CAPÍTULO II

Juegos matriciales vectoriales

L. Monroy J. Puerto

1. Juegos de suma nula con pagos vectoriales

Los juegos en los que los pagos que reciben los jugadores vienen representados por vectores en lugar de por números reales, se les denomina *juegos vectoriales*, *juegos multicriterio* o *juegos con pagos múltiples*.

En estos juegos, si no hay cooperación entre los jugadores, como ocurre en el caso de suma nula, se añade la dificultad de la no existencia de un orden total entre los elementos que definen la matriz de pago, por lo que la valoración de las estrategias y la comparación entre las mismas es un problema adicional que presenta la teoría de juegos, siendo el concepto de solución clásica de un juego difícil de desarrollar.

En un juego escalar toda estrategia pura puede recorrer un conjunto de valores, y entre ellos hay uno más desfavorable:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La primera estrategia pura del jugador I tiene asociados los valores 0 y 2, siendo el 0 una valoración pesimista de dicha estrategia.

En un juego vectorial la estrategia pura toma un conjunto de valores vectoriales y entre ellos no tiene por qué existrir uno más desfavorable:

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (2,-1) \\ (1,-2) & (0,0) \end{pmatrix}$$

La primera estrategia del jugador I tiene asociados los valores $(0,0)$ y $(2,-1)$, pero no podemos destacar ninguno de ellos como valoración pesimista de dicha estrategia.

Por esta razón han aparecido nuevos conceptos de solución. En este sentido, el concepto de estrategia de seguridad Pareto-óptima es muy importante para la resolución de juegos con pagos múltiples, utilizando conceptos de solución basados en los niveles de seguridad de los jugadores.

Así, Ghose y Prassad (1989) [41] definen puntos de equilibrio con niveles de seguridad Pareto-óptimos y puntos de silla de Pareto. Para determinar el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas establecen dos juegos escalares, uno para cada jugador, y prueban que las estrategias maximin y minimax de estos juegos son estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador correspondiente.

Ghose (1991) [42] obtiene las estrategias de seguridad Pareto-óptimas de un juego vectorial de suma nula por medio de la escalarización del juego original. Demuestra, mediante un largo proceso, que una extensión del conjunto formado por los vectores de nivel de seguridad es un conjunto poliédrico. A partir de este resultado, establece que una escalarización estrictamente positiva es una condición necesaria y suficiente para obtener una estrategia de seguridad Pareto-óptima para tales juegos.

En este capítulo obtenemos la misma escalarización como un caso particular de un enfoque más general, realizado a través de un procedimiento alternativo que simplifica, en gran manera, las demostraciones establecidas por estos autores. Por medio de la programación lineal multiobjetivo, obtenemos todas las estrategias de seguridad Pareto-óptimas como soluciones eficientes de problemas lineales multiobjetivo.

2. Concepto de solución

Consideramos un juego finito bipersonal, de suma nula en forma normal. Sea $A = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, la matriz de pago del juego. Cada elemento a_{ij} de la matriz es un vector de dimensión k,

$$a_{ij} = (a_{ij}(1), a_{ij}(2), \dots, a_{ij}(k)) \in \mathbb{R}^k,$$

que determina k matrices de orden $n \times m$ de la forma:

$$A(s) = (a_{ij}(s)) \quad 1 \leq s \leq k, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

Las estrategias mixtas en estos juegos se definen de la misma forma que en los juegos escalares. Así, los espacios de estrategias mixtas para los jugadores I y II son respectivamente

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\, x_i \geq 0,\, i = 1, \dots, n\}$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^m : \sum_{j=1}^{m} y_j = 1,\, y_j \geq 0,\, j = 1, \dots, m\}$$

Definición 2.1 *El pago esperado del juego cuando los jugadores escogen sus estrategias mixtas $x \in X$ e $y \in Y$, respectivamente, viene dado por:*

$$v(x, y) = x^t A y = (v_1(x, y), \dots, v_k(x, y))$$

donde

$$v_s(x, y) = x^t A(s) y \quad s = 1, \dots, k$$

Dado que una estrategia debe ser valorada por un conjunto de vectores, podemos dar una *única valoración*, al considerar que el oponente puede actuar en cada coordenada de la matriz A de modo independiente, y ofrecer el vector que se asegura el jugador, aunque realmente obtenga valores superiores. Así, la primera estrategia del ejemplo anterior estaría valorada por el vector $(0, -1)$, que aunque no es un valor del juego, es la menor cantidad que puede obtener en cada objetivo, por lo que es un nivel de seguridad.

Definición 2.2 *Para cada estrategia $x \in X$ del jugador I, el vector de nivel de seguridad para dicho jugador es el pago que puede garantizarse, con esa estrategia, en cada juego escalar inducido por el juego vectorial. Análogamente para el jugador II.*

Los vectores de niveles de seguridad de los jugadores I y II son respectivamente:

$$\underline{v}(x) = (\underline{v}_1(x), \ldots, \underline{v}_k(x))$$
$$\overline{v}(y) = (\overline{v}_1(y), \ldots, \overline{v}_k(y))$$

donde

$$\underline{v}_s(x) = \min_{y \in Y} v_s(x, y) = \min_{y \in Y} x^t A(s) y$$
$$\overline{v}_s(y) = \max_{x \in X} v_s(x, y) = \max_{x \in X} x^t A(s) y$$

Observemos que dada una estrategia $x \in X$ del jugador I, cada componente del vector de nivel de seguridad $\underline{v}_s(x)$, $s = 1, \ldots, k$ pueden obtenerse con distintas estrategias $y \in Y$ del jugador II. Ghose y Prassad (1989) [41], establecen la definición de estrategia de seguridad Pareto-óptima que en nuestra notación es como sigue:

Definición 2.3 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima para el jugador I si no existe $x \in X$, tal que $\underline{v}(x^*) \leq \underline{v}(x), \underline{v}(x^*) \neq \underline{v}(x)$. Una estrategia $y^* \in Y$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima para el jugador II si no existe $y \in Y$ tal que $\overline{v}(y^*) \geq \overline{v}(y), \overline{v}(y^*) \neq \overline{v}(y)$.*

2.1. Procedimiento de resolución

Dada una estrategia $x \in X$, el nivel de seguridad s-ésimo del jugador I viene dado por:

$$\underline{v}_s(x) = \min_{y \in Y} v_s(x, y) = \min_{y \in Y} x^t A(s) y$$

El problema a resolver, es un problema lineal escalar, por tanto tiene una solución óptima entre los puntos extremos del poliedro Y. Por ello, podemos expresar

$$\underline{v}_s(x) = \min_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}(s)$$

o matricialmente:

$$\underline{v}_s(x) = \min x^t A(s)$$

A continuación, introducimos el siguiente problema de programación lineal multiobjetivo, denominado el problema lineal del juego multicriterio.

$$\begin{array}{lll} (PLJM): & \max & v_1, \ldots, v_k \\ & \text{s.a.} & x^t A(s) \geq (v_s, \ldots, v_s) \quad s = 1, \ldots, k \\ & & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

Teorema 2.1 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima y $v^* = (v_1^*, \ldots, v_k^*)$ su vector de nivel de seguridad asociado si y sólo si (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(PLJM)$.*

Demostración: Sea $x^* \in X$ una estrategia de seguridad Pareto-óptima, entonces no existe otra estrategia $x \in X$ tal que $\underline{v}(x^*) \leq \underline{v}(x)$, $\underline{v}(x^*) \neq \underline{v}(x)$, o equivalentemente:

$$(\min\ x^t A(1), \ldots, \min\ x^t A(k)) \geq (\min\ x^{*t} A(1), \ldots, \min\ x^{*t} A(k))$$

$$(\min\ x^t A(1), \ldots, \min\ x^t A(k)) \neq (\min\ x^{*t} A(1), \ldots, \min\ x^{*t} A(k))$$

De aquí, $x \in X$ es una solución eficiente del problema

$$\max_{x \in X} (\min\ x^t A(1), \ldots, \min\ x^t A(k))$$

y este problema es equivalente a

$$\begin{array}{lll} (PLJM): & \max & v_1, \ldots, v_k \\ & \text{s.a.} & x^t A(s) \geq (v_s, \ldots, v_s) \quad s = 1, \ldots, k \\ & & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

Recíprocamente, supongamos que una solución eficiente (v^*, x^*) del problema $(PLJM)$ no es una estrategia de seguridad Pareto-óptima, entonces existe $\overline{x} \in X$ tal que

$$(\min\ \overline{x}^t A(1), \ldots, \min\ \overline{x}^t A(k)) \geq (\min\ x^{*t} A(1), \ldots, \min\ x^{*t} A(k))$$

$$(\min \overline{x}^t A(1), \ldots, \min \overline{x}^t A(k)) \neq (\min x^{*t} A(1), \ldots, \min x^{*t} A(k))$$

Sea $\overline{v} = (\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k)$, donde $\overline{v}_s = \min \overline{x}^t A(s)$, $s = 1, \ldots, k$, el vector $(\overline{v}, \overline{x})$ es una solución del problema $(PLJM)$ que domina a (v^*, x^*), en contra de ser una solución eficiente de dicho problema. □

Este resultado es muy importante por varias razones. En primer lugar pone de manifiesto que, al igual que la programación lineal se utiliza para obtener las estrategias óptimas y el valor de los juegos escalares bipersonales de suma nula, de la misma forma puede utilizarse la programación lineal multiobjetivo para resolver los juegos bipersonales de suma nula con pagos vectoriales, siempre que se considere el concepto de estrategia de seguridad Pareto-óptima como solución de los mismos.

En segundo lugar, hay que hacer notar que, como es usual en los problemas lineales multiobjetivo, a partir de las soluciones eficientes extremas, se obtienen todas las estrategias de seguridad Pareto-óptimas.

Ejemplo 2.1 : *Consideremos el juego vectorial cuya matriz de pagos es*

$$\begin{pmatrix} (1,3) & (2,1) \\ (3,1) & (1,2) \\ (1,1) & (3,3) \end{pmatrix}$$

el problema lineal multiobjetivo asociado es

$$\begin{array}{ll} \max & v_1, v_2 \\ s.a. & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq v_1 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq v_1 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 \geq v_2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq v_2 \\ & \sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \\ & x \geq 0, v_1, v_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

Utilizando el paquete de programación multiobjetivo ADBASE hemos obtenido las siguientes soluciones extremas eficientes:

$$(v^1, x^1) = (2, 1; 0, 1/2, 1/2)$$

$$(v^2, x^2) = (9/5, 9/5; 2/5, 2/5, 1/5)$$
$$(v^3, x^3) = (1, 2; 1/2, 0, 1/2)$$

y el conjunto de todas las estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador I es:

$$\text{conv}\{(0, 1/2, 1/2), (2/5, 2/5, 1/5)\} \cup \text{conv}\{(2/5, 2/5, 1/5), (1/2, 0, 1/2)\}$$

Definición 2.4 *Un par de estrategias $x \in X$, $y \in Y$, forman un punto de silla de Pareto para el juego vectorial si $\underline{v}(x) = \overline{v}(y)$.*

Este concepto puede equipararse con el concepto de solución ideal en programación multiobjetivo, que es aquella solución factible que maximiza todos los objetivos simultáneamente. Así, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.5 *$x^* \in X$ es una estrategia ideal para el jugador I si x^* maximiza $\underline{v}_s(x)$, $\forall s = 1, \dots, k$. $y^* \in Y$ es una estrategia ideal para el jugador II si y^* minimiza $\overline{v}_s(y)$, $\forall s = 1, \dots, k$.*

Sin embargo, la existencia de estrategia ideal para un jugador no implica la existencia de punto de silla de Pareto para el juego vectorial, puesto que los niveles de seguridad de cada juego escalar $A(s)$, $s = 1, \dots, k$, se pueden obtener con estrategias diferentes del otro jugador.

Corolario 2.1 *Un par de estrategias $x^* \in X$, $y^* \in Y$, forman un punto de silla de Pareto para los jugadores I y II si y sólo si x^* e y^* son estrategias ideales para los jugadores I y II respectivamente.*

Ejemplo 2.2 *Consideremos el juego matricial propuesto por Ghose y Prassad (1989) [41], cuya matriz de pagos es*

$$\begin{pmatrix} (2,3) & (3,2) \\ (4,1) & (2,3) \end{pmatrix}$$

La estrategia $x^* = (2/3, 1/3)$ del jugador I, y la estrategia $y^* = (1/3, 2/3)$ del jugador II forman un punto de silla de Pareto para este juego. Además ambas estrategias son estrategias ideales para el jugador I y el jugador II respectivamente.

2.2. Métodos de escalarización

El teorema 2.1 establece una equivalencia entre las estrategias de seguridad Pareto-óptimas de un juego vectorial y las soluciones eficientes de un problema lineal múltiple. La forma más usual de caracterizar soluciones eficientes de problemas múltiples es a través de las soluciones de problemas escalares apropiados.

Vamos a considerar dos formas de escalarizar el juego vectorial para su resolución: el problema lineal ponderado y el problema maximin ponderado.

2.2.1. El problema lineal ponderado

Este método consiste en asociar a cada objetivo del problema lineal del juego múltiple un peso no negativo, λ_i , y obtener una nueva función objetivo como la suma de los k objetivos ponderados. Formalmente:

Dado el problema lineal del juego multicriterio:

$$\begin{array}{lll} (PLJM): & \max & v_1, \ldots, v_k \\ & \text{s.a.} & x^t A(s) \geq (v_s, \ldots, v_s) \quad s = 1, \ldots, k \\ & & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

formamos el problema lineal escalar:

$$\begin{array}{lll} (P(\lambda)): & \max & \sum_{s=1}^k \lambda_s v_s \\ & \text{s.a.} & x^t A(s) \geq (v_s, \ldots, v_s) \quad s = 1, \ldots, k \\ & & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

donde $\lambda \in \Lambda^0 = \{\lambda \in \mathbb{R}^k : \lambda_s > 0,\ \sum_{s=1}^k \lambda_s = 1\}$.

El siguiente teorema establece la caracterización de las estrategias de seguridad Pareto-óptimas del juego vectorial por medio de las soluciones del problema ponderado.

Teorema 2.2 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima y v^* su vector de nivel de seguridad asociado si y sólo si existe $\lambda^* \in \Lambda^0$ tal que (v^*, x^*) es una solución óptima del problema $P(\lambda^*)$*

Demostración: Por el teorema 2.1, x^* es una estrategia de seguridad Pareto-óptima y v^* su vector de nivel de seguridad asociado si y sólo si (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(PLJM)$, y esto equivale a que existe $\lambda^* \in \Lambda^0$ tal que (v^*, x^*) es una solución óptima del problema $P(\lambda^*)$. □

Cada estrategia de seguridad Pareto-óptima x^* está asociada con un conjunto poliédrico $\Lambda(x^*) \subset \Lambda^0$, tal que (v^*, x^*) es una solución óptima del problema $P(\lambda)$, $\forall \lambda \in \Lambda(x^*)$. Si (v^*, x^*) es una solución eficiente extrema del $(PLJM)$ el conjunto de pesos asociado es:

$$\Lambda(x^*) = \{\lambda \in \Lambda : \lambda^t (C - Z)(x^*) \leq 0\}$$

donde $(C - Z)(x^*)$ es la matriz de costes reducidos asociada con la estrategia x^*.

El conjunto $\Lambda(x^*)$ puede considerarse como una región de sensibilidad ya que cambios pequeños en los parámetros no cambian la estrategia óptima cuando esta región tiene interior relativo no vacío. Las regiones asociadas con las soluciones eficientes extremas del $(PLJM)$ inducen una partición en Λ^0, y en el conjunto de las estrategias de seguridad Pareto-óptimas de los jugadores.

Sea X_{ep} el conjunto de los pares formados por las estrategias de seguridad Pareto-óptimas del jugador I y su nivel de seguridad asociado (análogamente para el jugador II, Y_{ep}), es decir

$$X_{ep} = \{(\underline{v}(x), x) : x \in X,\ x \text{ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima}\}$$

Sea $H(x)$ el conjunto de soluciones óptimas del problema $P(\lambda), \forall \lambda \in \Lambda(x)$, y sea $ext(PLJM)$ el conjunto de soluciones eficiente extremas del problema $(PLJM)$.

Teorema 2.3 *Se verifica* $X_{ep} = \bigcup_{x \in ext(PLJM)} H(x)$

Demostración: Sea x una estrategia de seguridad Pareto-óptima, por el teorema 2.2, existe un $\lambda^0 \in \Lambda^0$ tal que x es una solución de $P(\lambda^0)$. Al ser $P(\lambda^0)$ un problema lineal, tiene al menos un punto extremo x^* de su región factible que también es solución óptima. Por tanto, $\lambda^0 \in \Lambda(x^*)$ por lo que $x \in H(x^*)$.

Recíprocamente, sea $x^0 \in H(x)$ para algún $x \in ext(PLJM)$, entonces x^0 es una solución óptima de $P(\lambda), \forall \lambda \in \Lambda(x) \subset \Lambda$. Por el teorema 2.2, tenemos que x^0 es una estrategia de seguridad Pareto-óptima. □

Ejemplo 2.3 *En el ejemplo 2.1, cada estrategia de seguridad Pareto-óptima extrema está asociada a un conjunto de ponderaciones o pesos:*

$(v^1, x^1) = (2, 1; 0, 1/2, 1/2)$ *para pesos* $\lambda_1 \in [4/5, 1]$

$(v^2, x^2) = (9/5, 9/5; 2/5, 2/5, 1/5)$ *para pesos* $\lambda_1 \in [1/5, 1/4]$

$(v^3, x^3) = (1, 2; 1/2, 0, 1/2)$ *para pesos* $\lambda_1 \in [0, 1/5]$.

Con $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$.

2.2.2. El problema maximin ponderado

Si el jugador desea calcular las estrategias de seguridad Pareto-óptimas, de forma que los niveles de seguridad alcanzados con ellas en cada juego escalar, aumenten en conjunto, es decir, si el jugador quiere maximizar todos y cada uno de ellos, es conveniente la utilización del criterio maximin. Este criterio consiste en hallar una estrategia que maximice el mínimo de los niveles de seguridad de los juegos escalares.

Dado el problema lineal del juego multicriterio:

$$\begin{array}{lll} (PLJM): & \max & v_1, \ldots, v_k \\ & \text{s.a.} & x^t A(s) \geq (v_s, \ldots, v_s) \quad s = 1, \ldots, k \\ & & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

el problema maximin asociado es:

$$\begin{array}{ll} \max & \min \quad v_1, \ldots, v_k \\ \text{s.a.} & x^t A(s) \geq (v_s, \ldots, v_s) \quad s = 1, \ldots, k \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Este problema es un caso particular del problema en el que los niveles de seguridad están ponderados. El problema maximin ponderado asociado con $(PLJM)$ es:

$$
\begin{array}{lll}
(PMP(\omega)): & \max & \min \quad \omega_1 v_1, \ldots, \omega_k v_k \\
 & \text{s.a.} & x^t A(s) \geq (v_s, \ldots, v_s) \quad s = 1, \ldots, k \\
 & & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
 & & x \geq 0
\end{array}
$$

con $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^k : \omega > 0\}$.

Este problema puede expresarse equivalentemente como:

$$
\begin{array}{ll}
\max & z \\
\text{s.a.} & x^t A(s) \geq (v_s, \ldots, v_s) \quad s = 1, \ldots, k \\
 & \omega_s v_s \geq z \quad s = 1, \ldots, k \\
 & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

con $z \in \mathbb{R}$.

A continuación establecemos un teorema que caracteriza las estrategias de seguridad Pareto-óptimas en función de las soluciones del problema $(PMP(\omega))$.

Teorema 2.4 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima para el jugador I, en el juego vectorial si y sólo si (v^*, x^*) es una solución óptima del problema $PMP(\omega^0)$ con $\omega^0 \in \Omega$*

Demostración: Yano y Sakawa (1989) [99], establecen que (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(PLJM)$ si y sólo si existe $\omega^0 \in \Omega$ tal que (v^*, x^*) es una solución óptima del problema $PMP(\omega^0)$. Por el teorema 2.1, es equivalente a que x^* es una estrategia de seguridad Pareto-óptima del jugador I en el juego original. □

3. Juegos vectoriales con núcleos continuos

En este apartado abordaremos el estudio de los juegos bipersonales continuos multiobjetivo. Para ello utilizaremos como punto de partida los conceptos de solución que se basan en niveles de seguridad y concretamente las estrategias de seguridad Pareto-óptimas.

Consideremos un juego bipersonal en forma normal con vector de pagos $K = (K_1, \dots, K_p)$, donde cada K_j es una función $K_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa en x y cóncava en y, siendo $K(x, y)$ el pago recibido por el jugador I (II) del jugador II (I) cuando el jugador I (II) toma la estrategia $x(y)$.

En este problema los espacios de estrategias para los jugadores I y II vienen dados por:

$$\Gamma^1 = \{x \in C_1 : p_i(x) \leq 0,\ i = 1, \dots, s\}$$
$$\Gamma^2 = \{y \in C_2 : q_j(y) \leq 0,\ j = 1, \dots, t\}$$

donde $C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $C_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ son conjuntos convexos y $p_i,\ i = 1, \dots, s$ y $q_j,\ j = 1, \dots, t$ son funciones convexas. En lo que sigue, siempre supondremos que Γ^1 and Γ^2 son conjuntos compactos.

Cada estrategia $x \in \Gamma^1$ (respectivamente $y \in \Gamma^2$) define sus niveles de seguridad $\underline{K}_l(x)$ (respectivamente $\overline{K}_l(y)$) como el vector de pagos K cuando II (respectivamente I) actúa de la mejor forma posible frente a la estrategia x (respectivamente frente a y), Ghose y Prasad (1989) [41]. Por lo tanto,

$$\underline{K}_l(x) = \min_{y \in \Gamma^2} K_l(x, y) \qquad l = 1, \dots, p$$
$$\overline{K}_l(y) = \max_{x \in \Gamma^1} K_l(x, y) \qquad l = 1, \dots, p$$

siendo los niveles de seguridad las p-uplas:

$$\underline{K}(x) = [\underline{K}_1(x), \dots, \underline{K}_p(x)]$$
$$\overline{K}(y) = [\overline{K}_1(y), \dots, \overline{K}_p(y)].$$

Es importante resaltar que bajo estas condiciones las funciones de nivel de seguridad $\underline{K}_l$ son cóncavas y que al igual que señalabamos para los juegos matriciales, cada estrategia x de Γ^1, puede producir que sus niveles de seguridad $\underline{K}_l(x),\ l = 1, \dots, p$ se alcancen por diferentes estrategias de Γ^2.

Definición 2.6 *Una estrategia $x^* \in \Gamma^1$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima para I si $\nexists x \in \Gamma^1$ tal que $\underline{K}(x^*) \leq \underline{K}(x),\ \underline{K}(x^*) \neq \underline{K}(x)$.*

Este concepto tiene buenas propiedades en el caso de que el núcleo K sea bilineal. Sin embargo, en el caso no lineal algunas soluciones eficientes presentan comportamientos poco deseables con respecto a su estabilidad. Por esta razón, introduciremos una modificación del concepto de estrategia de seguridad Pareto-óptima, basada en la consideración de estrategias propiamente eficientes (Khun y Tucker (1951) [55]).

Sea f una función convexa y denotemos por $\partial f(x)$ el conjunto subdiferencial de la función f en x.

Definición 2.7 *Una estrategia $x^* \in\ ,^1$ es de seguridad propiamente Pareto-óptima para el jugador I si x^* es Pareto-óptima y además no existe $h \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\begin{aligned} \langle \xi_i, h \rangle &\geq 0, \ \forall \xi_i \in \partial \underline{K}_i(x^*), \ \textit{para todo } i = 1, \dots, p \\ \langle \xi_l, h \rangle &> 0, \ \forall \xi_l \in \partial \underline{K}_l(x^*), \ \textit{para algún } l \end{aligned}$$

y

$$\langle \xi_j, h \rangle \geq 0, \ \forall \xi_j \in \partial p_j(x^*), \ \textit{para algún } j \in \{k : p_k(x^*) = 0\}$$

Ambos conceptos están muy relacionados porque toda estrategia de seguridad propiamente Pareto-óptima es también Pareto-óptima. Además, probaremos a continuación, que cuando K es un núcleo bilineal ambos conceptos coinciden.

Proposición 2.1 *Sea un juego bipersonal con pagos múltiples $K_l(x, y) = x^t A_l y$, donde $A_l \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y con espacios poliédricos de estrategias $,^1$, $,^2$ respectivamente para los jugadores I y II. Entonces, una estrategia x^0 para el jugador I es de seguridad Pareto-óptima si y sólo si es una estrategia de seguridad propiamente Pareto-óptima.*

Demostración. Puesto que $K(x, y)$ es bilineal el juego considerado es un juego matricial multicriterio. Para estos juegos hemos probado que x^0 es una estrategia de seguridad Pareto-óptima y $\underline{v} \in \mathbb{R}^p$ es su vector de niveles de seguridad si y sólo si $(\underline{v}, x^0)$ es una solución eficiente de un determinado problema lineal múltiple (véase el teorema 2.1). Entonces, $(\underline{v}, x^0)$ es una solución eficiente de ese problema si y sólo si es propiamente eficiente (véase Sawaragi y otros (1985) [77]). Así pues, de la definición 2.7 se sigue que x^0 es una estrategia de seguridad propiamente Pareto-óptima para el juego y además $\underline{v}$ es su vector de niveles de seguridad. □

Para la determinación de la estrategia de seguridad propiamente Pareto-óptima utilizaremos procedimientos de escalarización. Con este fin, introducimos el siguiente problema escalar,

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{P}(w)): & \max & \displaystyle\sum_{l=1}^{p} w_l \underline{K}_l(x) \\ & \text{s. a:} & p_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \ldots, s \\ & & x \in C_1 \end{array}$$

donde $w \in W = \{w \in \mathbb{R}^p : w > 0,\ \sum_{l=1}^{p} w_l = 1\}$.

Teorema 2.5 *Una estrategia $x^* \in \,{}^{1}$ es de seguridad propiamente Pareto-óptima si y sólo si existe $w^* \in W$ tal que x^* es solución óptima del problema $P(w^*)$.*

Demostración. Usando la definición 2.7, x^* es una estrategia de seguridad propiamente Pareto-óptima si y sólo si x^* es una solución propiamente eficiente del siguiente problema multiobjetivo no lineal que denominaremos problema del juego multicriterio (PJM)

$$\begin{array}{llll} (\mathrm{PJM}): & \max & \underline{K}_1(x), \ldots, \underline{K}_p(x) & \\ & s.a: & p_i(x) \leq 0, & i = 1, \ldots, s \\ & & x \in C_1, & \end{array}$$

lo que equivale a las siguientes condiciones: $\exists w^* \in W : \lambda^* \in \mathbb{R}^s_+$ tal que

$$\begin{array}{l} \lambda^* p(x^*) = 0 \\ 0 \in \sum_{i=1}^{p} w_i^* \partial \underline{K}_i(x^*) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^* \partial p_i(x^*) + N_{C_1}(x^*) \end{array}$$

Ahora bien, puesto que K es cóncava, p son funciones convexas y C_1 es un conjunto convexo estas condiciones son equivalentes a que x^* sea una solución óptima de $P(w^*)$. □

Aunque en general, la caracterización de las estrategias de seguridad propiamente Pareto-óptimas depende de las funciones $\underline{K}_i$, se pueden obtener caracterizaciones alternativas que no dependen explícitamente de las mismas. Denotemos por $\mathrm{conv}(A)$ a la envolvente convexa de los elementos de A.

Teorema 2.6 *Consideremos un juego con pagos vectoriales $K = (K_1, \ldots, K_p)$ y espacios de estrategias $,^1$, $,^2$ respectivamente para los jugadores I y II. Supongamos además que $K_l(x, y)$ es una función convexa en x y cóncava en y para todo $l = 1, \ldots, p$ y que $,^2$ es un conjunto convexo y compacto. Entonces $x^* \in ,^1$ es una estrategia de seguridad propiamente Pareto-óptima para el jugador I si y sólo si existen $w^* \in W$, $\lambda^* \in \mathbb{R}^s_+$ tales que $\lambda^* p(x^*) = 0$ y*

$$0 \in \sum_{i=1}^{p} w_i^* \mathrm{conv}\{\partial_x K_i(x, y) : y \in M(x)\} + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^* \partial p_i(x^*) + N_{C_1}(x^*)$$

donde $M(x) = \{y \in ,^2 : \underline{K}_i(x) = K_i(x, y)\}$ $\forall x \in ,^1$.

Demostración. Por el teorema 2.5 x^* es una estrategia de seguridad propiamente Pareto-óptima si y sólo si $\exists w^* \in W$, $\lambda^* \in \mathbb{R}^s_+$ tal que

$$\begin{array}{l} \lambda^* p(x^*) = 0 \\ 0 \in \sum_{i=1}^{p} w_i^* \partial \underline{K}_l(x^*) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^* \partial p_i(x^*) + N_{C_1}(x^*) \end{array}$$

El problema es calcular el conjunto subdiferencial de $\underline{K}_l$ en x^*. Por hipótesis $,^2$ es un conjunto convexo y $K_l(\cdot, y)$ son funciones cóncavas para todo $x \in ,^1$, por tanto $\underline{K}_l(x)$ es cóncava y $K_l(\cdot, y)$ es una función localmente lispchitziana. Además $,^2$ es un conjunto compacto y aplicando el Teorema 5N en Rockafellar (1979) [75] tenemos

$$\partial \underline{K}_l(x) = \mathrm{conv}\{\partial_x K_l(x, y) : y \in M(x)\}$$

lo que concluye la demostración. □

De la misma forma pueden darse condiciones (aunque ahora sólo necesarias) para que una estrategias sea de seguridad Pareto-óptima para uno de los jugadores.

Teorema 2.7 *Si una estrategia $x^* \in\ ,^{1}$ es de seguridad Pareto-óptima para el jugador I entonces existe $w^* \in \overline{W} = \{w \in \mathbb{R}^p : w \geq 0,\ \sum_{l=1}^{p} w_l = 1\}$ tal que x^* es una solución óptima del problema $P(w^*)$.*

La demostración es similar a la del teorema previo aunque ahora no se puede obtener la condición suficiente sin imponer restricciones de cualificación sobre el problema multiobjetivo asociado con la definición de estrategia de seguridad Pareto-óptima.

Ejemplo 2.4 *Consideremos un juego bipersonal en el cuadrado unidad con las siguientes funciones de pago,*

$$K_1(x,y) = \begin{cases} 2(x-y), & si\ x \geq y \\ 3(y-x), & si\ y \geq x \end{cases} \qquad K_2(x,y) = \begin{cases} 3(x-y), & si\ x \geq y \\ 2(y-x), & si\ y \geq x \end{cases}$$

Podemos interpretar este juego como una competición entre dos firmas por un único mercado en dos escenarios diferentes. La inversión de cada firma en cada escenario es de una unidad monetaria. Es fácil obtener los niveles de seguridad para el jugador II siendo estos:

$$\overline{K}_1(x) = \begin{cases} 3(1-x), & si\ x \leq 3/5 \\ 2x, & si\ x \geq 3/5 \end{cases} \qquad \overline{K}_2(x) = \begin{cases} 2(1-x), & si\ x \leq 2/5 \\ 3x, & si\ x \geq 2/5 \end{cases}$$

De donde es fácil deducir que el conjunto de estrategias de seguridad propiamente Pareto-óptimas del jugador II es el intervalo $(2/5, 3/5)$ (Figura 2.1).

La importancia de los conceptos de solución basados en eficiencia y niveles de seguridad se ha puesto de manifiesto en diferentes publicaciones como por ejemplo en [38], [41] y [42]. Sin embargo, es necesario dar buenos procedimientos de cómputo para tales soluciones. El teorema 2.5 da una caracterización para ello. Ahora bien, otra vía consiste en definir juegos escalares asociados tales que la solución minimax de los mismos sea la estrategia de seguridad propiamente Pareto-óptima buscada. Como consecuencia del teorema 2.5 probaremos que el hecho de ser un punto de silla de cierto juego escalar de suma nula es una condición necesaria y suficiente para que una estratregia sea de seguridad propiamente Pareto-óptima.

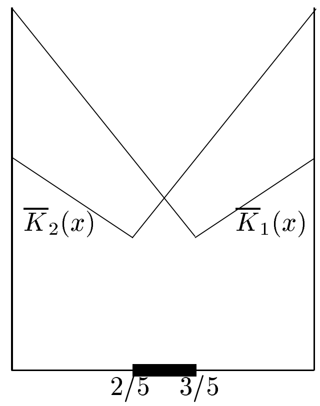


Figura 2.1. Estrategias de seguridad propiamente Pareto-óptimas del jugador II

Sean x, y dos estrategias de seguridad propiamente Pareto-óptimas para los jugadores I y II respectivamente. Puesto que los vectores de niveles de seguridad $\underline{K}(x)$, $\overline{K}(y)$ deben dominar cada pago se verifica que:

$$\underline{K}(x) \leq K(x,y) \leq \overline{K}(y) \quad \forall x \in \, ,^1, \ \forall y \in \, ,^2.$$

Esto nos lleva a la siguiente caracterización de todas las estrategias de seguridad propiamente Pareto-óptimas por medio de solución de juegos escalares.

Consideremos un juego donde el jugador I selecciona su estrategia en $,^1$, el jugador II juega p diferentes estrategias $(y^1, \ldots, y^p)$ en $,^2$ y la función de pago es:

$$K(x, \underline{y}, w) = \sum_{l=1}^{p} w_l K_l(x, y^l)$$

donde $\underline{y} = (y^1, \ldots, y^p)$ siendo $y^l \in \, ,^2$, $l = 1, \ldots, p$ y $w = (w_1, \ldots, w_p) \in W$. Denominemos este juego por $J(w)$.

Puesto que $J(w)$ es un juego escalar, la definición usual de estrategia maximin (veáse Owen (1982) [71]) es la clásica para ambos jugadores. Entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.8 *Una estrategia* $x^* \in\ ,^1$ *es de seguridad propiamente Pareto-óptima si y sólo si existe* $w^* \in W$ *tal que* x^* *es solución maximin de* $J(w^*)$.

Demostración. Utilizando el hecho de que $J(w^*)$ es un juego escalar de suma nula, x^* es una estrategia maximin del juego $J(w^*)$ si y sólo si es una solución óptima del problema

$$\max_{x\in\Gamma^1} \min_{(y^1,\ldots,y^p)\in(\Gamma^2)^p} \sum_{l=1}^{p} w_l^* K_l(x,y^l),$$

si y sólo es una solución óptima del problema

$$\max_{x\in\Gamma^1} \sum_{l=1}^{p} w_l^* \min_{y^l\in(\Gamma^2)} K_l(x,y^l) = \max_{x\in\Gamma^1} \sum_{l=1}^{p} w_l^* \underline{K}_l(x).$$

Esta última formulación es equivalente a $P(w^*)$, entonces x^* es una estrategia maximin para $J(w^*)$ si y sólo si x^* es una solución óptima de $P(w^*)$. $\square$

Este resultado ya fue mostrado para estrategias de seguridad Pareto-óptimas en juegos matriciales multicriterio, lo que pone una vez más de manifiesto las similitudes entre estrategias de seguridad propiamente Pareto-óptimas para juegos multicriterio cóncavo-convexos y estrategias de seguridad Pareto-óptimas en juegos matriciales.

4. Juegos vectoriales por objetivos

En esta sección, extendemos los resultados obtenidos para juegos escalares al caso de juegos con pagos múltiples. Con ello, proponemos una nueva metodología para estudiar los juegos vectoriales, analizando el pago que puede alcanzar un jugador y la probabilidad que tiene de lograrlo.

Sea $P = (P_1, \ldots, P_k)$ un vector de objetivos o niveles de satisfacción, uno por cada juego escalar, establecido por el jugador I. Consideremos que dicho jugador desea escoger una estrategia de forma que en cada juego escalar obtenga un pago de al menos P_s

Definición 2.8 *Para cada par de estrategias mixtas* $x \in X$, $y \in Y$, *la función de pagos del juego vectorial por objetivos viene dada por:*

$$v(x,y) = x^t A_P y = (v_1(x,y), \ldots, v_k(x,y))$$

donde

$$v_s(x,y) = x^t A_P(s) y \quad s = 1, \ldots, k$$

$$A_P(s) = (\delta^s_{ij}) \quad 1 \leq s \leq k, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

$$\delta^s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij}(s) \geq P_s \\ 0 & \text{si } a_{ij}(s) < P_s \end{cases} \qquad \forall\, s = 1, \ldots, k.$$

Asociado con cada estrategia del jugador I, existe un nivel de seguridad por objetivos en cada uno de los juegos escalares que forman el juego vectorial.

Definición 2.9 *Para cada estrategia $x \in X$, el nivel de seguridad por objetivos de cada juego escalar inducido por el juego vectorial es la probabilidad que puede garantizarse el jugador de alcanzar al menos el nivel P_s con esa estrategia en dicho juego.*

Dado $x \in X$ el vector de nivel de seguridad para los objetivos P es

$$v^P(x) = (v^P_1(x), \ldots, v^P_k(x))$$

siendo

$$v^P_s(x) = \min_{y \in Y} v^P_s(x,y) = \min_{y \in Y} x^t A_P(s) y = \min_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} x_i \delta^s_{ij} \quad s = 1, \ldots, k$$

$v^P_s(x)$, $s = 1, \ldots, k$, es la probabilidad de alcanzar al menos el nivel P_s en el juego escalar de matriz $A(s), s = 1, \ldots, k$ cuando el jugador I utiliza la estrategia x. Observemos que dada una estrategia $x \in X$ del jugador I, los niveles de seguridad $v^P_s(x)$, $s = 1, \ldots, k$, pueden obtenerse con distintas estrategias $y \in Y$ del jugador II.

De forma análoga puede determinarse el vector de nivel de seguridad por objetivos para el jugador II, a partir de los objetivos que éste considere. Vamos a establecer el concepto de solución para juegos vectoriales, basado en el nivel de seguridad por objetivos.

Definición 2.10 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad de nivel P para el jugador I, si no existe $x \in X$, tal que $v^P(x^*) \leq v^P(x), v^P(x^*) \neq v^P(x)$.*

Debido a que estamos estudiando juegos con pagos vectoriales, el concepto de solución anterior se basa en la optimalidad de Pareto, es decir, una componente de $v^P(x^*)$ tomará un valor mejor sólo si otra toma un valor peor.

El conjunto de estrategias de seguridad de nivel P se determina como soluciones eficientes de un problema lineal multiobjetivo particular.

4.1. Determinación de estrategias de seguridad de nivel P

Consideremos el siguiente problema de programación lineal multiobjetivo, denominado problema lineal del juego multicriterio por objetivos, $(JMO)_P$.

$$
\begin{array}{lll}
(JMO)_P: & \max & v_1, \ldots, v_k \\
 & \text{s.a.} & x^t A_P(s) \geq (v_s, \ldots, v_s) \quad s = 1, \ldots, k \\
 & & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
 & & x \geq 0
\end{array}
$$

Teorema 2.9 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad de nivel P y $v^* = (v_1^*, \ldots, v_k^*)$ su vector de nivel de seguridad asociado si y sólo si (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(JMO)_P$.*

Demostración: Análoga a la del teorema 2.1 sustituyendo cada matriz $A(s)$, $s = 1, \ldots, k$, por la matriz $A(s)_P$, $s = 1, \ldots, k$ □

Al resolver un juego vectorial por medio de la programación lineal multiobjetivo, el jugador se encuentra con un conjunto de estrategias de seguridad de nivel P entre las que tiene que escoger la que va a jugar. Para caracterizar dicha estrategia existen distintos procedimientos como se ha indicado en la sección 2.2.

Si consideramos el problema lineal ponderado $P(\lambda)$ asociado al problema lineal del juego multicriterio por objetivos, el jugador I puede establecer valores para los pesos de dicho problema de diferentes formas. Puede considerar las metas que ha establecido en cada juego escalar, o bien la probabilidad de alcanzarlas, o incluso las desviaciones respecto de estas metas. En el caso en que los objetivos no estén medidos en las mismas unidades pueden modificarse multiplicando por un factor de equiparación de rangos.

Conocidos los pesos, la función objetivo del problema $P(\lambda)$ está perfectamente determinada. Si el jugador considera como pesos los valores de los objetivos, $\lambda_s = P_s$, $s = 1, \ldots, k$, dicha función es precisamente la esperanza de los objetivos P_s. De esta forma, el jugador I escogerá la estrategia que le proporcione mayor esperanza en los objetivos, es decir la solución del problema lineal escalar dado por:

$$\begin{array}{ll} \max & P_1 v_1 + \cdots + P_k v_k \\ \text{s.a.} & x^t A_P(s) \geq (v_s, \ldots, v_s) \quad s = 1, \ldots, k \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

A continuación, consideremos la escalarización dada mediante el problema maximin ponderando $PMP(\omega)$ asociado al problema lineal del juego multicriterio por objetivos, $(JMO)_P$. En este caso, si el jugador I escoge $\omega_s = P_s$, $s = 1, \ldots, k$, la solución óptima del problema escalar

$$\begin{array}{ll} \max & \min \quad P_1 v_1, \ldots, P_k v_k \\ \text{s.a.} & x^t A_P(s) \geq (v_s, \ldots, v_s) \quad s = 1, \ldots, k \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

determina una estrategia de seguridad de nivel P que comparte el riesgo de obtener los objetivos P_s , $s = 1, \ldots, k$, entre todos ellos.

Ejemplo 2.5 *: Consideremos la matriz de pagos del ejemplo 2.1*

$$\begin{pmatrix} (1,3) & (2,1) \\ (3,1) & (1,2) \\ (1,1) & (3,3) \end{pmatrix}$$

Sea P = (3,2) un vector de objetivos fijado por el jugador I. Las matrices $A_P(1)$ y $A_P(2)$ que induce el objetivo P son

$$A_P(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_P(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para obtener todas las estrategias de seguridad de nivel P para el jugador I, resolvemos el siguiente problema lineal multiobjetivo

$$\begin{array}{ll} \max & v_1,\, v_2 \\ s.a. & x_2 \geq v_1 \\ & x_3 \geq v_1 \\ & x_1 \geq v_2 \\ & x_2 + x_3 \geq v_2 \\ & \sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \\ & x \geq 0, v_1, v_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

Las soluciones eficientes extremas son: $(v^1, x^1) = (1/4, 1/2; 1/2, 1/4, 1/4)$ $(v^2, x^2) = (1/2, 0; 0, 1/2, 1/2)$, *y el conjunto de las estrategias de seguridad de nivel P para el jugador I es*

$$\mathrm{conv}\{(1/2, 1/4, 1/4), (0, 1/2, 1/2)\}$$

La estrategia de seguridad que proporciona el mayor valor esperado en los objetivos P para el jugador I, viene dada por la solución óptima del problema lineal

$$\begin{array}{ll} \max & 3v_1 + 2v_2 \\ s.a. & x_2 \geq v_1 \\ & x_3 \geq v_1 \\ & x_1 \geq v_2 \\ & x_2 + x_3 \geq v_2 \\ & \sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \\ & x \geq 0, v_1, v_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

y es

$$x^1 = (1/2, 1/4, 1/4), \quad v^1 = (1/4, 1/2)$$

La estrategia de seguridad que comparte el riesgo de obtener los objetivos $P_1 = 3$, $P_2 = 2$ viene dada por la solución óptima del problema lineal

$$
\begin{array}{ll}
\max & z \\
s.a. & x_2 \geq v_1 \\
& x_3 \geq v_1 \\
& x_1 \geq v_2 \\
& x_2 + x_3 \geq v_2 \\
& 3v_1 \geq z \\
& 2v_2 \geq z \\
& \sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \\
& x \geq 0, v_1, v_2, z \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

y es,

$$x = (11/25, 7/25, 7/25), v = (7/25, 11/25).$$

4.2. Análisis de sensibilidad en los objetivos

En el apartado anterior hemos obtenido las estrategias de seguridad de nivel P y el vector de nivel de seguridad asociado para el jugador I resolviendo un problema lineal multiobjetivo. Ahora queremos determinar si una solución eficiente (v^*, x^*) de este problema sigue siéndolo cuando se producen variaciones en los objetivos P_s.

Consideramos dos casos. En el primero, suponemos que los objetivos $P = (P_1, \dots, P_k)$ aumentan a $P' = (P'_1, \dots, P'_k)$ y en el segundo suponemos que los objetivos $P = (P_1, \dots, P_k)$ disminuyen a $P' = (P'_1, \dots, P'_k)$.

1) Si aumentamos cada objetivo P_s a P'_s, $s = 1, \dots, k$, la matriz $A_{P'}(s)$ inducida por P'_s, $s = 1, \dots, k$, tiene más elementos nulos que la matriz $A_P(s)$, $s = 1, \dots, k$. Por ello, el conjunto factible del nuevo problema lineal $(JMO)_{P'}$ se reduce. De aquí, si (v^*, x^*) sigue siendo factible para el problema asociado a los objetivos P', también será eficiente para dicho problema.

Consideramos las matrices

$$M(s) = (m_{ij}(s)),\ 1 \leq s \leq k,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m,$$

cuyos elementos son:

$$m_{ij}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } P_s \leq a_{ij}(s) < P'_s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \forall\, s = 1, \dots, k$$

Teorema 2.10 *Sea* (v^*, x^*) *una solución eficiente del problema* $(JMO)_P$. *Si*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* m_{ij}(s) \leq h_j^*(s), \quad j = 1, \dots, m, \quad \forall s = 1, \dots, k$$

donde $h_j^*(s)$, $j = 1, \dots, m$, *son las variables de holgura de la solución eficiente del problema* $(JMO)_P$, *entonces* (v^*, x^*) *es una solución eficiente del problema* $(JMO)_{P'}$.

Demostración: Podemos expresar $A_{P'}(s) = A_P(s) - M(s), \quad s = 1, \dots, k$. Si (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(JMO)_P$, entonces

$$\begin{aligned} x^{*t} A_P(s) &\geq (v_s^*, \dots, v_s^*), \;\; s = 1, \dots, k \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^* &= 1 \\ x^* &\geq 0. \end{aligned}$$

Por hipótesis, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* m_{ij}(s) \leq h_j^*(s), \quad j = 1, \dots, k, \quad \forall s = 1, \dots, k$$

donde $h_j^*(s) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* m_{ij}(s) - v_s^* \quad j = 1, \dots, m$. Estas expresiones pueden escribirse de la forma

$$x^{*t} M(s) \leq x^{*t} A_P(s) - (v_s^*, \dots, v_s^*) \quad s = 1, \dots, k$$

de donde

$$\begin{aligned} (v_s^*, \dots, v_s^*) &\leq x^{*t} A_P(s) - x^{*t} M(s) = x^{*t}(A_P(s) - M(s)) \\ &= x^{*t} A_{P'}(s), \quad \forall s = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = 1, \, x^* \geq 0$$

Lo que implica que (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(JMO)_{P'}$.

□

2) Supongamos ahora que los objetivos P_s , $s = 1, \ldots, k$, disminuyen a los nuevos valores P'_s, $s = 1, \ldots, k$. En este caso, la matriz $A_{P'}(s)$ inducida por P'_s, $s = 1, \ldots, k$, tiene más elementos iguales a 1 que la matriz $A_P(s)$, $s = 1, \ldots, k$, lo que significa que el conjunto factible del problema aumenta. Por ello, si (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema asociado a los objetivos P_s seguirá siendo factible para el problema asociado a los objetivos P'_s, pero puede dejar de ser eficiente. Para ver si (v^*, x^*) es solución eficiente del nuevo problema efectuamos un test de eficiencia.

Sea $A_{P'}(s)$ la matriz inducida por P'_s, $s = 1, \ldots, k$. El nuevo problema es

$$
\begin{array}{lll}
(JMO)_{P'}: & \max & v_1, \ldots, v_k \\
& \text{s.a.} & x^t A_{P'}(s) \geq (v_s, \ldots, v_s) \quad s = 1, \ldots, k \\
& & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
& & x \geq 0
\end{array}
$$

Podemos expresar $A_{P'}(s) = A_P(s) + M(s)$, $s = 1, \ldots, k$, donde $M(s) = (m_{ij}(s))$ es una matriz cuyos elementos son

$$
m_{ij}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } P'_s \leq a_{ij}(s) < P_s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \forall\, s = 1, \ldots, k
$$

El problema $(JMO)_{P'}$ puede expresarse

$$
\begin{array}{ll}
\max & v_1, \ldots, v_k \\
\text{s.a.} & x^t (A_P(s) + M(s)) \geq (v_s, \ldots, v_s) \quad s = 1, \ldots, k \\
& \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
& x \geq 0
\end{array}
$$

Teorema 2.11 *Sea (v^*, x^*) una solución eficiente del problema $(JMO)_P$. Si el problema lineal escalar*

$$
\begin{array}{ll}
\max & t_1 + t_2 + \ldots + t_k \\
s.a. & x^t (A_P(s) + M(s)) \geq (v_s, \ldots, v_s) \quad s = 1, \ldots, k \\
& v_s - t_s = v_s^* \quad s = 1, \ldots, k \\
& \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
& x \geq 0, t_s \geq 0, \quad s = 1, \ldots, k
\end{array}
$$

tiene un valor óptimo igual a cero entonces (v^*, x^*) *es una solución eficiente del problema* $(JMO)_{P'}$

Demostración: Si el valor óptimo de la función objetivo es cero, entonces $t_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, k$. Aplicando el test de eficiencia esto significa que la solución (v^*, x^*) no puede mejorarse. □

Supongamos que el jugador I no puede indicar los objetivos que quiere alcanzar en la realización del juego. En este caso, el conjunto de todos los objetivos posibles, llamado espacio de objetivos, puede descomponerse en regiones en las que los objetivos que pertenecen a ellas, se alcanzan con la misma probabilidad.

Es decir, podemos obtener el conjunto de soluciones eficientes del problema $(JMO)_P$ para cualesquiera objetivos P en el espacio de objetivos. Para determinar estos conjuntos aplicamos el teorema 2.10 reiteradamente. A partir de las soluciones eficientes obtenidas para unos objetivos determinados, podemos obtener las soluciones eficientes del nuevo problema.

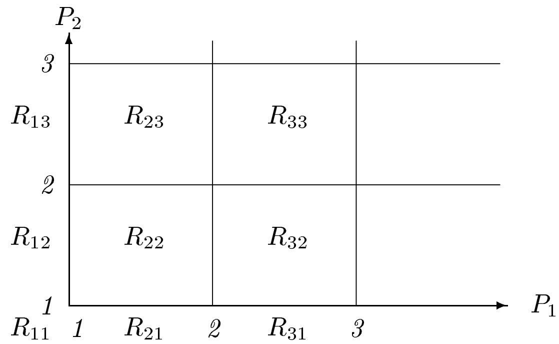
Ejemplo 2.6 : *Consideremos el juego del ejemplo 2.1. El espacio de objetivos para este juego es*

$$GS = \{P = (P_1, P_2) : 1 \leq P_1 \leq 3,\ 1 \leq P_2 \leq 3\}$$

Análogamente al caso escalar, consideramos los elementos diferentes de las matrices $A(1)$ *y* $A(2)$ *ordenados en orden creciente. Las regiones que forman la partición del espacio de objetivos son*

$$\begin{aligned} R_{11} &= \{(1,1)\} \\ R_{1j} &= \{1\} \times (j-1, j], \quad j = 2,3 \\ R_{i1} &= (i-1, i] \times \{1\}, \quad i = 2,3 \\ R_{ij} &= (i-1, i] \times (j-1, j], \quad i,j = 2,3. \end{aligned}$$

Gráficamente:



Estas regiones corresponden a rectángulos, segmentos y un punto. Denotamos por $S_{(i,j)}$ el conjunto de soluciones eficientes del problema $(JMO)_P$ para $P \in R_{ij}$, $i,j = 1,2,3$. En el ejemplo, estos conjunto son:

$$
\begin{aligned}
S_{(3,3)} = \quad & \mathrm{conv}\{(1/3,1/3;1/3,1/3,1/3),(0,1/2;1/2,0,1/2)\}\cup \\
& \mathrm{conv}\{((1/3,1/3;1/3,1/3,1/3),(1/2,0;0,1/2,1/2)\}\cup \\
& \mathrm{conv}\{(0,1/2;1/2,0,1/2),(1/2,0;0,1/2,1/2)\} \\
S_{(3,2)} = \quad & \mathrm{conv}\{(1/4,1/2;1/2,1/4,1/4),(1/2,0;0,1/2,1/2)\} \\
S_{(3,1)} = \quad & \{(1/2,1;0,1/2,1/2)\} \\
S_{(2,3)} = \quad & \mathrm{conv}\{(1/2,1/4;1/4,1/2,1/4),(0,1/2;1/2,0,1/2)\} \\
S_{(2,2)} = \quad & \{(1/2,1/2;1/2,1/2,0)\} \\
S_{(2,1)} = \quad & \mathrm{conv}\{(1/2,1;1/2,1/2,0),(1/2,1;0,1/2,1/2)\} \\
S_{(1,3)} = \quad & \{(1,1/2;1/2,0,1/2)\} \\
S_{(1,2)} = \quad & \mathrm{conv}\{(1,1/2;1/2,0,1/2),(1,1/2;1/2,1/2,0)\} \\
S_{(1,1)} = \quad & \mathrm{conv}\{(1,1;1,0,0),(1,1;0,1,0),(1,1;0,0,1)\}.
\end{aligned}
$$