



# El pensamiento matemático. Una experiencia de aula

Inés M<sup>a</sup> Gómez Chacón(\*)  
Centro Nebrija. Sevilla

## RESUMEN

Esta comunicación presenta una experiencia sobre el proceso de resolución de problemas en un grupo de alumnos de 1º de B.U.P. Analiza cómo se pueden favorecer y mejorar los procesos de pensamiento matemático, utilizando para ello el trabajo con protocolos.

## Antecedentes y justificación

Podemos situar el comienzo del movimiento en favor de la enseñanza de la resolución de problemas en los EE.UU., hacia finales de los 70. Después de un análisis de los planes de estudio en 1978 se puso de manifiesto que los estudiantes no sabían aplicar sus conocimientos a la resolución de problemas de la vida real, esto dio lugar a que la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) declare que «la resolución de problemas ha de ser el centro de enseñanza de las matemáticas en los años 80» (NCTM: An Agenda for Action, Reston 1980). También desde los años 50, el estudio de muchos psicólogos sobre creatividad -Davis y Scott, Adams, De Bono, Guilford, E. Wood- ha ido estrechamente ligado con la resolución de problemas.

Vemos pues, que este tema no es tan nuevo como parece; lo que sí es nuevo, sin embargo, es el énfasis puesto en comprender la naturaleza de los procesos mentales del pensamiento de los alumnos, la exploración y práctica de diferentes alternativas, métodos, actitudes, situaciones que más pueden contribuir a favorecer el proceso de resolución de problemas (Schoenfeld, Polya, Mason, Burton y Staley, M. de Guzmán).

Presentamos una propuesta metodológica para desarrollar la resolución de problemas. Esta metodología pone el énfasis en la adquisición de procesos de pensamiento útiles en el enfrentamiento con los problemas intelectuales. No se trata de enseñar más

(\*) Arquijo, 5  
41003 Sevilla



contenido, sino de aprovechar los conocimientos que ya tiene el estudiante; que adquiera el hábito de la reflexión sobre los propios procesos de pensamiento como técnica fundamental para su mejora. La resolución de problemas es un proceso, no un procedimiento paso a paso o una respuesta que hay que encontrar.

La matemática escolar que se imparte actualmente en nuestro país proporciona poco equipamiento para resolver problemas pues se presta poca atención o se ignoran objetivos tales como: identificar el problema, encontrar la técnica adecuada para resolverlo, etc...

Se corre el riesgo de trabajar sólo con ejercicios o problemas de solución directa. La resolución de problemas es una actividad mental compleja y la habilidad para la resolución no está, necesariamente, relacionada con los contenidos matemáticos que proporcionan unos estudios, sino con la experiencia y con el conocimiento de las propias capacidades y limitaciones.

### Desarrollo de la experiencia

Nos limitaremos a hacer un breve resumen de las ideas más generales y exponer con algún detalle ciertas situaciones específicas que muestran algunos rasgos relevantes del proceso de resolución de problemas en 1º de B.U.P. Lo haremos a partir de una experiencia desarrollada con un grupo mixto de 45 alumnos durante el curso 87-88.

Como *modelo de referencia* para el desarrollo de nuestra experiencia, tomamos el concepto sobre el pensamiento matemático que desarrolla J. Mason, L. Burton y K. Staley en su manual "Thinking Mathematically". Expondremos una síntesis del modelo a través de la respuesta a un cuadro de preguntas claves sobre éste:

#### *¿Qué es el pensamiento matemático?*

Un proceso dinámico. La dinámica del pensamiento matemático se puede presentar como una espiral; cada vuelta es un avance en el grado de abstracción, cada bucle constituye un proceso subdividido de la manera siguiente:

1. Familiarización con el problema: Observar, comprender el problema, manipular y analizar casos particulares.
2. Conjeturar a partir de la observación de los casos particulares.
3. Generalizar las regularidades observadas o relaciones.
4. Justificar, probar o demostrar la propiedad.

#### *¿Qué usaremos para hacer esto?*

- Particularización, conjetura, generalización, demostración.

#### *¿Cómo se procede?*

- En fases: De entrada, ataque y volver atrás.

#### *¿Que fases subrayamos?*

- Entrada que nos sitúa en las bases y fundamentos de la fase de ataque.
- Volver atrás que es la más educativa.



*¿Qué mejora el pensamiento matemático?*

- La práctica y la reflexión sobre sus propios procesos de pensamiento.

*¿Qué mantiene el pensamiento matemático?*

- Una atmósfera de confianza, de cuestionamiento, de reto y desafío, de reflexión. Siempre contando con un amplio espacio de tiempo.

*¿Qué provoca el pensamiento matemático?*

- La curiosidad, la sorpresa, la contradicción. Percibir un salto en el entendimiento.

*¿A dónde conduce el pensamiento matemático?*

- A una profundización en el conocimiento de uno mismo.

- A una más coherente observación y análisis.

- A una más efectiva investigación de qué quiero y qué sé.

- A transferir estos procesos mentales a otras áreas de conocimiento y a otros aspectos de su vida, valorando críticamente lo que se ve y oye.

- A prepararse para nuevos retos que se le presentan con el desarrollo de la tecnología y la ciencia.

Para favorecer el aprendizaje de estas fases y procesos involucrados en ellos, preparamos una amplia colección de problemas que, clasificados en concordancia con los procesos y habilidades, pretendimos no sólo fueran comprendidos por los alumnos para su aplicación inmediata, sino que pudieran ser incorporados a su banco de estrategias, listos para ser usados cuando la ocasión se presentase.

### Temporalización de la experiencia

Momentos y actividades en el desarrollo de nuestra experiencia.

1. *Familiarización con las distintas actividades matemáticas.* De Septiembre a Noviembre facilitamos a los alumnos 9 hojas de trabajo, una o dos por semana, con dos tipos de actividades matemáticas: uno o dos problemas propiamente dichos y ejercicios correspondientes a los temas de 1º de B.U.P.: el números real, funciones...

2. *Paso del lenguaje natural al lenguaje matemático.* Palabras del lenguaje usual utilizadas en el lenguaje matemático: símbolos, conjunciones, etc. Para ellos les facilitamos textos de periódicos, problemas sencillos,... y tres hojas del estilo de las descritas antes. Todo esto lo trabajamos durante 15 horas entre Noviembre y Diciembre.

3. *Aprender a leer un texto matemático.* Ya en el segundo trimestre constatamos que las mayores dificultades de los alumnos para resolver problemas eran de origen extramatemático: incomprensión del enunciado, ansiedad ante esta materia, etc. Tratamos sobre cómo aprender a leer un texto matemático explicando que cada palabra es fundamental para su comprensión completa y que su lectura no es lineal, comentando textos y adquiriendo un vocabulario matemático.

4. *Algunos bloqueos de tipo mental.* Revisión de supuestos mediante una serie de problemas (Anexo). Dedicamos 4 horas en dos semanas.





5. *Aprendizaje de estrategias.* Dos hojas con una selección de problemas donde se pusiera de manifiesto la necesidad de utilizar estrategias generales. Una de ellas se le dio solucionada a cada alumno, desglosando las fases de resolución (ver apéndice). Se repartió una hoja por semana, dedicando dos horas de clase a cada una y trabajo personal.

6. *Protocolo de resolución.* Nos dimos cuenta de que había que encontrar un método más eficaz que nos permitiera ver el proceso seguido por cada alumno y seguirlo personalmente. Decidimos que una vez que ellos habían visto modelos, ideas... debíamos poner el énfasis en que cada uno adquiriera el hábito de la reflexión sobre su propio proceso de pensamiento como técnica fundamental para su mejora. Utilizamos el trabajo y análisis de protocolos, es decir, le dábamos a cada uno una hoja, con un único problema, y dividida en dos partes. En una, el alumno apuntaba lo que pensaba, su proceso... en la otra la solución. Después de corregido y comentado a cada uno, él lo revisaba, y más tarde hacíamos puesta en común y corrección en la pizarra. Dedicamos a ello 15 horas de clase.

Estas sesiones permitían conocer de cerca algunos elementos subyacentes a la resolución de problemas: bloqueos más habituales, forma de proceder de cada individuo, ensayo de materiales y estrategias, e ir dibujando atentamente el proceso de investigación, el estado emocional y psicológico que ello provoca y concentrándonos en estos factores no sólo como ayuda al estudiante en su proceso de desarrollo del pensamiento matemático sino como instrumento para evaluar la capacidad de resolver problemas.

Actualmente existen pruebas diseñadas a tal efecto con problemas de distintas partes de la matemática; también hay tablas para cuantificar esta habilidad teniendo en cuenta el plan de resolución, la estrategia utilizada, los cálculos y el razonamiento. Pero tanto en uno como en otro caso sólo se valora la respuesta final, ignorando el proceso seguido hasta ella. Creemos que con el análisis de protocolos podemos evaluar mediante un planteamiento más cualitativo en el que no se pierda de vista todo el proceso desde su fase de incubación. Para esto necesitamos seguir la evolución de los trabajos del estudiante durante un periodo largo de tiempo, ya que las distintas fases no se desarrollan en un periodo fijo y depende del momento psicológico del individuo, y realizar una medida estadística de estos trabajos en la que se tengan en cuenta varios parámetros como: primeras ideas, diagramas hechos, capacidad para hacer distintos tipos de razonamiento, fases de resolución, empleo de estrategias, flexibilidad, perseverancia en el trabajo, creatividad para explorar nuevos caminos y superar bloqueos...

El cuadro que viene a continuación nos puede servir como esqueleto para efectuar un análisis de protocolos.

En todas las sesiones de la experiencia hubo trabajo personal y en equipo, pero haciendo más énfasis en el primero por creerlo más adecuado para que desarrolle una actitud reflexiva, que active su propia capacidad mental, aunque sin dejar de lado un intercambio de opiniones.



PROCESOS	FASES	PALABRAS CLAVES	PROCESOS	SITUACION EMOCIONAL
				Enfrentamiento con situaciones nuevas.
PARTICULARIZACION	ENTRADA	YO SE		Involucrarse en la situación Confusión
		YO QUIERO		
		YO INTRODUCO		
		atascado (¡ajá!)		
ATAQUE	ATAQUE	PROBAR	CONJETURAR	¡Tengo que continuar!
		QUIZAS...	JUSTIFICAR	
		PERO ¿POR QUE?		
GENERALIZACION				Discernimiento
VOLVER ATRAS	VOLVER ATRAS	REVISAR		Siendo escéptico
		REFLEXIONAR		Contemplar
		AMPLIAR		Proyectar

- YO SE** - leer el problema atentamente
- particularizar para desempeñar la situación
  - descubrir las ideas, hechos, destrezas relevantes
  - buscar un problema similar

- YO QUIERO** - clasificar y separar la información
- estar alerta a las ambigüedades
  - particularizar para descubrir el problema real

- YO INTRODUCO** - imágenes, diagramas, símbolos
- representaciones, notaciones
  - organización

- REVISAR** - cálculos
- argumentos para estimar la validez de los resultados
  - consecuencias y conclusiones para ver si son razonables
  - adecuación de la resolución al problema

- REFLEXIONAR** - sobre las ideas y momentos claves
- implicaciones, conjeturas y argumentos
  - ¿podemos encontrar una solución más elegante?

- AMPLIAR** - extender el resultado a un contexto más amplio
- buscar una nueva resolución
  - alterar algunas de las restricciones

### Valoración de la experiencia

Este método resulta atractivo, divertido, creativo, pues rompe con la idea que traen sobre matemáticas como un campo árido y monótono. Subrayando el cambio de acti-

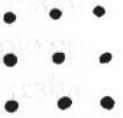


tud que poco a poco se va produciendo en los alumnos al abordar problemas. Proporciona una motivación mayor que ayuda a asimilar mucho más profundamente los contenidos del programa de 1º de B.U.P.

## ANEXO

### *Problemas para la revisión de supuestos*

1º Nueve puntos se hallan distribuidos como muestra la figura. El problema consiste en unir esos nueve puntos mediante el trazado de sólo 4 rectas, pero sin levantar el lápiz del papel.



2º Un jardinero recibe instrucciones especiales para plantar 4 árboles de modo que cada uno de ellos se halle a la misma distancia de los otros tres. ¿Cómo pueden disponerse los árboles?

### *Problemas para aprendizaje de estrategias*

1º Para enseñar a particularizar sistemáticamente: Números capicúas: Todos los números capicúas de 4 dígitos son divisibles por 11. ¿Es verdad? ¿por qué?

2º Para conjeturar sobre relaciones existentes entre los casos particulares:

### *Suma de consecutivos:*

Algún número natural puede ser expresado como suma de varios números naturales consecutivos. ¿Qué números tienen esta propiedad?

## REFERENCIAS

- ADAMS, James L. (1987). *Juegos de desbloqueo mental*. Gedisa. Barcelona.
- BOLT, B. (1988). *Divertimentos matemáticos*. Ed. Labor. Barcelona.
- BURTON, L., MASON, J., STALEY, K. (1982). *Thinking Mathematically*. Ed. Addison. Wesley.
- DAVIS, G. A., SCOTT, J. A. (1980). *Estrategias para la creatividad*. Paidós. Buenos Aires.
- DE BONO, E. (1986). *El pensamiento lateral*. Paidós. Barcelona.
- DE GUZMAN, M. (1984). *Cuentas con cuentos*. Labor. Barcelona.
- DE GUZMAN, M. (1986). *Aventuras matemáticas*. Labor. Barcelona.
- DE GUZMAN, M. (1987). Enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas. *Educación Abierta*, 71. I.C.E. Universidad de Zaragoza.
- GUILFORD, J. A. y otros. (1983). *Creatividad y educación*. Paidós. Barcelona-Buenos Aires.
- POLYA, G. (1957). *How to solve it*. Doubledoy. New York.
- SHOENFELD, A. (1985). Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. *La enseñanza de la matemática a debate*. M.E.C. Madrid.
- WOOD, E. (1987). *Estrategias de pensamiento*. Labor. Barcelona.