Axiomática para el grado multivaluado

Por Genaro Lopez Acedo

Recibido: 4 mayo 1988

Presentado por el académico correspondiente D. Antonio de Castro Brzezicki

Abstract

In this paper we develop an axiomatic theory for the multivalued degree that preserves the basic properties of the classical degree. We apply it to obtain fixed point theroems and existence of solution $f(x) = p$. We give a method to extend this degree.

INTRODUCCION y NOTACION

En el trabajo que se presenta se construye una axiomática para un grado multivaluado. El hecho de tomar éste valor sobre conjuntos nos ha obligado a introducir determinados cambios respecto de la axiomática del grado univaluado (véase [2]), cuidando que éstos no afectaran la deducción de las propiedades más importantes. La modificación fundamental se introduce en el axioma de descomposición en el que, en determinados casos, se ha tenido que cambiar la igualdad por una contención; lo cual permite aún obtener teoremas de existencia para la ecuacuón $f(x) = p$ o análogamente la obtención de puntos fijos. En la segunda parte del trabajo construimos un método general de extensión, que permite, definido el grado sobre una clase de funciones, extenderlo automáticamente a una clase más amplia formada por límites puntuales de la anterior clase. Como ejemplo de aplicación definimos un grado para las funciones propias definidas en abiertos no acotados de espacios de dimensión finita.

A lo largo de este trabajo (X, T) representará un espacio vectorial topológico. Para un subconjunto G de X, $Gl(G)$ denotará el cierre de G y $Fr(G)$ la frontera de G.

Consideraremos los siguientes conjuntos.

1. $C(G) = \{F : Cl(G) \subset X \longrightarrow Y \quad | F \textit{ es continua } \}$.

2. $P(G) = \{F : Cl(G) \subset R^n \longrightarrow R^n \mid F \textit{ es propia y continua } \}$.

Por Z denotaremos el conjunto de los números enteros y Z^* representará a $Z \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Si $A, B \subset Z^*$ entonces $A + B = \{a \in Z^* | a = a_1 + a_2, a_1 \in A \; a_2 \in B\}$. Por definición $\{+\infty\} + \{-\infty\} = Z^*$.

Por último $\| \cdot \|_E$ representará la norma euclídea.

1 AXIOMATICA

En esta sección se construye un sistema axiomático que recoge los diversos modelos de grado definidos hasta ahora.

Definición 1.1: Sean (X, T) e (Y, T') dos espacios vectoriales topológicos, W una famila de abiertos de T de forma que $\phi \in W$ y $W \neq \{\phi\}$. Para cada G de W sea $M(G)$ un subconjunto de $C(G)$ verificando:

1. $I \in M(G)$ para todo G de W donde I será una aplicación distinguida que, en el caso de ser $X = Y$, coincidirá con la identidad.

2. Si $G_1, G \in W$, $G_1 \subset G$ y $F \in M(G)$ se tiene $F/Cl(G_1) \in M(G_1)$.

3. Si $F \in M(G)$, para todo p perteneciente a X se tiene $F - p \in M(G)$.

A la familia $M(W) = \{M(G)/G \in W\}$ se denominará una clase admisible de aplicaciones.

Sea $H(G)$ una clase de homopatías definidas del conjunto $M(G)$ y que incluyen a las de la forma $F - tp$ donde $F \in M(G)$, $p \in X$ y $t \in [0, 1]$. A la familia $H(W) = \{H(G)/G \in W\}$ la denominaremos una clase admisible de homopatías para $M(W)$.

Definición 1.2: Sean (X, T), (Y, T'), $W, M(W)$ en las condiciones de la definición (1.1), si a cada tripleta (F, G, p) donde $p \in G$, $F \in M(G)$ y $p \notin Cl(F(Fr(G))$ le asociamos un subconjunto de Z^*, diremos que esa aplicación es un multivaluado si verifica los siguientes axiomas:

1. $D(I, G, p) = \{1\}$ si $p \in G$ y $D(I, G, p) = 0$ si $p \notin G$.

2. Si $G \in W$ y G_1, G_2 son subconjuntos abiertos y disjuntos de G y $F \in M(G)$ con $p \notin Cl(Cl(G) - (G_1 \cup G_2))$ se tiene:

   $$D(F, G, p) \subseteq D(F/Cl(G_1), G_1, p) + D(F/Cl(G_2), G_2, p)$$

   dándose la igualdad si alguno de los dos sumandos es de la forma $\{a\}$ con $a \in Z$.

3. Si $G \in W$, H: $[0, 1] \times Xl(G) \longrightarrow Y$ pertenece a $H(G)$ e $\{y_t\}$ es una curva continua en Y que verifica $y_t \notin Cl(H(t \times Fr(G))$ para todo t de $[0, 1]$ se tiene que $D(H(t,.), G, y_t)$ es constante para todo t de $[0, 1]$.

Proposición 1.1: El sistema axiomático anterior es compatible y los axiomas (1), (2) y (3) son independientes.

Demostración: Para probar que es compatible basta considerar el grado de Brouwer y definir $D(F, G, p) = \{d_B(F, G, p)\}$. Veamos la independencia de los axiomas:

1. El axioma (1) es independiente de los axiomas (2) y (3) como se observa definiendo $D(f, G, p) = +\infty$ para cualquier f, G y p.

2. El axioma (2) es independiente de (1) y de (3) como se comprueba definiendo $D(F, G, p) = \{d_B(F, G, p)^3\}$.

3. El axioma (3) es independiente de los axiomas (1) y (2). Definimos el grado de la siguiente forma: $D(F, G, p) = \{1\}$ si $p \in G$ y para todo abierto $U \in W$ de forma que $p \in U$ se tiene $F/Cl(U) = I$ y $D(F, G. p) = \{0\}$ en otros casos. Este grado verifica los axiomas (1) y (2) pero no verifica el axioma (3) pues si se verifica este axioma sería válida la igualdad $D(I, G, p) = D(I - p, G, p)$, que en este caso no lo es.

Teorema 1.1: En las condiciones de la definición (1.2) son ciertos los siguientes enunciados:

1. Si existen $G \in W$ y $p \in Y$ de forma que $D(F, G, p)$ está bien definido se tiene $D(F, \phi, p) = \{0\}$.

2. Si K es un subconjunto de G de forma que $G - K \in W$ y si $p \notin F(K)$ se tiene $D(F, G, p) = D(F, G - K, p)$.

3. Si $p \notin Cl(F(G))$ se tiene $D(F, G, p) = \{0\}$.

4. Se tiene $F(G)$ es cerrado y $D(F, G, p) \neq \{0\}$ existe x de G verificando $F(x) = p$.

5. Para todo q de Y se tiene $D(F, G, p) = D(F - p, G, p - q)$.

Demostración.

1. Si se aplica el axioma (2) con $G_1 = G$, $G_2 = \phi$ y $F = I$ se deduce que $D(I, \phi, p) = \{0\}$ y, aplicando el axioma (3), se obtiene el resultado.

2. En el axioma (2) se considera $G_1 = G - K$ y $G_2 = \phi$. Basta probar que $p \notin Cl(F(Cl(G) - (G_1 \cup G_2)))$ o sea que $p \notin Cl(F(Cl(G) - (G - K))$ lo que es cierto al ser $Cl(G) - (G - K) = Fr(G) \cup K$ y saber por hipótesis que $p \notin Cl(F(Fr(G))$ y que $p \notin F(K)$.

3. Se deduce del axioma (2) y del apartado uno del teorema considerando $G_1 = G_2 = \phi$.

4. Se deduce directamente del apartado anterior.

5. Basta aplicar el axioma (3) considerando la homopatía $H(t, x) = F(x) - tq$ y la curva $y_t = p - tq$.

Teorema 1.2: Sea G un subconjunto abierto y acotado de X y F una función de $Cl(G) \subset X$ en X de forma que $F \in M(G)$ y $0 \in G$. Si se cumplen las tres condicones siguientes:

1. $(I - tF) \in M(G)$ para todo t del intervalo $[0, 1]$.

2. $(I - tF)(Fr(G))$ e $(I - F)(Cl(G))$ son cerrados,

3. $F(x) \neq mx$ si $m > 1$ y $x \in Fr(G)$.

existe un punto fijo de F en G.

Demostración: Vamos a probar que (*) $D(I, \mathrm{G}, 0) = D(I - F, G, 0)$ de donde se obtiene fácilmente el resultado. De las hipótesis dos y tres se deduce que $0 \notin Cl((I - tF)(Fr(G))$. Por tanto se puede aplicar el axioma (3) a la homotopía $I - tF$ y a la curva $y_t \equiv 0$ de donde se obtiene (*).

2 EXTENSION DEL GRADO

En esta sección se contruye un método general de extensión del grado que recoge las diversas ideas utilizadas para la extensión del grado tanto en el caso univaluado como en el multivaluado.

Definición 2.1: (X, T), (Y, T') espacios topológicos, W, $M(W)$ y $H(W)$ familias admisibles de abiertos, funciones y homopatías respectivamente. Un esquema admisible de aproximación de grado viene dado por una familia numerable de conjuntos $\{(X_n, T_n), (Y_n, T'_n), W_n, M_n(W), H_n(W), D_n\}$ donde (X_n, T_n) y (Y_n, T'_n) son espacios vectoriales topológicos y W_n, $H_n(W)$, $M_n(W)$ son respectivamente familias admisibles de conjuntos, funciones y homotopías y D_n un grado multivaluado definido sobre ellas de forma que dados $G \in W$, $F \in M(G)$ y $p \in Y$ existen $F_n \notin M_n(W)$, $G_n \in W_n$ y $p_n \in Y_n$ verificando:

1. Si G' y G pertenecen a $M(W)$ y $G' \in F$ se tiene $G'_n \in G_n$ y además $(F/Cl(G'))_n \equiv F_n/Cl(G'_n)$.

2. Si I es la aplicación distinguida de X en Y en Y, I_n son las aplicaciones distinguidas de X_n en Y_n.

3. Si $p \notin Cl(F(Fr(G)))$ existe un n_0 de forma que si $n > n_0$ se tiene que $p_n \notin Cl(F_n(Fr(G_n)))$.

4. Si G_1 y G_2 son disjuntos G_{1n} y G_2 son disjuntos.

5. Si G_1 y G_2 son dos subconjuntos abiertos y disjuntos de un abierto G de W y $p \notin Cl(F(Cl(G) - (G_1 \cup G_2)))$ existe un n_0 de forma que si $n > n_0$ se tiene que $p \notin Cl(F_n(Cl(G_n) - G_n) - (G_{1n} \cup G_{2n})))$.

6. Si $G \in W$, $H \in H(G)$ e y_t es una curva contínua en Y de forma que $y_t \notin Cl(H(t \times Fr(G)))$ existe un n_1 de forma que si $n > n_1$ se tiene $H_n \in H_n(G_n)$ e $yt_n \notin Cl(H_n(t \times Fr(G_n)))$.

Definición 2.2: Sean (X, T), (Y, T') dos espacios topológicos, $W, M(W)$ y $H(W)$ familias admisibles de conjuntos, funciones y homopatías respectivamente y $\{(X_n, T_n), (Y_n, T'_n), W_n, M_n(W), H_n(W), D_n\}$ una aproximación admisible. Sean $G \in W$, $F \in M(G)$ y $p \notin Cl(F(Fr(G)))$. Definimos:

$$D(F, G, p) = \{z \in Z^* \mid \text{Existe } \{z_{n_j}\}$$

convergente a z donde n_j es una sucesión monótona creciente de números naturales y $z_{n_j} \in D_{n_j}(F_{n_j}, P_{n_j})\}$.

Teorema 2.2: En las condiciones de la definición anterior D es un grado multivaluado para (X, T) $(Y, T')W, M(W)$ y $H(W)$.

Demostración: De las propiedades dos, tres y cuatro se deduce directamente que el grado está bien definido, $D(F, G, p) \neq W$, y la verificación de los axiomas (1) y (3). Pasamos a demostrar que se verifica el axioma (2).

Sean G_1 y G_2 subconjuntos abiertos y disjuntos de Gy $p \notin Cl(F(Cl(G) - (G_1 \cup G_2)))$. Tenemos que para todo n se verifica que G_{1n} y G_{2n} son disjuntos y que existe un n_0 tal que si $n > n_0$ se tiene $p \notin Cl(F_n(Cl(G_n) - (G_{1n} \cup G_{2n})))$ y por tanto

$$D(F_n, G_n, p_n) \subseteq D(F_n/G_{1n}, G_1, p_n) + D(F/G_{2n}, p_n).$$

y partir de aquí probaremos que

$$D(F, G, p) \subseteq D(F/Cl(G_1), G_1, p) + D(F/Cl(G_2), G_2, p)$$

y que se da la igualdad si alguno de los dos sumandos es de la forma $\{a\}$con $a \in Z$.

Si $+_-\infty \in D(F/Cl(G_1), G_1, p)$ y $-\infty \in D(F/Cl(G_2), G_2, p)$, el resultado sería trivial, luego a partir de ahora, suponemos que no se da esta situación (que llamaremos situación (*)).

Sea $a \in D(F, G, p)$ siendo a un número entero. Entonces existe $\{n_j\}$ de forma que $a \in D_{n_j}(F_{n_j}, p_{n_j})$ y por lo tanto se tiene que $a^1_{n_j} + a^2_{n_j} = a_{n_j}$ con $a^1_{n_j} \in D_{n_j}(F_{n_j}/Cl(G_{1\,n_j}), G_{1\,n_j}, p_{n_j})$, $a^2_{n_j} \in D_{n_j}(F_{n_j}/Cl(G_{2\,n_j}), G_{2\,n_j}, p_{n_j})$ siendo las sucesiones $\{a^1_{n_j}\}$ y $\{a^2_{n_j}\}$ acotadas. pues en caso contrario estaríamos en la situación (*), por tanto ambas sucesiones tienen subsucesiones convergentes y sin perder generalidad podemos suponer que ellas mismas convergen hacia a^1 y a^2 verificándose $a^1 + a^2 = a$, $a^1 \in D_{n_j}(F_{n_j}/Cl(G_{1\,n_j}),$ $G_{1\,n_j}, p_{n_j})$ y $a^2 \in D_{n_j}/Cl(G_{2\,n_j}), G_{2\,n_j}, p_{n_j})$. Así $a^1 \in D(F/Cl(G_1), G_1, p)$ y $a^2 \in D(F/Cl(G_2), G_2, p)$ con lo que $a \in D)F/Cl(G_2), G_2 p)$ como queríamos ver.

Si $+\infty \in D(F, G, p)$ (el caso $-\infty \in D(F, G, p)$ es análogo) entonces existe una sucesión $\{a_{n_j}\}$ divergente a $+\infty$ donde $a_{n_j} \in D_{n_j}(F_{n_j}, G_{n_j}, p_{n_j})$ y $a^1_{n_j} + a^2_{n_j} = a_{n_j}$ con $a^1_{n_j} \in D_{n_j}(F_{n_j}/Cl(G_{1\,n_j}), G_{1\,n_j}, p_{n_j})$, $a^2_{n_j} \in D_{n_j}(F_{n_j}/Cl(G_{2\,n_j}), G_{2\,n_j}, p_{n_j})$; pasando a subsucesión de nuevo debe existir al menos una de $\{a^2_{n_j}\}$ o de $\{a^2_{n_j}\}$ que diverge $a + \infty$ con lo que en este caso también quedaría probado.

Por último veamos que si uno de los sumandos, por ejemplo $D(F/Cl$ $(G_1), G_1, p)$, es de la forma $\{a\}$ con $a \in Z$ se da la igualdad, o lo que es lo mismo que en este caso también se tiene $D(F/Cl(G_1), G_1\ p) + D(F/Cl(G_2),$ $G_2, p) \subset D(D(F, G, p)$. En la hipótesis que suponemos se tiene que a partir de un cierto valor de n $D_n(F_n/Cl(G_{1\,n}), G_1, p) = \{a\}$, pudiendo suponer que esto es cierto para todo n. Ahora bien si $k \in D(F/Cl(G_1), G_1, p) +$ $D(F/Cl(G_2), G_2, p)$ y $k \in Z$ (en otro caso la demostración sería la misma) existirá $\{n_j\}$ verificando $k - a \in D_n(F_{n_j}Cl(G_{2\,n_j}), G_{2\,n_j}, p_{n_j})$ con lo que $a \in D_n(F_{n_j}/Cl(G_{1\,n_j}), G_{1\,n_j}, p_{n_j}) + D_n(F_{n_j}/Cl(G_{2\,n_j}), G_{2\,n_j}, p_{n_j})$ y de aquí el resultado es inmediato.

Por último damos como ejemplo de este método de extensión la definición del grado en abiertos no acotados de R^n para funciones propias; partiendo del grado de Brouwer que como sabemos está definido para abiertos acotados de R^n.

Ejemplo.— Consideremos el esquema de aproximación dado por:

1. $(X. T) = (R^n, \|\cdot\|_E)$; $W = \{G \subset R^n \mid G$ abierto de $R^n\}$; $M(G) = P(G)$; $H(G) =$ todas en $M(G)$.

2. $(X_n, T_n) = (R^n, \|\cdot\|_E)$; $W_n = \{G \subset R^n \mid G$ abierto y acotado de $R^n\}$; $D_n(F_n, G_n, p_n) = \{d_B(F_n, G_n, p_n)\}$.

Por último definimos $G_n = B(0, n) \cap G, F_n = F/Cl(G_n)$ y p_n = p.

Es inmediato comprobar que el esquema de aproximación verifica todas las propiedades exigidas en la definición (2.1).

BIBLIOGRAFIA

[1] BROWDER F. B. AND PETRYSHIN. W. V. The topological degree and Galerkin approximation for no compact operators in Banach spaces. *Bull Amer. Math. Soc.* 74(1968), 641-646.

[2] LLOYD. N. G. "Degree Theory" Cambridge University Press, London, (1978).

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Sevilla