

Trabajo Fin de Máster
Máster Universitario en Ingeniería Aeronáutica

Optimización de trayectorias de avión
sujetas a incertidumbre meteorológica

Autor: Mercedes Cordero Romero

Tutor: Antonio Franco Espín

Dep. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016



Trabajo Fin de Máster
Máster Universitario en Ingeniería Aeronáutica

Optimización de trayectorias de avión sujetas a incertidumbre meteorológica

Autor:

Mercedes Cordero Romero

Tutor:

Antonio Franco Espín

Dep. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016

Trabajo Fin de Máster: Optimización de trayectorias de avión sujetas a incertidumbre meteorológica

Autor: Mercedes Cordero Romero
Tutor: Antonio Franco Espín

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

Resumen

En este trabajo se analiza el vuelo de crucero de mínimo tiempo entre el Aeropuerto Internacional John F. Kennedy, en Nueva York (JFK) y el Aeropuerto Internacional Leonardo da Vinci, en Roma (FCO), en ambos sentidos de vuelo. La optimización se realiza en presencia de viento, considerando diferentes escenarios derivados de predicciones meteorológicas obtenidas gracias al *European Centre for Medium-Range Weather Forecasts* (ECMWF) mediante el método numérico denominado *Ensemble Prediction System* (EPS).

Dado que todo el tramo se considera a velocidad aerodinámica y altitud constante, el problema de mínimo tiempo coincide con el de mínimo consumo. El problema planteado se estudia mediante dos enfoques diferentes: considerando una trayectoria con restricciones en cuanto a los puntos de paso, que se resuelve mediante un algoritmo de grafos muy popular denominado Algoritmo de Dijkstra; y considerando una trayectoria libre, empleando la Teoría de Control Óptimo para la resolución.

El proceso de optimización se lleva a cabo además para cuatro casos de estudio diferentes, pudiendo evaluar a posteriori el coste que resultaría de recorrer las trayectorias óptimas en presencia de cada escenario meteorológico de los que se dispone. Ésto permite establecer comparaciones tanto entre los casos de estudio como entre los enfoques planteados para el problema.

Índice

<i>Resumen</i>	I
1 Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.2 Objetivo	1
1.3 Estructura del documento	2
2 Planteamiento del problema	3
2.1 Ruta a optimizar	3
2.2 Hipótesis y ecuaciones del movimiento	3
2.3 Predicciones meteorológicas basadas en <i>ensembles</i>	6
2.4 Casos de estudio	7
3 Trayectoria basada en waypoints	9
3.1 Formulación del problema	9
3.1.1 Algoritmo de Dijkstra	9
3.1.2 Mallado y estructura del grafo	10
3.1.3 Coste de cada tramo	11
3.2 Resultados	12
3.2.1 Caso 1	12
3.2.2 Caso 2	16
3.2.3 Caso 3	23
3.2.4 Caso 4	26
4 Trayectoria libre	33
4.1 Formulación del problema	33
4.1.1 Problema de control óptimo	33
4.1.2 Condiciones necesarias de optimalidad	34
4.1.3 Funciones objetivo	34
4.1.4 Método numérico	37
4.2 Resultados	38
4.2.1 Caso 1	38
4.2.2 Caso 2	42
4.2.3 Caso 3	45
4.2.4 Caso 4	49
5 Comparativa entre ambos enfoques	53
5.1 Caso 1	53
5.2 Caso 2	53
5.3 Caso 3	56
5.4 Caso 4	56
6 Resultados adicionales	61

6.1	Escenarios meteorológicos	61
6.2	Trayectoria basada en waypoints	61
6.3	Trayectoria libre	65
6.4	Comparativa entre ambos enfoques	69
7	Conclusiones y trabajo futuro	73
	<i>Índice de Figuras</i>	77
	<i>Índice de Tablas</i>	79
	<i>Bibliografía</i>	81

1 Introducción

1.1 Motivación

El problema de optimización de trayectorias en aviones comerciales se enfoca tradicionalmente a la minimización del tiempo de vuelo, del consumo de combustible o de una combinación de ambos. Desarrollar el plan de vuelo basándose en este tipo de trayectorias conlleva numerosas ventajas, tales como una reducción en el coste por parte de los operadores o una disminución de las emisiones, reduciéndose por tanto el impacto ambiental.

Debido a las restricciones de tráfico aéreo existentes, las aeronaves comerciales se ven obligadas a realizar su crucero en tramos a altitud constante. Dado que el crucero supone la mayor parte del vuelo de la aeronave, optimizar dicho segmento puede convertirse en un objetivo primordial para los operadores.

No obstante, es necesario resaltar que la trayectoria óptima entre dos puntos no siempre es la misma, ya que ésta depende fuertemente de la situación meteorológica que se encuentre la aeronave. Actualmente existen diversos organismos que ponen a nuestra disposición datos meteorológicos de predicciones realizadas mediante diferentes métodos numéricos, incluyendo datos de viento, los cuales pueden ser empleados en sustitución de los modelos teóricos normalmente utilizados. Esto permite calcular trayectorias entre dos puntos geográficos concretos, que se esperan sean más realistas y permitan una mejor planificación del vuelo.

1.2 Objetivo

El objetivo de este trabajo es el cálculo de la trayectoria de mínimo tiempo entre dos puntos determinados en presencia de viento, considerando diferentes casos de estudio y escenarios meteorológicos reales basados en predicciones. Esta trayectoria consiste en un único tramo de crucero a velocidad aerodinámica y altitud constante, ambas fijadas de antemano. Obtenido dicho camino, se podrá calcular el coste resultante (en términos de tiempo de vuelo y masa de combustible necesaria) de seguir la trayectoria óptima calculada en cada caso de estudio en presencia de los diferentes escenarios meteorológicos de los que se dispone, pudiendo obtener así parámetros de interés como la media o la desviación típica de dicho coste.

El cálculo de las trayectorias óptimas se realiza desde dos enfoques distintos:

- **Trayectorias basadas en waypoints.** En este primer enfoque se define un conjunto de puntos geográficos por su latitud y longitud, unidos entre ellos por tramos loxodrómicos, de manera que la trayectoria debe estar compuesta necesariamente por una sucesión de dichos tramos. Este enfoque conlleva por tanto un número finito de trayectorias posibles que unen los puntos de origen y destino, encontrándose la trayectoria óptima dentro de este subespacio. El curso que pueda tomar la aeronave estará limitado a un conjunto de valores determinado por el de las trayectorias loxodrómicas que unen los puntos de paso. Este problema se resolverá mediante un famoso algoritmo de búsqueda de caminos en grafos que calcula el camino de mínimo coste entre sus vértices, el Algoritmo de Dijkstra.
- **Trayectorias libres.** En contraste al caso anterior, se resolverá también el problema considerando trayectorias libres, entendiendo como tales aquellas que pueden pasar por cualquier punto geográfico,

no estando por tanto limitado el curso que pueda seguir la aeronave. Este problema se resolverá haciendo uso de la Teoría de Control Óptimo, mediante el empleo de un método indirecto.

Resolver el problema planteado desde los dos enfoques anteriores permite establecer comparaciones entre sus resultados, pero también entre otros aspectos como la complejidad de los métodos de resolución empleados.

1.3 Estructura del documento

El documento en el que se presenta el trabajo se divide en siete capítulos. En el Capítulo 2 se describe el planteamiento del problema, presentando la ruta que se desea optimizar; las hipótesis y ecuaciones en las que se basan los métodos de resolución; una explicación sobre los campos de viento empleados en la resolución de las ecuaciones, y los diferentes casos de estudio considerados.

En el Capítulo 3 y en el Capítulo 4 se recogen los resultados obtenidos de la resolución del problema para trayectorias basadas en puntos de paso (waypoints) y para trayectorias libres, respectivamente. En cada uno de estos capítulos se formula el problema teniendo en cuenta las peculiaridades de cada enfoque y explicando el método de resolución, y se presentan los resultados obtenidos para cada caso de estudio considerado.

En el Capítulo 5 se presenta una comparativa entre ambos enfoques, enfrentando los resultados obtenidos en la optimización.

En el Capítulo 6 se recogen unos resultados adicionales, derivados de considerar unos escenarios meteorológicos radicalmente distintos a los analizados a lo largo del trabajo, con el objetivo de comprobar la dependencia de los resultados obtenidos con la situación meteorológica considerada.

Por último, en el Capítulo 7 se recogen unas conclusiones generales del proyecto y un posible trabajo futuro para completarlo.

2 Planteamiento del problema

En este capítulo se presenta el planteamiento del problema a resolver. En primer lugar se describe la ruta que se quiere optimizar y las características de la misma. En segundo lugar se recogen las hipótesis realizadas, las ecuaciones del movimiento de la aeronave particularizadas para el caso de estudio, así como el valor que se ha considerado de ciertos parámetros de la aeronave. En tercer lugar se trata el tema de los escenarios meteorológicos que se han tomado para la resolución de los diferentes problemas de optimización. Por último, se describen los diferentes casos de estudio que se han considerado en relación a los escenarios meteorológicos.

2.1 Ruta a optimizar

La ruta que se considera a lo largo de todo el trabajo, y que se desea optimizar, es la comprendida entre el Aeropuerto Internacional John F. Kennedy, en Nueva York (código IATA: JFK) y el Aeropuerto Internacional Leonardo da Vinci, en Roma (código IATA: FCO), estudiando el vuelo en ambos sentidos. Las coordenadas geográficas de ambos aeropuertos se recogen en la Tabla 2.1 [1], [2]. Se trata un vuelo transoceánico que realizan compañías como Air France, Alitalia o British Airways y que suele tener duración aproximada de 8.5 horas (JFK-FCO) y de 9.5 horas (vuelo FCO-JFK).

Tabla 2.1 Coordenadas geográficas de los aeropuertos de origen y destino.

	JFK	FCO
Latitud (φ)	40°38' 23'' N	41°48' 1'' N
Longitud (ξ)	73°46' 44'' O	12°14' 20'' E

Tomando un modelo de tierra esférica con un radio de 6371 km, que será el considerado a lo largo de todo el trabajo, se obtiene que la distancia ortodrómica que separa ambos puntos es de 6876.5 km. En la Figura 2.1 se representan dicha ruta bajo una proyección de Mercator.

2.2 Hipótesis y ecuaciones del movimiento

Las hipótesis que se han realizado en el desarrollo del trabajo son las siguientes:

1. Se toma un modelo de tierra esférica, con radio de 6371 km [3], y aceleración de la gravedad constante, de valor 9.81 m/s^2 .
2. Se considera toda la ruta como un único tramo de crucero, partiendo del punto inicial hasta el punto final. No se consideran por tanto tramos de ascenso, descenso, circuitos de espera u otros.
3. El crucero se realiza a velocidad aerodinámica y altitud constante; esta consideración supone una equivalencia entre los problemas de mínimo tiempo y de mínimo consumo, ya que el consumo de combustible es una función monótona creciente del tiempo de vuelo.

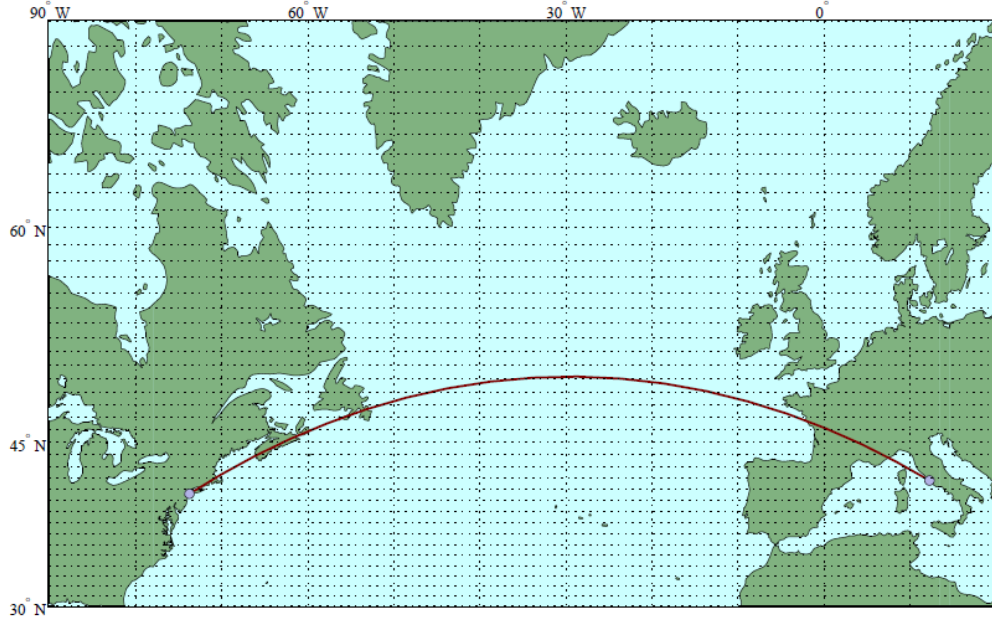


Figura 2.1 Ruta ortodrómica entre FCO y JFK.

4. El avión se estudia como un sólido rígido con tres grados de libertad, con todas las fuerzas actuando en su centro de gravedad.
5. El empuje se supone dirigido en la dirección de la velocidad aerodinámica.
6. El campo de vientos se encuentra contenido en el plano horizontal.
7. El valor de las derivadas de la velocidad del viento en las ecuaciones dinámicas se considera despreciable.

Bajo estas hipótesis, las ecuaciones que rigen el movimiento de la aeronave son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 (R_E + h) \frac{d\varphi}{dt} &= V_g \cos \psi \\
 (R_E + h) \cos \varphi \frac{d\xi}{dt} &= V_g \sin \psi \\
 L &= mg \\
 T &= D \\
 \frac{dm}{dt} &= -cT
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

En las ecuaciones anteriores, R_E es el radio de la Tierra; h es la altitud de la aeronave; φ es la latitud; ξ es la longitud; V_g la velocidad de la aeronave con respecto a Tierra; ψ es el curso de la aeronave; L , D y T son la sustentación, la resistencia aerodinámica y el empuje, respectivamente; m es la masa de la aeronave; c es el consumo específico y t es el tiempo. La resistencia aerodinámica puede expresarse de la forma $D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D$. En este trabajo se ha considerado como modelo aerodinámico una polar parabólica de coeficientes constantes, de la forma $C_D = C_{D_0} + C_{D_2} C_L^2$.

Para mantener un vuelo con un curso determinado, el rumbo debe, por lo general, modificarse. Esto requeriría el empleo del conjunto completo de ecuaciones 3D, lo que haría el problema excesivamente complejo. Por ello, los efectos del viento cruzado se analizarán de una forma simplificada consistente en tenerlos en cuenta en las ecuaciones cinemáticas e ignorarlos en la dinámica lateral, lo que da lugar a una menor velocidad respecto a Tierra. Teniendo esto en cuenta, la velocidad respecto a Tierra se puede expresar según (2.2), donde w_l es la velocidad del viento en sentido longitudinal (positiva si el viento es de cola, negativa en caso contrario) y w_c es la velocidad transversal (positiva si va de derecha a izquierda de la aeronave, negativa en

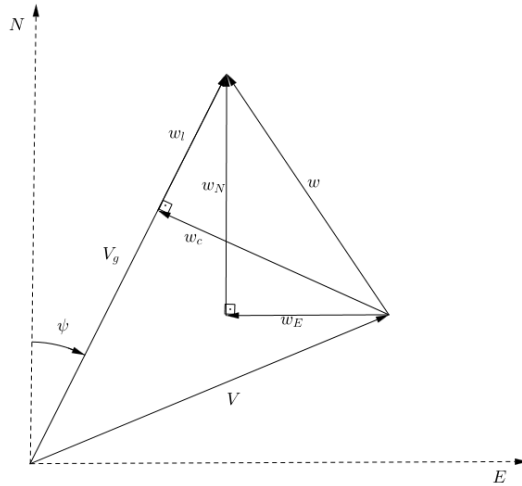


Figura 2.2 Triángulo del viento.

caso contrario) [4]. Esta relación se muestra gráficamente en la Figura 2.2.

$$V_g = \sqrt{(V^2 - w_c^2)} + w_l \tag{2.2}$$

Dado que los datos de viento que se reciben vienen en términos de w_N (velocidad del viento en sentido Norte) y w_E (velocidad del viento en sentido Este) resulta interesante obtener las expresiones de w_l y w_c en función de ellas. Las expresiones se deducen de aplicar la matriz de cambio de base apropiada:

$$\begin{aligned} w_l &= w_N \cos \psi + w_E \sin \psi \\ w_c &= w_E \cos \psi - w_N \sin \psi \end{aligned} \tag{2.3}$$

Por último, la ecuación (2.4) expresa la variación de la distancia recorrida por la aeronave (s) por unidad de tiempo:

$$\frac{ds}{dt} = (R_E + h) \sqrt{\dot{\phi}^2 + \cos^2 \phi \dot{\xi}^2} \tag{2.4}$$

Para el modelo de aeronave se ha elegido el Boeing 767-400. Los valores que se han tomado de los diferentes parámetros de la aeronave se recogen en la Tabla 2.2 [5]. Como puede observarse, se ha fijado el valor de la masa final (m_f) en lugar de la masa inicial, de manera que lo que se tiene es un peso fijo al llegar al destino, pudiendo calcular así la masa de combustible que se necesitaría cargar en el origen.

Tabla 2.2 Valores de parámetros.

Definición	Notación	Valor
Velocidad aerodinámica	V	240 m/s
Superficie alar	S	283.5 m ²
Consumo específico	c	$1.49 \cdot 10^{-5}$ s/m
Coeficientes de la polar parabólica	C_{D_0}	0.01744
	C_{D_2}	0.04823
Masa final	m_f	140000 kg
Altitud de vuelo	h	11800 m

2.3 Predicciones meteorológicas basadas en *ensembles*

En lugar de emplear un modelo teórico de viento, en este proyecto se trabaja con predicciones meteorológicas reales, obtenidas gracias al *European Centre for Medium-Range Weather Forecasts* (ECMWF), que actúa como servidor, a través de la herramienta desarrollada en [6]. Las predicciones las realizan diferentes organismos miembro, empleando el método conocido como *Ensemble Prediction System* (EPS). El principio fundamental en el que se basa este método numérico consiste en realizar no sólo una predicción desde la mejor condición inicial de la que se dispone, sino un grupo adicional de predicciones que partan de condiciones iniciales ligeramente perturbadas, siendo cada predicción calculada con un modelo ligeramente perturbado. Esta técnica permite tener en cuenta la incertidumbre en los datos que pueda derivarse de errores de observación o de otro tipo, así como un conocimiento imperfecto de la dinámica atmosférica [7], [8]. Gracias a este método, cuando se desee realizar una predicción a un tiempo determinado, se obtendrá un grupo de posibles estados futuros de la atmósfera (lo que se conoce como miembros del *ensemble*).

Como se ha mencionado, ECMWF pone a disposición del usuario los datos meteorológicos de las entidades colaboradoras que participan en el proyecto. Cada entidad posee su propio modelo, generando *ensembles* diferentes, con lo que elegir uno u otro depende de las características que se busquen. Los modelos disponibles en ECMWF son los siguientes [9]:

- **POAMA:** desarrollado por *Bureau of Meteorology* en Australia, cuenta con 33 miembros en su *ensemble*.
- **MOGREPS-15:** desarrollado por *China Meteorological Administration* tiene 15 miembros.
- **CPTEC EPS:** el *ensemble* del *Centro de Previsao Tempo e Estudos Climaticos* tiene 15 miembros.
- **ECMWF EPS:** el modelo del ECMWF es el más extenso, contando con 51 miembros.
- **JMA One-week EPS:** *Japan Meteorological Agency* posee un modelo con 27 miembros.
- **KMA EPSG:** el modelo desarrollado por *Korea Meteorological Administration* tiene un total de 24 miembros.
- **PEARP:** el modelo de *Météo-France* está compuesto por 35 miembros.
- **MOGREPS-G:** el modelo de *MetOffice* (Exeter, Reino Unido) tiene 12 miembros.
- **NCEP GEFS:** el modelo desarrollado de forma conjunta por *National Centres for Environmental Prediction* y *The National Center for Atmospheric Research* en EEUU tiene 21 miembros.

La herramienta de [6] permite realizar una solicitud a ECMWF para recibir predicciones meteorológicas pasadas, pudiendo obtener un mallado suficientemente fino en latitud y longitud del viento de dirección Norte (w_N) y Este (w_E) en el día y la hora deseada, lo cual completa los datos que se necesitan para computar las ecuaciones (2.1). Como se ha comentado en el apartado anterior, este mallado de viento se considera contenido en el plano horizontal en el que se mueve la aeronave.

La solicitud de los datos meteorológicos que realiza la herramienta de [6] requiere de la selección de varios parámetros: fecha y hora a la que se realizó la predicción, proveedor de datos meteorológicos (para este trabajo es *Météo-France*, el servicio meteorológico francés), horizonte al que se hace la predicción, isobárica y límites en latitud y longitud de los datos. En este trabajo se tienen tres predicciones, contando cada *ensemble* con 35 miembros, en el área y la altitud de interés, con las siguientes características:

1. Una predicción realizada el 26/06/2016 a las 06:00:00 a 6 horas;
2. Una predicción realizada el 25/06/2016 a las 18:00:00 a 18 horas; y
3. Una predicción realizada el 25/06/2016 a las 06:00:00 a 30 horas.

Como se puede observar, todas apuntan al mismo momento, las 12:00:00 del día 26/06/2016. El estudio se realizará para todas las predicciones, lo cual permitirá comparar los resultados entre sí para poner de manifiesto el efecto del horizonte de predicción sobre la trayectoria óptima.

Como ejemplo del campo de vientos, en la Figura 2.3 se representa cualitativamente el escenario de viento medio de la predicción a 18 horas. Uno de los aspectos importantes que se puede observar es un

predominio del viento de dirección Sur en las inmediaciones de FCO, y de una corriente en dirección Este en las inmediaciones de JFK; esta corriente es precisamente el *jet stream* del Atlántico Norte, ampliamente conocida y estudiada, que resulta fundamental para la previsión del tiempo de vuelo para rutas como la que se estudia en este trabajo [10].

Si bien los 105 escenarios meteorológicos de los que se dispone son todos diferentes entre sí, cualitativamente la distribución del viento es muy similar a la representada en la Figura 2.3.

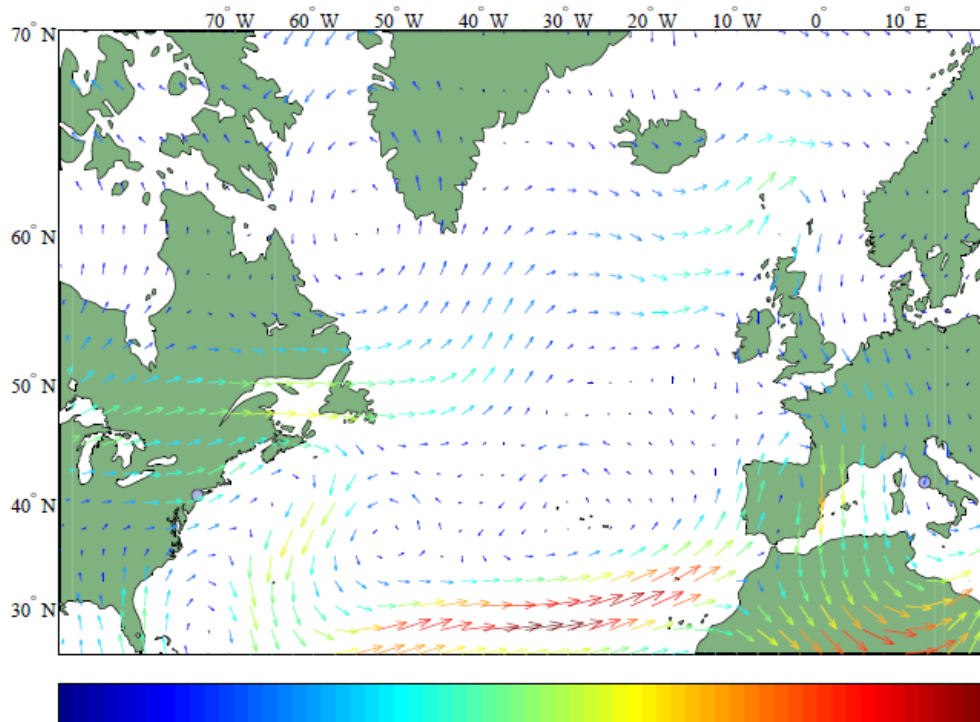


Figura 2.3 Representación del escenario de viento medio de la predicción a 18 horas.

2.4 Casos de estudio

En este trabajo se tratarán cuatro casos de estudio que se describen a continuación y que se desarrollan en los capítulos siguientes para los dos enfoques de optimización considerados:

- **Caso 1. Optimización respecto al escenario sin viento.**
En este primer caso se considera que no se dispone de información meteorológica, de forma que se optimiza la trayectoria respecto a un escenario de viento completamente en calma.
- **Caso 2. Optimización respecto al escenario con viento medio.**
En el segundo caso de estudio se considera un escenario de viento que es la media de los 35 escenarios de los que se dispone para cada predicción. La trayectoria se optimiza respecto a este escenario.
- **Caso 3. Optimización respecto a cada escenario de viento.**
En este caso se optimiza la trayectoria con respecto a cada uno de los escenarios meteorológicos por predicción, por lo que se tendrán un total de 35 caminos óptimos, uno para cada meteorología.
- **Caso 4. Optimización respecto a la media de costes.**
En este último caso lo que se busca es una media de coste (entendiendo como tal el tiempo de vuelo) mínima. Por ello, se consideran simultáneamente todos los miembros del *ensemble*.

Tras encontrar la(s) trayectoria(s) óptima(s) según cada caso, se evaluará el coste de recorrer dicha(s) trayectoria(s) en presencia del escenario determinado por cada miembro del *ensemble* considerado, lo cual permitirá establecer comparaciones entre los casos de estudio, y entre los enfoques de optimización empleados.

3 Trayectoria basada en waypoints

En este capítulo se aplica el primer enfoque al problema, que consiste en optimizar la trayectoria descrita restringiendo los puntos de paso a un grupo de waypoints definidos por su latitud y longitud, y que se encuentran conectados entre sí siguiendo rutas loxodrómicas según un patrón definido. De esta manera, el curso que puede tomar la aeronave está limitado a un conjunto de valores. La definición de estos puntos y sus conexiones permiten reducir el problema a buscar el camino de mínimo coste en un grafo, lo cual puede resolverse empleando, entre otros, el Algoritmo de Dijkstra [11], [12], que es el que se ha aplicado en este trabajo.

En primer lugar se presenta una formulación del problema teniendo en cuenta las peculiaridades del método de resolución empleado, describiendo el algoritmo, los posibles puntos de paso de la trayectoria, el coste que se le asigna a cada tramo y una consideración adicional respecto a los cambios de rumbo. Posteriormente se recogen los resultados obtenidos para cada caso de estudio.

3.1 Formulación del problema

3.1.1 Algoritmo de Dijkstra

El Algoritmo de Dijkstra, presentado por primera vez en 1959 por Edsger Dijkstra, es un método para encontrar el camino de mínimo coste entre dos nodos de un grafo cuyas aristas tienen un peso (coste) asociado [13]. El algoritmo funciona tanto para grafos dirigidos como no dirigidos, siempre y cuando éste se encuentre conectado y los pesos de las aristas que conectan los vértices sean no negativos. Para grafos con aristas con pesos negativos se debe acudir al llamado Algoritmo de Bellman-Ford, que es una ampliación del Algoritmo de Dijkstra para considerar este tipo de grafos.

El algoritmo se basa en el hecho de que dado un camino óptimo entre dos nodos de un grafo, cualquier camino contenido en él es, a su vez, un camino óptimo [13]. La idea consiste en aprovechar este hecho para explorar los caminos mínimos que parten del origen y llegan al resto de nodos, deteniéndose cuando se conoce el camino hasta todos los nodos, o bien cuando se llega al nodo de destino.

El algoritmo puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Se inicializa el coste de todos los nodos (entendiendo como tal el coste de llegar a dicho nodo desde el nodo de origen) a un valor infinito, excepto el del nodo inicial que se inicializa a 0;
2. Considerando el nodo actual (en la primera iteración, el nodo de inicio), se calcula el coste de llegar de éste al resto de nodos vecinos, excepto a los ya marcados como visitados; si este coste es menor que el ya almacenado en los nodos vecinos, se actualiza el coste y el camino para llegar a dicho nodo;
3. Se marca el nodo actual como completo;
4. Se toma como nodo actual el vecino que tenga el mínimo coste;
5. Se repiten los pasos 2-4 hasta que se haya calculado el coste a todos los nodos, o se haya llegado al nodo de destino.

La implementación del algoritmo es relativamente sencilla, existiendo además múltiples métodos para hacerlo que pueden reducir el orden de complejidad del mismo.

3.1.2 Mallado y estructura del grafo

La principal consideración a tener en cuenta en el planteamiento de esta versión del problema es cuáles serán los puntos de paso que definirán las posibles rutas que pueda llevar a cabo la aeronave, y cómo se encontrarán conectados éstos entre sí [12]. A continuación se detallan las decisiones que se han tomado a este aspecto.

Con respecto a la localización de los posibles puntos de paso, se ha definido una malla regular de puntos entre JFK y FCO, separados entre sí 10° en longitud y 1° en latitud, extendiéndose entre -70° y 10° en longitud, y 20° y 70° en latitud. Para mayor claridad, los puntos que componen dicha malla se encuentran representados sobre el mapa en la Figura 3.1.

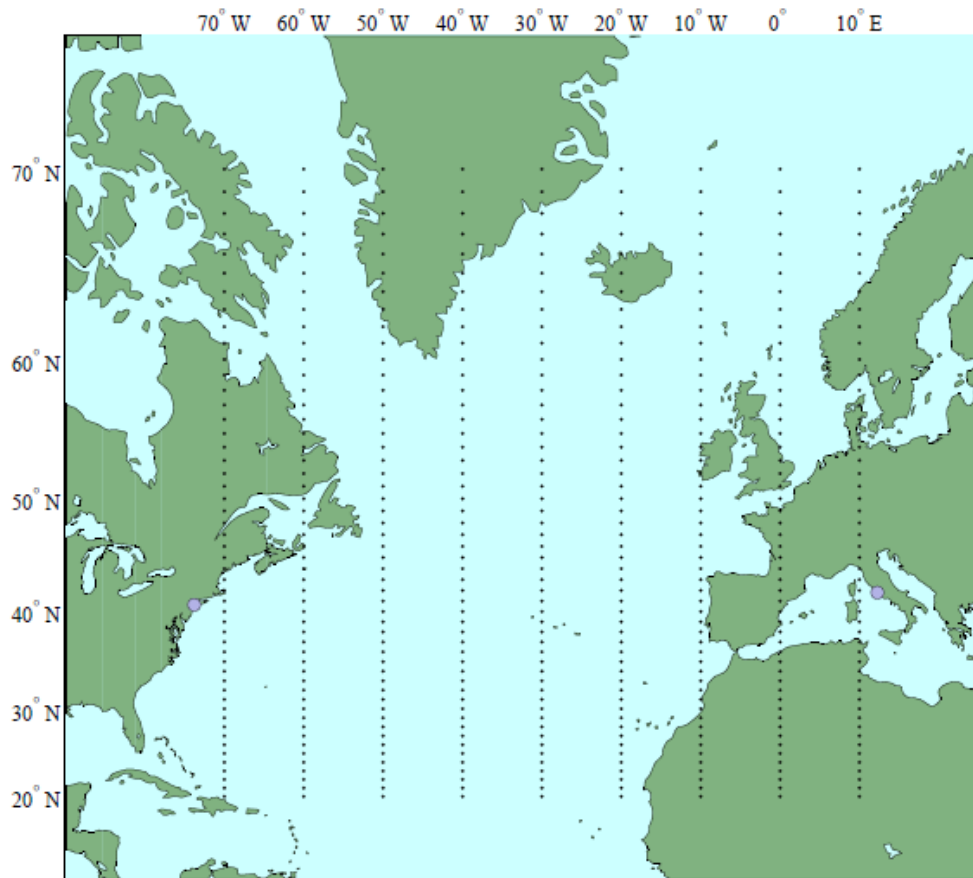


Figura 3.1 Puntos que componen la malla empleada en la resolución del problema.

Con respecto a las conexiones entre los puntos de paso, si consideramos un nodo interior de la malla con latitud φ_0 y longitud ξ_0 , éste se encontrará conectado a:

- El nodo con latitud $\varphi_0 + 1^\circ$ y longitud ξ_0 ;
- El nodo con latitud $\varphi_0 - 1^\circ$ y longitud ξ_0 ;
- Todos los nodos con longitud $\xi_0 + 10^\circ$; y
- Todos los nodos con longitud $\xi_0 - 10^\circ$.

Esta relación se presenta esquemáticamente en la Figura 3.2 . Evidentemente, los nodos que se encuentren en los límites superior o inferior en latitud no podrán conectarse a aquellos nodos con latitud $\varphi_0 + 1^\circ$ o

$\varphi_0 - 1^\circ$, respectivamente. Asimismo, aquellos nodos que se encuentren en los límites de la malla en longitud estarán conectados a los extremos de la ruta:

- Los nodos con $\xi = -70^\circ$ se encuentran conectados a JFK.
- Los nodos con $\xi = 10^\circ$ se encuentran conectados a FCO.

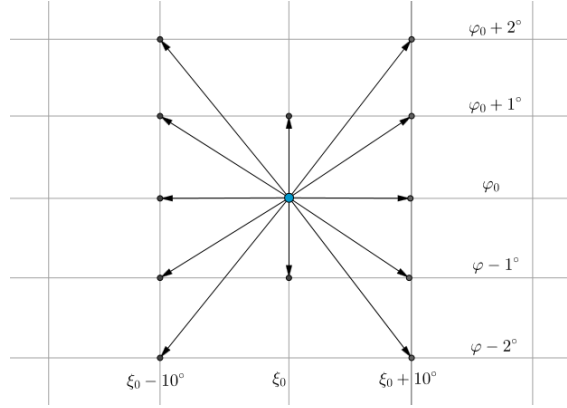


Figura 3.2 Conexiones entre nodos de la malla.

3.1.3 Coste de cada tramo

Para la resolución del problema mediante el Algoritmo de Dijkstra es necesario determinar, además del mallado que se va a emplear, el coste de recorrer los tramos que unen los nodos que tienen conexión. En este caso, el coste asociado a un tramo será el tiempo que se tarda en recorrerlo.

El tiempo empleado en recorrer un tramo que va desde el nodo i hasta el nodo j ($t_{i,j}$) se calcula como $t_{i,j} = \frac{s_{i,j}}{V_{g_{i,j}}}$, siendo $s_{i,j}$ la distancia loxodrómica entre ambos nodos, y $V_{g_{i,j}}$, el promedio de la velocidad respecto a tierra a lo largo de dicho tramo. Esta velocidad media se calcula integrando numéricamente a lo largo de la ruta loxodrómica entre los dos nodos en cuestión, hallando los valores de w_E y w_N (y por tanto, de V_g) en los puntos intermedios mediante interpolación cúbica. Esta velocidad media se calcula en gran parte gracias a la herramienta desarrollada en [6].

Otro aspecto a tener en cuenta es el coste que pueden inducir los virajes a realizar a lo largo de la ruta. Si el coste de un tramo se relaciona únicamente con la distancia loxodrómica a recorrer en éste, se estaría ignorando la distancia recorrida durante el cambio de curso, considerando éste como instantáneo. Para realizar una mejor aproximación, el coste de cada tramo se considera como la suma del coste derivado de recorrer la distancia de dicho tramo de curso constante, y el coste de realizar la maniobra necesaria para cambiar el curso que se había seguido en el tramo anterior.

Para calcular este sobrecoste es necesario definir el tipo de viraje que se va a realizar, y determinar las expresiones que permitirán calcular la distancia adicional recorrida. En este trabajo se ha decidido realizar virajes de radio mínimo, tomando puntos de sobrevuelo, además de suponer que los virajes se realizan a la velocidad aerodinámica V y en ausencia de viento. Un esquema del tipo de viraje mencionado se representa en la Figura 3.3.

Partiendo de las ecuaciones de Mecánica de Vuelo para virajes y de las relaciones trigonométricas que pueden extraerse de la Figura 3.3, se llega a (3.1), que determina la distancia adicional recorrida respecto a la del tramo loxodrómico:

$$\Delta s = R(\alpha + \beta) - (x_1 + x_2) \quad (3.1)$$

Siendo

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \beta + \Delta\psi \\
 \beta &= \arccos\left(\frac{1 + \cos\Delta\psi}{2}\right) \\
 x_1 &= R \sin\Delta\psi \\
 x_2 &= 2R \sin\beta \\
 R &= \frac{V^2}{g \tan\mu}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

En estas expresiones, $\Delta\psi$ es el cambio de curso entre tramos. Para un viraje de una aeronave en ruta, OACI recomienda tomar un ángulo de balance (μ) de 15° , o una velocidad angular ($\dot{\chi} = \frac{g \tan\mu}{V}$) de $3^\circ/s$, lo que proporcione un menor valor para μ [14]. En este caso, teniendo en cuenta el resto de parámetros de la aeronave, se ha tomado un ángulo de balance $\mu = 15^\circ$.

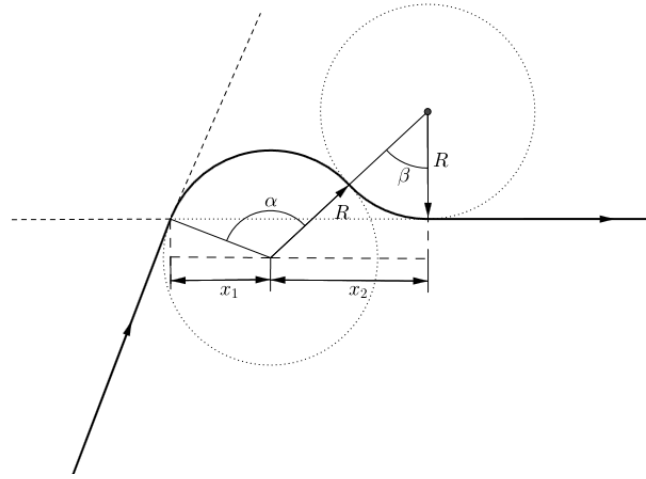


Figura 3.3 Esquema de viraje.

3.2 Resultados

A continuación se presenta la solución obtenida para cada caso de estudio. Se muestra en primer lugar las trayectorias resultantes de la optimización bajo cada predicción meteorológica, indicando el tiempo empleado y el combustible consumido así como la distancia recorrida para cada trayectoria óptima. Posteriormente se evalúa el coste de recorrer dichos caminos en presencia de cada escenario meteorológico, realizando representaciones en histogramas, y recogiendo parámetros de interés.

Es necesario remarcar que el análisis se ha llevado a cabo para un día concreto del año (ver Capítulo 2), y dado que el escenario de viento varía a lo largo del año tanto en intensidad como en distribución (el *jet stream*, por ejemplo, modifica su localización sensiblemente entre los meses de invierno y de verano [10]), los resultados aquí presentados no tienen carácter general, como se verá en el Capítulo 6.

3.2.1 Caso 1

En el primer caso de estudio, como se comentó anteriormente, se considera que no se dispone de información sobre la velocidad del viento, por lo que el escenario respecto al que se optimiza es uno completamente en calma. En la Figura 3.4 se representan las trayectorias de mínimo tiempo que se han obtenido, junto a la ortodrómica, que se representa como referencia. Al tratarse de una proyección de Mercator, las rutas loxodrómicas se representan como líneas rectas. Como es lógico, la trayectoria óptima es independiente de la predicción que

se estudie, y además es la misma para ambos sentidos de la ruta. Se observa además que esta trayectoria tiende hacia la ortodrómica, que al no existir viento es la trayectoria óptima, al tratarse de la más corta. Las coordenadas de los puntos de paso de dicha trayectoria, ordenados en el sentido hacia FCO, se recogen en la Tabla 3.1.

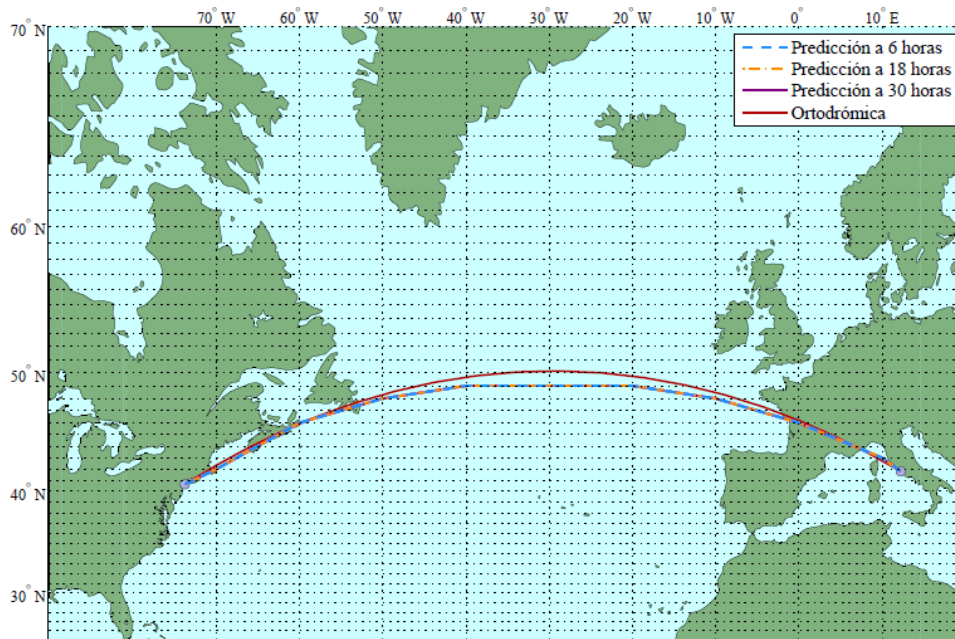


Figura 3.4 Trayectorias óptimas. Caso 1.

Tabla 3.1 Coordenadas de los puntos de paso de la trayectoria óptima. Caso 1.

Latitud (φ)	42°	46°	48°	49°	49°	49°	48°	46°	43°
Longitud (ξ)	-70°	-60°	-50°	-40°	-30°	-20°	-10°	0°	10°

La Tabla 3.2 recoge parámetros importantes de la trayectoria óptima. Por un lado, el tiempo de vuelo y la masa de combustible consumida adquieren valores aceptables, teniendo en cuenta las características del vuelo, las hipótesis simplificadoras realizadas, y el escenario meteorológico tan irreal que se está estudiando. Por otra parte se detalla la distancia recorrida, calculada como la suma de tramos loxodrómicos, que resulta un 1% mayor que la distancia ortodrómica.

Tabla 3.2 Resultados de la optimización. Caso 1.

t_f	478.66 min
m_F	38667.6 kg
s_f	6892.7 km

Una vez obtenida la ruta óptima, puede procederse a calcular el coste que resulta de recorrer dicha ruta en los 35 escenarios de viento que componen cada predicción. En la Figura 3.5 se representa, para cada predicción, los histogramas para el tiempo de vuelo y la masa de combustible empleada, en ambos sentidos de vuelo. Además, en la Tabla 3.3 se recogen, para cada conjunto de predicciones, los valores de la media y la desviación típica del tiempo de vuelo y masa de combustible consumida.

En la representación del histograma, los gráficos que quedan a la izquierda se corresponden con los de la ruta en sentido JFK-FCO, que como se comentó en el Capítulo 2, se ve beneficiada por la existencia de viento predominante hacia el Este en la zona próxima a JFK. El efecto resultante es un menor tiempo de vuelo, que se encuentra siempre en el entorno de los 456 minutos (7.6 horas), y una menor masa de combustible consumida que para el escenario sin viento. Lo contrario ocurre para el vuelo FCO-JFK (gráficos a la derecha de la Figura 3.5). En este caso se puede ver que el tiempo de vuelo medio es, para todas las predicciones, muy superior al obtenido para el caso en ausencia de viento, encontrándose en el entorno de 506 minutos (8.4 horas). Como consecuencia, la masa de combustible es también mayor.

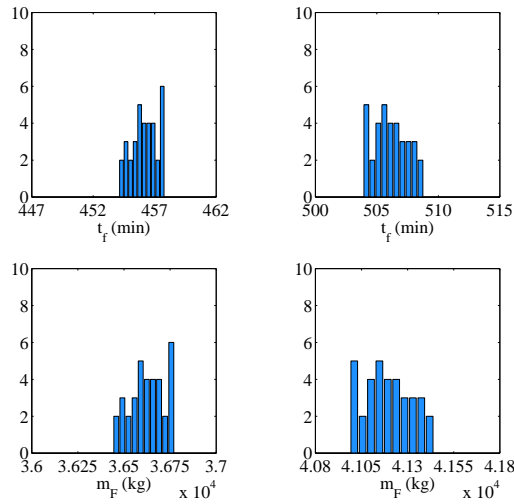
Por otra parte, puede observarse que a medida que aumenta el horizonte temporal respecto al que se hace la predicción, la media de las variables aumenta para el caso de la ruta FCO-JFK, y disminuye para la ruta JFK-FCO. No obstante, el valor de la desviación típica siempre aumenta con el horizonte temporal, siendo en todo instante mayor para el caso de la ruta FCO-JFK (con predominancia de vientos de cara), lo cual se refleja también en los histogramas, que abarcan un mayor rango de valores.

Tabla 3.3 Evaluación del coste. Caso 1.

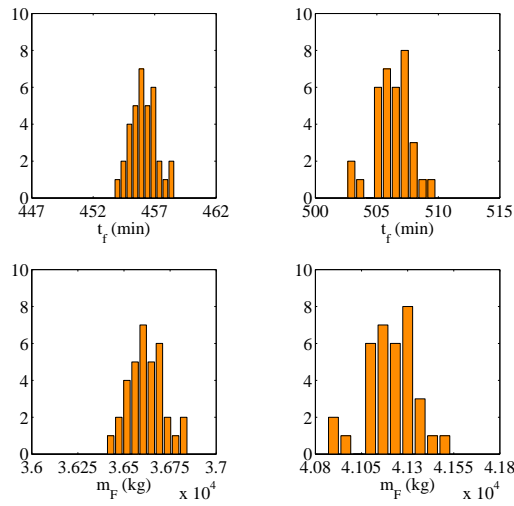
(a) Predicción a 6 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	456.16	1.05	506.12	1.37
m_F (kg)	36625.9	94.7	41194.2	126.7

(b) Predicción a 18 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	456.12	1.08	506.29	1.48
m_F (kg)	36622.4	97.5	41209.9	137.0

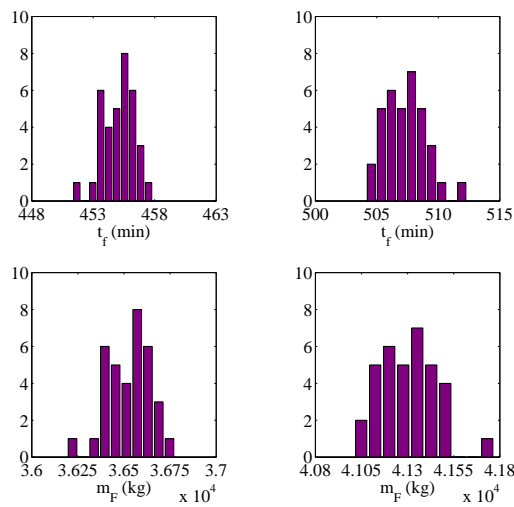
(c) Predicción a 30 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	455.10	1.31	507.33	1.68
m_F (kg)	36530.0	117.6	41306.2	156.2



(a) Predicción a 6 horas.



(b) Predicción a 18 horas.



(c) Predicción a 30 horas.

Figura 3.5 Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha). Caso 1.

3.2.2 Caso 2

En el segundo caso de estudio se optimiza la trayectoria considerando un escenario de viento que es la media de todos miembros del *ensemble*. En la Figura 3.6 se representan las trayectorias optimizadas que se han obtenido en ambos sentidos y para cada petición, junto a la ortodrómica, como referencia. Las trayectorias que siguen la ruta JFK-FCO son aquellas que quedan al Norte de la ortodrómica, siendo iguales para las predicciones a 18 y 30 horas. Por otra parte, las trayectorias que siguen la ruta FCO-JFK quedan siempre al Sur de la ortodrómica, coincidiendo todas ellas. Las coordenadas de dichas trayectorias se recogen en la Tabla 3.4.

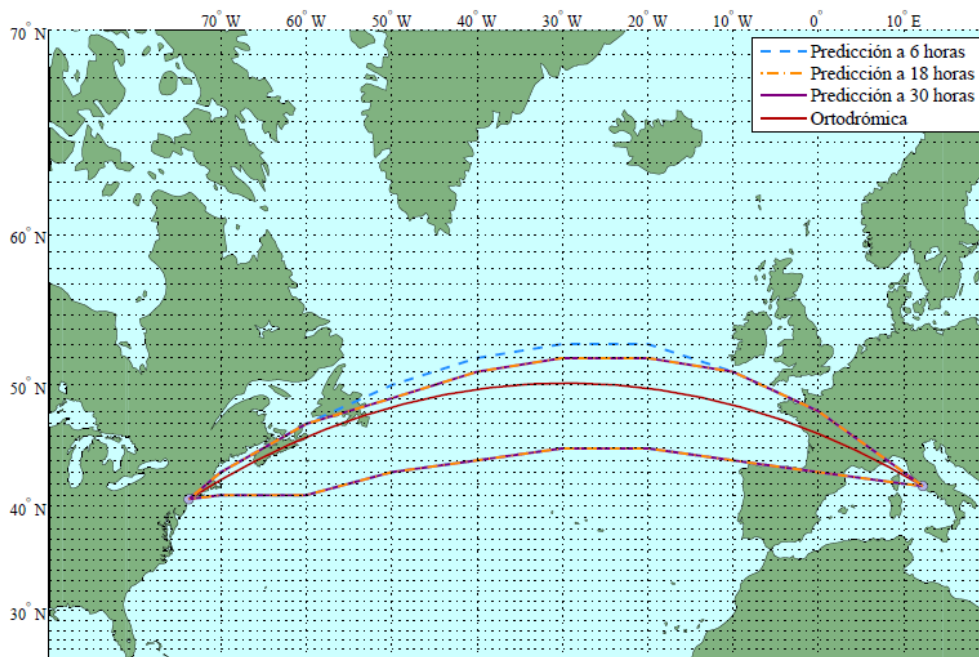


Figura 3.6 Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 2.

Tabla 3.4 Coordenadas de los puntos de paso de las trayectorias óptima. Caso 2.

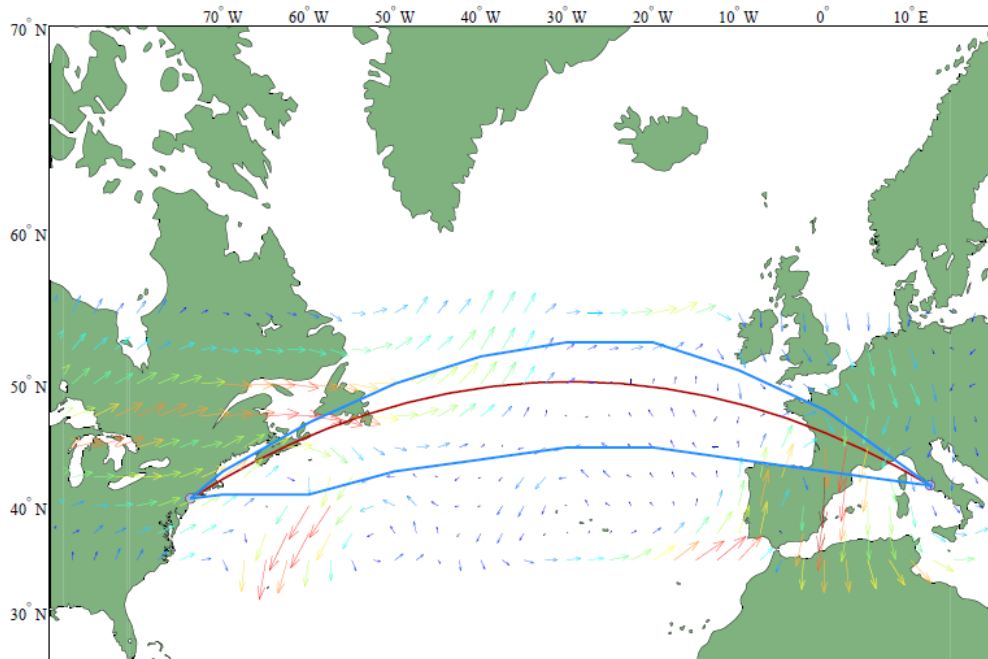
(a) Trayectoria JFK-FCO. Predicción a 6 horas.									
Latitud (φ)	3°	47°	50°	52°	53°	53°	51°	48°	43°
Longitud (ξ)	-70°	-60°	-50°	-40°	-30°	-20°	-10°	0°	10°

(b) Trayectoria JFK-FCO. Predicciones a 18 y 30 horas.									
Latitud (φ)	43°	47°	49°	51°	52°	52°	51°	48°	43°
Longitud (ξ)	-70°	-60°	-50°	-40°	-30°	-20°	-10°	0°	10°

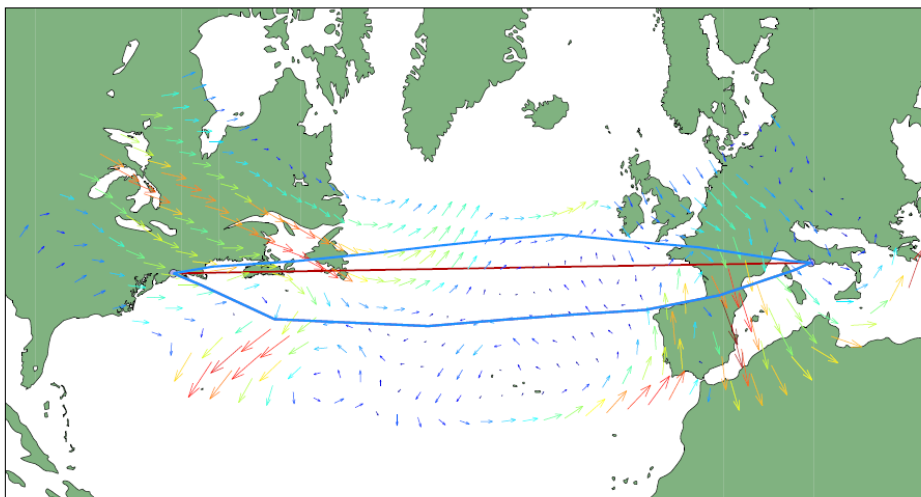
(c) Trayectoria JFK-FCO. Todas las predicciones.									
Latitud (φ)	42°	43°	44°	45°	45°	44°	43°	41°	41°
Longitud (ξ)	10°	0°	-10°	-20°	-30°	-40°	-50°	-60°	-70°

Para una mejor comprensión de las trayectorias resultantes, en la Figura 3.7, Figura 3.8 y Figura 3.9 se representan las trayectorias óptimas y el campo medio de viento para las predicciones a 6, 18 y 30 horas respectivamente, bajo una proyección de Mercator y una proyección estereográfica con polo el punto medio de la ortodrómica. En estas figuras se observa que el primer tramo de las trayectorias JFK-FCO se ven inmersas en el *jet stream*, beneficiándose del viento de cola; en el vuelo FCO-JFK el *jet stream* debe ser evitado, siendo lo más adecuado tomar una trayectoria al Sur de la ortodrómica, donde cuenta con algunos tramos con viento

de cola.

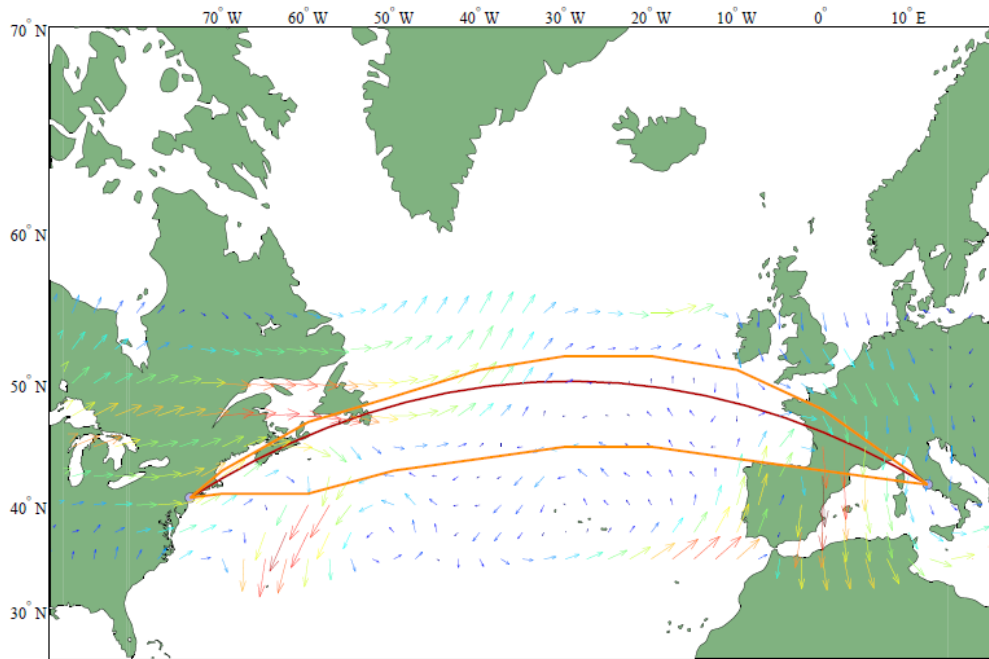


(a) Proyección de Mercator.

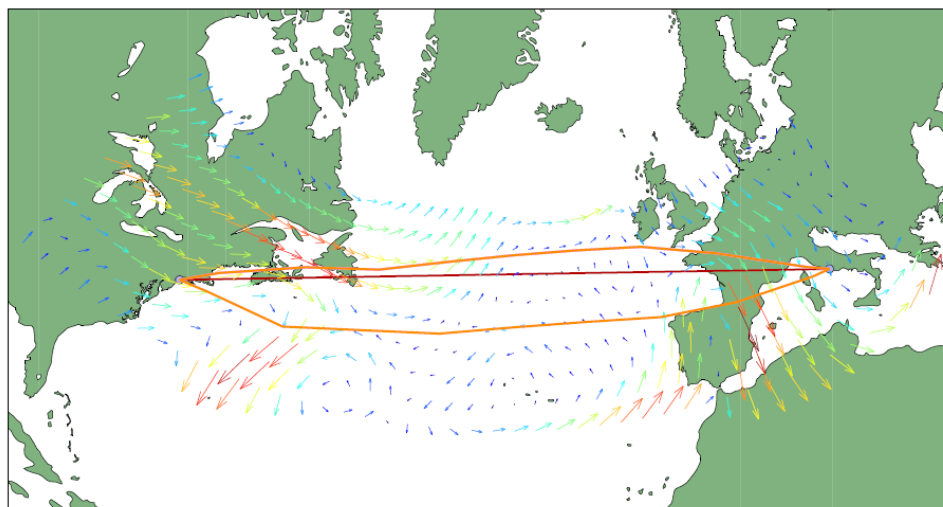


(b) Proyección estereográfica.

Figura 3.7 Trayectorias óptimas junto al campo de viento medio. Caso 2, predicción a 6 horas.

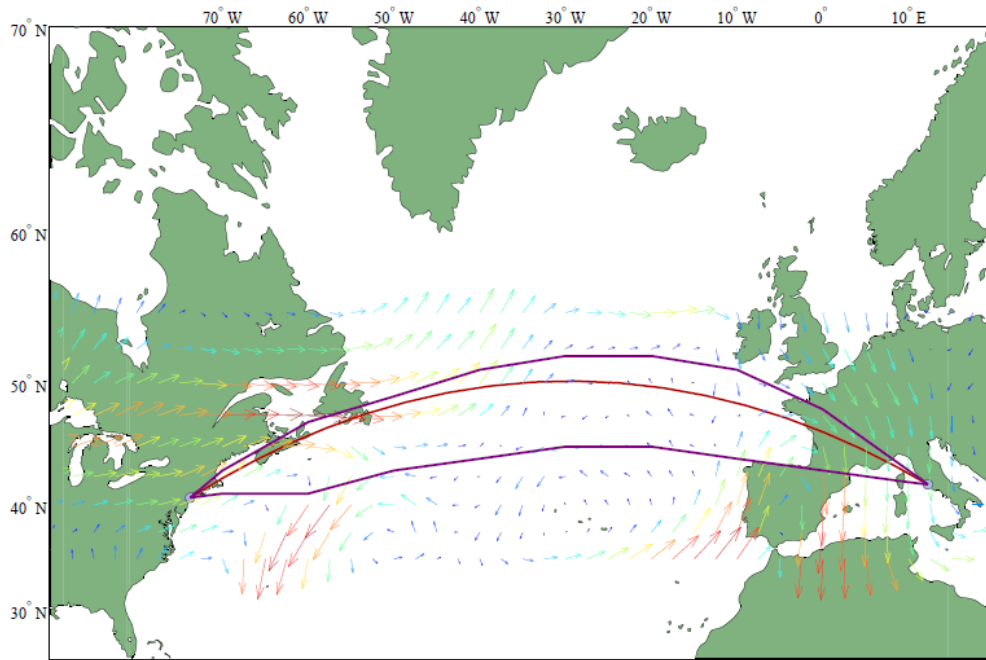


(a) Proyección de Mercator.

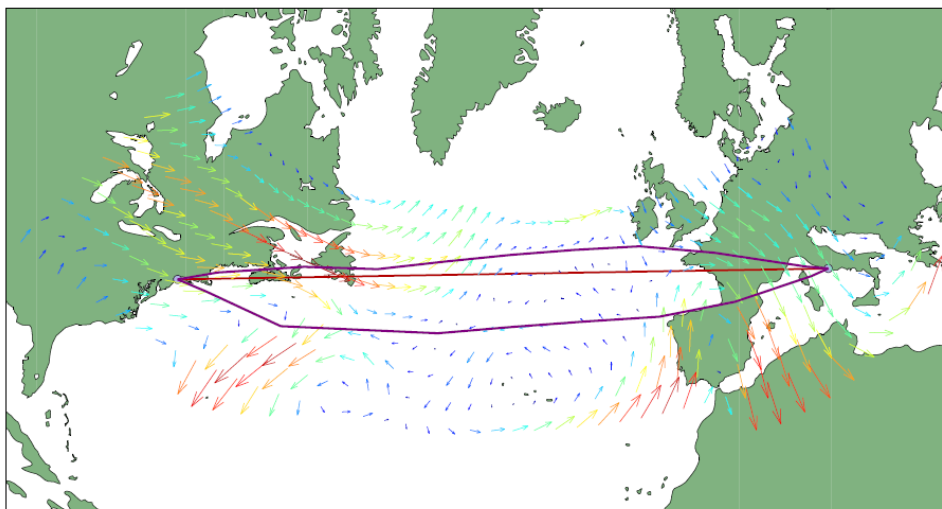


(b) Proyección estereográfica.

Figura 3.8 Trayectorias óptimas junto al campo de viento medio. Caso 2, predicción a 18 horas.



(a) Proyección de Mercator.



(b) Proyección estereográfica.

Figura 3.9 Trayectorias óptimas junto al campo de viento medio. Caso 2, predicción a 30 horas.

De forma análoga al caso anterior, la Tabla 3.5 recoge parámetros de interés de las trayectorias óptimas. Pueden observarse diferencias apreciables en el tiempo de vuelo y la masa de combustible en función del sentido de la ruta, siendo sustancialmente menores en el caso del vuelo JFK-FCO. Esto se debe a que, además de contar con viento de cola durante gran parte de la trayectoria, en el vuelo hacia Europa se recorre una distancia considerablemente menor que en el vuelo hacia Norteamérica. La proyección estereográfica representada anteriormente, donde se ha elegido como polo el punto medio de la ortodrómica para que ésta se represente como una línea recta, muestra claramente el incremento en distancia recorrida que suponen las nuevas trayectorias óptimas. Por otro lado, se observa que a medida que aumenta el horizonte de predicción, t_f y m_F disminuyen, independientemente del sentido de la ruta.

Tabla 3.5 Resultados de la optimización. Caso 2.

(a) Predicción a 6 horas.		
	JFK-FCO	FCO-JFK
t_f	452.46 min	488.98 min
m_F	36292.3 kg	39614.0 kg
s_f	6918.8 km	7056.6 km

(b) Predicción a 18 horas.		
	JFK-FCO	FCO-JFK
t_f	452.14 min	488.51 min
m_F	36263.5 kg	39569.1 kg
s_f	6912.9 km	7056.6 km

(c) Predicción a 30 horas.		
	JFK-FCO	FCO-JFK
t_f	451.94 min	488.43 min
m_F	36245.9 kg	39562.2 kg
s_f	6912.9 km	7056.6 km

Al igual que en el caso anterior, obtenidas las trayectorias óptimas puede evaluarse el coste que resulta de recorrerla en presencia de los distintos escenarios meteorológicos. En la Figura 3.10 se representa, para cada petición, los histogramas para t_f y m_F para ambos sentidos de vuelo, y en la Tabla 3.6 se recogen los valores de la media y la desviación típica de ambas variables para cada conjunto de predicciones.

En la Figura 3.10 y en los datos de la Tabla 3.6 puede verse que tanto para la ruta JFK-FCO (izquierda de la representación) como para la ruta FCO-JFK (derecha), t_f y m_F se sitúan en torno a valores menores que los del Caso 1, resultado de haber optimizado respecto a un escenario meteorológico más cercano al que posteriormente se considera que el caso sin viento. En esta ocasión, la diferencia entre los valores de t_f y m_F obtenidos para el escenario de viento medio, y la media de estas variables para cada predicción es muy pequeña o inexistente.

En relación a lo anterior, el error derivado de optimizar respecto al escenario de viento medio puede caracterizarse: definiendo el error (ϵ) como la diferencia entre el valor de t_f real (es decir, el coste evaluado de recorrer el camino óptimo en presencia de las 35 meteorologías) y el valor de t_f en el camino óptimo, calcular su media, desviación típica y valores máximo y mínimo (en valor absoluto, añadiendo posteriormente el signo correspondiente) es inmediato. Estos valores se recogen en la Tabla 3.7. Como se puede observar, la media del error aumenta con el horizonte de predicción, independientemente del sentido de la ruta, aunque en todo caso es negativo para las trayectorias JFK-FCO, y positivo en sentido contrario. Por otra parte, la desviación típica tiende a aumentar con el horizonte de predicción, salvo en el caso de la ruta FCO-JFK con predicción a 30 horas, donde disminuye respecto a la predicción a 18 horas. Por último, los valores máximos y mínimos del error no parecen seguir un patrón definido.

Con respecto a la evolución de los estadísticos con el horizonte de predicción, puede observarse que por lo general, a medida que éste aumenta, también lo hacen la media y la desviación típica, salvo en el caso

de la ruta FCO-JFK con una predicción a 30 horas, donde la desviación típica de las variables es menor que para el caso de la predicción a 18 horas. En comparación al Caso 1, se observa una disminución en los valores de σ , más acusada para las rutas FCO-JFK; por lo general existen, como puede observarse, grandes concentraciones en torno a los valores medios.

Tabla 3.6 Evaluación del coste. Caso 2.

(a) Predicción a 6 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	452.44	0.95	488.98	1.19
m_F (kg)	36291.2	85.5	39612.5	109.6

(b) Predicción a 18 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	452.12	1.06	488.53	1.32
m_F (kg)	36262.8	95.6	39571.4	121.4

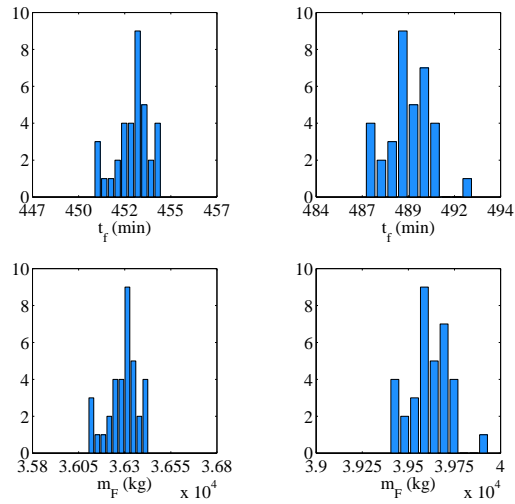
(c) Predicción a 30 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	451.94	1.31	488.46	1.14
m_F (kg)	36245.5	117.8	39565.0	104.8

Tabla 3.7 Caracterización del error en t_f al considerar el viento promedio. Todas las cantidades en minutos.

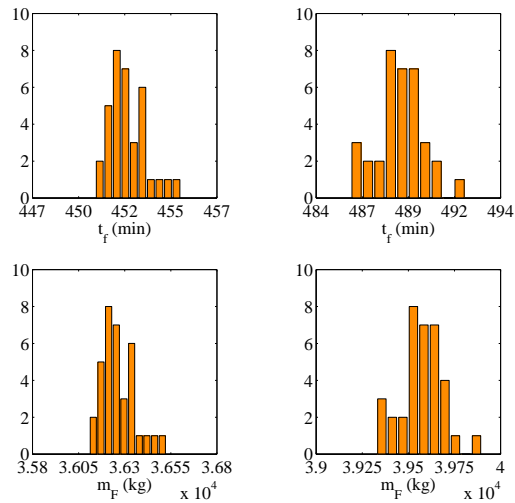
(a) Predicción a 6 horas.				
	μ_ε	σ_ε	ε^{max}	ε^{min}
JFK-FCO	-0.0131	0.9501	-2.1060	-0.0144
FCO-JFK	0.0048	1.1929	3.5036	0.0215

(b) Predicción a 18 horas.				
	μ_ε	σ_ε	ε^{max}	ε^{min}
JFK-FCO	-0.0086	1.0623	2.9020	0.0396
FCO-JFK	0.0250	1.3215	3.5785	-0.0623

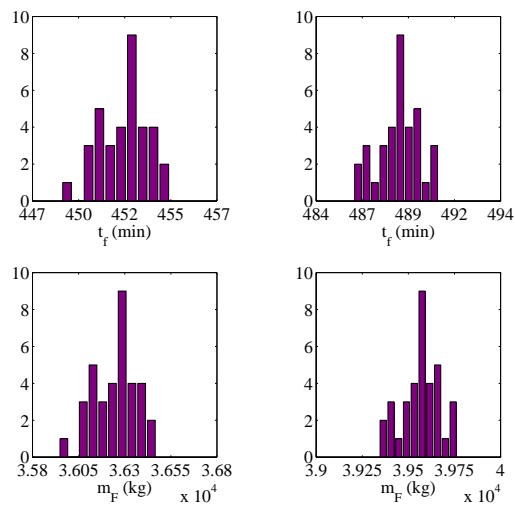
(c) Predicción a 30 horas.				
	μ_ε	σ_ε	ε^{max}	ε^{min}
JFK-FCO	-0.0047	1.3093	-3.3619	0.0799
FCO-JFK	0.0293	1.1417	-2.3926	0.0184



(a) Predicción a 6 horas.



(b) Predicción a 18 horas.



(c) Predicción a 30 horas.

Figura 3.10 Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha). Caso 2.

3.2.3 Caso 3

En el tercer caso de estudio, como se comentó, se realizan 35 optimizaciones por predicción, una por cada miembro del *ensemble*, evaluando posteriormente el coste resultante de volar cada ruta optimizada en presencia de cada escenario de la predicción. En la Figura 3.11, Figura 3.12 y Figura 3.13 se representan, junto a la ortodrómica, las trayectorias óptimas que se han obtenido en ambos sentidos, una por cada predicción para hacer más claras las representaciones. Al igual que en el caso anterior, aquellas que quedan al Norte de la ortodrómica se corresponden con el vuelo a Norteamérica, y las que quedan al Sur, con el vuelo a Europa. Puede verse cómo muchas de ellas coinciden, o tienen tramos comunes. Realizando el recuento de trayectorias diferentes se obtienen los siguientes resultados:

- **Predicción a 6 horas:** 8 en sentido JFK-FCO y 11 en sentido FCO-JFK.
- **Predicción a 18 horas:** 10 en sentido JFK-FCO y 11 en sentido FCO-JFK.
- **Predicción a 30 horas:** 11 en sentido JFK-FCO y 18 en sentido FCO-JFK.

Como se ha comentado, la gran diferencia de este caso de estudio con respecto al resto es que ahora se cuenta con 35 caminos óptimos, cada uno de los cuales podría verse sometido a cada una de los 35 escenarios meteorológicos que constituyen el *ensemble*, con lo cual se podrían elaborar 35 conjuntos de histogramas. Resulta por tanto un caso poco práctico, ya que elegir un camino determinado supondría tener únicamente el óptimo para el escenario elegido; para el resto de escenarios la elección puede ser desfavorable. No obstante, este caso puede ser útil para establecer una cota inferior de la media de t_f y m_F para la optimización en presencia de viento, ya que se correspondería con una optimización con información perfecta.

En la Figura 3.14 y en la Tabla 3.8 se presentan los histogramas para t_f y m_F y los valores de la media y la desviación típica de ambas variables para el conjunto de trayectorias óptimas. En este caso se puede observar una disminución del valor medio de t_f y m_F a medida que aumenta el tiempo de predicción, con unos valores muy similares a los del caso anterior, aunque inferiores en todos los casos. Por su parte, la desviación típica sigue el mismo comportamiento que en el Caso 2, por lo general aumentando con el horizonte temporal al que se hace la predicción, y con valores similares a los recogidos en la sección anterior. Por su parte, los histogramas presentan poca dispersión, especialmente en la predicción a 6 horas.

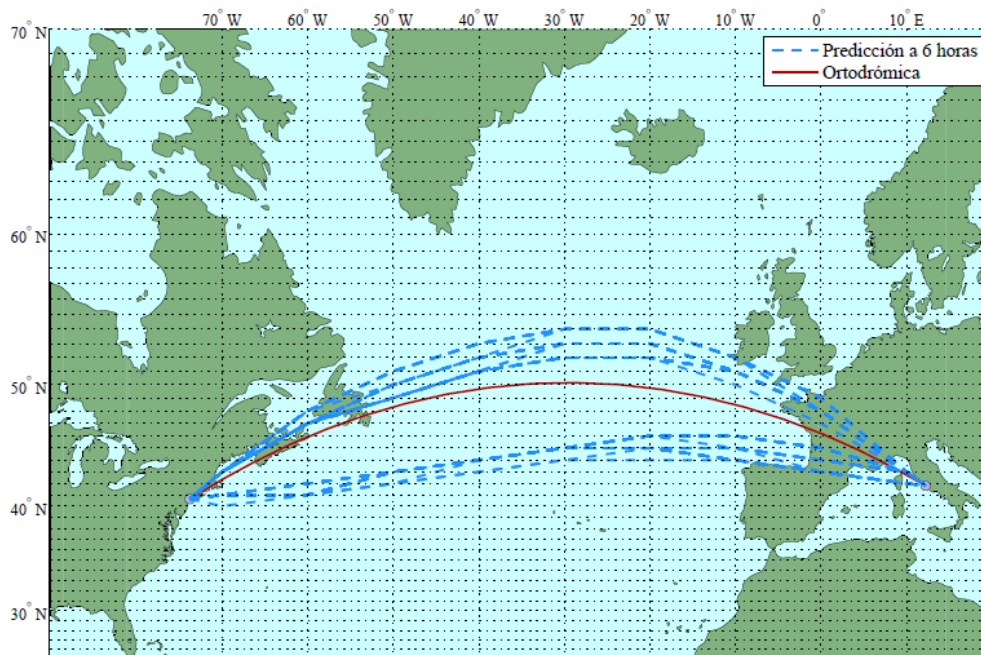


Figura 3.11 Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 3, predicción a 6 horas.

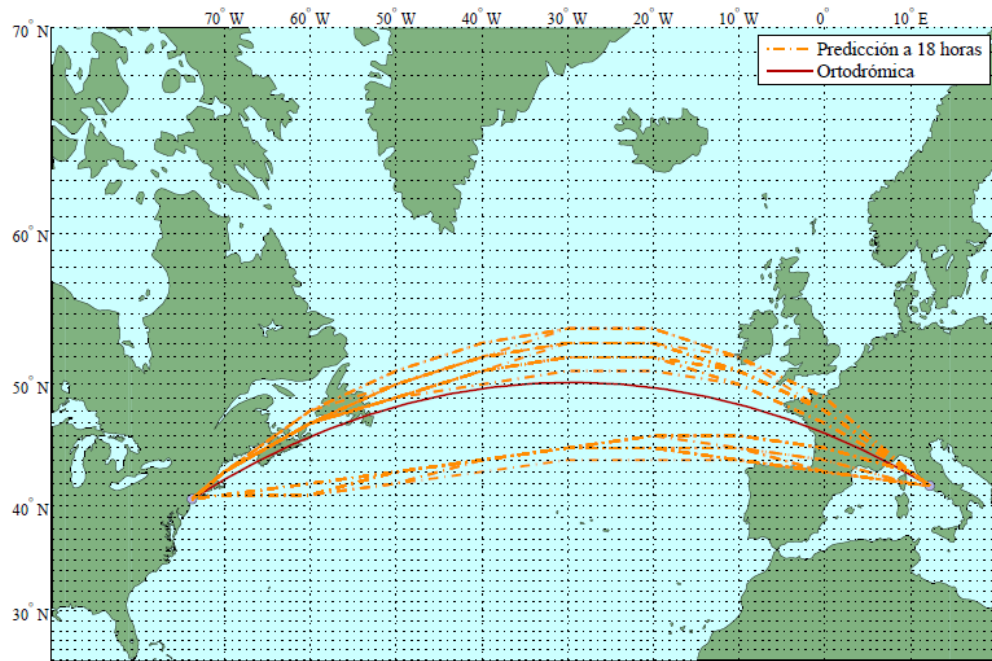


Figura 3.12 Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 3, predicción a 18 horas.

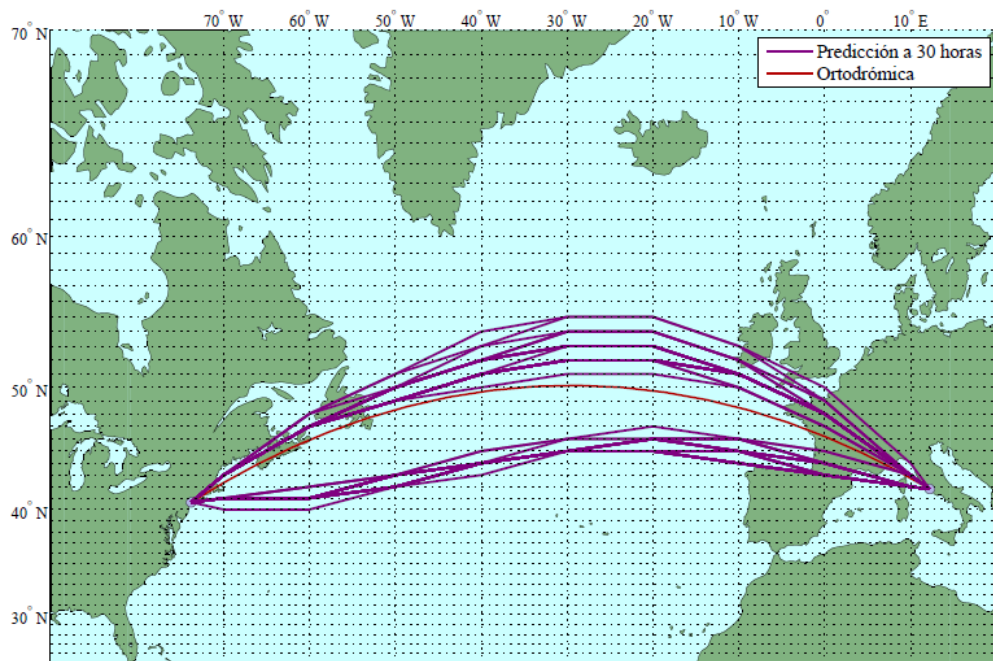


Figura 3.13 Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 3, predicción a 30 horas.

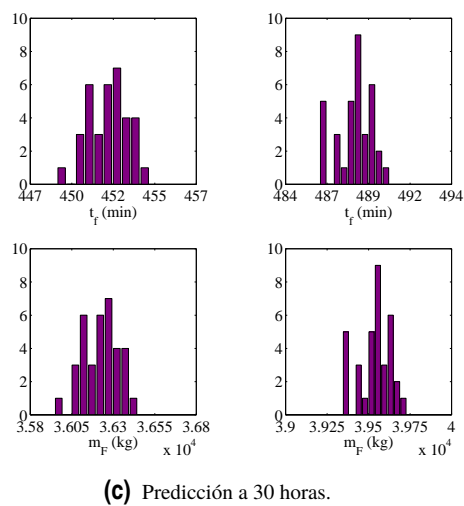
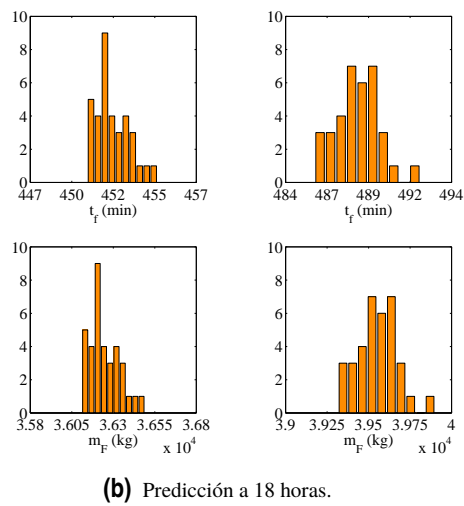
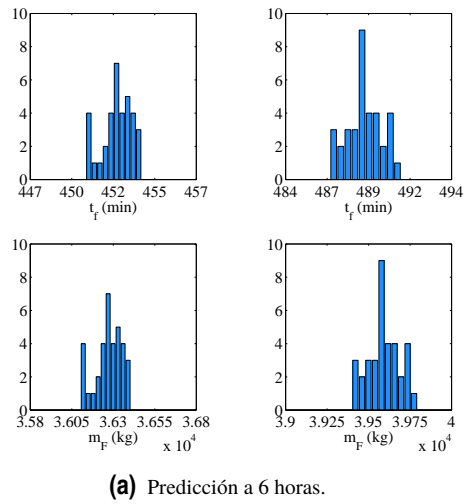


Figura 3.14 Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha). Caso 3.

Tabla 3.8 Evaluación del coste. Caso 3.

(a) Predicción a 6 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	452.23	0.89	488.77	1.07
m_F (kg)	36272.0	80.4	39593.2	98.8

(b) Predicción a 18 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	451.93	1.01	488.26	1.32
m_F (kg)	36245.0	91.0	39546.2	121.6

(c) Predicción a 30 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	451.73	1.23	488.16	1.08
m_F (kg)	36227.1	110.9	39536.8	98.8

3.2.4 Caso 4

En el último caso, tal y como se comentó en el Capítulo 2, se busca minimizar la media de t_f , considerando simultáneamente todos los escenarios de viento. En la Figura 3.15 se representan las rutas óptimas obtenidas en ambos sentidos junto a la ortodrómica como referencia. Como puede observarse, son iguales a las ya obtenidas en el Caso 2. Las coordenadas de los puntos de paso de dichas trayectorias son por tanto iguales a las mostradas en la Tabla 3.4.

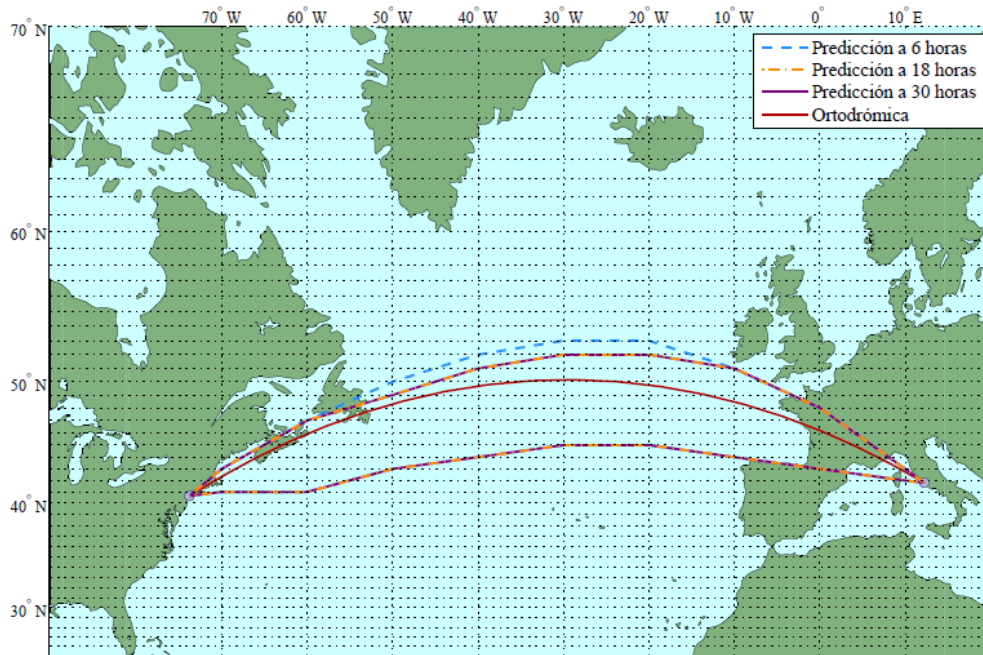


Figura 3.15 Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 4.

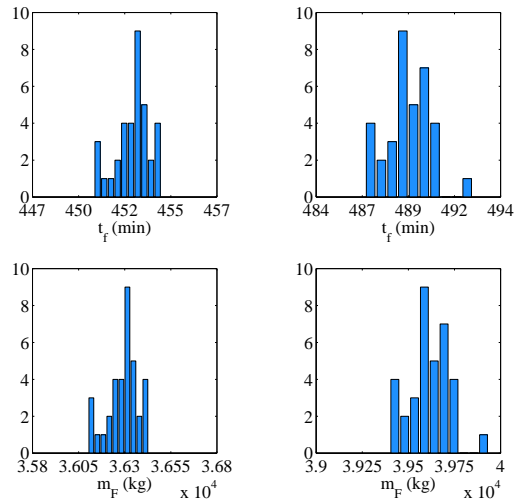
Por otra parte, en la Tabla 3.9 se presentan los resultados obtenidos en el proceso de optimización. Comparándolos de nuevo con los resultados obtenidos en el Caso 2, se observa que son muy similares, con la misma tendencia que aquellos: valores mucho menores de t_f y m_F para las rutas en sentido JFK-FCO, que se ven beneficiadas en gran medida por el viento de cola, recorriendo además una distancia menor que las rutas en sentido FCO-JFK. Al igual que en el Caso 2, los valores de t_f y m_F tienden a disminuir cuando aumenta el horizonte de predicción.

En la Tabla 3.10 se recogen los valores de la media y desviación típica de t_f y m_F . Si se comparan con los de la Tabla 3.5, se puede comprobar que los valores de μ son muy parecidos (muchos de ellos coinciden), mientras que los de σ coinciden todos ellos, con lo que los histogramas obtenidos (Figura 3.16) son muy similares a los del Caso 2. De nuevo se observa una importante concentración en torno a los valores medios, por lo general mayor para el caso de la ruta JFK-FCO, disminuyendo a medida que aumenta el horizonte al que se hace la predicción.

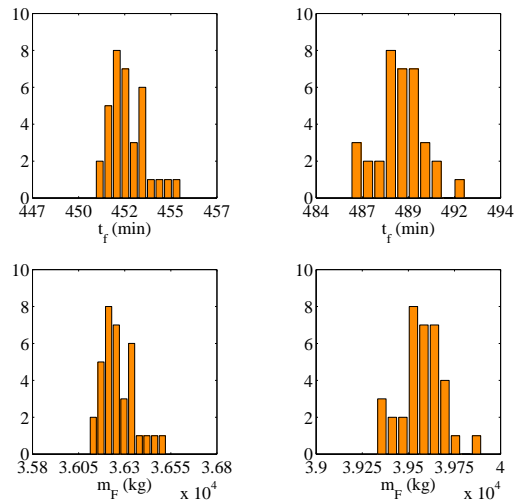
El gran parecido entre los resultados obtenidos en este caso y en el Caso 2 parece indicar que es muy similar minimizar la media de t_f y minimizar t_f considerando un escenario de viento medio. La ventaja de este caso de estudio es que resulta fácilmente extensible a otros estadísticos, como una combinación entre la media y la desviación típica ($\mu + k\sigma$), que se lleva a cabo a continuación.

Tabla 3.9 Resultados de la optimización. Caso 4.

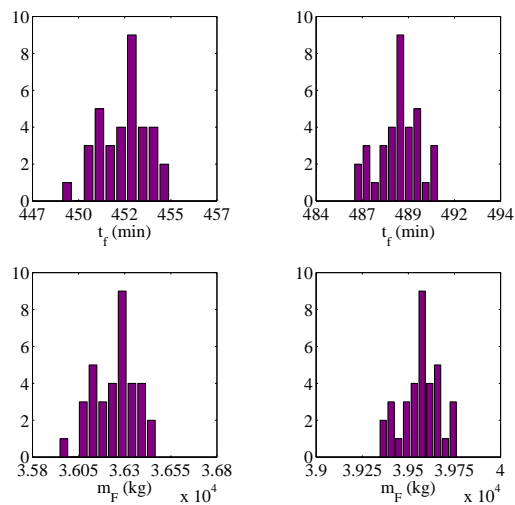
(a) Predicción a 6 horas.		
	JFK-FCO	FCO-JFK
t_f	452.44 min	488.98 min
m_F	36291.2 kg	39612.5 kg
s_f	6918.8 km	7056.6 km
(b) Predicción a 18 horas.		
	JFK-FCO	FCO-JFK
t_f	452.13 min	488.53 min
m_F	36262.8 kg	39571.4 kg
s_f	6912.9 km	7056.6 km
(c) Predicción a 30 horas.		
	JFK-FCO	FCO-JFK
t_f	451.93 min	488.46 min
m_F	36245.5 kg	39564.9 kg
s_f	6912.9 km	7056.6 km



(a) Predicción a 6 horas.



(b) Predicción a 18 horas.



(c) Predicción a 30 horas.

Figura 3.16 Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha). Caso 4.

Tabla 3.10 Evaluación del coste. Caso 4.

(a) Predicción a 6 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	452.44	0.95	488.98	1.19
m_F (kg)	36291.2	85.5	39612.5	109.6

(b) Predicción a 18 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	452.13	1.06	488.53	1.32
m_F (kg)	36262.8	95.6	39571.4	121.4

(c) Predicción a 30 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	451.93	1.31	488.46	1.14
m_F (kg)	36245.5	117.8	39564.9	104.8

Minimización respecto a $\mu + k\sigma$

La optimización respecto a $\mu + k\sigma$ resulta de gran interés en presencia de incertidumbre, como es el caso, ya que permite minimizar el riesgo al hallarnos bajo el *peor escenario* (esto es, se aplica un enfoque Minimax). En este contexto, el peor escenario puede establecerse como un determinado cuantil, estimando el valor de k correspondiente a dicho cuantil mediante la Desigualdad de Chebyshev, que tiene la ventaja de no presuponer que el tiempo de vuelo siga una distribución estadística concreta. [15]. La optimización se ha llevado a cabo para diferentes valores de k , entre 1 y 10. Se ha encontrado que en este caso la trayectoria óptima tiene una dependencia no demasiado llamativa con k , posiblemente debido al gran parecido entre todos los miembros del *ensemble*. Estas trayectorias se representan en la Figura 3.17 para k entre 1 y 5, en la Figura 3.18 para $k = 6$, en la Figura 3.19 para $k = 7$ y 8, en la Figura 3.20 para $k = 9$ y en la Figura 3.21 para $k = 10$, un valor de k que recogería a un porcentaje muy alto de la población. Se observa una modificación muy leve de las trayectorias óptimas con el cambio de valor de k .

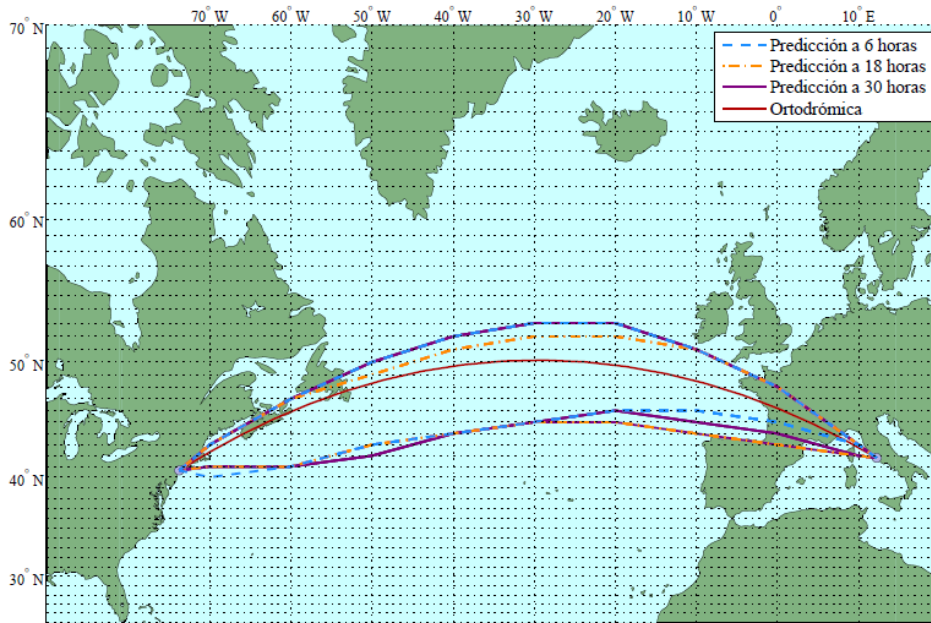


Figura 3.17 Trayectorias óptimas respecto a $\mu + k\sigma$ (k entre 1 y 5) para la ruta JFK-FCO (al norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al sur de la ortodrómica).

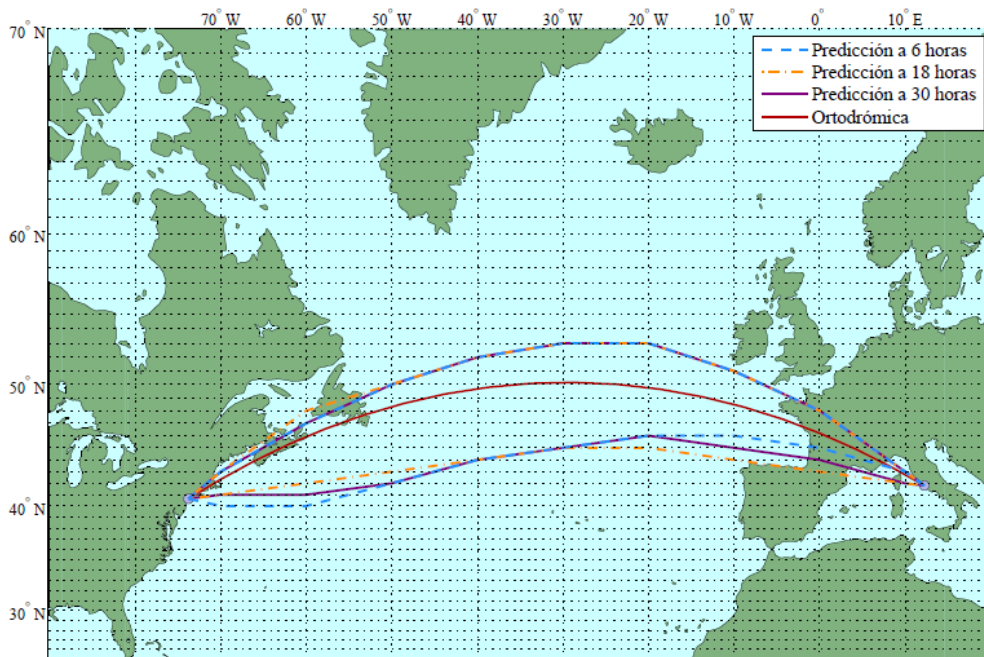


Figura 3.18 Trayectorias óptimas respecto a $\mu + k\sigma$ ($k = 6$) para la ruta JFK-FCO (al norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al sur de la ortodrómica).

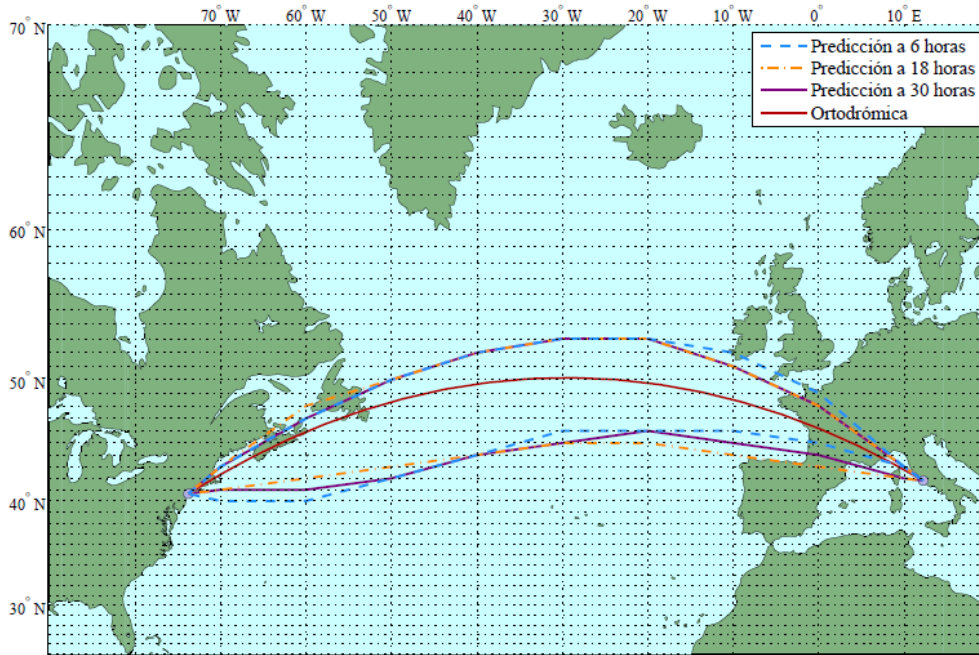


Figura 3.19 Trayectorias óptimas respecto a $\mu + k\sigma$ ($k = 7, 8$) para la ruta JFK-FCO (al norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al sur de la ortodrómica).

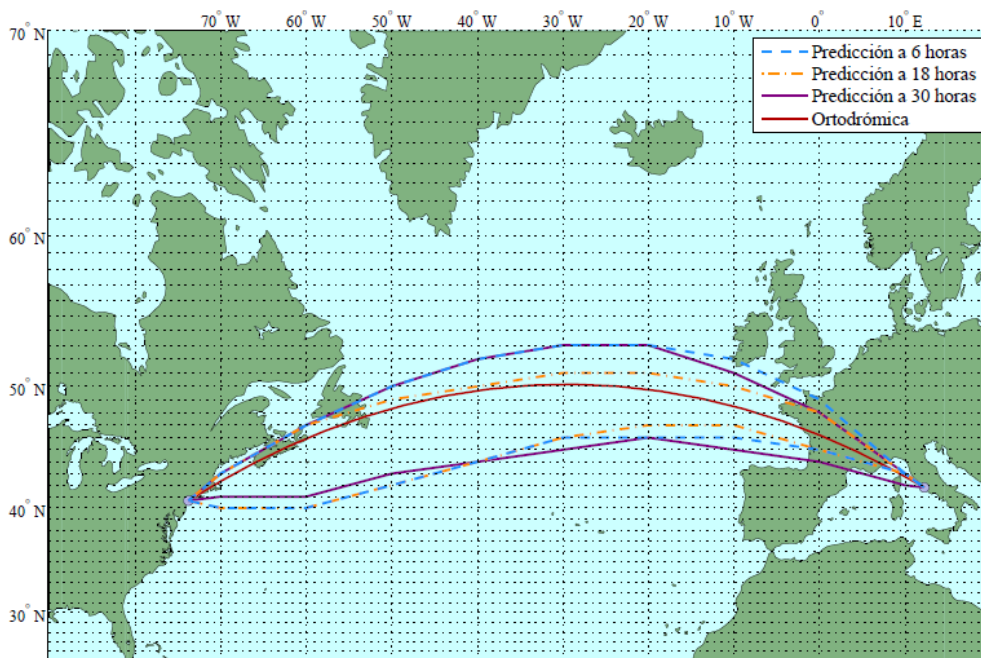


Figura 3.20 Trayectorias óptimas respecto a $\mu + k\sigma$ ($k = 9$) para la ruta JFK-FCO (al norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al sur de la ortodrómica).

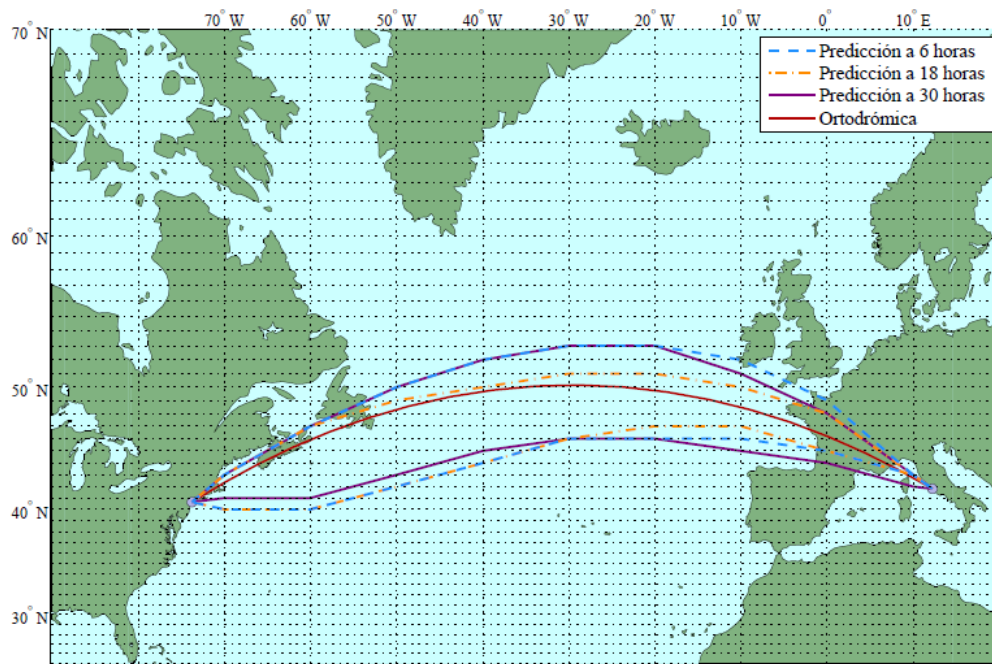


Figura 3.21 Trayectorias óptimas respecto a $\mu + k\sigma$ ($k = 10$) para la ruta JFK-FCO (al norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al sur de la ortodrómica).

4 Trayectoria libre

En este capítulo se presenta el segundo enfoque al problema y los resultados obtenidos. En esta ocasión se permite que la trayectoria pase por cualquier punto geográfico, sin resitringir en ningún momento el curso que pueda tomar la aeronave, por lo que la resolución de este problema aportará el valor del mínimo tiempo de vuelo posible entre el origen y el destino bajo el escenario meteorológico que se considere. Para resolver el problema se hará uso de la Teoría de Control Óptimo, empleando un método indirecto (aquellos que se basan en la aplicación explícita del Principio del Mínimo) [23].

En primer lugar se presenta el problema de control óptimo particularizado al problema estudiado en este capítulo, describiendo las diferentes funciones objetivo y las condiciones necesarias de optimalidad, además del método numérico empleado. Finalmente se recogen los resultados obtenidos para cada uno de los casos de estudio.

4.1 Formulación del problema

En este apartado se realiza la formulación del problema de control óptimo que se desea resolver. Debido a que cada caso de estudio tiene una función objetivo (J) diferente, en primer lugar se presentan los aspectos comunes para todos ellos, con una notación general para J , describiendo el problema a resolver y las condiciones necesarias de optimalidad. Posteriormente se indica la función a optimizar para cada caso de estudio, particularizando ciertas expresiones generales obtenidas en los apartados previos. Por último se describe de el método numérico empleado para la resolución del problema.

4.1.1 Problema de control óptimo

Con el objetivo de presentar un único planteamiento del problema para todos los casos, a excepción de la función a minimizar (como se explica en la sección 4.1.3), se toma la distancia recorrida (s) como variable independiente, en lugar del tiempo. De esta manera, las ecuaciones para φ y ξ de (2.1) quedan de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{ds} &= \frac{1}{(R_E + h)} \cos \psi \\ \frac{d\xi}{ds} &= \frac{1}{(R_E + h)} \frac{\sin \psi}{\cos \varphi}\end{aligned}\tag{4.1}$$

Las dos ecuaciones algebraicas del sistema se introducen en la ecuación de $\frac{dm}{dt}$, que puede resolverse a posteriori. Por tanto, en el problema se tienen dos estados ($y = [\varphi, \xi]$) y un control (ψ), y los valores iniciales y finales de φ y ξ están fijos.

El problema consiste por tanto en minimizar una función objetivo, que tomando la formulación de Lagrange [16] tendrá la forma $J = \int_0^{s_f} l(s, y(s), \psi(s)) ds$, sujeto a las siguientes ecuaciones y condiciones iniciales y

finales:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{ds} &= \frac{1}{(R_E + h)} \cos \psi \quad \forall s \in (0, s_f) \\ \frac{d\xi}{ds} &= \frac{1}{(R_E + h)} \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \quad \forall s \in (0, s_f)\end{aligned}\quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \varphi_0 & \varphi(s_f) &= \varphi_f \\ \xi(0) &= \xi_0 & \xi(s_f) &= \xi_f\end{aligned}\quad (4.3)$$

Resulta necesario destacar que s_f no está especificado. Como se puede observar, si se conociese la ley $\psi(s)$, se tendría un problema de contorno (Two-Point Boundary Value Problem, TPBVP) que debería resolverse mediante un método numérico apropiado. La determinación de la ley óptima $\psi(s)$ se va a llevar a cabo mediante la aplicación de las condiciones necesarias de optimalidad.

4.1.2 Condiciones necesarias de optimalidad

El Hamiltoniano del problema viene dado por

$$H = l(s, y(s), \psi(s)) + \lambda_\varphi \frac{1}{(R_E + h)} \cos \psi + \lambda_\xi \frac{1}{(R_E + h)} \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \quad (4.4)$$

donde λ_φ y λ_ξ son los adjuntos.

Considerando que se satisfacen las condiciones de normalidad y no trivialidad, se tienen las siguientes condiciones necesarias de optimalidad, que también deben satisfacerse:

1. Ecuaciones de los adjuntos:

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_\varphi}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\partial l(s, y(s), \psi(s))}{\partial \varphi} + \lambda_\xi \frac{1}{(R_E + h)} \frac{\sin \psi \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \\ \frac{d\lambda_\xi}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi} = -\frac{\partial l(s, y(s), \psi(s))}{\partial \xi}\end{aligned}\quad (4.5)$$

2. Condición de transversalidad. Debido a que la distancia final no está especificada se tiene:

$$H(s_f) = 0 \quad (4.6)$$

3. Minimización del Hamiltoniano:

$$\frac{\partial H}{\partial \psi} = \frac{\partial l(s, y(s), \psi(s))}{\partial \psi} - \lambda_\varphi \frac{1}{(R_E + h)} \sin \psi + \lambda_\xi \frac{1}{(R_E + h)} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} = 0 \quad (4.7)$$

Por último, dado que H no es una función explícita de s_f , H resulta ser constante, lo cual combinado con (4.6) proporciona

$$H = 0 \quad (4.8)$$

4.1.3 Funciones objetivo

A continuación se recoge la función objetivo para cada caso de estudio, y se particularizan las expresiones que permiten obtener el control y las derivadas de los adjuntos con respecto a la distancia recorrida, que en la sección anterior se dejaron indicadas.

Caso 1

En el primer caso se desea minimizar el tiempo en ausencia de viento. Por tanto la función objetivo resulta:

$$J = \int_0^{s_f} \frac{1}{V} ds \quad (4.9)$$

Esta expresión de J lleva a las siguientes ecuaciones de los adjuntos:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_\varphi}{ds} &= -\lambda_\xi \frac{1}{(R_E + h)} \frac{\sin \psi \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \\ \frac{d\lambda_\xi}{ds} &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Y la siguiente expresión para la evolución de ψ , que se deriva de la condición de minimización del Hamiltoniano:

$$\tan \psi = \frac{\lambda_\xi}{\cos \varphi \lambda_\varphi} \quad (4.11)$$

Las particularidades de este primer caso permiten hallar una solución analítica al problema de optimización. Particularizando la ecuación (4.8) y combinándola con (4.11) se obtiene

$$\tan \psi = \frac{\lambda_\xi \cos \psi}{-\cos \varphi \left(\frac{R_E + h}{V} \right) - \lambda_\xi \sin \psi} \quad (4.12)$$

y operando se llega a

$$\cos \varphi \sin \psi = -\lambda_\xi \frac{V}{R_E + h} \quad (4.13)$$

Dado que λ_ξ es un valor constante (ver (4.10)), se llega a que el producto $\sin \psi \cos \varphi$ es también constante, por lo que la ecuación de realimentación para ψ depende únicamente de un parámetro constante desconocido. Esto permitiría su resolución mediante un método de disparo.

Así, la Ecuación (4.13) constituye una integral primera del movimiento a lo largo de la trayectoria óptima en ausencia de viento. En lo que sigue, se demuestra que las trayectorias que verifican dicha ecuación son las ortodrómicas.

En efecto, un resultado conocido en Mecánica Orbital es la Ecuación del Lanzamiento, que permite determinar la inclinación de la órbita a partir del azimut de lanzamiento y la latitud de la base de lanzamiento del vehículo, y viene dada por:

$$\cos \varphi \sin Az = \cos i \quad (4.14)$$

donde Az es el azimut de lanzamiento, e i es la inclinación de la órbita. La demostración de la relación anterior está basada en la aplicación de ciertas relaciones de trigonometría esférica [17]. La traza de dicha órbita constituye una ortodrómica (al tratarse de la intersección del plano orbital, que pasa por el centro de la Tierra, con la esfera terrestre) de modo que identificando el azimut con el curso del avión y la inclinación de la órbita con el ángulo formado por la ortodrómica y el ecuador se demuestra que (4.13) define una ortodrómica.

Caso 2

El en segundo caso la función objetivo queda:

$$J = \int_0^{s_f} \frac{1}{\sqrt{(V^2 - \bar{w}_c^2) + \bar{w}_l}} ds \quad (4.15)$$

Siendo \bar{w}_l y \bar{w}_c las velocidades medias del viento en sentido longitudinal y transversal. Las ecuaciones para los adjuntos quedan de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_\phi}{ds} &= -\frac{1}{(\sqrt{V^2 - \bar{w}_c^2} + \bar{w}_l)^2} \frac{\bar{w}_c}{\sqrt{V^2 - \bar{w}_c^2}} \left(-\frac{d\bar{w}_N}{d\phi} \sin \psi + \frac{d\bar{w}_E}{d\phi} \cos \psi \right) \\ &\quad - \frac{d\bar{w}_E}{d\phi} \sin \psi - \frac{d\bar{w}_N}{d\phi} \cos \psi - \lambda_\xi \frac{1}{(R_E + h)} \frac{\sin \psi \sin \phi}{\cos^2 \phi} \\ \frac{d\lambda_\xi}{ds} &= -\frac{1}{(\sqrt{V^2 - \bar{w}_c^2} + \bar{w}_l)^2} \frac{\bar{w}_c}{\sqrt{V^2 - \bar{w}_c^2}} \left(-\frac{d\bar{w}_N}{d\xi} \sin \psi + \frac{d\bar{w}_E}{d\xi} \cos \psi \right) \\ &\quad - \frac{d\bar{w}_E}{d\xi} \sin \psi - \frac{d\bar{w}_N}{d\xi} \cos \psi \end{aligned} \quad (4.16)$$

Debido a que \bar{w}_l y \bar{w}_c son funciones de ψ , la expresión para el control es una ecuación implícita:

$$(R_E + h) \frac{\frac{\bar{w}_N \sin \psi - \bar{w}_E \cos \psi}{\sqrt{V^2 - (\bar{w}_N \sin \psi + \bar{w}_E \cos \psi)^2}}}{\sqrt{V^2 - (\bar{w}_N \sin \psi + \bar{w}_E \cos \psi)^2} + \bar{w}_N \cos \psi + \bar{w}_E \sin \psi} - \lambda_\phi \sin \psi + \lambda_\xi \frac{\cos \psi}{\cos \phi} = 0 \quad (4.17)$$

Caso 3

El tercer caso es análogo al anterior, con la salvedad de que en lugar de considerar \bar{w}_l y \bar{w}_c , se consideran dichas velocidades para un escenario concreto i , w_{li} y w_{ci} . La función objetivo queda por tanto de la forma:

$$J = \int_0^{s_f} \frac{1}{\sqrt{(V^2 - w_{ci}^2) + w_{li}}} ds \quad (4.18)$$

Por otra parte, las ecuaciones de los adjuntos y la ecuación que proporciona el control quedan como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_\phi}{ds} &= -\frac{1}{(\sqrt{V^2 - w_{ci}^2} + w_{li})^2} \frac{w_{ci}}{\sqrt{V^2 - w_{ci}^2}} \left(-\frac{dw_{N_i}}{d\phi} \sin \psi + \frac{dw_{E_i}}{d\phi} \cos \psi \right) \\ &\quad - \frac{dw_{E_i}}{d\phi} \sin \psi - \frac{dw_{N_i}}{d\phi} \cos \psi - \lambda_\xi \frac{1}{(R_E + h)} \frac{\sin \psi \sin \phi}{\cos^2 \phi} \\ \frac{d\lambda_\xi}{ds} &= -\frac{1}{(\sqrt{V^2 - w_{ci}^2} + w_{li})^2} \frac{w_{ci}}{\sqrt{V^2 - w_{ci}^2}} \left(-\frac{dw_{N_i}}{d\xi} \sin \psi + \frac{dw_{E_i}}{d\xi} \cos \psi \right) \\ &\quad - \frac{dw_{E_i}}{d\xi} \sin \psi - \frac{dw_{N_i}}{d\xi} \cos \psi \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$(R_E + h) \frac{\frac{w_{N_i} \sin \psi - w_{E_i} \cos \psi}{\sqrt{V^2 - (w_{N_i} \sin \psi + w_{E_i} \cos \psi)^2}}}{\sqrt{V^2 - (w_{N_i} \sin \psi + w_{E_i} \cos \psi)^2} + w_{N_i} \cos \psi + w_{E_i} \sin \psi} - \lambda_\phi \sin \psi + \lambda_\xi \frac{\cos \psi}{\cos \phi} = 0 \quad (4.20)$$

Caso 4

Para el caso 4, en el que se busca minimizar la media del tiempo, la función objetivo debe tener la siguiente forma:

$$J = \int_0^{s_f} \frac{1}{35} \sum_{i=1}^{35} \frac{1}{\sqrt{(V^2 - w_{c_i}^2) + w_{l_i}}} ds \quad (4.21)$$

En este último caso se tienen las siguientes ecuaciones para los adjuntos y el control:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_\varphi}{ds} &= \frac{1}{35} \sum_{i=1}^{35} - \frac{1}{(\sqrt{V^2 - w_{c_i}^2} + w_{l_i})^2} \frac{w_{c_i}}{\sqrt{V^2 - w_{c_i}^2}} \left(- \frac{dw_{N_i}}{d\varphi} \sin \psi + \frac{dw_{E_i}}{d\varphi} \cos \psi \right) \\ &\quad - \frac{dw_{E_i}}{d\varphi} \sin \psi - \frac{dw_{N_i}}{d\varphi} \cos \psi - \lambda_\xi \frac{1}{(R_E + h)} \frac{\sin \psi \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \\ \frac{d\lambda_\xi}{ds} &= \frac{1}{35} \sum_{i=1}^{35} - \frac{1}{(\sqrt{V^2 - w_{c_i}^2} + w_{l_i})^2} \frac{w_{c_i}}{\sqrt{V^2 - w_{c_i}^2}} \left(- \frac{dw_{N_i}}{d\xi} \sin \psi + \frac{dw_{E_i}}{d\xi} \cos \psi \right) \\ &\quad - \frac{dw_{E_i}}{d\xi} \sin \psi - \frac{dw_{N_i}}{d\xi} \cos \psi \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$(R_E + h) \frac{1}{35} \sum_{i=1}^{35} \frac{\frac{w_{N_i} \sin \psi - w_{E_i} \cos \psi}{\sqrt{V^2 - (-w_{N_i} \sin \psi + w_{E_i} \cos \psi)^2}}}{\sqrt{V^2 - (-w_{N_i} \sin \psi + w_{E_i} \cos \psi)^2} + w_{N_i} \cos \psi + w_{E_i} \sin \psi} - \lambda_\varphi \sin \psi + \lambda_\xi \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} = 0 \quad (4.23)$$

Si bien los tres primeros casos podrían resolverse igualmente tomando como variable independiente el tiempo, esto no sería posible para el cuarto caso, ya que lo que es común para los 35 escenarios de cada predicción es el camino a recorrer (en definitiva, encontrar ψ a lo largo de s) y no el tiempo de vuelo. Por eso, y como ya se ha comentado, con el objetivo de desarrollar un método común para todos los casos, se toma s como variable independiente para todos.

4.1.4 Método numérico

El método que se ha implementado para la resolución del problema hace uso de la función *bvp4c* de MATLAB, una de las que pueden emplearse para resolver TPBVPs, que implementa una fórmula de colocación (la fórmula de Lobatto IIIA de tres etapas)[18].

La función integra un sistema de EDOs de la forma

$$\dot{y} = f(t, y) \quad (4.24)$$

en el intervalo $[t_0, t_f]$, conocido, sujeto a unas condiciones de contorno de la forma

$$\Psi[y(t_0), y(t_f)] = 0 \quad (4.25)$$

bvp4c genera una malla en el intervalo $[t_0, t_f]$, cuyas dimensiones máximas pueden seleccionarse, calculando una solución aproximada $S(t)$, una función continua que es un polinomio cúbico en cada subintervalo de la malla, que satisface las condiciones de contorno

$$\Psi[S(t_0), S(t_f)] = 0 \quad (4.26)$$

y además satisface las ecuaciones diferenciales en los extremos y en el punto medio de cada subintervalo. Todas estas condiciones resultan en un sistema algebraico no lineal que permite hallar los coeficientes de $S(t)$ de manera iterativa [18].

La función *bvp4c* puede además manejar sistemas como el (4.27), donde p representa un vector de parámetros desconocido.

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y, p) \\ \Psi[y(t_0), y(t_f), p] &= 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Este vector de parámetros es especialmente útil en el contexto de optimización de trayectorias, donde puede darse el caso de que el tiempo final (u otra variable con respecto a la que se optimice) sea desconocido. En este tipo de problemas, se introduce la variable independiente como un parámetro desconocido y se eliminan las dependencias explícitas del estado y el coestado con dicha variable, lo cual se consigue adimensionalizando el sistema con respecto a esta variable [18] [19]:

$$\tau = \frac{t}{t_f} \rightarrow d\tau = \frac{dt}{t_f} \quad (4.28)$$

de forma que se tiene

$$\frac{d}{d\tau} = t_f \frac{d}{dt} \quad (4.29)$$

con $\tau \in [0, 1]$, de forma que el valor final ya no está libre.

Sin embargo, el sistema formado por (4.24) y (4.25), o el sistema 4.27 no describe exactamente el problema que se desea resolver: teniendo en cuenta la forma de la ecuación que proporciona el valor del control óptimo en cada instante, el sistema que se requiere resolver es un sistema Algebraico-Diferencial (Differential Algebraic Equations, DAE). No obstante, *bvp4c* no admite sistemas DAE como sí hacen otras funciones que resuelven sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (*ode15i*, *ode15s*, *ode23t*) [20], [21]. Por ello, el valor del control óptimo en cada instante se calcula mediante un bucle adicional, resolviendo la ecuación implícita con la función *fsolve*, teniendo en cuenta además las ambigüedades introducidas por las funciones trigonométricas.

Por último, la función *bvp4c* debe ser provista de una solución inicial, incluyendo el valor de los parámetros libres. Es muy probable que una solución inicial no lo suficientemente cercana a la solución real del problema provoque errores de convergencia, lo cual hace que la decisión respecto a la condición inicial sea sumamente delicada [22]. En este caso se aporta la solución obtenida mediante el Algoritmo de Dijkstra como primera solución.

4.2 Resultados

De forma análoga al Capítulo 3, en las siguientes secciones se recogen los resultados para los cuatro casos de estudio. En el primer lugar se muestran las trayectorias resultantes de la optimización, recogiendo los valores de t_f , m_F y s_f . A continuación se recogen los resultados derivados de evaluar el coste de recorrer dichas trayectorias óptimas en presencia de cada escenario meteorológico del *ensemble*.

4.2.1 Caso 1

En la Figura 4.1 se representan las trayectorias optimizadas, junto a la ortodrómica, que se representa como referencia. Como era de esperar, todas las trayectorias óptimas son exactamente iguales, que coinciden con la ortodrómica, superponiéndose a ésta. Como se comentó en el capítulo anterior, y además se ha demostrado

en la sección anterior, al ser la de menor distancia, en este caso de estudio y al no estar restringidos los puntos de paso, es la trayectoria óptima. En la Figura 4.2 se representa la ley de control $\psi(s)$ que se ha obtenido.

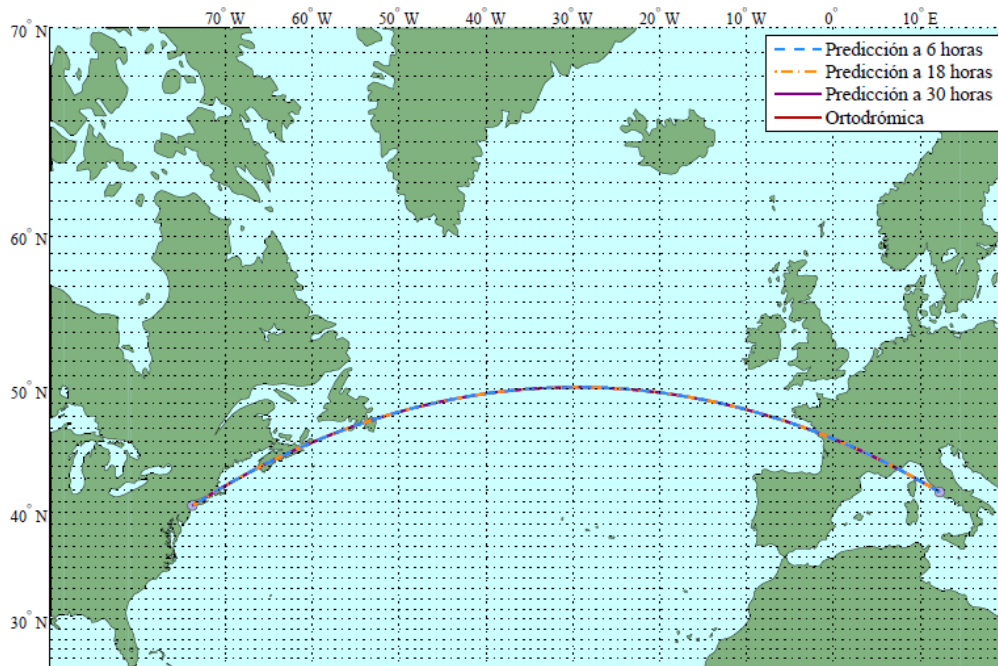


Figura 4.1 Trayectorias óptimas. Caso 1.

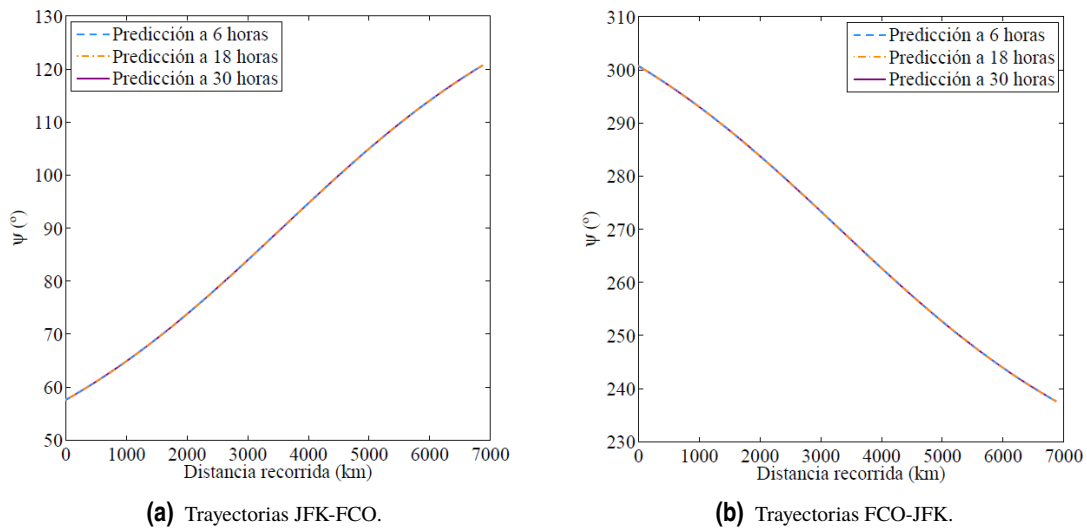


Figura 4.2 Ley de control $\psi(s)$. Caso 1.

Por otra parte, en la Tabla 4.1 se recogen los resultados del proceso de optimización. Como se puede observar, la distancia recorrida coincide exactamente con la distancia ortodrómica entre ambos puntos (ver Capítulo 2), de manera que, en ausencia de viento, el tiempo de vuelo mínimo y la mínima masa de combustible a consumir coincidirán exactamente con los valores de dicha tabla.

Tabla 4.1 Resultados de la optimización. Caso 1.

t_f	477.53 min
m_F	38564.5 kg
s_f	6876.5 km

Una vez obtenida la trayectoria óptima se evalúan los costes derivados de recorrerla en los diferentes escenarios de viento. Estos resultados se representan en forma de histograma en la Figura 4.3, y en la Tabla 4.2 se recogen los valores de la media y desviación típica de t_f y m_F . Igual que ocurría para la trayectoria basada en waypoints, la ruta JFK-FCO requiere un menor tiempo de vuelo para completarse, ya cuenta con viento de cola durante gran parte de su recorrido. Por ello, el valor de la media de t_f y de m_F es menor que el obtenido para la trayectoria óptima. Lo contrario ocurre para la ruta FCO-JFK, donde el valor medio de ambas variables es considerablemente mayor al obtenido para el escenario sin viento.

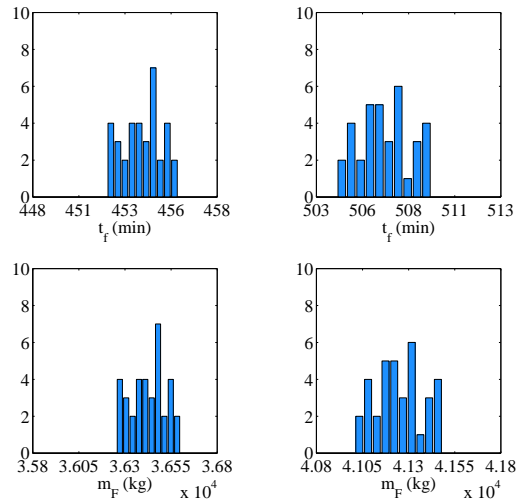
Por su parte, los valores de μ aumentan con el tiempo al que se hace la predicción, aunque para un mismo sentido de la ruta permanecen en torno a valores muy similares. Tanto en la tabla como en los histogramas se puede observar una mayor dispersión para las rutas que parten de FCO; los valores de σ para una misma predicción son siempre mayores en este sentido de la ruta. Con respecto al valor de σ , se puede ver también que son muy parecidos para las dos primeras predicciones, aumentando de manera considerable para la predicción a 30 horas.

Tabla 4.2 Evaluación del coste. Caso 1.

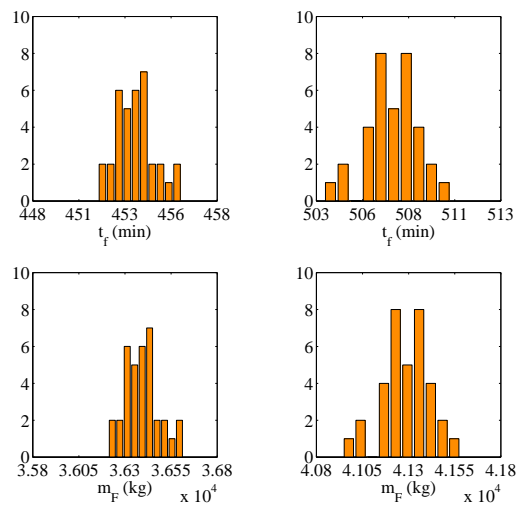
(a) Predicción a 6 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	453.94	1.06	506.71	1.40
m_F (kg)	36426.2	95.1	41249.2	129.6

(b) Predicción a 18 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	453.64	1.03	507.13	1.40
m_F (kg)	36398.4	92.9	41287.6	130.0

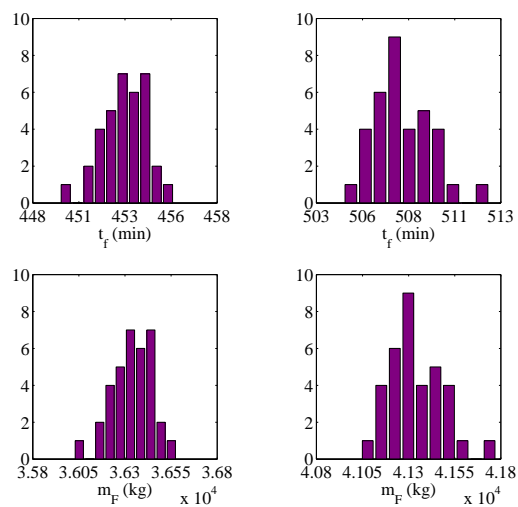
(c) Predicción a 30 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	452.93	1.26	507.73	1.63
m_F (kg)	36334.9	113.3	41343.5	151.1



(a) Predicción a 6 horas.



(b) Predicción a 18 horas.



(c) Predicción a 30 horas.

Figura 4.3 Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha). Caso 1.

4.2.2 Caso 2

El siguiente caso de estudio se corresponde con el escenario de viento medio. En la Figura 4.4 se representan las trayectorias óptimas obtenidas para todas las predicciones, junto a la ortodrómica como referencia. De nuevo, aquellas que quedan al Norte de la ortodrómica van en sentido JFK-FCO, y las que quedan al Sur, en sentido FCO-JFK. Como era de esperar, existen 6 trayectorias óptimas diferentes, una por cada pareja de petición y sentido de la trayectoria. Si bien las trayectorias para un mismo sentido de la ruta se distinguen entre sí, son muy parecidas, lo cual lleva a pensar que los escenarios de viento medio para las diferentes predicciones son muy similares. En la Figura 4.5 se representan las leyes de control obtenidas.

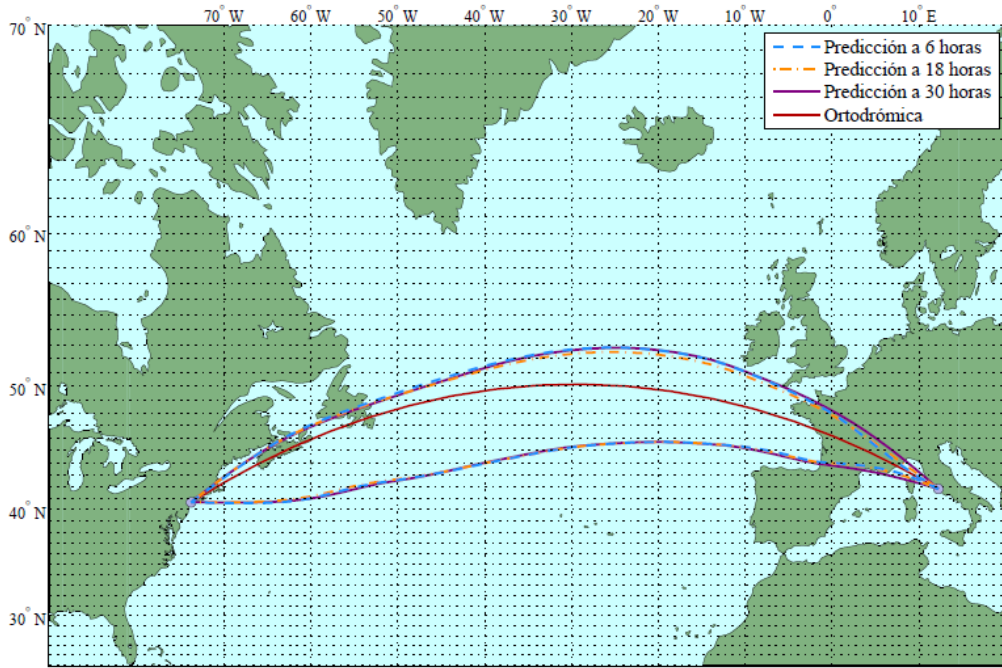


Figura 4.4 Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 2.

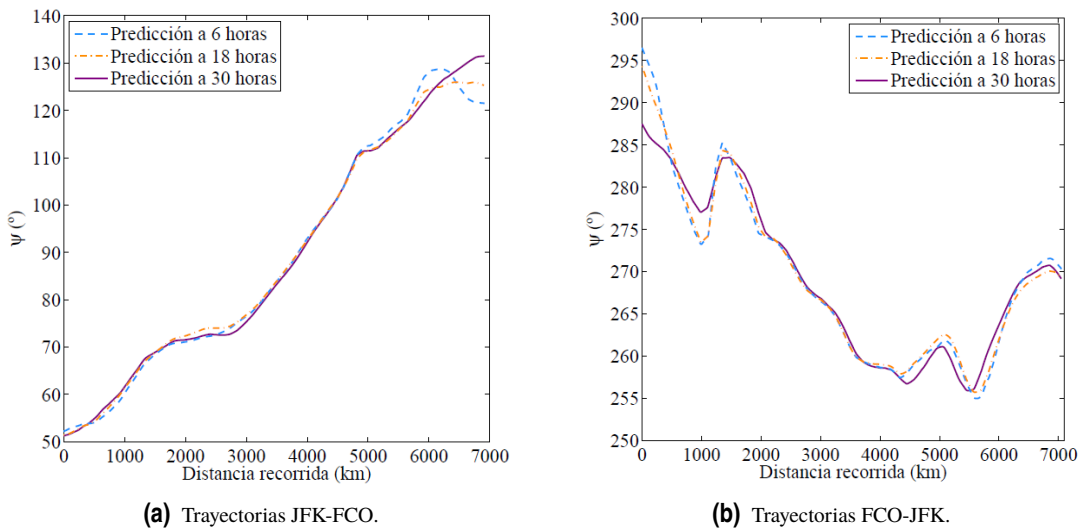


Figura 4.5 Ley de control $\psi(s)$. Caso 2.

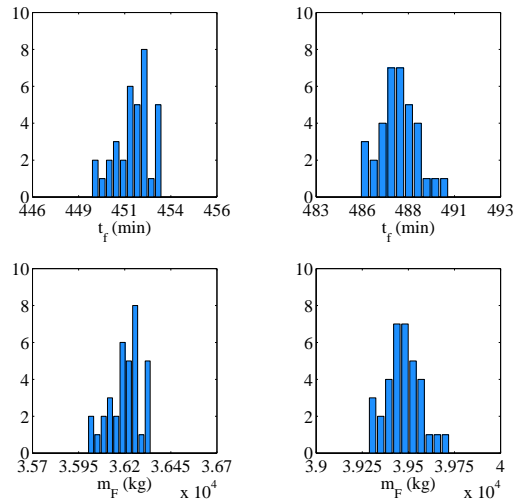
Los resultados de la optimización se presentan en la Tabla 4.3. Como se puede observar, para la ruta JFK-FCO los valores de t_f y m_F se han reducido considerablemente con respecto a los del Caso 1; lo contrario ocurre para la ruta FCO-JFK. Además se observa que las rutas en sentido JFK-FCO recorren una distancia considerablemente menor que las que van en sentido inverso. Por ello, el mayor tiempo de vuelo de estas últimas se debe tanto a un escenario de viento más desfavorable, como a una mayor distancia recorrida.

Tabla 4.3 Resultados de la optimización. Caso 2.

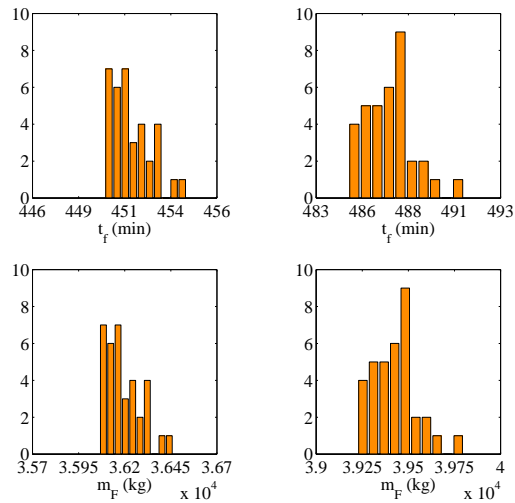
(a) Predicción a 6 horas.		
	JFK-FCO	FCO-JFK
t_f	451.42 min	487.41 min
m_F	36199.1 kg	39468.3 kg
s_f	6913.5 km	7050.3 km
(b) Predicción a 18 horas.		
	JFK-FCO	FCO-JFK
t_f	451.28 min	486.88 min
m_F	36186.8 kg	39420.0 kg
s_f	6904.6 km	7041.3 km
(c) Predicción a 30 horas.		
	JFK-FCO	FCO-JFK
t_f	450.91 min	487.14 min
m_F	36153.0 kg	39443.7 kg
s_f	6912.7 km	7046.2 km

La Figura 4.6 y la Tabla 4.4 recogen los resultados obtenidos tras evaluar el coste de recorrer las trayectorias óptimas en los 35 escenarios meteorológicos de las respectivas predicciones. A diferencia de lo obtenido en el Caso 1, los valores de μ para cada predicción son muy similares a los obtenidos para la respectiva trayectoria óptima, debido a la mayor proximidad entre el escenario de viento medio y cada uno de los miembros del *ensemble*.

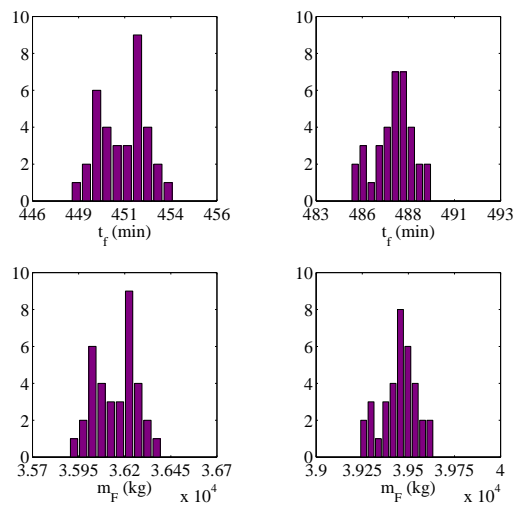
Por otra parte, se observan unos mayores valores de σ para las rutas con sentido FCO-JFK, salvo en el caso de la predicción a 30 horas: como se aprecia en los histogramas, para los dos primeros conjuntos de predicciones, t_f y m_F se concentran en torno a los valores medios, especialmente para la ruta JFK-FCO (viento de cara).



(a) Predicción a 6 horas.



(b) Predicción a 18 horas.



(c) Predicción a 30 horas.

Figura 4.6 Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha). Caso 2.

Tabla 4.4 Evaluación del coste. Caso 2.

(a) Predicción a 6 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	451.46	0.97	487.45	1.07
m_F (kg)	36202.8	87.1	39472.3	98.0

(b) Predicción a 18 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	451.33	1.06	486.96	1.35
m_F (kg)	36191.2	95.4	39427.2	123.6

(c) Predicción a 30 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	450.96	1.30	487.24	1.08
m_F (kg)	36157.7	117.0	39452.3	98.8

4.2.3 Caso 3

En el tercer caso, al igual que para la trayectoria basada en waypoints, se optimiza la trayectoria respecto a cada uno de los escenarios meteorológicos, teniendo por tanto 35 trayectorias óptimas por cada pareja de sentido vuelo y predicción.

En la Figura 4.7, Figura 4.8 y Figura 4.9 se representan dichas trayectorias, en figuras diferentes para cada predicción, para mayor claridad. De nuevo, aquellas en sentido JFK-FCO quedan al Norte de la ortodrómica, y las que van en sentido FCO-JFK, al Sur. Como se puede observar, en este caso es posible que cada miembro del *ensemble* genere una trayectoria, diferente al resto. Aunque para un mismo sentido de la ruta las trayectorias siguen la misma tendencia, pueden existir diferencias de varios grados de latitud en algunas zonas, especialmente para las rutas con sentido JFK-FCO. Además, la diferencia entre las trayectorias es más apreciable a medida que aumenta el horizonte temporal al que se hace la predicción. En la Figura 4.10 se muestran las diferentes leyes de control obtenidas. Aunque existen claras diferencias entre ellas, todas siguen la misma tendencia.

Al igual que en el capítulo anterior, para cada predicción se toma el conjunto de los 35 caminos óptimos, promediando los resultados de t_f , m_F y s_f , lo cual proporcionará una cota inferior para la media de t_f y m_F . Estos resultados se representan gráficamente en la Figura 4.11 y se recogen en la Tabla 4.5.

Como ya ocurría en casos anteriores, la media de t_f y m_F es menor para las rutas en sentido JFK-FCO. Para estas trayectorias, se observa una disminución en μ con el horizonte temporal, mientras que σ aumenta claramente. Para las rutas FCO-JFK esta tendencia se rompe con la última predicción.

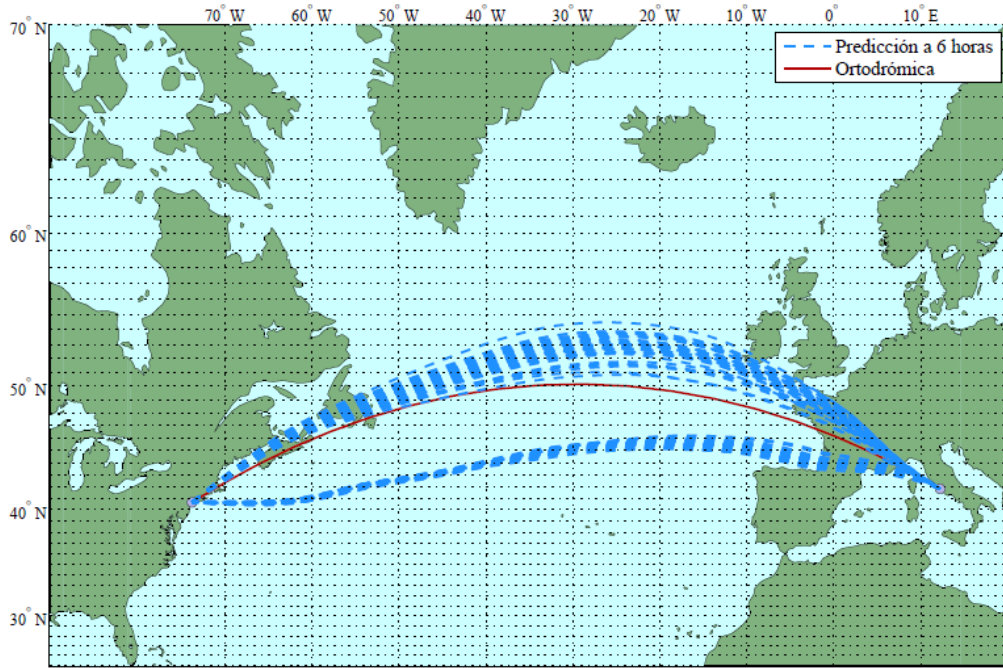


Figura 4.7 Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 3, predicción a 6 horas.

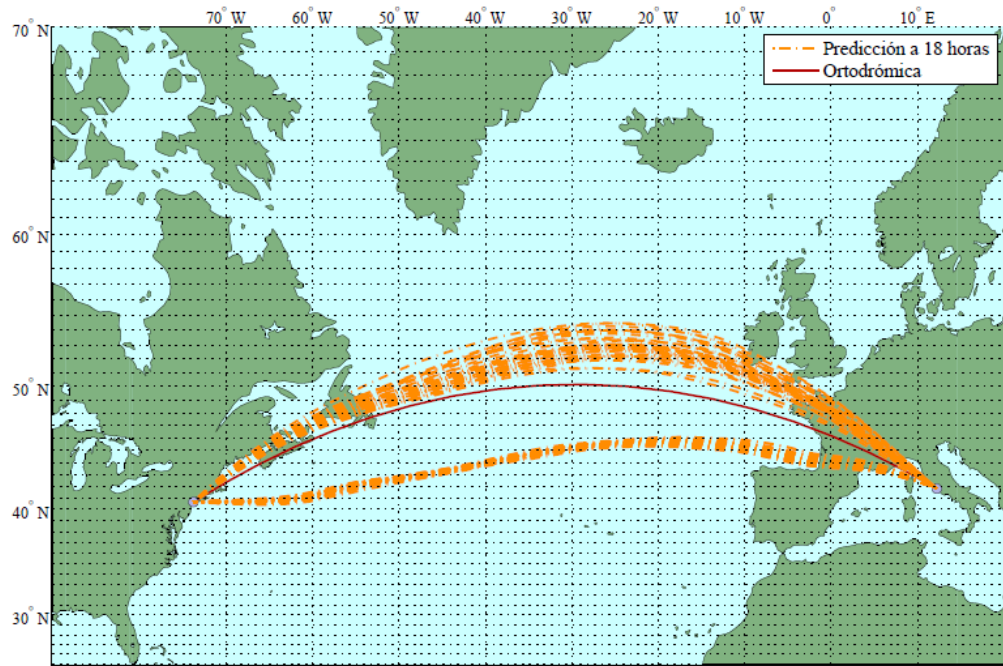


Figura 4.8 Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 3, predicción a 18 horas.

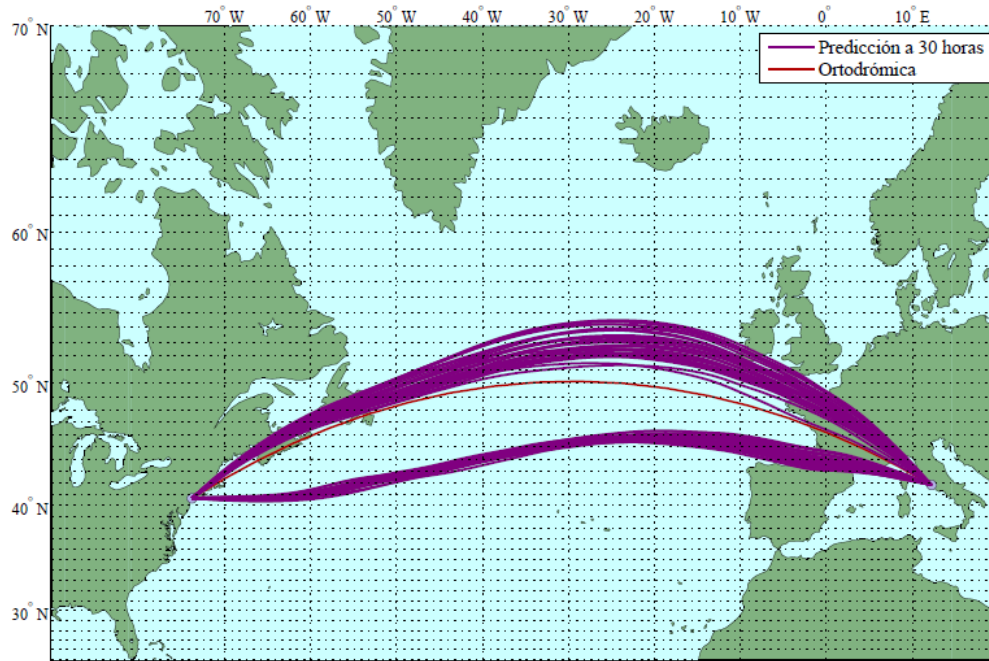


Figura 4.9 Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 3, predicción a 30 horas.

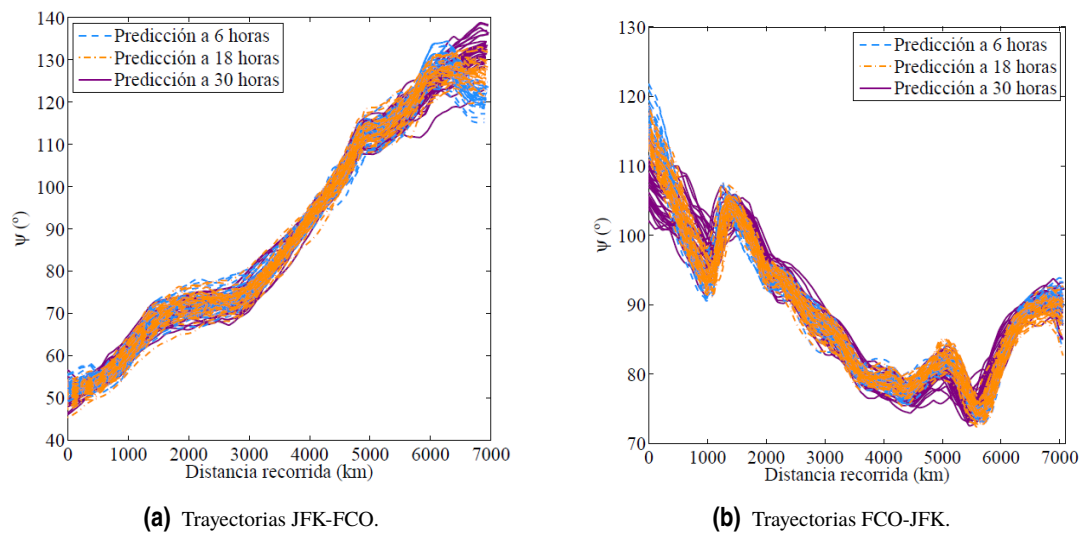
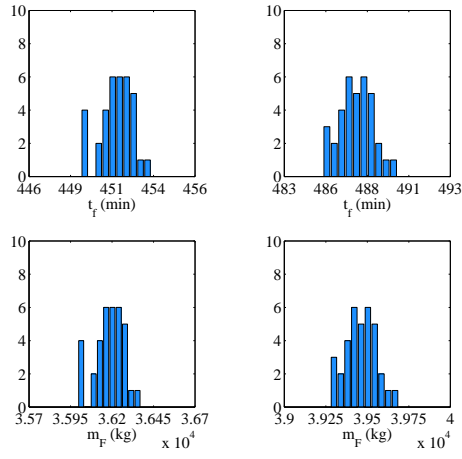
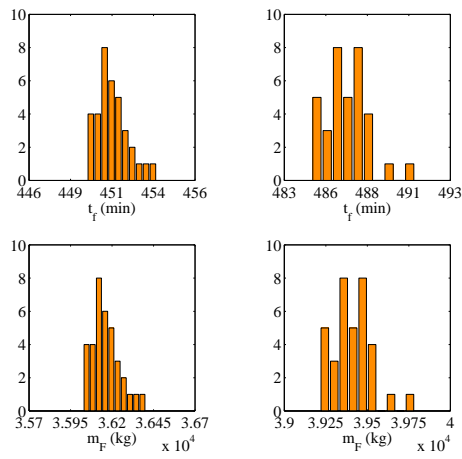


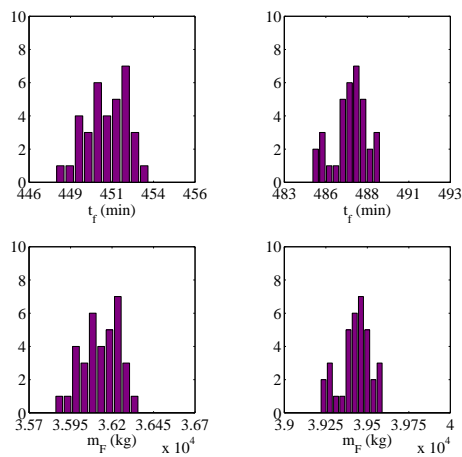
Figura 4.10 Ley de control $\psi(s)$. Caso 3.



(a) Predicción a 6 horas.



(b) Predicción a 18 horas.



(c) Predicción a 30 horas.

Figura 4.11 Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha). Caso 3.

Tabla 4.5 Evaluación del coste. Caso 3.

(a) Predicción a 6 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	451.26	0.98	487.32	1.05
m_F (kg)	36185.0	88.3	39460.2	96.4

(b) Predicción a 18 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	451.01	0.99	486.79	1.34
m_F (kg)	36162.0	89.2	39411.2	123.0

(c) Predicción a 30 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	450.69	1.27	486.96	1.04
m_F (kg)	36133.8	114.4	39427.1	95.1

4.2.4 Caso 4

Por último, se considera el caso en el que se persigue minimizar la media del tiempo de vuelo. En la Figura 4.12 se representan las trayectorias obtenidas de la optimización junto a la ortodrómica, donde se tiene un total de 6 trayectorias, una por pareja de petición y sentido de la ruta (al Norte de la ortodrómica para las rutas JFK-FCO, y al Sur para las rutas FCO-JFK). Éstas resultan muy similares a las obtenidas en el Caso 2, lo mismo que ocurría para las trayectorias basadas en waypoints. En la Figura 4.13 se muestran las leyes $\psi(s)$.

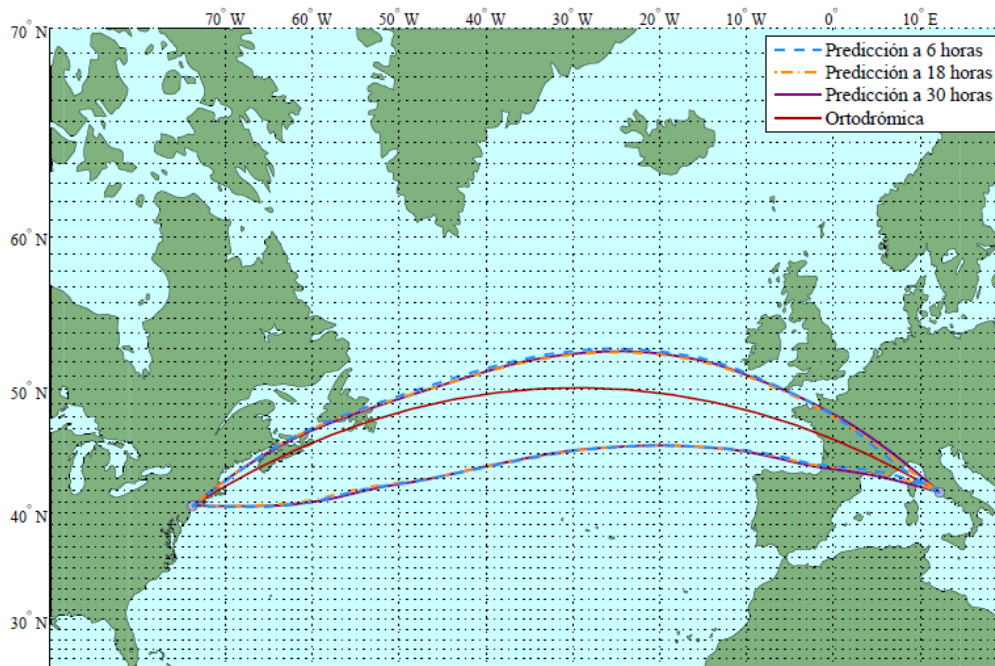


Figura 4.12 Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 4.

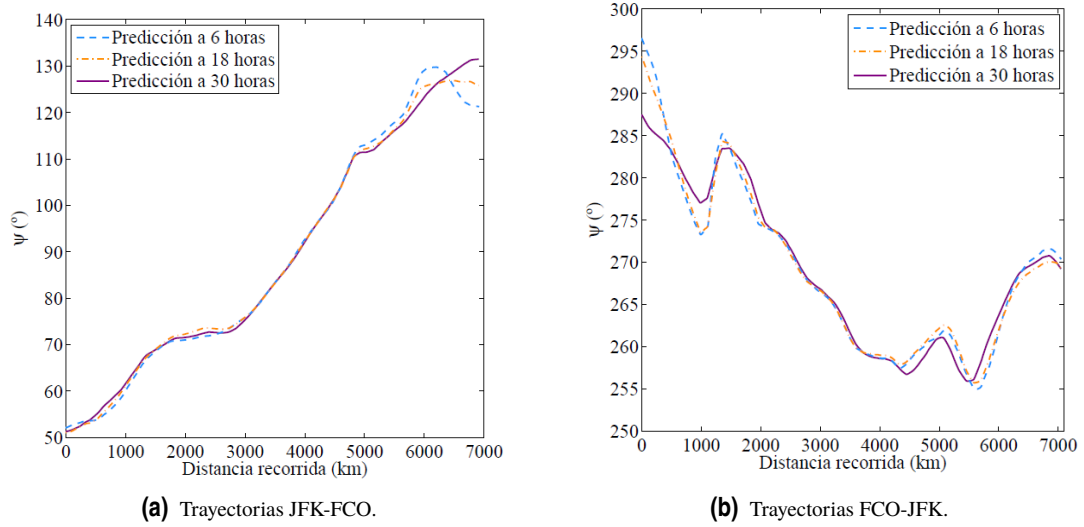


Figura 4.13 Ley de control $\psi(s)$. Caso 4.

Los resultados de la optimización, que se presentan en la Tabla 4.6, son también muy parecidos a los de la Tabla 4.3. De nuevo se tiene un menor tiempo de vuelo y masa de combustible para las rutas JFK-FCO, así como una menor distancia recorrida en estos casos. Además se observa una disminución en t_f y m_F a medida que aumenta el tiempo al que se hace la predicción.

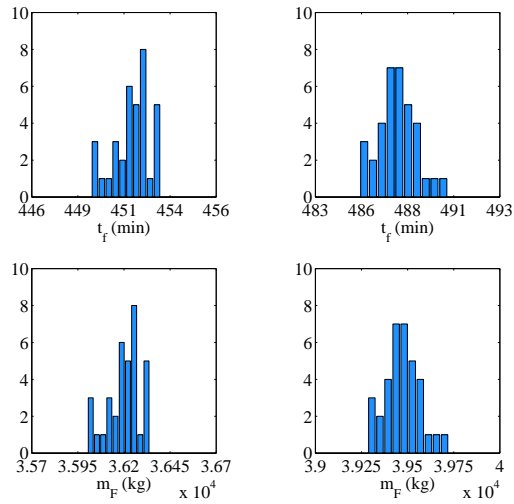
Tabla 4.6 Resultados de la optimización. Caso 4.

(a) Predicción a 6 horas.		
	JFK-FCO	FCO-JFK
t_f	451.45 min	487.45 min
m_F	36201.6 kg	39472.3 kg
s_f	6918.9 km	7050.3 km

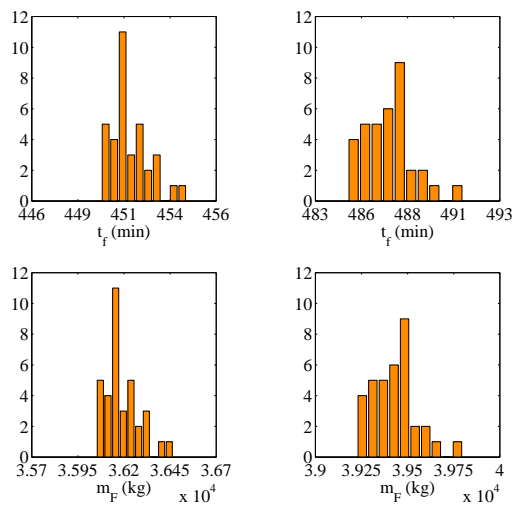
(b) Predicción a 18 horas.		
	JFK-FCO	FCO-JFK
t_f	451.31 min	486.96 min
m_F	36188.8 kg	39427.2 kg
s_f	6910.7 km	7041.3 km

(c) Predicción a 30 horas.		
	JFK-FCO	FCO-JFK
t_f	450.96 min	487.24 min
m_F	36157.7 kg	39452.3 kg
s_f	6912.7 km	7046.3 km

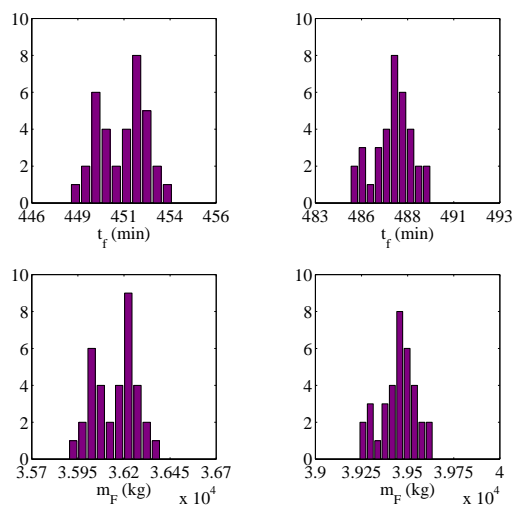
Por otra parte, la evaluación del coste cada escenario por separado se representa gráficamente en la Figura 4.14, y los principales parámetros se recogen en la Tabla 4.7. Como se puede observar, salvo en la predicción a 30 horas, los valores de σ son mayores para la ruta recorrida en sentido FCO-JFK. Este efecto se observa bien en la Figura 4.14, donde para las dos primeras predicciones, los histogramas para t_f y m_F abarcan un mayor rango de valores para la ruta FCO-JFK; los histogramas para la ruta JFK-FCO presentan una concentración importante en torno al valor medio para las dos primeras predicciones.



(a) Predicción a 6 horas.



(b) Predicción a 18 horas.



(c) Predicción a 30 horas.

Figura 4.14 Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha). Caso 4.

Tabla 4.7 Evaluación del coste. Caso 4.

(a) Predicción a 6 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	451.45	0.97	487.45	1.07
m_F (kg)	36201.6	87.0	39472.3	97.9

(b) Predicción a 18 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	451.31	1.06	486.96	1.35
m_F (kg)	36188.8	95.1	39427.2	123.6

(c) Predicción a 30 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	450.96	1.30	487.24	1.08
m_F (kg)	36157.7	117.0	39452.3	98.8

Los resultados obtenidos en este caso de estudio parecen indicar que optimizar respecto a un escenario de viento medio, y optimizar la media de t_f considerando todos los escenarios aporta unos resultados muy parecidos.

5 Comparativa entre ambos enfoques

Una vez resuelto el problema tanto para trayectorias libres como para trayectorias basadas en puntos de paso, a modo de resumen y para obtener nuevas conclusiones, es interesante enfrentar los resultados obtenidos para ambos enfoques.

5.1 Caso 1

En el primero de los casos, como ya se ha mostrado en los capítulos anteriores, se obtiene una única trayectoria óptima, ya que el escenario considerado es uno sin viento. En la Figura 5.1 se representan las trayectorias obtenidas con los dos métodos de resolución empleados. Como ya se observó en el Capítulo 3, la trayectoria basada en waypoints se aproxima bastante bien a la ortodrómica, que es la trayectoria libre óptima (ver Capítulo 4), si bien la primera queda siempre por debajo de la segunda.

En la Tabla 5.1 se recogen además los resultados de ambos procesos de optimización, presentando en la última columna el incremento en t_f y m_F de la trayectoria óptima basada en waypoints sobre la trayectoria libre óptima. El incremento en t_f y m_F , que como se ve no es excesivamente grande, procede de dos efectos:

- La distancia extra recorrida en el caso de la trayectoria con restricciones
- El efecto de promediar el viento en tramos loxodrómicos, en lugar de aplicarlos punto a punto a partir de la interpolación del miembro del ensemble.

Tabla 5.1 Comparación entre los resultados de la optimización. Caso 1.

	Dijkstra	C. Óptimo	Δ
t_f	478.66 min	477.53 min	1.13 min
m_F	38667.6 kg	38564.5 kg	103.1 kg

5.2 Caso 2

Para el segundo caso, en la Figura 5.2, Figura 5.3 y Figura 5.4 se representan las trayectorias óptimas obtenidas mediante ambos métodos, separando por predicción por claridad. Como se puede observar, en todos los casos las trayectorias óptimas de una misma predicción y sentido de ruta son muy parecidas, especialmente las JFK-FCO, si bien en el caso de la predicción a 30 horas hay zonas en las que las trayectorias se separan hasta 1° en latitud. Las trayectorias FCO-JFK obtenidas por los dos métodos presentan una mayor diferencia, especialmente en la primera mitad de la ruta; en la segunda mitad, sin embargo, son mucho más parecidas.

Al igual que en el caso anterior, para poder establecer una comparación cuantitativa, en la Tabla 5.2 se recogen los resultados de ambos procesos de optimización y el incremento en las variables para la trayectoria basada en waypoints sobre la libre. Como es de esperar, los valores de t_f y m_F son menores para las trayectorias obtenidas mediante Control Óptimo, ya que son verdaderamente las trayectorias de mínimo tiempo y

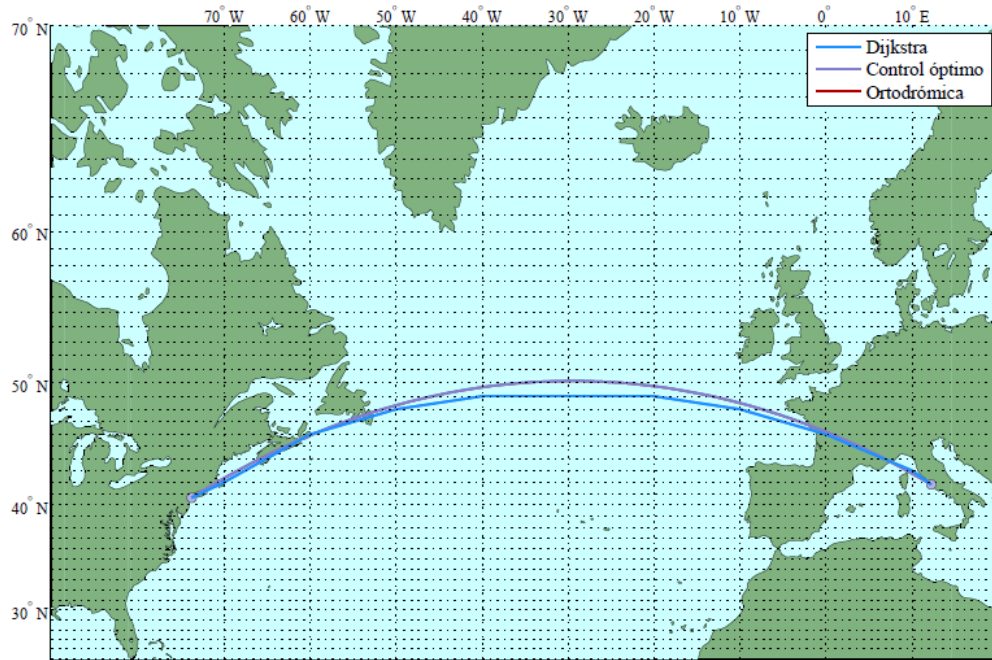


Figura 5.1 Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 1.

consumo; las trayectorias basadas en waypoints, al tener restricciones, representan un caso subóptimo. Como se puede observar, para todas la predicciones los incrementos en t_f y m_F son mayores para las rutas que parten de FCO, siendo la diferencia de tiempo en el peor de los casos de 1.63 minutos, y de 0.86 minutos en el mejor. Por tanto, las diferencias en t_f y m_F en las trayectorias óptimas obtenidas por los dos métodos no resultan demasiado llamativas.

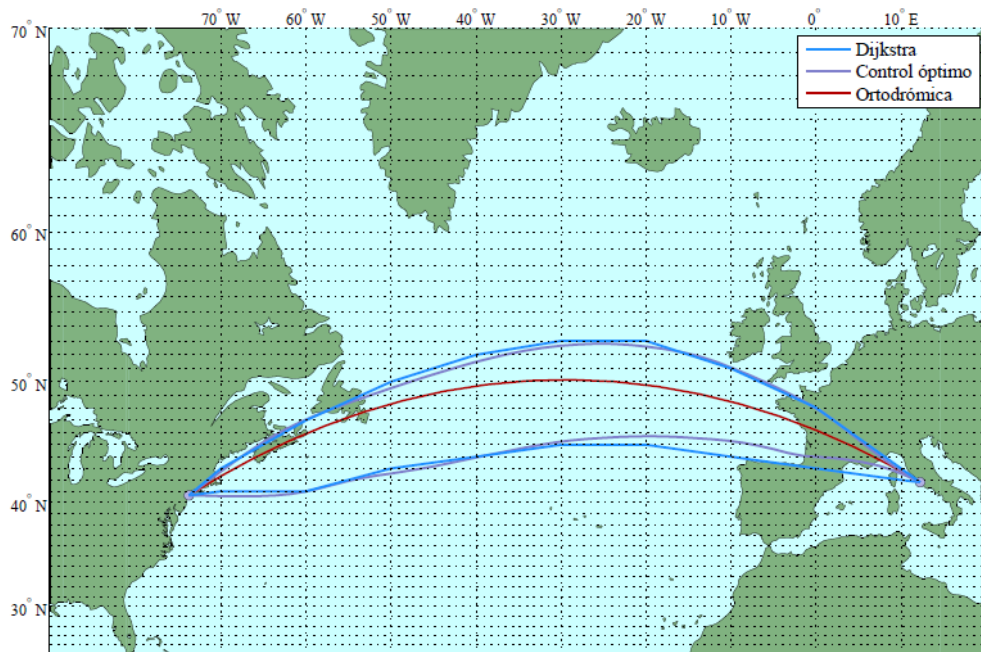


Figura 5.2 Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 2, predicción a 6 horas.

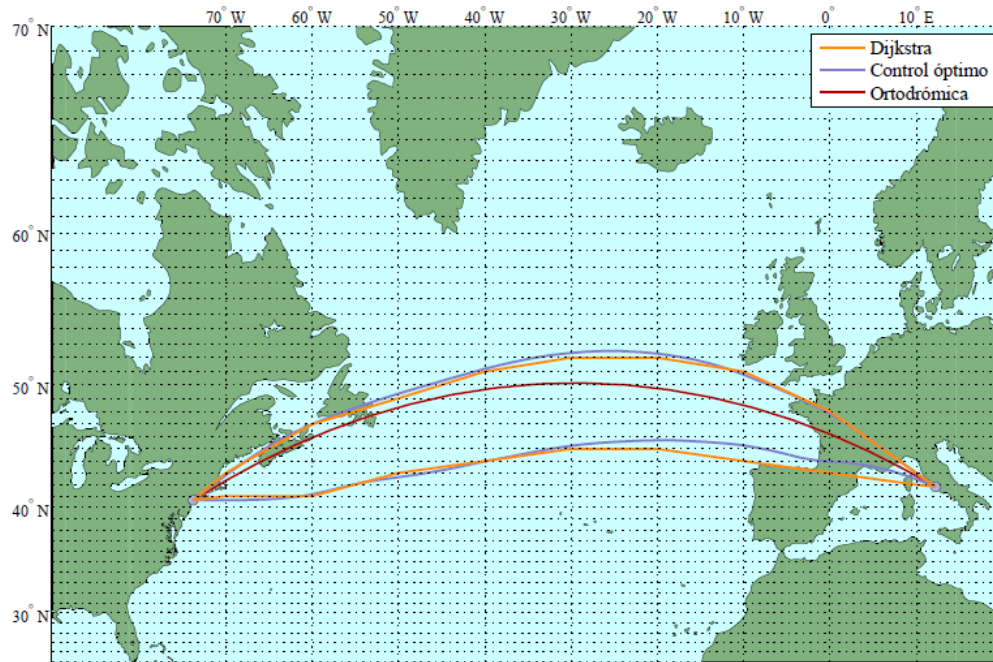


Figura 5.3 Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 2, predicción a 18 horas.

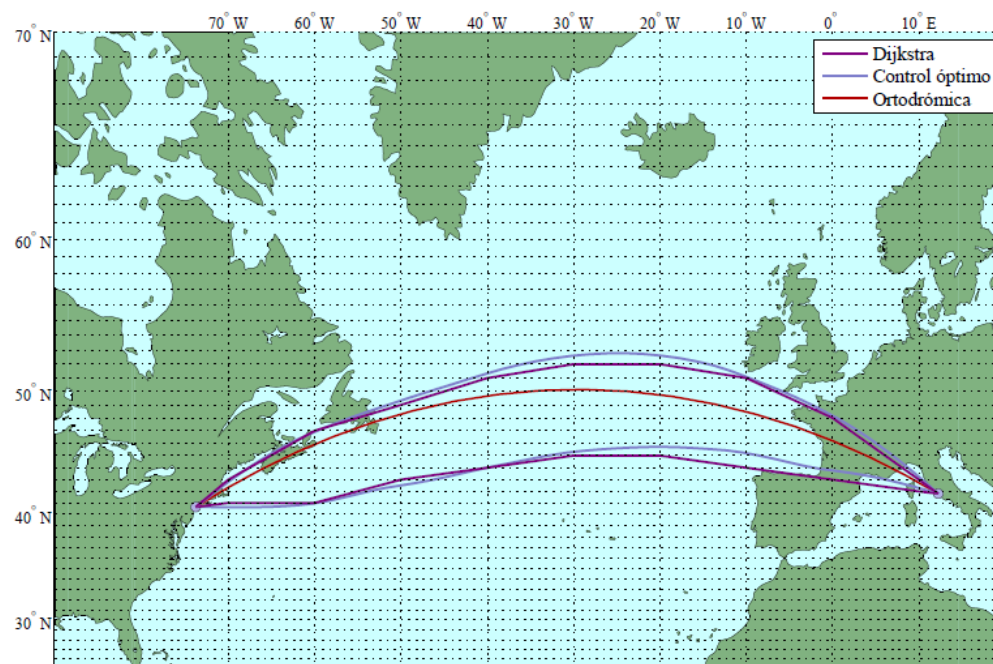


Figura 5.4 Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 2, predicción a 30 horas.

Tabla 5.2 Comparación entre los resultados de la optimización. Caso 2.

(a) Predicción a 6 horas.						
	JFK-FCO			FCO-JFK		
	Dijkstra	C. Óptimo	Δ	Dijkstra	C. Óptimo	Δ
t_f	452.46 min	451.42 min	1.04 min	488.98 min	487.41 min	1.58 min
m_F	36292.3 kg	36199.1 kg	93.2 kg	39614.0 kg	39468.3 kg	145.7 kg

(b) Predicción a 18 horas.						
	JFK-FCO			FCO-JFK		
	Dijkstra	C. Óptimo	Δ	Dijkstra	C. Óptimo	Δ
t_f	452.14 min	451.28 min	0.86 min	488.51 min	486.88 min	1.63 min
m_F	36263.5 kg	36186.8 kg	76.7 kg	39569.1 kg	39420.0 kg	149.1 kg

(c) Predicción a 30 horas.						
	JFK-FCO			FCO-JFK		
	Dijkstra	C. Óptimo	Δ	Dijkstra	C. Óptimo	Δ
t_f	451.94 min	450.91 min	1.03 min	488.43 min	487.14 min	1.29 min
m_F	36245.9 kg	36153.0 kg	92.9 kg	39562.2 kg	39443.7 kg	118.5 kg

5.3 Caso 3

Con respecto al tercer caso, en la Figura 5.5, Figura 5.6 y Figura 5.7 se representan las trayectorias libres óptimas, y sobre ellas aquellas basadas en waypoints. Se puede observar cómo, para todas las predicciones, las obtenidas con el Algoritmo de Dijkstra engloban de forma bastante acertada a las calculadas mediante Control Óptimo.

En la Tabla 5.3 se presentan los valores medios de t_f y m_F para las trayectorias óptimas respecto a cada miembro del *ensemble* de cada predicción. De nuevo, y como se esperaba, se alcanzan resultados mejores para las trayectorias resueltas mediante Control Óptimo. El incremento en t_f y m_F alcanza unos valores similares a los del caso anterior, mayores para las trayectorias en sentido FCO-JFK.

5.4 Caso 4

Por último, en la Figura 5.8, Figura 5.9 y Figura 5.10 se representa, para cada predicción, las trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Tal como se comentó en los dos capítulos anteriores, son muy similares a las obtenidas en el Caso 2 (iguales para las obtenidas mediante el Algoritmo de Dijkstra). Al igual que en los casos anteriores, las trayectorias obtenidas con el algoritmo se adaptan bastante bien a las obtenidas mediante Control Óptimo, aunque existe una mayor diferencia para el primer tramo de las rutas en sentido FCO-JFK.

La Tabla 5.4 recoge los valores de t_f y m_F para las trayectorias óptimas libres y basadas en waypoints. Los incrementos obtenidos en las variables son similares a los de los casos anteriores (especialmente al Caso 2), de manera que hay una mayor discrepancia en las rutas en sentido FCO-JFK. En el caso más desfavorable se tiene un incremento en t_f de algo más de minuto y medio.

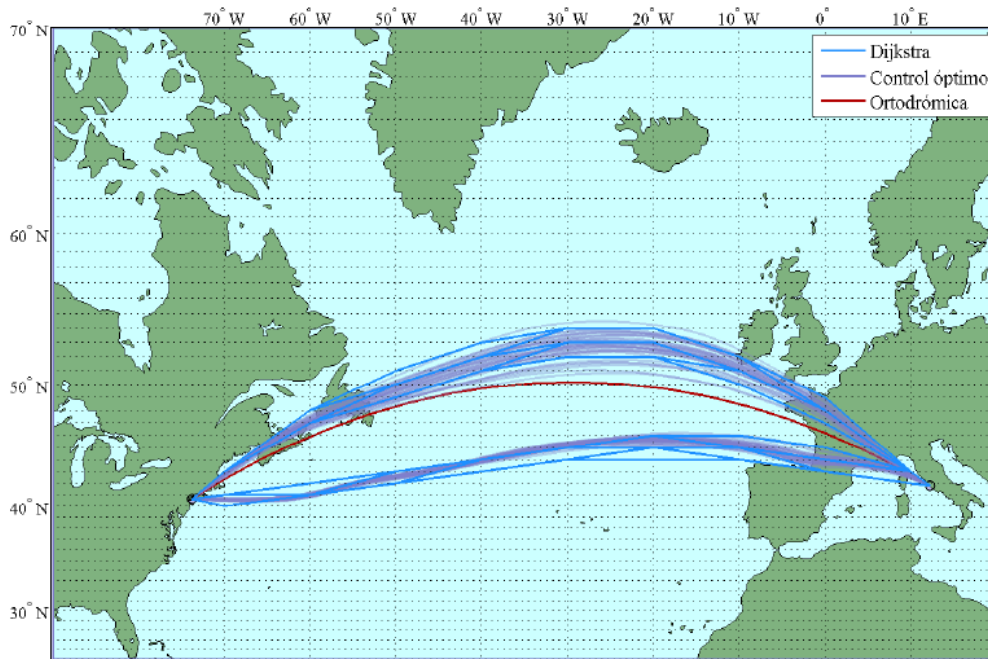


Figura 5.5 Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 3, predicción a 6 horas.

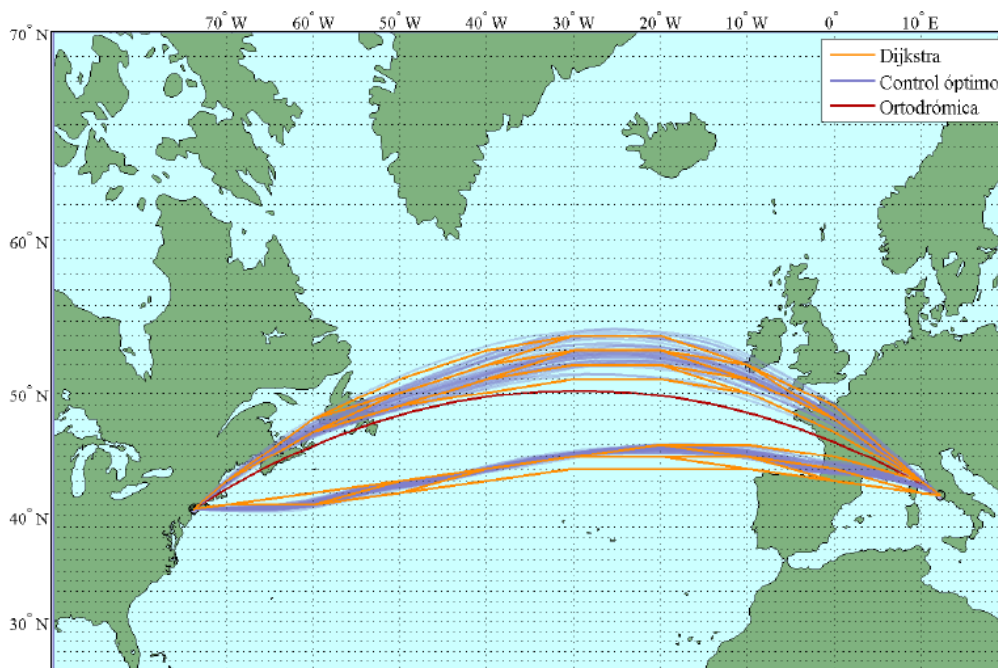


Figura 5.6 Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 3, predicción a 18 horas.

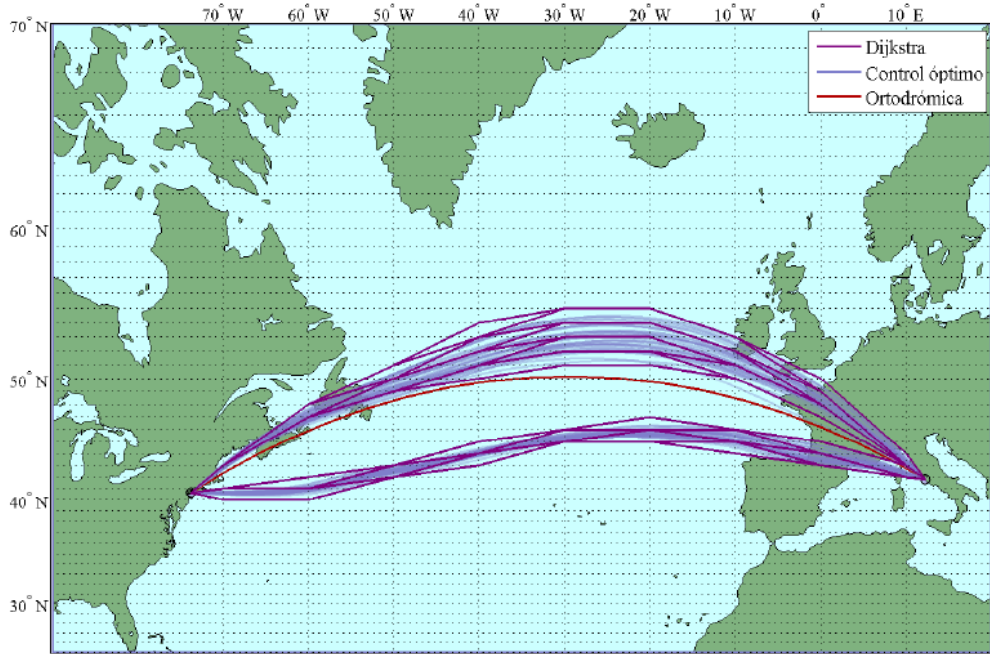


Figura 5.7 Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 3, predicción a 30 horas.

Tabla 5.3 Comparación entre los resultados de la optimización. Caso 3.

(a) Predicción a 6 horas.						
	JFK-FCO			FCO-JFK		
	Dijkstra	C. Óptimo	Δ	Dijkstra	C. Óptimo	Δ
t_f	452.23 min	451.26 min	0.97 min	488.77 min	487.32 min	1.45 min
m_F	36272.0 kg	36185.0 kg	87.0 kg	39593.2 kg	39460.2 kg	133.0 kg

(b) Predicción a 18 horas.						
	JFK-FCO			FCO-JFK		
	Dijkstra	C. Óptimo	Δ	Dijkstra	C. Óptimo	Δ
t_f	451.93 min	451.01 min	0.92 min	488.26 min	486.79 min	1.47 min
m_F	36245.0 kg	36162.0 kg	83.0 kg	39546.2 kg	39411.2 kg	135.0 kg

(c) Predicción a 30 horas.						
	JFK-FCO			FCO-JFK		
	Dijkstra	C. Óptimo	Δ	Dijkstra	C. Óptimo	Δ
t_f	451.73 min	450.69 min	1.04 min	488.16 min	486.96 min	1.20 min
m_F	36227.1 kg	36133.8 kg	93.3 kg	39536.8 kg	39427.1 kg	109.7 kg

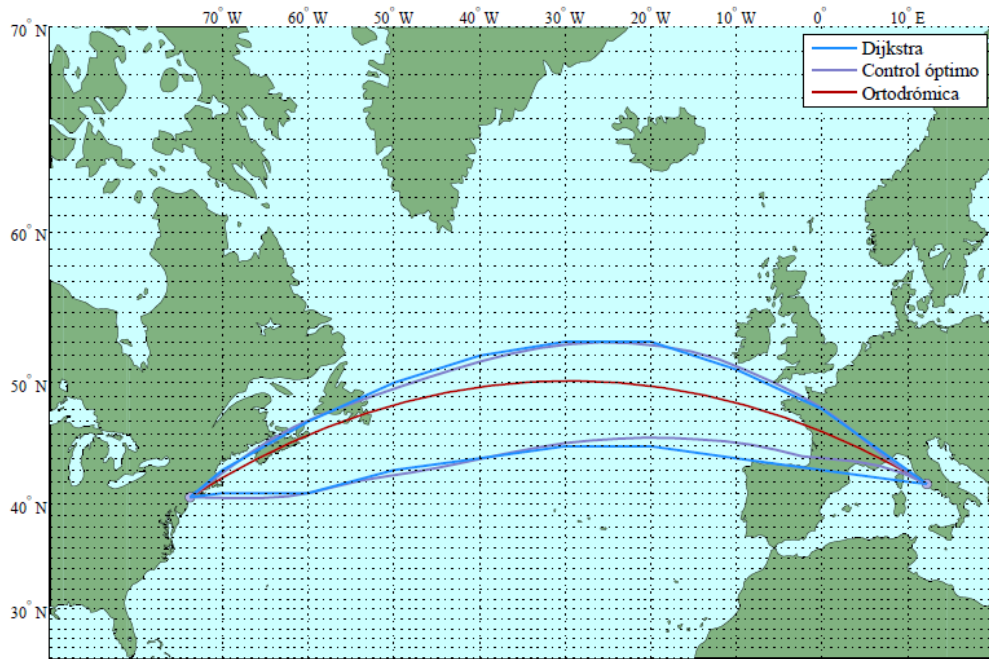


Figura 5.8 Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 4, predicción a 6 horas.

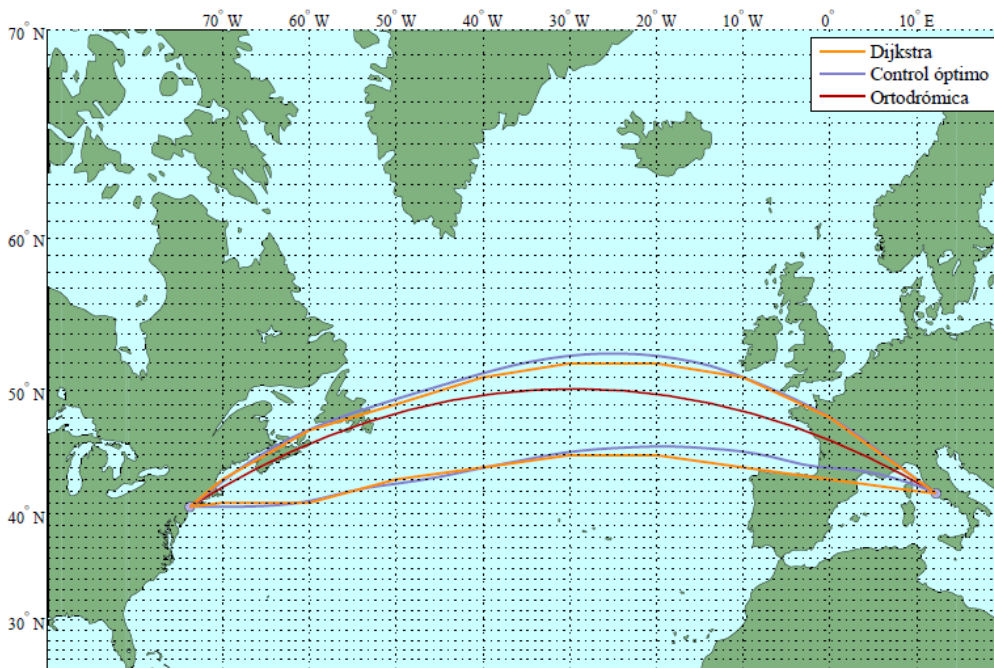


Figura 5.9 Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 4, predicción a 18 horas.

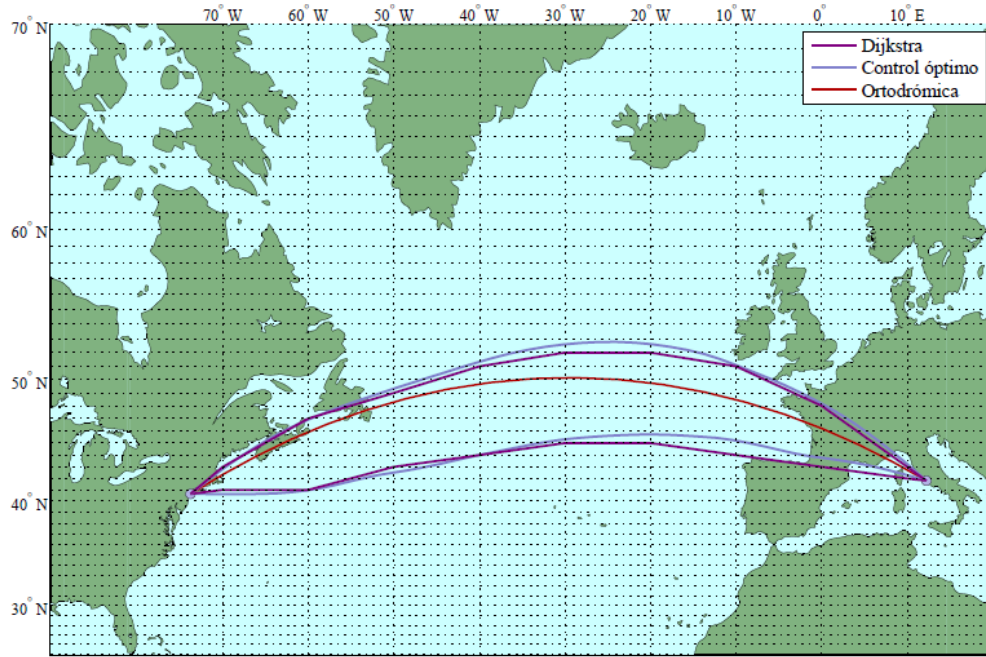


Figura 5.10 Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 4, predicción a 30 horas.

Tabla 5.4 Comparación entre los resultados de la optimización. Caso 4.

(a) Predicción a 6 horas.

	JFK-FCO			FCO-JFK		
	Dijkstra	C. Óptimo	Δ	Dijkstra	C. Óptimo	Δ
t_f	452.44 min	451.45 min	0.99 min	489.00 min	487.45 min	1.55 min
m_F	36291.2 kg	36201.6 kg	89.6 kg	39614.0 kg	39472.3 kg	141.7 kg

(b) Predicción a 18 horas.

	JFK-FCO			FCO-JFK		
	Dijkstra	C. Óptimo	Δ	Dijkstra	C. Óptimo	Δ
t_f	452.13 min	451.31 min	0.82 min	488.55 min	486.96 min	1.59 min
m_F	36262.8 kg	36188.8 kg	74.0 kg	39572.9 kg	39427.2 kg	145.7 kg

(c) Predicción a 30 horas.

	JFK-FCO			FCO-JFK		
	Dijkstra	C. Óptimo	Δ	Dijkstra	C. Óptimo	Δ
t_f	451.93 min	450.96 min	0.97 min	488.48 min	487.24 min	1.24 min
m_F	36245.5 kg	36157.7 kg	87.8 kg	39566.5 kg	39452.3 kg	114.2 kg

6 Resultados adicionales

En este capítulo se lleva a cabo la optimización de la trayectoria, tanto basada en waypoints como libre, tomando escenarios de vientos correspondientes a otra época del año. Con esto se pretende estudiar la modificación no sólo cuantitativa sino cualitativa que puede tener la trayectoria óptima en presencia de otros escenarios meteorológicos, sensiblemente diferentes a los valorados en capítulos anteriores.

En primer lugar se describen los escenarios meteorológicos considerados en este capítulo. Posteriormente se presentan los resultados para la trayectoria basada en waypoints, y para la trayectoria libre, así como una comparativa. Se presenta la resolución del Caso 2, que ha demostrado ser una acertada solución del problema, y además permite una mejor comprensión de los resultados al poder representar las trayectorias óptimas superpuestas al campo fluido considerado.

6.1 Escenarios meteorológicos

Los escenarios meteorológicos considerados para este capítulo, obtenidos gracias a [6], son los derivados de las siguientes predicciones:

1. Una predicción realizada el 26/01/2016 a las 06:00:00 a 6 horas;
2. Una predicción realizada el 25/01/2016 a las 18:00:00 a 18 horas; y
3. Una predicción realizada el 25/01/2016 a las 06:00:00 a 30 horas.

Todas las predicciones apuntan al mismo momento, las 12:00:00 del día 26/01/2016, justo seis meses antes del día y hora considerados en los capítulos anteriores.

6.2 Trayectoria basada en waypoints

En la Figura 6.1 se representan las trayectorias óptimas obtenidas, junto a la ortodrómica como referencia. En esta figura se aprecia una diferencia muy importante con los resultados de los capítulos anteriores: ahora aquellas rutas que parten de JFK quedan al Sur de la ortodrómica, y las que parten de FCO, al Norte, justo al contrario de lo que sucedía en las predicciones de junio. Para las diferentes predicciones, las trayectorias en un mismo sentido son muy similares, concidiendo todas ellas para el caso de las rutas que parten de JFK. Las coordenadas de los puntos de paso de estas trayectorias pueden encontrarse en la Tabla 6.1.

Estas grandes diferencias con los casos anteriores pueden entenderse si se representa el campo fluido medio, con respecto al cual se optimiza. De esta manera, en la Figura 6.2, Figura 6.3 y Figura 6.4 se representan los campos fluidos medios de la predicción a 6, 18 y 30 horas respectivamente, y sobre ellos, las trayectorias óptimas obtenidas para cada predicción. Puede observarse que la situación meteorológica es muy diferente a la considerada anteriormente: se distingue una corriente muy fuerte localizada en su mayoría al Sur de la ortodrómica y en Europa continental, de la que se ve beneficiado el vuelo hacia Europa. Por otra parte, el vuelo hacia Norteamérica debe sortear las zonas de viento más intenso, de ahí que en esta ocasión las

trayectorias óptimas se localicen al Norte de la ortodrómica. En esta ocasión, el vuelo hacia Norteamérica encuentra una situación meteorológica muy desfavorable.

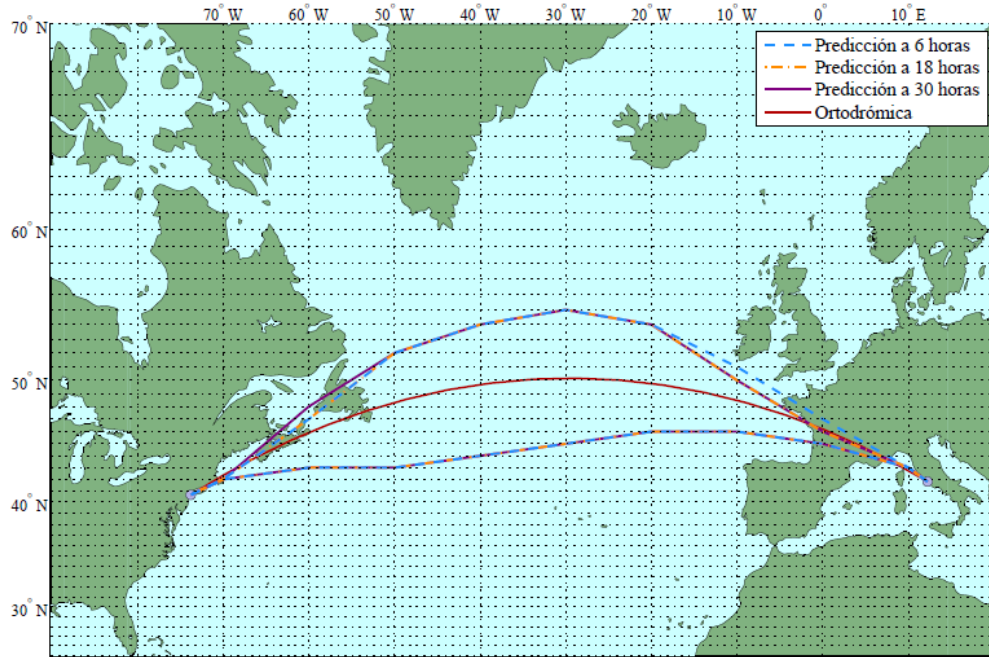


Figura 6.1 Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Sur de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Norte de la ortodrómica).

Tabla 6.1 Coordenadas de los puntos de paso de las trayectorias óptima.

(a) Trayectoria FCO-JFK. Predicción a 6 horas.									
Latitud (φ)	43°	47°	51°	54°	55°	54°	52°	47°	42°
Longitud (ξ)	10°	0°	-10°	-20°	-30°	-40°	-50°	-60°	-70°
(b) Trayectoria FCO-JFK. Predicciones a 18 y 30 horas.									
Latitud (φ)	43°	46°	50°	54°	55°	54°	52°	47°	42°
Longitud (ξ)	10°	0°	-10°	-20°	-30°	-40°	-50°	-60°	-70°
(c) Trayectoria JFK-FCO. Todas las predicciones.									
Latitud (φ)	42°	43°	43°	44°	45°	46°	46°	45°	43°
Longitud (ξ)	-70°	-60°	-50°	-40°	-30°	-20°	-10°	0°	10°

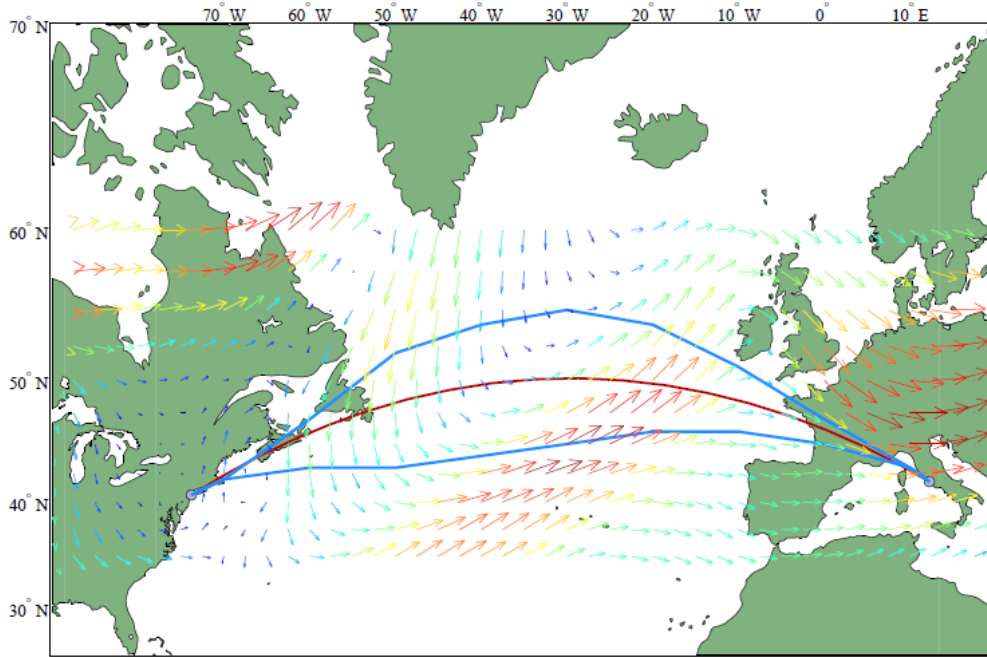


Figura 6.2 Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Sur de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Norte de la ortodrómica). Predicción a 6 horas.

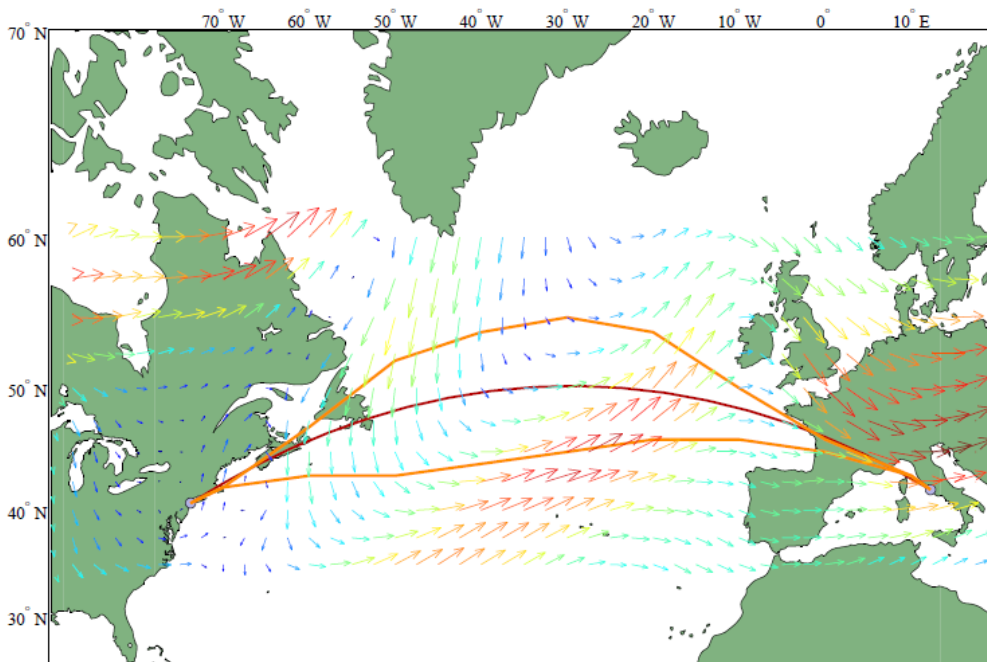


Figura 6.3 Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Sur de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Norte de la ortodrómica). Predicción a 18 horas.

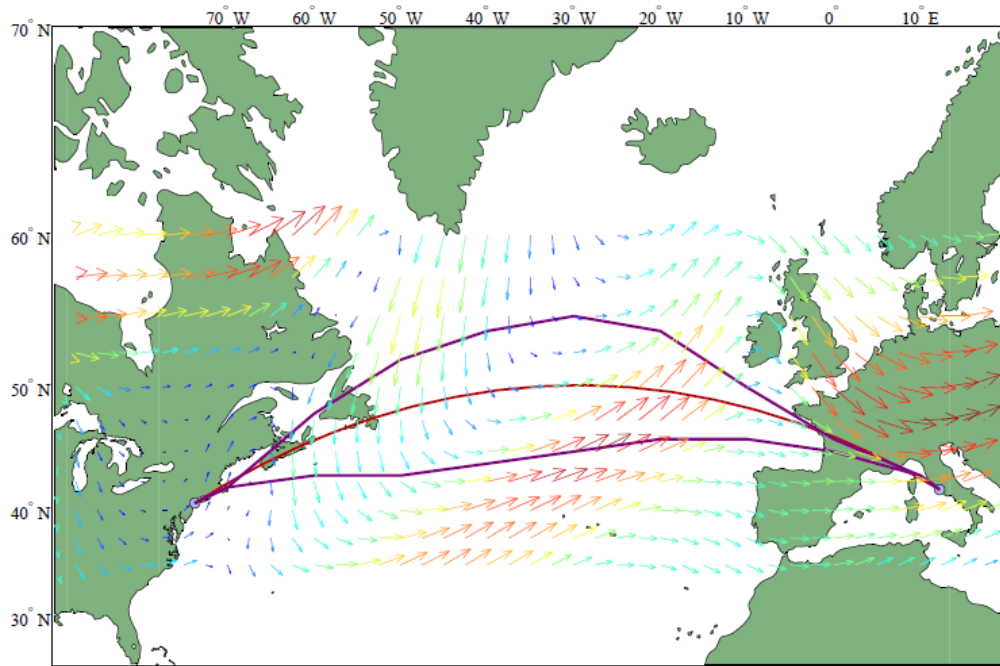


Figura 6.4 Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Sur de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Norte de la ortodrómica). Predicción a 30 horas.

En la Tabla 6.2 se presentan los resultados de la optimización. Se puede observar una gran diferencia en los valores de t_f y m_F para ambos sentidos de la ruta, mucho mayor de lo que se venía obteniendo hasta ahora. Para la ruta JFK-FCO, el tiempo de vuelo se ha reducido en prácticamente 20 minutos, mientras que para la ruta FCO-JFK ha aumentado aproximadamente media hora. Esto pone de manifiesto la influencia tan importante que tiene el escenario meteorológico en el proceso de optimización de trayectorias. Cabe también destacar que, en esta ocasión, la distancia recorrida en ambos sentidos es muy similar.

Tabla 6.2 Resultados de la optimización.

(a) Predicción a 6 horas.		
	JFK-FCO	FCO-JFK
t_f	430.88 min	514.10 min
m_F	34362.8 kg	41936.2 kg
s_f	7021.4 km	6994.3 km
(b) Predicción a 18 horas.		
	JFK-FCO	FCO-JFK
t_f	429.41 min	517.92 min
m_F	34232.2 kg	42292.6 kg
s_f	7021.4 km	7026.1 km
(c) Predicción a 30 horas.		
	JFK-FCO	FCO-JFK
t_f	429.99 min	515.31 min
m_F	34283.6 kg	42048.9 kg
s_f	7021.4 km	7019.1 km

Por último, en la Tabla 6.3 se presentan los resultados de la evaluación del coste a lo largo de las rutas óptimas, y en forma de histograma en la Figura 6.5. Como ocurría anteriormente, los valores medios de t_f y m_F son muy similares a los ya obtenidos en la optimización, sensiblemente superiores para las rutas FCO-JFK. Por otra parte, los valores de σ aumentan de forma sensible con el horizonte de predicción, y son siempre mayores para las rutas FCO-JFK, con viento de cara. Se alcanza aquí el valor de σ más alto hasta ahora, 3.03 minutos.

Tabla 6.3 Evaluación del coste.

(a) Predicción a 6 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	430.85	0.67	514.05	1.11
m_F (kg)	34359.7	59.9	41931.4	103.5

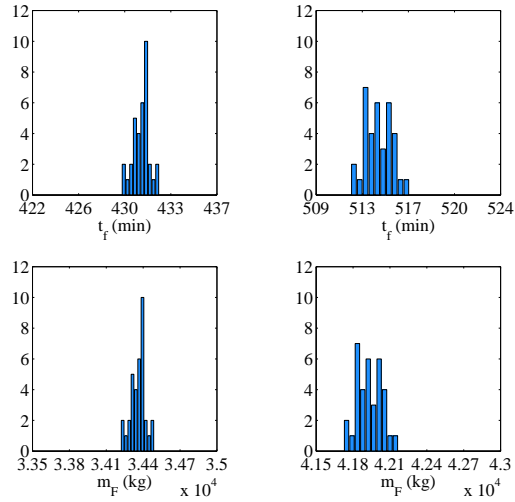
(b) Predicción a 18 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	429.40	1.20	517.86	1.87
m_F (kg)	34231.5	106.3	42286.7	174.2

(c) Predicción a 30 horas.				
	JFK-FCO		FCO-JFK	
	μ	σ	μ	σ
t_f (min)	430.00	1.78	515.33	3.03
m_F (kg)	34284.7	158.3	42050.7	282.8

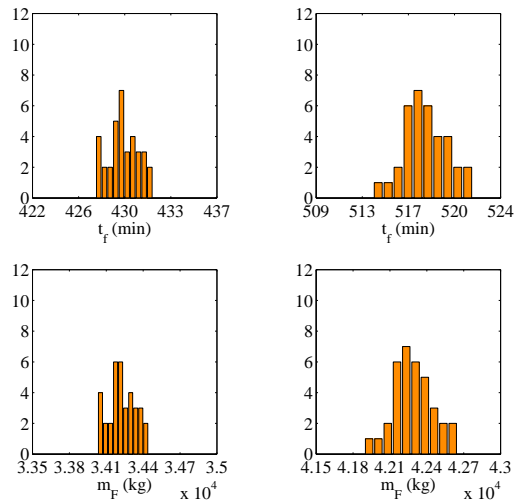
6.3 Trayectoria libre

En la Figura 6.6 se representan las trayectorias óptimas libres para todas las predicciones. Al igual que para la trayectoria libre, aquellas que quedan al Sur de la ortodrómica realizan el vuelo hacia Europa, mientras que las que quedan al Norte se dirigen a Norteamérica. Como se puede observar, las trayectorias en un mismo sentido son muy parecidas entre sí, prácticamente confundándose. En la Tabla 6.4 se recogen los resultados de la optimización. Al igual que en el caso anterior, aunque las distancias recorridas en ambos sentidos de la ruta son muy similares, existe una clara distinción en los valores de t_f y m_F según el sentido del vuelo: dado que la trayectoria JFK-FCO se ve beneficiada por el *jet stream*, el tiempo de vuelo y la masa de combustible consumida son mucho menores que para los vuelos hacia JFK.

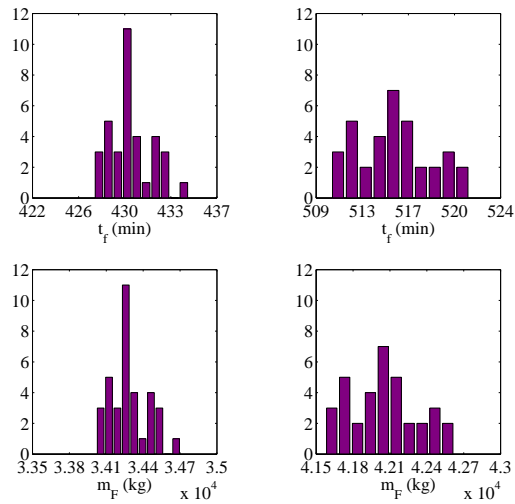
Evaluando el coste de recorrer dichas trayectorias óptimas en presencia de las diferentes meteorologías se encuentran los resultados presentados en la Tabla 6.5 y representados gráficamente en la Figura 6.7. En ellos se puede observar un aumento de σ con el horizonte de predicción; además, esta variable toma siempre mayores valores para las trayectorias que se encuentran con viento de cara, alcanzando uno de los valores más altos hasta ahora.



(a) Predicción a 6 horas.



(b) Predicción a 18 horas.



(c) Predicción a 30 horas.

Figura 6.5 Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha).

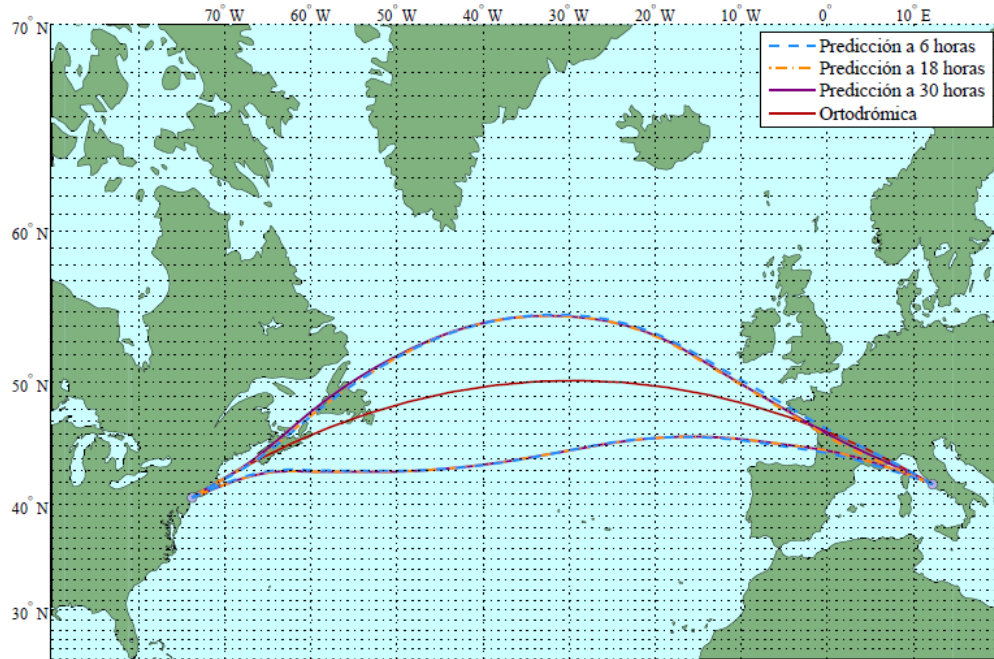


Figura 6.6 Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Sur de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Norte de la ortodrómica).

Tabla 6.4 Resultados de la optimización.

(a) Predicción a 6 horas.

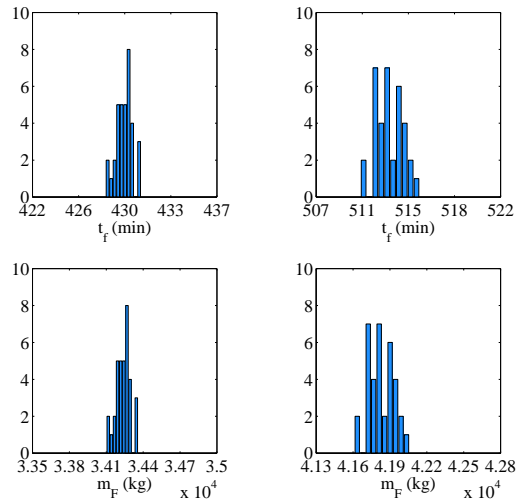
	JFK-FCO	FCO-JFK
t_f	429.43 min	512.90 min
m_F	34233.7 kg	41823.9 kg
s_f	7027.9 km	6991.3 km

(b) Predicción a 18 horas.

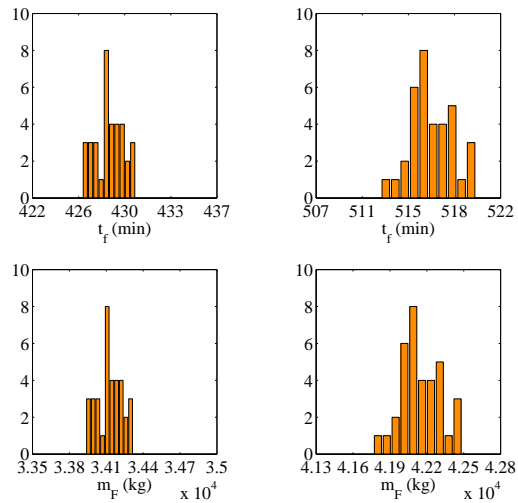
	JFK-FCO	FCO-JFK
t_f	428.19 min	516.32 min
m_F	34123.9 kg	42143.4 kg
s_f	7026.2 km	7003.8 km

(c) Predicción a 30 horas.

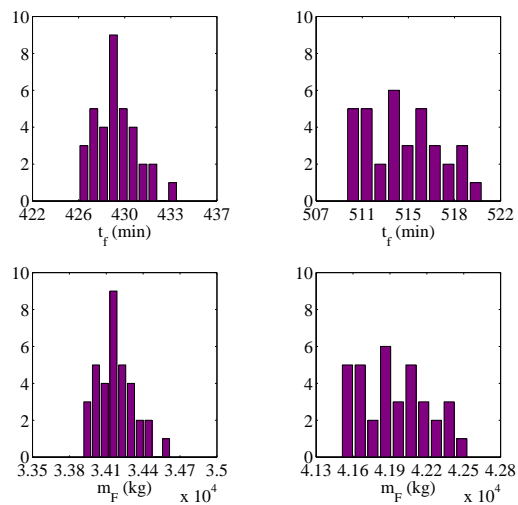
	JFK-FCO	FCO-JFK
t_f	428.64 min	513.89 min
m_F	34163.8 kg	41916.1 kg
s_f	7036.6 km	6995.6 km



(a) Predicción a 6 horas.



(b) Predicción a 18 horas.



(c) Predicción a 30 horas.

Figura 6.7 Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha).

Tabla 6.5 Evaluación del coste.

(a) Predicción a 6 horas.					
	JFK-FCO		FCO-JFK		
	μ	σ	μ	σ	
t_f (min)	429.46	0.66	512.95	1.10	
m_F (kg)	34236.6	58.3	41828.5	102.8	

(b) Predicción a 18 horas.					
	JFK-FCO		FCO-JFK		
	μ	σ	μ	σ	
t_f (min)	428.27	1.15	516.42	1.82	
m_F (kg)	34131.0	102.3	42152.0	170.2	

(c) Predicción a 30 horas.					
	JFK-FCO		FCO-JFK		
	μ	σ	μ	σ	
t_f (min)	428.74	1.80	514.08	2.79	
m_F (kg)	34173.1	159.7	41934.1	278.9	

6.4 Comparativa entre ambos enfoques

Por último, resulta interesante comparar los resultados obtenidos mediante ambos métodos de resolución. En la Figura 6.8, Figura 6.9 y Figura 6.10 se representan, para cada predicción, las trayectorias libres y basadas en waypoints obtenidas, junto a la ortodrómica, como referencia. Como se puede observar, las trayectorias obtenidas mediante el Algoritmo de Dijkstra aproximan razonablemente bien a aquellas obtenidas mediante Control Óptimo.

Por otra parte, a modo de resumen, en la Tabla 6.6 se recogen los resultados de la optimización para ambos métodos, y el incremento en t_f y m_F que suponen los resultados obtenidos en la optimización para las trayectorias basadas en puntos de paso sobre las trayectorias libres. Como se puede observar, el incremento en t_f no resulta demasiado grande en ningún caso, sin llegar a alcanzar los 1.5 minutos.

Tabla 6.6 Comparación entre los resultados de la optimización. Caso 2.

(a) Predicción a 6 horas.						
	JFK-FCO			FCO-JFK		
	Dijkstra	C. Óptimo	Δ	Dijkstra	C. Óptimo	Δ
t_f	430.88 min	429.43 min	1.45 min	514.10 min	512.90 min	1.20 min
m_F	34362.8 kg	34233.7 kg	129.1 kg	41936.2 kg	41823.9 kg	112.3 kg

(b) Predicción a 18 horas.						
	JFK-FCO			FCO-JFK		
	Dijkstra	C. Óptimo	Δ	Dijkstra	C. Óptimo	Δ
t_f	429.41 min	428.19 min	1.22 min	517.92 min	516.32 min	1.60 min
m_F	34232.2 kg	34123.9 kg	108.3 kg	42292.6 kg	42143.4 kg	149.2 kg

(c) Predicción a 30 horas.						
	JFK-FCO			FCO-JFK		
	Dijkstra	C. Óptimo	Δ	Dijkstra	C. Óptimo	Δ
t_f	429.99 min	428.64 min	1.35 min	515.31 min	513.89 min	1.42 min
m_F	34283.6 kg	34163.8 kg	119.8 kg	42048.9 kg	41916.1 kg	132.8 kg

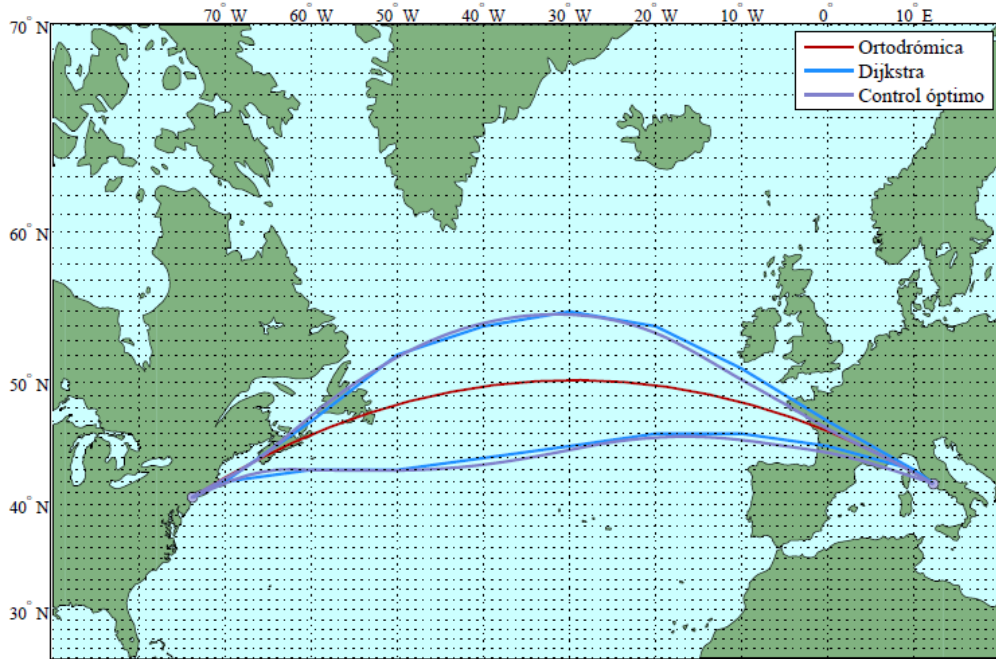


Figura 6.8 Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Predicción a 6 horas.

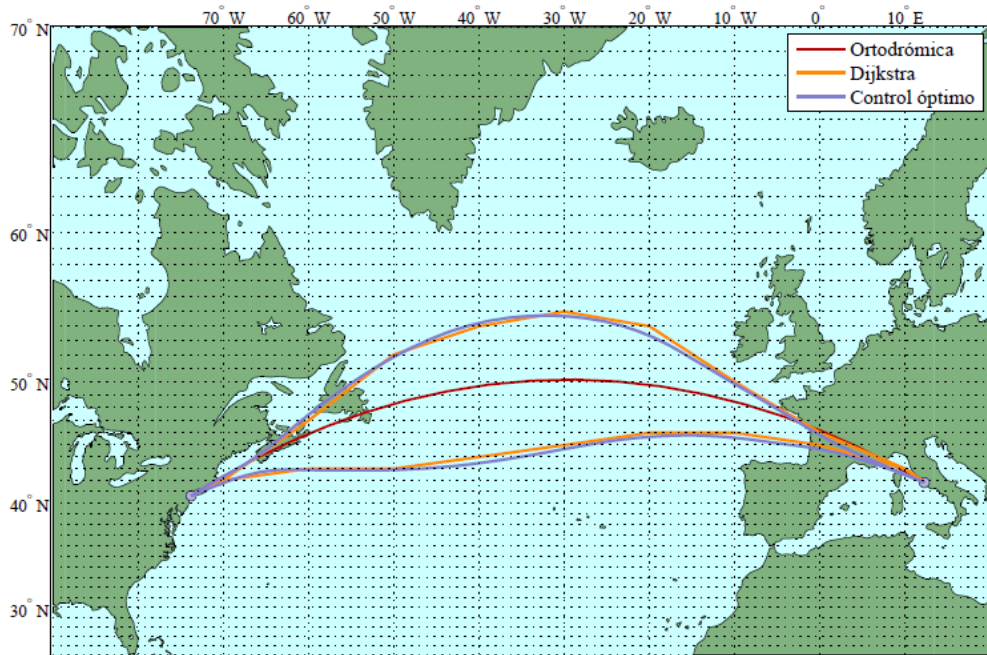


Figura 6.9 Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Predicción a 18 horas.

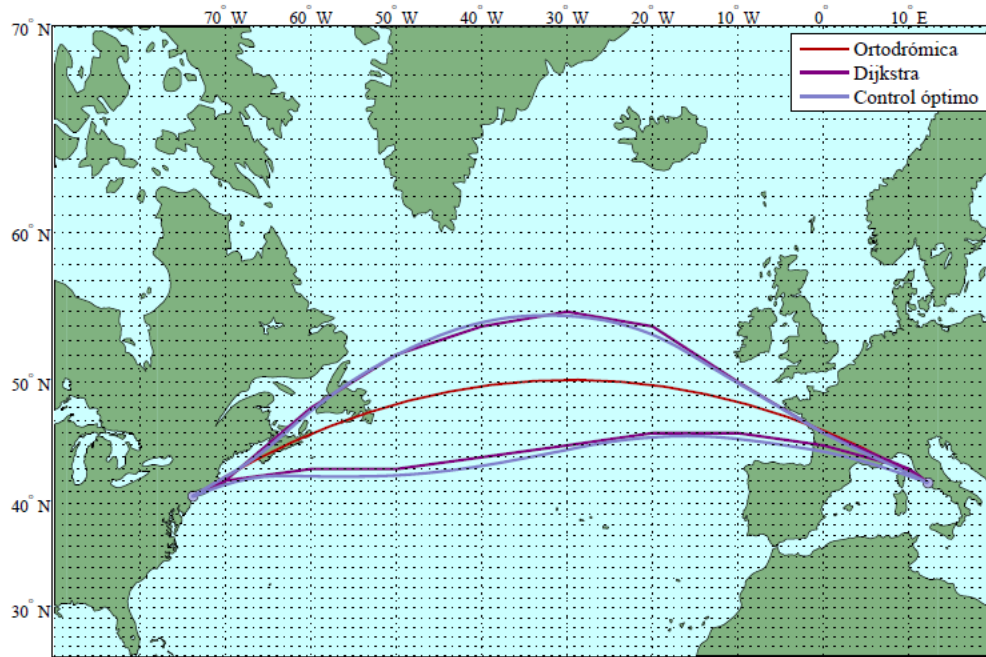


Figura 6.10 Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Predicción a 30 horas.

7 Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se ha llevado a cabo la optimización de la ruta que une los aeropuertos JFK y FCO en ambos sentidos, respecto al tiempo de vuelo. Toda la trayectoria se considera como un único tramo de crucero a altitud y velocidad aerodinámica constante, por lo que al minimizar el tiempo de vuelo (t_f) se minimiza también la masa de combustible necesaria (m_F). Las hipótesis adicionales consideradas se encuentran recogidas en el Capítulo 2.

La optimización se realiza bajo diferentes escenarios meteorológicos calculados mediante el método numérico de predicción denominado *Ensemble Prediction System* (EPS) realizadas por *Météo-France* y obtenidas a través del *European Centre for Medium-Range Weather Forecasts* (ECMWF). Este método proporciona, para cada predicción que se desee realizar, un conjunto de posibles escenarios meteorológicos (*ensemble*). En este trabajo se cuenta con tres grupos de predicciones con 35 miembros cada una (a 6 horas, a 18 horas y a 30 horas), y que apuntan al mismo instante de tiempo: las 12:00:00 del día 26/06/2016. Se han considerado además cuatro casos de estudio diferentes, llevando a cabo la optimización para cada grupo de predicciones y cada caso:

- **Caso 1:** Optimización respecto al escenario sin viento (sin información meteorológica).
- **Caso 2:** Optimización respecto al escenario con viento medio.
- **Caso 3:** Optimización respecto a cada miembro del *ensemble*.
- **Caso 4:** Optimización respecto a la media de costes.

El proceso de optimización se ha llevado a cabo con dos enfoques diferentes, que se han resuelto mediante métodos distintos: optimización de la trayectoria basada en waypoints unidos por tramos loxodrómicos, resuelta mediante el Algoritmo de Dijkstra, y la optimización de la trayectoria libre, resuelta mediante Teoría de Control Óptimo, con un método indirecto. Una vez obtenidos los diferentes caminos óptimos para cada enfoque, se ha evaluado el coste de recorrer dicho camino en presencia de los diferentes escenarios de vientos del *ensemble* correspondiente.

Para la optimización de la trayectoria basada en waypoints se ha definido una malla de puntos identificados por su latitud y longitud que se encuentran conectados entre sí. Esta malla puede verse como un grafo con un coste determinado en sus aristas que deriva de la integración de las ecuaciones del movimiento. El problema se resuelve de forma sencilla empleando el Algoritmo de Dijkstra, que busca el camino mínimo entre dos puntos de un grafo. Los resultados que se obtienen tras resolver el problema con este método se resumen a continuación.

- **Caso 1:** el resultado de este caso es una única trayectoria óptima que tiende a la ortodrómica, que es la trayectoria más corta, y resulta la de mínimo tiempo en un escenario sin viento. Para esta trayectoria óptima se obtienen unos valores en el tiempo de vuelo y en la masa de combustible coherentes.

Al evaluar el coste de recorrer la trayectoria bajo los escenarios de los tres *ensembles* se obtienen unos valores medios de t_f y m_F bastante diferentes a los obtenidos para la trayectoria óptima, siendo

menores para las rutas en sentido JFK-FCO, ya que cuentan con viento de cola en gran parte de su recorrido. Por otro lado, los valores de la desviación típica (σ) de t_f y m_F son mayores para las rutas en sentido FCO-JFK.

- **Caso 2:** en este caso se ve una clara distinción entre las rutas en sentido JFK-FCO (las de las predicciones a 18 y 30 horas coinciden), que quedan al Norte de la ortodrómica, y aquellas en sentido FCO-JFK (las tres coinciden), que quedan al Sur, y recorren una mayor distancia. Los valores de t_f y m_F de las trayectorias óptimas son mucho menores para las rutas en sentido JFK-FCO, como era de esperar, ya que cuentan con viento de cola en gran parte de su recorrido. Estos valores son muy similares para un mismo sentido de la ruta.

Con respecto a la evaluación del coste en los diferentes escenarios, destaca el gran parecido entre los valores medios de t_f y m_F , y aquellos valores obtenidos en la optimización. Por otro lado, los valores de σ son por lo general mayores para las trayectorias FCO-JFK, aunque toman valores parecidos y no muy elevados para todos los casos.

- **Caso 3:** en este caso se tiene una optimización por cada miembro del *ensemble*, obteniendo 35 caminos óptimos para cada *ensemble* y sentido de la ruta, aunque muchos de ellos coinciden o tienen tramos comunes. Se observa que las trayectorias que van en un sentido (de nuevo, al Norte la ortodrómica para JFK-FCO y al Sur para FCO-JFK) siguen la misma tendencia, aunque son claramente diferenciables.

Este caso no tiene una aplicación práctica clara, ya que elegir un camino supone tener el óptimo únicamente respecto a este miembro del *ensemble*. No obstante, calcular el valor medio de t_f y m_F para los caminos óptimos puede ser útil para proporcionar una cota inferior de estas variables. Se observa de nuevo una clara diferenciación entre las rutas en sentido JFK-FCO, que tienen unos valores menores de la media y por lo general de la desviación típica, y las rutas en sentido FCO-JFK, con unos valores mayores.

- **Caso 4:** los resultados obtenidos en el Caso 4 resultan muy similares a los obtenidos en el Caso 2. De hecho, las trayectorias óptimas son las mismas, los resultados de la optimización muy similares, y la evaluación del coste también arroja resultados muy parecidos. Esto hace pensar que optimizar t_f respecto a un escenario de viento medio es muy semejante a optimizar la media de t_f considerando todos los escenarios meteorológicos.

Relacionado con este caso se ha podido optimizar respecto a otros estadísticos $\mu + k\sigma$, obteniendo unas trayectorias parecidas a las de la minimización respecto a la media, con una dependencia no demasiado fuerte con los valores de k considerados.

El segundo enfoque del problema ha consistido en optimizar la trayectoria libre, esto es, sin restricciones en cuanto a los puntos de paso o al curso que deba seguir la aeronave. Para resolverlo se ha formulado el problema mediante Control Óptimo, tomando un método indirecto y empleando la función *bvp4c* de MATLAB, que permite resolver problemas de contorno. El problema se ha formulado de manera general, tomando como variable independiente la distancia recorrida, particularizando posteriormente para cada caso de estudio, que se diferencian entre sí únicamente en la función objetivo. Los resultados obtenidos se resumen a continuación.

- **Caso 1:** en el primer caso, la única trayectoria óptima que se obtiene se superpone totalmente con la ruta ortodrómica.

Con respecto a la evaluación del coste, los valores de la media de t_f y m_F para las trayectorias en sentido JFK-FCO son sensiblemente menores a los de la ruta FCO-JFK, al igual que los valores de σ .

- **Caso 2:** en este caso, a diferencia de lo que sucedía para las trayectorias basadas en waypoints, se obtienen 6 trayectorias diferentes, si bien para un mismo sentido de la ruta son muy parecidas entre sí. Los resultados de la optimización proporcionan unos valores de t_f y m_F mucho menores a los obtenidos en el Caso 1 para la ruta JFK-FCO; lo contrario ocurre para la ruta FCO-JFK.

Con respecto a la evaluación del coste, los valores medios de t_f y m_F son muy similares a los obtenidos en la optimización, fruto de considerar un escenario meteorológico más realista.

- **Caso 3:** en este tercer caso se obtiene, por cada miembro del *ensemble*, una trayectoria óptima diferente. Estas trayectorias óptimas son similares entre sí, pero se llegan a diferenciar varios grados en latitud en algunos casos. Al igual que para las trayectorias basadas en waypoints, los valores medios de t_f y m_F de la optimización proporcionan una cota inferior de dichas variables, al haber optimizado respecto a cada miembro del *ensemble*.
- **Caso 4:** al igual que ocurría en las trayectorias basadas en waypoints, los resultados del Caso 4 son muy parecidos a los del Caso 2, tanto en las trayectorias óptimas obtenidas como en los resultados propios de la optimización y la evaluación del coste. Esto parece confirmar que optimizar t_f respecto a un escenario meteorológico medio es muy similar a optimizar la media de t_f .

En el Capítulo 5 se han recopilado los resultados de la optimización mediante ambos métodos para compararlos. Se ha comprobado que en todos los casos la solución aportada por la trayectoria libre es mejor que la de la trayectoria basada en waypoints, dado que esta última representa un caso subóptimo. No obstante, las trayectorias obtenidas mediante el Algoritmo de Dijkstra se aproximan razonablemente bien a las obtenidas mediante Control Óptimo. Prueba de ello es que la diferencia entre el tiempo de vuelo de una trayectoria basada en waypoints y su correspondiente trayectoria libre no suele ser muy grande, como máximo 1.63 minutos; la mayor diferencia para la masa de combustible es de 149.1 kg. Además, la trayectoria basada en waypoints presenta la gran ventaja de estar compuesta por diez tramos loxodrómicos, por lo que sólo se tendría que cambiar el rumbo nueve veces, mientras que las trayectorias libres, que por definición pueden seguir cualquier rumbo, resultarían más difíciles de completar.

Resolver el problema mediante el Algoritmo de Dijkstra tiene además la ventaja de que cambiar la función objetivo es muy sencillo y rápido, ya que únicamente influye en el coste de los tramos. Esto le confiere al método cierta versatilidad que no tiene el método de Control Óptimo empleado, debido a la necesidad de reformular el problema cada vez que se modifica la función objetivo [23].

Por último, en el Capítulo 6 se ha resuelto el Caso 2 para ambos enfoques para un día diferente del año, con el objetivo de comprobar la influencia de la situación meteorológica en las trayectorias óptimas. El día y hora elegidos es el 26/01/2016 a las 12:00, justo seis meses antes del momento considerado en capítulos anteriores, existiendo una situación meteorológica muy diferente. Como consecuencia, las trayectorias óptimas cambian radicalmente: aquellas en sentido JFK-FCO, que siguen beneficiándose del viento de cola, quedan al Sur de la ortodrómica, debido al cambio de localización del *jet stream*, mientras que aquellas que parten de FCO quedan al Norte, intentando evitar esta corriente. Los resultados de la optimización y la evaluación del coste son también muy diferentes a los hallados en capítulos anteriores: el vuelo JFK-FCO reduce su tiempo de vuelo en aproximadamente 20 minutos, mientras que el vuelo en sentido contrario aumenta aproximadamente 30 minutos. Esto tiene gran importancia, ya que indica que los resultados obtenidos son particulares de un día del año en concreto, modificándose tanto cualitativa como cuantitativamente al variar el día. Por tanto, los resultados y conclusiones derivados del cálculo de trayectorias óptimas tomando una meteorología concreta no pueden aplicarse de forma global.

Como trabajo futuro para completar al actual, en primer lugar se podría ampliar el problema de Control Óptimo empleando otras funciones objetivo, tales como una combinación de la media y la desviación típica, que se ha llevado a cabo ya para las trayectorias basadas en waypoints. Esta función objetivo es más compleja que las empleadas en este trabajo, por lo que posiblemente sería necesario emplear otro método de resolución basado en Control Óptimo, diferente del desarrollado aquí. De manera similar, podrían explorarse otros algoritmos para la optimización de la trayectoria basada en waypoints tales como el Algoritmo A^* , que demuestra ser más rápido que el Algoritmo de Dijkstra [12].

Sería también interesante considerar otros tramos de vuelo, tales como el ascenso o el descenso, pudiendo incluso llegar a optimizar la trayectoria completa. En este trabajo se ha considerado el vuelo como un único tramo de crucero, pero dado el alcance del vuelo se podría dividir en varios tramos de crucero a diferentes alturas, o con diferente velocidad aerodinámica.

Por último, en este trabajo se ha considerado un modelo aerodinámico sencillo, basado en una polar parabólica de coeficientes constantes. Emplear un modelo más realista completaría también al trabajo actual.

Índice de Figuras

2.1	Ruta ortodrómica entre FCO y JFK	4
2.2	Triángulo del viento	5
2.3	Representación del escenario de viento medio de la predicción a 18 horas	7
3.1	Puntos que componen la malla empleada en la resolución del problema	10
3.2	Conexiones entre nodos de la malla	11
3.3	Esquema de viraje	12
3.4	Trayectorias óptimas. Caso 1	13
3.5	Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha). Caso 1	15
3.6	Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 2	16
3.7	Trayectorias óptimas junto al campo de viento medio. Caso 2, predicción a 6 horas	17
3.8	Trayectorias óptimas junto al campo de viento medio. Caso 2, predicción a 18 horas	18
3.9	Trayectorias óptimas junto al campo de viento medio. Caso 2, predicción a 30 horas	19
3.10	Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha). Caso 2	22
3.11	Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 3, predicción a 6 horas	23
3.12	Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 3, predicción a 18 horas	24
3.13	Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 3, predicción a 30 horas	24
3.14	Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha). Caso 3	25
3.15	Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 4	26
3.16	Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha). Caso 4	28
3.17	Trayectorias óptimas respecto a $\mu + k\sigma$ (k entre 1 y 5) para la ruta JFK-FCO (al norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al sur de la ortodrómica)	30
3.18	Trayectorias óptimas respecto a $\mu + k\sigma$ ($k = 6$) para la ruta JFK-FCO (al norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al sur de la ortodrómica)	30
3.19	Trayectorias óptimas respecto a $\mu + k\sigma$ ($k = 7, 8$) para la ruta JFK-FCO (al norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al sur de la ortodrómica)	31
3.20	Trayectorias óptimas respecto a $\mu + k\sigma$ ($k = 9$) para la ruta JFK-FCO (al norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al sur de la ortodrómica)	31
3.21	Trayectorias óptimas respecto a $\mu + k\sigma$ ($k = 10$) para la ruta JFK-FCO (al norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al sur de la ortodrómica)	32
4.1	Trayectorias óptimas. Caso 1	39
4.2	Ley de control $\psi(s)$. Caso 1	39
4.3	Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha). Caso 1	41
4.4	Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 2	42

4.5	Ley de control $\psi(s)$. Caso 2	42
4.6	Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha). Caso 2	44
4.7	Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 3, predicción a 6 horas	46
4.8	Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 3, predicción a 18 horas	46
4.9	Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 3, predicción a 30 horas	47
4.10	Ley de control $\psi(s)$. Caso 3	47
4.11	Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha). Caso 3	48
4.12	Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Norte de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Sur de la ortodrómica). Caso 4	49
4.13	Ley de control $\psi(s)$. Caso 4	50
4.14	Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha). Caso 4	51
5.1	Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 1	54
5.2	Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 2, predicción a 6 horas	54
5.3	Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 2, predicción a 18 horas	55
5.4	Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 2, predicción a 30 horas	55
5.5	Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 3, predicción a 6 horas	57
5.6	Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 3, predicción a 18 horas	57
5.7	Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 3, predicción a 30 horas	58
5.8	Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 4, predicción a 6 horas	59
5.9	Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 4, predicción a 18 horas	59
5.10	Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Caso 4, predicción a 30 horas	60
6.1	Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Sur de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Norte de la ortodrómica)	62
6.2	Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Sur de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Norte de la ortodrómica). Predicción a 6 horas	63
6.3	Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Sur de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Norte de la ortodrómica). Predicción a 18 horas	63
6.4	Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Sur de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Norte de la ortodrómica). Predicción a 30 horas	64
6.5	Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha)	66
6.6	Trayectorias óptimas para la ruta JFK-FCO (al Sur de la ortodrómica) y para la ruta FCO-JFK (al Norte de la ortodrómica)	67
6.7	Histogramas de t_f y m_F para la ruta JFK-FCO (izquierda) y FCO-JFK (derecha)	68
6.8	Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Predicción a 6 horas	70
6.9	Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Predicción a 18 horas	70
6.10	Trayectorias óptimas basadas en waypoints y libres. Predicción a 30 horas	71

Índice de Tablas

2.1	Coordenadas geográficas de los aeropuertos de origen y destino	3
2.2	Valores de parámetros	5
3.1	Coordenadas de los puntos de paso de la trayectoria óptima. Caso 1	13
3.2	Resultados de la optimización. Caso 1	13
3.3	Evaluación del coste. Caso 1	14
3.4	Coordenadas de los puntos de paso de las trayectorias óptima. Caso 2	16
3.5	Resultados de la optimización. Caso 2	20
3.6	Evaluación del coste. Caso 2	21
3.7	Caracterización del error en t_f al considerar el viento promedio. Todas las cantidades en minutos	21
3.8	Evaluación del coste. Caso 3	26
3.9	Resultados de la optimización. Caso 4	27
3.10	Evaluación del coste. Caso 4	29
4.1	Resultados de la optimización. Caso 1	40
4.2	Evaluación del coste. Caso 1	40
4.3	Resultados de la optimización. Caso 2	43
4.4	Evaluación del coste. Caso 2	45
4.5	Evaluación del coste. Caso 3	49
4.6	Resultados de la optimización. Caso 4	50
4.7	Evaluación del coste. Caso 4	52
5.1	Comparación entre los resultados de la optimización. Caso 1	53
5.2	Comparación entre los resultados de la optimización. Caso 2	56
5.3	Comparación entre los resultados de la optimización. Caso 3	58
5.4	Comparación entre los resultados de la optimización. Caso 4	60
6.1	Coordenadas de los puntos de paso de las trayectorias óptima	62
6.2	Resultados de la optimización	64
6.3	Evaluación del coste	65
6.4	Resultados de la optimización	67
6.5	Evaluación del coste	69
6.6	Comparación entre los resultados de la optimización. Caso 2	69

Bibliografía

- [1] Wikipedia. (2016, Sep.) Aeropuerto Internacional John F. Kennedy. [Online]. Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Aeropuerto_Internacional_John_F._Kennedy
- [2] ——. (2016, Sep.) Aeropuerto de Roma-Fiumicino. [Online]. Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Aeropuerto_de_Roma-Fiumicino
- [3] H. Moritz, “Geodetic reference system 1980,” *Journal of Geodesy*, vol. 54, no. 3, pp. 395–405, 1980.
- [4] A. Franco and D. Rivas, “Optimization of multiphase aircraft trajectories using hybrid optimal control,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 38, no. 3, pp. 452–467, 2015.
- [5] Eurocontrol Experimental Center, “User manual for the base of aircraft data (BADA) revision 3.11,” *Brussels: Eurocontrol*, 2013.
- [6] E. Quero Granado, *Herramienta para la adquisición y el tratamiento automatizados de información meteorológica para la predicción de trayectorias de aeronaves*. Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla, 2016.
- [7] *Guidelines on Ensemble Prediction Systems and Forecasting*. World Meteorological Organization (WMO), 2012.
- [8] *The ECMWF Ensemble Prediction System*. European Centre for Medium-Range Weather Forecasts (ECMWF), 2012.
- [9] R. Mladek and F. Vitart. (2016, Sep.) Models. [Online]. Available: <https://software.ecmwf.int/wiki/display/TIGGE/Models>
- [10] E. A. Irvine, B. J. Hoskins, K. P. Shine, R. W. Lunnon, and C. Froemming, “Characterizing north atlantic weather patterns for climate-optimal aircraft routing,” *Meteorological Applications*, vol. 20, no. 1, pp. 80–93, 2013.
- [11] R. Devulapalli, “An efficient algorithm for commercial aircraft trajectory optimization in the air traffic system,” Ph.D. dissertation, university of minnesota, 2012.
- [12] E. Rippel, A. Bar-Gill, and N. Shimkin, “Fast graph-search algorithms for general-aviation flight trajectory generation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 28, no. 4, pp. 801–811, 2005.
- [13] E. W. Dijkstra, “A note on two problems in connexion with graphs,” *Numerische mathematik*, vol. 1, no. 1, pp. 269–271, 1959.
- [14] ICAO, “8168-OPS/611,” *Procedures for Air Navigation Services, Aircraft Operations*, vol. 1, 2006.
- [15] Wikipedia. (2016, Aug.) Chebyshev’s inequality. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev%27s_inequality
- [16] A. E. Bryson, *Applied optimal control: optimization, estimation and control*, 4th ed. CRC Press, 1975.

- [17] R. Vázquez Valenzuela, *Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales, apuntes de la asignatura*. Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla, 2015.
- [18] L. F. Shampine, J. Kierzenka, and M. W. Reichelt, “Solving boundary value problems for ordinary differential equations in Matlab with bvp4c,” *Tutorial notes*, pp. 437–448, 2000.
- [19] J. M. Longuski, J. J. Guzmán, and J. E. Prussing, *Optimal control with aerospace applications*. Springer, 2014.
- [20] MathWorks. (2016, Sep.) Set up your dae problem. [Online]. Available: <http://es.mathworks.com/help/symbolic/set-up-your-dae-problem.html>
- [21] ——. (2016, Sep.) Solve dae systems using matlab ode solvers. [Online]. Available: <http://es.mathworks.com/help/symbolic/solve-dae-systems-using-matlab-ode-solvers.html>
- [22] X. Wang, “Solving optimal control problems with MATLAB: Indirect methods,” *ISE Dept., NCSU, Raleigh, NC*, vol. 27695, 2009.
- [23] J. T. Betts, “Survey of numerical methods for trajectory optimization,” *Journal of guidance, control, and dynamics*, vol. 21, no. 2, pp. 193–207, 1998.