y el análisis R/S.

Respecto al papel del análisis R/S en el estudio de las series precios, además del selecta de Mandelbrot mencionado, destacan dos obras de Peters, Peters [62] y Peters [63], y Lo [44].

Para un estudio más amplio de las distribuciones estables una de las referencias más completas es Feller [37], dentro del estudio de series de precios este papel corresponde a Mandelbrot [50], selecta donde aparece incluido Fama [32], que es una buena aproximación a las distribuciones estables.

# Conclusiones y perspectivas

La línea de investigación que emprendemos con este trabajo es, en términos genéricos, analizar el papel que pueden, y deben, desempeñar los conceptos y enfoques de la Geometría Fractal en el estudio de las series temporales sumamente erráticas, como las generadas por la evolución de los precios de un activo financiero.

Con esta perspectiva, al analizar el papel que la Geometría Fractal puede jugar a la hora de caracterizar la serie Ibex35, una de las aportaciones de esta memoria es poner de manifiesto cuales son los motivos que hacen que una serie temporal pueda estudiarse mediante la dimensión fractal de su grafo y proporcionar un marco adecuado en el que desarrollar estos estudios.

A este respecto, pensamos que la forma elegida para exponer el porqué de las diferentes definiciones de dimensión fractal y de los distintos tipos de autoafinidad que aparecen en un grafo, muestra de manera unitaria las características que hacen que podamos calificar a los grafos de las series temporales como conjuntos fractales.

Por otra parte, al utilizar las funciones de interpolación fractal para generar series temporales autoafines en las que podemos fijar previamente la dimensión, con cualquier valor comprendido entre uno y dos, se proporciona un método para la obtención de modelos que permiten analizar experimentalmente las técnicas que se necesitan para el estudio de las características fractales de una serie temporal.

Además, como estas series se construyen mediante los sistemas de funciones iteradas, se abre la posibilidad de realizar modificaciones en su proceso de construcción para que incluya una componente aleatoria, de forma que en las series obtenidas se refleje el carácter no determinístico de los fenómenos que se intentan reproducir y

donde, al igual que sucede ahora, se siga pudiendo fijar previamente la dimensión.

A la hora de la realización de estudios experimentales, además de sistematizar el proceso para calcular la dimensión de recuento por cajas del grafo de una serie temporal, en este trabajo mostramos una nueva forma de obtenerla empíricamente: estimar esta dimensión a través de la relación del rango de la serie con el número de cajas que, en un recubrimiento por cajas, cortan a este grafo.

La estimación propuesta muestra su primera ventaja sobre el cálculo directo del número de cajas que cortan al grafo, al buscar una dimensión adecuada al rango de escalas en el que se estudia la serie, ya que aunque en ambos casos hay que admitir un cierto margen de error para asignar una dimensión a la serie, a medida que la escala disminuye y se acerca a la separación existente entre los datos, en el cálculo directo este margen de error es mucho más grande que el que hay que admitir en su estimación.

A la hora de hacer estudios comparativos entre distintas series temporales, que es otra perspectiva que se nos abre, los valores de la dimensión obtenidos mediante la estimación se pueden utilizar en un rango de escalas más amplio, ya que en la estimación el rango de escalas no está tan limitado por el número de datos como en el cálculo directo.

Cuando las unidades en las que está expresada la serie son pequeñas en comparación con las unidades en las que medimos el tiempo, con los valores de la dimensión obtenidos mediante el cálculo directo no es posible apreciar la dimensión local del grafo, pues corresponden a la dimensión global, y aparece otra de las ventajas de la estimación que proponemos, ya que, al no depender de las unidades de la serie, los valores de la dimensión que se obtienen siempre corresponden a la dimensión local.

El valor de la dimensión del grafo de la serie Ibex35 que hemos obtenido utilizando esta estimación

$$\dim_B = 1.3663 \pm 0.0202,$$

nos hace afirmar que nos encontramos con un proceso distinto del movimiento browniano clásico, ya que la dimensión correspondiente al grafo de este proceso es  $\dim_B = 1.5$ .

Además, es necesario describir la autoafinidad observada en la serie, por lo que, desde el punto de vista de la Geometría Fractal, un proceso que explique el comportamiento de la serie tiene que ser autoafín.

Como en un proceso autoafín las covarianzas entre los distintos instantes del proceso sólo tienen sentido cuando la varianza es finita y éstas únicamente dependen del exponente de autoafinidad del proceso, la dimensión obtenida nos hace pensar en modelizar la dependencia observada en el estudio complementario de la serie mediante un movimiento browniano fraccionario de índice

$$H = 2 - d = 0.6337 \pm 0.0202,$$

que corresponde a un movimiento browniano fraccionario persistente, en el cual la dependencia no llega nunca a desaparecer, dependencia de largo recorrido.

Otra de las razones por las que el movimiento browniano clásico no es adecuado para describir la evolución de la serie Ibex35, es que las colas de la distribución empírica de sus incrementos son más gruesas que las correspondientes a una distribución normal.

Estas diferencias no las puede explicar el movimiento browniano fraccionario, ya que la distribución de sus incrementos también es una normal, por lo que la dimensión obtenida nos hace pensar en modelizar el comportamiento de las colas de la distribución empírica combinando el movimiento browniano fraccionario con un movimiento L-estable con exponente característico

$$\alpha = \frac{1}{2 - d} = 1.5780 \pm 0.0520,$$

que corresponde a una distribución estable no normal con colas más gruesas que la normal y donde la varianza es infinita, lo que también explicaría el comportamiento inestable de la varianza.

Por otra parte, como en los procesos autoafines que hemos considerado, movimiento browniano fraccionario y movimiento L-estables con esperanza finita, la dimensión de recuento por cajas de sus registros temporales,  $d$ , y el exponente de autoafinidad del proceso,  $H$ , verifican la relación

$$d = 2 - H,$$

se abre el camino para utilizar la dimensión de su grafo a la hora de determinar el exponente de autoafinidad de estos procesos y los parámetros relacionados con él.

Como conclusión final, podemos decir que la dimensión por sí misma refleja características fractales de los registros temporales de una serie y como, en particular, muestra que cuanto mayor es el valor de la dimensión más errático es su comportamiento, puede ser una buena medida de la volatilidad de esta serie.

Esto último hace que quede abierta como línea de trabajo estudiar las variaciones de la dimensión a lo largo del tiempo para distinguir distintas fases en el comportamiento de la serie y, trabajando con modelos donde esta dimensión dependa del tiempo, reflejar estos cambios.

# Apéndice A

## Aspectos Computacionales

En este apéndice vamos a incluir las funciones que a pesar de no ser específicas de los temas tratados en este trabajo son necesarias para las distintas implementaciones que hemos realizado y para los estudios empíricos de las series de cierres del índice Ibex35 durante la década de los noventa.

Así, en la primera sección vamos a ver las funciones auxiliares necesarias para la implementación de los algoritmos que permiten construir un conjunto fractal como una lista de puntos (sección 1.3.3).

En la segunda sección vamos a ver las funciones auxiliares que permiten calcular la dimensión de recuento por cajas de un conjunto fractal representado por una lista de puntos (sección 4.1.3), donde además veremos las funciones que permiten obtener las distintas series utilizadas como modelos en nuestro estudio empírico de la estimación (capítulo 4).

Por último, vamos a incluir en la tercera sección las funciones utilizadas para realizar el análisis empírico de las series de cierres del índice Ibex35, tanto de la no normalidad de la distribución de los incrementos como de su dependencia, y el cálculo del exponente de Hurst mediante el análisis R/S (capítulo 5).

### A.1 Construcción de conjuntos fractales

En la implementación de los algoritmos necesarios para obtener la lista de puntos

que aproxima al atractor de un sistema de funciones iteradas autoafín, cada sistema de funciones iteradas está representado por su código matricial,  $A$ , por lo que hemos definido una función que calcula las transformaciones que van a actuar independientemente del tipo de código que utilicemos.

Además, para poder utilizar el algoritmo de iteración aleatoria, esta función asigna probabilidades de elección a las transformaciones del sistema, cuando éstas no las tienen asignadas, siguiendo el método visto en la sección 1.3.

```

CalculaTransformaciones[A_]:= Block[{ND,LD},
  First[Dimensions[A]]; LD=Last[Dimensions[A]];
  If[Odd[LD],
    Do[DDT[n]=Det[M[n]]; If[DDT[n]==0,DDT[n]=0.01],{n,ND}];
    Do[p[n]=DDT[n]/Sum[DDT[i],{i,ND}],{n,ND}]];
  If[LD<6,
    Do[M[n]={{A[[n,1]] Cos[A[[n,2]]],-A[[n,1]] Sin[A[[n,2]]]},
      {A[[n,1]] Sin[A[[n,2]]], A[[n,1]] Cos[A[[n,2]]]}};
    v[n]= {A[[n,3]], A[[n,4]]},{n,ND},
    Do[M[n]={{A[[n,1]],A[[n,2]]},{A[[n,3]],A[[n,4]]}};
    v[n]= {A[[n,5]],A[[n,6]]},{n,ND}]];
  TableForm[Table[Join[M[n],{v[n]}],{n,ND}]]]

```

Por otra parte, las transformaciones del sistema se aplican de forma distinta dependiendo del algoritmo que utilicemos, por lo que necesitamos definir una función que aplique las transformaciones del sistema a cada punto de forma distinta.

Así, en el algoritmo determinístico se aplican todas las transformaciones a cada punto de la lista y en el algoritmo de iteración aleatoria se aplica a cada punto de la lista una única transformación, la cual se escoge cada vez entre las transformaciones del sistema, dependiendo de la probabilidad de elección que tiene asignada:

```

TransformaPunto[{pta_,ptb_}, ver_]:= Block[{l1={},r},
  If[ver!=3,
    Do[l1=Join[l1,{M[n].{pta,ptb}+v[n]}],{n,1,ND}];

```

```

ll,
r=Random[];
Do[If[r<=Sum[p[i],{i,1,n}],
      Break[M[n].{pta,ptb}+v[n]]],{n,1,ND}]]]

```

Como trabajamos con conjuntos como listas de puntos, necesitamos conjuntos iniciales de esta forma, por ejemplo:

```
Segmento[a_,b_] := Table[a j+b(1-j),{j,0.,1.,0.01}]
```

```
Triangulo[a_,b_,c_] := Join[Segmento[a,c],Segmento[a,b],Segmento[b,c]]
```

Por último, para representar gráficamente un conjunto fractal, necesitamos una función que represente los puntos contenidos en una lista y donde sus opciones deben siempre incluir las opciones que aquí aparecen:

```

DibujaPto[lis_] :=
  Show[Graphics[Map[Point,lis]],
  AspectRatio->Automatic,
  PlotRange->All];

```

## A.2 Cálculo de la dimensión de recuento por cajas

En la sección 4.1.3 hemos implementado en el entorno de cálculo MATHEMATICA 3.0 una función `DimensionCajas[datos,kmin,kmax,ver]` que calcula la dimensión de recuento por cajas de la lista “datos”, para el rango de escalas comprendido entre  $\frac{C}{2^{k_{\min}}}$  y  $\frac{C}{2^{k_{\max}}}$ , como la pendiente cambiada de signo de la recta de regresión de los pares  $\log(\delta)$ ,  $\log(N(\delta))$  que aparecen dentro del rango de escalas.

Sin embargo, como hemos visto en la sección anterior, este procedimiento no es adecuado y para obtener una dimensión válida dentro del rango de escalas en el que nos movemos hay que admitir un cierto margen de error, por lo que para asignar a la serie una dimensión vamos a implementar el procedimiento que hemos seguido con las distintas series temporales y cambiar la definición de la función

```
DimensionCajas[datos,kmin,kmax,ver];
```

Así, en primer lugar obtenemos la lista con los valores de delta, para el rango de escalas comprendido entre  $\frac{C}{2^{k_{\min}}}$  y  $\frac{C}{2^{k_{\max}}}$ , frente al correspondiente número de cajas que cortan al grafo de la serie “datos”, a través de la función

```
ListaCajas[datos,kmin,kmax,ver];
```

que definimos en la sección 4.1.3.

Una vez obtenidos estos valores, consideramos todos los valores de la dimensión que aparecen al tomar los distintos valores mínimos y máximos de  $k$  comprendidos en el rango de escalas, imponiendo que su cálculo comprenda un número mínimo de puntos, `MinPtos` y tomamos como dimensión de la lista “datos” su valor medio, considerando como error la desviación absoluta media.

La función `DimensionCajas[datos, MinPtos, kmin, kmax, ver]` tendrá como resultado una lista con la dimensión de recuento por cajas y el error considerado:

```
DimensionCajas[datos_,MinPtos_,kmin_,kmax_,ver_] :=
Block[{l,ll,dimm,err,paso=MinPtos-1},
  l=ListaCajas[datos,kmin,kmax,ver];
  ll=Flatten[Table[
    -Pte[Take[Map[Log,l],{i,j}]],
    {i,kmin,kmax-paso},{j,i+paso,kmax}]];
  dimm=Mean[ll];
  err=Mean[Map[Abs[#-dimm]&,ll]];
  {dimm,err}]
```

En la implementación del cálculo la dimensión de recuento por cajas de una serie temporal los pares  $\log(\delta), \log(N(\delta))$  aparecen en una lista de puntos, `l`, por lo que necesitamos una función que calcule la recta de regresión de una lista de puntos y su pendiente:

```
RectaReg[l_,x_] := Fit[l,{1,x},x]
```

```
Pte[l_] := RectaReg[l,#]&[1.]-RectaReg[l,#]&[0.]
```

Además, para representar los pares  $\log(\delta), \log(N(\delta))$  contenidos en la lista 1 junto a la recta de regresión de estos puntos, definimos la función:

```
GrafLista[l_]:=
  Block[{Grf1=ListPlot[l,
    PlotStyle->PointSize[0.025],

    Grf2=ListPlot[l,
    PlotJoined->True, PlotStyle->Thickness[0.01],
    Grf3=Plot[RectaReg[l,x],{x,First[First[l],First[Last[l]]}],
    Show[Grf1, Grf2, Grf3, PlotRange->All]}
```

Terminaremos esta sección definiendo las funciones que nos permiten obtener las distintas series temporales que utilizamos como modelos.

## Funciones de interpolación fractal

Para implementar una función que dado un conjunto de datos no alineados, `datos`, y unos factores de escala, `factores`, construya el sistema de funciones iteradas asociado a la función de interpolación fractal, sólo necesitamos una función que calcule el código del correspondiente sistema de funciones iteradas:

```
CalculaCodigo[datos_,factores_List]:=
  Block[{ND=Length[datos]-1,t,x,a,b,c,d,e,f},
    Do[t[n]=datos[[n+1,1]];
      x[n]=datos[[n+1,2]];
      d[n]=factores[[n]],
      {n,0,ND}];
    Do[a[n]=N[(t[n]-t[n-1])/(t[ND]-t[0])];
      b[n]=0;
      c[n]=N[(x[n]-x[n-1])/(t[ND]-t[0])
        -d[n] (x[ND]-x[0])/(t[ND]-t[0])];
```

```

e[n]=N[(t[ND] t[n-1]-t[0] t[n])/(t[ND]-t[0])];
f[n]=N[(t[ND] x[n-1]-t[0] x[n])/(t[ND]-t[0])
-d[n] (t[ND] x[0]-t[0] x[ND])/(t[ND]-t[0])],
{n,1,ND}];
Table[{a[n],b[n],c[n],d[n],e[n],f[n]},{n,1,ND}]]

```

En el caso particular de datos igualmente distribuidos sobre el eje temporal, cuando queremos que la función de interpolación fractal para estos datos tenga un grafo cuya dimensión de recuento por cajas sea  $Dim$ , tomamos todos los factores de escala verticales iguales a  $d = N^{Dim-2}$ :

```

CalculaCodigo[datos_,Dim_Number]:=
Block[{ND=Length[datos]-1},
CalculaCodigo[datos,Table[d[n]=ND^(Dim-2),{n,1,ND}]]]

```

Una vez obtenido el código del sistema,  $A$ , la lista que representa al atractor del sistema la obtenemos mediante el algoritmo determinístico, para lo que tomamos como conjunto de partida la lista formada por los puntos de interpolación,  $1$ , y realizamos  $n$  iteraciones y ordenamos la lista de forma adecuada:

```

A=CalculaCodigo[1];
LisInt=Ifs[A,1,n,1];
ListInt=Union[ListInt]

```

## La función de Weierstrass

Para obtener las correspondientes series temporales, las distintas versiones de la función de Weierstrass se definen en una única función

```
FunWei[t, s, l, k, Tipo, Subtipo],
```

donde  $t$  es la variable de la función,  $s$  la dimensión de recuento por cajas de su grafo,  $l$  el parámetro  $\lambda$  y  $k$  el número de términos a considerar (grado de aproximación).

Las dos últimas son variables auxiliares que determinan cual de las distintas versiones se utiliza. Así, la variable  $Tipo$  toma los valores  $Seno$  y  $Coseno$  para las

versiones correspondientes, y la variable `SubTipo` el valor 1 para la versión original y 2 para la versión con características autoafines.

Para definir esta función comenzamos por definir las funciones base:

```
f[x_, s_, l_, n_, Seno, _] := l^((s-2) n) Sin[(l^n) x]
```

```
f[x_, s_, l_, n_, Coseno, 1] := l^((s-2) n) Cos[(l^n) x]
```

```
f[x_, s_, l_, n_, Coseno, 2] := l^((s-2) n) (1- Cos[(l^n) x])
```

y, una vez definidas, definimos la función de Weierstrass

```
FunWei[x_, s_, l_, k_, Tipo_, 1] := Sum[f[x, s, l, n, Tipo, 1], {n, 0, k}]
```

```
FunWei[x_, s_, l_, k_, Tipo_, 2] := Sum[f[x, s, l, n, Tipo, 2], {n, -k, k}]
```

Para obtener las series temporales correspondientes a la función de Weierstrass hemos implementado una función que construye una serie temporal fractal de longitud  $N$  cuyo grafo tiene dimensión de recuento por cajas  $Dim$ , tomando por defecto los valores  $l=4$ ,  $k=50$ ,  $Tipo=Seno$  y  $SubTipo=2$ :

```
FunWei[N_, Dim_] :=
```

```
Table[{t, FunWei[t, Dim, 4, 50, Seno, 2]}, {t, 0, 1, 1/(N-1)}]
```

## El movimiento browniano

Para obtener una aproximación al movimiento browniano no es necesario definir ninguna función, ya que cargando el paquete estadístico que permite trabajar con la distribución normal,

```
<<Statistics'NormalDistribution'
```

podemos generar una serie aleatoria de valores que siguen una normal con media cero y varianza unitaria (ruido blanco gaussiano estándar), cuyas sumas acumuladas forman la aproximación al movimiento browniano:

```
LisInc=Table[Random[NormalDistribution[0, 1]], {p, 1, 3650}]
```

```
LisBm=Table[{j, Plus@@Take[LisInc, j]}, {j, 0, Length[LisInc]}]
```

### A.3 Cálculos estadísticos

En la última sección vamos a incluir las funciones utilizadas para obtener los histogramas de frecuencias relativas de los incrementos de los distintos cierres del índice Ibex35, las correspondientes colas de la distribución empírica y las autocorrelaciones de estos incrementos.

En esta implementación en primer lugar cargamos los paquetes que necesitamos para el tratamiento y representación de los datos:

```
<<Statistics'DescriptiveStatistics'
<<Statistics'DataManipulation'
<<Statistics'NormalDistribution'
<<Graphics'Graphics'
```

y las series del índice Ibex35 con las que vamos a trabajar, obtenidas tratando la serie de cierres diarios fuera del entorno MATHEMATICA, y de las que sólo necesitamos la coordenada correspondiente al valor del índice:

```
IbexDia=Map[N,Map[Last, Read["Ibex35DiaD90.txt"]]];
IbexSem=Map[N,Map[Last, Read["ibex35SemanaD90.txt"]]];
IbexMes=Map[N,Map[Last, Read["ibex35MesD90.txt"]]];
```

Para dividir la serie de cierres diarios en distintos periodos, sin tener en cuenta los días en los que no ha habido actividad, definimos la función

```
Cierres[dat_,paso_] := Flatten[Partition[dat,1,paso]]
```

Como los modelos que se proponen para describir la evolución de los precios de una acción se basan en los logaritmos de estos precios, necesitamos calcular los incrementos logarítmicos de cada serie de índices, por lo que definimos una función que los calcula:

```
IncrementosLog[datos_,1] :=
  Apply[Function[{x,y},Log[y/x]],Partition[datos,2,1],{1}]
```

que tiene una versión que se aplica a listas que tienen dos coordenadas:

```
IncrementosLog[datos_,2]:=Block[{lst1,lst2},
  lst1=Map[First,datos]; lst1=Rest[lst1];
  lst2=Map[Last,datos]; lst2=IncrementosLog[lst2];
  Transpose[{lst1,lst2}]]
```

Los principales estadísticos descriptivos de las series de incrementos logarítmicos de los distintos cierres del índice Ibex35 los obtenemos mediante la función

```
Parametros[datos_]:=
Block[{med, des, Mx, Mn},
  TableForm[{
    {"Número de datos", Length[datos]},
    {"Media", med=N[Mean[datos]]},
    {"Desviación típica", des=N[StandardDeviationMLE[datos]]},
    {"Máximo", Mx=Max[datos]},
    {"Máxima desviación", (Mx-med)/des},
    {"Mínimo", Mn=Min[dat]},
    {"Mínima desviación", (Mn-med)/des},
    {"Asimetría", Skewness[dat]},
    {"Curtosis", KurtosisExcess[dat]}]]]
```

Para analizar la distribución de los incrementos logaritmos de cada serie de cierres, obtenemos las frecuencias relativas de los datos correspondientes al intervalo  $[\mu - n\sigma, \mu + n\sigma]$ , agrupadas en intervalos de longitud “ud” (consideramos como unidades un cuarto de la desviación típica muestral  $ud = \frac{\sigma}{4}$ ) y las colas acumuladas correspondientes a los valores que aparecen en los intervalos  $(-\infty, \mu - n\sigma)$  y  $(\mu + n\sigma, +\infty)$ .

```
FrecuenciasRel[dat_,n_]:=
Block[{NN,med,des,ud,m,int},
  NN=N[Length[dat]];
  med=N[Mean[dat]];
  des=N[StandardDeviationMLE[dat]];
```

```

ud=des/4;
m=n*des/ud;
int=Table[med+j ud,{j,-m,m}];
(#1 /NN)& RangeCounts[dat, int]]

```

El correspondiente histograma, donde las barras tienen anchura “ud”, se obtiene asociando las frecuencias relativas al punto medio de cada intervalo; salvo las colas acumuladas, que las representamos a ambos lados de la gráfica en sendas barras.

```

FrecuenciasRelGrf[dat_,n_]:=
Block[{NN,med,ud,des,m,int,freq,punt,anch},
  NN=N[Length[dat]];
  med=N[Mean[dat]];
  des=N[StandardDeviationMLE[dat]];
  m=n*des/ud;
  int=Table[med+j ud,{j,-m,m}];
  freq=(#1 /NN)& RangeCounts[dat, int];
  punt=Table[med+(j+0.5)*ud,{j,-(m+1),m}];
  anch=Table[ud,{j,-(m+1),m}];
  freq=Transpose[{punt,freq,anch}];
  GeneralizedBarChart[freq,
  BarStyle->{GrayLevel[.6]},AxesOrigin->{med-n des-ud,0},
  Ticks->{Table[{med+j*des, \[Mu]+j\[Sigma]}, {j,-n,n}],Automatic},
  PlotRange->All]];

```

El correspondiente grafo de la distribución normal en el intervalo  $[\mu - n\sigma, \mu + n\sigma]$ , con media y desviación típica como los datos, medida en unidades “ud” y con las colas acumuladas correspondientes a los valores que aparecen en los intervalos  $(-\infty, \mu - n\sigma)$  y  $(\mu + n\sigma, +\infty)$  (representadas en barras de anchura “ud”) se obtiene mediante la función:

```

GrfNormal[dat_,n_]:=Block[{NN,med,des,ndist,npd,pp1,pp2,pp3},

```

```

NN=N[Length[dat]];
med=Mean[dat];
des=StandardDeviationMLE[dat];
ndist=NormalDistribution[med,des];
npd=PDF[ndist,x];
pp1=Plot[npd*ud,{x,med-n*des,med+n*des},
  AxesOrigin->{med-n*des-ud,0}];
pp2=GeneralizedBarChart[
  {{med-n*des-0.5*ud,CDF[ndist, med-n*des],ud}},
  BarStyle -> {GrayLevel[0.5]};
pp3=GeneralizedBarChart[
  {{med+n*des+0.5*ud,1-CDF[ndist, med+n*des],ud}},
  BarStyle -> {GrayLevel[0.5]};
Show[pp1,pp2,pp3]

```

Para obtener las colas acumuladas correspondientes a las frecuencias relativa de datos mayores que  $\mu + k ud$  (derecha) y de datos menores que  $\mu + k ud$  (izquierda) utilizamos funciones análogas:

```

ColaEmpirica[dat_,k_,Ldo_]:=Block[{NN,med},
  NN=N[Length[dat]]; med=N[Mean[dat]];
  Switch[Ldo,Dch, Last[RangeCounts[dat,{med+k*ud}]]/NN,
    Izq,First[RangeCounts[dat,{med+k*ud}]]/NN]

```

```

ColaNormal[dat_,k_,Ldo_]:=Block[{med,des,ndist},
  med=Mean[dat];
  des=StandardDeviationMLE[dat];
  ndist=NormalDistribution[med,des];
  Switch[Ldo,Dch,1-CDF[ndist,med+k*ud],
    Izq,CDF[ndist,med+k*ud]]]

```

Estas funciones tienen la correspondiente versión gráfica, que las representa entre

sigmin y sigmax desviaciones de la media:

```
GrfColaEmpirica[dat_,sigmin_,sigmax_,Ldo_] :=
  Block[{med,des,kmin,kmax},
    med=N[Mean[dat]];
    des=N[StandardDeviationMLE[dat]];
    kmin=sigmin*des/ud; kmax=sigmax*des/ud;
    ListPlot[Table[{med+k *ud,ColaEmpirica[dat,k,Ldo]},
      {k,kmin,kmax}],
      PlotJoined->True, AxesOrigin->{med+sigmin*des,0},
      PlotStyle->{Thickness[0.01]}];
```

```
GrfColaNormal[dat_,sigmin_,sigmax_,Ldo_] :=
  Block[{med,des,kmin,kmax},
    med=N[Mean[dat]];
    des=N[StandardDeviationMLE[dat]];
    kmin=sigmin*des/ud; kmax=sigmax*des/ud;
    ListPlot[Table[{med+k *ud,ColaNormal[dat,k,Ldo]},
      {k,kmin,kmax}],
      PlotJoined->True, AxesOrigin->{med+sigmin*des,0},
      PlotStyle->{Thickness[0.01],Dashing[{0.015]}]}];
```

Para estudiar la dependencia de la serie, definimos la función de autocorrelación empírica:

```
Ro[dat_,k_] :=Block[{med,var,NN,cov},
  med=Mean[dat];
  var=VarianceMLE[dat];
  NN=Length[dat];
  cov=(1/NN)*Sum[(dat[[i]]-med)*(dat[[i+k]]-med),{i,1,NN-k}];
  cov/var]
```

## Análisis R/S

Por último, implementamos el análisis R/S en el entorno de cálculo MATHEMATICA para realizar los cálculos empíricos del exponente de Hurst. En esta implementación, antes de comenzar a trabajar cargamos el paquete que vamos a utilizar para el cálculo de los distintos estadísticos que aparecen en los algoritmos 5.1 y 5.2:

“DescriptiveStatistics”;

La primera función que definimos:

```
ListaN[datos_,MinDat_,MinSub_,MinDiv_,MaxPor_] :=
Block[{l1l1={},NN=Length[datos], DivNNN, NNN,MaxDat},
MaxDat=IntegerPart[NN/MinSub];
NNN=NN;
While[Length[Select[Divisors[NNN],MaxDat>#1>MinDat&]]<MinDiv,
NNN=NNN-1;
If[NNN<=NN *(100-MaxPor)/100,Break[[]]];
If[NNN<=NN *(100-MaxPor)/100,
Table[k,{k,MinDat,MaxDat}],
{NNN,Select[Divisors[NNN],MaxDat>#1>MinDat&]}]]
```

una vez fijados los valores mínimos para el número de datos que aparece en cada subserie, `MinDat`, y el número de subseries que consideramos a la hora de calcular la media, `MinSub`, tiene como resultado una lista formada por el número de datos que vamos a utilizar y una lista con las distintas longitudes en las que vamos a dividir la serie `Datos`.

En esta función mantenemos como última opción trabajar con la serie completa y con todos los valores de  $n$ , pero si el número de datos de la serie tiene un número mínimo de divisores, `MinDiv`, consideramos sólo estos valores y si no lo tiene, siempre y cuando los datos despreciados no superen el porcentaje máximo de datos a despreciar, `MaxPor`, despreciamos datos de la serie para que el número de datos de

la nueva serie tenga un número adecuado de divisores, que serán los valores de  $n$  que utilicemos.

El cálculo del exponente de Hurst lo realizamos mediante la función:

```
Hurst[Datos,MinDat,MinSub,MinDiv,MaxPor]:=
  Pte[Map[N, Map[Log,
    RsLista[Datos,MinDat,MinSub,MinDiv,MaxPor]]]]
```

```
Hurst[Datos]:= Hurst[Datos, 5, 10, 12, 1]
```

donde vamos a tomar por defecto, al igual que en todos los casos, el número mínimo de datos que aparece en cada subserie como 5, el número mínimo de subseries que consideramos a la hora de calcular la media como 10, el número mínimo de valores de  $n$  para estudiar el comportamiento del rango como doce y el porcentaje máximo de datos que podemos despreciar como el 1%.

El cálculo de los valores  $R/S$  de las distintas subseries en las que dividimos la serie `Datos` lo realizamos mediante la función:

```
RsLista[datos_,MinDat_,MinSub_,MinDiv_,MaxPor_]:=
  Block[{l1l={},l1,NNN,datosNw},
    l1=ListaN[datos,MinDat,MinSub,MinDiv,MaxPor];
    datosNw=Take[datos,NN=First[l1]];
    l1=Last[l1];
    While[l1!={},
      NNN=First[l1];
      l1=Rest[l1];
      l1l=Append[l1l,{NNN,Mean[Rs/@ Partition[datosNw,NNN]]}]];
    l1l]
```

```
RsLista[datos]:=RsLista[datos_, 5, 10, 12, 1]
```

cuyo resultado es una lista con los valores de  $n$  utilizados frente a la media de los correspondientes valores  $(R/S)_n$ .

Por último, el cálculo de los valores  $R/S$  de cada una de las subseries correspondiente al algoritmo 5.2 lo realizamos mediante la función

```
Rs[SubDatos_]:=
Block[{l11=SubDatos, Md, St, DsvAc, Rng},
Md=Mean[l11];
St=StandardDeviationMLE[l11];
DsAc=Table[Sum[l11[[n]]-Md,{n,1,i}], {i,1,Length[l11]}];
Rng=SampleRange[DsvAc];
Divide[Rng,St]]
```

donde, al trabajar directamente con los incrementos logarítmicos del proceso, el cálculo de los incrementos que aparecen en el primer paso del algoritmo no se realiza.

La función que sí calcula estos incrementos, y que, por tanto no utilizaremos, es:

```
Rs[SubDatos_]:=
Block[{l1=SubDatos, l11={}, X=0, Md, St, DsvAc, Rng},
While[l1!={},
l11=Append[l11,First[l1]-X];
X=First[l1];
l1=Rest[l1]];
Md=Mean[l11];
St=StandardDeviationMLE[l11];
DsvAc=Table[Sum[l11[[n]]-Md,{n,1,i}], {i,1,Length[l11]}];
Rng=SampleRange[DsvAc];
Divide[Rng,St]]
```



# Bibliografía

- [1] N. E. Aguilera. *Un Paseo por el Jardín de los Fractales*. Red Olímpica, 1995.
- [2] L. Bachelier. Theory of speculation. Incluido en [16], 1900.
- [3] M. F. Barnsley. Fractal functions and interpolation. *Constructive Approximation*, 2(4):303–329, 1986.
- [4] M. F. Barnsley. *Fractals Everywhere*. Academic Press, 1993.
- [5] M. F. Barnsley, J. Elton, D. Hardin, y P. Massopust. Hidden variable fractal interpolation functions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 20(5):1218–1242, 1989.
- [6] D. Bartholomew. *Stochastic Models for Social Processes*. John Wiley & Sons, 1982.
- [7] M. A. Berger. *An Introduction to Probability and Stochastic Processes*. Springer-Verlag, 1993.
- [8] M. V. Berry y Z. V. Lewis. On the Weierstrass-Mandelbrot fractal function. *Proceedings of the Royal Society. London. Series A.*, 370(1743):459–484, 1980.
- [9] J. Bertoin. *Lévy Processes*. Cambridge University Press, 1996.
- [10] W. A. Brock y A. G. Malliaris. *Stochastic Methods in Economics and Finance*. Elsevier, 1982.
- [11] J. Busto, L. Delgado y J. Muñoz. Dimensión de recuento por cajas: El ibex-35. Primeras Jornadas de Matemáticas en la Economía, A Coruña, Junio 2001.

- [12] J. Busto, L. Delgado y J. Muñoz. Un análisis fractal del ibex-35. XV Reunión Asepelt, A Coruña, Junio 2001.
- [13] J. Y. Campbell, A. W. Lo y A. C. MacKinlay. *The Econometrics of Financial Markets*. Princenton University Press, 1997.
- [14] K. L. Chung. *A Course in Probability Theory*. Academic Press, 1974.
- [15] K. L. Chung. *Teoría Elemental de la Probabilidad y de los Procesos Estocásticos*. Reverté, 1983.
- [16] P. Cootner (editor). *The Random Character of Stock Market Prices*. Risk Books, 2000. 1ª edición Cambrige: M.I.T. Press 1964.
- [17] D. R. Cox y H. D. Miller. *The Theory of Stochastic Processes*. Chapman and Hall, 1965.
- [18] A. J. Crilly, R. A. Earnshaw y H. Jones (editores). *Fractals and Chaos*. Springer-Verlag, 1991.
- [19] R. M. Crownover. *Introduction to Fractals and Chaos*. Jones and Bartlett Publishers, 1995.
- [20] J. Davidson. *Stochastic Limit Theory*. Oxford University Press, 1997.
- [21] M. de Guzmán, M. A. Martín, M. Morán y M. Reyes. *Estructuras Fractales y sus Aplicaciones*. Labor, 1993.
- [22] J.-P. Delahaye. Matematización del parecido. *Investigación y Ciencia*, pp. 78–83, Septiembre 1997.
- [23] L. Delgado. Una introducción a los conjuntos fractales. Dpto. Economía Aplicada I, Universidad de Sevilla, 1999.
- [24] J. L. Doob. *Stochastic Processes*. John Wiley & Sons, 1953.
- [25] G. A. Edgar. *Measure, Topology and Fractal Geometry*. Springer-Verlag, 1990.

- [26] G. A. Edgar. *Integral, Probability and Fractal Measures*. Springer-Verlag, 1998.
- [27] P. Embrechts y M. Maejima. An introduction to the theory of self-similar stochastic processes. *International Journal of Modern Physics B.*, 14(12-13):1399–1420, 2000.
- [28] K. J. Falconer. *The geometry of fractal sets*. Cambridge University Press, 1986.
- [29] K. J. Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, 1990.
- [30] K. J. Falconer. *Techniques in Fractal Geometry*. John Wiley & Sons, 1997.
- [31] E. F. Fama. Mandelbrot and the stable paretian hypothesis. *The Journal of Business*, 36:420–429, October 1963. Incluido en Cootner [16] y Mandelbrot [50].
- [32] E. F. Fama. The behavior of stock-market prices. *The Journal of Business*, 38(1):34–105, January 1965. Incluido en Lo [43].
- [33] E. F. Fama. Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. *The Journal of Finance*, 25(2):383–417, May 1970. Incluido en Lo [43].
- [34] J. Feder. *Fractals*. Plenum Press, 1988.
- [35] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, 1969.
- [36] W. Feller. *Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones*, vol. I. Limusa, 1973.
- [37] W. Feller. *Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones*, vol. II. Limusa, 1978.
- [38] W. Franz. *Topología General y Algebraica*. Selecciones Científicas, Madrid, 1968.
- [39] J. M. Gutierrez, A. Iglesias, M. A. Rodríguez y V. J. Rodríguez. Generating and rendering fractal images. *The Mathematical Journal*, 7:6–13, 1996.

- [40] J. E. Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, 30(5):713–747, 1981.
- [41] S. Karlin y H. M. Taylor. *A First Course in Stochastic Processes*. Academic Press, 1975.
- [42] J. Lamperti. Semi-stable stochastic processes. *Transactions of the American Mathematical Society*, 104:62–78, 1962.
- [43] A. W. Lo (editor). *Market Efficiency: Stock Market Behaviour in Theory and Practice (I y II)*. Edward Elgar Publishing Ltd., 1997.
- [44] A. W. Lo y A. C. MacKinlay. *A Non-Random Walk Down Wall Street*. Princeton University Press, 1999.
- [45] P. Lévy. *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, 1925.
- [46] B. B. Mandelbrot. The pareto-lévy law and the distribution of income. *International Economic Review*, 1:79–106, 1960. Incluido en Mandelbrot [50] como *L-stable model for the distribution of income*.
- [47] B. B. Mandelbrot. The variation of certain speculatives prices. *The Journal of Business*, 36:394–419, October 1963. Incluido en Cootner [16], Mandelbrot [51] y Mandelbrot [50].
- [48] B. B. Mandelbrot. Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi; application à la loi climatologique de H. E. Hurst. *Comptes Rendus (Paris)*, 260:3274–3277, 1965. Incluido en Mandelbrot [53].
- [49] B. B. Mandelbrot. Del azar benigno al azar salvaje. *Investigación y Ciencia*, pp. 14–20, Diciembre 1996.
- [50] B. B. Mandelbrot. *Fractals and Scaling in Finance*. Springer-Verlag, 1997.
- [51] B. B. Mandelbrot. *La Geometría Fractal de la Naturaleza*. Tusquet Editores, 1997.

- [52] B. B. Mandelbrot. *Multifractals and 1/f noise*. Springer-Verlag, 1999.
- [53] B. B. Mandelbrot. *Gaussian Self-Affinity and Fractals*. Springer-Verlag, 2001.
- [54] B. B. Mandelbrot and J. W. V. Ness. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 10:422–437, 1968. Incluido en Mandelbrot [53].
- [55] P. Mattila. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and rectifiability*. Cambridge University Press, 1995.
- [56] R. D. Mauldin y S. C. Williams. On the Hausdorff dimension of some graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 298(2):793–803, 1986.
- [57] R. F. Mulligan. A fractal analysis of foreign exchange markets. *International Advances in Economic Research*, 6(1):33–50, February 2000.
- [58] L.Ñottale. El espacio-tiempo fractal. *Investigación y Ciencia*, pp. 66–73, Julio 1997.
- [59] M. Osborne. Brownian motion in the stock market. *Operations Research*, 7:145–173, 1959. Incluido en Cootner [16] y Lo [43].
- [60] J. R. Pastor, L. A. Santaló y M. Balanzat. *Geometría Analítica*. Kapelusz, 1969.
- [61] H.-O. Peitgen, H. Jürgens y D. Saupe. *Fractals for the Classroom*. Springer-Verlag, 1992.
- [62] E. E. Peters. *Chaos and Order in the Capital Markets*. John Wiley & Sons, 1991.
- [63] E. E. Peters. *Fractal Market Analysis*. John Wiley & Sons, 1994.
- [64] V. V. Petrov. *Sums of Independent Random Variables*. Spinger-Verlag, 1975.
- [65] C. A. Rogers. *Hausdorff measures*. Cambridge University Press, 1998.

- [66] P. Samuelson. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review*, 6:41–49, 1965. Incluido en Lo [43].
- [67] P. Samuelson. Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review*, 6:13–31, 1965. Incluido en Lo [43].
- [68] A.Ñ. Shiryaev. *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*, vol. 3 of *Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability*. World Scientific, 1999.
- [69] I. Stewart. *¿Juega Dios a los Dados?. La Nueva Matemática del Caos*. Grijalbo Mondadori, 1996.
- [70] P. Todorovic. *An Introduction to Stochastic Processes and Their Applications*. Springer-Verlag, 1992.
- [71] H. R. Varian (editor). *Economic and Financial Modeling with Mathematica*. Springer-Verlag, 1993.
- [72] H. R. Varian (editor). *Computational Economics and Finance*. Springer-Verlag, 1996.
- [73] T. Vicsek. *Fractal Growth Phenomena*. World Scientific, 1992.