

25.387

37

106

TESIS

Manuel de

**METODO DE IDENTIFICACION EN EL
DOMINIO DE LA FRECUENCIA.
APLICACION A LA OBTENCION DE
MODELOS EN TERMICA DE EDIFICIOS**

por

JOSE M. CEJUDO LOPEZ

Ingeniero Industrial por la E.S.I.I. de Sevilla

Sevilla, Octubre 1991

A mi familia

Que estas líneas sirvan de agradecimiento a personas que han hecho posible la tesis.
En particular:

- A José Guerra, riguroso director de la tesis, sin cuyo inestimable trabajo ésta hubiera sido diferente.
- A los que forman el Grupo de Termotecnia.

Indice

1	INTRODUCCION	1
1.1	INTRODUCCION	1
1.2	REVISION BIBLIOGRAFICA	2
1.2.1	Identificación de modelos de muros	4
1.2.2	Identificación de modelos de células	5
1.2.3	Identificación de modelos de edificios	7
1.2.4	Otras aplicaciones	8
1.2.5	Conclusiones	9
1.3	CONTENIDO	11
2	SISTEMAS. MODELOS. MODELIZACION	12
2.1	INTRODUCCION	12
2.2	SISTEMAS	13
2.3	MODELOS	15
2.3.1	Definición	15
2.3.2	Objetivos de un modelo	15
2.3.3	Tipos de modelos	17
2.4	MODELIZACION	20
2.4.1	Principios de modelización	22
2.4.2	Modelización física y reducción	23
2.4.3	Identificación	26
3	LA OBTENCION DEL MODELO	33
3.1	INTRODUCCION	33
3.2	LOS SISTEMAS CONSIDERADOS.	34
3.3	EL MODELO A IDENTIFICAR	35
3.3.1	A la integral de convolución desde el sistema	35
3.3.2	Al modelo regresivo desde la integral de convolución	36
3.3.3	Función de transferencia	38
3.4	ESTIMACION DE PARAMETROS	41
3.4.1	Método de estimación de parámetros	41

3.4.2	Transformada de Fourier de funciones muestreadas	46
3.5	LA VALIDACION DEL MODELO IDENTIFICADO	50
3.5.1	Respuesta ante un impulso	50
3.5.2	Respuesta continua ante un escalón	54
3.5.3	Constante de tiempo	57
3.5.4	Estabilidad	58
4	APLICACION DEL METODO AL CASO UNIDIMENSIONAL	60
4.1	INTRODUCCION	60
4.2	DEFINICION DEL PROBLEMA	62
4.3	MODELIZACION SIMPLIFICADA DE MUROS	63
4.3.1	Reducción de modelos detallados	64
4.3.2	Identificación	66
4.4	MODELOS ANALITICOS DE CONDUCCION	69
4.4.1	Función de transferencia en z . Factores de respuesta	69
4.4.2	Respuesta armónica	71
4.5	OBTENCION DE MODELOS REDUCIDOS A PARTIR DE LA DES- CRIPCION GEOMETRICA Y LAS PROPIEDADES FISICAS	74
4.5.1	Descripción de los casos: ligero/medio/pesado	74
4.5.2	Descripción de las excitaciones de prueba	82
4.5.3	Selección del modelo	84
4.5.4	Selección de las frecuencias	86
4.5.5	Imposición del régimen permanente	86
4.5.6	Planteamiento del sistema	87
4.5.7	Resultados de la identificación	89
4.6	OBTENCION DE MODELOS REDUCIDOS A PARTIR DE LA FUN- CION DE TRANSFERENCIA	100
4.6.1	Excitación de prueba	100
4.6.2	Selección del modelo y frecuencias a imponer	101
4.6.3	Imposición del régimen permanente	102
4.6.4	Planteamiento del sistema	102
4.6.5	Resultados de la identificación	103
4.7	OBTENCION DE MODELOS REDUCIDOS A PARTIR DE DATOS EXPERIMENTALES	113
4.7.1	Muro considerado	114
4.7.2	Resultados de la experimentación	114
4.7.3	Obtención de la función de transferencia del sistema	116
4.7.4	Resultados de la identificación	118

5	APLICACION DEL METODO AL CASO BIDIMENSIONAL	122
5.1	INTRODUCCION	122
5.2	DEFINICION DEL PROBLEMA	123
5.3	METODO DE VARIABLES DE ESTADO. COEFICIENTES DE RESPUESTA	123
5.3.1	El modelo detallado	124
5.3.2	Función de transferencia en frecuencia	131
5.4	OBTENCION DE MODELOS SIMPLES A PARTIR DE LA DESCRIPCION GEOMETRICA Y LAS PROPIEDADES FISICAS	132
5.4.1	Descripción del caso	132
5.4.2	Descripción de las excitaciones de prueba	133
5.4.3	Selección del modelo	139
5.4.4	Imposición del régimen permanente	139
5.4.5	Planteamiento del sistema	139
5.4.6	Resultados de la identificación	140
6	CONCLUSIONES	147
6.1	CONCLUSIONES	147
6.2	DESARROLLO FUTURO	148
	ANEXO	149
A	OBTENCION DE MODELOS DE VARIABLES DE ESTADO	149
A.1	INTRODUCCION	149
A.2	MODELO DE VARIABLES DE ESTADO. EL PASO AL MODELO REGRESIVO	150
A.3	ELECCION DE LA BASE	153
A.4	FUNCION DE RESPUESTA EN FRECUENCIA. DEFINICION DE LA FUNCION OBJETIVO	155
A.5	IMPOSICION DEL REGIMEN PERMANENTE	157
A.6	ASPECTOS NUMERICOS.	158
A.6.1	El método de Marquardt	159
A.6.2	Cálculo del Jacobiano	161
A.6.3	Estimación inicial	164
A.7	CALCULO DEL FLUJO DE CALOR	167
A.8	RESULTADOS DE LA IDENTIFICACION	169
A.9	CONCLUSIONES	175
	REFERENCIAS	182

Lista de símbolos

Símbolo	Unidades	Descripción
a_i		Parámetros del modelo regresivo
A_i		Coefficiente i -ésimo de la respuesta temporal
b_i		Parámetros del modelo regresivo
C_1, C_2	$^{\circ}\text{C}$	Coefficientes de la respuesta frecuencial en flujo de calor
c_p	J/kgK	Calor específico
e	m	Espesor del muro
$e(t)$		Función de error
$E(\theta)$		Función objetivo
E_o		Mínimo de la función objetivo
$f(t)$		Función genérica del tiempo
		Función de ponderación
$g(t)$		Respuesta impulsional
G		Función de transferencia del sistema
G_m		Función de transferencia del modelo
$\hat{h}(t)$		Función muestreada
j		Unidad imaginaria
J		Función objetivo definida según un criterio cuadrático
k	$\text{W}/\text{m}^2\text{K}$	Conductividad térmica
M		Modelo
N		Número de valores muestreados
M, N		Índices de un modelo regresivo
q_e	W/m^2	Flujo de calor en la superficie exterior del muro

Símbolo	Unidades	Descripción
q_i	W/m^2	Flujo de calor en la superficie interior del muro
q_p	W/m^2	Flujo de calor una vez alcanzado el régimen permanente
Q	J/m^2	Transformada de $q(t)$
R	$m^2 K/W$	Resistencia térmica del muro
s		Parámetro de Laplace
t	s	Tiempo
t_i	s	Instante i-ésimo de tiempo
t_{in}	s	Instante inicial
t_o	s	Paso de tiempo de muestreo
t_p	s	Tiempo en alcanzarse el régimen permanente
$T, T(x, t)$	$K, ^\circ C$	Temperatura
T_{c_i}	C	Temperatura en el contorno i-ésimo
T_e	$^\circ C$	Temperatura en la superficie exterior del muro
T_i	$^\circ C$	Temperatura en la superficie interior del muro
T_o	$^\circ C$	Temperatura en el instante inicial
$u(t)$		Entrada de un sistema
U		Transformada de $u(t)$
	$W/m^2 K$	Coefficiente global de transferencia
v_i		Autovector i-ésimo
x	m	Coordenada espacial
x_1, x_2	m	Coordenadas que definen una capa
	$^\circ C$	Estados en nodos 1 y 2
x_{in}		Estado inicial
$x(t)$		Estado
$y(t)$		Salida de un sistema
$y_m(t)$		Salida de un modelo
z		Argumento de la transformada z
z	m^{-1}	Parámetro resultante de la integración en régimen periódico establecido
A_j, B_j, C_j, D_j		Elementos de la matriz de transferencia de la capa j-ésima

Símbolo	Unidades	Descripción
α	m^2/s	Difusividad térmica
α_i		Parámetros de un modelo de estado
β_i, β_{ij}		Parámetros de un modelo de estado
γ_i		Parámetros de un modelo de estado
$\delta(t)$		Función impulso
ε	m	Espesor efectivo
ε_{max}	W/m^2	Error máximo de simulación
ε_{acu}	W/m^2	Error de simulación acumulado
$\Delta(t)$		Secuencia de impulsos
$\Delta(w)$		Transformada de Fourier de una secuencia de impulsos
η		Función de observación
λ_i		Raíz i-ésima del polinomio característico
μ		Parámetro de Lagrange
ρ	kg/m^3	Densidad
τ_i	s	i-ésima constante de tiempo
ξ	l	
ω	s^{-1}	Pulsación (frecuencia)
ω_c		Máxima frecuencia contenida en un sistema
Θ		Vector de parámetros
Φ		Matriz de transición de estado
[A]		Matriz de transición de estados
[B]		Matriz de control
[C]		Matriz de observación
	J/m^3K	Matriz de capacidades térmicas
[E]	W/m^2K	Matriz de acoplamiento directo
[K]	W/m^3K	Matriz de conductancias térmicas entre nodos interiores
[L]	s^{-1}	Matriz de transición en la base modal
[P]		Matriz de cambio de base
[R]	W/m^3K	Matriz de conductancias entre nodos interiores y del contorno
[S]	W/m^2K	Matriz de observación
[W]		Matriz de pesos

Capítulo 1

INTRODUCCION

1.1 INTRODUCCION

La reducción del consumo energético es un objetivo prioritario a partir de las sucesivas crisis energéticas. El sector edificación no escapa a ese objetivo. Puede evaluarse del orden del 15% el consumo de energía en este sector siendo una parte importante la correspondiente a los sistemas de acondicionamiento.

Las actuaciones encaminadas a la reducción de ese consumo, compatibles con los niveles de confort, deben implementarse desde las primeras etapas del proyecto.

En la fase de diseño el objetivo es guiar la concepción energética del edificio. ¿Cuál es la mejor disposición geométrica de locales?, ¿y la mejor orientación?, ¿qué materiales serán los más apropiados desde el punto de vista térmico?. Cuestiones como éstas quedarían resueltas si se dispusiera de herramientas de análisis del comportamiento térmico de edificios. La incorporación de éstas, en las etapas iniciales de definición, permite realizar un diseño eficiente que garantiza una reducción de la demanda.

Por otra parte, el análisis térmico permite cuantificar el comportamiento del edificio estimando el consumo de energía. Así podría, por ejemplo, elegirse el sistema de acondicionamiento más idóneo en función de criterios de rentabilidad energética y económica, asignarse una etiqueta de calidad energética, como ya se hace en algunos países, o comprobar la adecuación de lo construido al proyecto original.

La cuestión que se plantea entonces es cómo evaluar el comportamiento térmico de un edificio. Disponer de modelos matemáticos, donde las variables de interés en el diseño térmico interaccionen simulando el comportamiento de un edificio, sería de utilidad inestimable. La ingeniería térmica se plantea, dentro de lo que se denomina modelización y simulación térmica de edificios, este objetivo.

La modelización de sistemas complejos, como son los edificios, requiere profundos conocimientos de los procesos de transferencia térmica que en ellos tienen lugar. Supuesto que se dispone de los conocimientos previos suficientes, si se aborda el problema con toda generalidad, los modelos de simulación térmica de edificios son singularmente complejos. Buscar un compromiso entre la fidelidad del modelo al sistema y la simplicidad de los modelos es un objetivo ineludible.

A partir de la revolución informática iniciada hace unos años, el esfuerzo por tener modelos simples quedó en segundo plano. Puede pensarse que dada la potencia de los medios informáticos a nuestro alcance, basta con introducir todo el conocimiento de que se disponga en el ordenador, que éste lo manipule de forma adecuada, y en pocos minutos habremos evaluado el comportamiento térmico de un edificio. La situación no es ésta. Un programa detallado de simulación térmica de edificios puede llevar del orden de 15 min en la simulación horaria de un mes para un edificio moderadamente complejo (10 zonas). Se comprende por tanto la utilidad de dedicar un esfuerzo previo a la obtención de modelos simples.

Por otro lado, la incorporación de este tipo de modelos en los programas de simulación de edificios, permite incluir elementos de modelización complicada (suelos, puentes térmicos, etc.) sin modificar la estructura del programa y aumentar el tiempo de ejecución.

Los métodos de obtención de modelos son muy variados dependiendo del sistema que se trate de simular y del objetivo del modelo. La tesis presenta una metodología de obtención de modelos simples, en principio no dependiente del sistema y de fácil implementación. Las aplicaciones se centrarán en elementos de particular interés en la modelización y simulación térmica de edificios.

1.2 REVISION BIBLIOGRAFICA

La modelización, desde un punto de vista general, está inmersa en la mayoría de las ramas de la ingeniería. Limitando el punto de vista a la modelización mediante métodos de identificación, aún se tiene un sujeto de estudio enormemente amplio. La definición de identificación se dará de forma precisa en el siguiente capítulo, baste por ahora decir que es una metodología de modelización basada en hacer coincidir las repuestas del modelo y el sistema ante determinadas entradas. Desde ese punto de vista, una revisión bibliográfica completa debería comenzar con los trabajos de Legendre en 1806 [1] y Gauss en 1809 [2], relativos a la determinación de las órbitas de los planetas y concluir con una presentación de las nuevas herramientas directamente relacionadas

con la inteligencia artificial, por ejemplo [3], orientadas a la obtención de modelos de sistemas industriales intentando reproducir el comportamiento del técnico en el proceso de identificación. Como puede verse esa revisión sería casi una historia de la ciencia y desborda el objetivo de la presente. Centrando el objetivo de la revisión bibliográfica: ésta se limita a presentar las aplicaciones relativas a la térmica de edificios.

En la aplicación de un método de identificación son necesarios desde un conocimiento lo más completo posible del sistema a identificar, hasta la utilización de herramientas generales de tratamiento de datos relacionadas con la estadística, teoría de comunicación, control, etc. Existen numerosos textos dedicados específicamente al tema de identificación y estimación de parámetros, tratados con generalidad e independientemente del sistema físico a que se aplique, por ejemplo [4], [5], [6], [7], y es objeto de continuas publicaciones (ver por ejemplo [8]).

En términos generales existen dos aproximaciones a un problema de identificación en térmica de edificios:

- 1) La aplicación de técnicas de automática y estadística desarrolladas con generalidad y que son aplicadas a un problema térmico concreto. Se dispone así de una metodología general que se aplica a un problema particular. En muchos casos carecen del suficiente conocimiento del problema térmico.
- 2) La procedente de equipos que trabajan en térmica y hacen uso de alguna de las técnicas desarrolladas por automáticos y estadísticos. Normalmente tienen un buen conocimiento del problema térmico pero desconocen las propiedades y posibilidades de los métodos de identificación empleados. Se plantea un problema particular y se recurre a una metodología que parece inicialmente apropiada para resolverlo.

Para estructurar esta revisión se ha seguido el criterio de agrupar las referencias por aplicaciones. Se analizará, por este orden, a la modelización de muros, células y edificios completos. A continuación se agrupan otras aplicaciones no incluidas en los anteriores apartados, extrayendo finalmente las conclusiones.

1.2.1 Identificación de modelos de muros

Los programas de simulación térmica de edificios se encuentran en un compromiso entre exactitud y rapidez de cálculo. Como no existe una solución analítica genérica

para el problema de conducción en régimen transitorio de un muro sometido a excitaciones cualesquiera, es necesario recurrir a técnicas numéricas y aproximadas que proporcionen la respuesta del muro (normalmente flujo de calor) a determinadas excitaciones (normalmente temperaturas en ambas caras del muro). En este apartado se realiza un primer análisis de la bibliografía relativa a identificación de modelos de muros, reservándose para el capítulo 4, donde se estudia específicamente la aplicación del método de identificación propuesto a muros, una revisión más profunda.

La literatura en el campo de la reducción de modelos de conducción en muros es extensa y no es fácil separar lo que es exclusivamente reducción de modelos de lo que es identificación. Puede decirse que históricamente la obtención de modelos simplificados del comportamiento térmico de muros en régimen transitorio se ha hecho desde la perspectiva de la reducción por vía analítica de modelos más complejos. La mayoría de esos trabajos son teóricos, es decir, se basan en una reducción matemática del comportamiento de muros y no hacen uso de datos experimentales. Sin embargo se relacionan en esta revisión porque constituyen el inicio del proceso de identificación descrito anteriormente y son un ejemplo de como un buen conocimiento del sistema físico que se trata de describir puede ayudar en el proceso de modelización.

Modelos no paramétricos

Proporcionan la respuesta del muro a excitaciones particulares. Se basan en considerar la linealidad e invarianza del sistema físico que representan. Su fundamento teórico se debe a Carslaw y Jaeger [9]. En Mitalas [10] puede encontrarse una aplicación a edificios.

Modelos paramétricos

Estrechamente relacionados con los modelos no paramétricos descritos anteriormente están los modelos de función de transferencia. Pueden encontrarse numerosos trabajos en el campo de la reducción de funciones de transferencia, desde diferentes aproximaciones: analíticas [11] o analíticas y experimentales [12].

Otra interesante aplicación de los métodos de identificación se encuentra en la obtención de modelos reducidos de variables de estado en su forma modal [13], [14], [15]. Se trata de una identificación en tanda de un modelo paramétrico, basándose en un criterio simple de mínimos cuadrados y utilizando un algoritmo de Marquardt para la minimización de una función objetivo no lineal en los parámetros. Estos primeros trabajos muestran que es posible representar el comportamiento de un muro con un modelo de variables de estado de orden reducido (2 ó 3) si bien el proceso de identificación es pesado, porque lo es el algoritmo de minimización, y exige una buena

estimación inicial de los parámetros. Aparecen problemas cuando se trata de representar muros pesados donde las frecuencias representativas para la excitación exterior e interior son muy diferentes.

Una original aproximación a la modelización de muros, en particular a la búsqueda de propiedades físicas de éstos, puede encontrarse en [16]. Se trata de la aplicación de métodos desarrollados para el tratamiento de señal a medidas reales de temperatura y flujos de calor a los que está sometida una pared. El estudio límite de las altas y bajas frecuencias permite obtener los parámetros de efusividad y resistencia térmica de la pared.

Finalmente reseñar el trabajo [17] donde se encuentra un método de determinación de un modelo regresivo temporal de comportamiento dinámico de muros.

1.2.2 Identificación de modelos de células

La modelización de células en ambiente real es una etapa intermedia entre el estudio de componentes aislados sometidos a condiciones ficticias de funcionamiento (en calorímetros por ejemplo) y los edificios sometidos a condiciones reales de funcionamiento.

En la mayoría de los casos el estudio de células se orienta a un doble objetivo. Por una parte se busca poner a punto metodologías de identificación que puedan ser extrapoladas a edificios. Por otra, se busca la caracterización de determinados componentes de manera que se tenga algún índice de comportamiento o parámetros que lo caractericen. En todos los casos se trata de reproducir la evolución de la temperatura interior de la célula cuando ésta está sometida a las excitaciones de temperatura exterior, radiación solar y en algunos casos a una fuente interna de calor.

En este campo de aplicación de los métodos de identificación se encuentran una variedad de modelos y métodos difícil de encontrar en cualquier otro. La investigación en la identificación de componentes solares pasivos montados en células ha sido, por otra parte, uno de los temas centrales de un esfuerzo investigador de la CCE en el campo de las energías alternativas. Muchas de las referencias citadas en esta revisión son trabajos desarrollados en ese marco.

Uno de los primeros artículos de identificación del comportamiento térmico de células sometidas a condiciones reales es [18], donde se aplica un método de mínimos cuadrados secuenciales a un modelo de estado simple. El error cuadrático medio obtenido en la reconstrucción de la temperatura es del orden de $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ incluso utilizando un tiempo de muestreo de 8 min. Un método posterior debido a Subbarao [19] propone

la utilización de 8 parámetros para la caracterización de una célula monozona. Este método tiene la ventaja de la fácil interpretación física de los parámetros en términos de amortiguamiento y desfase de la carga a variaciones de las temperaturas exterior e interior y radiación solar además de parámetros estáticos como coeficiente de pérdidas y apertura solar.

En [20] se comparan diferentes modelos de parámetros concentrados (8 y 9 parámetros) para diferentes células. El criterio utilizado es el de mínimos cuadrados aplicado a una secuencia de 12 días, obteniéndose una precisión en la estimación de la temperatura interior de $0,3\text{ }^{\circ}\text{C}$ de media y un error del 10 % en la estimación de la carga de calefacción. Se determinan igualmente en ese trabajo las funciones de transferencia de cada excitación.

Otra aproximación a la caracterización de componentes solares pasivos montados en células expuestas a condiciones meteorológicas reales es la presentada en [21] y [22]. Se identifica un modelo de variables de estado. La determinación de las propiedades estáticas de los componentes (coeficiente global de transferencia y apertura solar) se hace por diferencia entre los modelos en régimen permanente que representan el funcionamiento de dos células, una con el componente denominado adiabático y otra con el que se desea caracterizar. La identificación se lleva a cabo aplicando un método de mínimos cuadrados a datos reales. En [22] se presenta el problema de correlación de las excitaciones en el caso de una célula bizona aunque no se hace mención de la existente entre la temperatura exterior y la radiación. Esta última impide separar en el modelo la apertura solar y el coeficiente global de pérdidas.

Existen, por último, una serie de trabajos desarrollados en Ispra, que presentan un amplia variedad de modelos y métodos de identificación con un alto contenido teórico. Pueden encontrarse modelos de parámetros concentrados con métodos de identificación en banda aplicados en el campo de la frecuencia y en el tiempo ([23]) así como métodos de identificación en línea, en particular el filtro de Kalman extendido, aplicados a modelos de variables de estado ([24], [25] y [26]) y a modelos ARMAX grises ([26] y [27]). En estos trabajos se hacen además interesantes consideraciones acerca de la estabilidad de los modelos obtenidos, paso de tiempo de muestreo, longitud del periodo de muestreo, orden del modelo, etc. Al tratarse en muchos casos de métodos en línea, se trata el problema del seguimiento de la variación de los parámetros y el de la detección de fallos de sensores (por ejemplo en [24]).

1.2.3 Identificación de modelos de edificios

El interés por los modelos de comportamiento térmico de edificios ha estado presente desde tiempo atrás. La aplicación de éstos puede ser muy diferente:

- 1) Proporcionar datos de diseño para edificios, por ejemplo al relacionarse el peso de la estructura con los factores de respuesta: [28] y [29].
- 2) Disponer de modelos de predicción de la carga para sistemas que lo requieran, por ejemplo cuando es necesario almacenar previamente energía para combatir la carga futura: [30].
- 3) Catalogación de edificios en trabajos relacionados con normativa y calidad en la edificación: [31].
- 4) Control de los sistemas de climatización: [32] y [33].
- 5) Otras aplicaciones: [34], [35], [36], [37], [38], [39] y [40].

Pueden encontrarse revisiones de métodos de estimación de parámetros que caracterizan edificios en [41] y [42]. En éstos se relacionan los diferentes modelos que pueden describir el comportamiento dinámico de un edificio y se llega a una aplicación sencilla de una habitación en [42] y un edificio de oficinas en [41]. Los resultados para el caso más complejo son poco prometedores debido a la dificultad insuperable de medir todas las excitaciones que actúan, por ejemplo infiltraciones o consumos reales de los sistemas de climatización.

En principio los resultados de identificación aplicados a edificios deben analizarse con cautela debido a los problemas específicos que dificultan el proceso de identificación, en particular:

- 1) Incertidumbre acerca de determinadas excitaciones como temperatura de cielo, influencia de la velocidad de viento, consumos reales, etc.
- 2) Correlación entre excitaciones, en particular entre la temperatura exterior y la radiación solar y entre la temperatura interior o exterior y la energía auxiliar de

apoyo cuando existe un control basado en alguna de aquellas.

- 3) Influencia de ocupantes si existen y ventilación mecánica controlada que provocan la aparición de comportamientos no lineales y efectos difíciles de cuantificar.
- 4) Validez de los modelos seleccionados. Debido a la complejidad de los fenómenos que intervienen, los modelos simples no pueden tener validez en rangos suficientemente amplios. Es necesario acotar la validez de los modelos y tener clara su utilidad final.

A pesar de los inconvenientes precedentes se han obtenido aplicaciones exitosas en casos reales, véase por ejemplo [30], donde mediante una identificación en línea se predice la energía a acumular para satisfacer la demanda de frío.

Los tipos de modelos utilizados van desde los más simples que son una extensión de los tradicionales obtenidos en régimen permanente, con el coeficiente global de pérdidas y la apertura solar, al que se le añaden parámetros que caracterizan la dinámica del edificio, por ejemplo una o varias constantes de tiempo y una tasa de recuperación de energía auxiliar ([31]), hasta los más complejos de variables de estado ([32], [33], [38], [39] y [40]). Entre esos dos grupos se encuentran los modelos de tipo regresivo obtenidos a partir de una función de transferencia de un modelo de parámetros concentrados ([34] y [35]) o basados en reducción de funciones de transferencia más complejas ([28] y [29]). Se identifican modelos regresivos de caja negra o gris en [30], [36] y [37]. Es interesante el artículo [36] donde se aplican técnicas estadísticas (test F y t) para determinar el orden óptimo del modelo, estudiando si es o no significativa la reducción del error cuando se añade una nueva variable independiente así como el efecto en las otras variables que ya estaban incluidas en el modelo cuando se añade una nueva.

En cuanto a los métodos de estimación empleados suelen ser de mínimos cuadrados en alguna de sus variantes : recursivos o no, con pesos relativos para aplicación de factor de olvido o ventana de observación, etc ([29], [30], [32], [33], [35], [36], [38], [39] y [40]). Se encuentran igualmente aplicaciones del filtro de Kalman ([31] y [37]).

1.2.4 Otras aplicaciones

Siempre que se trate de ajustar un comportamiento experimental a un modelo matemático puede hablarse de identificación. Sería imposible entonces citar la enorme cantidad

de trabajos en esta dirección. Algunos trabajos significativos se citan a continuación:

En colectores solares de agua caliente existen entre otros [43] y [44], donde se ajustan modelos dinámicos de variables de estado o ARMA. En [44] se aplica el test F para determinar el orden del modelo.

Otra aplicación a colectores solares puede encontrarse en [45], donde se identifica un modelo de parámetros concentrados mediante un criterio de minimización del error cuadrático medio de la potencia obtenida por el colector ponderada por los errores de medida.

Finalmente reseñar otras aplicaciones a intercambiadores de calor ([46]).

1.2.5 Conclusiones

Después de esta revisión debería poder responderse la cuestión de dónde están los métodos de identificación aplicados a térmica de edificios y hacia dónde se dirigen. La respuesta sin embargo no es fácil.

Una buena referencia de las direcciones en que se trabaja en identificación, desde un punto de vista general, aparece en el número especial de la revista Automática de enero de 1990 ([8]) dedicada monográficamente a identificación. Ahí se constata como los avances conseguidos en la investigación de nuevos métodos, aplicaciones, etc., hacen difícil una visión coherente. En términos generales existen las siguientes líneas:

- 1) Diferentes aproximaciones a la identificación de sistemas, por ejemplo, la identificación en línea de sistemas continuos, sistemas que varían con el tiempo (adaptación y seguimiento), etc.
- 2) Profundización en el conocimiento de métodos de identificación ya existentes: distribución de errores en estimadores de mínimos cuadrados, test de la función de covarianza, etc.
- 3) Diseño de herramientas para la identificación de sistemas que sean de validez general. Están en estrecha relación con los sistemas expertos y pretenden eliminar lo que de heurístico tiene la identificación.

4) Aplicaciones nuevas de métodos ya desarrollados.

En relación con la identificación de sistemas térmicos habría que señalar:

- 1) La primera dificultad de la identificación aplicada a los sistemas térmicos referidos surge en la selección del modelo. Se trata en la mayoría de los casos de modelos de orden no finito que quieren aproximarse mediante modelos de orden reducido. Se entiende que para que esto sea válido es necesario limitar la validez de los modelos reducidos obtenidos e interpretar con cautela los resultados de estos modelos cuando son utilizados fuera de los rangos para los que han sido obtenidos.
- 2) Puede señalarse una dificultad adicional en los casos en que se utilizan datos medidos para la identificación. Existe una correlación entre algunas de las excitaciones que impide determinar los parámetros del modelo. Por otro lado, en muchos casos es materialmente imposible registrar todos los datos necesarios.
- 3) Por todo lo anterior se considera que la identificación de modelos del comportamiento térmico de edificios debe contemplarse con escepticismo en cuanto a su validez general. No ocurre lo mismo con otros sistemas térmicos bien definidos como son muros o sistemas activos de climatización, en los cuales se tiene menor incertidumbre en los modelos y las excitaciones.

Los métodos de identificación carecen hasta ahora de la suficiente solidez como para hacer de ésta una metodología generalmente aceptada. Son necesarios trabajos encaminados a la definición de uno o varios métodos, tan generales como sea posible, adaptados a los problemas de térmica de edificios.

En la tesis se propone y aplica un método de identificación a la obtención de modelos de conducción unidimensional y bidimensional en muros. La extensión del método a otras aplicaciones es en principio inmediata salvo en la elección del modelo.

1.3 CONTENIDO

El objetivo de la presente tesis es la proposición de un método de identificación en el dominio de la frecuencia de aplicación suficientemente general, que represente un equilibrio entre exactitud del modelo obtenido, esfuerzo para su obtención y simplicidad.

La tesis se estructura en dos partes. En la primera, constituida por los capítulos 2 y 3, se aborda el problema de la modelización de sistemas desde un punto de vista general. Se plantean las posibles vías de obtención de modelos, haciendo especial mención del método de identificación. Dentro de esta primera parte, el capítulo 3 propone un método de identificación particularmente adaptado al estudio dinámico de edificios.

La segunda parte la constituyen ejemplos de aplicación de la metodología expuesta en capítulos anteriores. En particular, se estudia el caso de conducción unidimensional y bidimensional en elementos de edificación. Debe entenderse que la presentación de sólo estos dos ejemplos de aplicación no agota las posibilidades del método. Es decir, la metodología que se presenta en el capítulo 3 es suficientemente potente para ser aplicada a otros muchos casos que aparecen en la modelización dinámica tanto del edificio como de los sistemas que contiene.

El anexo que contiene la tesis es de especial importancia. En él se estudia la aplicación del método de identificación propuesto a modelos de variables de estado, se analizan los inconvenientes de esta aplicación y se muestran los resultados. Se ha querido separar del grueso de la tesis porque el interés del método es fundamentalmente la identificación de modelos regresivos, aunque el estudio de modelos de variables de estado tiene enorme interés desde el punto de vista metodológico.

Capítulo 2

SISTEMAS. MODELOS. MODELIZACION

2.1 INTRODUCCION

Vivimos rodeados de situaciones cambiantes. El tiempo, como dimensión, hace que la realidad aparezca de forma diferente. En muchos casos estamos interesados en conocer el porqué del funcionamiento de una determinada parte de la realidad existente: se trataría de un problema de análisis. En otros casos, esta realidad no existe pero nos interesaría saber como actuaría en función de determinados parámetros si existiera: sería un problema de diseño.

En todas las ramas de la ingeniería la modelización, tanto en la situación de análisis de un sistema existente, como en el diseño de sistemas que van a ser construidos juega un importante papel. En esta primera parte se trata de formalizar en un marco, amplio, conceptos que se manejan habitualmente en la ingeniería y a los que se hará referencia posteriormente como son: sistema, modelo y modelización.

Para establecer las bases del método de identificación se seguirá una metodología deductiva, de lo general a lo particular. En primer lugar se define que se entiende por sistema. A continuación se analiza cómo puede representarse la evolución de los sistemas: es el concepto de modelo. Finalmente se plantean las posibles vías de obtención de modelos. Con esto se sientan las bases que permiten entender, dentro del proceso de modelización, dónde se sitúa la metodología y las aplicaciones que contiene la tesis en capítulos posteriores.

Los conceptos que aquí serán definidos son entendidos a partir de su utilización, analizando situaciones concretas. En todo caso, el texto de Delaney y Vaccari [47] es una buena referencia para profundizar en ellos.

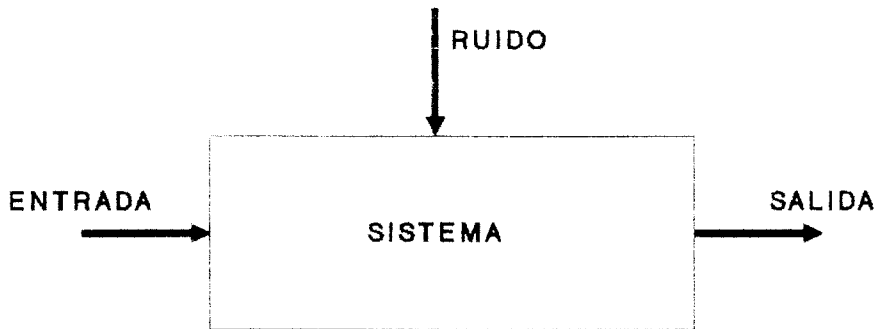


Figura 2.1: Representación de un sistema.

2.2 SISTEMAS

Un sistema es una parte de la realidad, que puede ser distinguida del resto. El resto que no es sistema se denomina ambiente. En un sistema, diferentes variables interactúan produciendo señales observables. Las señales observables que son de interés se denominan salidas. La figura 2.1 representa el concepto de sistema.

Las señales que interactúan en un sistema pueden ser de dos tipos: entradas y ruidos. Si pueden ser manipuladas por el experimentador se denominan entradas. En otro caso se denominan ruidos. A su vez los ruidos pueden ser medibles o no. En este último caso su efecto es sólo apreciado por su influencia en la salida.

El ambiente influye en el sistema pero no al revés. La definición de sistema y ambiente es arbitraria, depende del objetivo del estudio del sistema. Es generalmente posible la descomposición de un sistema en subsistemas y así sucesivamente, aplicando un principio de jerarquización. Es quien modeliza el que decide qué nivel de detalle requiere y por lo tanto dónde fija la frontera sistema-ambiente.

En general los sistemas evolucionan con el tiempo: las entradas, salidas y ruidos son función del tiempo. Se habla entonces de sistemas dinámicos.

En la evolución de un sistema pueden considerarse, según las definiciones previas,

causas (entradas y ruidos) y efectos (salida). Esta evolución dependerá lógicamente del sistema, de su situación en el momento en que actúan las entradas y ruidos. En términos precisos, la salida en un instante determinado depende, no sólo de las entradas y ruidos sino también del estado del sistema. El estado de un sistema resume la evolución de éste, de manera que conociendo las causas y el estado es posible conocer los efectos.

Un ejemplo concretará los conceptos que han ido apareciendo. Supongamos un edificio, situado en un clima caluroso, por ejemplo Sevilla, en un mes de verano. Para su climatización se ha pensado en la instalación de un sistema tradicional de plantas frigoríficas condensadas por agua de torre. Para disminuir la punta de producción frigorífica y aprovechar la tarifa nocturna que ofrece la compañía eléctrica se ha proyectado un sistema de acumulación de frío basado en unos tanques donde se almacena hielo en las horas de baja demanda de frío por parte del edificio. El interés se centra en conocer el funcionamiento del sistema de producción de frío: ¿cuál será su consumo?, ¿qué capacidad deben tener las plantas, tanques, intercambiadores?, etc.

Para nosotros el sistema está constituido por los equipos que producen, almacenan, transportan y distribuyen el frío. Como quedó dicho la frontera es arbitraria. Por ejemplo, puesto que la demanda del edificio va a condicionar el consumo de energía de nuestro sistema, ¿deberá incluirse cada elemento de la epidermis edificatoria, junto con las condiciones de ocupación en el sistema?. En principio no. Se supone entonces que la curva de carga del edificio viene dada y que si bien el sistema está influenciado por ésta, no le afecta.

Continuando con nuestro ejemplo, las entradas serán todas aquellas variables que puedan ser arbitrariamente cambiadas. Esto es, deben considerarse como entradas los caudales y/o las temperaturas de fluido frío en el primario del circuito de producción de frío, el caudal de agua del circuito de condensación, etc. Las variables que pueden ser medidas pero sobre las que no puede actuarse son, en este caso, las variables meteorológicas (temperatura y humedad), temperatura y/o caudal en las unidades terminales, temperaturas en los locales (curva de carga del edificio), etc. Los ruidos no medidos serán, en general, aquellos que se consideran de pequeña influencia en el sistema estudiado: incertidumbre de los equipos de medida, velocidad de viento, etc.

Supongamos ahora que estamos en horas en las que el edificio no demanda frío, por ejemplo por la noche. Preveiendo el que pueda necesitarse en la siguiente jornada, las plantas de producción de frío comienzan a producir agua glicolada a -4°C y en los tanques de acumulación el agua empieza primero a enfriarse y posteriormente a formarse hielo. Si queremos saber en que situación estarán los tanques tras la primera hora de funcionamiento de las plantas será necesario saber en qué condiciones estaba al inicio.

Es decir, el estado del sistema.

Conceptualmente existe una distinción clara entre sistema y modelo. Sin embargo es habitual asignar propiedades de los sistemas a los modelos y al revés. Esta situación es consecuencia natural de la definición de modelo. Conceptos como linealidad, invarianza y causalidad, entre otros, que serán utilizados con profusión a lo largo de la tesis, son definidos en el apartado relativo a modelos aunque son de aplicación al sistema que representan.

2.3 MODELOS

2.3.1 Definición

Un modelo es una representación de un sistema. Como tal puede ser muy variada: prototipos, reproducciones a escala, representaciones gráficas, ábacos, representaciones simbólicas, etc.

El modelo debe proporcionar una representación útil del sistema. Es decir, un modelo puede ser interesante, aunque no responda a la realidad del sistema, siempre que sea útil (positivismo).

2.3.2 Objetivos de un modelo

La utilidad de un modelo se mide por el cumplimiento de los objetivos para los que estaba creado. En ingeniería estos son básicamente de tres tipos:

a) Investigación:

El modelo en este caso, aclara la relación entre diversas variables observadas. El objetivo es la comprensión de las relaciones entre las diferentes variables que intervienen en el sistema. Este tipo de aplicaciones aparece en las ramas que abordan nuevos problemas y uno de los fines de los modelos obtenidos es proporcionar elementos que guíen una ulterior experimentación. Un caso típico podría ser el desarrollo de nuevos equipos o sistemas, por ejemplo, los sistemas para acondicionamiento de espacios abiertos ([48]).

b) Diseño:

Disponer de modelos del comportamiento dinámico de un sistema es una potente herramienta de diseño. En el ejemplo del sistema de acumulación y considerando

esta vez como sistema al edificio, si se conoce la demanda en función del tiempo es posible el dimensionamiento de los equipos que deben hacer frente a esta demanda. Además podría conocerse el consumo energético de todo el sistema si se dispusiera de un modelo del edificio y de los equipos que constituyen el sistema de refrigeración. El programa S3PAS ([49]) es un ejemplo de modelo de simulación de edificios que puede utilizarse con el objetivo de diseñar el sistema de climatización.

En general, cualquier problema de dimensionamiento puede ser abordado si se dispone de un modelo donde los parámetros a determinar influyan en una variable de salida adecuada. Por ejemplo es posible calcular el espesor de aislante de un conducto si se dispone de un modelo que dé la caída de temperatura del aire en función de ese espesor.

c) Control:

Cuando el sistema ha sido construido y quiere saberse la forma de actuar para conseguir ciertos valores de consigna, es imprescindible disponer de un modelo del comportamiento del sistema. Para el caso tomado como ejemplo, sería de gran interés un modelo de previsión de la demanda de refrigeración que nos predijera que necesidades de frío tendrá el edificio al día siguiente. De esta forma puede almacenarse sólo esa energía y ahorrarnos las pérdidas consiguientes a la producción y almacenamiento de energía en exceso. El trabajo de MacArthur y otros [30] es un ejemplo de un modelo de este tipo.

Un modelo que en tiempo real sea capaz de predecir la evolución del sistema es además útil en la detección de fallos de instalaciones. Cuando en un modelo suficientemente contrastado la salida se aparte de la del sistema, puede pensarse que han habido cambios en el comportamiento del sistema, posiblemente debidos a fallos.

Modelos obtenidos a partir de los datos experimentales del sistema real serían de enorme interés en la evaluación de la calidad térmica de edificios. Actualmente no existen métodos capaces de estudiar, una vez construido el edificio, si éste lo ha sido de acuerdo al proyecto o si no han habido defectos de construcción que provoquen un comportamiento del edificio diferente al predicho en la fase de diseño.

2.3.3 Tipos de modelos

A partir de la definición de modelo es fácil imaginar la existencia de gran variedad de modelos. Incluso un silogismo puede considerarse un modelo. En la clasificación que se presenta a continuación sólo se han tenido en cuenta los modelos matemáticos: aquellos que representan el sistema mediante relaciones de variables matemáticas. Los gráficos y tablas pueden ser incluidos en este grupo.

Los criterios de clasificación son de diferentes tipos. La metodología de obtención de los modelos determina igualmente una clasificación que será presentada en el siguiente apartado dedicado a la obtención de modelos. En Delaney y Vaccari [47] o en Soderstrom y Stoica [7] pueden encontrarse completas clasificaciones de modelos. La que a continuación aparece es una síntesis de ambas:

- 1) **Dinámicos-estáticos:** un modelo es dinámico si las variables evolucionan con el tiempo. En otro caso es estático. Un modelo dinámico puede proporcionar una salida que no cambia con el tiempo bajo ciertas condiciones. Es el régimen permanente. Los modelos en que se centra esta tesis son dinámicos.
- 2) **Monovariante-multivariante:** si el modelo describe la relación de una variable de salida en función de una sola variable de entrada este es monovariante. Si esto no sucede el modelo es multivariante. En las aplicaciones que se presentan en la tesis se obtendrán fundamentalmente modelos monovariantes (SISO en la terminología de [7]) aunque el método de identificación podría aplicarse a la obtención de modelos de varias variables de entrada y una sola salida (MISO en [7]).
- 3) **Paramétricos-no paramétricos:** un modelo paramétrico representa una clase de modelo determinada. En cada caso concreto es necesario asignar valores a los parámetros para tener el modelo. En uno no paramétrico, no aparecen los parámetros y por lo tanto son sólo válidos para una situación particular. Un gráfico sería un ejemplo de modelo no paramétrico mientras que la ecuación de conducción de Fourier lo es de modelo paramétrico. En la tesis los modelos obtenidos son paramétricos.
- 4) **Descripción interna-externa:** en los modelos de descripción interna, también denominados de variables de estado, la salida del modelo en un instante de tiempo t se calcula a partir de un conjunto de variables que resumen la historia del sistema hasta ese instante. Existen por lo tanto, un conjunto de variables $x(t)$ denominadas estados que cumplen la ecuación de transición:

$$x(t) = \Phi(t, t_{in}, x_{in}, u(\cdot)) \quad (2.1)$$

donde $u(\cdot)$ es la entrada del sistema hasta el instante t y el subíndice in hace referencia al instante inicial.

Una vez conocido el estado, la salida $y(t)$ puede calcularse mediante la ecuación de observación, que tiene la forma:

$$y(t) = \eta(t, x(t)) \quad (2.2)$$

Si se sustituye la ecuación 2.1 en 2.2 puede llegarse a una relación del tipo:

$$y(t) = \eta(t, t_{in}, x_{in}, u(\cdot)) \quad (2.3)$$

Este sería un modelo de descripción externa o de entrada-salida.

El método de identificación que se propone en la tesis es válido tanto para modelos de descripción interna como externa. Sin embargo se mostrará como los resultados obtenidos y la mecánica de aplicación son mejores cuando se trata de identificar modelos de descripción externa.

- 5) **Parámetros concentrados-distribuidos:** los modelos de parámetros concentrados se presentan como un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias o en diferencias. Los modelos de parámetros distribuidos se presentan como ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. En los modelos de parámetros concentrados la variable espacial aparece en forma de variable dependiente continua o discreta o bien no aparece. Los modelos que se identifican en la tesis son de parámetros concentrados en los que no aparece la variable espacial.
- 6) **Invariantes-variantes con el tiempo:** modelos invariantes son aquellos que no dependen del tiempo. En el caso de un modelo paramétrico sería aquel en el que los parámetros no dependen del tiempo. Se obtendrán en la tesis modelos

invariantes.

- 7) **Lineales-no lineales:** en los modelos lineales la relación entre la salida y la entrada es lineal. Es aplicable en consecuencia el principio de superposición. No debe confundirse este concepto con el de linealidad en los parámetros que será definido en el apartado dedicado a identificación. La tesis se centra en modelos lineales.
- 8) **Estocásticos-deterministas:** en los modelos deterministas la salida puede ser calculada una vez conocida la entrada. En cambio, los modelos estocásticos contiene términos aleatorios que hacen imposible determinar de forma exacta la salida. Si los términos aleatorios aparecen en la entrada, por ejemplo cuando éstas vienen dadas en términos de una función de probabilidad, los modelos se denominan de función de probabilidad mientras que en otro caso se denominan observables. Todos los modelos que aparecen en la tesis son deterministas.

La distinción entre modelos deterministas y estocásticos es en el fondo artificial. Proviene del conocimiento que se tenga del sistema. En la realidad todos los sistemas son deterministas: se comportan, bajo las mismas condiciones de la misma forma. Lo que ocurre es que el conocimiento que tenemos del sistema es incompleto, o bien no es interesante tener todas las variables en consideración. En la actualidad, la modelización de fenómenos complicados, tiende a la consideración de modelos estocásticos. Por ejemplo las predicciones meteorológicas, la modelización del comportamiento humano, etc, se hacen a partir de este tipo de modelos.

- 9) **Continuos-discretos:** En los modelos continuos, el tiempo puede tomar cualquier valor dentro de un cierto intervalo, mientras que en los modelos discretos sólo le está permitido tomar ciertos valores, usualmente separados una cantidad constante.

Los sistemas reales son todos continuos, no existen las discontinuidades en la naturaleza, los cambios se suceden siempre a intervalos infinitesimales de tiempo, aunque su representación puede ser continua o no serlo. Existen sistemas cuya representación natural es discreta. Imaginemos por ejemplo una cola que avanza cuando la persona que ha llegado a la ventanilla ha completado sus gestiones. Es una cuestión de la escala de tiempo tomada y de las variables de salida que sean de nuestro interés. En esta tesis se propondrán modelos discretos de representación externa y continuos de representación interna aunque los sistemas que

se mostrarán como ejemplos tienen una evolución continua.

- 10) **En el dominio temporal-frecuencial:** la variable natural que representa la evolución de la realidad es el tiempo. Se tendrían entonces modelos en el dominio del tiempo. Una ecuación diferencial o en diferencias son ejemplos de este tipo de modelos. Sin embargo, a veces, es más útil una representación en el dominio de la frecuencia, obtenida a través de una transformación de las ecuaciones en el dominio del tiempo o directamente. Los diagramas de Bode y Nyquist o la respuesta armónica son ejemplos de modelos en el dominio de la frecuencia. La tesis obtendrá modelos en el dominio del tiempo pero el procedimiento de llegar a ellos se basa en una transformación al dominio de la frecuencia.

La tabla 1.1 resume los tipos de modelos en función de los criterios de clasificación considerados.

2.4 MODELIZACION

Es necesario hacer una precisión previa: el término modelización no tiene una acepción universal. Aquí será entendido como la metodología mediante la cual se obtienen los modelos. La modelización abarca entonces lo que en inglés se denomina "model building" pero además otras técnicas como la estimación de parámetros.

Puede encontrarse en otros trabajos la modelización como opuesta a la identificación, asimilándose entonces al término "model building". La modelización sería una forma directa de obtener modelos a partir de las ecuaciones fenomenológicas que rigen el comportamiento del sistema mientras que la identificación sería una metodología indirecta.

En lo sucesivo se centrará la tesis en modelos matemáticos.

2.4.1 Principios de modelización

La actividad de modelización no posee reglas universales. Cada sistema posee sus propias particularidades que hacen que una determinada metodología de obtención de modelos, útil para un sistema, no tenga porqué serlo para otro. Existen, sin embargo, principios básicos que deben ser tenidos en cuenta cualquiera que sea la vía de modelización elegida. Algunos de estos principios son los siguientes:

CRITERIO DE CLASIFICACION	TIPO DE MODELO
Dependencia del tiempo	Estáticos Dinámicos
Número de variables de entrada y salida	Monovariantes Multivariantes
Existencia de parámetros	Paramétricos No paramétricos
Existencia de variables de estado	De representación interna (de variables de estado) De representación externa (entrada-salida)
Dependencia espacial	Parámetros concentrados Parámetros distribuidos
Variación temporal de los parámetros	Invariantes Variantes
Aplicación del principio de superposición	Lineal No lineal
Existencia de variables aleatorias	Deterministas Estocásticos
Valores de la variable tiempo	Continuos Discretos
Dependencia de la salida	Dominio temporal Dominio frecuencial

Tabla 2.1: Tipos de modelos en función de los criterios considerados.

1) Invarianza:

Ya fue definido un sistema como algo que podía ser distinguido del resto. Lo que caracteriza a un sistema es la relación entre las variables que en él interaccionan. El modelo deberá recoger por lo tanto las invarianzas que existen en el sistema ante diferentes condiciones de observación.

2) Causalidad:

En los sistemas conocidos existe siempre una relación causa-efecto de manera que las causas preceden a los efectos. La variable dependiente $y(t)$ de un modelo dependerá de las entradas $u(t')$ siendo $t' \leq t$. En los modelos que se presentan posteriormente se considera como caso límite $t' = t$ para mejorar la repuesta del modelo.

3) Simplicidad:

Un modelo debe cumplir el principio que puede denominarse de "parsimonia-sidad", cuyo enunciado, basado en el sentido común, diría: "no usar parámetros adicionales para describir el comportamiento dinámico de un sistema si no son necesarios". Una justificación teórica de este principio puede encontrarse en [7]. En todo caso, es lógico pensar que si un modelo contiene muchos parámetros puede asaltarnos la duda de si el ajuste de la salida del sistema se consigue gracias a las posibilidades de ajuste de los numerosos parámetros del modelo, en vez de por que se ha captado lo esencial del funcionamiento del sistema, como ocurriría si el número de parámetros fuera mínimo. El problema es muchas veces saber cuál es el menor número de parámetros y cuáles, para representar correctamente un determinado sistema.

4) Resolubilidad:

Tanto si se trata de un modelo de variables de estado como de descripción externa, debe ser posible expresar los estados o/y la salida en función del tiempo. De poco sirve un modelo en el que la salida no pueda ser obtenida.

En este apartado se han recogido los principios que afectan de forma más directa a los modelos que van a ser obtenidos posteriormente, otros principios como localidad, idealización, abstracción, jerarquía, analogía o iteración pueden encontrarse en [47].

2.4.2 Modelización física y reducción

Los sistemas físicos que trata la ingeniería se manifiestan a través de variables físicas observables. La observación y la experimentación son las bases de toda modelización. En la experimentación se tiene posibilidad de actuar sobre el sistema controlando todas o algunas de las variables de entrada y el ambiente que rodea al sistema, mientras que en la observación se actúa de forma pasiva limitándose a registrar el comportamiento del sistema ante señales que no son controladas, pero sí observadas.

Supongamos que de un sistema se tiene el suficiente conocimiento previo de las leyes físicas que lo rigen y las propiedades que intervienen en esas leyes. Planteando, para cada subsistema, las leyes que lo gobiernan se tendrá un conjunto de ecuaciones, en general en derivadas parciales, que definen el comportamiento del sistema ante determinadas entradas (condiciones iniciales y de contorno). La figura 2.2 recoge esquemáticamente los conceptos fundamentales que intervienen en la modelización.

Consideremos el ejemplo del sistema de acumulación. Inicialmente el agua está a una temperatura T_0 en forma líquida. En ese momento empieza a entrar agua glicolada del circuito de las plantas frigoríficas por el serpentín. Antes de la formación de hielo podrá plantearse la siguiente ecuación:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \dot{m} c_{p,a-g} (T_e - T_s) \quad (2.4)$$

obtenida de un balance de energía en el depósito. Si se conocen las propiedades de densidad (ρ), calores específicos del agua y del agua glicolada (c_p y $c_{p,a-g}$ respectivamente) y el caudal de agua glicolada por el serpentín (\dot{m}) podrá determinarse la evolución de la temperatura del tanque cuando se dan las temperaturas de entrada y salida del agua glicolada en el serpentín (T_e y T_s respectivamente).

Este modelo simple está basado en un ley física como es el primer principio de la termodinámica. Sólo ha sido necesario el conocimiento de las propiedades termofísicas de los fluidos y las condiciones de ambiente. Una modelización de este tipo se denomina modelización física y el modelo obtenido de conocimiento.

La calidad de un modelo como éste se basa fundamentalmente en la validez de las hipótesis de partida y en el buen conocimiento de las propiedades que intervienen. Por ejemplo, el despreñar las pérdidas del depósito: ¿es lícito?, ¿no es necesario incluir un término de pérdidas por convección?. O bien: ¿realmente conocemos los calores específicos de los fluidos y su densidad?, ¿variarán con la temperatura?.

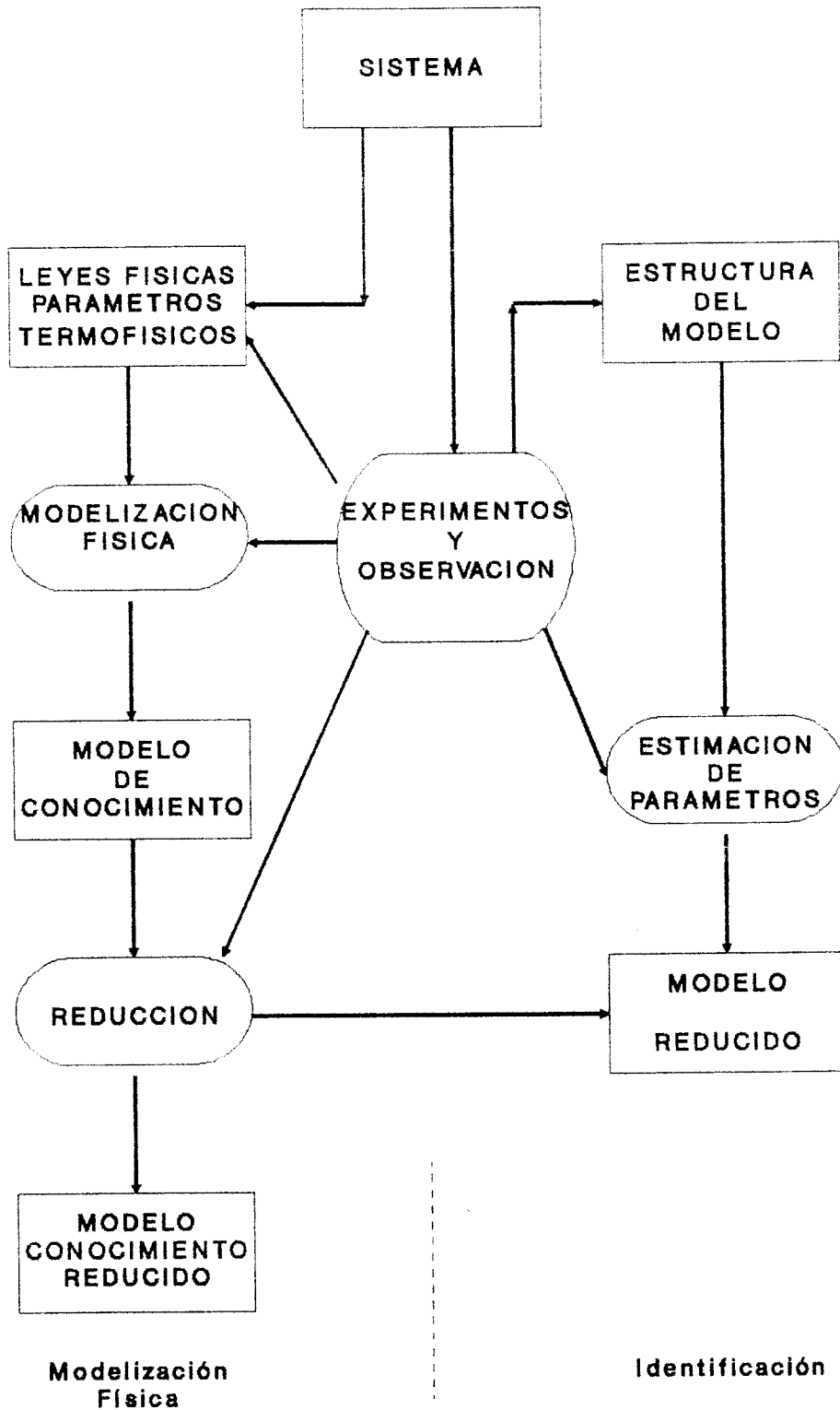


Figura 2.2: Modelización física e identificación.

Como se ve, en modelos que no están suficientemente contrastados (no el caso de éste) es necesario recurrir a la validación del modelo con los datos procedentes del sistema. En muchos casos esta labor es posible pero en otros se hace muy difícil. Pensemos, por ejemplo, en un edificio: no es en la práctica posible la medición de las propiedades termofísicas de todos y cada uno de los elementos que constituyen el edificio. Esto sin hacer mención de las condiciones de operación sobre las que existen todavía más incertidumbres.

Por otro lado, los modelos obtenidos mediante modelización física suelen ser de alta complejidad. Si pensamos en una pequeña habitación de la que quiere hacerse el cálculo de cargas, habría que plantear la ecuación de Fourier en cada paramento, sometida a condiciones de contorno de convección con el aire interior y exterior, radiación de larga longitud de onda con las otras superficies tanto interiores como exteriores además de la radiación de corta longitud de onda directa y reflejada procedente del sol y las fuentes internas, todas ellas variables en el tiempo. Se entiende que el esfuerzo de plantear un sistema así sólo es compensado en un número limitado de situaciones. El uso de modelos detallados se limita a esas situaciones (normalmente programas de investigación) siendo necesarios modelos simples de mayor aplicabilidad a cambio de una menor precisión y rango de validez. La vía para la obtención de modelos simples, a partir del modelo de comportamiento obtenido mediante modelización física, es la reducción.

En principio los métodos de reducción de modelos son numerosos. La primera posibilidad es hacer uso de los conocimientos que se tengan acerca del sistema para obtener soluciones particulares con un rango de validez suficientemente amplio. Sería el caso típico de los modelos asintóticos estudiados en mecánica de fluidos para situaciones particulares (tiempos o dimensiones características muy pequeñas o grandes, importancia relativa de términos en las ecuaciones muy diferente, etc) o la descomposición del balance radiante en la superficie de un paramento en función de la longitud de onda de la radiación. En casos como éstos se habla de reducción física.

Por otro lado existe la posibilidad de una reducción matemática del modelo detallado. Estos métodos son más generales que los anteriores y se presentan bajo muy diferentes formas, siendo de amplia utilización en la automática. La tesis de Michalesco [50] presenta una buena revisión de métodos matemáticos de reducción.

Un primer grupo de métodos está basado en tomar un desarrollo limitado de la función de transferencia. Si el sistema está expresado en la base modal puede hacerse una descomposición en modos dominantes (inestables y rápidos) y modos lentos. La aproximación consiste en tomar sólo los modos dominantes. Este método es un caso particular de agregación lineal de los modos. A este primer grupo de métodos de desarrollo limitado pertenecen igualmente las aproximaciones de Padé y sus variantes que

se basan en desarrollar en serie de Taylor la función de transferencia y retener sólo un número reducido de términos. Los métodos basados en desarrollos limitados no son capaces de cuantificar el error cometido en el procedimiento de reducción.

Para cuantificar el error al reducir el modelo aparecen los métodos basados en la minimización de un criterio de error. En el caso de un criterio cuadrático y para una función monovariante, éste se define en la forma:

$$J = \int_0^{\infty} f(t) \|y(t)_{m.detallado} - y(t)_{m.reducido}\|^2 dt \quad (2.5)$$

donde $f(t)$ es una función de ponderación.

2.4.3 Identificación

En la vía de obtención de modelo que se ha expuesto en el apartado anterior, denominada modelización física, es necesario un proceso de idealización y abstracción previo a partir de la observación y la experimentación para inducir las leyes físicas que rigen el comportamiento del sistema en estudio. A veces esas leyes no son conocidas o bien lo son con una generalidad tal que son imposibles de aplicar por la complejidad de los modelos a que dan lugar. Se impondría entonces un tratamiento de las ecuaciones que hiciera que el modelo fuera útil. En otros casos, aunque el modelo sea simple, se carece del conocimiento de los parámetros que intervienen en él.

Como consecuencia de lo anterior, muchos de los problemas de modelización que se abordan en la práctica de la ingeniería se plantean desde otro punto de vista. Si lo que se pretende es que el modelo represente el comportamiento del sistema hagamos de esto nuestro objetivo inicial. Sigamos una metodología indirecta, basada en que al aplicar determinadas entradas a un sistema, cuando se apliquen al modelo proporcionen ambas salidas equivalentes. Así se formaliza la segunda vía de obtención de modelos que se denomina identificación. La figura 2.2 muestra esquemáticamente cómo es posible llegar a modelos simples aplicando esta metodología. Aunque aquí se plantea la identificación con el objetivo de obtener modelos simples del comportamiento de sistemas dinámicos, finalmente puede ser más interesante el propio valor de los parámetros, por ejemplo cuando quieran determinarse propiedades físicas de los sistemas (conductividad de un muro heterogéneo, absorptividad de una cobertura, etc)

Una de las definiciones más utilizadas de identificación es la dada por Zadeh [51]: "la determinación, a partir del conocimiento de las señales de entrada y salida, de un

modelo matemático perteneciente a una clase dada para el cual el comportamiento dinámico para esas entradas equivale al del sistema”.

Señalar que si el sistema no existe realmente, sustituyéndose las salidas del sistema por las obtenidas con un modelo detallado, el problema de identificación es el mismo que el de reducción. En ese caso el significado de ambos significantes coincide.

En la definición aparecen conceptos ya utilizados como son los de sistema y modelo. Otros será necesario concretarlos. En particular es interesante destacar:

- 1) La equivalencia entre las salidas del sistema y el modelo habrá que establecerla adecuadamente de forma inequívoca. Normalmente se define una función objetivo que cuantifica la calidad del modelo. Si se ha fijado el modelo a identificar y éste es paramétrico, la acción que consiste en la determinación de los parámetros del modelo se denomina estimación de parámetros. Muchas veces lo que es sólo estimación de parámetros se confunde con el método de identificación. Otras incluso, es la técnica de minimización de una función objetivo la que impone su nombre a todo el método (es corriente por ejemplo escuchar el método de Marquardt como si fuera de identificación cuando sólo es un procedimiento de minimización de funciones).
- 2) La identificación tiene como pilares fundamentales la experimentación y la observación, aunque en muchos casos sean sustituidas por la simulación con modelos detallados. De hecho, los modelos obtenidos mediante identificación son rigurosamente válidos sólo para las entradas para las que fueron obtenidos. Esto en la práctica no es exactamente así puesto que los modelos identificados no son estrictamente de comportamiento o de caja negra sino que incorporan el conocimiento a priori que se tiene del sistema de manera que captan una parte de la física del sistema. En todo caso la selección y manipulación que se haga de las entradas que se aplican al sistema y al modelo son muy importantes. El filtrado previo, la eliminación de datos erróneos (“outliers”), etc, son estudiados con especial atención por numerosos textos dedicados a identificación.

La figura 2.3, basada en la presentada por Eykhoff y Parks en [52] recoge de forma esquemática el proceso de identificación. Este consiste básicamente en los siguientes puntos:

- 1) **Selección del modelo.** En particular una clase y orden de modelo. La selección debe tener en cuenta:

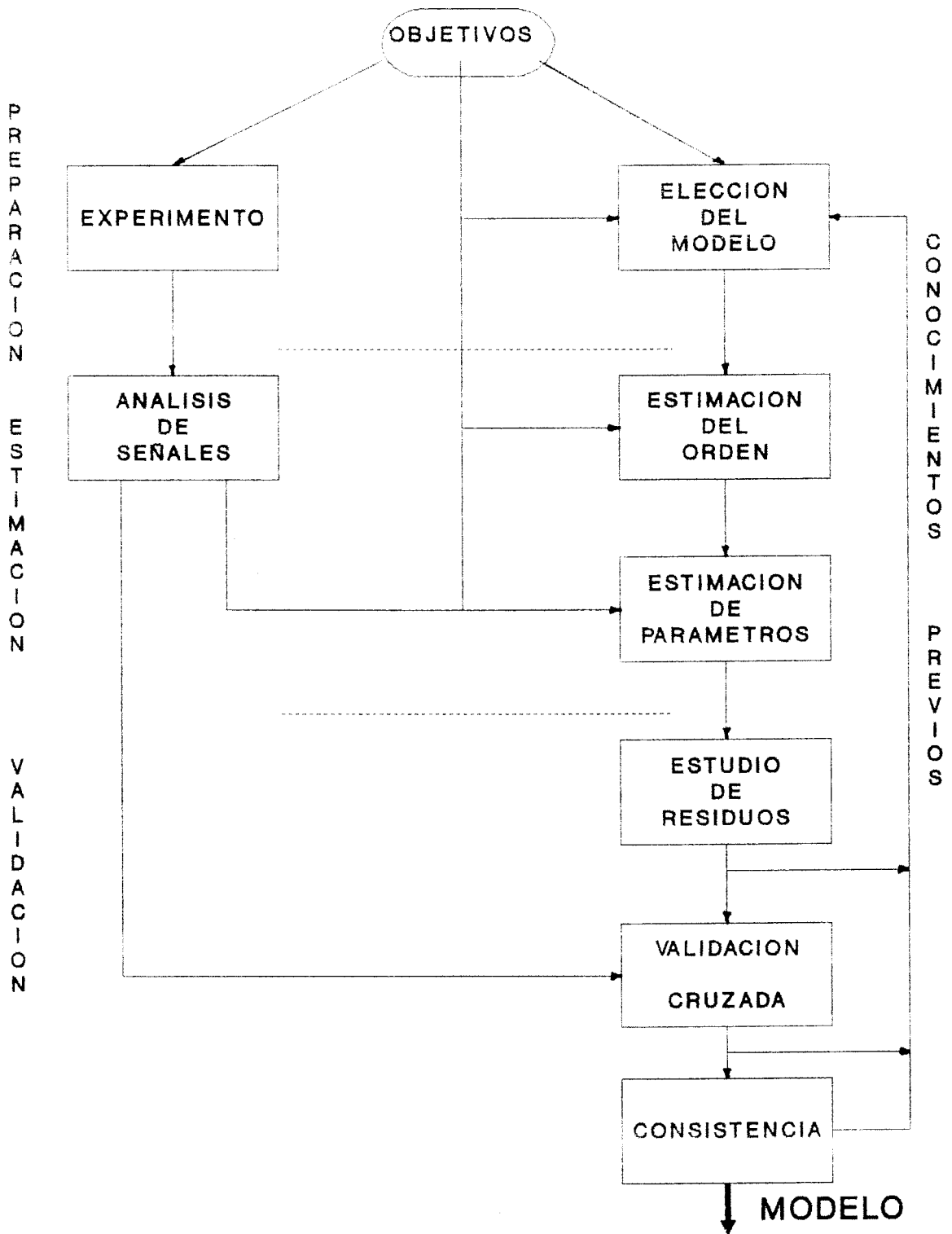


Figura 2.3: Procedimiento de identificación.

- a.- Conocimiento previo del sistema
- b.- Método de estimación de parámetros que vaya a emplearse.
- c.- Objetivo del modelo

2) **Estimación de los parámetros.** A partir de las señales de entrada y salida obtenidas del sistema, mediante experimentación, observación o simulación con un modelo detallado, se determinan los parámetros del modelo. Se basa, como quedó dicho, en la minimización de una función escalar de pérdida o función objetivo. Cuando la función a minimizar es lineal en los parámetros la búsqueda de la solución se simplifica y el problema se dice lineal en los parámetros. En el dominio del tiempo, que nos es más familiar, la función de pérdida puede definirse:

$$J = \int_0^T e^2(t) dt \quad (2.6)$$

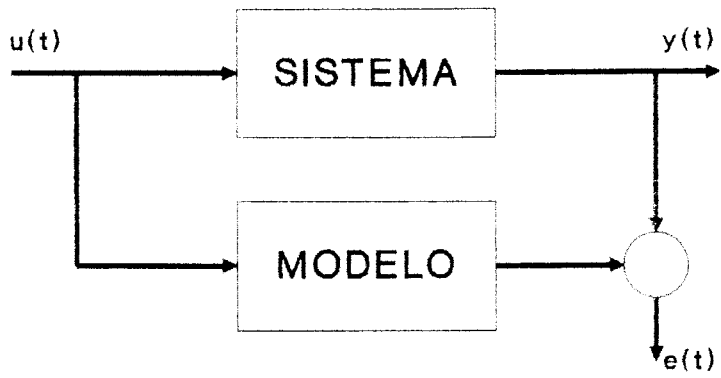
siendo $e(t)$ el error de modelización ([53]). Se pueden considerar 3 tipos de error (ver figura 2.4):

$$\begin{aligned}
 \text{error de salida :} \quad e(t) &= y(t)_{\text{sistema}} - y(t)_{\text{modelo}} \\
 \text{error de entrada :} \quad e(t) &= u(t)_{\text{sistema}} - u(t)_{\text{modelo}} = \\
 & \quad u(t)_{\text{sistema}} - M^{-1}(y(t)_{\text{sistema}}) \\
 \text{error generalizado :} \quad e(t) &= M_2^{-1}(y(t)_{\text{sistema}}) - M_1(u(t)_{\text{sistema}})
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

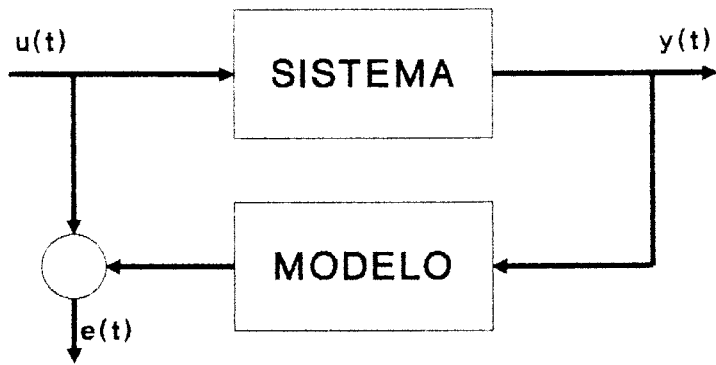
En las ecuaciones 2.7 M , M_1 y M_2 representan modelos.

3) **Validación del modelo identificado.** Las técnicas utilizadas son muy variadas: comprobación de la estructura de ruido supuesta en los métodos de identificación estocásticos, validación cruzada utilizando otras señales de entrada, consistencia del modelo por ejemplo para tiempos pequeños o grandes, constantes de tiempo, estabilidad, etc. En textos dedicados a identificación, por ejemplo [54] y [7], pueden encontrarse capítulos completamente dedicados a la validación de modelos.

Error de salida



Error de entrada



Error generalizado

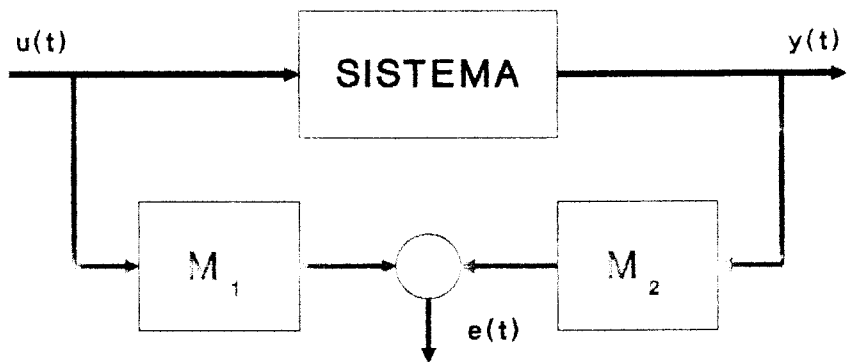


Figura 2.4: Definiciones de los errores de modelización.

Cada uno de estas etapas alimenta a las anteriores de manera que el proceso de identificación puede ser iterativo mejorando cada uno de los pasos con la información que se tiene de los posteriores.

Una clasificación de métodos de identificación puede encontrarse por ejemplo en [53].

La modelización física y la identificación no son técnicas excluyentes sino complementarias. Ambas pueden ser utilizadas simultánea y alternativamente dependiendo de las condiciones de contorno del problema de modelización de que se trate. En todo caso, existen diferencias sustanciales entre cada una de las vías. A saber, las principales son:

- 1) Los modelos obtenidos vía identificación tienen un rango de validez limitado. Cuanto más física se haya introducido en el modelo mayor será el rango de validez de éste.
- 2) Muchas veces los parámetros del modelo no tienen significación física alguna cuando se obtienen mediante un procedimiento de identificación: sólo son utilizados para ajustar la salida del modelo a la del sistema.
- 3) Los modelos que se identifican suelen ser más simples que los obtenidos mediante modelización física.
- 4) En la modelización física el conocimiento del sistema en forma de leyes y parámetros físicos debe ser más completo que en el caso de la identificación. Ese conocimiento no es inútil cuando se aplica un método de identificación pero si prescindible (existen modelos de validez general, ver por ejemplo el polinomio de Kolmogorov-Gabor o el método de Ivakhnenko en [5]).
- 5) La elección de la clase y orden del modelo puede ser un problema difícil de resolver cuando va a utilizarse un método de identificación mientras que se resuelve de forma natural en la modelización física. El método de prueba y error puede no acabar nunca.
- 6) La calidad de los datos procedentes de experimentación y observación es vital en la aplicación de un método de identificación. En la modelización física sin

embargo, una vez conocidos los parámetros termofísicos que definen al sistema, se depende menos de la experimentación y la observación.

Capítulo 3

LA OBTENCION DEL MODELO

3.1 INTRODUCCION

Justificada la necesidad de los modelos simples, la cuestión que ahora se plantea es la concreción de una metodología, lo más general posible, para pasar del sistema al modelo. Para ello, de entre las vías que se han presentado, se propondrá un nuevo método de identificación.

La definición precisa del método debe incluir cada una de las fases siguientes:

- 1) Selección del modelo.
- 2) Definición del método de estimación de parámetros (el modelo seleccionado es paramétrico).
- 3) Validación del modelo.

La selección del modelo no está desprovista, como se ha visto, de una cierta arbitrariedad. Aún eligiendo la vía de la reducción a partir de un modelo de conocimiento detallado, posibilidad ésta que guía la física, es necesario tener en cuenta factores específicos como utilización posterior del modelo, conocimientos previos del sistema, etc.

En este capítulo se justificará el tipo de modelo elegido, partiendo de las propiedades más generales del sistema: linealidad, invarianza y causalidad.

Una vez definido el modelo se describe el método de cálculo de parámetros propuesto. En este proceder aparecen cuestiones que será necesario investigar, principalmente asociadas a la utilización de modelos discretos para describir una realidad que evoluciona de forma continua. Al problema de obtención de la función de transferencia en frecuencia a partir de valores discretos le será prestada una especial atención.

Desde un punto de vista general el método que se presenta puede encuadrarse en la bibliografía sobre identificación de sistemas bajo el apartado de métodos no-paramétricos en el campo de la frecuencia (ver por ejemplo Ljung [54]). En la modelización de los intercambios térmicos en edificios, se utilizan técnicas parecidas para la obtención de funciones de transferencia de muros multicapa (Stephenson y Mitalas [55]) donde se ajusta la transformada z a partir de soluciones analíticas del flujo de calor.

Estimados los parámetros del modelo se plantea entonces su validación: se intenta demostrar la utilidad del modelo. Adicionalmente interesa comprobar si el modelo representa la física del problema. A este objetivo se dedica la última parte del capítulo. Se estudian las respuestas que resultan de aplicar a un modelo del tipo identificado entradas impulso y escalón. Conceptos como constantes de tiempo y estabilidad serán explicados en esta parte.

3.2 LOS SISTEMAS CONSIDERADOS.

Para concretar el método de identificación se empieza por definir el sistema. Las propiedades que se supongan del sistema finalmente lo serán también del modelo como representación de aquel.

Se consideran sistemas lineales, invariantes y causales. La definiciones de estos conceptos se encuentra en el capítulo 2. En realidad estas hipótesis facilitan la modelización del sistema y salvo el principio de causalidad, que no se cuestiona, la linealidad e invarianza podrían discutirse en una aproximación rigurosa del problema.

Los sistemas pueden cambiar sus propiedades con el tiempo. Por ejemplo en un muro hay variaciones de la humedad que provocan variaciones de la propiedades termofísicas o, el diferente ángulo con que incide la radiación solar, hace que la apertura solar varíe. Se considerará sin embargo que estos efectos son de segundo orden, despreciándose en la modelización de los sistemas tratados; justificándolo de otra forma, los valores de los parámetros que se obtienen al aplicar un método de identificación que no contemple la variación de los parámetros son valores medios en todo el periodo de experimentación. Cuando se utilizan modelos detallados sustituyendo al sistema en el proceso de modelización y los parámetros que definen el modelo detallado no cambian, la sola causa de variación de los parámetros del modelo es entonces la in-framodelización. Puesto que el número de parámetros del modelo simple es menor que el del modelo detallado puede suceder que éste último tenga variaciones con el tiempo de los parámetros que responden en realidad a dependencia de los parámetros

del modelo simple de los parámetros del modelo detallado.

Respecto a la linealidad, existen causas de no linealidad en problemas de térmica de edificios. Los intercambios radiantes entre superficies, proporcionales a la diferencia de potencias cuartas de temperaturas absolutas, o los flujos convectivos entre locales de un edificio, proporcionales a la raíz cuadrada de la diferencia de presión, son ejemplos de no linealidades. En la práctica la mayoría de los problemas se consideran lineales por una doble razón. Las no linealidades pueden ser tratadas como una sucesión de linealidades, es un problema de limitar el rango de validez de las soluciones. La segunda razón es de tipo operativo: las herramientas de que se dispone para la resolución de problemas lineales son muy superiores en cantidad y potencia a las que se tienen para el tratamiento de problemas no lineales.

3.3 EL MODELO A IDENTIFICAR

3.3.1 A la integral de convolución desde el sistema

En sistemas lineales, invariantes y causales la respuesta $y(t)$ a una excitación $u(t)$ puede expresarse según la integral de convolución:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad (3.1)$$

La función $g(\tau)$ es la respuesta del sistema ante un impulso unidad. Recordando la definición de impulso unidad, éste es una función de densidad de probabilidad que cumple la condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t)\phi(\tau)d\tau = \phi(t) \quad (3.2)$$

La función de entrada al sistema $u(t)$ puede descomponerse, haciendo uso de la condición 3.2, en una suma infinita de impulsos, aplicados en cada instante t , de altura el valor de la función en ese instante. Aplicando el principio de superposición, válido por tratarse de un sistema lineal, se tiene que la respuesta del sistema $y(t)$ ante esa entrada es la suma de las respuestas ante cada impulso. La respuesta ante un impulso caracteriza por tanto totalmente al sistema.

3.3.2 Al modelo regresivo desde la integral de convolución

Supongamos ahora que, como ocurre normalmente, el sistema es muestreado a intervalos de tiempo t_0 . Las señales de entrada y salida serán conocidas en esos instantes:

$$\begin{cases} u(kt_0) & k = 0, 1, \dots \\ y(kt_0) & k = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (3.3)$$

Según la integral de convolución 3.1 se cumple:

$$y(kt_0) = \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)u(kt_0 - \tau)d\tau \quad (3.4)$$

donde se ha supuesto que la entrada se aplica desde $\tau = 0$.

El intervalo de tiempo t_0 se elige adecuadamente de manera que, en un caso ideal, pueda suponerse que las señales se mantienen constantes entre cada dos intervalos de muestreo:

$$u(t) = u_k, \quad kt_0 \leq t < (k+1)t_0 \quad (3.5)$$

introduciendo 3.5 en 3.4:

$$y(kt_0) = \sum_{l=1}^{\infty} \int_{\tau=(l-1)t_0}^{lt_0} g(\tau)u(kt_0 - \tau)d\tau = \sum_{l=1}^{\infty} g_{t_0}(l)u_{k-l} \quad (3.6)$$

habiendo definido:

$$g_{t_0}(l) = \int_{\tau=(l-1)t_0}^{lt_0} g(\tau)d\tau \quad (3.7)$$

A la sucesión de valores $\{g_{t_0}(l)\}_{l=1}^{\infty}$ se le denomina factores de respuesta ante entradas impulso o respuesta impulsional. Abreviando la notación, la expresión 3.6 puede ponerse:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t - k), \quad t = 0, 1, \dots \quad (3.8)$$

Para acortar la notación del sumatorio 3.8 se introduce el operador z , tal que:

$$u(t - k) = z^{-k}u(t) \quad (3.9)$$

de esta forma puede ponerse:

$$y(t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} g(k)z^{-k} \right) u(t) = G(z)u(t) \quad (3.10)$$

La función $G(z)$ es la función de transferencia del sistema. Supongamos que la función de transferencia es racional en la forma:

$$G(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \quad (3.11)$$

el modelo que tiene esta función de transferencia es:

$$\sum_{i=0}^N a_i y(t - i) = \sum_{i=0}^M b_i u(t - i) \quad (3.12)$$

Este modelo, que corresponde a un sistema lineal, invariante y causal, es el que se identificará mediante el método de determinación de parámetros que se expone en este capítulo. Según la terminología del capítulo 2 se trata de un modelo dinámico, monovariable, paramétrico, de descripción externa, de parámetros concentrados, invariante, lineal, determinista y discretizado en el dominio temporal. En el desarrollo del método y posteriores aplicaciones se apreciará la adecuación de este modelo al método de identificación propuesto; por facilidad de implementación del método de cálculo de los parámetros del modelo y por la calidad de los resultados obtenidos. En anexo se encuentra un análisis de los resultados obtenidos en la identificación de modelos de variables de estado que justifica la elección de modelos regresivos cuando se aplica el método de identificación propuesto.

3.3.3 Función de transferencia

Un sistema como el que se trata de modelizar está caracterizado como se ha visto por su respuesta impulsional. La respuesta impulsional se ha expresado posteriormente en forma de una función que se ha denominado función de transferencia (ecuación 3.11). Si se sigue la vía de la modelización física, es lógico pensar que pueda llegar a calcularse la función de transferencia.

En efecto, a partir de las ecuaciones diferenciales o en diferencias es posible calcular la función de transferencia de un sistema. Para ello es necesario definir transformaciones adecuadas de las ecuaciones que conviertan éstas en ecuaciones algebraicas. Las transformaciones que a continuación se definen son herramientas que facilitan la resolución de las ecuaciones, aportando además en determinados casos información acerca del sistema como su estabilidad, respuesta frecuencial, etc. Son particularmente interesantes si se busca un modelo del tipo entrada-salida o de descripción externa.

El método de identificación propuesto en la tesis se basa en el cálculo de funciones de transferencia. Veamos cómo se definen estas transformaciones, las condiciones de existencia y las conexiones entre ellas.

1) Transformada z :

La transformada z es una operación matemática que aplicada a una sucesión de valores $y(0), y(1), y(2), \dots$ produce una función de la variable z :

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)/z^k \quad (3.13)$$

Esta sucesión converge para $|z| > c$ si $|y(k)| \leq c^k$ para algún $c \geq 0$. La condición siempre se cumple en procesos físicos reales. Las propiedades de la transformada z pueden encontrarse en Jury [56] o Luenberger [57].

2) Transformada de Laplace:

La transformada de Laplace de una función $y(t)$ definida para $t \geq 0$ es:

$$Y(s) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt \quad (3.14)$$

Si $y(t)$ es una función continua acotada por una exponencial, es decir, $|y(t)| \leq e^{Mt}$ la integral 3.14 existe para valores de s suficientemente grandes ($s > M$). En Sydenham [58] puede encontrarse un amplio tratamiento de la transformada de Laplace.

3) Transformada de Fourier:

La transformada de Fourier de una función $y(t)$, definida para $t \geq 0$ es:

$$Y(w) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-jwt} dt \quad (3.15)$$

Una condición suficiente de existencia de la transformada de Fourier es que la función $y(t)$ sea absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|y(t)\| dt < \infty \quad (3.16)$$

Si $y(t)$ es una función periódica, la función $Y(w)$ sólo existe para ciertas frecuencias contenidas en $y(t)$. Por el contrario, si la función $y(t)$ es no periódica $Y(w)$ es una función continua de la frecuencia.

Para una función $y(t)$ muestreada con N valores, se define la transformada discreta de Fourier para las frecuencias $w = 2\pi k/N$, con $k = 0, 1, \dots, N$ en la forma:

$$Y(w) = \sum_{t=0}^N y(t)e^{-jwt} \quad (3.17)$$

La transformada discreta de Fourier puede obtenerse de forma eficiente a partir de la Transformada Rápida de Fourier. Un amplio tratamiento de la transformada de Fourier puede encontrarse en Papoulis [59] o en Brigham [60].

El paso de la transformada de Laplace a la de Fourier es inmediato desde un punto de vista práctico, aunque no es estrictamente correcto desde el punto de

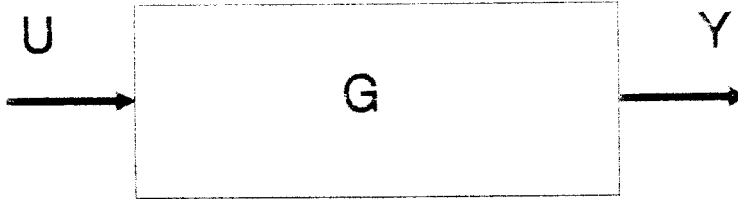


Figura 3.1: Diagrama de bloques del sistema.

vista matemático, sin más que cambiar el parámetro s por jw .

Mediante la aplicación de una de las transformaciones definidas anteriormente a la ecuación diferencial o en diferencias que define el sistema y suponiendo un estado inicial de reposo, puede expresarse en el dominio de s , w o z (ver figura 3.1):

$$Y = G \cdot U \quad (3.18)$$

donde Y , G y U son función de s , w o z .

A continuación se muestra, a modo de ejemplo, la obtención de la función de transferencia en z del modelo 3.12. Tomando transformada z en el miembro de la izquierda de la igualdad:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^N \frac{a_i y(k-i)}{z^k} = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_i y(k-i)}{z^{k-i}} z^{-i} \quad (3.19)$$

expresando $Y(z)$ en la forma:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y(k-i)}{z^{k-i}} \quad (3.20)$$

y haciendo lo equivalente con el término de la derecha, se tiene:

$$Y(z) \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} = U(z) \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \quad (3.21)$$

de donde aparece de forma natural la función de transferencia 3.11 como cociente entre la salida y la entrada.

El orden del numerador de la función de transferencia debe ser igual o menor que el del denominador, esto es, la función es propia, como consecuencia de la propiedad de causalidad.

Puesto que la transformada z de una función impulso es la función unidad, la función de transferencia puede hallarse como la respuesta del sistema a una función impulso.

3.4 ESTIMACION DE PARAMETROS

Se ha establecido en el apartado anterior el modelo a identificar. A continuación se presenta la metodología propuesta en la tesis para estimar sus parámetros. La figura 3.2 muestra esquemáticamente el proceso.

3.4.1 Método de estimación de parámetros

Para determinar los parámetros del modelo se seguirán los siguientes pasos:

- 1) Obtener la función de transferencia en frecuencia del sistema. Se contemplan tres situaciones para la definición del sistema:
 - 1.1.- Se dispone de valores de las señales de salida y entrada medidas durante cierto periodo de tiempo. La función de transferencia en frecuencia se determina entonces como cociente de las transformadas de Fourier de las señales de salida y entrada. Caben a su vez dos posibilidades:
 - a.- Si la excitación es periódica se aplica directamente la transformada discreta de Fourier 3.17, utilizándose la transformada rápida de Fourier si el volumen de datos a tratar es elevado. Normalmente, en las aplicaciones que se mostrarán, no es necesario recurrir a la transformada rápida excepto en el caso del tratamiento de datos meteorológicos anuales.

S
I
S
T
E
M
A

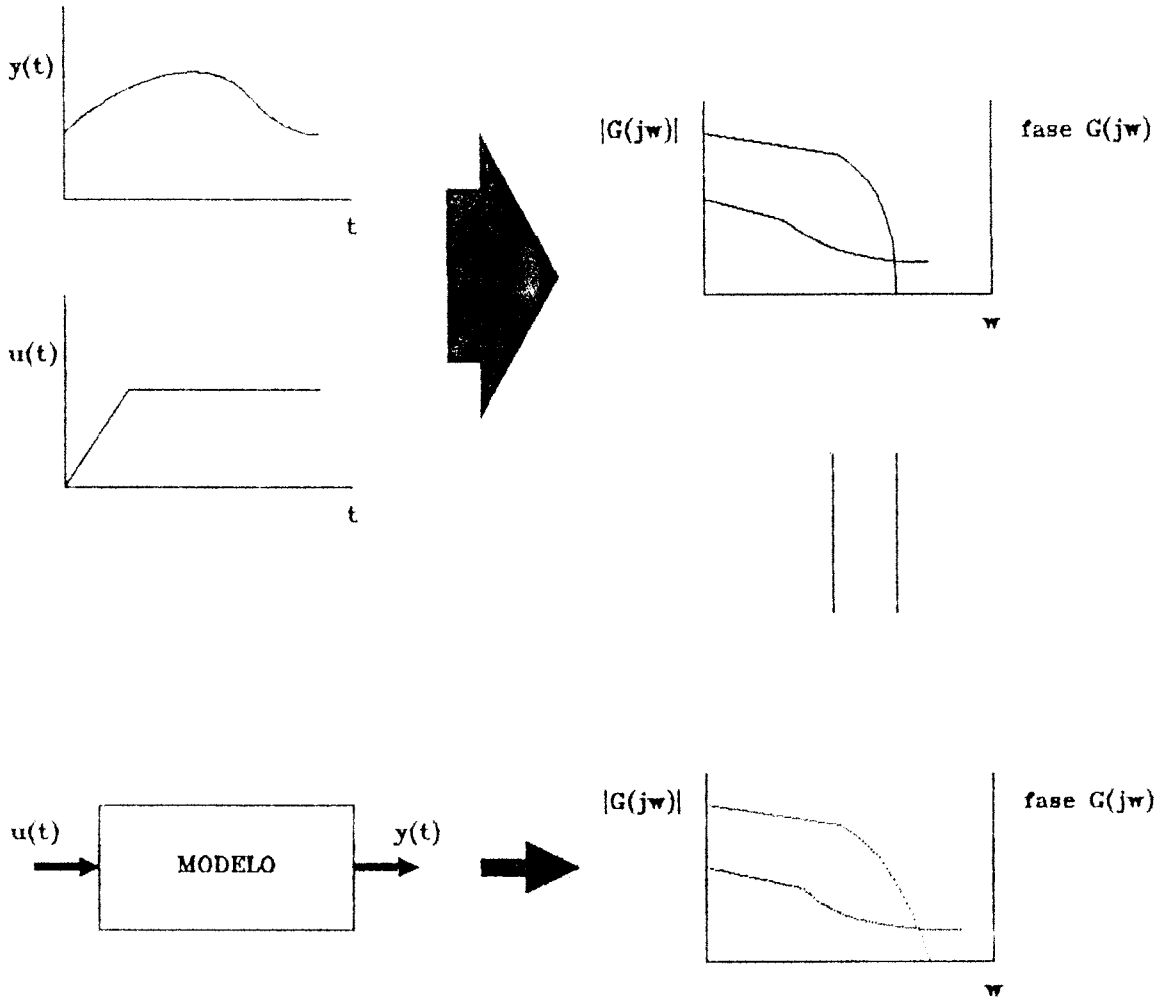


Figura 3.2: Método de identificación propuesto.

b.- Si la excitación no es periódica (por lo tanto tampoco la respuesta) la transformada de Fourier se calcula recurriendo directamente a su definición a partir de la integral 3.15, aproximando linealmente las funciones entre cada dos puntos donde se conoce el valor de ésta (normalmente cada hora). Ese sería el caso de intentar reproducir mediante el modelo simple la respuesta del sistema ante una entrada en escalón.

1.2.- El sistema viene dado a partir de la definición geométrica y propiedades termofísicas. En este caso se utiliza la solución de un modelo analítico para determinar la función de respuesta en frecuencia basado en el régimen periódico establecido.

Supongamos una excitación de la forma:

$$u(t) = e^{j\omega t} \quad (3.22)$$

introduciendo este valor en 3.1:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \quad (3.23)$$

que puede ponerse:

$$y(t) = G(j\omega) e^{j\omega t} \quad (3.24)$$

siendo:

$$G(j\omega) = \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.25)$$

La función compleja $G(j\omega)$, que depende sólo de la frecuencia y no del tiempo, permite obtener la salida del sistema a partir de la entrada. Como muestra la ecuación 3.24, la salida es del mismo tipo que la entrada amortiguada y desfasada: es el régimen periódico establecido.

Cuando se analice el sistema particular a que se aplica el método de identificación, se verá cómo obtener el régimen periódico establecido y en consecuencia la función de transferencia en frecuencia a partir de un modelo de conocimiento del sistema.

1.3.- El sistema viene dado por un modelo detallado. La función de transferencia en frecuencia se tiene, de forma similar al caso anterior, suponiendo régimen periódico establecido. El cociente entre las amplitudes complejas de la salida y la entrada proporcionan la función buscada.

2) Formular la función de transferencia en frecuencia para el modelo simple descrito por la ecuación 3.12 a partir de la suposición de régimen periódico establecido.

Supongamos la excitación definida por $u(t) = U(w)e^{jwt}$. La respuesta de un sistema lineal e invariante una vez desaparecido el transitorio inicial tiene la forma:

$$y(t) = Y(w)e^{jwt} \quad (3.26)$$

Sustituyendo estas expresiones en el modelo definido por la ecuación 3.12:

$$Y(w) \sum_{i=0}^N a_i e^{-jwit_0} = U(w) \sum_{i=0}^M b_i e^{-jwit_0} \quad (3.27)$$

La función de transferencia en frecuencia queda finalmente:

$$G_m(jw) = \frac{Y(w)}{U(w)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i e^{-jwit_0}}{\sum_{i=0}^N a_i e^{-jwit_0}} \quad (3.28)$$

3) Establecer la igualdad entre las funciones de transferencia del sistema y del modelo para determinadas frecuencias. El régimen permanente ($w = 0$) se impone como una ecuación independiente. De esta forma se tienen dos ecuaciones para

cada una de las frecuencias en que se cumple la igualdad de las funciones de transferencia más una ecuación correspondiente a la imposición del régimen permanente. El número de frecuencias para el que se impone la igualdad depende de N y M , siendo el adecuado para cerrar el sistema.

- 4) Resolución del sistema lineal obtenido dando como resultado los parámetros del modelo temporal elegido.

A lo largo de la exposición de esta metodología surgen cuestiones que es necesario aclarar para una aplicación adecuada del método. En particular:

¿Cuál es la excitación para la que se debe identificar el sistema?. Puesto que se trata de modelos simples, previamente se renuncia a conseguir la validez del modelo para todo el rango de funcionamiento del sistema. Existe por tanto una cierta asociación entre el modelo identificado y la excitación que se aplica para identificar.

¿Los efectos que aparecen al tratar funciones muestreadas de pérdida de información y "aliasing", perturbarán las transformadas de Fourier de forma que el método no sea válido cuando no se disponga de la respuesta analítica del sistema?

¿Los ruidos que existen debidos a la experimentación con sistemas reales, perturbarán las funciones de transferencia de forma que los modelos obtenidos no sean válidos?

En lo que sigue se responderán las dudas planteadas si bien debe señalarse que la aplicación de un método de identificación depende enormemente de la experiencia y los conocimientos de quien la lleva a cabo, no sólo de los métodos utilizados, sino de los sistemas a los que se aplica. No existen recetas válidas universalmente y en muchos casos el éxito o el fracaso de estas técnicas depende de pequeños detalles que es necesario tener en cuenta.

3.4.2 Transformada de Fourier de funciones muestreadas

Inicialmente, en la aplicación del procedimiento propuesto para el cálculo de los parámetros del modelo, es necesario pasar al dominio frecuencial funciones en el dominio del tiempo que sólo se conocen de forma discreta.

Se trata de una representación discreta de un sistema físico que se comporta de forma continua. Es importante notar que esa representación es en esencia más pobre:

entre cada dos valores conocidos de la función no se tiene información de su comportamiento. Esta falta de información tiene consecuencias en cuanto a la riqueza de la representación de la función en el campo de la frecuencia.

Supongamos una función continua del tiempo $h(t)$. El valor de la función en el instante t_i puede ponerse como el producto de una función impulso por la propia función continua:

$$\hat{h}(t_i) = h(t)\delta(t - t_i) = h(t_i)\delta(t - t_i) \tag{3.29}$$

Si la función se muestrea en $i = 0, 1, \dots, N$ la función muestreada $\hat{h}(t)$ se expresa como el sumatorio:

$$\hat{h}(t) = \sum_{i=0}^N h(it_0)\delta(t - it_0) \tag{3.30}$$

Cuando se aplica la transformada de Fourier a la función muestreada se hace a una función que coincide con la continua sólo en los instantes en que se ha muestreado. Interesaría conocer la relación que existe entre la transformada de Fourier aplicada a la función discreta y a la continua. Idealmente deberían de coincidir para todas las frecuencias. Veremos que ésto sólo ocurre parcialmente.

Para calcular la transformada de Fourier de la función muestreada se utiliza el teorema de convolución que establece la relación entre la transformada del producto de dos funciones y las transformadas de esas funciones. El teorema de convolución dice que la transformada de Fourier del producto $h(t)x(t)$ es la convolución de las transformadas: $H(w) * X(w)$. El símbolo $*$ se interpreta como convolución y representa la operación:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \tag{3.31}$$

La figura 3.3 representa gráficamente la obtención de la transformada de Fourier de la función muestreada. La secuencia de impulsos espaciados t_0 se ha representado $\Delta(t)$ y su transformada de Fourier $\Delta(w)$. La transformada de Fourier de la función muestreada es una función periódica de periodo el de muestreo. Se ha supuesto que la función continua original sólo tiene contenido en frecuencia en el intervalo $(-w_c, w_c)$. Si el intervalo de muestreo se elige suficientemente pequeño no hay solapamiento al calcular la transformada de Fourier de la función muestreada. Cuando se elige un intervalo de muestreo t_0 mayor que $1/2w_c$ aparece el fenómeno denominado "aliasing"

(figura 3.4). Si ésto ocurre no es posible conocer la transformada de Fourier de la función continua.

El intervalo de muestreo que cumple:

$$\frac{1}{t_0} = 2w_c \quad (3.32)$$

se denomina intervalo de muestreo de Nyquist y es el de menor frecuencia que no produce aliasing. Cualquier intervalo de muestreo menor (de mayor frecuencia) permitirá reconstruir la transformada de Fourier de la función continua. La formalización de esta condición se encuentra en el teorema del muestreo de Shannon que puede encontrarse en Brigham [60].

Como resultado de lo expuesto se concluye que para un modelo discreto como el descrito en 3.12 y considerando un paso de tiempo de 1 hora, es decir, una frecuencia de muestreo de una medida cada hora, no es posible extraer información para frecuencias mayores de $1/2 \text{ horas}^{-1}$. Además, si el sistema térmico considerado tiene un contenido en frecuencia mayor que ésta se producirá un solapamiento que puede impedir conocer el contenido en frecuencia para frecuencias incluso menores que la mitad de la de muestreo. Una posibilidad de obtener información para frecuencias mayores que la mitad de la de muestreo es aproximar de forma continua la función discreta.

Finalmente señalar, en relación a la obtención de transformadas de Fourier de funciones muestreadas, que aparece un rizado de la transformada en el campo de la frecuencia cuando se considera un tiempo de muestreo finito. El rizado es mayor cuanto menor sea el tiempo de toma de medidas. Este efecto no aparece cuando se dispone del modelo matemático detallado que sustituye a la experimentación puesto que se dispone de la función en todo el dominio temporal.

3.5 LA VALIDACION DEL MODELO IDENTIFICADO

Se ha seguido el método general de identificación planteado en el capítulo 2. Hasta ahora se ha seleccionado el modelo y determinado los parámetros. Procede entonces pasar a la fase de validación.

Las técnicas de validación del modelo identificado que aquí se aplican se agrupan en:

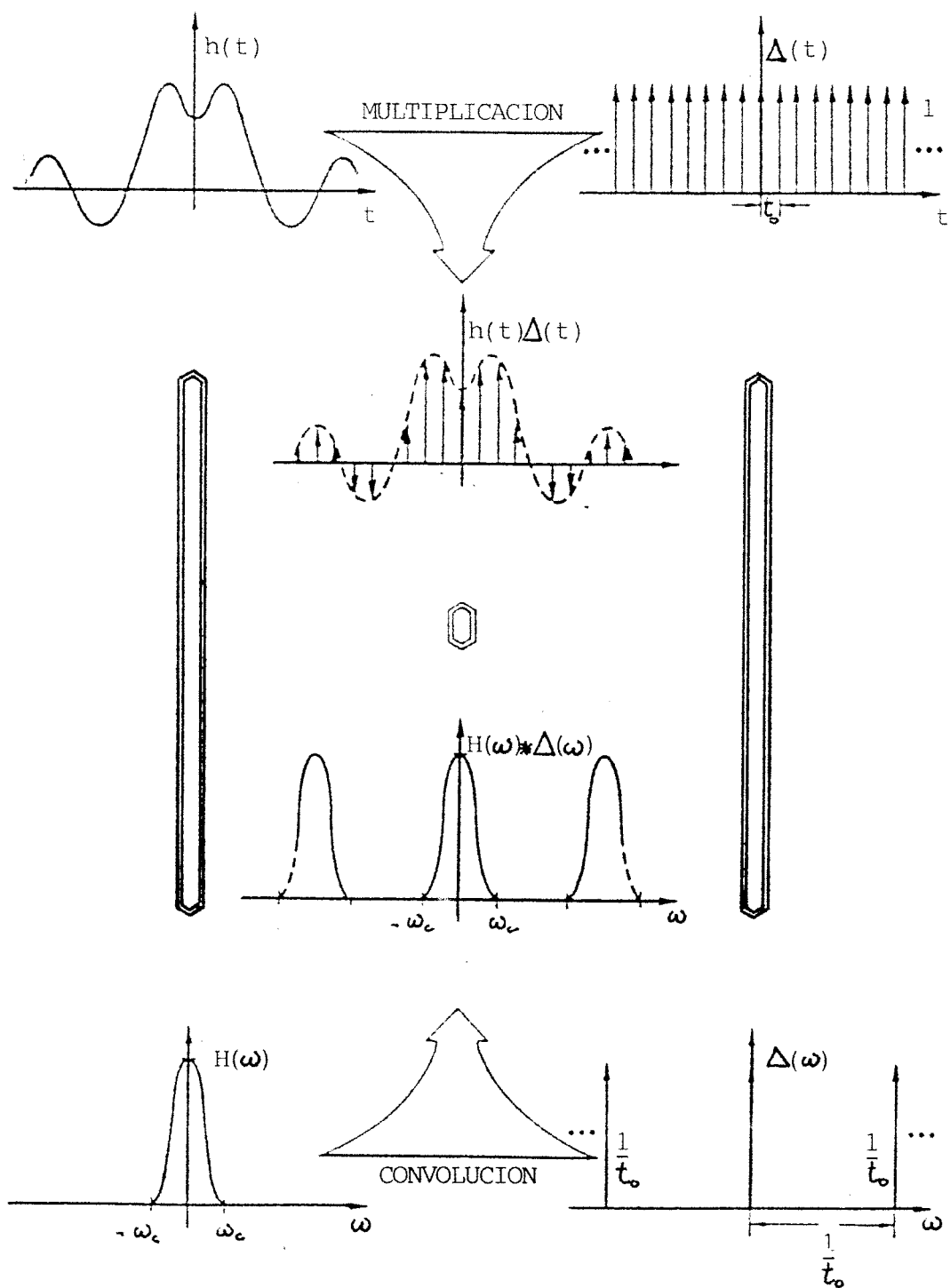


Figura 3.3: Obtención de la transformada de Fourier de la función muestreada.

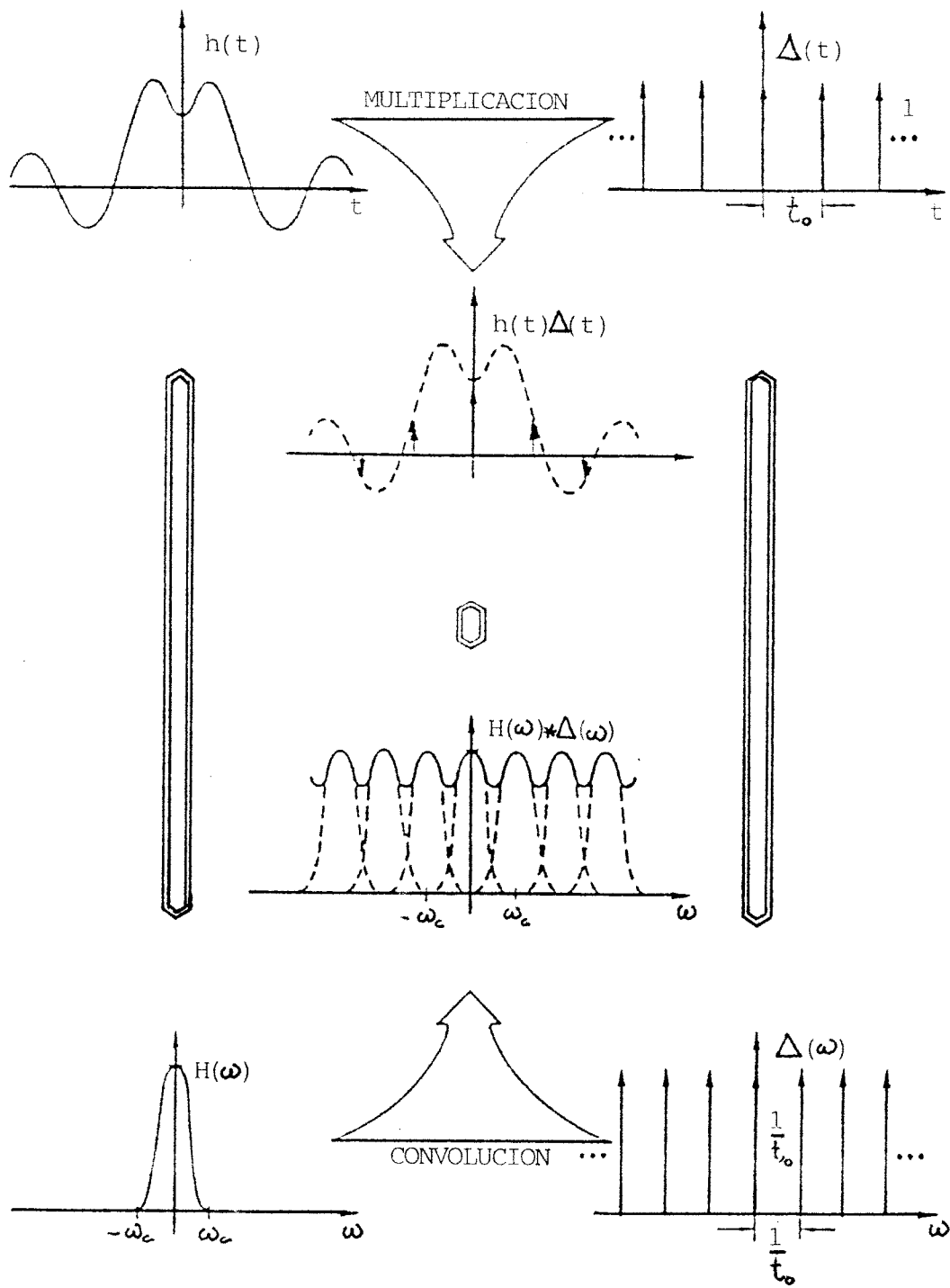


Figura 3.4: Obtención de la transformada de Fourier de la función muestreada con periodo de muestreo insuficiente.

- 1) Validación cruzada: aplicando al modelo identificado otras señales diferentes a las utilizadas para identificar y comparando la salida que se obtiene con la proporcionada por el sistema. Esta posibilidad se estudia en capítulos sucesivos cuando se especifica el sistema al que se aplica el método, planteando entonces modelos detallados que permiten una mayor flexibilidad en la elección de las señales de entrada.
- 2) Análisis físico: buscando interpretación física al modelo. Se obtienen para esto las respuestas continuas a entradas impulso y escalón. Por otra parte, el modelo continuo equivalente proporciona información acerca del comportamiento del sistema que no es posible extraer directamente de la observación del modelo discreto. Los conceptos de constante de tiempo y estabilidad del modelo aparecen de forma natural al analizar las respuestas del sistema ante esas entradas.

La obtención de la respuesta continua se hace a partir de la resolución de la ecuación en diferencias que representa la ecuación 3.12. En términos matemáticos la solución de esta ecuación es un modelo discreto que proporciona la salida para cada instante:

$$y(kt_0), \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (3.33)$$

Imaginemos que se tiene una función continua en el tiempo $f(t)$ tal que coincide con la salida $y(kt_0)$ en $t = kt_0$ con $k = 0, 1, \dots, N$. A la función $f(t)$ puede asociarse una transformada z , $F(z)$, como si la función fuera discreta. Por otro lado la función $f(t)$ tendrá una transformada de Laplace $F(s)$. Se puede establecer una equivalencia entre funciones en el campo de las transformadas z para las discretas y s para las continuas de la que se tiene la función continua equivalente.

A continuación se obtiene la respuesta temporal del sistema que obedece a la ecuación 3.12 cuando la entrada es una función impulso y una función escalón.

3.5.1 Respuesta ante un impulso

En lo sucesivo se considera un caso particular del modelo 3.12 en el que el coeficiente que multiplica a la salida en el instante de cálculo es la unidad y $M = N$. Dividiendo toda la ecuación por a_0 puede tenerse esta otra ecuación en la que se ha mantenido, por coherencia, la misma nomenclatura para los coeficientes:

$$y(t) = \sum_{i=1}^N a_i y(t-i) + \sum_{i=0}^N b_i u(t-i) \quad (3.34)$$

Tomando transformada z la respuesta $Y(z)$ es:

$$Y(z) \left[1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} \right] = U(z) \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} \quad (3.35)$$

En el campo discreto el impulso unidad se define por:

$$f(k) = u(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases} \quad (3.36)$$

Como la transformada z del impulso unidad es $U(z) = 1$. Se tiene entonces una respuesta en z para la entrada impulso:

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad (3.37)$$

Por división directa, descomponiendo posteriormente en fracciones, $Y(z)$ puede ponerse:

$$Y(z) = b_0 + \sum_{i=1}^N A_i / (z - \lambda_i) \quad (3.38)$$

Las constantes λ_i son las raíces del polinomio $[1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}]$ supuestas reales y distintas.

Realizada la descomposición, se busca una función continua que tenga esa transformada cuando se considera discreta.

Se sabe que para $f(t) = e^{-t/\tau}$, que en forma discreta toma los valores $f(k) = e^{-kt_0/\tau}$ para $k = 0, 1, \dots$, la transformada z es:

$$F(z) = \frac{z}{z - e^{-t_0/\tau}} \quad (3.39)$$

Por otra parte se conoce la siguiente propiedad de la transformada z :

Si la sucesión de valores $f(k)$ tiene $F(z)$ como transformada, entonces esa misma sucesión retrasada un intervalo de tiempo:

$$g(k) = \begin{cases} f(k-1), & k \geq 1 \\ 0, & k = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

tiene como transformada $G(z)$:

$$G(z) = z^{-1}F(z) \quad (3.41)$$

Teniendo esto en cuenta, la función $f(k)$ definida:

$$f(k) = \begin{cases} e^{-(k-1)t_0/\tau}, & k \geq 1 \\ 0, & k = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

tiene una transformada:

$$F(z) = \frac{1}{z - e^{-t_0/\tau}} \quad (3.43)$$

el modelo discreto 3.42 es un muestreo, a intervalo de tiempo t_0 , del modelo continuo:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-(t-t_0)/\tau} & t \geq t_0 \\ 0, & t = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

Esta función no está definida en el intervalo $(0, t_0)$ cumpliéndose:

$$\lim_{t \rightarrow 0} e^{-(t-t_0)/\tau} \neq 0 \quad (3.45)$$

La función en el dominio del tiempo cuya transformada es 3.37 queda definida por:

$$y(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\lambda_i} e^{-t/\tau_i}, & t \geq t_0 \\ b_0, & t = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

donde las constantes τ_i son tales que:

$$e^{t_0/\tau_i} = \frac{1}{\lambda_i} \quad (3.47)$$

Como en los sistemas físicos tratados, cuando son excitados por una función impulso, la respuesta tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito, es decir, se trata de sistemas estables, deberá cumplirse que las constantes τ_i sean positivas. En el apartado relativo a estabilidad de los modelos regresivos se estudiará específicamente este tema.

Teniendo en cuenta que la función de transferencia en frecuencia de un sistema es la transformada de Fourier de la respuesta del sistema ante una impulso, puede calcularse la función de transferencia en frecuencia a partir de la transformada de Fourier del modelo 3.46. El problema de la discontinuidad de la función en el intervalo $[0, t_0]$ puede soslayarse aproximando linealmente la función en el intervalo $[0, t_0]$. Procediendo así coinciden la función de transferencia en frecuencia de los modelos continuo y discreto, eliminándose como era de esperar, el aliasing que aparece en el modelo discreto para frecuencias mayores de 12 ciclos/día en el caso de un modelo horario.

La figura 3.5 muestra el módulo de la función de transferencia en frecuencia obtenida a partir de los modelos discreto y continuo para un sistema de orden 2 que representa a un muro. Los parámetros han sido obtenidos mediante el procedimiento de identificación propuesto en este capítulo. El efecto de aliasing que aparece en el modelo discreto para frecuencias mayores de 10 ciclos/día desaparece en el modelo continuo. En contra de lo que cabría esperar, cuando la frecuencia crece, la amplitud de la respuesta no tiende a 0 en el caso del modelo continuo. En el siguiente apartado se estudiará el porqué.

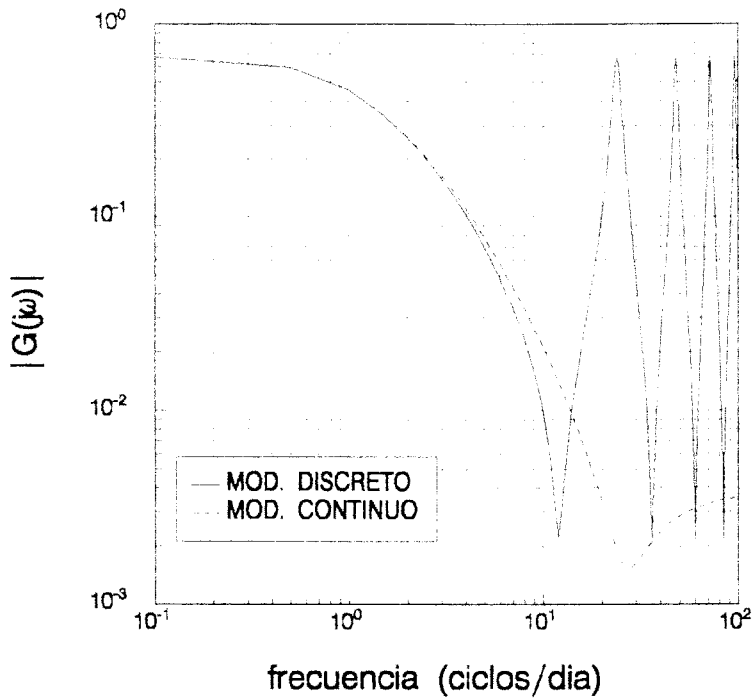


Figura 3.5: Funciones de transferencia del modelo discreto y del modelo continuo.

3.5.2 Respuesta continua ante un escalón

Para calcular la respuesta del sistema que representa la ecuación 3.34 ante un escalón se procede del mismo modo que para la entrada impulso.

La función escalón es:

$$f(k) = 1 \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.48)$$

y su transformada z :

$$U(z) = \frac{z}{z - 1} \quad (3.49)$$

La respuesta del sistema $Y(z)$ ante el escalón es el producto de la función de transferencia en z por la transformada z de la entrada:

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)} \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{\left(1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}\right)} \quad (3.50)$$

que puede descomponerse en fracciones en la forma:

$$Y(z) = \frac{Bz}{z-1} + \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z-\lambda_i} \quad (3.51)$$

la constante B es la ganancia en régimen permanente:

$$B = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i}{1 - \sum_{i=0}^N a_i} \quad (3.52)$$

Teniendo en cuenta que la transformada de $e^{-t/\tau}$ es 3.39, la antitransformada de 3.51 proporciona la función continua:

$$y(t) = B + \sum_{i=1}^N A_i e^{-t/\tau_i} \quad t \geq 0 \quad (3.53)$$

las constantes τ_i cumplen igualmente:

$$e^{t_0/\tau_i} = \frac{1}{\lambda_i} \quad (3.54)$$

Es interesante estudiar los límites de la función de transferencia a frecuencia nula (régimen permanente) y frecuencia tendiendo a infinito. Teniendo en cuenta los siguientes pares de transformada:

$$\begin{aligned} f(t) = 1 & \quad \rightarrow \quad F(s) = 1/s \\ f(t) = e^{-at} & \quad \rightarrow \quad F(s) = 1/(s+a) \end{aligned} \quad (3.55)$$

La transformada de Laplace de la respuesta 3.53 es:

$$Y(s) = \frac{B}{s} + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s + 1/\tau_i} \quad (3.56)$$

Como la transformada de la entrada es $U(s) = 1/s$, la función de transferencia en s queda:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = B + \sum_{i=1}^N \frac{A_i s}{s + 1/\tau_i} \quad (3.57)$$

a) Límite a frecuencia nula ($\lim_{s \rightarrow 0} G(s)$)

Tomando límites se tiene:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = B \quad (3.58)$$

es decir:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = B = \frac{\sum_{i=0}^N b_i}{1 - \sum_{i=1}^N a_i} \quad (3.59)$$

condición que podía haberse obtenido suponiendo régimen permanente en el modelo que define al sistema. Como debería ser, a frecuencia nula se tiene la ganancia estática, en el caso de un muro, el coeficiente global de transferencia.

b) Límite a frecuencia infinita ($\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$)

Tomando límite se tiene:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = B + \sum_{i=1}^N A_i = b_0 \quad (3.60)$$

A partir del teorema del valor inicial que establece:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) \quad (3.61)$$

donde $g(t)$ es la respuesta temporal del sistema ante un impulso, de valor finito en $t = 0$, puede deducirse que cualquier sistema físico tendrá ganancia nula a frecuencia infinita. Esto no sucede en el modelo descrito por la ecuación 3.34 excepto si $b_0 = 0$.

Puede discutirse la validez del modelo desde el punto de vista de la falta de acuerdo entre el modelo matemático y la realidad que representa. Sin embargo, es lícito plantearse la cuestión de si a pesar de existir disfunciones del modelo en determinados rangos (a alta frecuencia) el modelo sigue siendo válido en los rangos de frecuencia en que se va a aplicar. Como se verá en los casos de aplicación, las excitaciones nunca tienen contenido en frecuencia por encima de un cierto valor, lejos del límite estudiado anteriormente. Se mantendrá entonces el término b_0 en el modelo obteniéndose de esta forma un mejor acuerdo de éste a los datos experimentales para el rango de frecuencias que son de interés.

3.5.3 Constante de tiempo

En la ecuación 3.53 se expresa la respuesta de un sistema representado por el modelo 3.34 ante un escalón:

$$y(t) = B + \sum_{i=1}^N A_i e^{-t/\tau_i} \quad t \geq 0 \quad (3.62)$$

La respuesta en el dominio del tiempo está compuesta por un escalón de amplitud B y N exponenciales decrecientes ponderadas por las constantes A_i , $i = 1, 2, \dots, N$. La rapidez con que decaen las exponenciales depende de las constantes τ_i . Esas constantes son las constantes de tiempo del sistema y cumplen:

$$e^{t_0/\tau_i} = \frac{1}{\lambda_i} \quad (3.63)$$

siendo λ_i las N raíces del polinomio característico:

$$z^N - \sum_{i=1}^N a_i z^{(N-i)} \quad (3.64)$$

Las constantes de tiempo se determinan exclusivamente a partir de las que multiplican a la salida en instantes anteriores. Son características del sistema si bien cuando se trata de modelos simplificados, que sólo pretenden describir al sistema de forma aproximada, estarán asociadas a la propia excitación.

3.5.4 Estabilidad

El término estabilidad referido a un sistema físico es suficientemente intuitivo. Un sistema es estable cuando la repuesta a un impulso tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito. De otra forma, un sistema se dice estable si la respuesta a excitaciones acotadas es también acotada.

Existe una amplia teoría respecto a la estabilidad de sistemas lineales e invariantes. Este trabajo se limitará a establecer las condiciones en que el modelo 3.34 representa un sistema que es estable. En la realidad todos los sistemas térmicos que se tratarán son estables por lo que la condición de estabilidad es de hecho una condición de validez del modelo obtenido al aplicar el proceso de identificación.

La estabilidad está asociada al sistema homogéneo y afecta por lo tanto a los coeficientes que multiplican a la salida en instantes anteriores.

La ecuación 3.46 expresa la respuesta de un sistema representado por el modelo 3.34 ante una entrada impulso. Si debe cumplirse que para $t \rightarrow \infty$ la respuesta tienda a cero será condición suficiente y necesaria para que esto ocurra que las constantes τ_i sean positivas. Si esto sucede las exponenciales son decrecientes y la respuesta se anula con el tiempo. Como las constantes τ_i se definen a partir de 3.44:

$$e^{t_0/\tau_i} = \frac{1}{\lambda_i} \quad (3.65)$$

la condición de positividad de las constantes de tiempo se traduce en que las raíces del polinomio característico 3.64 estén estrictamente dentro del círculo de radio unidad.

Existen criterios de estabilidad que no requieren resolver el polinomio característico. En concreto puede aplicarse el criterio de Routh-Hurwitz basado el cálculo de N determinantes construidos a partir de los coeficientes del polinomio característico (ver por ejemplo Friedly [61]).

Capítulo 4

APLICACION DEL METODO AL CASO UNIDIMENSIONAL

4.1 INTRODUCCION

Hasta el presente capítulo se ha planteado la necesidad de disponer de modelos simples del comportamiento dinámico de sistemas térmicos y se han descrito con carácter general las posibles vías de obtención de éstos.

Se ha establecido una metodología de identificación en el dominio de la frecuencia para la obtención de modelos regresivos de orden fijado, basada en la imposición de la igualdad de la función de transferencia en frecuencia, para determinadas frecuencias, entre los datos obtenidos del sistema, mediante experimentación o simulación con modelos detallados, y la función de transferencia en frecuencia del modelo regresivo.

Llegados a este punto se plantea la necesidad de aplicar la técnica desarrollada con objeto de demostrar la adecuación o no de ésta a casos reales y resolver las cuestiones planteadas a priori en la exposición del método, esto es, orden del modelo, frecuencias elegidas para establecer la igualdad de las funciones de transferencia, respuesta del sistema ante excitaciones no periódicas, etc.

Cuando se piensa en la variedad de sistemas dinámicos que se encuentran en la física y en concreto en el estudio de la transferencia térmica, surge la duda de la elección del caso a que se va a aplicar la metodología propuesta. Al analizar el mecanismo de conducción en la transferencia térmica de edificios se observa:

- En los muros se tienen los mayores tiempos característicos del edificio.
- Desde que el matemático francés J. Fourier en 1822 estableció la relación entre el flujo de calor y el gradiente de temperaturas, la conducción ha recibido un

profundo tratamiento desde muy diferentes puntos de vista. Existen una amplia variedad de métodos analíticos y numéricos para tratarla, no sólo en problemas generales de transmisión de calor sino, específicamente en edificios.

- La conducción es el mecanismo que mayor dificultad presenta en su formulación y resolución al nivel necesario para el estudio de la transferencia térmica en edificios. Puede afirmarse que los diferentes programas de simulación térmica de edificios se diferencian en el tratamiento que se da a la conducción. El mayor tiempo de cálculo en los programas de simulación se consume en el tratamiento de ésta.

Por todo lo anterior, los modelos simples se obtendrán para elementos del edificio donde la conducción es el mecanismo estudiado con mayor atención. Puede pensarse que al tratarse de un mecanismo tan estudiado ya queda poco que decir. No es esta la situación, como lo muestra la continua aparición de artículos y publicaciones dedicadas a la obtención de modelos simples de conducción, tanto desde el punto de vista analítico (por ejemplo en la reducción de funciones de transferencia de muros [11]) como desde el punto de vista experimental (aplicación de técnicas de identificación para determinación de propiedades físicas [62]).

Existen técnicas alternativas para la obtención de modelos simples de conducción en muros. En la literatura pueden encontrarse numerosas referencias. La metodología de identificación que aquí se presenta puede competir con ventaja con cualquiera de ellas. Para situar con precisión el marco de la tesis, se revisan en la segunda parte del capítulo (apartado 4.3) las técnicas alternativas para la obtención de modelos simples de conducción en muros.

Se describen en la tercera parte los modelos analíticos de conducción empleados a lo largo de la aplicación del método de identificación. Los objetivos con que éstos se aplican son dos:

- 1) Proporcionar la respuesta en flujo de calor para las excitaciones de prueba utilizadas para la validación del modelo simple obtenido mediante identificación. Para esto se utiliza el método de los factores de respuesta explicado en el apartado 4.4.1.
- 2) En la aplicación del método de identificación cuando se parte de la descripción geométrica y las propiedades físicas de los muros, el régimen periódico establecido se tiene analíticamente y de éste la función de transferencia en frecuencia necesaria para plantear el sistema de ecuaciones que proporciona los parámetros.

La respuesta armónica de muros se detalla en el apartado 4.5

La última parte del capítulo (apartado 4.5 en adelante) muestra los resultados de la aplicación del método a tres situaciones diferentes según un criterio de dificultad progresiva:

- 1) Obtención del modelo reducido a partir de la descripción geométrica y de las propiedades físicas de las capas que constituyen el muro. En este caso el término independiente del sistema de ecuaciones se obtiene de la matriz de transferencia en frecuencia analítica. El modelo detallado con que se comparan los resultados es el método de los factores de respuesta. Se utilizan excitaciones tipo que simulan las condiciones a que va a estar sometido el muro en la realidad.
- 2) Reducción de funciones de transferencia. En este caso se dispone de la función de transferencia en el tiempo y se obtiene otra de orden reducido. El término independiente formado por las amplitudes complejas del flujo de calor para determinadas frecuencias se obtiene directamente de la función de transferencia. El modelo detallado es también la función de transferencia no reducida. Esta metodología supone una mejora respecto a las existentes, no siendo necesario el cálculo de las raíces del polinomio característico. En el presente trabajo se muestra cómo el método de identificación propuesto es una potente herramienta para la reducción de funciones de transferencia, exigiendo sólo la resolución de un sistema lineal de 5 ecuaciones con 5 incógnitas.
- 3) Obtención del modelo reducido a partir de datos experimentales obtenidos excitando según un escalón a un muro real. La función de transferencia en frecuencia del muro se obtiene a partir del desarrollo en serie de Fourier de los datos experimentales de entrada y salida de sistema.

4.2 DEFINICION DEL PROBLEMA

Se obtendrán modelos simples del flujo de calor en una de las superficies de un muro sometido a condiciones de temperatura impuesta. Una dimensión es mucho menor que las otras dos y por tanto el flujo de calor en el muro, eliminando los efectos de borde, se produce sólo en dirección normal a su superficie (ver figura 4.1).

En el planteamiento del problema se considera el elemento compuesto por diferentes capas homogéneas de propiedades constantes con la temperatura y el tiempo.

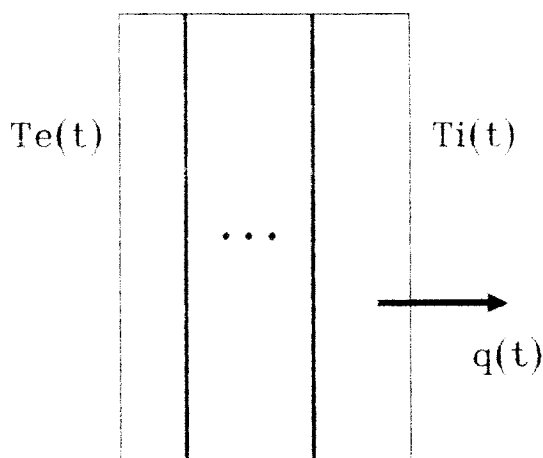


Figura 4.1: Problema de conducción unidimensional considerado.

Las condiciones de contorno son, como se ha dicho, de temperatura impuesta. Cualquier otra condición de contorno, convectiva, radiante o de flujo de calor impuesto puede ser expresada según una condición de temperatura impuesta como demuestra Molina en [63]. Pueden considerarse temperaturas en el aire o en la superficie, según se incluyan o no las resistencias convectivas de las superficies del muro.

Para este problema de conducción unidimensional no existe una solución analítica para cualesquiera condiciones iniciales y de contorno. Sólo en el caso de sollicitaciones particulares puede encontrarse una solución exacta. La solución exacta existe para excitaciones de tipo triángulo o senoidal. Las repuestas a estas excitaciones particulares serán utilizadas en lo que sigue en forma de factores de respuesta y respuesta armónica.

4.3 MODELIZACION SIMPLIFICADA DE MUROS

Interesa en este punto situar la modelización simplificada de muros en su contexto. La aplicación del método de identificación que aquí se presenta se suma a una serie de vías para conseguir el mismo objetivo: modelos simples de conducción unidimensional en régimen transitorio. En este apartado se detallarán cuáles son esas vías alternativas,

permitiendo así apreciar, por su simplicidad el método que se propone en la tesis. Los diferentes trabajos, atendiendo a las líneas expuestas en el segundo capítulo de la tesis, se pueden clasificar en reducción de modelos detallados e identificación. A su vez en cada caso se consideran modelos de descripción interna y externa.

Es oportuno recordar lo siguiente:

- 1) Nada impide denominar reducción de modelos a los procedimientos de identificación cuando éstos utilizan respuestas obtenidas con los modelos detallados que quieren ser reducidos.
- 2) Los modelos de parámetros concentrados de muros en resistencias y capacidades pueden ser considerados de descripción externa o interna según el grado de detalle del modelo deseado.

4.3.1 Reducción de modelos detallados

- a) Modelos de descripción interna.

La discretización espacial, por ejemplo mediante diferencias finitas, de un problema de conducción proporciona de forma natural una representación interna del problema tratado donde las temperaturas son los estados. La ecuación de observación es la que permite obtener los flujos de calor en función de los estados, es decir, las temperaturas.

La principal ventaja de estos modelos es la posibilidad de asignar un significado físico a cada uno de los conceptos matemáticos que van apareciendo. Se facilita entonces una reducción de modelos basada en conceptos físicos como energía de cada modo, modos rápidos y lentos, etc.

En térmica de edificios, los métodos basados en modelos de variables de estado fueron importados por la Escuela de Minas de Paris, concretamente fueron pioneros los trabajos de Bacot [65] y posteriormente los de Sicard [66] y Lefebvre [67].

Se demuestra en estos trabajos que la representación de la solución a partir de los autovectores no depende de la discretización elegida y que se puede obtener una buena representación del sistema continuo mediante una discretización espacial apropiada.

Al modelo de variables de estado se aplican las técnicas de reducción conocidas. En la mayoría de los casos se utilizan técnicas de agregación mediante la descomposición, en la base modal, en modos dominantes (lentos e inestables) y modos rápidos. Este tipo de reducción está particularmente próxima a la física del problema tratado y resulta una posibilidad atractiva para la obtención de modelos de orden reducido, si bien como inconvenientes pueden citarse, el que exigen un buen conocimiento del sistema térmico tratado, la integración de una ecuación diferencial ordinaria para el cálculo del flujo de calor, en el caso de modelos continuos y el cálculo paralelo de la salida y los estados. La tesis de Neirac [68] es una buena referencia de las posibilidades de estas técnicas.

b) Modelos de descripción externa.

La utilización de funciones de transferencia para representar el comportamiento térmico de muros está ampliamente extendida. En este tipo de representación no se calculan variables intermedias entre las entradas y las salidas. Se tiene una ecuación que relaciona el flujo de calor y las temperaturas superficiales. Se prescinde por tanto de las temperaturas intermedias del muro. El modelo detallado es a priori más reducido si es de representación externa en lugar de interna.

En la literatura se encuentran principalmente métodos de aproximación mediante desarrollos limitados, en particular la aproximación de Padé y la transformación bilineal en Seem y otros [69] proponiéndose una mejora posterior, en este caso aplicada sólo al problema de conducción en muros, basada en el concepto de raíz dominante, definida como aquella que tiene el mayor efecto en la respuesta temporal (Seem y otros [11]). Mediante este último procedimiento se consiguen excelentes resultados pasando de modelos de orden 4 a modelos de orden 2, obteniéndose respuestas temporales coincidentes, frente a excitaciones escalón, entre el modelo detallado y el reducido.

En Boileau y otros [12] puede encontrarse una comparación de dos métodos de obtención de funciones de transferencia reducidas de muros mediante desarrollos limitados, uno de ellos la aproximación de Padé y el otro consiste en tomar el primer polo y cero de la función de transferencia sin reducir. Los resultados de las dos aproximaciones son equivalentes siendo la aproximación de Padé más sencilla de poner en práctica.

La aproximación mediante desarrollos limitados prescinde del significado físico de los parámetros del modelo. Es una reducción matemática en la que los

conocimientos del sistema físico que describe el modelo no son considerados. Son técnicas, por lo tanto, de carácter general, que han sido desarrolladas en su mayoría en el campo de la automática y el control, exigiendo en muchos casos la utilización de métodos pesados de resolución de ecuaciones.

4.3.2 Identificación

a) Modelos de descripción interna

La identificación de modelos de estado ha sido llevada a la práctica principalmente por la Escuela de Minas de Paris, no sólo del comportamiento térmico de muros, sino también de edificios.

A las cuestiones previas que todo método de identificación implica (orden del modelo, excitaciones utilizadas, periodo de identificación, paso de tiempo de muestreo, etc) se suman en este caso las relativas a la representación elegida. En particular aparecen dos problemas:

- 1) Puesto que la representación en el espacio de estado no es única, es necesario imponer condiciones que fijen en que base se expresarán las ecuaciones de transición de estado y observación.
- 2) El procedimiento de identificación exige minimizar una función no lineal donde las incógnitas son los parámetros (elementos de las matrices de transición, control, observación y acoplamiento directo). El procedimiento de solución es iterativo (normalmente el algoritmo de Marquardt) y es necesario iniciar el cálculo proporcionando una solución inicial que sea suficientemente buena para llegar al mínimo absoluto de la función de coste.

Neveu [14] contesta algunas de estas cuestiones en el caso de un muro monocapa de cemento de 20 cm de espesor donde se trata de reproducir la temperatura de la superficie interior del muro a partir de la temperatura en la superficie exterior y el flujo de calor en la superficie interna. Se obtiene una diferencia de temperatura entre la obtenida por el modelo simple y los datos medidos menor de $0,1^{\circ}$ C con un modelo de orden 2.

Otra aplicación similar de identificación de modelo de estado de un muro de hormigón aislado por la superficie interior, esta vez con datos simulados mediante un modelo detallado, puede encontrarse en Bacot [13]. Se identifica, como en

el caso anterior, un modelo de orden 2.

Finalmente, como casos de identificación aplicados a la determinación de propiedades físicas de muros complejos, pueden citarse los trabajos de Marchio y otros [15] y Baudier y otros [70]. En la primera de estas referencias los errores obtenidos en la reconstrucción de la temperatura interior con un modelo de orden 2 son aceptables (máximos de $0,1^{\circ}\text{C}$) pero no ocurre lo mismo con la resistencia térmica obtenida a partir de los parámetros del modelo en relación al valor de referencia. Para el valor de la primera constante de tiempo se tienen igualmente buenos resultados. Por ejemplo para una placa de poliuretano de unos 6 cm de espesor se tiene con un algoritmo de Marquardt aplicado a un modelo de orden 1 una constante de tiempo de 68 min cuando el valor de referencia es de 65 min. Las divergencias, en el caso del valor de la resistencia térmica calculada, se atribuyen a la baja calidad de los datos medidos y no al método de identificación aplicado. En el segundo de estos trabajos se recomienda un modelo de orden 1 con acoplamiento directo entre la salida y la entrada o un modelo de orden 2, obteniéndose en esos casos valores de la resistencia térmica próximos a los valores de referencia.

b) Modelos de descripción externa

Los trabajos de obtención de funciones de transferencia simplificadas a partir de modelos detallados de simulación (la función de transferencia original) se han clasificado como reducción de modelos y no como identificación. Se mencionarán exclusivamente los que utilizan datos experimentales.

En Beron y otros [71] se utilizan dos placas de referencia adosadas a cada una de las superficies del muro del que se busca la función de transferencia. Si el muro es monocapa se determinan las características físicas de la pared de manera que la transformada de Laplace de la función de transferencia obtenida a partir de las propiedades físicas coincida con la obtenida experimentalmente a partir de las transformadas de Laplace de las temperaturas medidas. En los muros multicapa se calculan directamente las transformadas z de las excitaciones y respuestas aunque este procedimiento no se ha llevado a la práctica en la fecha de publicación del artículo. En el caso monocapa se obtiene una buena concordancia de los valores de propiedades físicas obtenidos con los valores de referencia.

En la tesis de Virgone [72] se miden directamente los factores de respuesta de muros simples y complejos frente a excitaciones rampa y escalón aplicadas a una

de las superficies del muro. Los valores de difusividad equivalente de los muros probados permiten reproducir la respuesta teórica del muro como si fuera homogéneo. Los resultados obtenidos no son sin embargo buenos, atribuyéndose el error a una mala calibración de los medidores de flujo de calor.

De la rápida revisión anterior se deduce la existencia de una gran variedad de resultados y métodos. No puede establecerse de forma definitiva un modelo simple de conducción unidimensional en muros ni una metodología válida con carácter general para la obtención de éstos. En forma sintética puede afirmarse:

- 1) Los métodos de reducción, tanto de modelos de descripción interna como externa, exigen o un buen conocimiento de la transferencia térmica en estudio, o un aparato matemático potente que ralentiza la reducción de modelos. En el caso de modelos de descripción interna se suman estos dos inconvenientes.
- 2) Los métodos de identificación son los más apropiados cuando se trata de estudiar datos experimentales obtenidos de sistemas reales.
- 3) Respecto a la opción: modelos de descripción interna/externa, la elección no es definitiva. Si el modelo se va a utilizar en la simulación térmica de sistemas más complejos que el propio muro, por ejemplo un edificio, parece que los modelos de descripción externa son más apropiados para acoplarse a la descripción completa del sistema. A cambio no proporcionan ninguna información de otras variables que pueden ser de interés, al menos de forma inmediata. En defensa de los métodos de descripción externa debe decirse que a los parámetros obtenidos para un modelo de variables de estado reducido no puede asignársele una interpretación física más rica que la obtenida con modelos de función de transferencia: los parámetros estáticos y constantes de tiempo pueden ser determinados igualmente en uno y otro modelo. Este problema es el de la separabilidad de los parámetros. Si bien la representación en variables de estado no reducida es físicamente más informativa que la representación mediante funciones de transferencia, lo mismo no puede afirmarse cuando se trata de modelos de orden reducido.

La obtención de modelos simples de conducción que sean a la vez precisos, sencillos de obtener y utilizar no es un tema, como se ha visto, cerrado. Sería de un enorme interés plantear una metodología que se ajustara a esos condicionantes. El método propuesto en la tesis va en esta dirección.

4.4 MODELOS ANALITICOS DE CONDUCCION

4.4.1 Función de transferencia en z . Factores de respuesta

En la etapa de validación de modelos que completa el proceso de identificación, una fase es estudiar la respuesta del modelo ante valores de las variables de entrada diferentes de las utilizadas para identificar, comparando la respuesta del sistema con la que se obtiene con el modelo. Cuando el muro se conoce a partir de la descripción geométrica y las propiedades físicas, el sistema es simulado por un modelo detallado: el método de los factores de respuesta.

Para excitaciones que se aproximan linealmente entre cada dos puntos de muestreo el método de los factores de respuesta ante entradas de tipo triángulo es una solución exacta si no existieran errores numéricos ni de truncamiento.

En este apartado se explicarán las bases del método de cálculo del flujo de calor en la superficie interna de un muro sometido a excitaciones en temperatura. El método fue presentado por Stephenson y Mitalas [55] y consiste en obtener la función de transferencia en z a partir de la relación entre el flujo de calor y las temperaturas superficiales en el campo de la transformada de Laplace.

Si se considera el muro multicapa de la figura 4.2, suponiendo que las propiedades físicas son constantes, la ecuación que proporciona el campo de temperaturas, para una cualquiera de las capas, en función de la coordenada x normal a las superficies, es:

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (4.1)$$

donde α es la difusividad térmica de la capa considerada (m^2/s).

Aplicando la transformada de Laplace se llega a una ecuación en derivadas ordinarias que puede ser resuelta obteniendo la transformada de Laplace de la temperatura. Conocido el campo de temperaturas, en el dominio de Laplace el flujo de calor es:

$$q(s) = -k \frac{dT(s)}{dx} \quad (4.2)$$

siendo k la conductividad térmica de la capa considerada (W/mK).

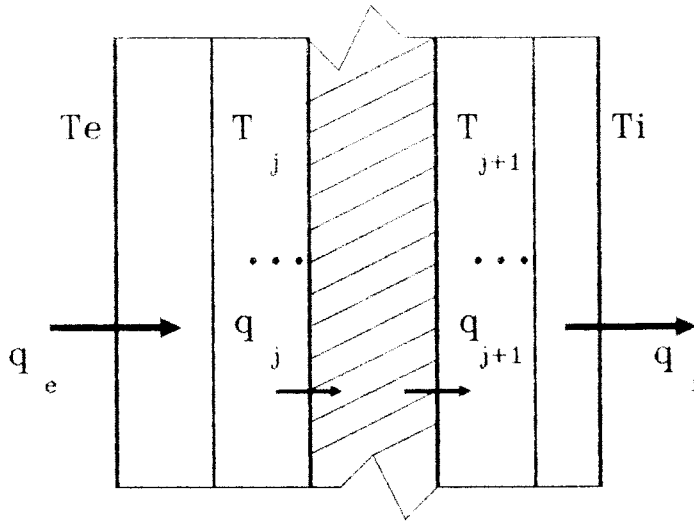


Figura 4.2: Muro multicapa.

Una vez resuelta la ecuación 4.1, en el dominio de las transformadas, para la capa j puede ponerse en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} T_j \\ q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{j+1} \\ q_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

La definición de los coeficientes de la matriz de transferencia puede encontrarse en Carslaw y Jaeger [9]. A partir de la matriz de transferencia para una capa pueden relacionarse los flujos de calor y temperaturas en las superficies del muro en el caso de N capas:

$$\begin{Bmatrix} T_e \\ q_e \end{Bmatrix} = \prod_{j=1}^N \begin{bmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_j \\ q_j \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

o definiendo la matriz producto:

$$\prod_{j=1}^N \begin{bmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

la ecuación 4.4 queda:

$$\begin{Bmatrix} T_e \\ q_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ q_i \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Una vez obtenida la matriz de transferencia en el dominio de Laplace para un muro multicapa, el método de la función de transferencia en z , en el que se basa el cálculo del flujo de calor de referencia con el que se comparan los resultados obtenidos con los modelos simples identificados, consiste en el paso al campo discreto a través de la equivalencia entre transformadas z y s . El procedimiento implica el cálculo de las raíces del denominador de la función de transferencia en s , aunque existen métodos alternativos que no exigen este cálculo, por ejemplo Ouyang y Haghighat [64].

4.4.2 Respuesta armónica

El método de identificación exige establecer la igualdad entre las funciones de transferencia en frecuencia del modelo simple y el sistema. Cuando el sistema, el muro, viene dado por la geometría y las propiedades termofísicas, la función de transferencia en frecuencia se determina analíticamente: es el régimen periódico establecido. Veamos cómo se obtiene.

Buscamos la respuesta en flujo de calor de un muro sometido a temperaturas que varían siguiendo una forma senoidal. Supongamos la capa homogénea de un muro multicapa que se muestra en la figura 4.3 sometido a excitaciones senoidales de temperatura en su superficie. Se trata de resolver la ecuación:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.7)$$

junto con las condiciones de contorno:

$$T(x_1, t) = T_1 e^{j\omega t} \quad (4.8)$$

$$T(x_2, t) = T_2 e^{j\omega t} \quad (4.9)$$

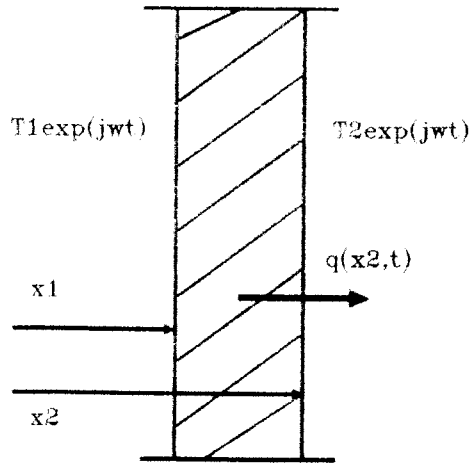


Figura 4.3: Capa de un muro multicapa.

La condición inicial no influye porque se trata de buscar el régimen periódico establecido. El campo de temperaturas es entonces, según se muestra en el capítulo 3 para un sistema lineal e invariante:

$$T(x, t) = A(x)e^{jwt} \quad (4.10)$$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$A(x) = C_1 e^{zx} + C_2 e^{-zx} \quad (4.11)$$

siendo z :

$$z = (1 + j)\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^{1/2} \quad (4.12)$$

$$C_1 = \frac{T_1 e^{-zx_2} - T_2 e^{-zx_1}}{e^{z(x_1 - x_2)} - e^{-z(x_1 - x_2)}} \quad (4.13)$$

$$C_2 = \frac{T_2 e^{zx_1} - T_1 e^{zx_2}}{e^{z(x_1-x_2)} - e^{-z(x_1-x_2)}} \quad (4.14)$$

Una vez obtenido el campo de temperaturas, el flujo de calor en cada superficie se calcula mediante la ecuación de Fourier, obteniéndose:

$$q(x_1, t) = q_1 e^{j\omega t} \quad (4.15)$$

$$q(x_2, t) = q_2 e^{j\omega t} \quad (4.16)$$

siendo:

$$q_1 = -k[C_1 z e^{zx_1} - C_2 z e^{-zx_1}] \quad (4.17)$$

$$q_2 = -k[C_1 z e^{zx_2} - C_2 z e^{-zx_2}] \quad (4.18)$$

Las funciones de transferencia en frecuencia, para el flujo de calor en la superficie interna de una sola capa de muro quedan entonces:

$$G_1(j\omega) = \frac{q_2}{T_1} \quad (4.19)$$

$$G_2(j\omega) = \frac{q_2}{T_2} \quad (4.20)$$

Para obtener la función de transferencia de un muro multicapa se sigue un procedimiento análogo al explicado en el apartado 4.4.1.

MURO	$U (W/m^2 K)$	Peso (kg/m^3)
Ligero	1,47	208
Medio	1,38	276
Pesado	0,82	340

Tabla 4.1: Coeficiente global de transferencia y peso de los muros considerados.

4.5 OBTENCION DE MODELOS REDUCIDOS A PARTIR DE LA DESCRIPCION GEOMETRICA Y LAS PROPIEDADES FISICAS

4.5.1 Descripción de los casos: ligero/medio/pesado

Se han tomado de Zornoza [73] tres muros. Los valores del coeficiente global de transferencia y del peso de cada muro se muestran en la tabla 4.1. La geometría y propiedades se muestran en la tablas 4.2 a 4.4 (las capas se definen desde el exterior al interior).

Es interesante estudiar el amortiguamiento y desfase en función de la frecuencia que presentan estos muros para las excitaciones exterior e interior. Las figuras 4.4 a 4.6 muestran este comportamiento. El amortiguamiento esta referido al que se obtiene en régimen permanente (frecuencia nula). Los siguientes puntos son interesantes a destacar:

- 1) Para la excitación exterior el muro es un filtro para las altas frecuencias. El amortiguamiento es tanto mayor cuanto mayor es la frecuencia. Además al aumentar el peso del muro, para una misma frecuencia, el amortiguamiento es mayor. Por ejemplo para el muro pesado y la frecuencia de 3 ciclos/día el amortiguamiento es del orden del que se produce para el muro ligero para una frecuencia de 10 ciclos/día.

Matemáticamente puede mostrarse este comportamiento a partir de la matriz de transferencia del muro. Suponiendo un muro homogéneo sometido exclusivamente a una excitación exterior, la función de transferencia es:

Descrip. capa	$k(W/mK)$	$\rho(kg/m^3)$	$c_p(J/kgK)$	esp.(m)	$R(m^2K/W)$
Aire exterior	-	-	-	-	0,06
Enfoscado de cemento	1,4	2000	1050	0,020	-
Ladrillo hueco doble	0,49	1200	920	0,090	-
Cámara aire (5 cm)	-	-	-	-	0,18
Ladrillo hueco sencillo	0,49	1200	920	0,040	-
Enlucido de yeso	0,30	800	920	0,015	-
Aire interior	-	-	-	-	0,11

Tabla 4.2: Muro ligero.

Descrip. capa	$k(W/mK)$	$\rho(kg/m^3)$	$c_p(J/kgK)$	esp.(m)	$R(m^2K/W)$
Aire exterior	–	–	–	–	0,06
Ladrillo macizo	0,49	1800	920	0,120	–
Cámara aire (5 cm)	–	–	–	–	0,18
Ladrillo hueco sencillo	0,49	1200	920	0,040	–
Enlucido de yeso	0,30	800	920	0,015	–
Aire interior	–	–	–	–	0,11

Tabla 4.3: Muro medio.

Descrip. capa	$k(W/mK)$	$\rho(kg/m^3)$	$c_p(J/kgK)$	esp.(m)	$R(m^2K/W)$
Aire exterior	–	–	–	–	0,06
Enfoscado de cemento	1,4	2000	1050	0,020	–
Bloque hormigón ligero	0,33	1000	1050	0,240	–
Cámara aire (5 cm)	–	–	–	–	0,18
Ladrillo hueco sencillo	0,49	1200	920	0,040	–
Enlucido de yeso	0,30	800	920	0,015	–
Aire interior	–	–	–	–	0,11

Tabla 4.4: Muro pesado.

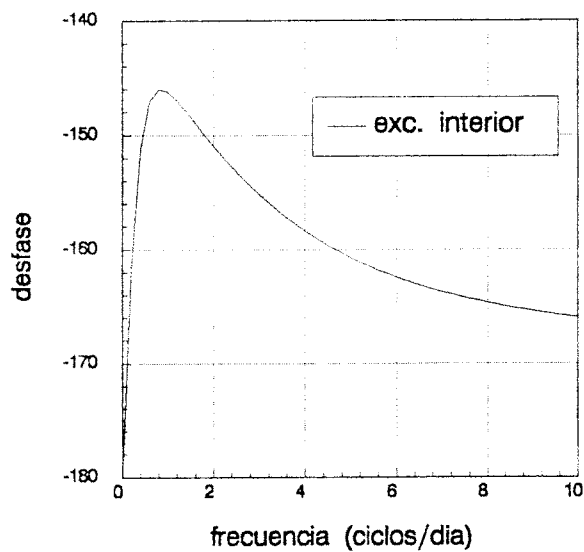
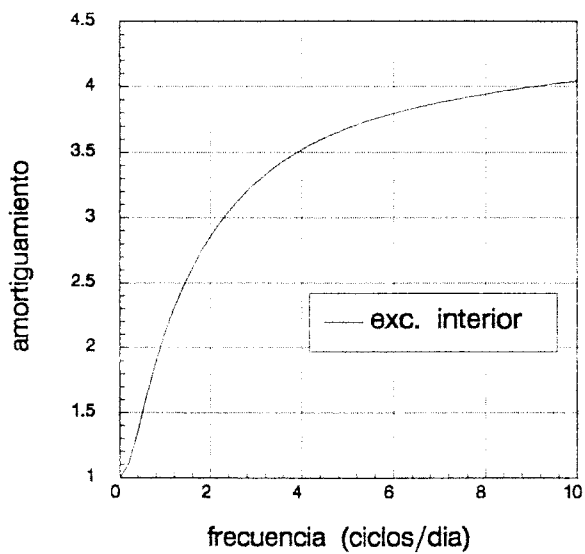
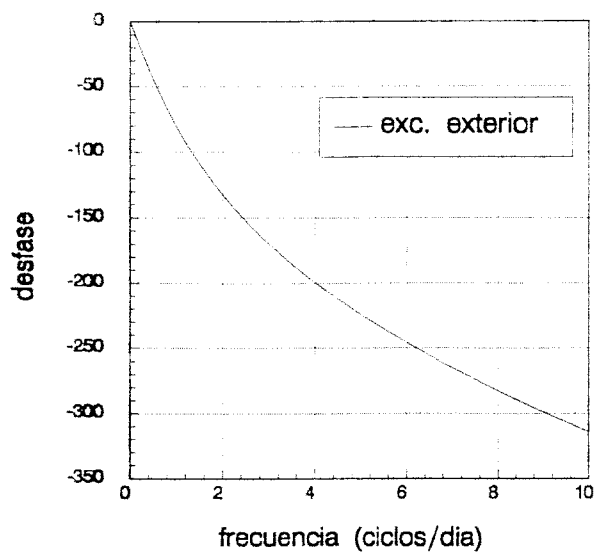
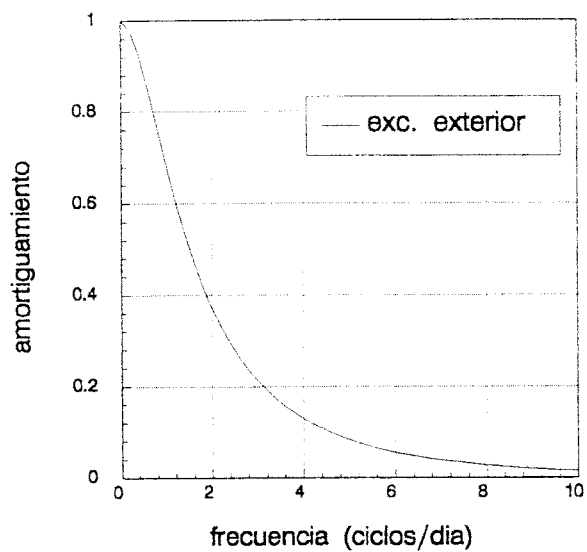


Figura 4.4: Amortiguamiento y desfase del muro ligero ante excitaciones exteriores e interiores.

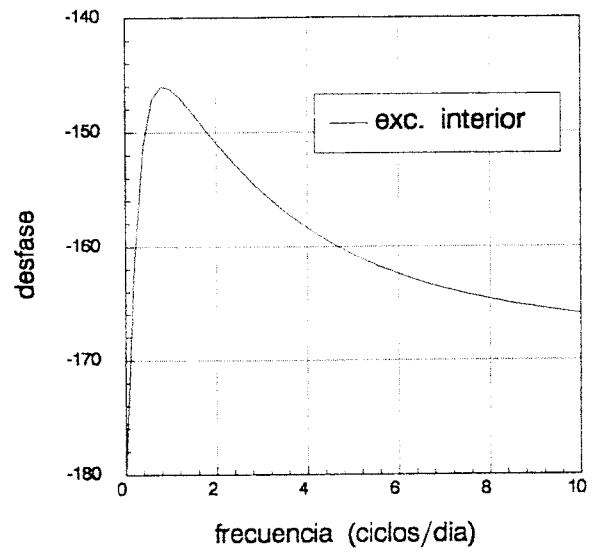
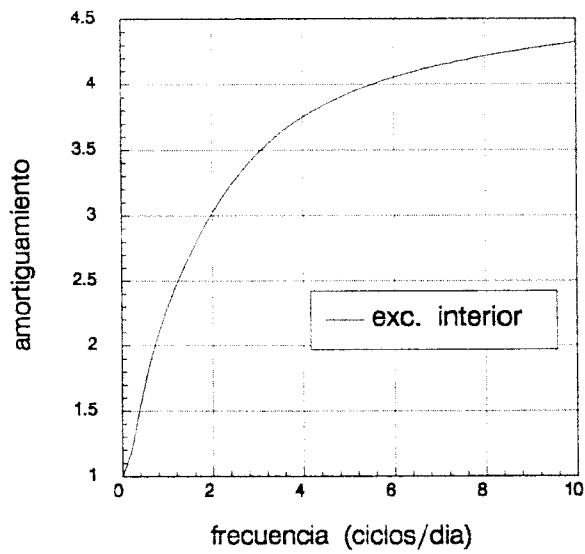
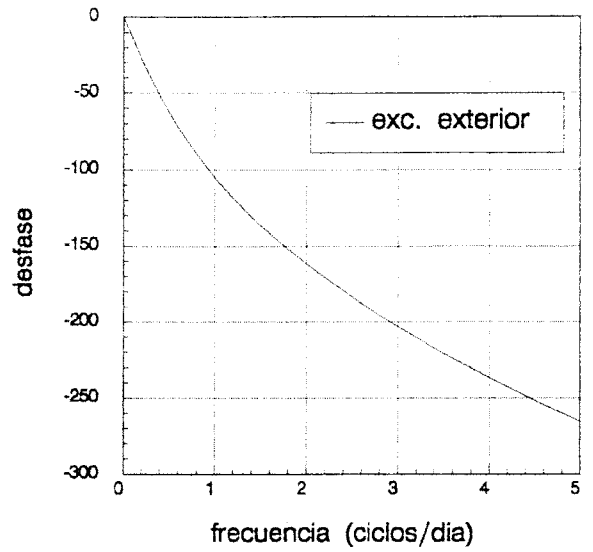
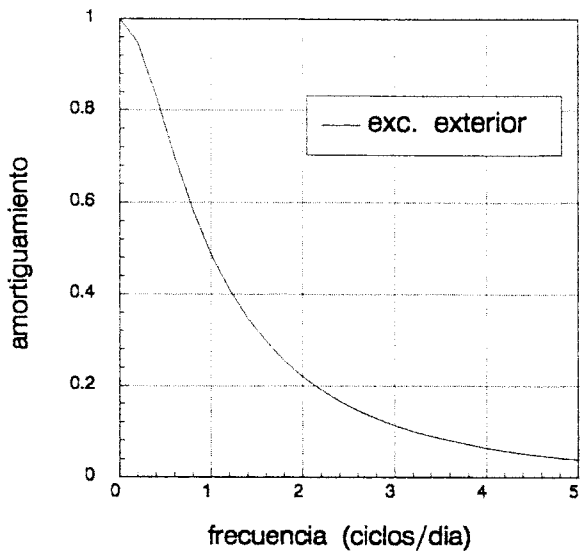


Figura 4.5: Amortiguamiento y desfase del muro medio ante excitaciones exteriores e interiores.

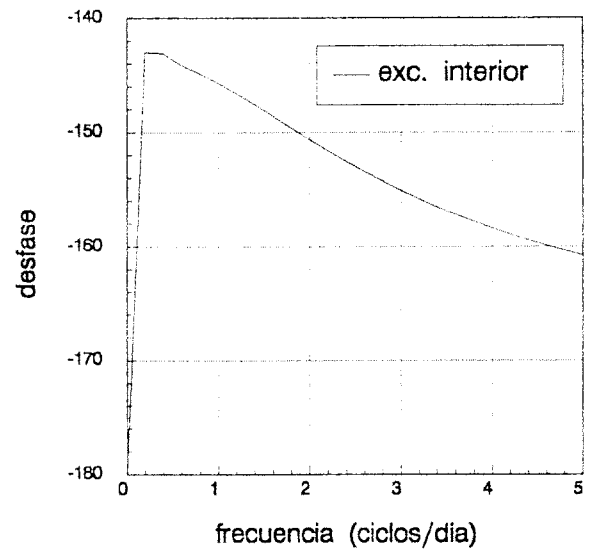
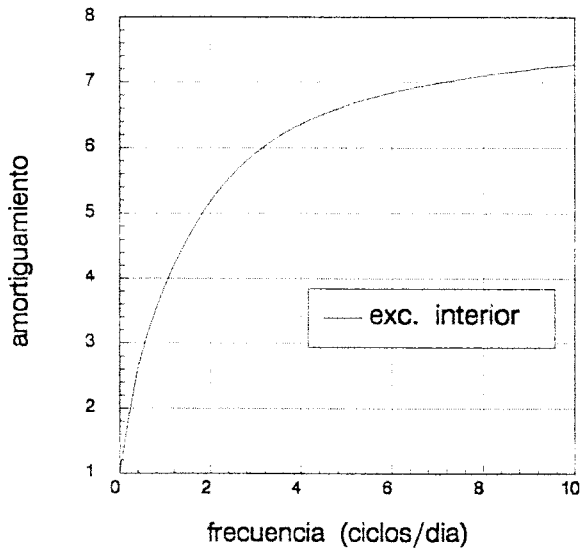
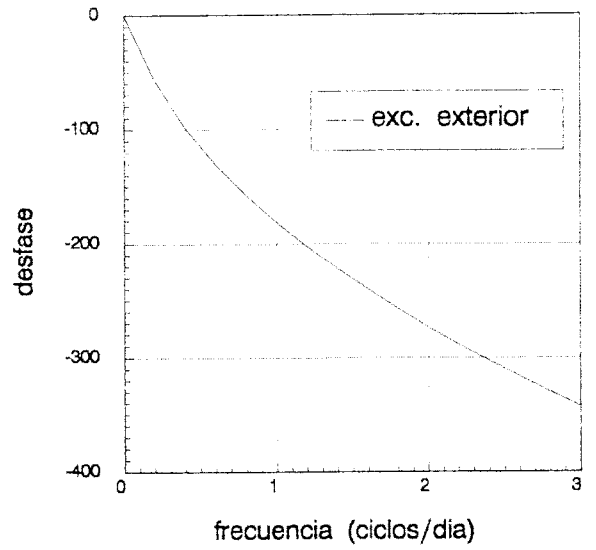
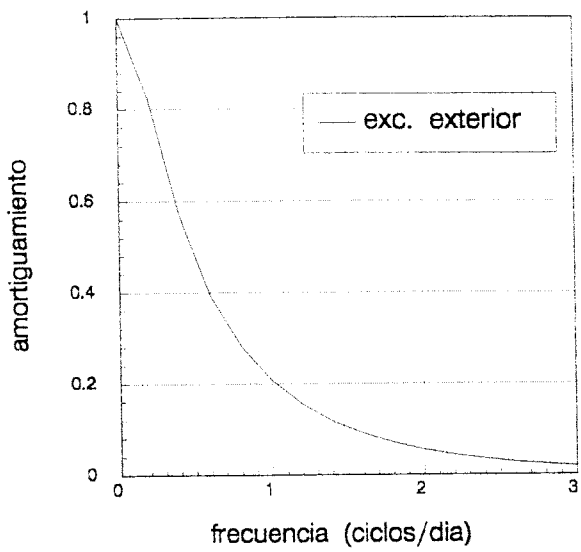


Figura 4.6: Amortiguamiento y desfase del muro pesado ante excitaciones exteriores e interiores.

$$G(jw) = \frac{q_2}{T_1} \quad (4.21)$$

El valor de ésta puede obtenerse de las ecuaciones, 4.13, 4.14 y 4.18 resultando para un muro homogéneo:

$$G(jw) = \frac{kz}{sh[z(x_2 - x_1)]} \quad (4.22)$$

El módulo de la función de transferencia en frecuencia para una frecuencia dada será entonces tanto menor cuando suceda:

$$|G(jw)| \downarrow \text{ si } \begin{cases} k \downarrow \\ (x_2 - x_1) \uparrow \\ \rho \uparrow \\ c_p \uparrow \end{cases} \quad (4.23)$$

es decir, en muros poco conductivos, de gran espesor, alto calor específico y densidad.

Se observa en la ecuación 4.22 que el módulo de la función de transferencia decae con la coordenada x según una exponencial cuyo exponente puede ponerse x/z^{-1} donde x es la distancia desde la superficie de aplicación de la excitación. Se define una longitud característica de amortiguamiento del flujo de calor que se denomina espesor efectivo (en algunos casos espesor de piel, Y. Ammirati [16]):

$$\epsilon = \sqrt{2\alpha/w} \quad (4.24)$$

donde α es la difusividad térmica de la capa si el muro fuera homogéneo. El espesor efectivo depende de las propiedades físicas del muro y de la frecuencia. Cuanto mayor es la frecuencia menor es el espesor efectivo del muro, es decir, la información que proporciona la excitación llega menos lejos de la superficie donde ésta se aplica.

Puesto que incluso para el muro más ligero las curvas de amortiguamiento están muy próximas a 0 para frecuencias que no llegan a 12 ciclos/día, el paso de tiempo de 1 hora para los modelos regresivos es adecuado, según se vió en el capítulo 3.

- 2) Con independencia del tipo de muro, el amortiguamiento y desfase para la excitación interior coinciden a partir de una cierta frecuencia. En el caso del amortiguamiento hay que tener en cuenta que éste ha sido adimensionalizado con el coeficiente global de transferencia.

Físicamente puede explicarse este comportamiento a partir del concepto de espesor efectivo definido anteriormente. Cuanto mayor es la frecuencia menos espesor de muro está excitado. Para una frecuencia suficientemente alta (por ejemplo la que hace el espesor efectivo menor que la capa de muro más próxima a la excitación) sólo es esa capa la que determina el flujo de calor en la superficie del muro donde se aplica la excitación. Como los muros elegidos tienen la misma composición en la capas interiores, las respuestas en flujo de calor en la superficie interior para excitaciones en la misma superficie coinciden.

4.5.2 Descripción de las excitaciones de prueba

Los programas de simulación térmica de edificios pretenden, entre otros, dos objetivos:

- 1) Determinación de la carga punta
- 2) Determinación del consumo

Para ello se utilizan datos meteorológicos, que representan las condiciones climáticas del lugar de emplazamiento del edificio, con un cierto percentil que cuantifica la posibilidad de que las condiciones sean superadas. Este día tipo se repite a partir de un periodo de puesta a régimen y se obtienen el consumo y la carga punta.

Por otro lado, las condiciones interiores vienen fijadas por el uso del edificio.

Para seleccionar las excitaciones a que se van a someter los modelos en la fase de validación, se tiene en cuenta que las excitaciones sean lo más próximas posible a la realidad y a la vez con un contenido en frecuencia amplio para comprobar si, a pesar de basarse el método en ajustar el comportamiento del modelo para sólo unas pocas frecuencias (2 solamente para un modelo de 5 parámetros), la validez del modelo es

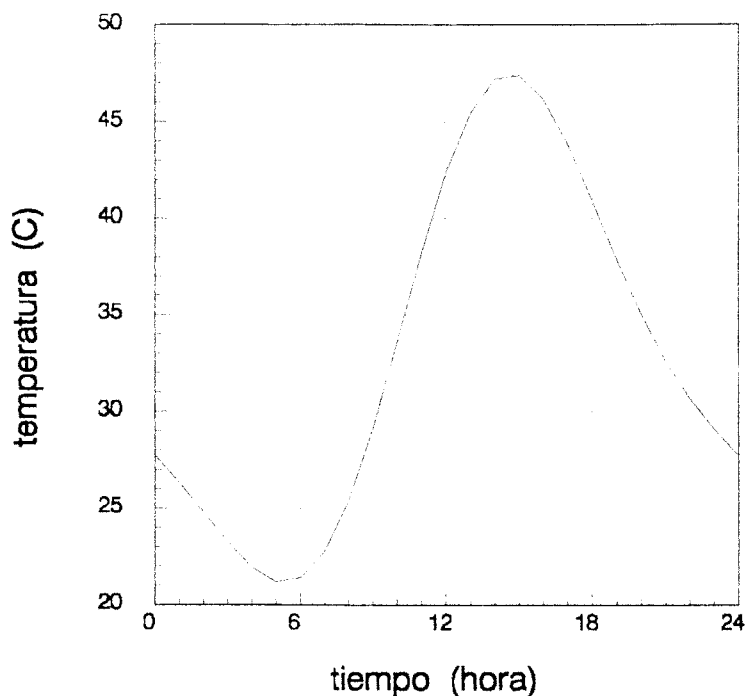


Figura 4.7: Evolución diaria de la temperatura sol-aire exterior.

general.

Para la excitación exterior se ha tomado una temperatura sol-aire correspondiente a Sevilla en julio con un percentil del 1%:

$$T_e = 33,1 + 12,21 \cos(w_1 t - 4,07) + 2,95 \cos(w_2 t - 0,855) \quad (4.25)$$

donde w_1 y w_2 son las frecuencias de 1 y 2 ciclos/día.

Para la excitación interior se supone que se mantiene durante el día una temperatura de consigna de 27°C (cuando existe ocupación). Durante la noche se facilita la ventilación nocturna y la temperatura interior desciende desde la consigna hasta 21°C de forma lineal. Las figuras 4.7 y 4.8 muestran la evolución temporal de las excitaciones durante un día.

Si las excitaciones fueran desarrollables en serie de Fourier en pocos armónicos el modelo simple de muro sería exacto: proporcionaría el mismo flujo de calor que el modelo analítico basado en la matriz de transferencia en el campo de la frecuencia. Se

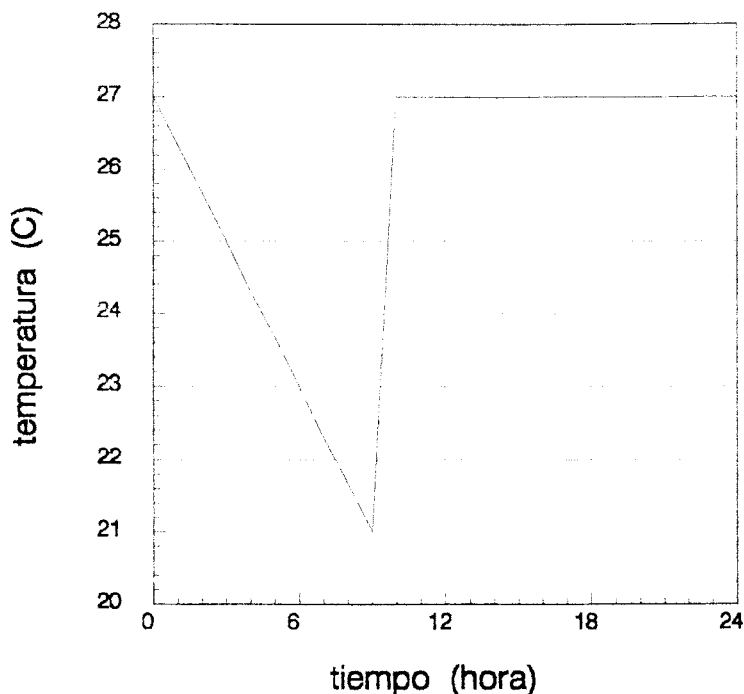


Figura 4.8: Evolución diaria de la temperatura interior.

trataría de obtener un modelo con el suficiente número de parámetros de manera que, para las frecuencias en que se desarrollaran las excitaciones, las funciones de transferencia en frecuencia del modelo simple y del detallado coincidieran.

En este caso se ha elegido una excitación exterior que se desarrolla según dos armónicos de 1 y 2 ciclos/día. Para la excitación interior, si bien se considera que es periódica de periodo 24 h y por lo tanto puede desarrollarse en serie de Fourier según frecuencias múltiplos de 1 ciclo/día, el contenido en frecuencia no está restringido a unos pocos armónicos. Habrá entonces que responder a la duda de si un modelo simple, donde sólo se han impuesto 2 frecuencias, responderá bien ante excitaciones que se desarrollan en serie de Fourier en más de 2 armónicos.

4.5.3 Selección del modelo

Como se vió en el apartado 4.3 donde se revisaron las diferentes aproximaciones al problema de la modelización simplificada de muros, el orden mínimo con el que se obtienen resultados satisfactorios es 2.

El orden del modelo fija, en el caso de un modelo de descripción interna de tipo regresivo, el número de coeficientes que multiplican a la salida en instantes anteriores,

esto es, al flujo de calor en la superficie interna del muro en horas anteriores.

A partir del denominador de la función de transferencia se conoce el valor de las constantes de tiempo del sistema. El número de constantes de tiempo es teóricamente infinito, por ejemplo, en el caso de un modelo de descripción interna obtenido a partir de una discretización espacial de la ecuación de conducción, serían necesarios infinitos nodos para obtener exactamente la respuesta analítica. Un número infinito de nodos proporciona infinitos autovalores y por tanto infinitas constantes de tiempo.

Parece lógico que, tratándose de un modelo simplificado de orden reducido en el que sólo se consideran un par de constantes de tiempo, éstas sean diferentes según la excitación de que se trate. El muro no debe reaccionar con las mismas constantes de tiempo cuando se excite desde el exterior (mayores constantes de tiempo) que cuando se hace desde el interior (menores constantes de tiempo), suponiendo siempre que se estudia la respuesta en flujo de calor en el interior del muro.

Siguiendo estas consideraciones se ha separado la respuesta del muro según la excitación obteniéndose dos modelos de segundo orden, uno para la excitación exterior y otro para la interior, anulando la excitación en la superficie que no se estudia. Para obtener el flujo de calor global cuando el muro sea excitado por las dos superficies basta aplicar el principio de superposición.

La desventaja de tener dos modelos diferentes para cada excitación es aumentar el número de parámetros en 2. Sin embargo, la mejora en la calidad de los resultados, y el hecho de que los parámetros intervienen en forma de productos y sumas, no aumentando por lo tanto de forma significativa la pesadez del modelo, hacen que se haya elegido esta posibilidad.

En cuanto a los coeficientes que multiplican a la excitación, temperatura exterior o interior, se elegirá el mismo número de coeficientes que para el flujo de calor. De esta forma se tendrá un sistema lineal de 5 incógnitas con 5 ecuaciones: las 4 procedentes de la imposición de la igualdad de la función de transferencia en frecuencia del modelo y el sistema y una ecuación adicional obtenida de la imposición del régimen permanente.

De entre otras posibilidades, aumentando el número de parámetros, ha sido elegida la que presenta un compromiso óptimo entre exactitud del modelo simple y número reducido de parámetros.

El modelo, a partir de todo lo anterior, está definido por la ecuación:

$$q(t) = a_1q(t-1) + a_2q(t-2) + b_0T(t) + b_1T(t-1) + b_2T(t-2) \quad (4.26)$$

4.5.4 Selección de las frecuencias

La imposición del régimen permanente equivale a hacer coincidir las funciones de transferencia para frecuencia nula. Las otras dos frecuencias para las que se impone la igualdad de funciones de transferencia deben ser suficientemente representativas del comportamiento del muro en el espectro en que va a ser excitado.

Los muros que se tratan en este apartado se comportan como filtros de paso bajo, amortiguando casi totalmente las excitaciones exteriores superiores a unos pocos ciclos/día (10 ciclos/día en el muro ligero y 3 ciclos/día para el pesado).

Para la excitación exterior, que se descompone en serie de Fourier en armónicos de 1 y 2 ciclos/día, lo mismo que cualquier otra excitación meteorológica del tipo temperatura sol-aire, se seleccionan estas dos frecuencias para establecer el sistema de ecuaciones. En Molina [63] puede encontrarse una discusión de la aproximación de las variables meteorológicas tomando diferente número de armónicos.

Para la excitación interior no es evidente la selección de las frecuencias que deben imponerse. La figura 4.9 muestra el módulo de las constantes complejas que multiplican cada frecuencia en el desarrollo en serie de Fourier de la excitación interior. Como puede observarse los armónicos de 1 y 2 ciclos/día tienen, el que menos, doble peso que el mayor de los siguientes. Como selección lógica aparecen por tanto estas dos frecuencias para llevar a cabo la identificación. Posteriormente se discutirá que efecto tiene la elección de otras frecuencias.

4.5.5 Imposición del régimen permanente

El modelo de descripción externa propuesto es, en principio, de caja negra. Hasta ahora no se ha añadido información de la física del problema. Interesa, para acotar el espacio de los parámetros, imponer restricciones que aproximen el modelo de caja negra a uno de conocimiento.

Conocidas la composición del muro y su geometría, el comportamiento en régimen permanente queda definido a partir del coeficiente global de transferencia U ($W/m^2 K$). En régimen permanente el modelo 4.26 queda:

$$q(1 - a_1 - a_2) = T(b_0 + b_1 + b_2) \quad (4.27)$$

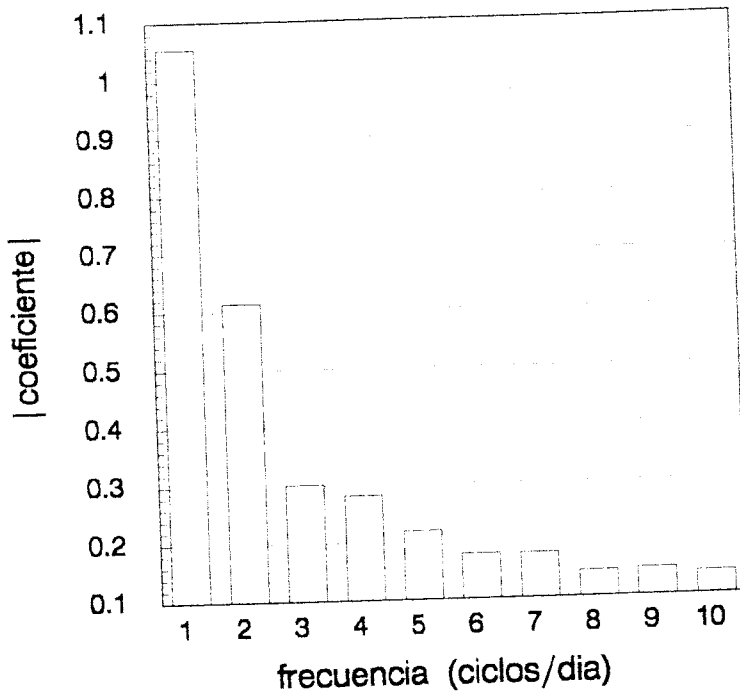


Figura 4.9: Módulo de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la excitación interior.

obteniéndose la siguiente ecuación para los parámetros:

$$a_1U + a_2U + b_0 + b_1 + b_2 = U \quad (4.28)$$

4.5.6 Planteamiento del sistema

Los parámetros del modelo 4.26 se determinan a partir de la resolución de un sistema lineal de 5 ecuaciones con igual número de incógnitas, resultante de la imposición de igualdad de la función de transferencia del modelo reducido y de la función de transferencia en frecuencia analítica para ciertas frecuencias. Veamos cómo se llega a ese sistema.

Si se han seleccionado las frecuencias w_1 y w_2 , el amortiguamiento y desfase del flujo de calor que causa el sistema para esas frecuencias, son conocidos. Sean $G(jw_1)$ y $G(jw_2)$ los valores de la función de transferencia para esas frecuencias.

A partir del modelo 4.26 y de acuerdo a la ecuación 3.28, la función de transferencia en frecuencia es, suponiendo régimen periódico establecido:

$$G_m(jw) = \frac{b_0 + b_1 e^{-jw t_0} + b_2 e^{-2jw t_0}}{1 - a_1 e^{-jw t_0} - a_2 e^{-2jw t_0}} \quad (4.29)$$

Estableciendo la igualdad entre las dos funciones de transferencia e imponiendo el régimen permanente:

$$A \cdot \Theta = B \quad (4.30)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}[G(jw_1)e^{-jw_1 t_0}] & \operatorname{Re}[G(jw_1)e^{-2jw_1 t_0}] & 1 & \operatorname{Re}[e^{-jw_1 t_0}] & \operatorname{Re}[e^{-2jw_1 t_0}] \\ \operatorname{Im}[G(jw_1)e^{-jw_1 t_0}] & \operatorname{Im}[G(jw_1)e^{-2jw_1 t_0}] & 1 & \operatorname{Im}[e^{-jw_1 t_0}] & \operatorname{Im}[e^{-2jw_1 t_0}] \\ \operatorname{Re}[G(jw_2)e^{-jw_2 t_0}] & \operatorname{Re}[G(jw_2)e^{-2jw_2 t_0}] & 1 & \operatorname{Re}[e^{-jw_2 t_0}] & \operatorname{Re}[e^{-2jw_2 t_0}] \\ \operatorname{Im}[G(jw_2)e^{-jw_2 t_0}] & \operatorname{Im}[G(jw_2)e^{-2jw_2 t_0}] & 1 & \operatorname{Im}[e^{-jw_2 t_0}] & \operatorname{Im}[e^{-2jw_2 t_0}] \\ U & U & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\Theta^T = \{a_1, a_2, b_0, b_1, b_2\} \quad (4.32)$$

$$B^T = \{\operatorname{Re}[G(jw_1)], \operatorname{Im}[G(jw_1)], \operatorname{Re}[G(jw_2)], \operatorname{Re}[G(jw_2)], U\} \quad (4.33)$$

Resolviendo el sistema 4.30 se tiene el vector de parámetros.

MURO	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
Ligero	1,269	-0,389	$1,731 \cdot 10^{-2}$	$-3,046 \cdot 10^{-2}$	0,189
Medio	1,440	-0,503	$3,156 \cdot 10^{-2}$	$-9,227 \cdot 10^{-2}$	0,148
Pesado	1,865	-0,880	$4,744 \cdot 10^{-2}$	-0,1036	$6,833 \cdot 10^{-2}$

Tabla 4.5: Parámetros identificados para la excitación exterior.

4.5.7 Resultados de la identificación

Una vez llevada a cabo la estimación de parámetros y continuando con la metodología del proceso de identificación, se pasa a la validación del modelo. En este apartado se muestran los resultados obtenidos para cada uno de los muros ligero, medio y pesado. A continuación se estudia la validez de los modelos obtenidos a partir de los conceptos de estabilidad y constantes de tiempo. Finalmente se aplican las entradas tipo a los modelos y se comparan las salidas con las obtenidas con el modelo detallado de referencia.

a) Excitación exterior

La tabla 4.5 muestra los resultados de la identificación del modelo 4.26 para excitaciones exteriores, manteniendo nula la temperatura interior y tomando para identificar las frecuencias correspondientes a 1 y 2 ciclos/día.

A partir de la expresión deducida en el capítulo 3 para las constantes de tiempo:

$$\tau = \frac{t_0}{\ln(1/\lambda)} \quad (4.34)$$

se tienen los valores de las constantes de tiempo en horas para la excitación exterior que muestra la tabla 4.6.

Las raíces del polinomio característico son reales y positivas de valor menor que 1 en los muros ligero y medio. En el caso del muro pesado las raíces son complejas

MURO	τ_1	τ_2
Ligero	3,492	1,520
Medio	5,823	1,941
Pesado	4,2	4,2

Tabla 4.6: Constantes de tiempo en horas para la excitación exterior.

conjugadas de parte real menor que 1. Por ello en la tabla 4.6 se ha repetido la constante de tiempo obtenida con la parte real de las raíces del polinomio característico. Los modelos serán, según lo expuesto en el capítulo anterior, estables.

El hecho de que las raíces del polinomio característico para el muro pesado sean complejas significa que el modelo es subamortiguado. Los sistemas reales que se tratan son siempre sobreamortiguados. Aparece por lo tanto una disfunción entre el modelo y el sistema que no será detectada cuando se utilice el modelo para excitaciones que puedan descomponerse en armónicos de 1 y 2 ciclos/día. La mejor respuesta temporal del modelo cuando se excite el muro con excitaciones compuestas de estas frecuencias se tendrá con los parámetros de la tabla 4.5. Existe sin embargo la posibilidad de obtener un modelo sobreamortiguado del comportamiento térmico del muro pesado seleccionando otras frecuencias para identificar. En el apartado correspondiente a la aplicación del método de identificación como procedimiento de reducción de funciones de transferencia se discutirá qué ocurre cuando se seleccionan otras frecuencias.

Las diferencias en los flujos de calor obtenidos con los modelos simple y detallado se deben a errores de tipo numérico así como a los propios errores del método de los factores de respuesta. Como ya se ha dicho, si no existieran errores numéricos en la determinación de los parámetros del modelo simple, éste coincidiría con la solución analítica.

Las figuras 4.10 a 4.12 muestran la evolución del flujo de calor simulado con el programa detallado basado en los factores de respuesta y el modelo simple obtenido por el procedimiento de identificación. No figura en las gráficas el periodo de puesta a régimen. Se muestra igualmente en estas figuras las diferencias

MURO	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
Ligero	0,989	-0,186	-5,234	7,032	-2,088
Medio	1,200	-0,309	-5,156	7,900	-2,894
Pesado	1,354	-0,415	-5,040	8,405	-3,415

Tabla 4.7: Parámetros identificados para la excitación interior.

MURO	τ_1	τ_2
Ligero	3,262	0,728
Medio	5,231	1,017
Pesado	8,185	1,321

Tabla 4.8: Constantes de tiempo en horas para la excitación interior.

entre los dos modelos. La diferencia en valor absoluto entre los dos modelos no llega en ningún caso a $0,1 \text{ W/m}^2$. El acuerdo entre los modelos detallado y simple es, como puede verse, excelente.

b) Excitación interior

La tabla 4.7 contiene los parámetros obtenidos mediante identificación del modelo regresivo de orden 2 de la ecuación 4.26, cuando el muro está excitado por temperatura interior manteniendo nula la temperatura exterior. Para identificar se han utilizado las frecuencias de 1 y 2 ciclos/día.

Las raíces de los polinomios característicos correspondientes a estos modelos están dentro del círculo unidad y por lo tanto los modelos son estables. Los valores de las constantes de tiempo se muestran en la tabla 4.8.

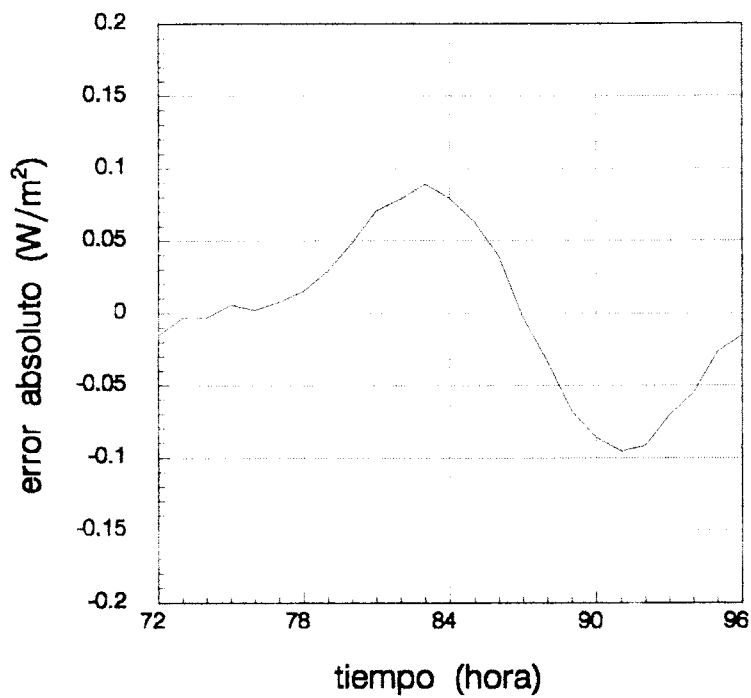
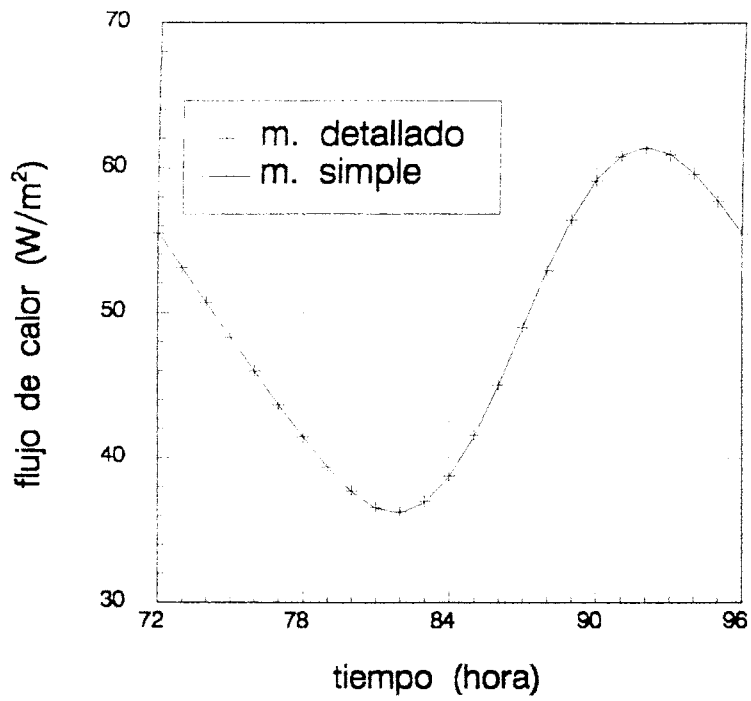


Figura 4.10: Flujo de calor y errores obtenidos con los modelos detallado y simple para el muro ligero y excitación exterior.

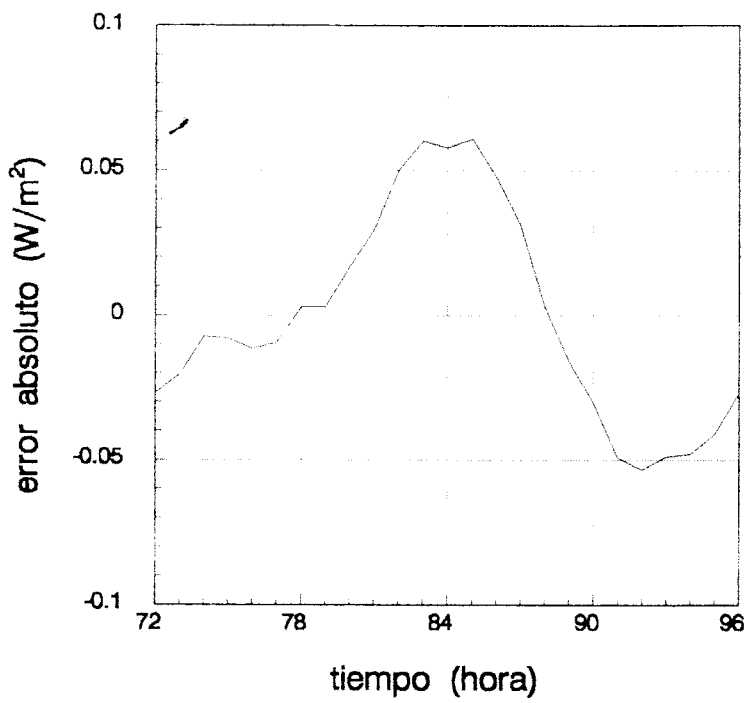
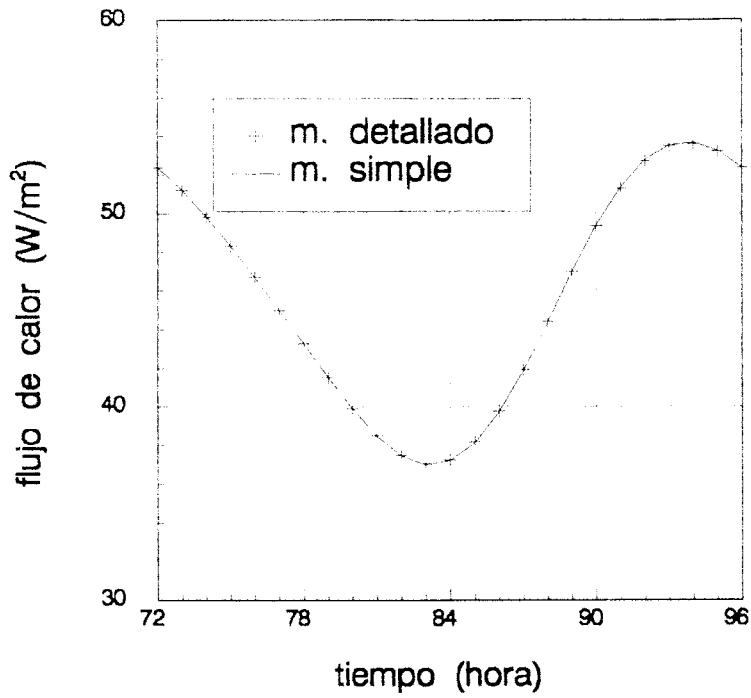


Figura 4.11: Flujo de calor y errores obtenidos con los modelos detallado y simple para el muro medio y excitación exterior.

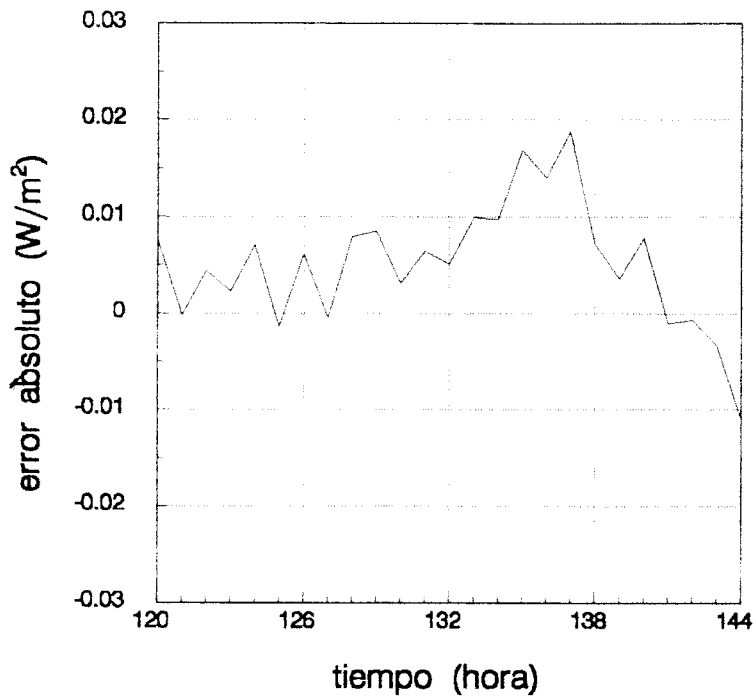
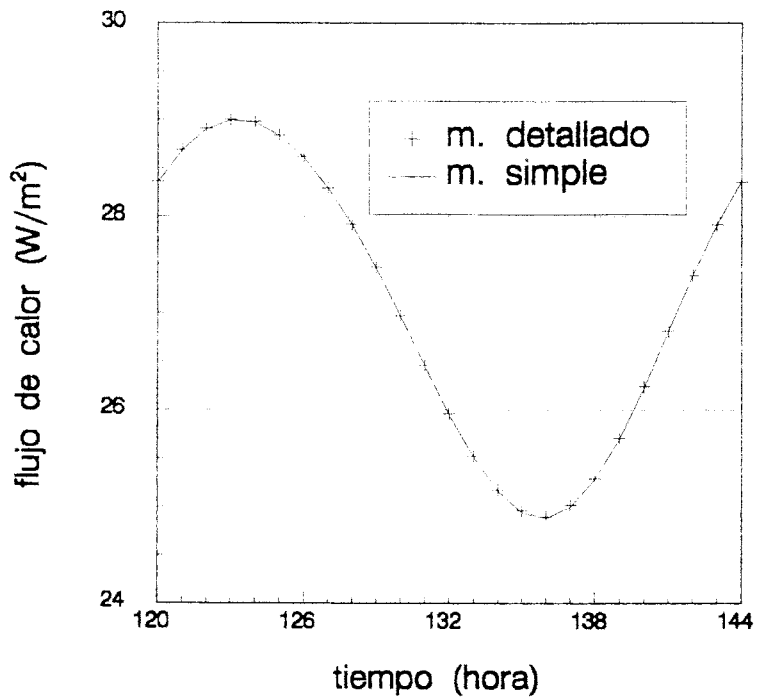


Figura 4.12: Flujo de calor y errores obtenidos con los modelos detallado y simple para el muro pesado y excitación exterior.

Puede observarse cómo el valor de la mayor constante de tiempo para cada muro está muy próximo al obtenido para la excitación exterior (diferencias del orden del 7% en el muro ligero y del 10% en el medio). Al ir aumentando el orden del modelo los valores deberían aproximarse. Por tratarse de un modelo simple en que sólo se tienen en cuenta un número pequeño de constantes de tiempo éstas están asociadas a la excitación. Si se aumentara el número de frecuencias que se imponen en la obtención del modelo, éste dependería más del sistema y menos de las señales de entrada. Para conseguir eso debería aumentarse el número de parámetros con lo que se tendería al modelo detallado, que no depende de las entradas, a cambio de perder simplicidad.

En un modelo exacto los valores de las constantes de tiempo no dependen de la excitación tomada para identificar. La proximidad entre las constantes de tiempo obtenidas es por tanto una muestra de la calidad del modelo.

Cuanto más ligero es un muro (o más baja la frecuencia con que se excita interiormente) la relación espesor efectivo/espesor real es mayor. Esto significa que ante excitaciones interiores interviene más proporción de muro. Si el espesor efectivo es mayor que el real, caso de las frecuencias bajas, tanto para la excitación exterior como para la interior interviene todo el espesor de muro. En ese caso las constantes de tiempo para las dos excitaciones deben coincidir y el modelo reducido de orden 2 es una representación exacta del muro. Este comportamiento está asociado a la experiencia de que cuanto más pesado es un muro más coeficientes son necesarios tomar en el denominador de la función de transferencia, esto es, mayor debe ser el orden del modelo.

En las figuras 4.13 a 4.15 se muestra la evolución con el tiempo del flujo de calor simulado con el método detallado de los factores de respuesta y con el modelo simple. Aparecen igualmente los errores absolutos en flujo de calor en función del tiempo σ .

Como puede verse, el acuerdo es excelente entre los dos modelos exceptuando la hora en que se produce el aumento brusco de temperatura desde 21°C a 27°C que simula el inicio de la ocupación. El error es mayor cuanto menos pesado es el muro y llega para el muro ligero a 1,27 W/m². En términos relativos el error es del 2,2% del flujo de calor en esa hora. El modelo simple obtenido identificando con 1 y 2 ciclos/día puede considerarse, a la vista de los resultados, un buen compromiso entre la simplicidad y la exactitud en la reproducción del flujo de calor.

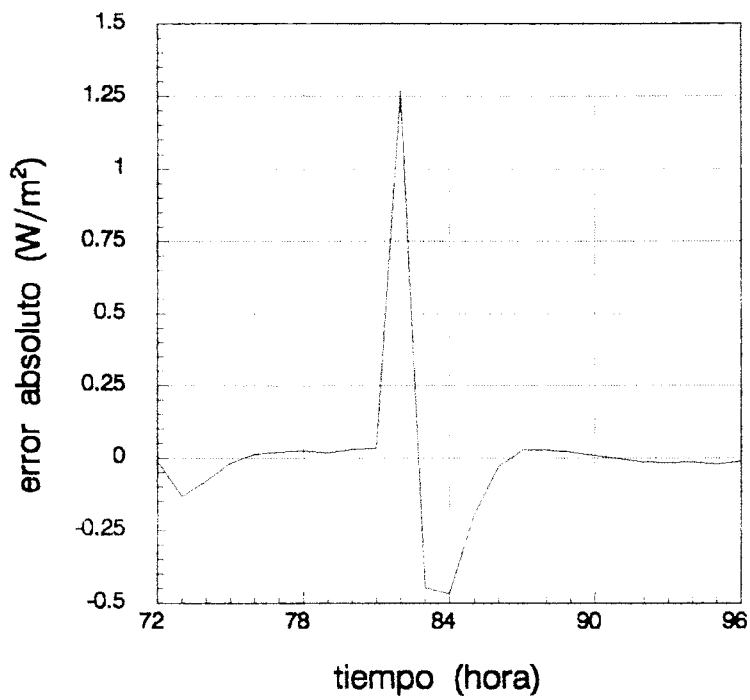
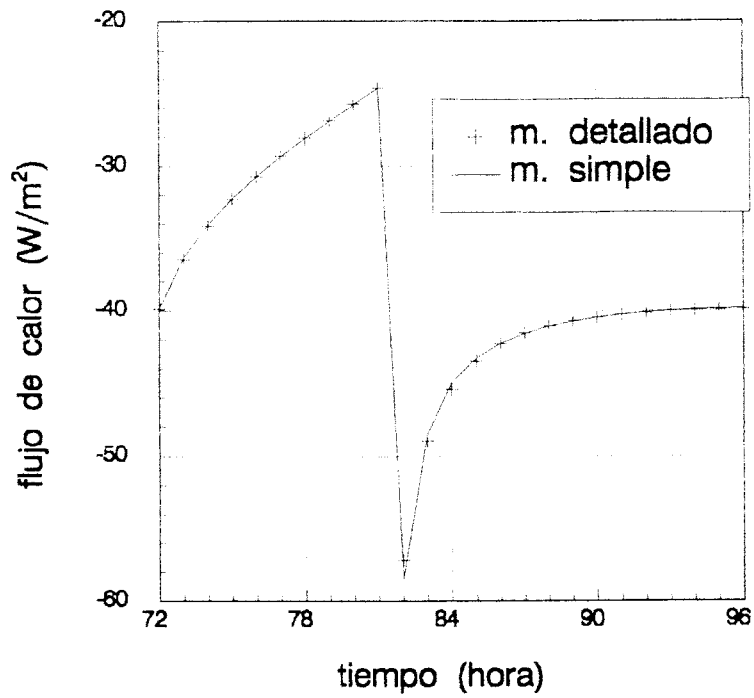


Figura 4.13: Flujo de calor y errores obtenidos con los modelos detallado y simple para el muro ligero y excitación interior.

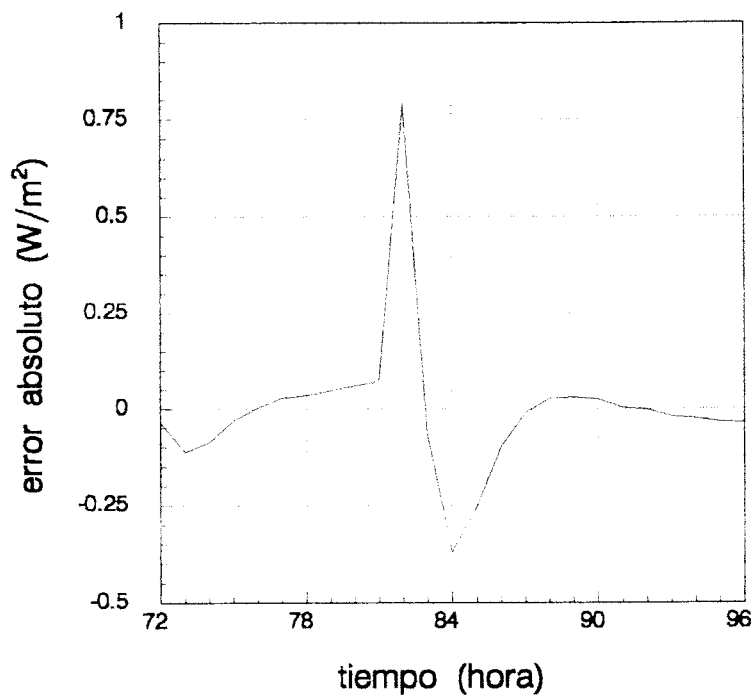
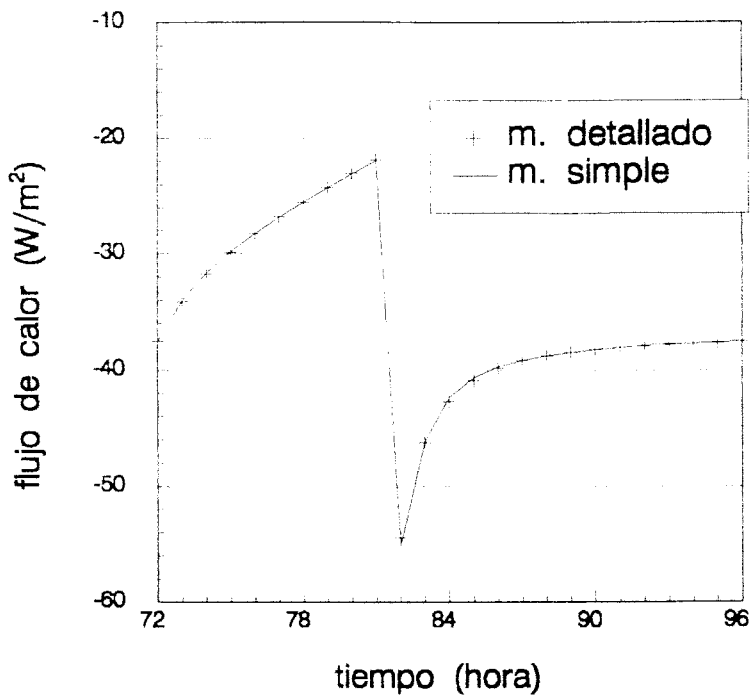


Figura 4.14: Flujo de calor y errores obtenidos con los modelos detallado y simple para el muro medio y excitación interior.

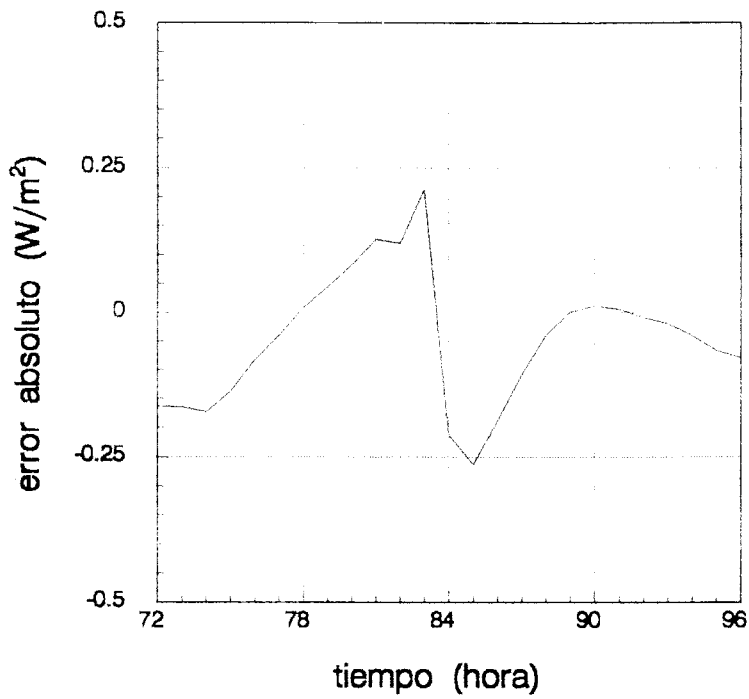
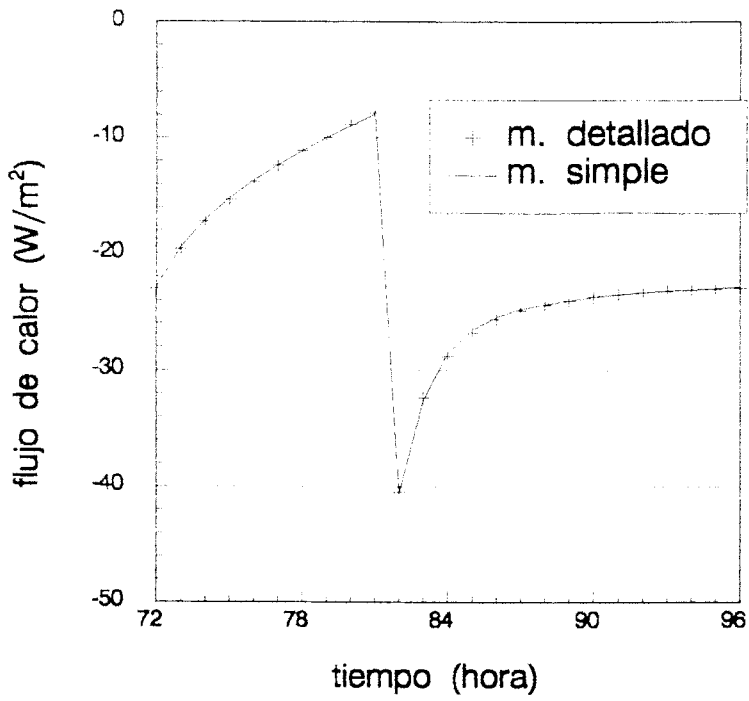


Figura 4.15: Flujo de calor y errores obtenidos con los modelos detallado y simple para el muro pesado y excitación interior.

FRECUENCIA (<i>ciclos/día</i>)	ϵ_{max} (W/m^2)	ϵ_{acu} (W/m^2)
1 y 2	1,27	2,95
1 y 3	1,23	3,39
1 y 5	1,55	4,44

Tabla 4.9: Errores obtenidos en función de las frecuencias utilizadas para identificar.

Es evidente que la falta de acuerdo del modelo al sistema se produce para las altas frecuencias. Son los cambios bruscos de la excitación los que producen el desacuerdo entre los modelos simple y detallado. Cuando el cambio es suave, por ejemplo de las horas 72 a 81 el error se mantiene prácticamente nulo.

El criterio de selección de las frecuencias para identificar se basa en el desarrollo en serie de Fourier de la excitación. Se ha visto que los armónicos de 1 y 2 ciclos/día tenían un mayor peso que los de mayor frecuencia y por ello se han elegido para identificar. Es lícito, sin embargo, plantearse que ocurre si se mejora el comportamiento a mayores frecuencias. ¿Se empeorará entonces el comportamiento a baja frecuencia?. La tabla 4.9 responde a esta pregunta. En ella aparecen el error máximo en valor absoluto entre los dos modelos y el error acumulado en 24 horas, una vez transcurrido el transitorio inicial, ambos en W/m^2 . Los valores han sido obtenidos para el muro ligero y se ha mantenido la frecuencia de 1 ciclo/día en los tres casos.

En la tabla 4.9 puede verse que, si bien para el modelo identificado incluyendo 3 ciclos/día el error máximo disminuye, al incluir armónicos de mayor frecuencia el error acumulado en la simulación de un día aumenta. La figura 4.16 muestra las curvas de amortiguamiento de la excitación interior para el modelo exacto y los modelos simples obtenidos identificando con 1 y 2 ó 5 ciclos/día. Hasta una frecuencia de 2 ciclos/día coinciden prácticamente las tres curvas. Para altas frecuencias el modelo obtenido imponiendo 5 ciclos/día en lugar de 2 ciclos/día se separa más de la curva teórica. El error obtenido depende del contenido en frecuencia de la excitación y de cómo el modelo simple reproduce la función de transferencia del modelo detallado. En este caso el peso de las frecuencias altas en la excitación es importante y hace que el modelo obtenido con 5 ciclos/día dé

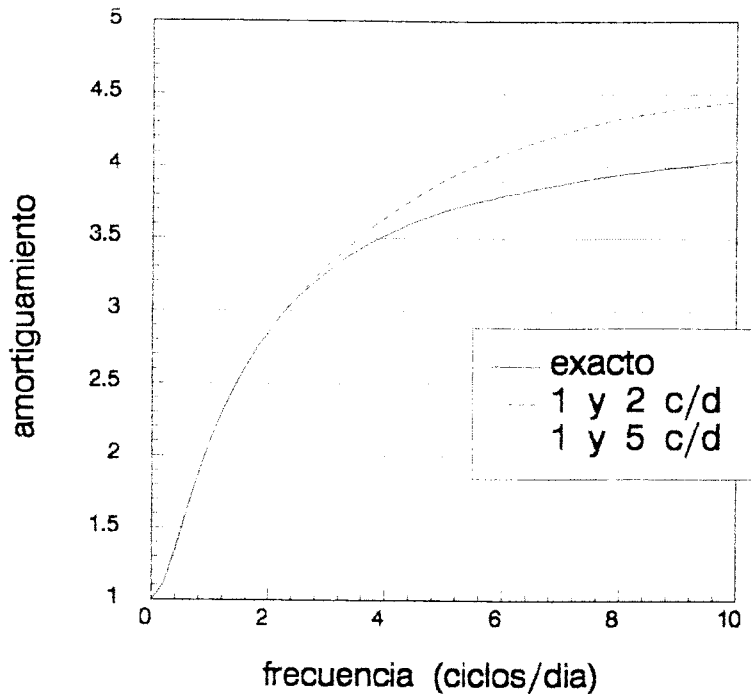


Figura 4.16: Amortiguamiento de la excitación interior obtenido analíticamente y con modelos identificados imponiendo diferentes frecuencias.

peores resultados.

En la simulación de edificios se conoce previamente la evolución de temperatura a que va a estar sometido el edificio. Es posible por lo tanto llevar a cabo una selección adecuada de las frecuencias para identificar. En casos reales el desarrollo en serie de Fourier de la excitación interna contendrá pocos armónicos. Incluso en un caso como el estudiado, donde se han considerado cambios bruscos de la excitación interior, la identificación más simple, basada en la elección de 1 y 2 ciclos/día proporciona muy buenos resultados.

4.6 OBTENCION DE MODELOS REDUCIDOS A PARTIR DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA

En la literatura relativa a la simulación térmica de edificios es usual encontrar tabuladas las funciones de transferencia en el dominio temporal discreto de diferentes elementos de la construcción (ver por ejemplo ASHRAE [74]). El orden de las funciones de

transferencia que se presenta es, dependiendo de la inercia del elemento, hasta 6. La posibilidad de reducir el orden de las funciones de transferencia es interesante y ha sido objeto de trabajos recientes (por ejemplo el ya referido de Seem y otros [11]) aunque los procedimientos no son sencillos.

A continuación se muestran las posibilidades del método de identificación propuesto en la tesis aplicado a la reducción de funciones de transferencia, comparándose los resultados con los obtenidos con el método de la raíz dominante presentado en [11].

4.6.1 Excitación de prueba

Para comprobar el ajuste de la función de transferencia original a la reducida por el método de identificación se utilizarán excitaciones escalón definidas como sigue:

$$\begin{cases} T(k) = 0, & k = 0 \\ T(k) = 1, & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.35)$$

4.6.2 Selección del modelo y frecuencias a imponer

Siguiendo los mismos criterios que en la aplicación anterior, el modelo elegido es de orden 2 y en principio los coeficientes que multiplican al flujo de calor en instantes anteriores son diferentes dependiendo de la excitación. En definitiva el modelo es el definido según la ecuación:

$$q(t) = a_1 q(t-1) + a_2 q(t-2) + b_0 T(t) + b_1 T(t-1) + b_2 T(t-2) \quad (4.36)$$

Para identificar se seleccionan las frecuencias de 1 y 2 ciclos/día puesto que las excitaciones reales a que estarán sometidos los muros se descomponen en serie de Fourier siendo esas frecuencias las que tienen un mayor peso. Las excitaciones de prueba son, como ya se ha dicho, escalones. Se comprobará como a pesar de no desarrollarse en serie de Fourier de forma semejante a las excitaciones reales, el resultado es igualmente excelente.

4.6.3 Imposición del régimen permanente

Al igual que en el caso anterior, para cerrar el sistema se utiliza la condición de régimen permanente que limita el espacio de los parámetros a partir del comportamiento del sistema.

La función de transferencia no reducida proporciona al valor del coeficiente global de transferencia U necesario para plantear la ecuación 4.28.

Si el muro considerado viene dado por la siguiente función de transferencia no reducida:

$$q(t) = \sum_{i=1}^N a_i q(t-i) + \sum_{i=0}^N b_i T(t-i) \quad (4.37)$$

En régimen permanente se cumple:

$$q(1 - \sum_{i=1}^N a_i) = T(\sum_{i=0}^N b_i) \quad (4.38)$$

Por definición, el coeficiente global de transferencia U (W/m^2K) es:

$$U = \frac{q}{T} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i}{1 - \sum_{i=1}^N a_i} \quad (4.39)$$

4.6.4 Planteamiento del sistema

La metodología para obtener el sistema lineal que proporciona los parámetros es semejante a la expuesta en el apartado anterior. La sola diferencia aparece en la obtención de la función de transferencia del modelo detallado que sirve de término independiente: en el caso anterior se obtiene a partir del régimen periódico establecido como solución analítica exacta mientras que ahora se utiliza directamente la función de transferencia discreta.

Suponiendo régimen periódico establecido en el modelo detallado 4.37 la función de transferencia en frecuencia es:

$$G(jw) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i e^{-jwit_0}}{(1 - \sum_{i=1}^N a_i e^{-jwit_0})} \quad (4.40)$$

El sistema equivalente a 4.30 se obtiene, como anteriormente, planteando la igualdad entre las funciones de transferencia de los modelos reducido ($G_m(jw)$) y detallado $G(jw)$ más la ecuación de régimen permanente 4.28:

$$\begin{aligned} Re(G_m(jw_1)) &= Re(G(jw_1)) \\ Im(G_m(jw_1)) &= Im(G(jw_1)) \\ Re(G_m(jw_2)) &= Re(G(jw_2)) \\ Im(G_m(jw_2)) &= Im(G(jw_2)) \\ G_m(0) &= G(0) \end{aligned} \quad (4.41)$$

4.6.5 Resultados de la identificación

Se analizan los resultados para el muro 25 definido en ASHRAE [74] cuya función de transferencia viene dada por los coeficientes de la ecuación 4.37 que se muestran en la tabla 4.10. La composición del muro se muestra en la tabla 4.11.

En la tabla 4.12 aparecen los valores de los parámetros identificados imponiendo, de forma separada, 1 y 2 ciclos/día para la excitación exterior e interior.

Puede observarse cómo los coeficientes que multiplican al flujo de calor en instantes anteriores (a_1 y a_2) no coinciden para las dos excitaciones. Si se identificara un modelo no reducido se tendría la igualdad de esos coeficientes. No es, sin embargo, físicamente correcto, como ya ha sido dicho, imponer la igualdad de esos coeficientes cuando se trata de identificar un modelo de orden reducido.

Las raíces de los polinomios característicos toman los valores que se muestran en la tabla 4.13. A la vista de estos valores los modelos identificados son estables.

i	a_i	b_i (exc. exterior)	b_i (exc. interior)
0	-	0,0021224	-4,0930276
1	1,0305444	0,0467467	6,9131200
2	-0,2012205	0,0558484	-3,0653380
3	0,0072612	0,0071115	0,1336760
4	-0,0000026	0,0000640	-0,0002212

Tabla 4.10: Coeficientes de la función de transferencia del muro 25 de ASHRAE.

Descrip. capa	$k(W/mK)$	$\rho(kg/m^3)$	$c_p(J/kgK)$	esp.(m)	$R(m^2K/W)$
Aire exterior	-	-	-	-	0,059
Ladrillo macizo	1,332	2003	921	0,101	-
Aislamiento	0,043	91,4	837	0,051	-
Enlucido de yeso	0,0415	1250	1088	0,0127	-
Aire interior	-	-	-	-	0,121

Tabla 4.11: Composición del muro 25 de ASHRAE.

EXCITACION	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
Exterior	1,04433	-0,20296	$4,028 \cdot 10^{-3}$	$3,980 \cdot 10^{-2}$	$6,478 \cdot 10^{-2}$
Interior	0,98131	-0,15381	-4,09229	6,70880	-2,73450

Tabla 4.12: Parámetros identificados.

EXCITACION	λ_1	λ_2
Exterior	0,7862	0,2581
Interior	0,7855	0,1958

Tabla 4.13: Raíces del polinomio característico.

A partir de la expresión 4.34 se obtienen las constantes de tiempo para cada excitación resultando los valores de la tabla 4.14. La proximidad de los valores de estas constantes para diferentes excitaciones es una prueba de que el modelo de orden 2 representa de forma adecuada la física del fenómeno. En otras palabras, el modelo identificado depende más del sistema que de la excitación elegida para identificar.

En las figuras 4.17 y 4.18 aparecen la evolución del flujo de calor y los errores obtenidos con el modelo detallado (utilizando la función de transferencia original no reducida) y el modelo reducido de orden 2. La excitación de prueba ha sido el escalón

EXCITACION	τ_1	τ_2
Exterior	4,157	0,738
Interior	4,142	0,613

Tabla 4.14: Valores de las constantes de tiempo en horas.

definido según 4.35.

En estas figuras pueden observarse los excelentes resultados obtenidos con la función de transferencia reducida. En el caso del escalón unitario exterior el error máximo se produce en la segunda hora, alcanzando un valor de prácticamente $3 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$. El error acumulado para las 10 horas de simulación representadas es del orden del doble del máximo ($6,81 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$).

Cuando se considera la excitación interior el ajuste es aún mejor consiguiéndose un error máximo de $1,38 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$ en la segunda hora de simulación. El error acumulado es en este caso de $2,92 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$.

Si quiere simularse el muro sometido a excitaciones exteriores e interiores se aplica el principio de superposición sumando los flujos de calor que se producen para las excitaciones exterior e interior. Como cada función de transferencia reducida necesita 5 coeficientes, el número total de coeficientes a utilizar en el caso conjunto es de 10. Si, como ocurre en los procedimientos tradicionales de reducción de funciones de transferencia, se impone la igualdad de los denominadores de las funciones de transferencia reducida, el número de coeficientes queda limitado a 8. No parece que el ahorro conseguido en tiempo de cálculo al pasar de 10 a 8 coeficientes justifique la pérdida de precisión provocada por esta limitación. Existen adicionalmente dos argumentos que justifican el considerar los 10 parámetros:

- 1) Físicamente, como se ha repetido anteriormente, el modelo reducido responderá con diferentes constantes de tiempo según la excitación de que se trate. No tiene justificación física el que se exijan iguales constantes de tiempo a diferentes excitaciones.
- 2) Los coeficientes intervienen en forma de productos y sumas, operaciones de rápida ejecución en los equipos informáticos utilizados. Para un día de simulación se tendrían que realizar un total de 48 sumas y productos adicionales a los que se realizarían con un modelo conjunto de 8 parámetros.

A pesar de esas consideraciones, en esta tesis se propone un método para reducir la función de transferencia conjunta a 8 parámetros basado en el peso que tiene cada constante de tiempo en la respuesta temporal.

Si quieren imponerse 2 de los coeficientes de la función de transferencia reducida quedan por determinar sólo 3 de los 5 parámetros iniciales con que se contaba. Teniendo en cuenta que la imposición del régimen permanente proporciona una ecuación adicional, sólo puede imponerse la igualdad de las funciones de transferencia original y

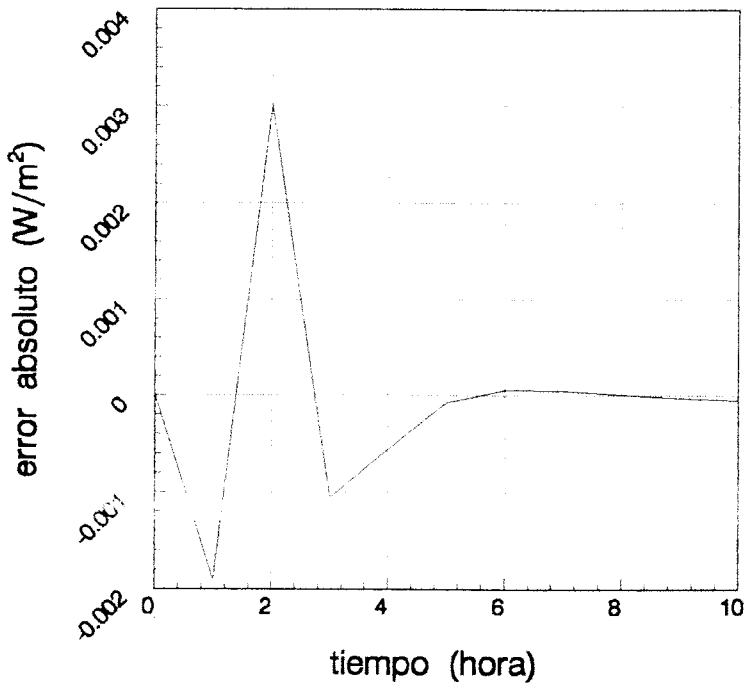
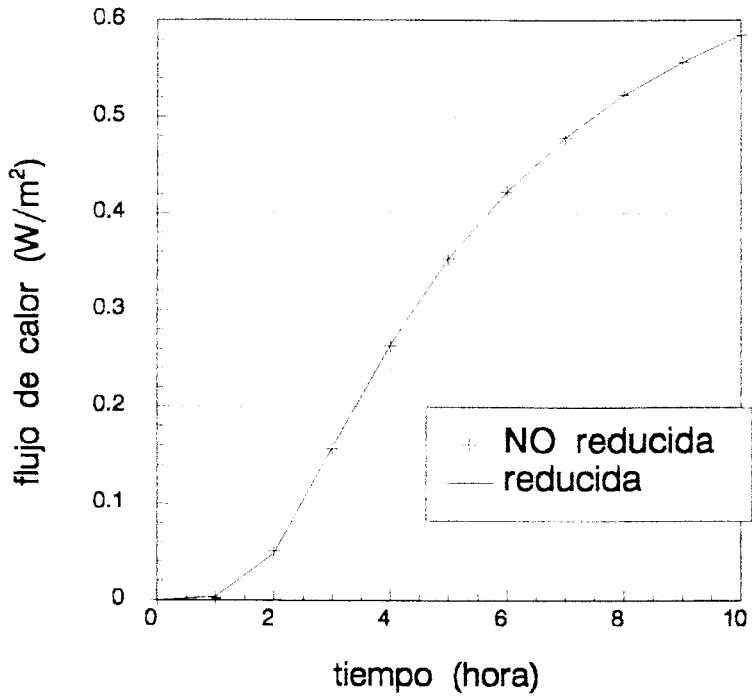


Figura 4.17: Flujo de calor y errores obtenidos con las funciones de transferencia original y reducida para el muro 25 de ASHRAE ante un escalón unitario exterior.

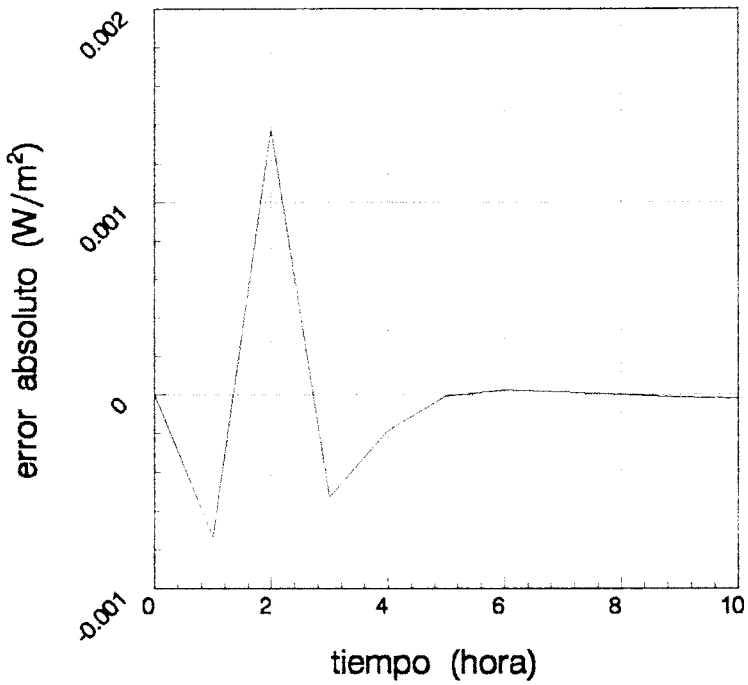
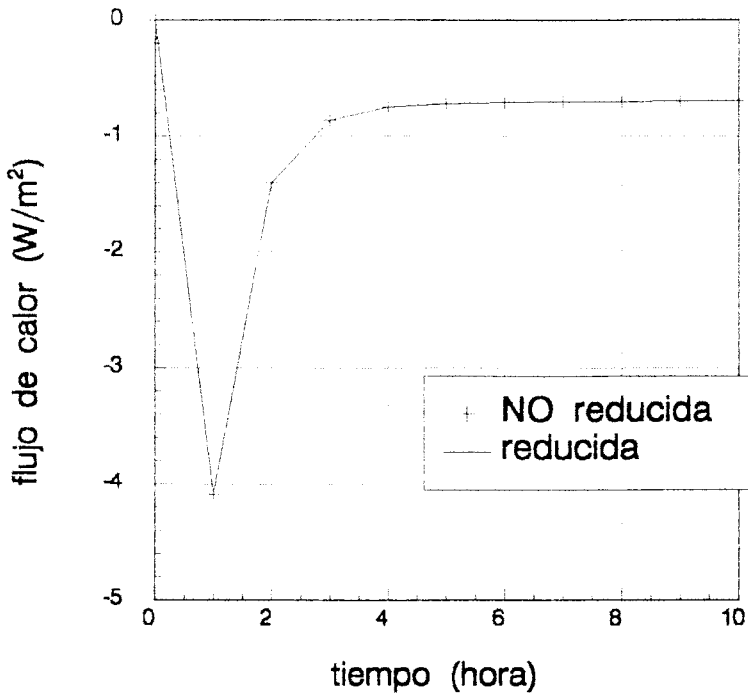


Figura 4.18: Flujo de calor y errores obtenidos con las funciones de transferencia original y reducida para el muro 25 de ASHRAE ante un escalón unitario interior.

reducida para una frecuencia. Se elegirá la frecuencia de mayor peso en el desarrollo en serie de Fourier de las excitaciones a que están sometidos los muros, esto es, 1 ciclo/día.

Queda por resolver el problema de cómo elegir los coeficientes que multiplican a los flujos de calor en los instantes anteriores para que sean iguales para las dos funciones de transferencia reducidas. El procedimiento es semejante al propuesto por Seem y otros [11], aunque en este caso se obtienen las raíces dominantes para cada una de las excitaciones y para las funciones de transferencia ya reducidas.

En el capítulo 3 se obtuvo la respuesta continua del muro ante una excitación escalón a partir de la función de transferencia. La respuesta para un modelo de orden 2 es suma de un escalón y dos exponenciales decrecientes (ecuación 3.53 con $N = 2$). Las exponenciales están ponderadas por coeficientes que en el caso del modelo reducido de orden 2 son:

$$A_1 = \frac{b_0 \lambda_1^2 + b_1 \lambda_1 + b_2}{(\lambda_1 - 1)(\lambda_1 - \lambda_2)} \quad (4.42)$$

$$A_2 = \frac{b_0 \lambda_2^2 + b_1 \lambda_2 + b_2}{(\lambda_2 - 1)(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (4.43)$$

siendo λ_1 y λ_2 las raíces del polinomio característico.

Una vez obtenidos los modelos reducidos para cada una de las excitaciones exterior e interior puede calcularse el peso de las exponenciales en la respuesta temporal. Por ejemplo para el muro 25 de ASHRAE que se está tratando, una vez identificado imponiendo las frecuencias de 1 y 2 ciclos/día se tienen los coeficientes que se muestran en la tabla 4.15.

Es claro que para la excitación exterior la exponencial correspondiente a la mayor raíz del polinomio característico tiene mayor peso que para la excitación interior. Es lógico tomar esta raíz como raíz del polinomio característico de la función de transferencia reducida con iguales coeficientes en el denominador.

Para la raíz menor puede decirse justamente lo contrario. Es para la excitación interior para la que tiene mayor peso. Se tomará por lo tanto la raíz menor de la excitación interior para formar parte del polinomio característico de la función de transferencia reducida conjunta.

EXCITACION	RAIZ	COEFICIENTE
Exterior	0,7862	-0,87299
	0,2581	0,19231
Interior	0,7855	-0,08126
	0,1958	-3,32695

Tabla 4.15: Coeficientes de la respuesta temporal.

Físicamente la explicación es sencilla. Para excitaciones exteriores son las frecuencias bajas las que menor amortiguamiento tienen. En el caso de excitaciones interiores cuanto mayor es la frecuencia menor es el amortiguamiento (mayor la amplificación).

Una vez conocidas las raíces del polinomio característico, los coeficientes que multiplican al flujo de calor en la función de transferencia se determinan según:

$$a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (4.44)$$

$$a_2 = -\lambda_1 \lambda_2 \quad (4.45)$$

Imponiendo estos coeficientes, el régimen permanente y una frecuencia de 1 ciclo/día para cerrar el sistema se tienen los coeficientes de la tabla 4.16.

Se han comparado tres posibilidades para la reducción de funciones de transferencia:

- 1) Método de la raíz dominante presentado por Seem y otros en [11]. En la tabla 4.17 se muestran los coeficientes obtenidos según esta aproximación.
- 2) Método de identificación frecuencial propuesto en la tesis.
- 3) Método de identificación frecuencial con imposición del denominador de la función de transferencia.

EXCITACION	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
Exterior	0,98197	-0,15393	$1,518 \cdot 10^{-2}$	$1,024 \cdot 10^{-2}$	$9,232 \cdot 10^{-2}$
Interior	0,98197	-0,15393	-4,09418	6,71519	-2,73875

Tabla 4.16: Coeficientes de la función de transferencia reducida imponiendo el denominador.

EXCITACION	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
Exterior	0,98390	-0,15531	$1,366 \cdot 10^{-2}$	$1,283 \cdot 10^{-2}$	$9,087 \cdot 10^{-2}$
Interior	0,98390	-0,15531	-4,08772	6,70633	-2,73598

Tabla 4.17: Coeficientes de la función de transferencia reducida obtenidos mediante el método de la raíz dominante.

METODO	$\epsilon_{max}(W/m^2)$	$\epsilon_{acu}(W/m^2)$
Identificación sin imposición coeficientes	$3,0204 \cdot 10^{-3}$	$6,8056 \cdot 10^{-3}$
Raíz dominante [11]	$1,1538 \cdot 10^{-2}$	$2,6570 \cdot 10^{-2}$
Identificación con imposición coeficientes	$1,3054 \cdot 10^{-2}$	$3,0261 \cdot 10^{-2}$

Tabla 4.18: Errores obtenidos según cada método para un escalón unitario exterior.

METODO	$\epsilon_{max}(W/m^2)$	$\epsilon_{acu}(W/m^2)$
Identificación sin imposición coeficientes	$1,3790 \cdot 10^{-3}$	$2,9154 \cdot 10^{-3}$
Raíz dominante [11]	$5,3240 \cdot 10^{-3}$	$1,3199 \cdot 10^{-2}$
Identificación con imposición coeficientes	$1,4050 \cdot 10^{-3}$	$5,6055 \cdot 10^{-3}$

Tabla 4.19: Errores obtenidos según cada método para un escalón unitario interior.

En la tabla 4.18 se muestran los errores máximos y acumulados obtenidos, según cada aproximación, al aplicar un escalón unitario exterior al muro considerado. El error acumulado se refiere a las primeras 10 horas de simulación. En la tabla 4.19 se muestran los resultados equivalentes cuando la excitación es un escalón unitario interior.

Los mejores resultados se tienen con los parámetros identificados separando las excitaciones exterior e interior. Tanto el error máximo como el acumulado toman los menores valores.

La comparación entre los otros dos métodos, raíz dominante e identificación con imposición de coeficientes, da resultados dispares. Si bien para la excitación exterior,

con pequeñas diferencias, el método de la raíz dominante resulta más favorable, no ocurre lo mismo para la excitación interior. En este último caso el método de la raíz dominante tiene mayor error (casi 4 veces más en error máximo y más del doble de error acumulado).

Para concluir, puede pensarse un método alternativo para obtener la función de transferencia reducida, con sólo 8 parámetros, aplicando el método de identificación propuesto en la tesis al modelo regresivo conjunto para las excitaciones exterior e interior. Es necesario entonces establecer la igualdad de las funciones de transferencia del modelo simple y del detallado para 3 frecuencias. Este planteamiento proporciona 6 ecuaciones que unidas a las 2 de régimen permanente cierran el sistema para determinar los 8 parámetros. Si cuando se plantean por separado la identificación del modelo simple para las excitaciones exterior e interior, la elección de las frecuencias a identificar es intuitiva, en el caso de plantearse la identificación de forma conjunta aparece el problema de cómo ponderar cada excitación. La elección, inicialmente evidente, de ponderar igualmente las dos excitaciones no es válida ya que no es posible entonces separar el efecto de cada excitación en la respuesta.

El método propuesto en el párrafo anterior ha sido aplicado en el muro 25 de ASHRAE teniéndose peores resultados que con los métodos alternativos expuestos anteriormente. Para un escalón de temperatura unitario aplicado a la superficie interior, el error máximo es de $0,46 \text{ W/m}^2$ y el acumulado en las 10 horas iniciales de simulación de $1,10 \text{ W/m}^2$. Cuando el escalón es aplicado en la superficie exterior se tiene un error máximo de $0,041 \text{ W/m}^2$ y un acumulado de $0,25 \text{ W/m}^2$.

4.7 OBTENCION DE MODELOS REDUCIDOS A PARTIR DE DATOS EXPERIMENTALES

Para concluir los ejemplos de aplicación del método de identificación presentado en esta tesis, se utilizarán valores experimentales recogidos de la tesis de Virgone [72]. El objetivo de este apartado es más bien mostrar la metodología a seguir cuando se dispone de datos procedentes de experimentos más que los resultados obtenidos. En este caso se verá la importancia de la calidad de las medidas. Aunque el ajuste de los modelos reducidos a los datos es bueno, no lo son los modelos desde el punto de vista de su significación física.

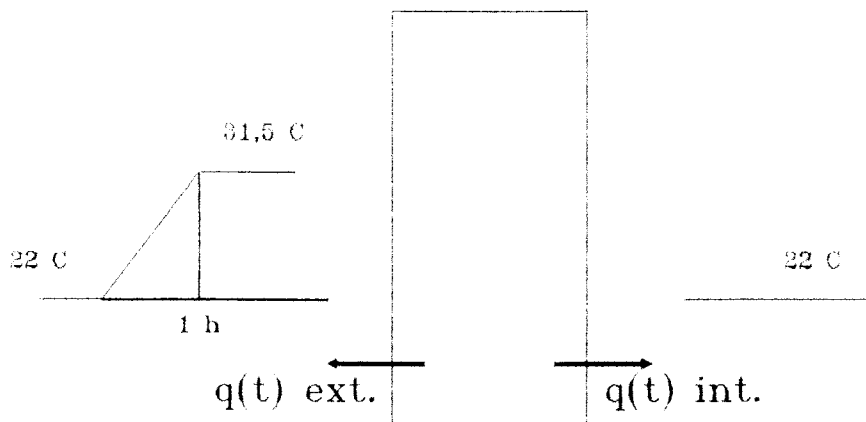


Figura 4.19: Evolución de temperaturas superficiales a que se somete el muro.

4.7.1 Muro considerado

El muro experimentado está constituido por bloques de hormigón prefabricados, con un porcentaje de huecos entre el 45% y el 55%. La dimensión de los bloques es 20x20x50 cm y el muro está acabado con un mortero de cemento que hace que el espesor total sea de 22,6 cm. Como se ve, se trata de un muro heterogéneo del que en principio no se conocen las propiedades termofísicas.

4.7.2 Resultados de la experimentación

El muro descrito en el apartado anterior ha sido sometido a un escalón de temperatura de magnitud $9,5^{\circ}\text{C}$ a partir de la hora 1 por una de sus superficies (exterior), manteniendo constante la temperatura en la otra (interior). Desde la hora 0 a la hora 1 se tiene una subida lineal en forma de rampa desde el mismo nivel de la temperatura interior (ver figura 4.19).

Sometido a esas entradas el flujo de calor que se produce en cada una de las superficies es obtenido con medidores de flujo de calor de 25x25 cm calibrados previamente. Las dimensiones han sido elegidas de manera que los medidores de flujo de calor sirvan de integradores de la respuesta en una gran superficie para eliminar las heterogenei-

Hora	q(t) ext. (W/m ²)	q(t) int. (W/m ²)
0	-3,96	1,45
1	-121,78	7,73
2	-49,50	15,94
3	-36,63	24,64
4	-32,67	28,98
5	-30,69	30,92
6	-29,70	32,12
7	-28,71	32,61
8	-27,72	33,09
9	-27,72	33,09
10	-26,73	32,37
11	-26,73	32,37
12	-26,73	32,37
13	-26,73	32,37

Tabla 4.20: Medidas registradas en función del tiempo.

dades debidas a la naturaleza del muro.

La tabla 4.20 muestra las medidas registradas en función del tiempo durante 13 horas. La observación de las medidas permite hacer dos comentarios:

- 1) La respuesta en flujo de calor interior al escalón exterior corresponde a un sistema subamortiguado (en las horas 7 a 9 se supera el régimen permanente). Este comportamiento no se corresponde al sistema físico que representa.
- 2) Inicialmente el sistema está en equilibrio y por lo tanto los flujos de calor en la hora 0 deberían ser nulos. Existe aparentemente un problema de calibración de los medidores de flujo de calor.
- 3) Una vez alcanzado el régimen permanente los flujos de calor en las superficies interna y externa deberían coincidir. Esto no sucede según las medidas mostradas en la tabla 4.20.

4.7.3 Obtención de la función de transferencia del sistema

La función de transferencia en frecuencia del muro debe ser conocida para aplicar el método de identificación. En este caso, puesto que no se dispone de modelo analítico a partir del cual obtenerla, como ocurría en los ejemplos anteriores, se hace a partir de los datos experimentales.

La función de transferencia en frecuencia se obtiene como cociente de los desarrollos en serie de Fourier de las variables de entrada y salida. La excitación no es periódica (por lo tanto tampoco la respuesta). Se recurre entonces a la definición de transformada de Fourier. Entre cada dos medidas se supone una evolución lineal de las funciones. La respuesta puede descomponerse en 2 periodos. Un periodo inicial t_p hasta que se alcanza el régimen permanente y el resto. Se tiene:

$$Q(jw) = \int_0^{t_p} q(t)e^{-jwt} dt + \int_{t_p}^{\infty} q_p e^{-jwt} dt \quad (4.46)$$

donde se ha denominado q_p al flujo de calor una vez alcanzado el régimen permanente.

Para el régimen permanente se tiene:

$$\int_{t_p}^{\infty} q_p e^{-jwt} dt = -\frac{q_p}{w} (\text{sen}wt_p + j\text{cos}wt_p) \quad (4.47)$$

Para el transitorio inicial se supone un intervalo de tiempo t_0 definido entre (t_i, t_{i+1}) en el que el flujo de calor evoluciona linealmente (figura 4.20).

Suponiendo que se alcanza t_p en N intervalos como el de la figura 4.20, la integral del transitorio inicial queda:

$$\int_0^{t_p} q(t)e^{-jwt} dt = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 C_1^{ik} + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^2 C_2^{ik} \quad (4.48)$$

donde:

$$C_1^{ik} = \frac{A_k}{w} j (e^{-ijwt_0} - e^{-(i-1)jwt_0}) \quad (4.49)$$

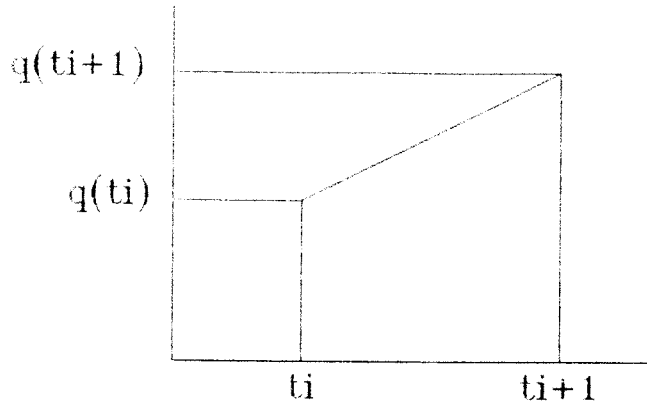


Figura 4.20: Intervalo típico de integración considerado.

$$C_2^{ik} = B_k [e^{-ijwt_0} (\frac{1}{w^2} + j\frac{it_0}{w}) - e^{-(i-1)jwt_0} (\frac{1}{w^2} + j\frac{(i-1)t_0}{w})] \quad (4.50)$$

y los coeficientes A_k y B_k son los siguientes:

$$A_k = \begin{cases} q(t_i), & k = 1 \\ -q(t_{i+1})t_i/t_0, & k = 2 \\ q(t_i)t_i/t_0, & k = 3 \end{cases} \quad (4.51)$$

$$B_k = \begin{cases} q(t_{i+1})/t_0, & k = 1 \\ -q(t_i)/t_0, & k = 2 \end{cases} \quad (4.52)$$

Dividiendo la transformada de Fourier del flujo de calor medido por la transformada de la excitación, $T(jw)$, se tiene la función de transferencia en frecuencia:

FLUJO	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
Exterior	0,44795	$8,754 \cdot 10^{-2}$	-13,75997	15,94199	- 3,48916
Interior	1,03546	-0,32735	0,91285	-0,12202	0,20375

Tabla 4.21: Parámetros identificados.

$$G(jw) = \frac{Q(jw)}{T(jw)} \quad (4.53)$$

4.7.4 Resultados de la identificación

El planteamiento del sistema para identificar es en todo semejante a lo expuesto en las aplicaciones anteriores. La sola diferencia aparece en el cálculo del coeficiente global de transferencia U . En este caso se obtiene directamente como cociente del flujo de calor por la diferencia de temperatura entre las caras del muro, una vez establecido el régimen permanente.

En la tabla 4.21 aparecen los valores de los parámetros identificados imponiendo, de forma separada, 1 y 2 ciclos/día para la excitación exterior e interior.

Las figuras 4.21 y 4.22 muestran la evolución del flujo de calor que se obtienen con los modelos simples junto con los datos medidos.

El error máximo de ajuste en el caso del flujo de calor en la superficie interna es de $1,45 \text{ W/m}^2$ siendo el error acumulado en la simulación de las 13 horas de $6,22 \text{ W/m}^2$. En el caso del flujo de calor en la superficie externa el error máximo es de $11,67 \text{ W/m}^2$ y el acumulado de $32,54 \text{ W/m}^2$.

Para el flujo de calor producido por el escalón en la superficie interna el modelo obtenido puede considerarse una buena aproximación. Como era de esperar por los datos de que se dispone, el modelo es subamortiguado aunque estable.

La aproximación del modelo simple del flujo de calor en la superficie externa no es buena. El polinomio característico, da lugar a una raíz negativa que tiene una

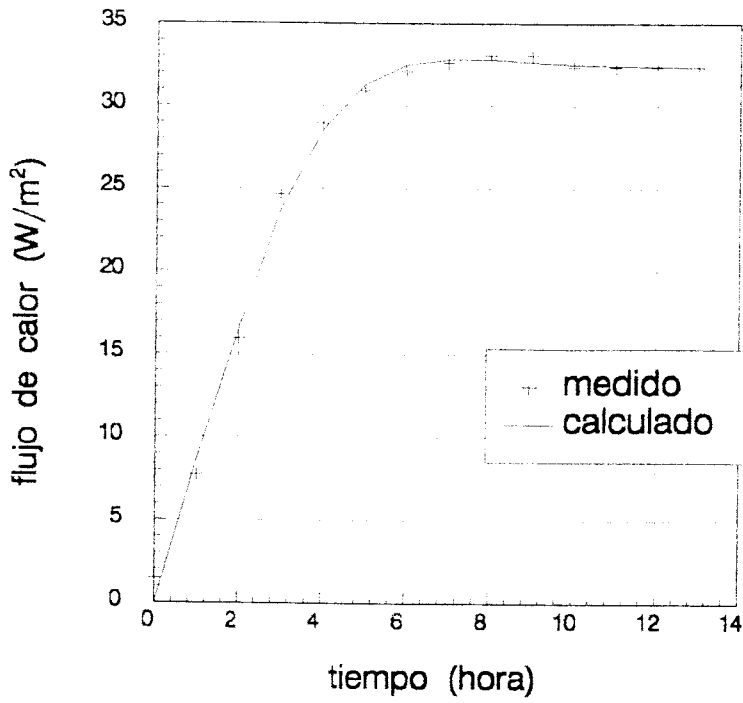


Figura 4.21: Flujo de calor en la superficie interna para un escalón exterior.

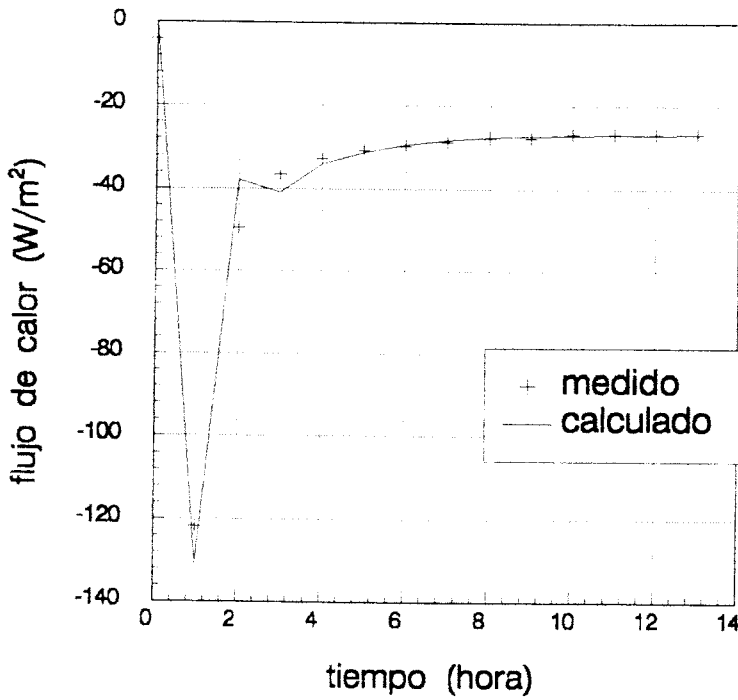


Figura 4.22: Flujo de calor en la superficie externa para un escalón exterior.

FLUJO	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
Exterior	0,53845	$4,105 \cdot 10^{-2}$	-12,82880	15,70639	-3,88218

Tabla 4.22: Parámetros identificados para el flujo en la cara externa sustrayendo el valor inicial.

antitransformada del tipo coseno. Físicamente eso no es posible y debe por lo tanto cuestionarse la calidad de los datos experimentales. Un simple tratamiento previo de los datos del flujo de calor en esta superficie haciendo que para el instante inicial el flujo de calor sea nulo, como debería ser, proporciona los parámetros que se muestran en la tabla 4.22.

Para esos parámetros el ajuste de los datos experimentales mejora sensiblemente como puede observarse en la figura 4.23. En estas condiciones el error máximo obtenido se reduce a $7,25 \text{ W/m}^2$ y el acumulado en las 13 horas de simulación a $17,36 \text{ W/m}^2$.

Como conclusión de la aplicación del método a estos datos experimentales puede decirse que el método proporciona un modelo de orden reducido que se ajusta suficientemente bien a los datos en el caso de respuesta en la superficie opuesta a la excitación. Para la respuesta en la misma superficie donde se aplica la excitación aparecen problemas debidos a la baja calidad de los datos de que se dispone. En ambos casos, aunque los modelos obtenidos son estables, la forma de la respuesta ante un escalón no se corresponde con el sistema físico real (como tampoco se corresponden los datos medidos).

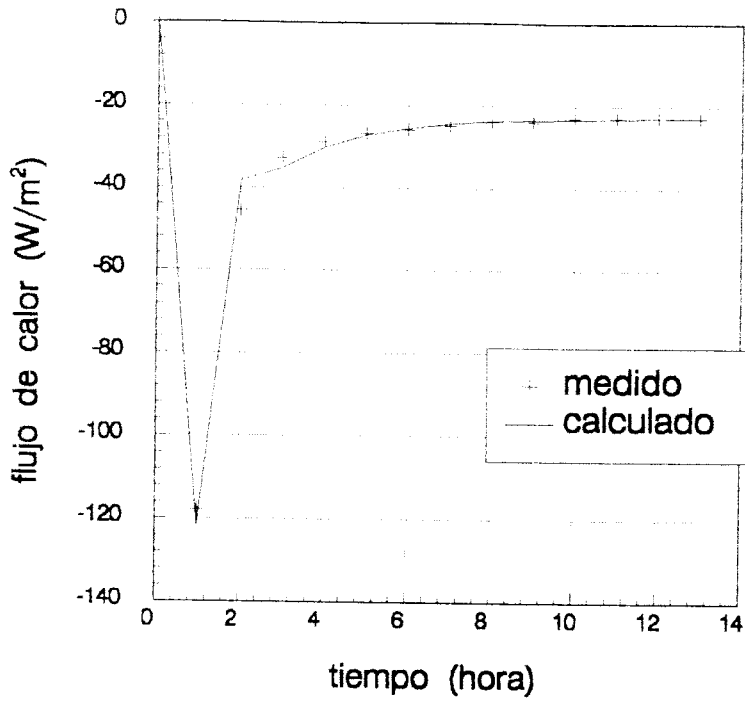


Figura 4.23: Flujo de calor en la superficie externa para un escalón exterior con tratamiento previo de los datos.

Capítulo 5

APLICACION DEL METODO AL CASO BIDIMENSIONAL

5.1 INTRODUCCION

Una vez aplicado el método de identificación propuesto al caso de conducción unidimensional, puede plantearse, dentro del mismo problema de conducción, dar un paso más. El siguiente problema es el de conducción bidimensional.

La modelización detallada de la conducción bidimensional es difícil de incorporar en la simulación térmica de edificios por la complejidad que conlleva. Existen sin embargo situaciones en las que la hipótesis de existencia de flujo de calor exclusivamente en la dirección normal a las superficies del muro deja de ser válida. Es el caso, por ejemplo, de puentes térmicos o suelos en contacto con el terreno.

La solución de un problema de conducción bidimensional puede calcularse analíticamente sólo en situaciones muy particulares. Si la geometría o/y las condiciones de contorno se complican, es necesario resolver directamente la ecuación de conducción mediante métodos aproximados, principalmente numéricos.

En programas de simulación térmica de edificios la incorporación de modelos detallados de conducción bidimensional no es rentable desde el punto de vista del compromiso entre tiempo de cálculo y exactitud de resultados. Se recurre entonces a tipificar los casos que pueden aparecer, determinando para ellos soluciones que se formulan de forma aproximada. Suelos enterrados de geometría y composición determinadas o marcos de ventanas son algunos de los ejemplos. Esas soluciones son evidentemente de aplicación restringida. Es decir: ¿qué ocurre en geometrías no tipificadas previamente?.

En este capítulo se aplicará la metodología de identificación en el dominio fre-

cuencial presentada en el capítulo 3 a la obtención de modelos de orden reducido de conducción bidimensional. Una vez obtenidos estos modelos, la integración en los programas de simulación es inmediata.

En la primera parte del capítulo se presentará el modelo detallado que sirve de referencia: el de variables de estado obtenido por discretización espacial haciendo referencia al método de los coeficientes de respuesta.

Posteriormente se explica cómo obtener la función de transferencia en frecuencia del modelo de variables de estado, necesaria en el planteamiento del sistema que proporciona los parámetros del modelo simple.

Finalmente, se aplica el método a un caso típico de puente térmico bajo un acristalamiento, sometido a excitaciones características.

5.2 DEFINICION DEL PROBLEMA

La tipología tratada se muestra en la figura 5.1. Se trata de una sección de muro situada bajo un acristalamiento. En este caso el flujo de calor no es normal a las superficies exterior e interior del muro y es necesario considerar la bidimensionalidad del flujo de calor. El muro está compuesto, como en el caso unidimensional, por diferentes capas y pueden considerarse o no las resistencias superficial de convección en las superficies.

Las condiciones de contorno son de temperatura impuesta en el aire si se incluyen las resistencias de convección superficiales o en las superficies del muro cuando no incluyen estas resistencias. Se consideran propiedades constantes y el problema es por tanto lineal e invariante.

5.3 METODO DE VARIABLES DE ESTADO. COEFICIENTES DE RESPUESTA

Para la aplicación del método de identificación propuesto en esta tesis es necesario disponer de la respuesta del sistema ante determinadas excitaciones. La respuesta puede tenerse experimentalmente o mediante un modelo detallado. En el presente capítulo se utilizarán datos procedentes de un modelo detallado de conducción bidimensional en régimen transitorio que permite obtener la respuesta del sistema ante las excitaciones de prueba y determinar analíticamente la función de transferencia en frecuencia del sistema.

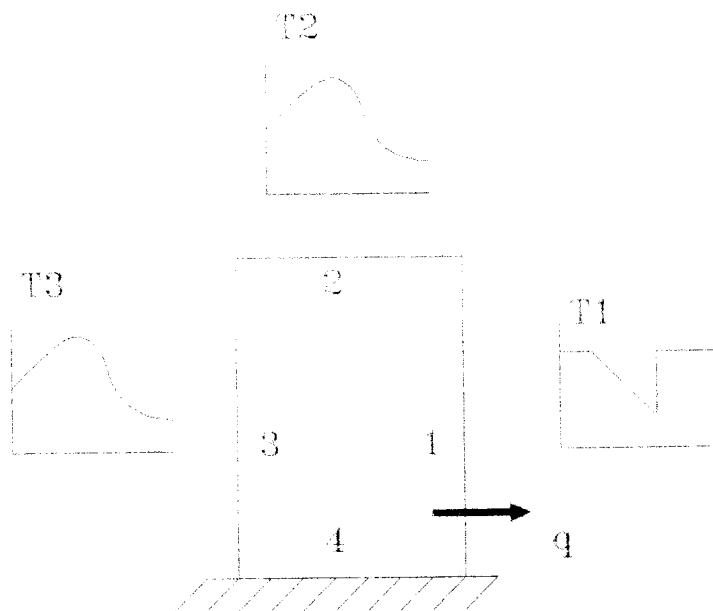


Figura 5.1: Tipología de conducción bidimensional tratada.

5.3.1 El modelo detallado

Se trata de resolver la ecuación de conducción siguiente:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (5.1)$$

sometido a las condiciones iniciales y de contorno :

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_{ci}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.2)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad i = 4 \quad (5.3)$$

$$T(x, y, 0) = T_0 \quad (5.4)$$

En la ecuación 5.2, T_{ci} es la temperatura impuesta en cada uno de los contornos según la numeración de la figura 5.1. Como ya quedó dicho en el caso unidimensional,

cualquier otra condición de contorno puede reducirse a la de temperatura impuesta.

No existe una solución analítica general para este problema. Para encontrar la solución se recurre a métodos numéricos basados en la discretización temporal de la ecuación de conducción. Esta discretización da lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que puede ser integrado.

Mediante la discretización espacial se tiene el sistema:

$$[C] \frac{dT}{dt} = [K]T(t) + [R]T_c(t) \quad (5.5)$$

donde :

[C] es una matriz cuadrada diagonal de dimensiones $n \times n$ (siendo n el número de nodos de la discretización espacial). Sus elementos expresan la capacidad de almacenamiento de energía de los nodos interiores. Si el medio es homogéno todos los elementos son iguales. La matriz es definida positiva.

[K] es una matriz simétrica en banda de anchura 5 y dimensiones $n \times n$. Sus elementos expresan las conductancias entre los nodos interiores. La matriz es definida negativa.

[R] es una matriz de dimensiones $n \times n_c$ (siendo n_c el número de nodos situados en el contorno). Sus elementos miden la conductancia entre los nodos interiores y los del contorno.

T es el vector de temperaturas interiores.

T_c es el vector de temperaturas en el contorno.

El modelo obtenido es de representación interna, donde los estados son las temperaturas interiores y las entradas las temperaturas en el contorno. La ecuación de transición de estados viene dada por 5.5 y la ecuación de observación es la que proporciona el flujo de calor en la cara deseada (la interna, numerada 1, en el problema tratado):

$$q(t) = [S]T(t) + [E]T_c(t) \quad (5.6)$$

donde:

$[S]$ es una matriz de dimensiones $1 \times n$ que relaciona los estados con la salida.

$[E]$ es una matriz de dimensiones $1 \times n_c$ que relaciona las entradas con la salida.

Ahora sí es posible resolver el sistema 5.5 junto con sus condiciones iniciales y de contorno. Para ello se resuelve inicialmente el problema homogéneo, con sólo la condición inicial y condiciones nulas en el contorno. Posteriormente se aborda el problema no homogéneo que incluye la evolución de temperaturas en el contorno. La solución será la suma de la solución general del problema homogéneo más una solución particular del problema completo.

a) Solución del problema homogéneo.

Se considera el siguiente problema:

$$[C] \frac{dT}{dt} = [K]T(t) \quad (5.7)$$

$$T(t=0) = T_0 \quad (5.8)$$

$$q(t) = [S]T(t) \quad (5.9)$$

Sería el caso de enfriamiento del muro desde una temperatura inicial T_0 . La solución a un problema de este tipo es una combinación lineal de los autovectores del sistema.

Los autovalores λ_i son los que hacen nulo el determinante:

$$|[K] - \lambda_i[C]| = 0 \quad (5.10)$$

y los autovectores v_i :

$$([K] - \lambda_i[C])v_i = 0 \quad (5.11)$$

En este sistema se tiene que:

- 1) Los autovalores son reales y negativos ya que $[K]$ y $[C]$ son simétricas y definidas negativa y positiva respectivamente.

- 2) Los autovalores son linealmente independientes.
- 3) Los autovectores cumplen la condición generalizada de ortogonalidad:

$$v_i^T [C] v_j = \delta_{ij} \quad (5.12)$$

- 4) Los autovectores constituyen una base del problema homogéneo, es decir, el vector de temperaturas interiores $T(t)$ puede ser expresado como una combinación lineal de los autovectores.

La solución de la ecuación 5.7 sometida a la condición inicial y de contorno es inmediata:

$$T(t) = T_0 e^{[C]^{-1}[K]t} \quad (5.13)$$

La exponencial de una matriz puede hacerse por desarrollo en serie de Taylor. Si la matriz es diagonal, se facilita este cálculo ya que la exponencial de una matriz diagonal es otra matriz, también diagonal, cuyos elementos son las exponenciales de los elementos de la matriz original.

En la base modal la matriz $[C]^{-1}[K]$ es diagonal. Se consigue mediante el cambio de variable:

$$T(t) = [P]X(t) \quad (5.14)$$

donde $[P]$ es una matriz de dimensiones $n \times n$ que contiene los autovectores puestos por columnas. En esta base, el problema homogéneo se expresa:

$$\frac{dX}{dt} = [L]X(t) \quad (5.15)$$

$$X(t = 0) = X_0 \quad (5.16)$$

$$q(t) = [S]^T X(t) \quad (5.17)$$

siendo:

$$[L] = [P]^{-1}[C]^{-1}[K][P] \quad (5.18)$$

$$[S]' = [S][P] \quad (5.19)$$

La solución obtenida es:

$$X(t) = X_0 e^{[L]t} \quad (5.20)$$

La matriz $e^{[L]t}$ es la matriz de transición de estado. Contiene toda la información para determinar la evolución del muro sometido a condiciones de contorno nulas.

b) Solución del problema no homogéneo.

El problema no homogéneo es el definido por las ecuaciones 5.5 y 5.6 junto con las condiciones iniciales y de contorno del problema completo:

$$[C] \frac{dT}{dt} = [K]T(t) + [R]T_c(t) \quad (5.21)$$

$$T(t=0) = T_0 \quad (5.22)$$

$$T_c(t) \quad \text{conocido} \quad (5.23)$$

$$q(t) = [S]T(t) + [E]T_c(t) \quad (5.24)$$

Haciendo el mismo cambio de base que para el problema homogéneo queda el sistema:

$$\frac{dX}{dt} = [L]X(t) + [R]'T_c(t) \quad (5.25)$$

$$X(t=0) = X_0 \quad (5.26)$$

$$T_c(t) \quad \text{conocido} \quad (5.27)$$

$$q(t) = [S]'X(t) + [E]T_c(t) \quad (5.28)$$

donde:

$$[R]' = [P]^{-1}[C][R] \quad (5.29)$$

$$[S]' = [S][P] \quad (5.30)$$

La solución expresada en esta base es la siguiente:

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau)[R]'T_c(\tau)d\tau \quad (5.31)$$

donde se ha denotado $\Phi(t)$ la matriz de transición de estado definida como:

$$\Phi(t) = e^{[L]t} \quad (5.32)$$

Generalmente no se tendrá una expresión analítica de la evolución de temperaturas en el contorno para realizar la integral de la ecuación 5.31. En esos casos se aproxima linealmente la excitación entre cada dos puntos conocidos separados un intervalo de tiempo t_0 :

$$T_c(\tau) = T_c(t) + \frac{T_c(t + t_0) - T_c(t)}{t_0}(\tau - t) \quad t < \tau < t + t_0 \quad (5.33)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en 5.31 se obtiene para cada intervalo:

$$X(t + t_0) = \Phi(t_0)X(t) + [A]T_c(t) + [B]T_c(t + t_0) \quad (5.34)$$

siendo los elementos de las matrices [A] y [B]:

$$A_{ij} = \frac{R'_{ij}}{\lambda_i} \left(e^{\lambda_i t_0} + \frac{1 - e^{\lambda_i t_0}}{\lambda_i t_0} \right) \quad (5.35)$$

$$B_{ij} = \frac{R'_{ij}}{\lambda_i} \left(-1 - \frac{1 - e^{\lambda_i t_0}}{\lambda_i t_0} \right) \quad (5.36)$$

Se tiene así una forma recurrente para el estado en un instante $t + t_0$ a partir del estado en el instante anterior t y la entrada en el instante de cálculo y en el inmediato anterior.

Introduciendo la ecuación de observación 5.28 se tiene finalmente:

$$q(t + t_0) = [S]' \Phi(t_0) X(t) + [S]' A T_c(t) + ([S]' [B] + [E]) T_c(t + t_0) \quad (5.37)$$

La expresión 5.37 proporciona el flujo de calor en la cara interna del muro ante excitaciones de temperatura en el contorno discretizadas y que se supone que varían linealmente entre cada dos instantes de muestreo. Si las excitaciones pueden descomponerse linealmente el único error de esta aproximación proviene de la discretización espacial de la ecuación de conducción.

De la observación de la ecuación 5.31, suponiendo que se quiere calcular el estado $X(t)$ para un t suficientemente grande, como el sistema es estable habrá desaparecido la influencia de la condición inicial. Es decir, para ese t se tendrá:

$$X(t) = \int_0^t \Phi(t - \tau) [R]' T_c(\tau) d\tau \quad (5.38)$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación de observación 5.28 queda una expresión del flujo de calor en función de las entradas en instantes anteriores o si se quiere en función de la salida y las entradas hasta el instante de cálculo. Se ha conseguido de esta forma una representación externa del muro que se denomina, por similitud con los factores de respuesta, método de los coeficientes de respuesta. El método fue presentado por Ceylan y Myers [75]. Otros métodos de obtención de funciones de transferencia para la conducción multidimensional requieren la resolución de la ecuación diferencial ordinaria que resulta de la discretización espacial (por ejemplo [76]). El método que aquí se propone es una vía alternativa para la obtención de este tipo de modelos.

5.3.2 Función de transferencia en frecuencia

Interesa deducir de forma analítica la función de transferencia en frecuencia del modelo de variables de estado descrito en 5.3.1.

Como el sistema es estable, una vez transcurrido un tiempo suficientemente grande, ante excitaciones de tipo senoidal la respuesta es del mismo tipo como se mostró en el capítulo 3. Esto es, si las temperaturas en el contorno son:

$$T_c(t) = T_c(w)e^{j\omega t} \quad (5.39)$$

el flujo de calor, una vez desaparecido el transitorio inicial, será:

$$q(t) = q(w)e^{j\omega t} \quad (5.40)$$

y de la misma forma evolucionan los estados $X(t)$:

$$X(t) = X(w)e^{j\omega t} \quad (5.41)$$

Introduciendo 5.39 y 5.41 en la ecuación de transición 5.25 queda:

$$X(w) = (j\omega[I] - [L])^{-1}[R]'T_c(w) \quad (5.42)$$

haciendo ahora uso de la ecuación de observación 5.28 para obtener el flujo de calor:

$$q(j\omega) = ([S]'(j\omega[I] - [L])^{-1}[R]' + [E])T_c(w) \quad (5.43)$$

A partir de la definición de función de transferencia en frecuencia, se tiene:

$$G(j\omega) = \frac{q(w)}{T_c(w)} = [S]'(j\omega[I] - [L])^{-1}[R]' + [E] \quad (5.44)$$

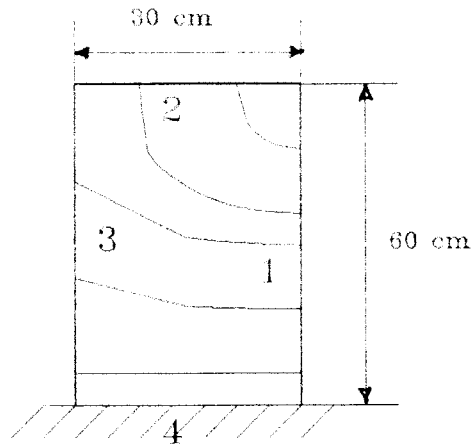


Figura 5.2: Puente térmico tratado.

5.4 OBTENCION DE MODELOS SIMPLES A PARTIR DE LA DESCRIPCION GEOMETRICA Y LAS PROPIEDADES FISICAS

5.4.1 Descripción del caso

Como muestra de las posibilidades del método de identificación que se propone en esta tesis se estudiará un puente térmico bajo un acristalamiento.

Se supondrá un muro de 30 *cm* de espesor y en el que se considera una superficie de 60 *cm* en vertical hasta que las líneas de flujo de calor son perpendiculares a las superficies verticales, según se muestra en la figura 5.2. El muro se considera homogéneo con las siguientes propiedades:

$$k = 0,5 \text{ W/mK}$$

$$\rho = 1500 \text{ kg/m}^3$$

$$c_p = 1000 \text{ J/kgK}$$

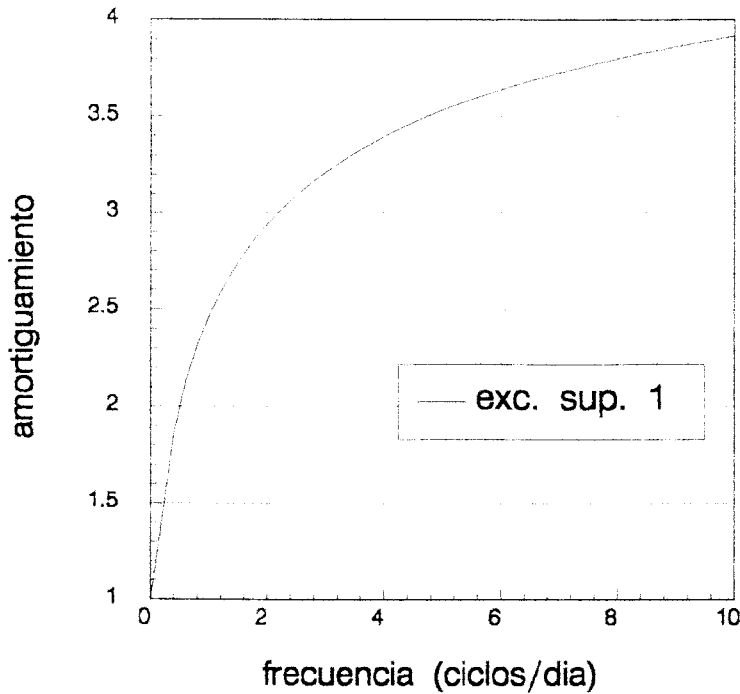


Figura 5.3: Amortiguamiento de la excitación aplicada en la superficie 1 cuando la respuesta se mide en la misma superficie.

Los coeficientes de película convectivos-radiantes utilizados son para las superficies exteriores (numeradas 2 y 3 en la figura 5.2) de $15 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ y para la superficie interior (numerada 1 en la figura 5.2) de $9 \text{ W/m}^2 \text{ K}$.

El amortiguamiento de la excitación aplicada las superficies 1, 2 y 3 se muestra en las figuras 5.3, 5.4 y 5.5. El comportamiento es similar al observado en el capítulo anterior.

Cuando la excitación se aplica en la superficie 2 el amortiguamiento cae más lentamente con la frecuencia que para una superficie exterior como la 3. La curva de amortiguamiento muestra una tendencia a comportarse como si la excitación se aplicara en la misma cara donde se mide el flujo de calor. De forma intuitiva: el recorrido desde donde se aplica la excitación a donde se mide la respuesta es 0 cuando la excitación es aplicada en la cara 1, varía desde 0 hasta el espesor del muro cuando la excitación se aplica en la cara 2 y es constante e igual al espesor del muro cuando se excita la cara 3. El amortiguamiento está evidentemente asociado a este recorrido.

5.4.2 Descripción de las excitaciones de prueba

En la selección de las excitaciones de prueba se han tenido en cuenta las condiciones reales a que estará sometida la sección de muro considerada.

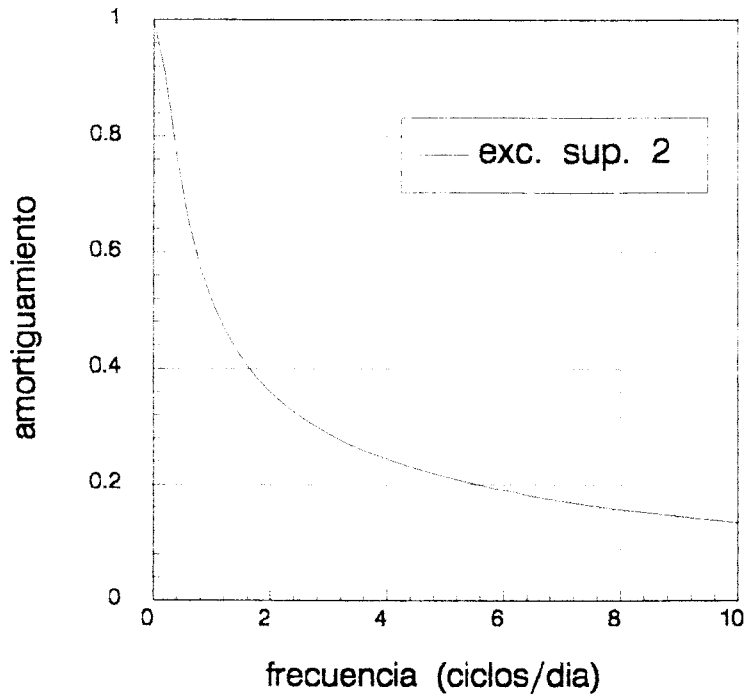


Figura 5.4: Amortiguamiento de la excitación aplicada en la superficie 2 cuando la respuesta se mide en la superficie 1.

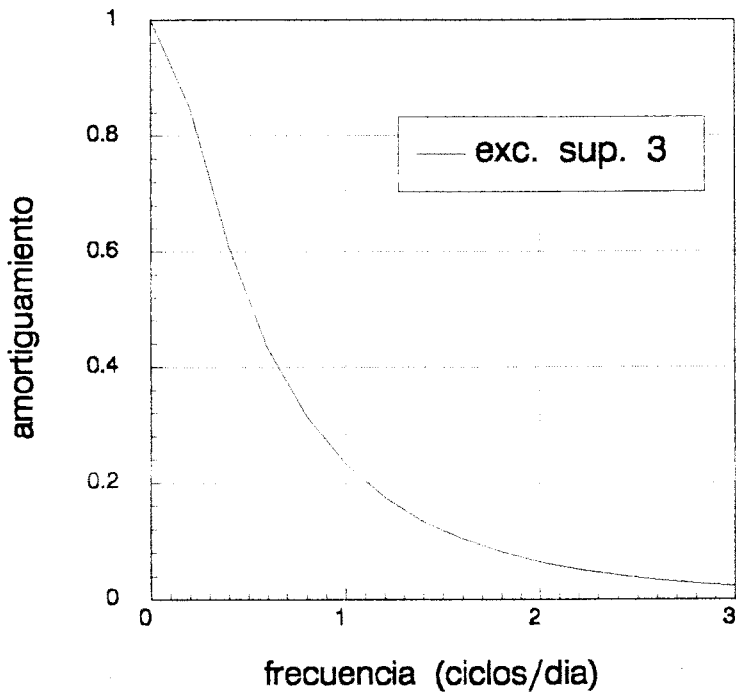


Figura 5.5: Amortiguamiento de la excitación aplicada en la superficie 3 cuando la respuesta se mide en la superficie 1.

Para la superficie 1, situada en el interior de la zona se ha seleccionado la misma que en el caso unidimensional. La figura 4.8 muestra la evolución de esta temperatura.

La superficie 2 es horizontal y por lo tanto se ha seleccionado una excitación correspondiente a la temperatura sol-aire que resulta de tomar la radiación global sobre una superficie horizontal. En concreto se utilizan datos generados para Sevilla en el mes de Julio. Para calcular la temperatura sol-aire se considera el coeficiente convectivo radiante de $15 \text{ W/m}^2\text{K}$ mencionado en el apartado anterior y una absorptividad de la superficie de 0,3. La figura 5.6 muestra la evolución de la temperatura sol-aire para la superficie horizontal y el módulo de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier.

El añadir la radiación global sobre superficie horizontal (ponderada por el coeficiente de película convectivo-radiante y la absorptividad) no hace variar el número de coeficientes que hay que considerar en el desarrollo en serie. Con las frecuencias de 1 y 2 ciclos/día debe tenerse una buena representación de la excitación. Imponer estas frecuencias para identificar llevará, como se verá posteriormente, a una buena reproducción del flujo de calor.

Para la superficie 3 se han probado dos orientaciones: este y sur. En una exposición este se tiene la evolución de temperatura sol-aire que se muestra en la figura 5.7 junto con el módulo de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier. El coeficiente de película y la absorptividad han sido los mismos que en la superficie horizontal.

Al observar la gráfica de módulos se ve como el peso de la frecuencia de 3 ciclos/día es mayor que el de 2 ciclos/día. La curva de amortiguamiento para la excitación aplicada en esta superficie muestra que para la frecuencia de 3 ciclos/día la amplitud del flujo de calor es prácticamente nula. La elección de las frecuencias para identificar no es inmediata en este caso. Atendiendo a la curva de amortiguamiento se seleccionarían 1 y 2 ciclos/día pero si se tiene en cuenta el desarrollo en serie de Fourier de la excitación se tomarían 1 y 3 ciclos/día. Ambos casos han sido estudiados.

Cuando la superficie 3 está expuesta al sur, la temperatura sol-aire junto con los módulos de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier se muestran en la figura 5.8. En este caso no hay duda de que las frecuencias seleccionadas para identificar deben ser 1 y 2 ciclos/día.

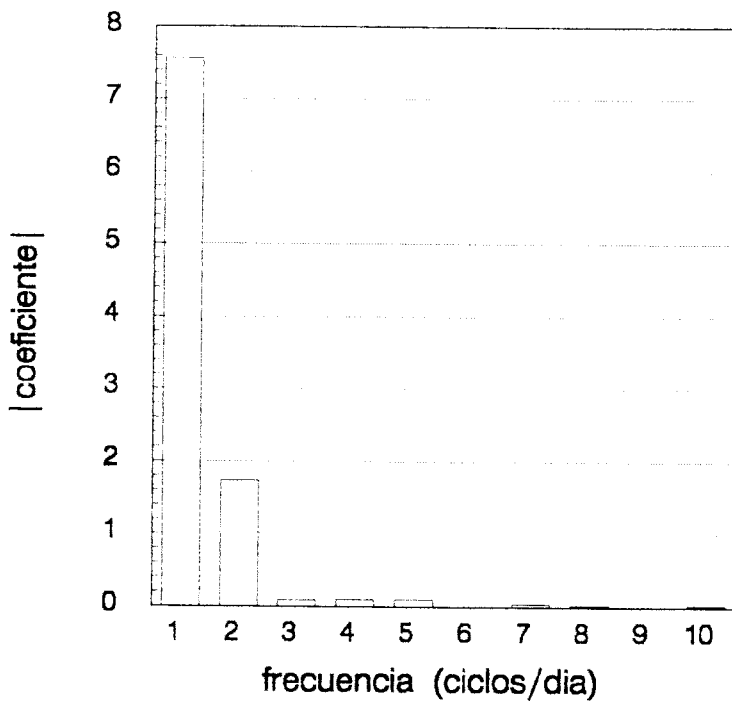
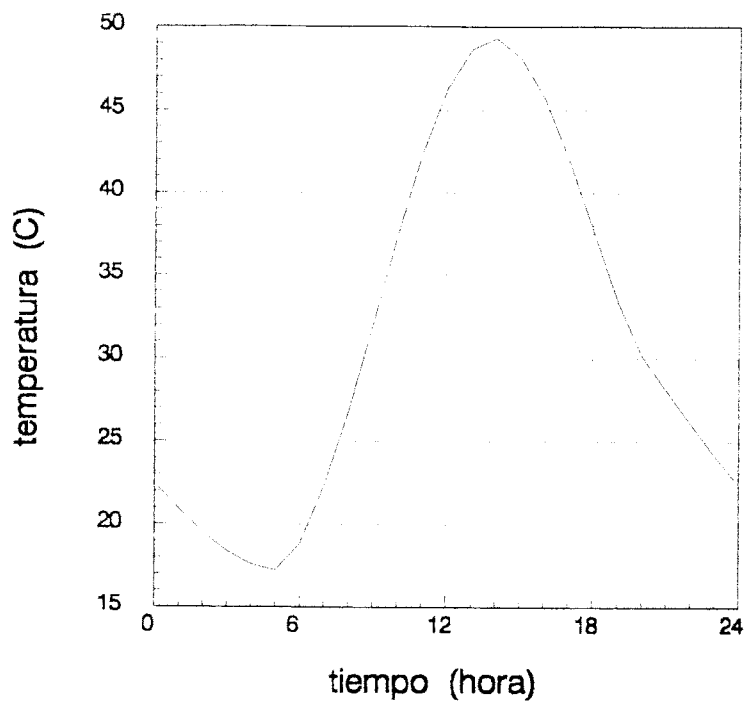


Figura 5.6: Temperatura sol-aire en superficie horizontal y módulo de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier.

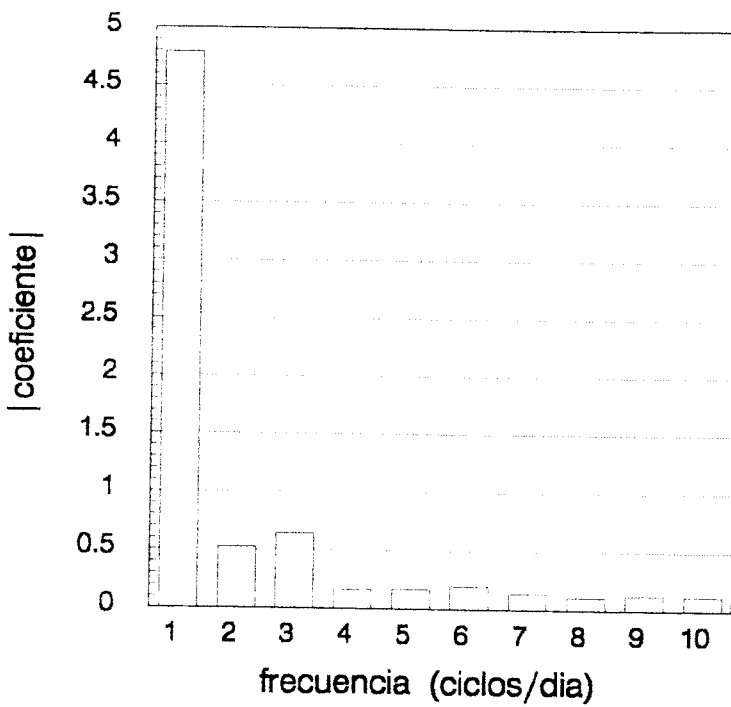
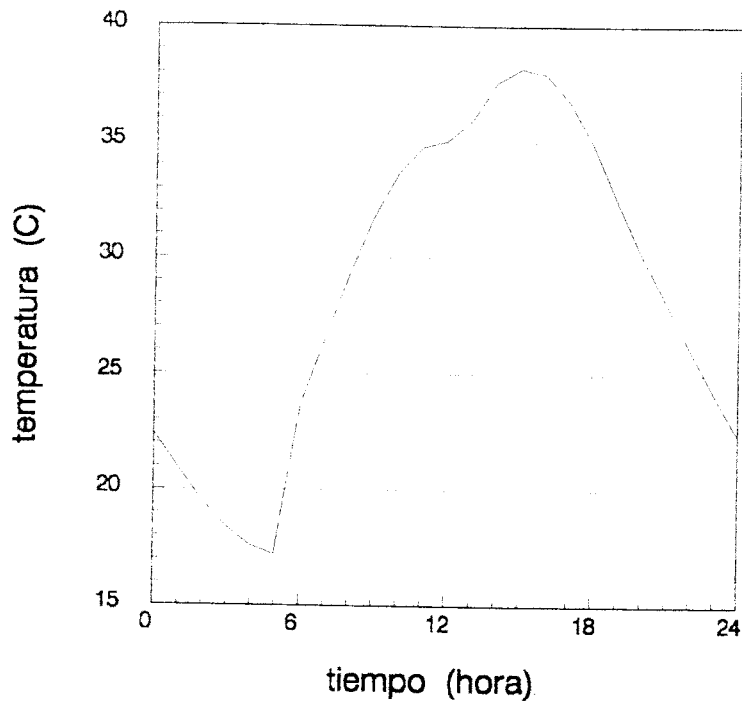


Figura 5.7: Temperatura sol-aire en superficie 3 con exposición este y módulo de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier.

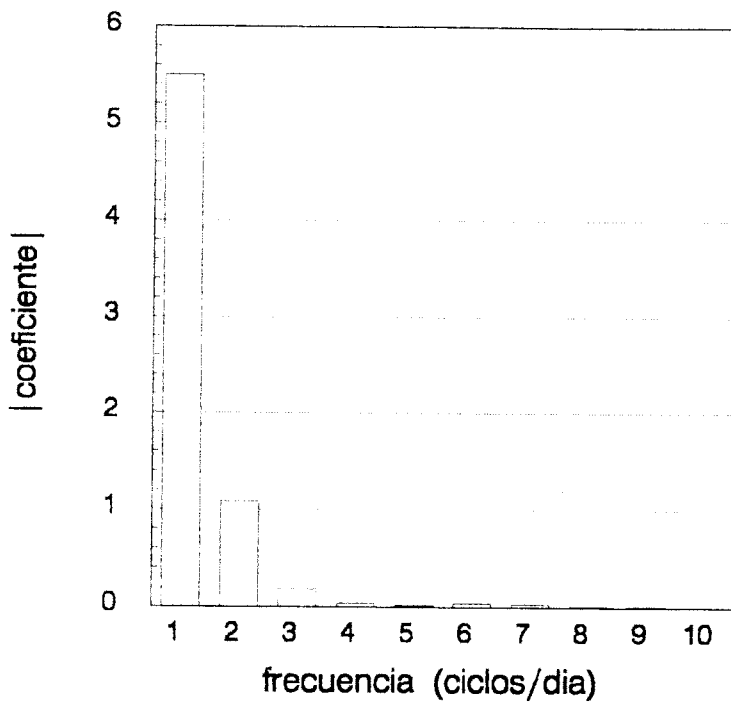
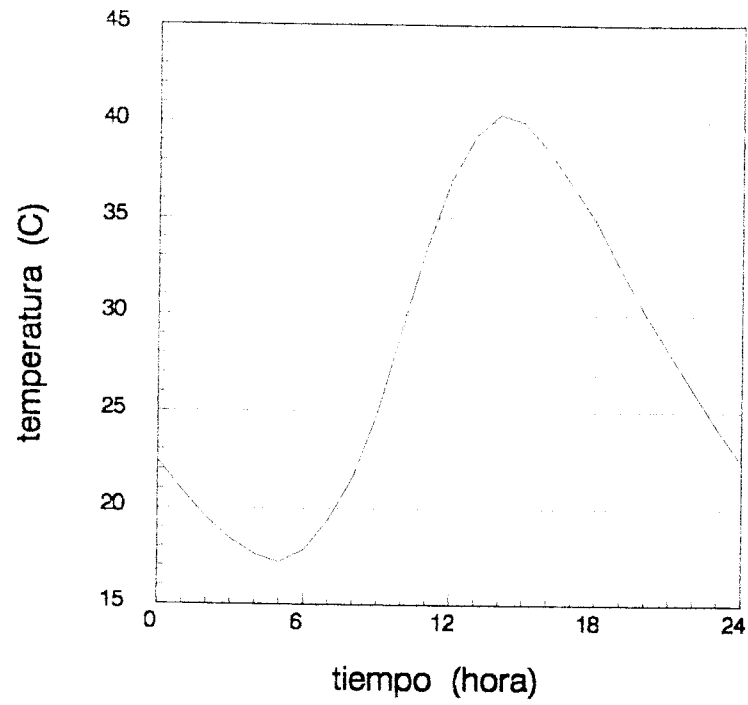


Figura 5.8: Temperatura sol-aire en superficie 3 con exposición sur y módulo de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier.

5.4.3 Selección del modelo

En el capítulo anterior se justificó la elección de modelos de segundo orden para representar la conducción unidimensional en muros.

El problema bidimensional puede entenderse como superposición de dos problemas unidimensionales. En este caso se tendrá un modelo simple con 5 parámetros para la excitación aplicada en cada cara, esto es, el modelo conjunto será de 15 parámetros. La identificación de un modelo conjunto para las 3 excitaciones, que conseguiría reducir en 4 el número de parámetros no proporciona tan buenos resultados como la obtenida separando los modelos. Como en el caso unidimensional, el aumento en la velocidad de simulación al reducir el número de coeficientes no justifica la elección del modelo más simple de 11 parámetros. En resumen, se considera un modelo del tipo:

$$q(t) = a_1 q(t-1) + a_2 q(t-2) + b_0 T(t) + b_1 T(t-1) + b_2 T(t-2) \quad (5.45)$$

donde $T(t)$ toma el valor de la temperatura sol-aire a que están sometidas las superficies 2 y 3 o la temperatura interior a que está sometida la superficie 1.

Al imponer la igualdad de las funciones de transferencia del modelo detallado y el simple para dos frecuencias, se tienen 2 ecuaciones complejas que unidas a la resultante de la imposición del régimen permanente dan lugar a un sistema de 5 ecuaciones que sirven para determinar los 5 parámetros del modelo 5.45. Este procedimiento debe ser repetido para cada una de las 3 superficies.

5.4.4 Imposición del régimen permanente

La ecuación que cierra el sistema es, como se ha dicho, la imposición del régimen permanente. A partir del modelo detallado puede conocerse el flujo de calor en la cara interna cuando se excita con una temperatura de valor unidad constante en una de las caras y se mantienen a temperatura nula las restantes. Si denominamos U_i a ese valor del flujo de calor al excitar en la cara i , se tiene la ecuación:

$$a_1 U_i + a_2 U_i + b_0 + b_1 + b_2 = U_i \quad (5.46)$$

5.4.5 Planteamiento del sistema

El sistema se plantea en forma semejante al caso unidimensional, según se explicó en el apartado 4.6.6. En este caso la función de transferencia en frecuencia del modelo

EXCITACION SUPERFICIE	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
1	1,298	-0,366	-3,678	5,642	-2,038
2	1,375	-0,431	$7,596 \cdot 10^{-2}$	$-2,250 \cdot 10^{-2}$	$-2,615 \cdot 10^{-2}$
3	1,787	-0,805	$2,584 \cdot 10^{-2}$	$-6,026 \cdot 10^{-2}$	$4,480 \cdot 10^{-2}$

Tabla 5.1: Parámetros identificados.

EXCITACION SUPERFICIE	τ_1	τ_2
1	8,103	1,134
2	8,662	1,377
3	8,889	8,889

Tabla 5.2: Constantes de tiempo en horas.

detallado viene dada por la ecuación 5.44. Por todo lo demás el sistema es equivalente al planteado en el apartado referido del capítulo anterior.

5.4.6 Resultados de la identificación

En la tabla 5.1 se muestran los parámetros del modelo 5.45 obtenidos imponiendo las frecuencias de 1 y 2 ciclos/día.

A partir de los coeficientes a_1 y a_2 se obtienen las constantes de tiempo (ver capítulo 3). La tabla 5.2 muestra los valores obtenidos.

Los modelos identificados son todos estables pero para la excitación aplicada en la superficie 3 se tiene un modelo subamortiguado como ocurría en el muro pesado del capítulo anterior. El muro considerado en este ejemplo, compuesto de 30 cm de

hormigón de 1500 kg/m^3 de densidad, tiene un comportamiento similar al muro pesado que se definió anteriormente.

La figura 5.9 muestra el flujo de calor obtenido con los modelos detallado y simple cuando se excita la cara interior con la temperatura de prueba definida en el apartado 5.4.2. Se muestra igualmente el error en flujo de calor del modelo simple respecto al detallado. Se considera siempre un periodo de puesta a régimen de 3 días. La reproducción del flujo de calor es excelente, consiguiéndose un error máximo de $0,23 \text{ W/m}^2$ que en términos relativos supone un $0,65\%$. El error acumulado en un día de simulación es de $1,47 \text{ W/m}^2$.

Para la excitación aplicada en la cara horizontal, como el desarrollo en serie de Fourier puede limitarse a los armónicos de 1 y 2 ciclos/día, los resultados son necesariamente mejores. La figura 5.10 muestra el flujo de calor obtenido con los modelos detallado y simple y los errores de simulación. En este caso el error máximo es de $0,032 \text{ W/m}^2$ y el acumulado en un día de simulación $0,35 \text{ W/m}^2$.

Finalmente se han estudiado los flujos de calor que se producen en la cara interior cuando se somete la cara 3 a la temperatura sol-aire correspondiente a una superficie expuesta al este (figura 5.11) y al sur (figura 5.12). Si la cara 3 es este el error máximo es $0,12 \text{ W/m}^2$ y el acumulado $0,66 \text{ W/m}^2$. Cuando la cara 3 tiene exposición sur se tiene para el error máximo un valor de $0,056 \text{ W/m}^2$ y para el acumulado $0,55 \text{ W/m}^2$. La razón de obtener menores errores cuando la exposición es sur es clara a partir de la observación de las gráficas 5.7 y 5.8. Cuando la excitación es la correspondiente al este el armónico correspondiente a 3 ciclos/día tiene más peso que el de 2 ciclos/día. Sin embargo las funciones de transferencia en frecuencia se han hecho coincidir para 1 y 2 ciclos/día. Cuando la excitación es la temperatura sol-aire de una superficie expuesta a sur el armónico de 3 ciclos/día tiene mucho menor peso.

Es posible plantear la identificación imponiendo, en lugar de las frecuencias de 1 y 2 ciclos/día, las de 1 y 3 ciclos/día. Esto sería coherente desde el punto de vista de la excitación si ésta va a ser la de una cara este. Los resultados de esta identificación son los parámetros que se muestran en la tabla 5.3.

El modelo sigue siendo subamortiguado y la reproducción del flujo de calor cuando se excita la cara 3 difiere mucho de la solución detallada. La razón de este comportamiento hay que buscarla en que se ha impuesto una frecuencia con muy poco peso en el sistema. Obsérvese en la figura 5.5 como el amortiguamiento para la frecuencia de 3 ciclos/día es muy grande.

A la vista de los resultados obtenidos puede afirmarse que los modelos simples de

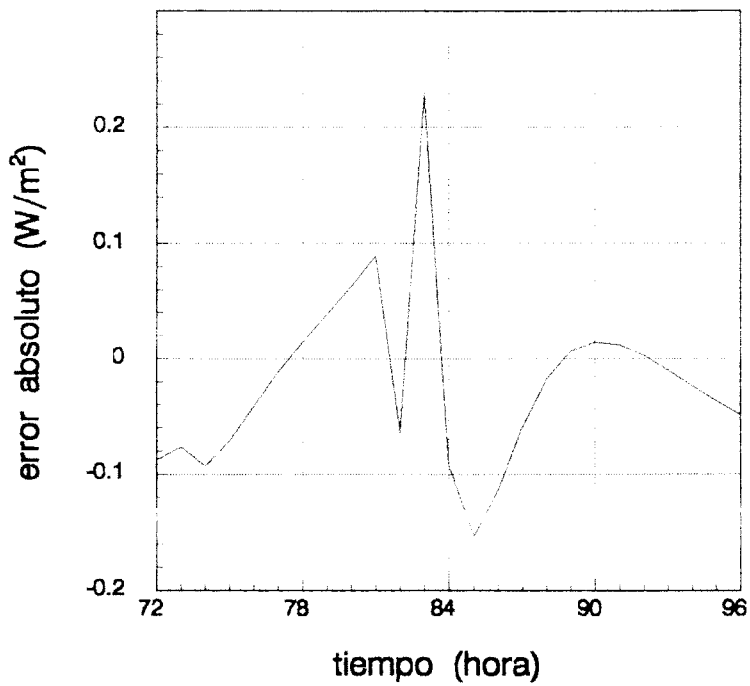
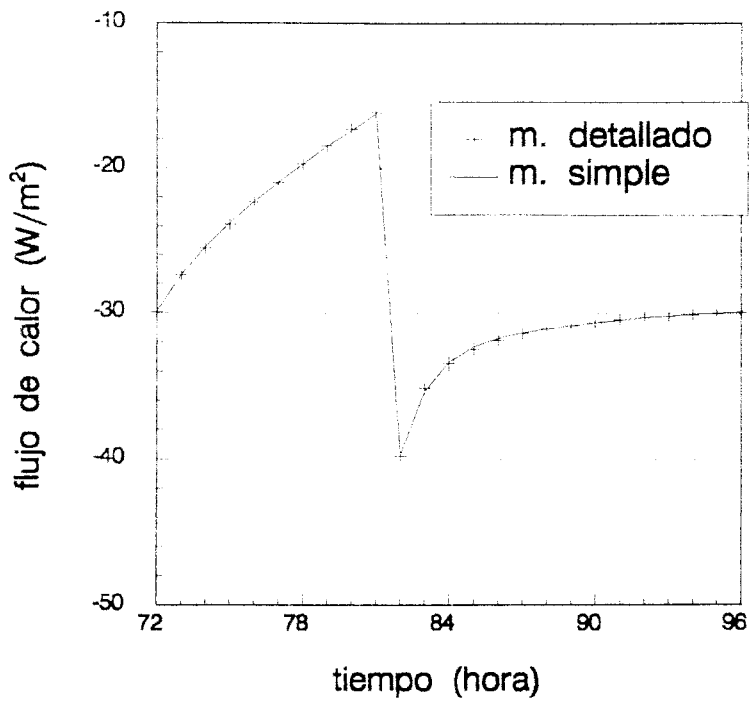


Figura 5.9: Flujo de calor y errores obtenidos con los modelos detallado y simple para la excitación aplicada en la cara 1.

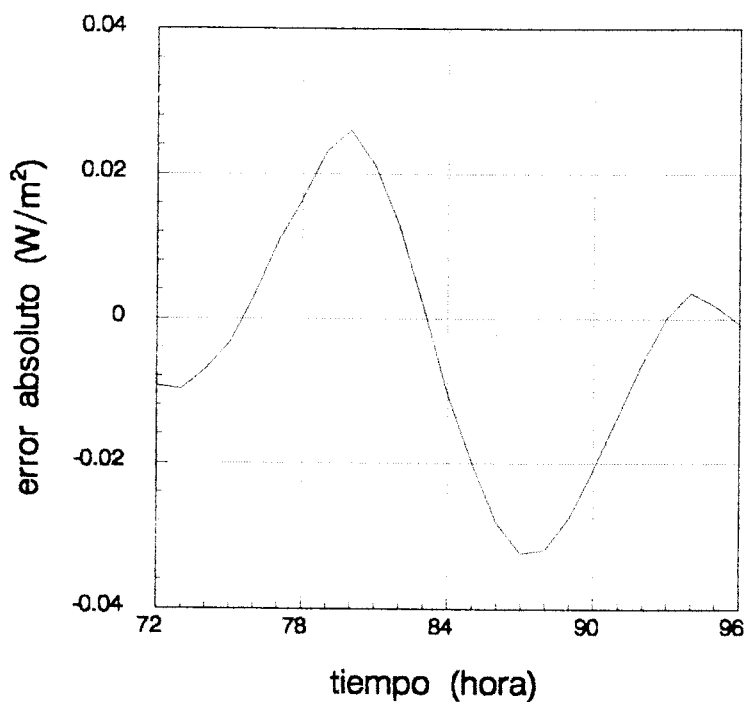
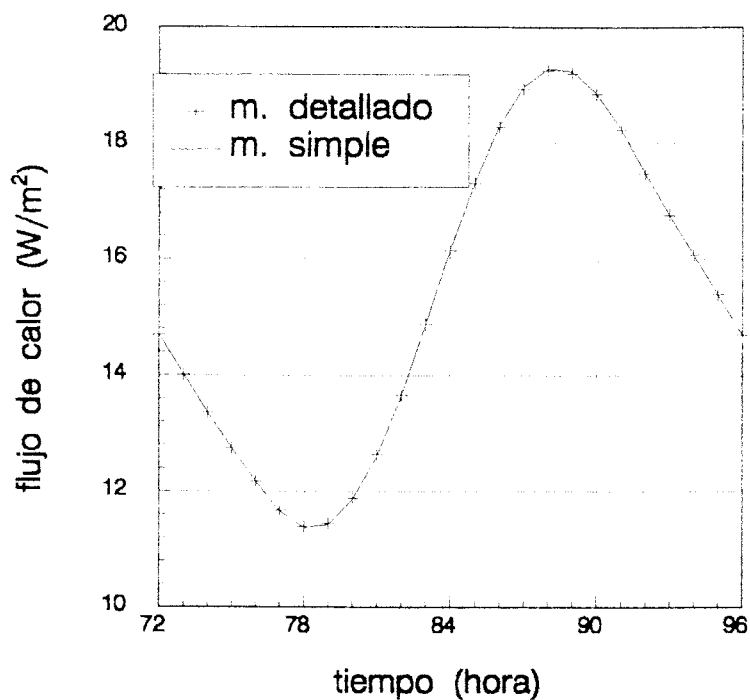


Figura 5.10: Flujo de calor y errores obtenidos con los modelos detallado y simple para la excitación aplicada en la cara 2.

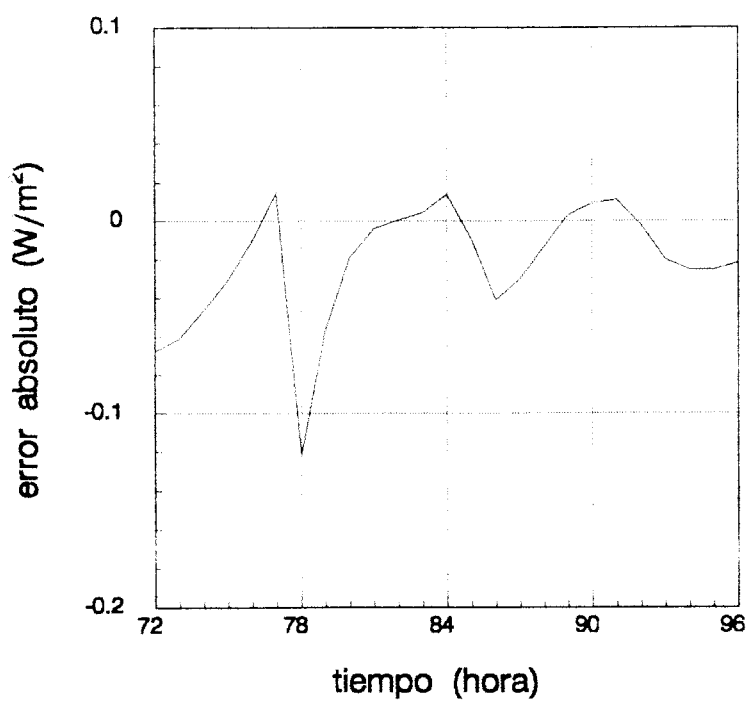
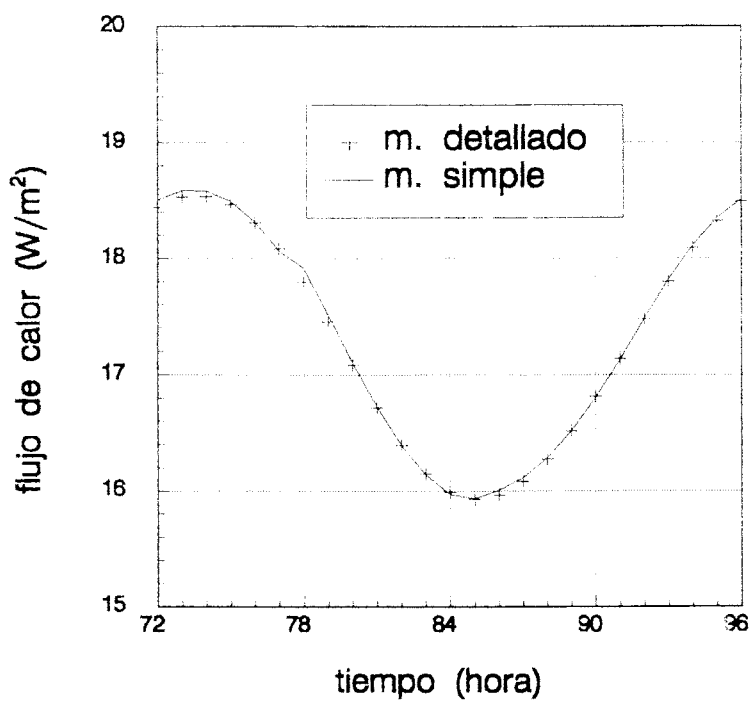


Figura 5.11: Flujo de calor y errores obtenidos con los modelos detallado y simple para la excitación aplicada en la cara 3 con exposición este.

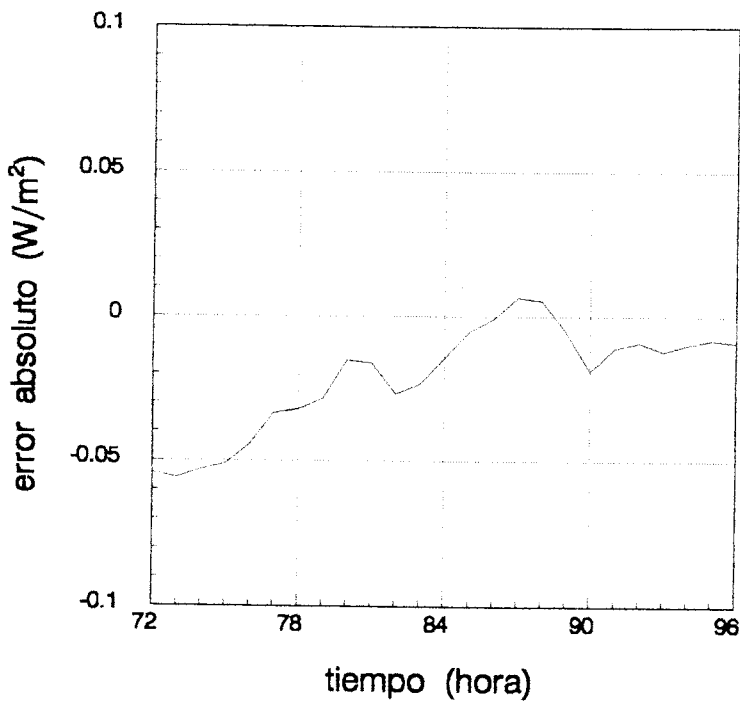
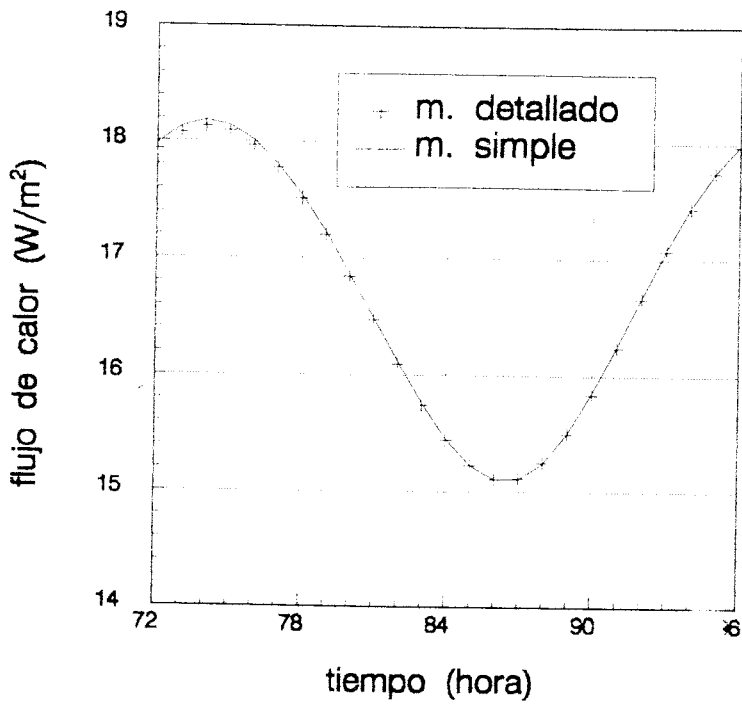


Figura 5.12: Flujo de calor y errores obtenidos con los modelos detallado y simple para la excitación aplicada en la cara 3 con exposición sur.

a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
1,994	-1,007	$1,233 \cdot 10^{-2}$	$-7,018 \cdot 10^{-3}$	$-2,487 \cdot 10^{-3}$

Tabla 5.3: Parámetros obtenidos para la excitación en superficie 3 imponiendo 1 y 3 ciclos/día.

orden 2 reproducen con suficiente precisión el flujo de calor en la cara interna del muro. Se pueden plantear problemas para muros pesados cuando se excitan en su cara externa con temperaturas que no tienen un desarrollo en serie de Fourier en sólo dos armónicos. En la mayoría de los casos esto no sucederá (nunca ocurre para variables meteorológicas como se ha visto) y por lo tanto los modelos simples sustituirán con éxito a los lentos modelos detallados.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

6.1 CONCLUSIONES

- 1) Se ha propuesto un método de identificación en el dominio de la frecuencia basado en la igualdad entre las funciones de transferencia de un sistema y el modelo que lo representa. Se ha justificado la aplicación y adecuación del método para la obtención de modelos regresivos. El método propuesto es en ese caso de muy fácil implementación.
- 2) A partir del análisis de la respuesta en frecuencia del sistema y del contenido en frecuencia de las excitaciones a que va a someterse, se han establecido los criterios de selección de las frecuencias a imponer en la aplicación del método.
- 3) Se han demostrado las ventajas de los modelos de tipo regresivo frente a los de variables de estado en la aplicación del método. Se ha establecido la conexión entre los dos tipos de modelos, proponiéndose una metodología de obtención de modelos de representación externa a partir del de variables de estado sin necesidad de llevar a cabo la integración de la ecuación de transición de estados.
- 4) Se ha aplicado el método de identificación al tratamiento de datos experimentales para la determinación de los factores de respuesta de muros, mostrándose como una metodología viable para la caracterización de elementos constructivos a partir de medidas del flujo de calor.
- 5) Se ha mostrado la potencia del método de identificación propuesto cuando se aplica a la modelización de fenómenos de conducción transitoria unidimensional en elementos de edificación, obteniéndose excelentes resultados. En la aplicación del método a la reducción de modelos detallados se ha mostrado que se ajusta con mayor exactitud al modelo no reducido que otros de reciente aparición en la literatura. Adicionalmente el método propuesto es el de más fácil implementación.

- 6) Se ha aplicado con éxito el método de identificación propuesto a la obtención de modelos regresivos de conducción bidimensional en puentes térmicos. Hasta el presente la obtención de modelos de representación externa en conducción bidimensional pasaba por la resolución numérica del problema detallado.
- 7) El método propuesto permite la utilización de modelos simples y fiables de elementos complejos cuya incorporación en programas de simulación térmica de edificios requería una modelización detallada. Las características del modelo posibilitan su incorporación, sin modificar la estructura del programa ni incrementar el tiempo de ejecución.

6.2 DESARROLLO FUTURO

Las posibles vías de continuación de este trabajo se relacionan a continuación:

- 1) Aplicar el método de identificación propuesto en la tesis a la modelización de otros sistemas: suelos en contacto con el terreno, equipos de climatización, etc.
- 2) Establecer criterios que permitan definir el orden de los modelos a partir de la respuesta frecuencial del sistema. En el caso de modelos simples habrá de tenerse además en cuenta el contenido frecuencial de las excitaciones a que se someten el sistema y el modelo.
- 3) Determinar analíticamente una relación entre el sistema a identificar y las frecuencias que se imponen en la aplicación del método. En las aplicaciones que aquí se han mostrado la elección viene dada por la lógica. Las solicitaciones meteorológicas se desarrollan con suficiente aproximación en sólo dos armónicos. Para las excitaciones interiores sólo una capa estrecha del muro determina la respuesta cuando las frecuencias son suficientemente altas. Estas condiciones no tienen porqué reproducirse en la modelización de otros sistemas.

Anexo A

OBTENCION DE MODELOS DE VARIABLES DE ESTADO

A.1 INTRODUCCION

El método de identificación en el dominio de la frecuencia presentado en la tesis se ha aplicado a modelos de representación externa de tipo regresivo. Un planteamiento equivalente para modelos de variables de estado es también posible.

En el presente anexo se muestran los resultados del método de identificación aplicado a los muros ligero, medio y pesado definidos anteriormente. Se analizan igualmente las ventajas e inconvenientes de esta aproximación.

Como se mostrará, existen conexiones entre los modelos de representación externa e interna. Es posible obtener un modelo de variables de estado a partir del modelo regresivo que se ha determinado a lo largo de la tesis. El modelo de variables de estado obtenido a partir de esa transformación sería equivalente al obtenido identificándolo directamente para las mismas excitaciones que el modelo regresivo. Las diferencias estarían provocadas exclusivamente por errores numéricos: en el caso del modelo de variables de estado el sistema que se tiene para la determinación de los parámetros es no lineal y es necesario recurrir a métodos numéricos de minimización.

El interés del anexo se ha centrado en ver las posibilidades de identificar un modelo de variables de estado, no exactamente equivalente al modelo regresivo que podría obtenerse directamente, sino conjunto para las dos excitaciones. Buena parte de lo presentado en este anexo está contenido en [77].

A.2 MODELO DE VARIABLES DE ESTADO. EL PASO AL MODELO REGRESIVO

La clase de modelo seleccionado para identificar es lineal, multivariable, de parámetros concentrados y constantes, en el dominio del tiempo y determinista.

Los modelos de variables de estado han venido utilizándose profusamente desde la aparición de la teoría de control "moderna". La principal ventaja de esta clase de modelos es que puede ser obtenido a partir de una modelización física. Son por tanto modelos de conocimiento, donde los parámetros guardan una relación con las propiedades y leyes físicas que gobiernan el problema. En modelos simples, sin embargo, existe el problema de la separabilidad de los parámetros: una vez determinados los parámetros de los modelos reducidos, ¿podrán calcularse los del modelo sin reducir que son los que tienen realmente significado físico?. La respuesta es generalmente no. La justificación de utilizar modelos simples de representación interna queda entonces un poco diluida.

Un sistema dinámico, lineal e invariante puede representarse en la forma matricial:

$$\frac{dx}{dt} = [A]x + [B]u \quad (\text{A.1})$$

$$y = [C]x \quad (\text{A.2})$$

donde:

x es el vector de estado $nx1$

$[A]$ es la matriz de transición de estado nxn

$[B]$ es la matriz de control nxm

u es el vector de entradas $m \times 1$

y es el vector de salidas $r \times 1$

$[C]$ es la matriz de observación ($r \times n$)

La ecuación A.1 es la ecuación de transición y la A.2 la de observación. Las entradas son temperaturas del aire que rodea al muro o de las superficies, según se consideren o no las resistencias de convección superficiales. La salida es el flujo de calor en la

superficie interna del muro. El estado no tiene porqué tener una interpretación física.

El orden de los vectores y matrices es como corresponde a un modelo de orden 2: $r = 1$ y $m = 2$. El orden de la matriz de transición es teóricamente infinito. En modelos detallados es el número de nodos de la discretización espacial. En el modelo simple aquí considerado se supondrá $n = 2$.

Antes de aplicar el método al modelo descrito por las ecuaciones A.1 y A.2 se muestra cómo un modelo de variables de estado puede convertirse en un modelo regresivo resolviendo un sistema lineal de ecuaciones. Lo contrario no es cierto.

Supongamos un modelo de variables de estado discreto donde las entradas son temperaturas y la salida el flujo de calor. Además se ha supuesto una matriz de transición diagonal:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} \cdot T(t) \quad (\text{A.3})$$

y la ecuación de observación:

$$q(t) = [\gamma_1, \gamma_2] \cdot \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Se busca un modelo regresivo equivalente a éste de la forma:

$$q(t) = a_1 q(t-1) + a_2 q(t-2) + b_0 T(t) + b_1 T(t-1) + b_2 T(t-2) \quad (\text{A.5})$$

El objetivo es determinar los coeficientes del modelo A.5: a_1 , a_2 , b_0 , b_1 y b_2 . Para ello se establece la igualdad de las funciones de transferencia en z de los dos modelos:

$$\frac{\beta_1 \gamma_1 (1 - \alpha_2 z^{-1}) + \beta_2 \gamma_2 (1 - \alpha_1 z^{-1})}{(1 - \alpha_1 z^{-1})(1 - \alpha_2 z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \quad (\text{A.6})$$

Igualando término a término los dos polinomios en z^{-1} se tiene:

$$b_2 \alpha_1 \alpha_2 = 0 \quad (\text{A.7})$$

y la ecuación matricial siguiente:

$$E \cdot \Theta = \xi \quad (\text{A.8})$$

donde:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2) & 0 & \alpha_1 + \alpha_2 & -1 \\ \beta_1\gamma_1\alpha_2 + \beta_2\gamma_2\alpha_1 & -(\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2) & -\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 & \beta_1\gamma_1\alpha_2 + \beta_2\gamma_2\alpha_1 & 0 & -\alpha_1\alpha_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\Theta^T = (a_1, a_2, b_0, b_1, b_2) \quad (\text{A.10})$$

$$\xi^T = (\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2, \beta_1\gamma_1\alpha_2 + \beta_2\gamma_2\alpha_1, 0, 0) \quad (\text{A.11})$$

Si se conocen los parámetros del modelo de variables de estado es posible, mediante la resolución del sistema A.8, obtener los del modelo regresivo. Se dispone entonces del flujo de calor en cada instante como sumas y productos de los parámetros por los valores de temperatura en cada superficie del muro y flujos de calor calculados en instantes anteriores.

Si el modelo A.3 viene dado en forma continua puede obtenerse la transformada z del modelo discreto equivalente mediante el paso por la transformada de Laplace. A partir de la transformada z el procedimiento es el mismo que en el caso discreto. Esta solución es una forma práctica de resolver la ecuación diferencial ordinaria A.1 sin necesidad de integrarla. Otras soluciones para llegar al modelo regresivo pasan por esa integración (ver por ejemplo la tesis de Pérez [78]).

El caso contrario, en que se dispone de un modelo regresivo y quiere pasarse a un modelo de variables de estado, carece de interés en el problema que se está considerando. Aún así, a partir del planteamiento de la igualdad de las funciones de

transferencia en z (ecuación A.6), se tendrían 5 ecuaciones no lineales para determinar los 8 parámetros del modelo de variables de estado en una base modal. El problema no está cerrado puesto que la base no es única y sería necesario imponer condiciones que la fijaran. Este problema no será explicado aquí aunque pueden encontrarse soluciones a esta transformación en la tesis antes referida ([78]).

A.3 ELECCION DE LA BASE

El modelo a identificar es el descrito por las ecuaciones A.1 de transición de estados y A.2 de observación. Es sabido que la base en que se expresa el modelo no es única. Sea por ejemplo una matriz de cambio de base $[P]$ de manera que:

$$x = [T]x' \quad (\text{A.12})$$

introduciendo la transformación en las ecuaciones del modelo A.1 y A.2 se tiene:

$$\frac{dx'}{dt} = [A']x' + [B']u \quad (\text{A.13})$$

$$y = [C']x' \quad (\text{A.14})$$

con las siguientes definiciones:

$$[A'] = [P]^{-1}A[P] \quad (\text{A.15})$$

$$[B'] = [P]^{-1}B \quad (\text{A.16})$$

$$[C'] = [C]P \quad (\text{A.17})$$

Se tiene entonces una representación equivalente en la que los nuevos vectores de estado son una combinación lineal de los anteriores.

Cuando en el proceso de modelización se sigue una metodología directa, obteniendo un modelo de conocimiento a partir de las ecuaciones de balance en cada nodo, la base

inicial en que se expresa el modelo es, de forma natural, una base en la que los estados son las temperaturas en cada nodo de la discretización. En el problema inverso, de identificación, es necesario imponer condiciones adicionales para fijar la base. Se añade de esta forma el conocimiento de la física del sistema tratado, convirtiendo el modelo inicialmente de caja negra, en un modelo gris. En este trabajo se utilizan dos bases para expresar el modelo: la base modal de temperaturas y la base de observación.

La matriz de transición $[A]$ de la ecuación A.1 es en principio no diagonal. Interesa, sin embargo, para reducir el número de parámetros y por facilidad en la resolución de la ecuación diferencial, convertir la matriz $[A]$ en otra diagonal a partir de un cambio de base. Esta sería la base modal o base de los modos propios. La transformación que hace que esto ocurra se define a partir del cálculo de los autovectores de la matriz $[A]$. El procedimiento puede encontrarse detallado por ejemplo en Friedly [61].

a) Base modal de temperaturas:

En esta base los estados son temperaturas en los nodos, como resulta de una discretización espacial. Si esto ocurre, cuando se imponen como entradas temperaturas superficiales unitarias, los estados deben tomar también el valor unidad. Es decir:

$$0 = [A] \{1\} + [B] \{1\} \quad (\text{A.18})$$

Para un modelo de orden 2 como el que se está considerando se llega a las siguientes ecuaciones:

$$0 = \alpha_1 + \beta_{11} + \beta_{12} \quad (\text{A.19})$$

$$0 = \alpha_2 + \beta_{21} + \beta_{22} \quad (\text{A.20})$$

b) Base de observación:

Se define como aquella en la que el flujo de calor, que es la salida del modelo proporcionada por la ecuación de observación, se obtiene como suma de los estados.

Bajo esta condición los elementos de la matriz $[C]$ son la unidad. En el modelo de orden 2:

$$\gamma_1 = 1 \quad \gamma_2 = 1 \quad (\text{A.21})$$

A.4 FUNCION DE RESPUESTA EN FRECUENCIA. DEFINICION DE LA FUNCION OBJETIVO

El método de identificación que se propone en esta tesis está basado en la igualdad de las funciones de transferencia del sistema y del modelo para determinadas frecuencias. Cuando se trata de un modelo regresivo es posible establecer exactamente esta igualdad resolviendo un sistema de ecuaciones lineales. En el caso de un modelo de variables de estado el sistema que resulta es no lineal. Puesto que su resolución exige la utilización de un método iterativo, la imposición de más frecuencias que las estrictamente necesarias para resolver el sistema no añade una dificultad adicional. Por ello, a continuación se plantea el método como si se minimizara una función objetivo definida como el módulo al cuadrado de las diferencias entre las funciones de transferencia del sistema y del modelo simple. Se define la función objetivo a minimizar según:

$$J = \sum_{i=0}^N \|G(jw_i) - G(jw_i)_m\|^2 \quad (\text{A.22})$$

donde $G(jw_i)$ es la función de transferencia en frecuencia del sistema para la frecuencia w_i , obtenida experimentalmente o mediante un modelo detallado y $G(jw_i)_m$ es la que se obtiene para el modelo simple, en este caso, el definido por las ecuaciones A.1 y A.2.

Las herramientas para obtener las funciones de transferencia en frecuencia se expusieron en el capítulo 3 de la tesis. Para el modelo simple la función de transferencia se calcula a partir del régimen periódico establecido. Si:

$$u(t) = U(w)e^{j\omega t} \quad (\text{A.23})$$

se tendrá (ver capítulo 3):

$$x(t) = X(w)e^{j\omega t} \quad (\text{A.24})$$

$$y(t) = Y(w)e^{j\omega t} \quad (\text{A.25})$$

sustituyendo en la ecuación de transición A.1 se tiene:

$$(j\omega I - A)X(w) = BU(w) \quad (\text{A.26})$$

y despejando el estado, en el dominio de la frecuencia:

$$X(w) = (j\omega I - A)^{-1}BU(w) \quad (\text{A.27})$$

Utilizando ahora la ecuación de observación A.2:

$$Y(w) = C(j\omega I - A)^{-1}BU(w) \quad (\text{A.28})$$

y por definición de función de transferencia:

$$G(j\omega)_m = C(j\omega I - A)^{-1}B \quad (\text{A.29})$$

Para el modelo de orden 2 y considerando el vector de entradas de orden 2 (temperaturas en cada una de las superficies del muro) la matriz de transferencia es:

$$G(j\omega)_m = (G_1(j\omega), \quad G_2(j\omega)) \quad (\text{A.30})$$

siendo:

$$G_1(j\omega) = -\beta_{11}\gamma_1 \frac{\alpha_1 + j\omega}{\alpha_1^2 + \omega^2} - \beta_{21}\gamma_2 \frac{\alpha_2 + j\omega}{\alpha_2^2 + \omega^2} \quad (\text{A.31})$$

$$G_2(jw) = -\beta_{12}\gamma_1 \frac{\alpha_1 + jw}{\alpha_1^2 + w^2} - \beta_{22}\gamma_2 \frac{\alpha_2 + jw}{\alpha_2^2 + w^2} \quad (\text{A.32})$$

Para cada frecuencia se tiene una ecuación en el campo complejo. Las restricciones que resultan de la imposición de la base (apartado I.3) y del régimen permanente (apartado I.5) sirven para reducir el número de parámetros independientes.

Este procedimiento, basado en la distinción de las variables en dependientes e independientes, introduce una asimetría en las variables. ¿Qué variables deben ser elegidas como independientes?. Con carácter general se tomarían las variables que dan lugar a una función objetivo más simple. Se ha preferido un método de sustitución directa al método general de los multiplicadores de Lagrange, que introduciría 4 parámetros artificiales, a cambio de no distinguir entre las variables. En definitiva, se eligen de las 8 variables independientes sólo 4, expresando las otras 4 en función de las primeras a partir de las 4 restricciones, en lugar de llevar a cabo una minimización de la función objetivo con 8 parámetros sometida a las 4 restricciones.

A.5 IMPOSICION DEL REGIMEN PERMANENTE

El espacio de los parámetros, inicialmente de dimensión $n \cdot (m + 1)$, ha quedado reducido al seleccionar una base modal a $n \cdot (m + 2)$. Si además se elige la base de temperatura o de observación la dimensión es $n \cdot (m + 2) - 2$. Finalmente, puede utilizarse la información aportada por el régimen permanente para reducir aún más la dimensión del espacio de los parámetros a $n \cdot (m + 2) - 4$.

En régimen permanente:

$$0 = [A]x + [B]u \quad (\text{A.33})$$

$$x = -[A]^{-1}[B]u \quad (\text{A.34})$$

la ecuación de observación queda entonces:

$$y = -[C][A]^{-1}[B]u \quad (\text{A.35})$$

Como el flujo de calor en régimen permanente puede ser conocido a partir del coeficiente global de transferencia U del muro:

$$q = (-U, U) \left\{ \begin{array}{c} T_i \\ T_e \end{array} \right\} \quad (\text{A.36})$$

igualando las ecuaciones A.35 y A.36 se tiene:

$$-[C][A]^{-1}[B] = (-U, U) \quad (\text{A.37})$$

desarrollando la ecuación matricial A.37 quedan las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\gamma_1 \beta_{11}}{\alpha_1} + \frac{\gamma_2 \beta_{21}}{\alpha_2} = U \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{\gamma_1 \beta_{12}}{\alpha_1} + \frac{\gamma_2 \beta_{22}}{\alpha_2} = -U \quad (\text{A.39})$$

En el caso de elegir la base modal de temperaturas, haciendo uso de las ecuaciones A.19 y A.20, se tiene que $\gamma_1 = -\gamma_2$.

A.6 ASPECTOS NUMERICOS.

El procedimiento por el cual se determinan los parámetros del modelo de variables de estado pasa por la minimización de la función objetivo A.22 junto con las restricciones A.38 y A.39. El algoritmo utilizado para la minimización es de Levenberg-Marquardt modificado, con cálculo analítico del Jacobiano, tomado del paquete de rutinas IMSL. A continuación se detallan los fundamentos del algoritmo de Marquardt así como algunos aspectos relativos a la puesta en práctica del método, como son el cálculo del Jacobiano y la estimación inicial necesaria para iniciar el proceso iterativo.

A.6.1 El método de Marquardt

Existen numerosos métodos de minimización de funciones. Entre ellos se encuentran el método de máxima pendiente y el de Gauss-Newton.

En el método de máxima pendiente la dirección de avance en el proceso iterativo es la de mayor descenso en la función objetivo. El siguiente punto de la iteración es el que menor valor proporciona de la función objetivo en esa dirección. La convergencia está garantizada aunque lentamente.

El método de Gauss-Newton está a su vez basado en el de Newton-Raphson. Supongamos que la función a minimizar, en función de los parámetros θ es $E(\theta)$. Si el mínimo de la función es E_0 , el error en función del vector de parámetros es:

$$E(\theta) - E_0 \quad (\text{A.40})$$

Si se aproxima la función de error por una superficie de segundo orden (un hiperparaboloide), en la iteración i , el centro de este es $\theta(i+1)$ definido según:

$$\theta(i+1) = \theta(i) - \left[\frac{\partial^2 E}{\partial \theta \partial \theta^T} \right]_{\theta=\theta(i)}^{-1} \frac{\partial E}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta(i)} \quad (\text{A.41})$$

Suponiendo una función objetivo basada en un criterio de mínimos cuadrados:

$$E(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^T (y - y_m)^T [W] (y - y_m) dt \quad (\text{A.42})$$

donde:

y es la salida del sistema

y_m es la salida del modelo

$[W]$ es una matriz de pesos definida positiva

La segunda derivada de la función objetivo puede calcularse analíticamente y aproximarse teniendo en cuenta que cerca del mínimo los valores de la salida del sistema y del modelo están muy próximos. El método de Gauss-Newton está basado en esa aproximación. El método converge más rápidamente que el de máxima pendiente pero

sin embargo la convergencia no está garantizada. Como una síntesis de ambos métodos surge el de Marquardt que posee las ventajas de los dos.

Supongamos una hiperesfera de radio r en el espacio de los parámetros con centro, en la iteración i , en $\theta(i)$. Esta se define según:

$$\Delta\theta^T \Delta\theta = r^2 \quad (\text{A.43})$$

donde:

$$\Delta\theta = \theta(i+1) - \theta(i) \quad (\text{A.44})$$

Haciendo uso de los multiplicadores de Lagrange para minimizar la función objetivo $E(\theta)$ en la hiperesfera A.43, se tiene la ecuación:

$$\frac{\partial E}{\partial \Delta\theta} + \mu \Delta\theta = 0 \quad (\text{A.45})$$

Aproximando en serie de Taylor la salida del modelo para los parámetros de la iteración $i+1$:

$$y_m(i+1) = y_m(i) + \left. \frac{\partial y_m}{\partial \theta^T} \right|_{\theta=\theta(i)} \Delta\theta \quad (\text{A.46})$$

que derivando queda:

$$\frac{\partial y_m(i+1)}{\partial \Delta\theta^T} \approx \left. \frac{\partial y_m}{\partial \theta^T} \right|_{\theta=\theta(i)} \quad (\text{A.47})$$

La ecuación A.45, teniendo en cuenta el criterio de mínimos cuadrados definido según A.42, y la aproximación A.47 puede ponerse:

$$- \int_0^T \left. \frac{\partial y_m^T}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta(i)} [W] [y - y_m(i) - \left. \frac{\partial y_m}{\partial \theta^T} \right|_{\theta=\theta(i)} \Delta\theta] dt + \mu \Delta\theta = 0 \quad (\text{A.48})$$

y despejando el vector de parámetros en la iteración $i+1$ queda finalmente:

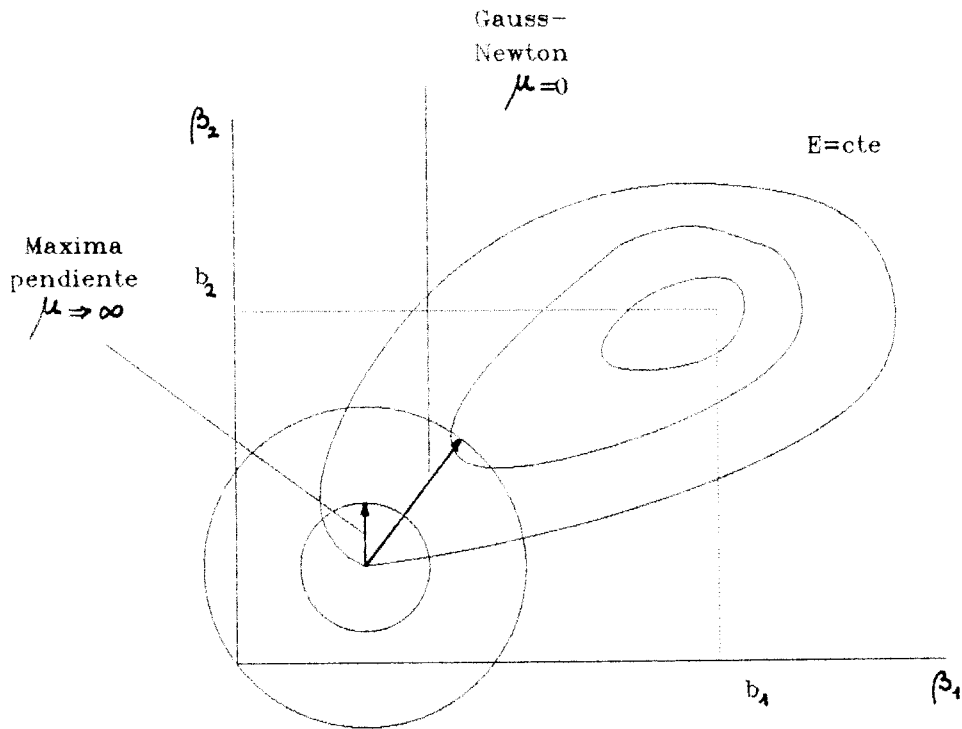


Figura A.1: El método de Marquardt.

$$\theta(i+1) = \theta(i) + \left[\int_0^T \frac{\partial y_m^T}{\partial \theta} [W] \frac{\partial y_m}{\partial \theta^T} + \mu I \right]^{-1} \int_0^T \frac{\partial y_m^T}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta(i)} [W] (y - y_m(i)) dt \quad (A.49)$$

Según el valor del parámetro μ , que pondera el peso de la restricción, se tiene el método de Gauss-Newton (cuando $\mu = 0$) o el de la máxima pendiente (cuando $\mu = \infty$). La figura A.1 es una representación del método en un caso en el que el espacio de parámetros es de orden 2.

Este método tiene el inconveniente de hacer necesario el cálculo de la segunda derivada de la función objetivo. En el procedimiento utilizado se calcula analíticamente el Jacobiano. A continuación se muestra un ejemplo del cálculo del Jacobiano.

A.6.2 Cálculo del Jacobiano

Se tomará como ejemplo un caso en que los parámetros dependientes e independientes son:

- Parámetros independientes: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}, \beta_{22}$

- Parámetros dependientes: β_{11} , β_{21} , γ_1 , γ_2

La función objetivo se definió mediante la ecuación A.22:

$$J = \sum_{i=0}^N \|G(jw_i) - G(jw_i)_m\|^2 \quad (\text{A.50})$$

Derivando respecto a los parámetros:

$$\frac{\partial J}{\partial \theta_i} = \sum_{i=0}^N [G(jw) - G(jw)_m] * \frac{\partial G(jw)_m}{\partial \theta_i} \quad (\text{A.51})$$

donde el símbolo * significa producto escalar.

Con esta elección de parámetros independientes, haciendo uso de las restricciones, puede ponerse:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= -\alpha_1 - \beta_{12} \\ \beta_{21} &= -\alpha_2 - \beta_{22} \\ \gamma_1 &= \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R(\alpha_1 \beta_{22} - \alpha_2 \beta_{12})} \\ \gamma_2 &= \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R(\alpha_2 \beta_{12} - \alpha_1 \beta_{22})} \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

donde $R(m^2 K/W)$ es la resistencia térmica del muro, inverso del coeficiente global de transferencia U .

Las derivadas de los parámetros dependientes son:

$$\frac{\partial \beta_{11}}{\partial \alpha_1} = -1; \quad \frac{\partial \beta_{11}}{\partial \alpha_2} = 0; \quad \frac{\partial \beta_{11}}{\partial \beta_{12}} = -1; \quad \frac{\partial \beta_{11}}{\partial \beta_{22}} = 0 \quad (\text{A.53})$$

$$\frac{\partial \beta_{21}}{\partial \alpha_1} = 0; \quad \frac{\partial \beta_{21}}{\partial \alpha_2} = -1; \quad \frac{\partial \beta_{21}}{\partial \beta_{12}} = 0; \quad \frac{\partial \beta_{21}}{\partial \beta_{22}} = -1 \quad (\text{A.54})$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} = \frac{-\beta_{12} \alpha_2^2}{R(\alpha_2 \beta_{12} - \alpha_1 \beta_{22})^2}; \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} = -\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} = \frac{\beta_{22} \alpha_1^2}{R(\alpha_2 \beta_{12} - \alpha_1 \beta_{22})^2}; \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} = -\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} \quad (\text{A.56})$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta_{12}} = \frac{\alpha_1 \alpha_2^2}{R(\alpha_2 \beta_{12} - \alpha_1 \beta_{22})^2}; \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial \beta_{12}} = -\frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta_{12}} \quad (\text{A.57})$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta_{22}} = \frac{-\alpha_1^2 \alpha_2}{R(\alpha_2 \beta_{12} - \alpha_1 \beta_{22})^2}; \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial \beta_{22}} = -\frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta_{22}} \quad (\text{A.58})$$

Las derivadas de la función de transferencia respecto a los parámetros dependientes para una frecuencia w son:

$$\frac{\partial G_1}{\partial \beta_{11}} = -\gamma_1 \frac{\alpha_1 + jw}{\alpha_1^2 + w^2}; \quad \frac{\partial G_2}{\partial \beta_{11}} = 0 \quad (\text{A.59})$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial \beta_{21}} = -\gamma_2 \frac{\alpha_2 + jw}{\alpha_2^2 + w^2}; \quad \frac{\partial G_2}{\partial \beta_{21}} = 0 \quad (\text{A.60})$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial \gamma_1} = -\beta_{11} \frac{\alpha_1 + jw}{\alpha_1^2 + w^2}; \quad \frac{\partial G_2}{\partial \gamma_1} = -\beta_{12} \frac{\alpha_1 + jw}{\alpha_1^2 + w^2} \quad (\text{A.61})$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial \gamma_2} = -\beta_{21} \frac{\alpha_2 + jw}{\alpha_2^2 + w^2}; \quad \frac{\partial G_2}{\partial \gamma_2} = -\beta_{22} \frac{\alpha_2 + jw}{\alpha_2^2 + w^2} \quad (\text{A.62})$$

Finalmente las derivadas buscadas son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial \alpha_1} &= \frac{-\beta_{11} \gamma_1 (\alpha_1^2 + w^2) + 2\alpha_1 \beta_{11} \gamma_1 (\alpha_1 + jw)}{(\alpha_1^2 + w^2)^2} + \frac{\partial G_1}{\partial \beta_{11}} \cdot \frac{\partial \beta_{11}}{\partial \alpha_1} + \\ &+ \frac{\partial G_1}{\partial \gamma_1} \cdot \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial G_1}{\partial \gamma_2} \cdot \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial \alpha_2} &= \frac{-\beta_{21}\gamma_2(\alpha_2^2 + w^2) + 2\alpha_2\beta_{21}\gamma_2(\alpha_2 + jw)}{(\alpha_2^2 + w^2)^2} + \frac{\partial G_1}{\partial \gamma_1} \cdot \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} + \\ &+ \frac{\partial G_1}{\partial \gamma_2} \cdot \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial \beta_{12}} = \frac{\partial G_1}{\partial \beta_{11}} \cdot \frac{\partial \beta_{11}}{\partial \beta_{12}} + \frac{\partial G_1}{\partial \gamma_1} \cdot \frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta_{12}} + \frac{\partial G_1}{\partial \gamma_2} \cdot \frac{\partial \gamma_2}{\partial \beta_{12}} \quad (\text{A.65})$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial \beta_{22}} = \frac{\partial G_1}{\partial \beta_{21}} \cdot \frac{\partial \beta_{21}}{\partial \beta_{22}} + \frac{\partial G_1}{\partial \gamma_1} \cdot \frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta_{22}} + \frac{\partial G_1}{\partial \gamma_2} \cdot \frac{\partial \gamma_2}{\partial \beta_{22}} \quad (\text{A.66})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial \alpha_1} &= \frac{-\beta_{12}\gamma_1(\alpha_1^2 + w^2) + 2\alpha_1\beta_{12}\gamma_1(\alpha_1 + jw)}{(\alpha_1^2 + w^2)^2} + \frac{\partial G_2}{\partial \gamma_1} \cdot \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \\ &+ \frac{\partial G_2}{\partial \gamma_2} \cdot \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial \alpha_2} &= \frac{-\beta_{22}\gamma_2(\alpha_2^2 + w^2) + 2\alpha_2\beta_{22}\gamma_2(\alpha_2 + jw)}{(\alpha_2^2 + w^2)^2} + \frac{\partial G_2}{\partial \gamma_1} \cdot \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} + \\ &+ \frac{\partial G_2}{\partial \gamma_2} \cdot \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial \beta_{12}} = -\gamma_1 \frac{\alpha_1 + jw}{\alpha_1^2 + w^2} + \frac{\partial G_2}{\partial \gamma_1} \cdot \frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta_{12}} + \frac{\partial G_2}{\partial \gamma_2} \cdot \frac{\partial \gamma_2}{\partial \beta_{12}} \quad (\text{A.69})$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial \beta_{22}} = -\gamma_2 \frac{\alpha_2 + jw}{\alpha_2^2 + w^2} + \frac{\partial G_2}{\partial \gamma_1} \cdot \frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta_{22}} + \frac{\partial G_2}{\partial \gamma_2} \cdot \frac{\partial \gamma_2}{\partial \beta_{22}} \quad (\text{A.70})$$

A.6.3 Estimación inicial

En el proceso iterativo de búsqueda del mínimo de la función objetivo es necesario partir de valores iniciales de los parámetros lo más próximos al óptimo posible. Para ello se hará uso de una discretización espacial de la ecuación de observación A.2. Para

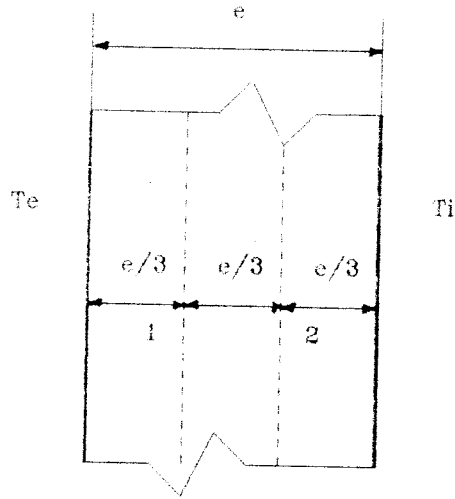


Figura A.2: Discretización espacial.

el caso del muro mostrado en la figura A.2 la ecuación de observación es:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{A.71})$$

Si x_1 y x_2 son respectivamente las temperaturas en los puntos 1 y 2 se tiene:

- en 1:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_1 = \frac{x_2 - 2x_1 + T_e}{(e/3)^2} \quad (\text{A.72})$$

luego:

$$\dot{x}_1 = \frac{k}{\rho c_p (e/3)^2} (x_2 - 2x_1 + T_e) \quad (\text{A.73})$$

- en 2:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_2 = \frac{x_1 - 2x_2 + Ti}{(e/3)^2} \quad (\text{A.74})$$

luego:

$$\dot{x}_2 = \frac{k}{\rho c_p (e/3)^2} (x_1 - 2x_2 + Ti) \quad (\text{A.75})$$

En forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \frac{k}{\rho c_p (e/3)^2} \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} Ti \\ Te \end{Bmatrix} \right] \quad (\text{A.76})$$

Haciendo el cambio a la base modal a partir de la matriz de transición formada por los autovectores se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \end{Bmatrix} = \frac{k}{\rho c_p (e/3)^2} \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{Bmatrix} \right] \quad (\text{A.77})$$

siendo $x' = [P] \cdot x$ con $[P] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Los valores iniciales serán por tanto:

$$\alpha_1 = \frac{-9k}{\rho c_p e^2} \quad \alpha_2 = \frac{-27k}{\rho c_p e^2} \quad (\text{A.78})$$

$$\beta_{11} = \frac{9k}{2\rho c_p e^2} \quad \beta_{12} = \frac{9k}{2\rho c_p e^2} \quad (\text{A.79})$$

$$\beta_{21} = \frac{-9k}{2\rho c_p e^2} \quad \beta_{22} = \frac{9k}{2\rho c_p e^2} \quad (\text{A.80})$$

A.7 CALCULO DEL FLUJO DE CALOR

Una vez llevada a cabo la identificación de los parámetros del modelo descrito por las ecuaciones A.1 y A.2, para el cálculo del flujo de calor, es necesario, o bien integrar la ecuación diferencial ordinaria, o recurrir a un modelo de tipo regresivo como se mostró en el apartado I.2. Si no quiere recurrirse al modelo de descripción externa, la integración da como resultado:

$$q(t) = [C]e^{[A]t}x_0 + \int_0^t [C]e^{[A](t-\tau)}[B]u(\tau)d\tau \quad (\text{A.81})$$

Suponiendo que se parte de un estado inicial con $x_0 = 0$ el flujo de calor es:

$$q(t) = \int_0^t [C]e^{[A](t-\tau)}[B]u(\tau)d\tau \quad (\text{A.82})$$

La utilización de un método simple de integración suponiendo la excitación constante entre cada dos muestreos lleva a grandes errores en el cálculo del flujo de calor. Para soslayarlos se supone una variación lineal de la excitación entre cada dos puntos de medida.

La entrada $u(\tau)$ se considera muestreada a intervalos t_0 y de variación lineal entre cada dos muestreos (ver figura A.3).

$$u(\tau) = u(t) + \frac{u(t+t_0) - u(t)}{t_0}(\tau - t) \quad (\text{A.83})$$

integrando por tramos:

$$q(t) = \sum_{i=0}^N \int_{it_0}^{(i+1)t_0} [C]e^{[A](t-\tau)}[B]u(\tau)d\tau \quad (\text{A.84})$$

siendo N el número de intervalos.

Una integral tipo es:

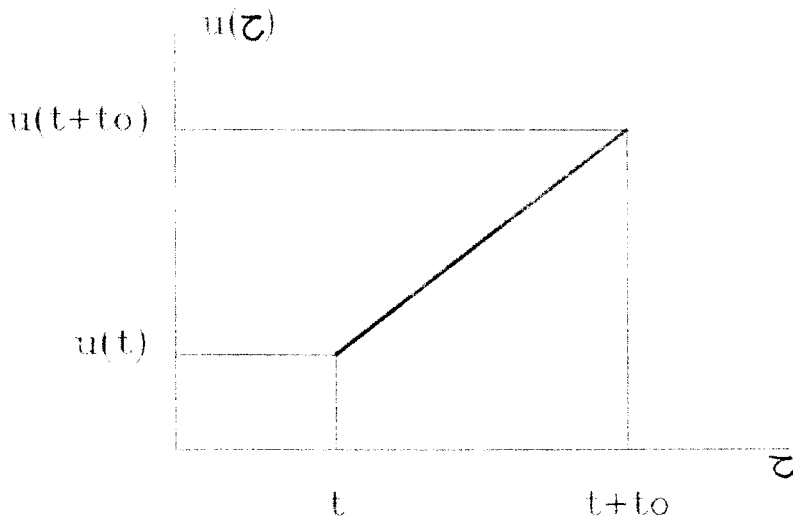


Figura A.3: Aproximación lineal de la entrada $u(\tau)$.

$$I_t = \int_t^{t+t_0} cbe^{a(t-\tau)}u(\tau) d\tau \quad (\text{A.85})$$

sustituyendo A.83 en A.85:

$$\begin{aligned} I_t &= e^{at}cb \int_t^{t+t_0} e^{-a\tau} \left[u(t) + \frac{u(t+t_0)-u(t)}{t_0}(\tau-t) \right] d\tau = \\ &= \frac{e^{at}cbu(t)}{a} [e^{-at} - e^{-a(t+t_0)}] + e^{at}cb \frac{u(t+t_0) - u(t)}{t_0} I_1 \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

siendo:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_t^{t+t_0} e^{-a\tau}(\tau-t) d\tau = \frac{t}{a} [e^{-a(t+t_0)} - e^{-at}] + \int_t^{t+t_0} \tau e^{-a\tau} d\tau = \\ &= e^{-at} \left[\frac{1}{a^2} - \frac{t_0 e^{-at_0}}{a} - \frac{e^{-at_0}}{a^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

luego:

$$I_t = \frac{cb}{a^2 t_0} [at_0 + e^{-at_0} - 1]u(t) + \frac{cb}{a^2 t_0} [1 - at_0 e^{-at_0} - e^{-at_0}]u(t + t_0) \quad (\text{A.88})$$

Esta aproximación obliga a integrar desde el instante inicial hasta el instante de cálculo en cada paso de tiempo. Utilizando el concepto de estado es posible evitar este inconveniente. En forma discreta:

$$x(t + t_0) = e^{[A]t_0} x(t) + \int_0^{t_0} e^{-[A](\tau - t_0)} [B] u(\tau + t) d\tau \quad (\text{A.89})$$

en cada instante de tiempo sólo sería necesario calcular la integral en el intervalo $[0, t_0]$. A cambio, habría que ir calculando en paralelo, además del flujo de calor, los estados.

A.8 RESULTADOS DE LA IDENTIFICACION

En la aplicación del método de identificación aparecen cuestiones que es necesario decidir. En la exposición de los resultados se responderá a aquellas dudas asociadas a la clase de modelo seleccionado. En particular son de interés las siguientes:

1) ¿Qué influencia tiene en el modelo identificado la imposición de un número mayor de frecuencias al obtener la función objetivo?

2) Las restricciones se tienen en cuenta mediante sustitución directa de las variables dependientes en la función objetivo. ¿La elección de las variables independientes es importante en los resultados obtenidos con el modelo simple?

3) Finalmente, la base en que se expresa el modelo de variables de estado no es única. ¿Es más favorable la base de observación que la de temperaturas desde el punto de vista de los errores de simulación con el modelo simple?

Las dos últimas cuestiones están asociadas al método numérico utilizado en la minimización de la función objetivo. Si se dispusiera de un método exacto de resolución es claro que estas dos cuestiones no tendrían sentido.

Los muros tomados como ejemplo han sido los denominados ligero, medio y pesado en el capítulo 4 (apartado 4.5.1). Para las excitaciones interior y exterior de prueba

CASO	BASE	MURO	PARAMETROS INDEPENDIENTES	NUMERO FRECUENCIAS
1	Temperaturas	Ligero	$\alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}, \beta_{22}$	3
2	Temperaturas	Ligero	$\alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}, \beta_{22}$	7
3	Temperaturas	Medio	$\alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}, \beta_{22}$	3
4	Temperaturas	Pesado	$\alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}, \beta_{22}$	3
5	Temperaturas	Ligero	$\alpha_1, \alpha_2, \beta_{11}, \beta_{22}$	3
6	Temperaturas	Pesado	$\alpha_1, \alpha_2, \beta_{11}, \beta_{22}$	3
7	Observación	Ligero	$\alpha_1, \alpha_2, \beta_{11}, \beta_{22}$	3
8	Observación	Pesado	$\alpha_1, \alpha_2, \beta_{11}, \beta_{22}$	3

Tabla A.1: Estructuración de los casos presentados.

se ha tomado la misma evolución horaria que en ese capítulo (ver apartado 4.5.2). Se recuerda, que si bien la excitación exterior podía descomponerse en solo dos armónicos, eso no sucedía con la interior. Para este último caso los armónicos de 1 y 2 ciclos/día no conseguían una buena reproducción de la evolución real.

Los resultados se han estructurado según la tabla A.1. La última columna hace referencia al número de frecuencias que se han considerado en la construcción de la función objetivo. En todos los casos las amplitudes complejas con que se ponderan las excitaciones interior y exterior para calcular el flujo de calor según el modelo detallado, son las correspondientes a los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de las excitaciones de prueba a las que posteriormente será sometido el muro para intentar ajustar el modelo a las excitaciones reales.

Los parámetros obtenidos son los mostrados en las tablas A.2, A.3 y A.4. Las constantes de tiempo en horas obtenidas a partir de los elementos de la matriz de transición (inversos cambiados de signo) se muestran en la tabla A.5

CASO	α_1	α_2
1	$-0,7518 \cdot 10^{-4}$	$-0,4869 \cdot 10^{-3}$
2	$-0,7675 \cdot 10^{-4}$	$-0,4901 \cdot 10^{-3}$
3	$-0,5440 \cdot 10^{-4}$	$-0,2878 \cdot 10^{-3}$
4	$-0,3471 \cdot 10^{-4}$	$-0,1023 \cdot 10^{-3}$
5	$-0,7459 \cdot 10^{-4}$	$-0,4902 \cdot 10^{-3}$
6	$-0,3884 \cdot 10^{-4}$	$-0,1050 \cdot 10^{-3}$
7	$-0,7080 \cdot 10^{-4}$	$-0,5304 \cdot 10^{-3}$
8	$-0,4592 \cdot 10^{-4}$	$-0,2092 \cdot 10^{-3}$

Tabla A.2: Matrices de transición.

CASO	β_{11}	β_{12}	β_{21}	β_{22}
1	$0,4411 \cdot 10^{-4}$	$0,3106 \cdot 10^{-4}$	$0,3982 \cdot 10^{-3}$	$0,0870 \cdot 10^{-4}$
2	$0,4506 \cdot 10^{-4}$	$0,3169 \cdot 10^{-4}$	$0,3994 \cdot 10^{-3}$	$0,9064 \cdot 10^{-4}$
3	$0,3353 \cdot 10^{-4}$	$0,2086 \cdot 10^{-4}$	$0,2402 \cdot 10^{-3}$	$0,4758 \cdot 10^{-4}$
4	$0,2288 \cdot 10^{-4}$	$0,1183 \cdot 10^{-4}$	$0,8191 \cdot 10^{-4}$	$0,2043 \cdot 10^{-4}$
5	$0,4515 \cdot 10^{-4}$	$0,2944 \cdot 10^{-4}$	$0,4076 \cdot 10^{-3}$	$0,8259 \cdot 10^{-4}$
6	$0,2520 \cdot 10^{-4}$	$0,1364 \cdot 10^{-4}$	$0,8217 \cdot 10^{-4}$	$0,2286 \cdot 10^{-4}$
7	$0,3188 \cdot 10^{-3}$	$0,1547 \cdot 10^{-3}$	$-0,3169 \cdot 10^{-2}$	$-0,3783 \cdot 10^{-3}$
8	$0,2972 \cdot 10^{-3}$	$0,4822 \cdot 10^{-4}$	$-0,1525 \cdot 10^{-2}$	$-0,4866 \cdot 10^{-4}$

Tabla A.3: Matrices de control.

CASO	γ_1	γ_2
1	6,369	-6,369
2	6,457	-6,457
3	6,307	-6,307
4	5,787	-5,787
5	6,505	-6,505
6	6,122	-6,122
7	1,000	1,000
8	1,000	1,000

Tabla A.4: Matrices de observación.

MURO	CASO	τ_1	τ_2
Ligero	1	3,695	0,571
	2	3,619	0,567
	5	3,724	0,567
	7	3,923	0,524
Medio	3	5,106	0,965
Pesado	4	8,003	2,715
	6	7,152	2,646
	8	6,049	1,328

Tabla A.5: Constantes de tiempo en horas.

Las constantes de tiempo en horas obtenidas a partir de los elementos de la matriz de transición (inversos cambiados de signo) se muestran en la tabla A.5

Estos valores pueden ser comparados con los mostrados en las tablas 4.6 y 4.8 del capítulo 4. Se observa mediante esta comparación la coherencia, en términos generales de los resultados obtenidos. Existen, en todo caso, discrepancias en los valores de las constantes de tiempo menores para cada muro. Para el modelo regresivo se tienen siempre, excepto para el muro pesado, mayores valores de las constantes de tiempo menores.

En la tabla A.6 se muestran los errores máximos y el obtenido sumando en valor absoluto la diferencia entre los flujos de calor calculados por el método detallado y el modelo de variables de estado en la simulación de 24 horas, tras un periodo de 3 días de puesta a régimen.

Los errores máximos siempre se producen en la hora de cambio brusco de la temperatura interior desde 21°C a 27°C, alcanzándose errores relativos del orden del 80% en esa hora. En todos los casos, salvo el 2 sólo se imponen las frecuencias de 1, 2 y 3 ciclos/día. El comportamiento del sistema para frecuencias altas, que son las que intervienen en los cambios bruscos de temperatura, no está contemplado en el modelo. A los errores numéricos, propios del método de minimización, se une el que se está considerando un modelo conjunto para las excitaciones interiores y exteriores. El mo-

MURO	CASO	$\epsilon_{max}(W/m^2)$	$\epsilon_{acu}(W/m^2)$
Ligero	1	15,95	51,41
	2	15,63	53,71
	5	16,07	48,40
	7	16,80	46,97
Medio	3	19,80	73,67
Pesado	4	23,62	97,46
	6	22,77	101,46
	8	22,10	85,84

Tabla A.6: Errores obtenidos con el modelo simple.

delo debe responder de forma adecuada a excitaciones con contenido en frecuencia muy diferente, habiéndose obtenido sin embargo para la excitación conjunta.

Las figuras A.4 a A.11 muestran la evolución del flujo de calor en función del tiempo para cada uno de los casos.

A.9 CONCLUSIONES

A la vista de los resultado presentados pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- 1) Los resultados obtenidos para la identificación de un modelo de variables de estado mediante la imposición de las 3 frecuencias principales en que pueden descomponerse la excitación exterior e interior no son satisfactorios. Para el muro ligero los resultados podrían ser aceptables si se obvia el problema de la respuesta a los cambios rápidos en la temperatura interior. Cuanto más pesado es el muro peores son los resultados porque más importancia tienen las altas frecuencias, que no han sido impuestas en la identificación.
- 2) El imponer más frecuencias para identificar, siempre manteniendo las amplitudes complejas que corresponden a los desarrollos en serie de Fourier de las excitaciones

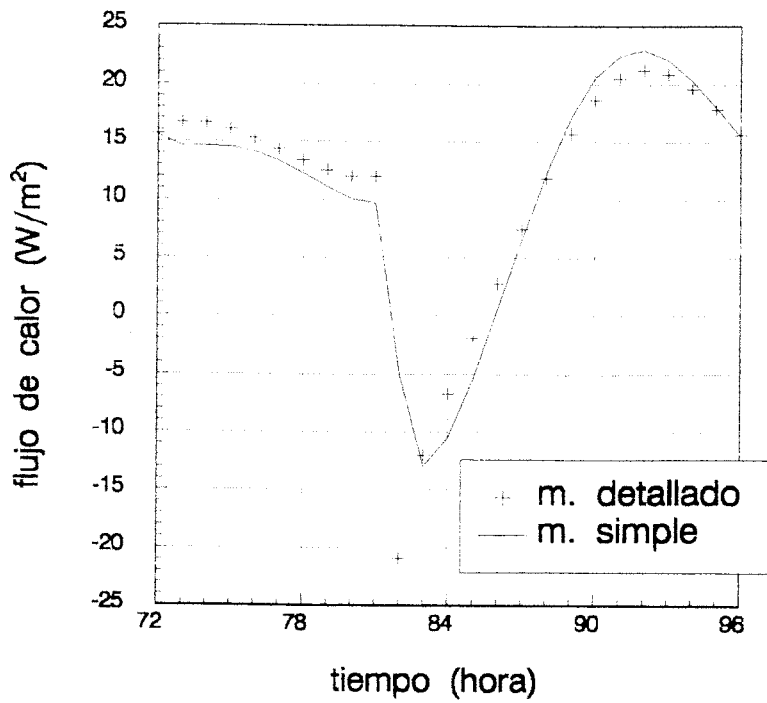


Figura A.4: Flujos de calor obtenidos por los modelos detallado y simple: Caso 1.

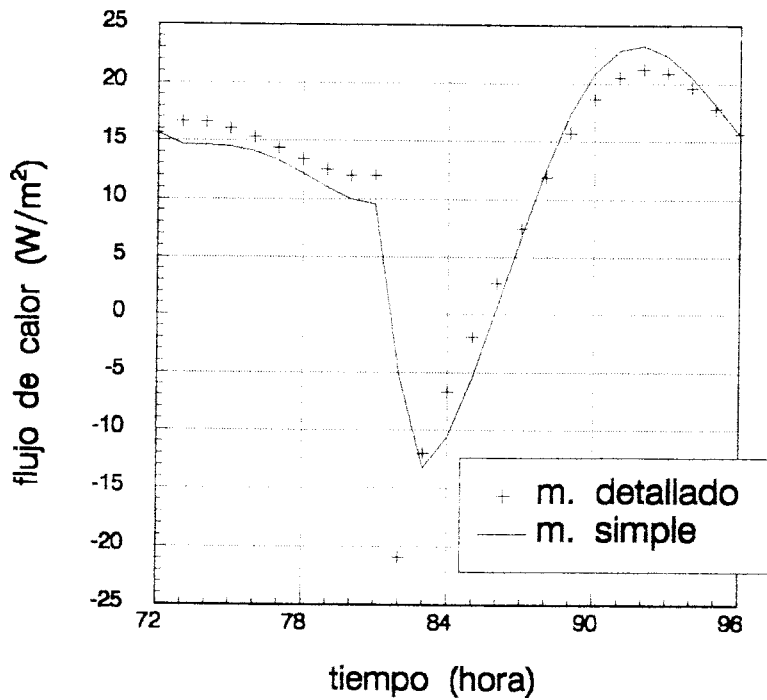


Figura A.5: Flujos de calor obtenidos por los modelos detallado y simple: Caso 2.

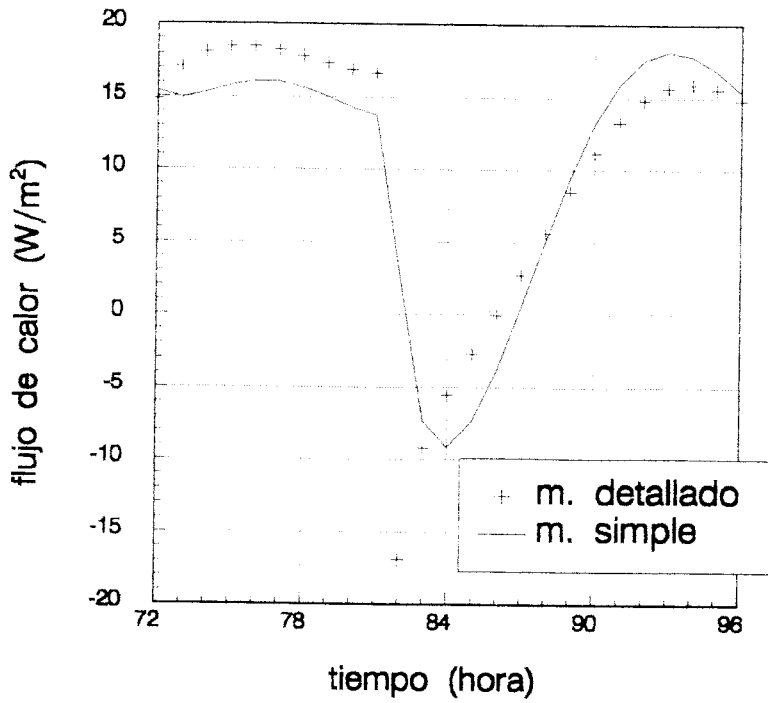


Figura A.6: Flujos de calor obtenidos por los modelos detallado y simple: Caso 3.

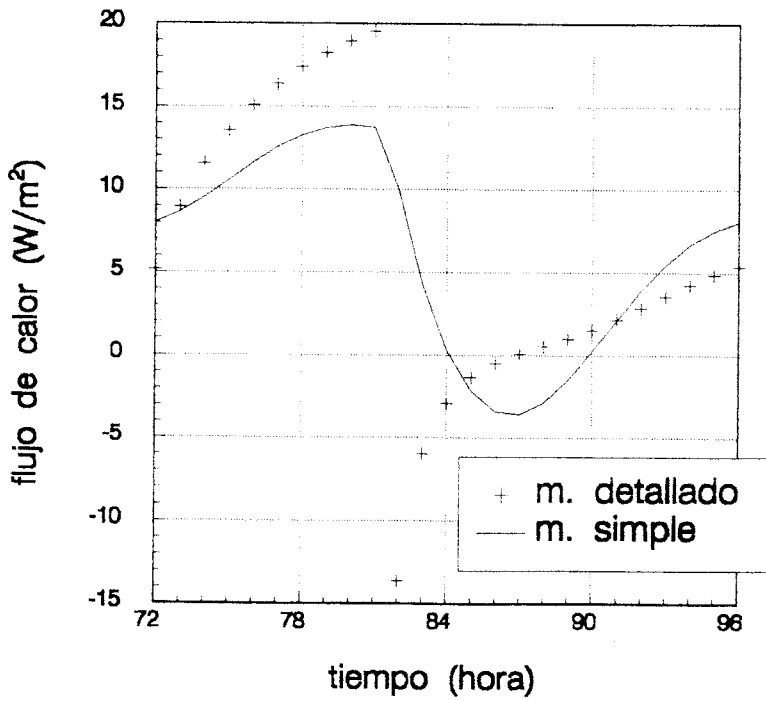


Figura A.7: Flujos de calor obtenidos por los modelos detallado y simple: Caso 4.

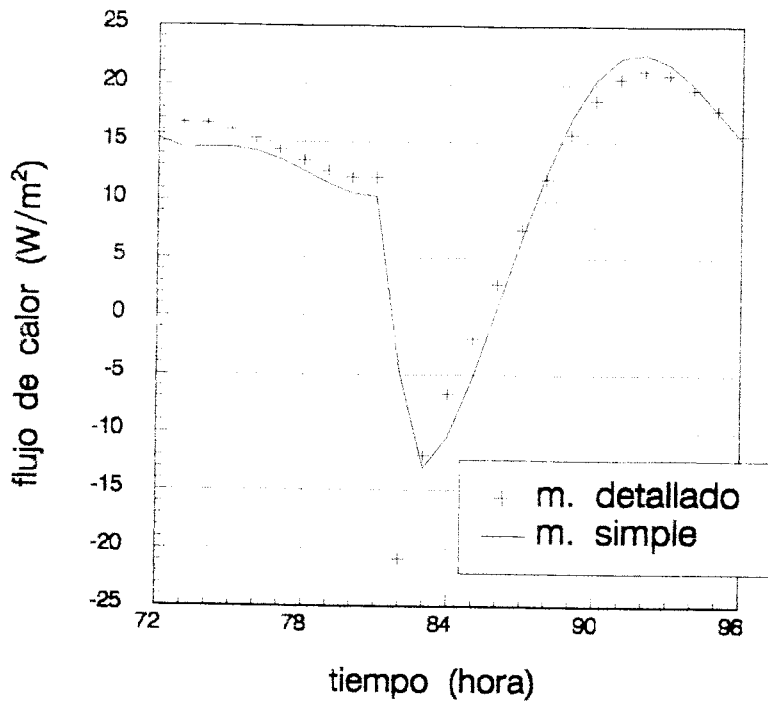


Figura A.8: Flujos de calor obtenidos por los modelos detallado y simple: Caso 5.

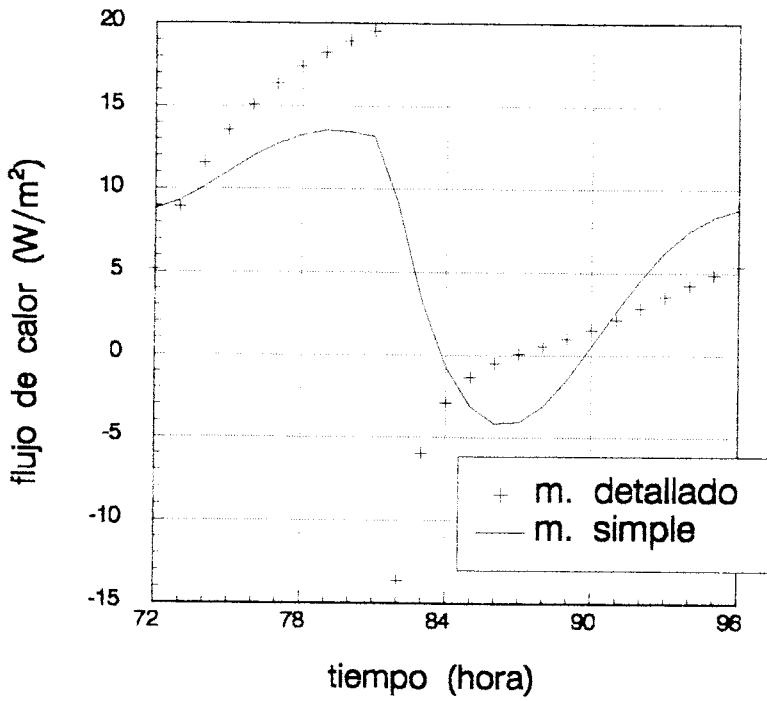


Figura A.9: Flujos de calor obtenidos por los modelos detallado y simple: Caso 6.

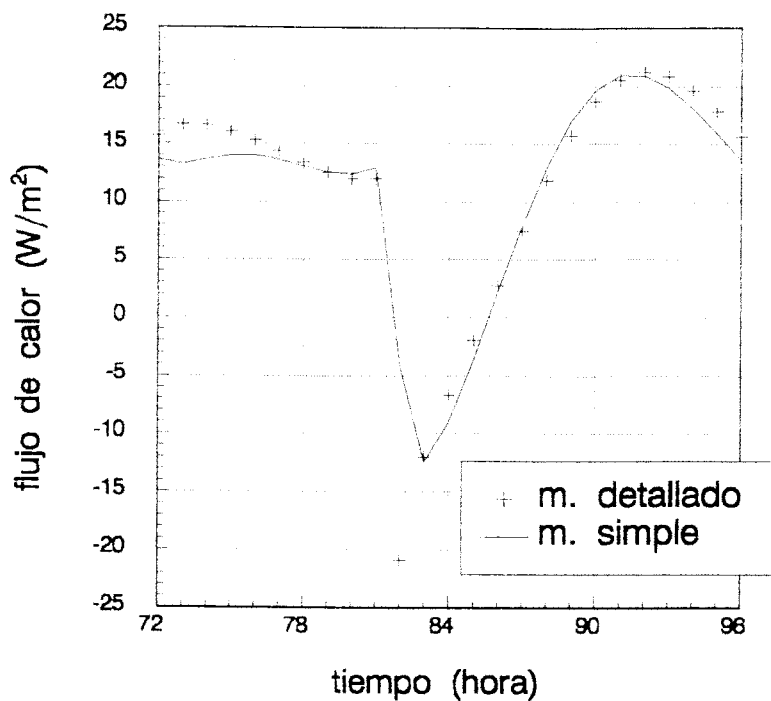


Figura A.10: Flujos de calor obtenidos por los modelos detallado y simple: Caso 7.

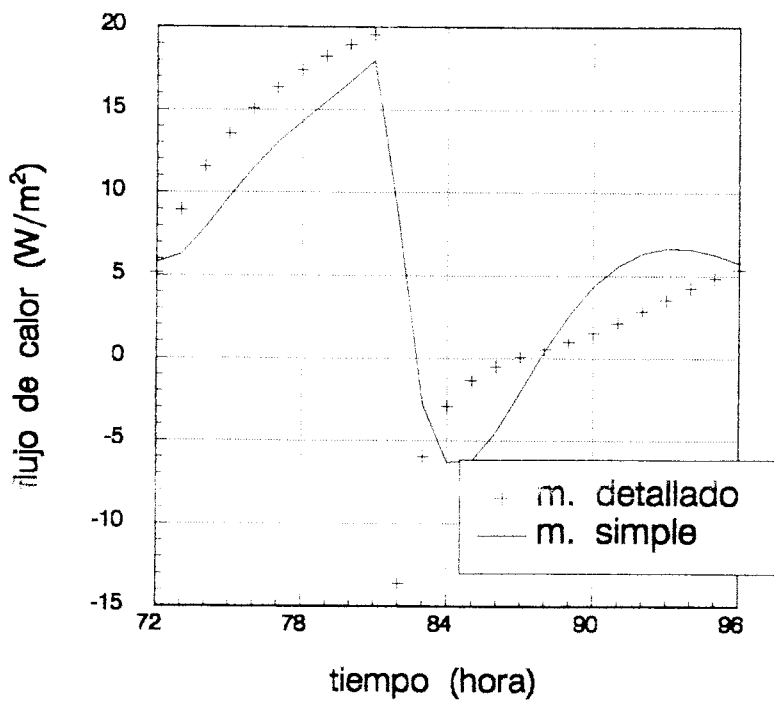


Figura A.11: Flujos de calor obtenidos por los modelos detallado y simple: Caso 8.

interior y exterior, no mejora sensiblemente el comportamiento del modelo simple.

- 3) La consideración de otras bases o/y otras variables independientes no permite tampoco tener mejores resultados para el modelo simple.
- 4) Adicionalmente, como inconveniente de la aplicación del método de identificación a modelos de variables de estado, hay que señalar la dificultad de utilización de la subrutina de minimización de la función objetivo. Existen numerosos parámetros a fijar por el usuario, como son tolerancias relativas de la función objetivo y del gradiente, que dificultan un tratamiento sistemático de todos los casos.
- 5) Aunque los modelos de variables de estado identificados por este procedimiento no proporcionan buenos resultados de la evolución temporal del flujo de calor en la superficie interna del muro, si se acumulan los flujos de calor mediante los modelos detallado y simple en un día de simulación se obtienen, como era de esperar, excelentes resultados. La sola fuente de error, además de los errores numéricos es no tener en cuenta las frecuencias mayores de 3 ciclos/día (o de 7 ciclos/día en el caso 2) para la excitación interior cuyo peso no es importante. En la tabla A.7 se muestran estos flujos de calor. Al acumular los flujos de calor es un largo periodo de tiempo lo que se hace implícitamente es la eliminación de los comportamientos a alta frecuencia. Como han sido precisamente las bajas frecuencias, junto con el régimen permanente, las que se han impuesto, es lógico que se ajuste el modelo a los resultados obtenidos con el modelo detallado.
- 6) La excitación de prueba tomada en el interior es particularmente poco adecuada para la aplicación de un método frecuencial. Si se hubiera elegido una evolución de temperaturas que se desarrollara en serie de Fourier en los 2 primeros armónicos diarios, el acuerdo entre los modelos detallado y simple sería perfecto. Un caso de temperatura interior constante es un ejemplo real frecuentemente encontrado.

En la aplicación del método de identificación propuesto en esta tesis a los modelos regresivos y de variables de estado hay diferencias fundamentales que han sido especificadas. El modelo de variables de estado ha sido obtenido imponiendo conjuntamente las excitaciones exterior e interior mientras que para el modelo regresivo se obtuvieron modelos separados para cada una de las funciones de transferencia. Ya quedó demostrado en el apartado I.2 de este anexo que pueden obtenerse modelos equivalentes de las dos clases. Si se comparan los resultados obtenidos para los dos modelos, teniendo en cuenta esas diferencias en la aplicación del método, puede decirse lo siguiente:

- 1) El método de identificación es más fácil de aplicar cuando se busca un modelo regresivo. El sistema a resolver es lineal mientras que cuando se identifica

MURO	CASO	$\sum_{i=72}^{96} q(t)_{sistema}(W/m^2)$	$\sum_{i=72}^{96} q(t)_{modelo}(W/m^2)$
Ligero	1	275,23	274,49
	2	275,23	275,70
	5	275,23	274,93
	7	275,23	273,16
Medio	3	257,64	257,66
Pesado	4	146,49	150,56
	6	146,49	151,80
	8	146,49	149,95

Tabla A.7: Flujos de calor acumulados para un día de simulación.

En un modelo de variables de estado es necesario minimizar una función objetivo multivariable.

- 2) Una vez obtenido el modelo, la reconstrucción del flujo de calor es inmediata con el modelo regresivo mientras que para el modelo de variables de estado es necesario integrar un sistema de 2 ecuaciones diferenciales ordinarias.
- 3) Los errores obtenidos en la reconstrucción del flujo de calor son menores para los modelos regresivos. Con éste se tienen excelentes resultados mientras que para los modelos de variables de estado los resultados sólo son satisfactorios en una simulación acumulada durante un día. Serían entonces modelos válidos cuando se trata de estimar el consumo energético de un equipo durante un periodo dado, no para estimar la potencia punta.

Por todo lo anterior es preferible la identificación de modelos regresivos en lugar de modelos de variables de estado.

Referencias

- [1] A. M. Legendre. "Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes". Paris. (1806).
- [2] K. F. Gauss. "Theory of the Motion of the Heavenly Bodies Moving about the Sun in Conic Sections". 1809. publicado por Dover Publications, Inc., New York. (1963).
- [3] M. Haest , G. Bastin , M. Gervers y V. Wertz. "ESPION: an Expert System for System Identification". Automática. Vol. 26, No. 1, pp. 85-95, (1990).
- [4] R. Deutsch. "Estimation theory". Prentice Hall. (1965).
- [5] P. Eykhoff. "System identification". J. Wiley. (1974).
- [6] J. V. Beck, y K. J. Arnold. "Parameter Estimation in Engineering and Science". John Wiley & Sons, Inc. (1977).
- [7] T. Söderström y P. Stoica. "System identification". Prentice-Hall. (1989).
- [8] Automatica, Special Issue, Vol. 26, No. 1. (1990).
- [9] H. W. Carslaw y J. C. Jaeger. "Conduction of heat in solids". Oxford University Press. (1959).
- [10] G. P. Mitalas. "Calculations of transient heat flow through walls and roofs". ASHRAE Trans. Vol. 74, Parte II. (1968).
- [11] J. E. Seem, S. A. Klein, W. A. Beckman y J. W. Mitchell. "Model Reduction of Transfer Functions Using a Dominant Root Method". ASME Journal of Heat Transfer. Vol. 112, pp. 547-554. (1990).
- [12] E. Boileau, C. Benard y B. Guerrier. "Comparaison de différentes approximations des fonctions de transfert d'une paroi thermique". Revue Générale de Thermique. No. 257, pp. 391-404. (1983).

- [13] P. Bacot. "Identification de modèles de comportement des systèmes thermiques". *Revue Générale de Thermique*. No. 277, pp. 15-21. (1985).
- [14] A. Neveu. "Identification d'un modèle thermique sous sa forme modale". Société Française des Thermiciens. Journée d'études sur L'estimation de paramètres et problèmes inverses en conduction. 14 mayo (1986).
- [15] D. Marchio, P. Rumianowski y R. Zakhia. "Comparaison des mesures de résistance thermique en régime variable á celles obtenues en régime permanent". Convention AFME/ARMINES 1986, ENSMP. (1987).
- [16] Y. Ammirati. "Méthodes de détermination de paramètres thermophysiques en régime naturel par des méthodes de traitement du signal". CSTB Grenoble. (1986).
- [17] J. M. Cejudo, J. Guerra y J.L. Molina. "A frequency-domain identification method applied to simplified modelling of buildings elements". PLEA'91. Architecture and urban space. pp. 519-524. Sevilla. (1991).
- [18] D. V. Pryor y C. Byron Winn. "A sequential filter used for parameter estimation in a passive solar system". *Solar Energy*, Vol. 28, No. 1, pp. 65-73. (1982).
- [19] K. Subbarao. "Building parameters and their estimation from performance monitoring". *ASHRAE Trans.* Vol. 91, Part. 2B, pp. 1886-1893. (1985).
- [20] F. Rozmiarek. "Développement d'une méthodologie expérimentale de caractérisation thermique de composants solaires passifs pour l'habitat". Tesis Universidad de Paris VII, CEA-CEN Cadarache. (1987).
- [21] C. Cools y R. Gicquel. "Passive solar component characterization using identification Methods". European Conference on Architecture. Munich. (1987).
- [22] R. Gicquel. "Physical interpretation of the identification of two PASSYS test cells". *Int. J. Solar Energy*. Vol. 6, pp. 1-14. (1988).
- [23] S. Hammarsten, D. Van Hattem, H. Bloem y R. Colombo. "Passive solar component testing with identification methods". *Solar Energy*. No. 1, pp. 5-13. (1988).
- [24] U. Norlen, D. Van Hattem y H. Bloem. "On-line testing of passive solar components". Joint Research Centre, Ispra, Draft 1986-11-15. (1986).
- [25] U. Norlen, D. Van Hattem, S. Hammarsten y F. Conti. "Evaluating the performance of passive solar components using kalman filtering". European Conference on Architecture. Munich. (1987).

- [26] U. Norlen, D. Van Hattem, y H. Bloem. "Identifying thermal parameters of two well insulated passive solar test cells". PASSYS meeting Sophia Antipolis 4-6 marzo. (1987).
- [27] U. Norlen. "Estimating thermal parameters of outdoor test cells". Building and Environment, Vol. 25, No. 1, pp. 17-24. (1990).
- [28] S. A. Barakat. "Experimental determination of the z-transfer function coefficients for houses". ASHRAE Trans. Vol. 93, Part. I, pp. 146-161. (1987).
- [29] F. Haghighat, P. Fazio y R. Zmeureanu. "A Systematic approach for derivation of transfer function coefficients of buildings from experimental data". Energy and Buildings. 12, pp. 101-111. (1988).
- [30] J. W. MacArthur, A. Mathur y J. Zhao. "On-line recursive estimation for load profile prediction". ASHRAE Trans. Vol. 95, part I, pp. 621-628. (1989).
- [31] H. Gharbi, M. Gonord y A. Marti. "Reconnaissance de la signature thermique d'un logement". Méthode SIGNA/THER, Revue Générale de Thermique. No. 335-336, pp. 683-690. (1989).
- [32] R. Gicquel, F. P. Neirac y E. Nogaret. "Identification methods for optimal control of heating systems", European Conference on Architecture. Munich. (1987).
- [33] E. Nogaret y B. Vinot. "Identification de modeles de comportement thermique d'un bâtiment. Application a l'immeuble de Saint-Maurice". IRCOSE 1986, CSTB MGL/608/GR. (1987).
- [34] A. A. Nielsen. "A dynamic test method for the energy consumption of small houses". CLIMA 2000. pp. 533-541. (1985).
- [35] J. M. Penman. "Second order system identification in the thermal response of a working School". Building and Environment. Vol. 25, No. 2, pp. 105-110. (1990).
- [36] R. R. Crawford y J. E. Woods. "A method for deriving a dynamic system model from actual building performance data". ASHRAE Trans. Vol. 91, Part. 2B, pp. 1859-1874. (1985).
- [37] D. Van Hattem y U. Norlen. "Development and application of an evaluation method for solar buildings". PASSYS meeting. Cadarache. (1987).
- [38] H. Okuyama. "System identification theory of the thermal network and and application for multi-chamber airflow measurement". Building and Environment. Vol. 25, No. 4, pp. 349-363. (1990).

- [39] A. Neveu, P. Bacot y R. Regas. "Modeles d'evolution thermique des bâtiments. Conditions pratiques d'identification". *Revue Générale de Thermique*. No. 296-297, pp. 413-420. (1986).
- [40] C. Cools, R. Gicquel y F. P. Neirac. "Identification of building reduced models. Application to the characterization of passive solar components". ENSMP. Doc.-88-PASSYS-TME-SD. (1988).
- [41] A. Rabl. "Parameter estimation in buildings: methods for dynamic analysis of measured energy use". *Trans. ASME*, Vol. 110, pp. 52-66. (1988).
- [42] A. J. Torregrosa. "Métodos dinámicos de monitorización de edificios". Tesina Universidad de Valencia. (1989).
- [43] W. Spirkl. "Dynamic solar domestic hot water testing". *Trans. de ASME*, Vol. 112, pp. 98-101. (1990).
- [44] W. O'Neill y C. H. Lim. "Estimation of the energy transfer function of a flat-plate solar water heater system". *Solar Energy*. Vol. 27, No. 3, pp. 261-269. (1981).
- [45] J. L. Dufresne, L. M. Chounet, D. Picard, P. Gaillard, y J. M. Noppe. "Présentation d'une procédure expérimentale pour la caractérisation d'un composant en régime dynamique. Application a un mur capteur solaire a air". *Revue Générale de Thermique*. No. 339, pp. 135-151. (1990).
- [46] I. D. Landau, M. M'Saad, N. K. M'Sirdi y C. Canudas. "Identification d'un échangeur de chaleur a l'aide d'un Apple II". *Revue Générale de Thermique*. No. 280, pp. 387-394. (1985).
- [47] W. Delaney y E. Vaccari. "Dynamic models and discrete event simulation". Marcel Dekker. (1989).
- [48] Cátedra de Termotecnia. "Acondicionamiento de espacios abiertos en Expo'92". Informe final. ESII. Universidad de Sevilla. (1990).
- [49] E. Rodríguez. "Sistematización de acoplamientos térmicos y termoaeráulicos en la simulación de edificios". Tesis Universidad de Sevilla. ESII. (1990).
- [50] G. P. Michalesco. "Approximation des systèmes complexes par des modèles de dimension réduite". Tesis Centre d'Orday, Universidad de Paris-Sud. (1979).
- [51] L. A. Zadeh. "From circuit theory to system theory". *Proc. IRE* 50, pp. 856-865. (1962).
- [52] P. Eykhoff y P. C. Parks. "Identification and system parameter estimation; where do we stand now?". *Automatica*, Vol. 26, No. 1, pp. 3-5. (1990).

- [53] K. J. Aström y P. Eykhoff. "System identification-A survey". *Automatica*, Vol. 7, pp. 123-162. (1971).
- [54] L. Ljung. "System identification. Theory for the user". Prentice-Hall. (1987).
- [55] D.G. Stephenson y G.P. Mitalas. "Calculation of heat conduction transfer functions for multi-layer slabs". *ASHRAE Trans.* Vol. 77, part II, pp. 117-126. (1971).
- [56] E.I. Jury. "Theory and application of the Z-transform method". Kriger. (1973).
- [57] D.G. Luenberger. "Introduction to dynamic systems. Theory, models and applications". J. Wiley. (1979)
- [58] P.H. Sydenham. "Handbook of Measurement Science", Vol. 1. J. Wiley. (1982).
- [59] A. Papoulis. "The Fourier integral and its applications". Mc Graw-Hill. (1962).
- [60] E.O. Brigham. "The fast Fourier transform". Prentice-Hall. (1974)
- [61] J.C. Friedly. "Dynamic behaviour of processes". Prentice-Hall. (1972).
- [62] G.E. Courville y J.V. Beck. "Measurement of field thermal performance parameters of building envelope components". *Revue Generale de Thermique*. No. 344-345. pp.374-381. (1990).
- [63] J.L. Molina. "Simulacion energética de edificios mediante un modelo de respuesta en frecuencia". Tesis Universidad de Sevilla. ESII. (1987).
- [64] K. Ouyang y F. Haghighat. "A procedure for calculating thermal response factors of multi-layer walls. State Space Method". *Building and Environment*, Vol. 26, No. 2, pp. 173-177. (1991)
- [65] P. Bacot. "Analyse modale des systemes thermiques". Tesis Universidad Pierre et Marie Curie. Paris VI. (1984).
- [66] J. Sicard. "Analyse modale appliquee a la thermique". Tesis Universidad Pierre et Marie Curie. Paris VI. (1984).
- [67] G. Lefebvre. "Analyse et reduction modales d'un modele de comportement thermique de batiment". Tesis Universidad Pierre et Marie Curie. Paris VI. (1987).
- [68] F.P. Neirac. "Approche theorique et experimentale des modeles reduits du comportement thermique des batiments". Tesis ENSMP. (1989).
- [69] J. Seem, S.A. Klein, W.A. Beckman y J.W. Mitchell. "Comprehensive room transfer functions for efficient calculation of the transient heat transfer processes in buildings". *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 111, No. 2, pp. 264-273. (1989).

- [70] M. Baudier y D. Marchio. "Dynamic model identification applied to the measuring of thermal static characteristics of buildings". *Energy and Buildings*, No. 17, pp. 21-34. (1991).
- [71] R. Beron, G. Achard y R. Yezou. "Contribution a la mesure de parametres caracteristiques du transfert thermique dynamique de paroi a l'aide de plaques de reference". Societe Francaise des Termiciens. Journee d'etudes sur Mesure et caracterisation thermiques de solides par methodes instationnaires. 24 febrero (1986).
- [72] J. Virgone. "Etude theorique et experimentale du comportement thermique des parois de batiment par les facteurs de reponse". Tesis INSA de Lyon. (1982).
- [73] J. Zornoza. "Influencia de la radiación solar y del efecto de almacenamiento sobre la carga térmica en acondicionamiento de aire. Aplicación al desarrollo de una metodología de cálculo". Tesis Universidad Politécnica de Madrid. (1981).
- [74] ASHRAE, "Handbook of fundamentals". (1977), (1981), (1985), (1989).
- [75] H.T. Ceylan y Myers. "Long-time solutions to heat-conduction transients with time-dependent inputs". *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 102, pp. 115-120. (1980).
- [76] J. E. Seem, S. A. Klein, W. A. Beckman y J. W. Mitchell. "Transfer functions for efficient calculation of multidimensional transient heat transfer". *ASME Journal of Heat Transfer*. Vol. 111, No. 1, pp. 5-12. (1989).
- [77] J. M. Cejudo. "Identificación. Aplicación a la obtención de modelos simplificados de muros". Memoria Junta de Andalucía. ESII Universidad de Sevilla. (1991).
- [78] M. M. Pérez Sánchez. "Typologie et uniformisation syntaxique des modeles de transfert de chaleur dans le contexte de la thermique du batiment". Tesis INSA de Lyon. (1989).