

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería Civil

Condiciones de resonancia y cancelación en puentes de ferrocarril considerando la interacción suelo – estructura: estudio del efecto de las propiedades de la vía

Autor: Javier Ángel Ramírez Martínez

Tutor: Pedro Galvín Barrera

**Dep. Mecánica de los Medios Continuos y Teoría  
de Estructuras  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2016



Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería Civil

**Condiciones de resonancia y cancelación en  
puentes de ferrocarril considerando la interacción  
suelo – estructura: estudio del efecto de las  
propiedades de la vía**

Autor:

Javier Ángel Ramírez Martínez

Tutor:

Pedro Galvín Barrera

Profesor titular de Universidad

Dep. de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016

Trabajo Fin de Grado: Condiciones de resonancia y cancelación en puentes de ferrocarril considerando la interacción suelo – estructura: estudio del efecto de las propiedades de la vía

Autor: Javier Ángel Ramírez Martínez

Tutor: Pedro Galvín Barrera

El tribunal nombrado para juzgar el Trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2016

El secretario del tribunal

A mi tutor  
A mi familia  
A mi otra familia

# AGRADECIMIENTOS

---

La entrega de este Trabajo Fin de Grado significa el fin de una parte importante de mis estudios universitarios; dado que para mí representa bastante, considero que es una buena ocasión para dejar por escrito mis agradecimientos a ciertas personas sin las cuales este momento sería aún una entelequia.

En primer lugar, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi tutor, Pedro Galvín, por haberme permitido trabajar con él y por su infinita paciencia y máxima dedicación en toda circunstancia. Haber tenido la suerte de contar con él como profesor y como tutor me ha hecho aprender muchísimo. Además, quiero también agradecer a Antonio Romero el haber podido contar con su ayuda en algunos momentos de desorientación. Muchas gracias a ambos por todo.

Asimismo, quiero agradecer a mi familia, especialmente a mis padres, el apoyo constante que me han brindado durante estos años de Grado concretamente, y durante toda mi vida de forma general; mis progresos en lo estudiantil se deben a las facilidades que me permiten y a que con su entrega consiguen que mis preocupaciones se limiten prácticamente a este campo. Os lo agradezco de corazón.

No puedo no mencionar a mi amigo Carlos, con el que empecé compartiendo columpios, y con el que hoy en día intento no columpiarme en nuestros debates ingenieriles. A él he recurrido más de una vez buscando ayuda, facilitándome la obtención de su particular número discreto de soluciones; muchas gracias por tu apoyo. Igualmente, quiero agradecer a Marta su característico optimismo en la inmensa mayoría de las ocasiones, el cual muchas veces consigue contrarrestar mi negativa visión de las cosas; quiero expresar también mi alegría por haber podido contar estos años con mis grandes compañeros, Alejandro, Firás y Javi, que han facilitado (y, de hecho, siguen facilitando) que el tiempo en la Escuela y los estudios sean mucho más llevaderos.

Javier Ángel Ramírez Martínez

Septiembre de 2016

# RESUMEN

---

El riguroso conocimiento del fenómeno vibratorio en viaductos ferroviarios es esencial para su diseño y conservación. En este Trabajo Fin de Grado se estudia la influencia que tiene la variación de algunos parámetros de la vía sobre el comportamiento dinámico de este tipo de puentes. Para ello, se dispone de dos modelos de Elementos Finitos del sistema sobre los que se van a realizar diversos análisis.

En primer lugar, se lleva a cabo un análisis modal en el que se obtienen las frecuencias fundamentales de los viaductos, variando la luz de los mismos y los parámetros de vía escogidos (rigidez de balasto y rigidez de rail pads), buscando así cómo se alteran dichas frecuencias. A continuación, y bajo estas mismas condiciones, se analizan los viaductos en vibración libre, período en el que entran después de hacer pasar una carga puntual a distintas velocidades por los mismos; el uso de una carga puntual es una primera aproximación al estudio del paso de un tren, y se busca así obtener resultados acerca de la variación de las velocidades de cancelación, un valor que, como se explica en este documento, es de gran importancia en el diseño de este tipo de estructuras.

# CONTENIDO

---

1	Introducción.....	1
1.1	El fenómeno de resonancia.....	1
1.2	Estado del arte.....	1
1.3	Objetivos del trabajo.....	2
2	Modelo numérico.....	3
2.1	Descripción de los viaductos estudiados.....	3
2.2	Modelo viga.....	3
2.2.1	Discretización del modelo y recopilación de valores de los parámetros.....	4
2.3	Modelo viga considerando la vía.....	5
2.3.1	Balasto.....	5
2.3.2	Traviesas.....	6
2.3.3	Rail pads.....	7
2.3.4	Carril.....	8
2.3.5	Discretización de los modelos y recopilación de valores de los parámetros.....	11
2.4	Amortiguamiento: modelo de Rayleigh.....	16
2.4.1	Amortiguamiento de los rail pads.....	17
2.5	El Método de los Elementos Finitos en el dominio del tiempo.....	18
2.5.1	Introducción.....	18
2.5.2	Formulación del MEF en el dominio del tiempo.....	18
3	Análisis modal paramétrico.....	20
3.1	Introducción.....	20
3.2	Modelo viga: Análisis modal.....	20
3.3	Análisis modal: influencia de las propiedades del balasto.....	22
3.3.1	Límite inferior del Eurocódigo.....	23
3.3.2	Límite intermedio del Eurocódigo.....	24
3.3.3	Límite superior del Eurocódigo.....	25
3.4	Análisis modal: influencia de las propiedades de los rail pads.....	26

3.4.1	Límite inferior del Eurocódigo.....	26
3.4.2	Límite intermedio del Eurocódigo.....	27
3.4.3	Límite superior del Eurocódigo .....	28
4	Análisis en vibración libre.....	29
4.1	Introducción .....	29
4.1.1	Velocidades de resonancia y cancelación.....	30
4.2	Explicación del método .....	31
4.3	Velocidades de cancelación en el modelo viga.....	33
4.3.1	Límite inferior del Eurocódigo.....	34
4.3.2	Límite intermedio del Eurocódigo.....	35
4.3.3	Límite superior del Eurocódigo .....	36
4.3.4	Análisis de resultados.....	37
4.4	Obtención de las velocidades de cancelación: influencia de las propiedades del balasto..	38
4.4.1	Límite inferior del Eurocódigo.....	39
4.4.2	Límite intermedio del Eurocódigo.....	40
4.4.3	Límite superior del Eurocódigo .....	42
4.4.4	Análisis de resultados.....	44
4.5	Obtención de las velocidades de cancelación: influencia de las propiedades de los rail pads .....	46
4.5.1	Límite inferior del Eurocódigo.....	47
4.5.2	Límite intermedio del Eurocódigo.....	48
4.5.3	Límite superior del Eurocódigo .....	50
4.5.4	Análisis de resultados.....	52
5	Conclusiones y desarrollos futuros.....	54
5.1	Conclusiones.....	54
5.2	Desarrollos futuros .....	55
6	Referencias .....	56
7	Anexo.....	58
	Vib_libre.....	i



# TABLA DE ILUSTRACIONES

---

FIG. 1 ESQUEMA DEL ELEMENTO BEAM4. FUENTE: MANUAL DE ANSYS.....	4
FIG. 2 BALASTO. FUENTE: LEXICOON.....	5
FIG. 3 ESQUEMA DEL ELEMENTO COMBIN14. FUENTE: MANUAL DE ANSYS.....	6
FIG. 4 ESQUEMA DEL ELEMENTO MASS21. FUENTE: MANUAL DE ANSYS .....	6
FIG. 5 TRAVIESAS MONOBLOQUE DE HORMIGÓN PRETENSADO. FUENTE: ADIF .....	7
FIG. 6 RAIL PAD Y CLIP PANDROL. FUENTE: ADIF .....	7
FIG. 7 DISTINTOS TIPOS DE RAIL PADS. FUENTE: TIFLEX .....	8
FIG. 8 SECCIÓN DE CARRIL UIC60. FUENTE: RAILWAY FASTENINGS.....	8
FIG. 9 ESQUEMA GENERAL DEL MODELO DE VIADUCTO CON VÍA INCORPORADA, Y LOS PARÁMETROS INCLUIDOS .....	10
FIG. 10 PARÁMETROS GEOMÉTRICOS DE LA CAPA DE BALASTO. FUENTE: ZHAI .....	13
FIG. 11 SUMA DE MUELLES EN PARALELO.....	14
FIG. 12 MODELO MUELLE – AMORTIGUADOR DE RAIL PAD. FUENTE: KAEWUNRUEN & REMENNIKOV..	17
FIG. 13 AMPLITUD FRENTE A VELOCIDAD DE LA CARGA PUNTUAL. FUENTE: MARTÍNEZ RODRIGO ET AL. [6].....	31

# 1 INTRODUCCIÓN

---

Desde que en 1830 se inaugurase entre Liverpool y Manchester la primera línea de ferrocarril moderno, los efectos dinámicos producidos por el paso de los trenes sobre las infraestructuras han constituido una problemática para los encargados del diseño y mantenimiento de éstas.

El hecho de que casi 200 años después esta preocupación siga vigente no es en vano: en España, además de administrarse alrededor de 3.000 kilómetros de líneas de Alta Velocidad, se construyen cada día nuevas infraestructuras ferroviarias, además de adaptarse infraestructuras ya existentes para la superación de los 200 km/h. La Alta Velocidad forma parte del futuro del transporte en este país y en el mundo, y la investigación en este campo es necesaria para permitirlo.

## 1.1 EL FENÓMENO DE RESONANCIA

El fenómeno dinámico por excelencia en el campo de la ingeniería estructural es el conocido como resonancia mecánica, o simplemente resonancia, el cual se da cuando la frecuencia a la que actúan las cargas coincide con alguna de las frecuencias naturales de la estructura, produciéndose un importante aumento de la amplitud de las vibraciones generadas.

La normativa actual [1] exige el análisis dinámico completo de los puentes ferroviarios cuando la velocidad de proyecto supere los 220 km/h, debido precisamente a los problemas de resonancia que pueden surgir.

Existe un elevado número de casos de puentes afectados por el fenómeno de resonancia: son muy conocidos los casos del puente de Volgogrado (afectado por rachas de viento que hicieron entrar en resonancia a la estructura), del Puente del Milenio de Londres, o del puente de Tacoma.

## 1.2 ESTADO DEL ARTE

La importancia de los efectos dinámicos provocados por el paso de ferrocarriles sobre las estructuras ha llevado al estudio de esta problemática por parte de diversos autores. Weaver et al. [2] y Frýba [3] estudiaron en profundidad el problema en sus respectivos libros; de forma más concreta, varios autores han investigado sobre el fenómeno vibratorio en vigas. Savin [4] propuso un método para predecir la amplitud dinámica de las vigas sometidas a cargas móviles, además de concluir que para ciertas longitudes de viga (dependientes de la frecuencia de las cargas) la amplitud de las vibraciones puede verse reducida en gran medida (teóricamente, incluso canceladas), lo cual resultaría de gran interés para el diseño de viaductos de ferrocarril. Hsu et al. [5] obtuvieron condiciones de resonancia para vigas biapoyadas, indicando en su estudio que el diseño óptimo de un viaducto ferroviario se basa en el conocimiento del fenómeno de cancelación. Martínez Rodrigo et al. [6] concluyeron que

las velocidades a las que se produce la cancelación de vibraciones varían muy ligeramente con el amortiguamiento estructural, además de verificar la existencia de estas velocidades para vigas elásticamente apoyadas.

De la misma forma, hay otras corrientes que se han dedicado al estudio de la influencia de la vía sobre el comportamiento dinámico de los viaductos. Rigueiro et al. [7] obtuvieron resultados acerca de la influencia de la modelización de la vía, concluyendo que las diferencias en el comportamiento en el dominio del tiempo eran mínimas, y en el dominio de la frecuencia se hacen notables a partir de los 10-15 Hz. Rauert et al. [8] concluyen que la rigidez aportada por los elementos de vía deberían tenerse en cuenta para los estudios relacionados con el efecto de resonancia en puentes de ferrocarril; Proença et al. [9] comparan el efecto de la vía en placa y vía sobre balasto en la vibración de viaductos, obteniendo la conclusión de que las resonancias ocurren a frecuencias más elevadas y con amplitudes mayores para vías más ligeras.

Las últimas tendencias en investigación han llevado a autores como Galvín et al. [10 - 11] a tener en cuenta el efecto de la interacción suelo – estructura en el comportamiento dinámico de viaductos, concluyendo que las frecuencias naturales de las vigas se aproximan más al caso de viga biapoyada cuanto más rígido es el suelo, además de que las velocidades de cancelación decrecen conforme baja la rigidez del suelo.

### 1.3 OBJETIVOS DEL TRABAJO

En el documento que se presenta se persiguen una serie de objetivos relacionados con el análisis dinámico de viaductos ferroviarios.

En primer lugar, se buscó conocer más y profundizar acerca del modelizado mediante el Método de los Elementos Finitos de un tipo común de infraestructura ferroviaria como es un viaducto, con un modelo completo de vía implementado, además de los parámetros que rigen el comportamiento dinámico tanto de la vía como del propio viaducto.

El segundo de los objetivos (y mayoritario) es obtener resultados que muestren las variaciones en el comportamiento dinámico de los puentes estudiados cuando algunos parámetros de vía cambian. Entre la variedad de parámetros que pudieron ser escogidos, se eligió por mantener constantes todos menos los valores de rigidez de rail pads y de la capa de balasto; es por tanto que se dedican dos capítulos de este trabajo a estudiar su influencia.

## 2 MODELO NUMÉRICO

---

**E**n el presente apartado se describen las características de los distintos modelos que se han seguido a la hora de estudiar el problema, indicando cuáles de ellas son comunes, y en qué difieren los modelos; se justifican además las simplificaciones que se han seguido.

En primer lugar, se describen brevemente los viaductos estudiados en este trabajo, para a continuación presentar el primer modelo que se ha estudiado, compuesto por una viga biapoyada que modeliza el conjunto del tablero del viaducto y la vía.

Después, se da a conocer el segundo modelo estudiado, explicando detalladamente las partes de las que consta, su discretización y los distintos parámetros que rigen su comportamiento; también se explica el modelo de amortiguamiento que se ha usado en la estructura. Finalmente, se presenta el método de cálculo usado en el trabajo para obtener los resultados en el dominio del tiempo.

### 2.1 DESCRIPCIÓN DE LOS VIADUCTOS ESTUDIADOS

Todos los viaductos que se han estudiado en el presente trabajo pueden englobarse en la tipología de viaductos isostáticos de luces cortas y medias (concretamente, el estudio se ha realizado para luces de entre 12,5 y 25 metros). El sistema constructivo (generalmente se llevan a cabo mediante el uso de vigas prefabricadas de hormigón pretensado, ejecutando a continuación la losa en cabeza) permite asumir que las propiedades estructurales (rigidez a flexión y densidad) son homogéneas y constantes a lo largo de la luz. Todos los viaductos estudiados soportan una única vía ferroviaria.

### 2.2 MODELO VIGA

El primero de los modelos estudiados consiste en una viga tipo Euler – Bernouilli, simplemente apoyada, que representa el viaducto completo incluyendo la vía ferroviaria. Los parámetros que definen la viga son:

- Longitud: como se ha comentado anteriormente, se van a estudiar puentes de luces medias y cortas, comenzando el rango en 12,5 metros y terminando en 25 metros, con un intervalo de 2,5 metros:

$$L \in [12.5, 15, 17.5, 20, 22.5, 25] \text{ m}$$

- Rigidez a flexión longitudinal:  $EI_z$ , la cual viene proporcionada por la definición de frecuencia estructural del Eurocódigo [1]:

$$EI_z = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{f_n^2 \cdot w \cdot L^4}{g},$$

siendo:

- $EI_z$ , rigidez a flexión de la viga, en  $N \cdot m^2$
- $f_n$ , primera frecuencia natural (o frecuencia fundamental), en Hz
- $w$ , masa distribuida en la viga, en  $N/m$
- $L$ , longitud de la viga, en m
- $g$ , aceleración de la gravedad, en  $m/s^2$
- Masa: es dependiente de la luz del viaducto estimado, siendo la masa lineal:

$$m \left[ \frac{kg}{m} \right] = 1000 \left[ \frac{kg}{m^2} \right] \cdot L[m]$$

### 2.2.1 DISCRETIZACIÓN DEL MODELO Y RECOPIACIÓN DE VALORES DE LOS PARÁMETROS

Para la construcción del modelo viga se han usado elementos BEAM4, los cuales tienen 6 grados de libertad en cada nodo (tres desplazamientos y tres giros), y capacidad de tracción, compresión, torsión y flexión.

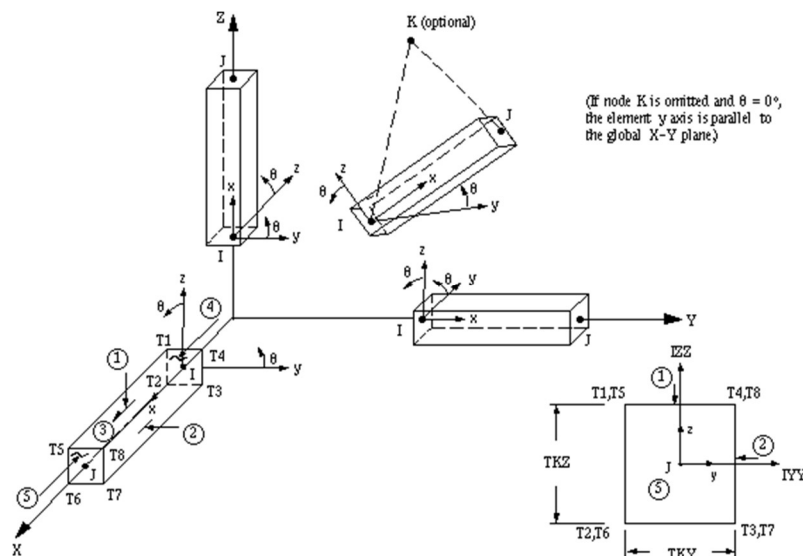


Fig. 1 Esquema del elemento BEAM4. Fuente: manual de ANSYS

Para los cálculos que se presentan en este trabajo, el modelo viga se ha discretizado con 20 elementos, siendo cada uno de ellos de una longitud de  $L/20$  (la longitud del elemento, por tanto, varía desde 0,625 hasta 1,25 m en función de la longitud del viaducto). Se requiere la definición de los siguientes valores:

- $L_{vig}$ : longitud del viaducto, toma los distintos valores explicados anteriormente (m)

- $A_{vig}$ : área de la sección del tablero,  $10 \text{ m}^2$ ; se ha considerado este valor no real de cara a evitar que aparezca la contribución axial en la respuesta de la viga, la cual no entra dentro del alcance de este trabajo, donde sólo se ha analizado la respuesta de flexión
- $I_{vig,yy}$ : inercia de la sección del tablero para giro en  $y$  ( $\text{m}^4$ ), obtenida a partir de la rigidez que indica el Eurocódigo [1] (siendo el eje  $x$  el longitudinal al viaducto) [ver 2.3.5.3]
- $I_{vig,zz}$ : inercia de la sección del tablero para giro en  $z$  ( $\text{m}^4$ ), se toma un valor de 10 veces la inercia anterior, para evitar problemas numéricos con los modos de flexión perpendiculares al plano vertical.
- $E_{vig}$ : módulo de elasticidad del tablero,  $36 \text{ GPa}$ .
- $\rho_{vig}$ : calculada de forma que la masa lineal del viaducto para cualquier longitud de las estudiadas sea  $1000 \cdot L \text{ kg/m}$
- $\nu_{vig}$ : coeficiente de Poisson del tablero,  $0,3$

## 2.3 MODELO VIGA CONSIDERANDO LA VÍA

El segundo modelo estudiado consiste en el conjunto de una viga tipo Euler-Bernouilli que representa el tablero del puente de forma similar al modelo anterior, unida a una serie de elementos que representan el conjunto de la vía. Se presenta a continuación una breve descripción de los mismos, además de los detalles sobre la modelización seguida.

### 2.3.1 BALASTO

Es la capa de material granular, generalmente silíceo, sobre el que se asientan las traviesas; su función estructural es amortiguar y repartir las cargas ferroviarias, impidiendo el desplazamiento de la vía.



**Fig. 2 Balasto. Fuente: Lexicoon**

Para llevar la capa de balasto al modelo, se ha hecho en ANSYS del elemento COMBIN14 (Muelle – Amortiguador), elemento con capacidad lineal de tracción – compresión uniaxial con hasta tres grados de libertad en cada nodo (desplazamientos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). El elemento COMBIN14 no considera

flexión o torsión, y no tiene masa: es por ello que la masa de balasto se incluirá en los mismos elementos que modelan las traviesas.

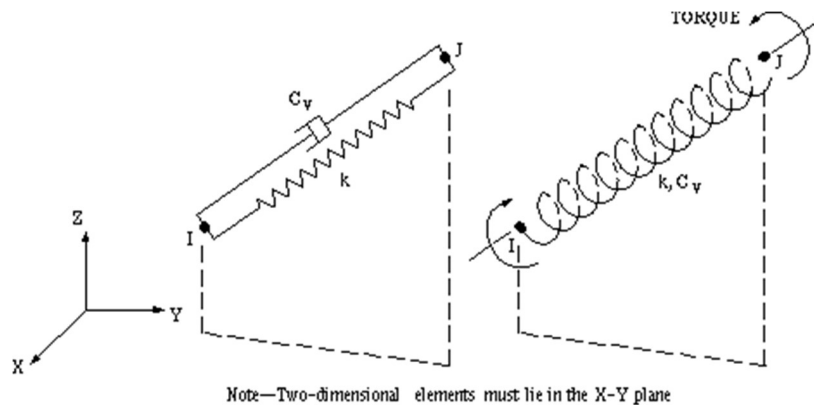


Fig. 3 Esquema del elemento COMBIN14. Fuente: Manual de ANSYS

Los parámetros que definen el comportamiento del elemento son:

- Rigidez:  $K_b$  [N/m]
- Amortiguamiento:  $C_b$  [ $N \cdot s \cdot m^{-1}$ ] (sin uso, como se comenta más adelante)

Además, para tener en cuenta el efecto que tiene la masa del balasto, se hace uso del elemento MASS21 (Masa estructural), el cual es un elemento puntual, con seis grados de libertad (tres desplazamientos y tres giros), al cual existe la posibilidad de asignársele distintos parámetros de masa o inercia rotacional según el grado de libertad.

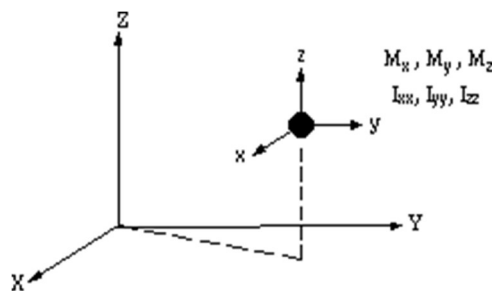


Fig. 4 Esquema del elemento MASS21. Fuente: Manual de ANSYS

Parámetros que rigen el comportamiento del elemento:

- Masa:  $M_b$  [kg]

### 2.3.2 TRAVIESAS

Son elementos de distintos materiales (generalmente, hormigón pretensado) situados en dirección perpendicular al eje de la vía, y cuya función es arristrar los carriles entre sí, además de servir de apoyo para éstos.



**Fig. 5 Traviesas monobloque de hormigón pretensado. Fuente: ADIF**

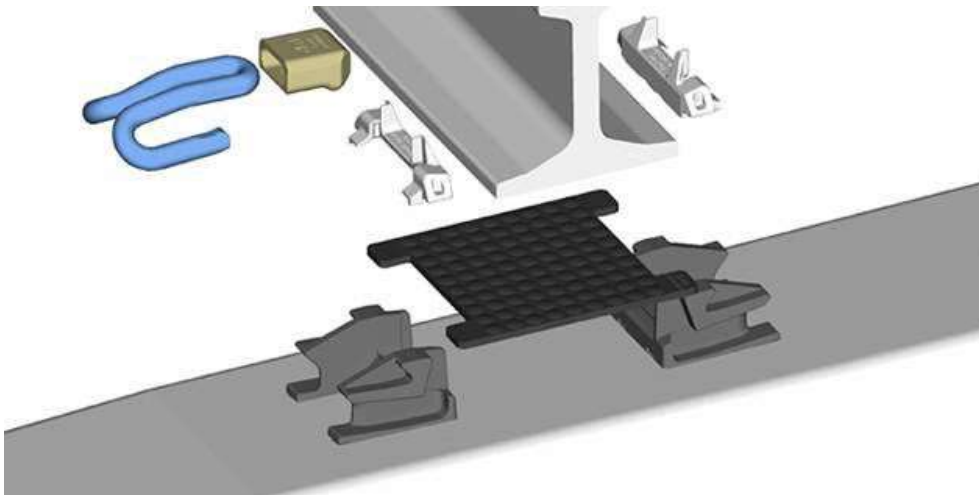
En el modelo, las traviesas son masas vibrantes colocadas entre el balasto y los rail pads, sin aportar rigidez; se han usado elementos MASS21 para representarla.

Parámetros que rigen el comportamiento del elemento:

- Masa:  $M_t$  [kg]

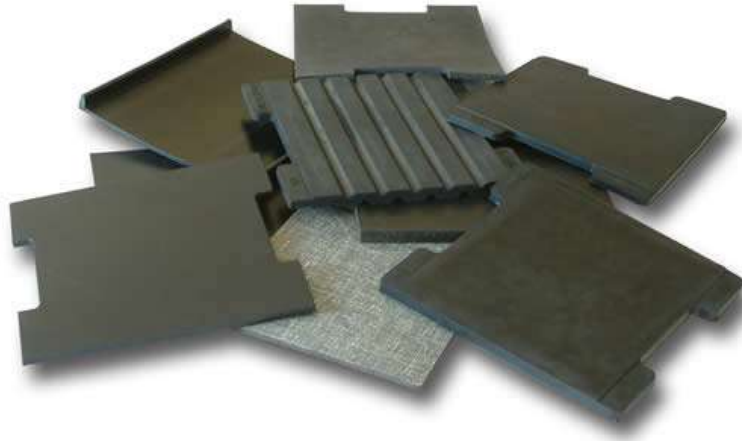
### 2.3.3 RAIL PADS

También llamados almohadillas bajo carril, y fabricados de distintos materiales (generalmente goma), tienen la función de servir de elemento amortiguador entre el carril y la traviesa, colocándose entre éstos, y permitiendo pequeños desplazamientos y giros del carril.



**Fig. 6 Rail pad y clip Pandrol. Fuente: ADIF**





**Fig. 7 Distintos tipos de rail pads. Fuente: Tiflex**

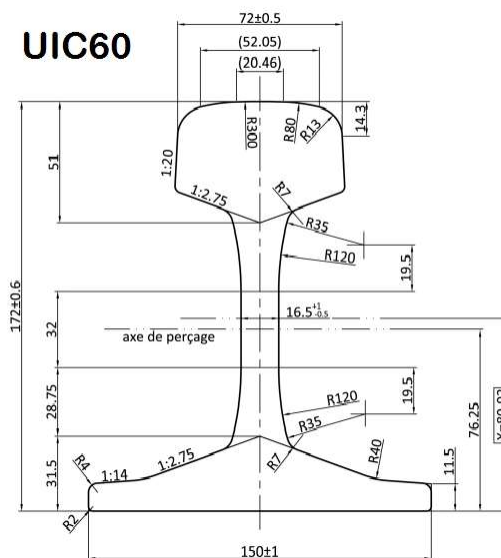
Para modelar los rail pads también se ha usado el elemento COMBIN14 (Muelle – amortiguador).

Parámetros que definen el comportamiento del elemento:

- Rigidez:  $K_r$  [N/m]
- Amortiguamiento:  $C_r$  [N·s·m<sup>-1</sup>] (sin uso, como se comenta más adelante)

### 2.3.4 CARRIL

Formado por una barra de acero laminado cuya función es sustentar y guiar la maquinaria ferroviaria.



**Fig. 8 Sección de carril UIC60. Fuente: Railway Fastenings**

Para llevar el carril al modelo se ha usado, al igual que en el tablero de los viaductos, elementos viga que siguen la teoría de Euler – Bernoulli (BEAM4).

Parámetros que definen el comportamiento del elemento:

- Área de la sección:  $A_{\text{carril}} [\text{m}^2]$
- Momentos de inercia:  $I_{zz,\text{carril}}, I_{yy,\text{carril}} [\text{m}^4]$
- Densidad:  $\rho_{\text{carril}} [\text{kg}/\text{m}^3]$

Dado que se ha buscado comparar los dos modelos estudiados, las características que definen el primer modelo (longitud, rigidez a flexión y masa lineal) se aplican también al segundo modelo (la rigidez a flexión que aporta el carril se desprecia frente a la de la viga).

El modelo con el que se va a trabajar variando los parámetros de vía, por tanto, se representa a continuación.

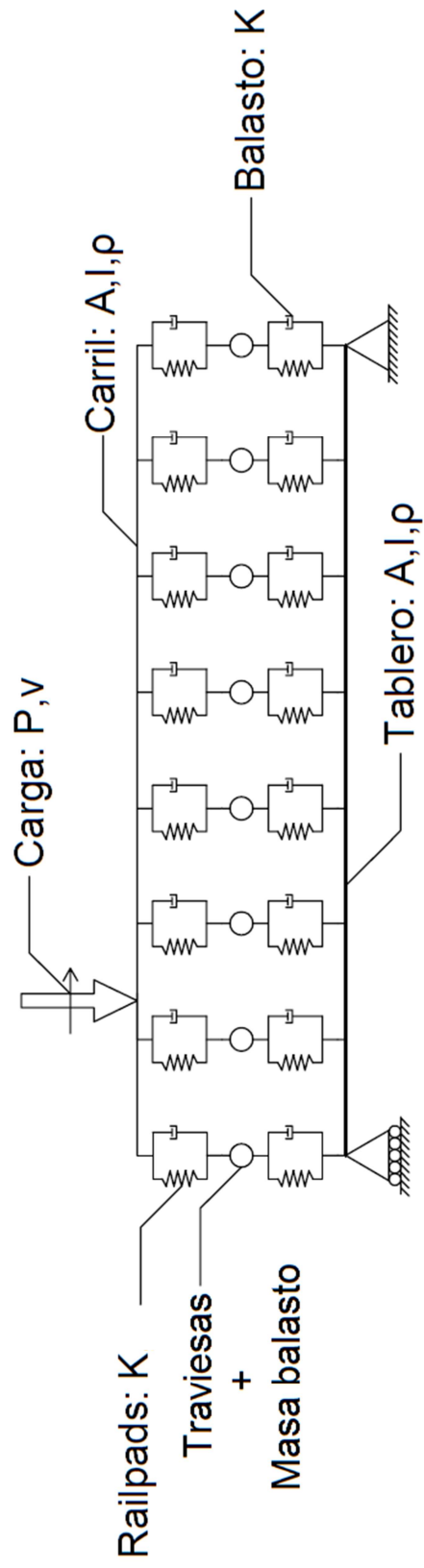


Fig. 9 Esquema general del modelo de viaducto con vía incorporada, y los parámetros incluidos

### 2.3.5 DISCRETIZACIÓN DE LOS MODELOS Y RECOPIACIÓN DE VALORES DE LOS PARÁMETROS

De cara a asegurar la verificabilidad del modelo y de los resultados obtenidos con éste, se va a explicar en este apartado la discretización seguida, además de los valores escogidos para los distintos parámetros que rigen su comportamiento.

Dado que el modelo consta de dos vigas colocadas paralelamente (que representan tablero y carril) y que los nodos de ambas están relacionados por los elementos que modelizan balasto, traviesas y rail pads, es evidente que el número de elementos y nodos del tablero y del carril han de ser iguales. En el caso en el que se trabaja, se optó por dividir el tablero en 20 elementos (al igual que el carril), con lo que el modelo discretizado consta de 63 nodos (21 del tablero, 21 de traviesas, 21 del carril), y 103 elementos en total.

En la siguiente lista se concretan todos los parámetros utilizados, además de los valores tomados, y una breve explicación de por qué se tomaron esos valores, si fuese necesaria.

- Parámetros relacionados con el comportamiento del tablero
  - $L_{vig}$ : longitud del viaducto, toma los distintos valores explicados anteriormente (m)
  - $A_{vig}$ : área de la sección del tablero, 10 m<sup>2</sup>; se ha considerado este valor no real de cara a evitar que aparezca la contribución axial en la respuesta de la viga, la cual no entra dentro del alcance de este trabajo, donde sólo se ha analizado la respuesta de flexión
  - $I_{vig,yy}$ : inercia de la sección del tablero para giro en y (m<sup>4</sup>), obtenida a partir de la rigidez que indica el Eurocódigo [1] (siendo el eje x el longitudinal al viaducto) [ver 2.3.5.1.1]
  - $I_{vig,zz}$ : inercia de la sección del tablero para giro en z (m<sup>4</sup>), se toma un valor de 10 veces la inercia anterior, para evitar problemas numéricos con los modos de flexión perpendiculares al plano vertical.
  - $E_{vig}$ : módulo de elasticidad del tablero, 36 GPa.
  - $Q_{vig}$ : calculada de forma que la masa lineal del viaducto para cualquier longitud de las estudiadas sea 1000·L kg/m [ver 2.3.5.1.4]
  - $\nu_{vig}$ : coeficiente de Poisson del tablero, 0,3
- Parámetros que rigen el comportamiento de la vía
  - $K_{bal}$ : rigidez de la capa de balasto, su valor varía por ser precisamente objeto de estudio en este trabajo; se han usado 130, 260 y 320 MN/m. Estos valores se justifican en el siguiente epígrafe [ver 2.3.5.1.2]
  - $Q_{bal}$ : densidad del balasto, 1550 kg/m<sup>3</sup>
  - $A_{bal}$ : área de la sección de la capa de balasto, 5 m<sup>2</sup>
  - $M_{trav}$ : masa de una traviesa, 300 kg

- $d_{\text{trav}}$ : distancia entre traviesas, 0,6 m
- $M_{\text{tb}}$ : masa del elemento MASS21, calculada en 2.3.5.1.4
- $K_{\text{rp}}$ : rigidez de los rail pads, su valor también es objeto de estudio, por lo que varía entre 60, 150 y 250 MN/m [ver 2.3.5.1.3]
- $A_{\text{car}}$ ,  $I_{\text{car,yy}}$ : área e inercia del carril; se han tomado las propiedades del carril UIC60, es decir,  $7,643 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  y  $3,1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$ .
- $E_{\text{car}}$ : módulo de elasticidad del acero (material del carril), 210 GPa
- $\nu_{\text{car}}$ : coeficiente de Poisson del acero, 0,3
- $\rho_{\text{car}}$ : densidad del acero, 7850 kg/m<sup>3</sup>.

### 2.3.5.1 JUSTIFICACIÓN DE PARÁMETROS

#### 2.3.5.1.1 Inercia del tablero

Para la obtención de la inercia del tablero del viaducto, se hace uso de las frecuencias fundamentales teóricas de los puentes que se estudian, que vienen recogidos por el Eurocódigo [1], mediante la definición de límites de dichas frecuencias. El límite superior queda definido como:

$$f_{1,100} = 94,76 \cdot L^{-0,748}$$

El límite inferior se define mediante las expresiones:

$$\begin{cases} f_{1,000} = \frac{80}{L} \text{ si } L \in [4,20] \text{ m} \\ f_{1,000} = 23,58 \cdot L^{-0,592} \text{ si } L \in (20,100] \text{ m} \end{cases}$$

Además, queda definido un valor intermedio de las frecuencias naturales como la media entre los dos límites anteriores:

$$f_{1,050} = \frac{f_{1,100} + f_{1,000}}{2}$$

A partir de estas frecuencias naturales, y con la expresión de la frecuencia natural analítica

$$EI_z = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{f_n^2 \cdot w \cdot L^4}{g},$$

se obtiene la inercia de la viga.

#### 2.3.5.1.2 Rigidez de balasto en modelos discretos

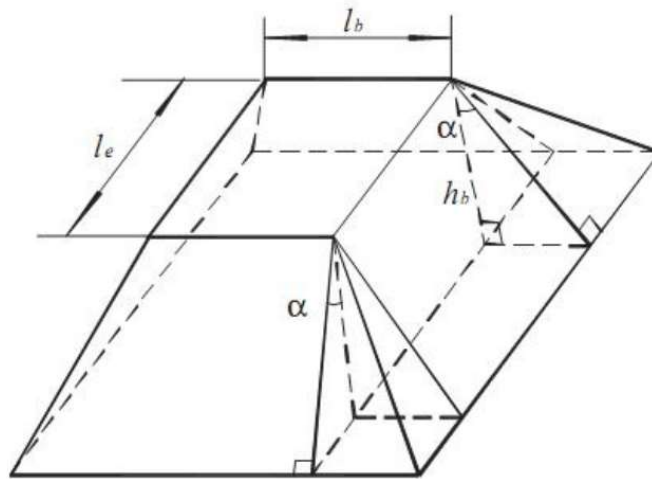
Como se ha comentado anteriormente, el modelo de la capa de balasto consiste en una serie de elementos tipo muelle – amortiguador colocados de forma discreta sobre los elementos viga que conforman el tablero del viaducto.

La rigidez de los elementos que discretizan la capa de balasto ha sido estudiada por autores como Zhai [10], el cual propone una fórmula para la obtención de este parámetro:

$$K_b = \frac{2 \cdot (l_e - l_b) \cdot \tan \alpha}{\ln\left(\frac{l_e}{l_b}\right) \cdot \frac{l_b + 2 \cdot h_b \cdot \tan \alpha}{l_e + 2 \cdot h_b \cdot \tan \alpha}} \cdot E_b$$

siendo:

- $K_b$  la rigidez de los elementos muelle
- $l_e$  la distancia entre elementos
- $l_b$  el ancho de traviesa
- $\alpha$  el complementario al ángulo del talud de balasto
- $h_b$  la profundidad de la capa
- $E_b$  el módulo de Young del material



**Fig. 10** Parámetros geométricos de la capa de balasto. Fuente: Zhai

A su vez, el valor del módulo de Young del balasto también es un parámetro cuyo valor oscila en la literatura. Kumaran [11] propone el valor

$$E_b = 150 \sim 350 \text{ MPa}$$

el cuál es el que se va a tomar como válido para el modelo.

La profundidad de la capa de balasto es variable, oscilando entre unos 25-35 cm de espesor sobre la subbase en vías convencionales o 50 cm de balasto como única capa sobre algunos viaductos [12], medidas estas magnitudes desde la base de la traviesa.

Tomando los datos geométricos de la capa de balasto como sigue:

$l_e$ (m)	$l_b$ (m)	$\alpha$ (°)	$h_b$ (m)
0,875	1,5	45	0,5

Y teniendo en cuenta el rango de valores del módulo de Young del balasto que cita Kumaran [11], el estudio de la influencia del balasto se va a realizar con tres valores de rigidez:

$$K_b = [130, 260, 320] \text{ MN/m}$$

### 2.3.5.1.3 Rigidez de los rail pads

Kaewunruen et al. [13] estudiaron el efecto de la rigidez de los rail pads para valores de entre 0 y 5000 MN/m, concluyendo que valores de rigidez altos afectan a los tres primeros modos de vibración de la vía. Rigueiro et al. [7] proponen valores de 300 y 500 MN/m.

En este trabajo, el estudio del cambio en la rigidez de los rail pads se va a limitar a rail pads de rigidez baja – media. Concretamente, se van a usar tres valores:

$$K_r = [60, 150, 250] \text{ MN/m}$$

Para hallar la rigidez equivalente de elementos que modelizan los rail pads, se recurre a la asociación de muelles en paralelo:

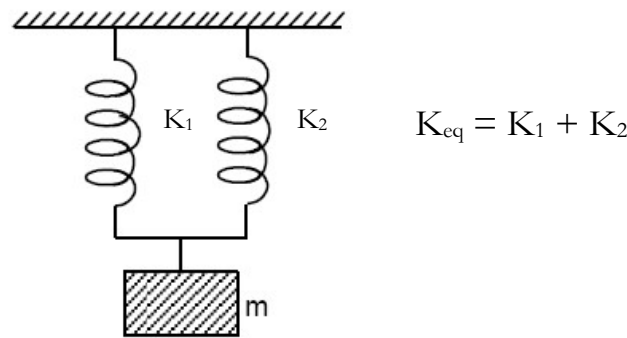


Fig. 11 Suma de muelles en paralelo

$$K_{rp,eq} = \frac{\overbrace{\text{rigidez de rail pad}}^{K_{rp}} \cdot \overbrace{\left(\frac{L}{0,6}\right)}^{\text{número de rail pads}}}{\underbrace{19}_{\text{elementos muelle}}}$$

### 2.3.5.1.4 Cálculos relativos a masas y densidad

En ambos modelos estudiados se ha determinado que la masa lineal de la estructura es

$$m \left[ \frac{kg}{m} \right] = 1000 \left[ \frac{kg}{m^2} \right] \cdot L[m]$$

Para poder mantener este parámetro en el modelo viga considerando la vía, es necesario calcular la masa de los elementos MASS21 y densidad del tablero, que dependerán también de la luz del puente; se explica a continuación el procedimiento seguido.

En primer lugar, se enumeran los elementos con masa a tener en cuenta y sus propiedades:

- Carril UIC60: 60 kg/m
- Traviesas: 300 kg cada una, colocadas a una distancia de 0,6 m entre sí
- Balasto: el área de la sección de la capa de balasto se ha tomado 5 m<sup>2</sup>, y la densidad del material es de 1550 kg/m<sup>3</sup>
- Tablero: con un área de sección de 10 m<sup>2</sup>, y una densidad a calcular

La discretización llevada a cabo en el modelo divide el viaducto en 20 elementos y 21 nodos; los elementos MASS21 colocados en los nodos contienen la masa de traviesas y balasto, pero los nodos extremos (estribos) no son vibrantes, debido a las condiciones de contorno, lo que resulta en una división de la masa de traviesas y balasto en (21-2) 19 nodos en total. Por tanto, la masa de cada uno de los elementos MASS21 se calcula como:

$$\text{Masa de MASS21: } M_{tb} = M_{trav} + M_{bal}$$

$$M_{trav} = \frac{\overbrace{\frac{\text{número de traviesas}}{L[m] / 0,6 [m]}} \cdot \overbrace{\text{masa de una traviesa [kg]}}{300}}{\underbrace{19}_{\text{número de elementos MASS21}}}$$

$$M_{bal} = \frac{\overbrace{\text{longitud del puente [m]}}{\hat{L}} \cdot \overbrace{\text{A.sección balasto [m}^2\text{]}}{5} \cdot \overbrace{\text{Dens.balasto } [\frac{kg}{m^3}]}{1550}}{\underbrace{19}_{\text{número de elementos MASS21}}}$$

De forma que, en total, cada elemento MASS21 tiene una masa de:

$$M_{tb} = 26,316 \cdot L + 407,895 \cdot L = 434,211 \cdot L$$

Además, se ha de calcular la nueva densidad de tablero, que será:

$$\rho = \frac{\overbrace{\text{masa lineal total } [\frac{kg}{m}]}{1000 \cdot L} - \overbrace{\text{masa lineal trav. bal.} [\frac{kg}{m}]}{434,211 \cdot 19} - \overbrace{\text{m.lineal carril} [\frac{kg}{m}]}{60}}{\underbrace{10}_{\text{área secc. tablero [m}^2\text{]}}}$$

Así, para todos los puentes estudiados, las propiedades másicas son las siguientes:



L [m]	Masa MASS21 [kg]	Densidad tablero [kg/m <sup>3</sup> ]
12,5	5427,63	419
15	6513,16	669
17,5	7596,68	919
20	8684,21	1169
22,5	9769,74	1419
25	10855,26	1669

## 2.4 AMORTIGUAMIENTO: MODELO DE RAYLEIGH

En el esquema que se ha presentado anteriormente se indica cómo el balasto y los rail pads han sido representados mediante elementos muelle – amortiguador, aunque en el mismo se indica también que su comportamiento está dominado únicamente por el parámetro de rigidez K.

El amortiguamiento de Rayleigh es un tipo de amortiguamiento viscoso por el cual la matriz de amortiguamiento es proporcional a la matriz de rigidez y matriz de masa:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K],$$

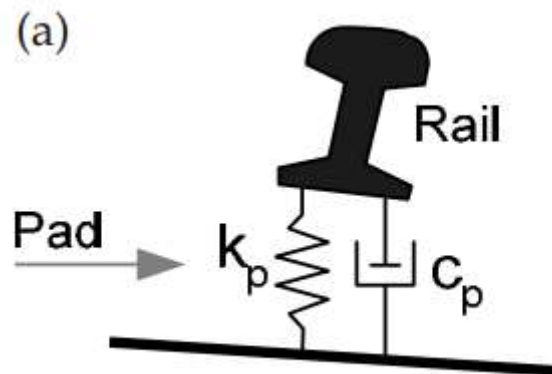
donde  $\alpha$  y  $\beta$  son

$$\alpha = 2\omega_1\omega_2 \cdot \frac{\zeta_2\omega_2 - \zeta_1\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$$

$$\beta = 2 \cdot \frac{\zeta_2\omega_2 - \zeta_1\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$$

En los cálculos que se llevan a cabo en la estructura se usa este modelo de amortiguamiento por lo que las constantes de amortiguamiento de los elementos que modelizan el balasto y los rail pads no se tienen en cuenta. Como se explica a continuación, esto puede llegar a suponer una limitación importante de cara al modelizado de los rail pads y su comportamiento.

#### 2.4.1 AMORTIGUAMIENTO DE LOS RAIL PADS



**Fig. 12 Modelo muelle – amortiguador de rail pad. Fuente: Kaewunruen & Remennikov**

El coeficiente de amortiguamiento de los rail pads es un parámetro discutido por diversos autores. Kaewunruen et al. [14] proponen para los rail pads de goma un coeficiente de  $C = 3 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ , y para rail pads de polietileno de alta densidad, un coeficiente de  $C = 4,1 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ , estudiando además la dependencia de estos valores con el paso del tiempo.

En cualquier caso, el valor del amortiguamiento de los rail pads es bastante alto, aproximándose al amortiguamiento crítico de la estructura en ciertos casos. Sin embargo, como se ha comentado, se usa el modelo de amortiguamiento de Rayleigh, en el cual la matriz de amortiguamiento es proporcional a las matrices de rigidez y masa del sistema. Es obvio que en estas matrices no queda reflejado el coeficiente de amortiguamiento de los rail pads (ni tampoco del balasto), por lo que el fenómeno explicado anteriormente no se refleja fielmente en el modelo, lo cual puede considerarse una limitación del mismo.

## 2.5 EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

“El Método de los Elementos Finitos convierte a un buen ingeniero en genial, pero hace de un mal ingeniero un peligro”.

Robert D. Cook (Universidad de Wisconsin)

### 2.5.1 INTRODUCCIÓN

El Método de los Elementos Finitos [15] es el método de análisis numérico más extendido en el campo de la ingeniería: su uso da resultados bastante aproximados a la realidad, obtenidos en un tiempo razonable, y permite resolver problemas dinámicos considerando efectos no lineales.

Para la obtención de los resultados que se presentan en este trabajo había que recurrir a resolver un problema en el dominio del tiempo, que mostrase la evolución de ciertos parámetros que derivan de los desplazamientos nodales, obtenidos éstos paso a paso, y conseguidos en el resto del dominio mediante interpolación lineal.

Se presenta a continuación una explicación de cómo se resuelve un problema usando el MEF en el dominio del tiempo; para ello, se ha recurrido al paquete de herramientas de MATLAB SSIFiBo [16].

### 2.5.2 FORMULACIÓN DEL MEF EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Se comienza definiendo la ecuación de equilibrio del Método de los Elementos Finitos en el dominio del tiempo:

$$M\ddot{u}^n + C\dot{u}^n + Ku^n = f^n$$

donde  $M$ ,  $C$  y  $K$  son, respectivamente, las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema; los vectores  $u^n$ ,  $\dot{u}^n$  y  $\ddot{u}^n$  los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en los nodos del sistema, en ese orden, y  $f^n$  representa las cargas externas aplicadas, siendo las matrices características del sistema y por tanto constantes en el tiempo, y los vectores dependientes del paso de tiempo  $n$ .

La solución temporal de dichas ecuaciones se obtiene haciendo uso del algoritmo de Newmark GN22 [17] (generalizado de grado 2 y orden 2), por el cual se obtienen las siguientes expresiones:

$$\dot{u}^n = \dot{u}^{n-1} + [(1 - \delta)\ddot{u}^{n-1} + \delta\ddot{u}^n]\Delta t$$

$$u^n = u^{n-1} + \dot{u}^{n-1}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{u}^{n-1} + \alpha\ddot{u}^n\right]\Delta t^2$$

en las cuales se encuentran los parámetros  $\alpha$  y  $\delta$ , siendo éstos los parámetros de integración del método de Newmark. Si, además, se definen los siguientes parámetros:

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}$$

$$a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}$$

$$a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}$$

$$a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$$

$$a_4 = -1$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right)$$

$$a_6 = \Delta t(1 - \delta)$$

$$a_7 = \delta \Delta t$$

se puede reescribir las ecuaciones anteriores de la siguiente forma:

$$\ddot{u}^n = a_0(u^n - u^{n-1}) - a_2\dot{u}^{n-1} - a_3\ddot{u}^{n-1}$$

$$\dot{u}^n = \dot{u}^{n-1} + a_6\ddot{u}^{n-1} + a_7\ddot{u}^n$$

Llevando estas ecuaciones a la ecuación de equilibrio de sistema, se obtiene:

$$\begin{aligned} & (a_0M + a_1C + K)u^n \\ & = f^n + M(a_0u^{n-1} + a_2\dot{u}^{n-1} + a_3\ddot{u}^{n-1}) + C(a_1u^{n-1} + a_4\dot{u}^{n-1} + a_5\ddot{u}^{n-1}) \end{aligned}$$

Expresión que puede ser condensada mediante el uso de la matriz de rigidez dinámica  $D$ :

$$D = a_0M + a_1C + K$$

Si se agrupa la influencia de los pasos anteriores en el término independiente  $f^{n-1}$ , se llega a:

$$Du^n = f^n + f^{n-1}$$

De la que sólo queda obtener el valor de los desplazamientos en los nodos  $u^n$  para, posteriormente obtener las velocidades y aceleraciones, quedando resuelto el problema.

# 3 ANÁLISIS MODAL PARAMÉTRICO

## 3.1 INTRODUCCIÓN

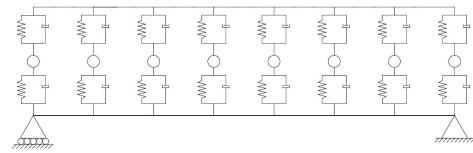
En primer lugar, y antes de proceder al estudio de los viaductos en vibración libre, se va a llevar a cabo un análisis modal, del cual se obtendrán resultados variando distintos parámetros que alteran los resultados de este análisis.

En este capítulo se van a presentar y analizar los siguientes resultados:



MODELO VIGA

3.2 Análisis modal



MODELO VIGA CONSIDERANDO LA VÍA

3.4 Análisis modal: influencia de las propiedades del balasto

3.5 Análisis modal: influencia de las propiedades de los rail pads

La longitud de los viaductos a estudiar, tal y como se recoge en la caracterización geométrica de los modelos, oscila en un rango de 12,5 a 25 metros, con un paso de longitud de 2,5 metros; esta tipología de viaductos (luces medias y cortas) se ve afectada por las sollicitaciones dinámicas más negativamente que viaductos de mayores longitudes.

Los estudios se han llevado a cabo con dos valores de amortiguamiento estructural: en primer lugar, con un amortiguamiento nulo, para después realizar los cálculos con un amortiguamiento estructural igual al 2%.

## 3.2 MODELO VIGA: ANÁLISIS MODAL

En primer lugar, se va a llevar a cabo un análisis modal del modelo viga, para obtener resultados con los que comparar los obtenidos posteriormente. Las frecuencias fundamentales de este modelo se van a obtener tanto de forma analítica (con la expresión de la frecuencia fundamental para una viga biapoyada) como de forma numérica, mediante el método de la carga impulsiva (se obtiene la respuesta de la viga ante esta carga, para después obtener la Función de Respuesta en Frecuencia, y extraer las frecuencias fundamentales).

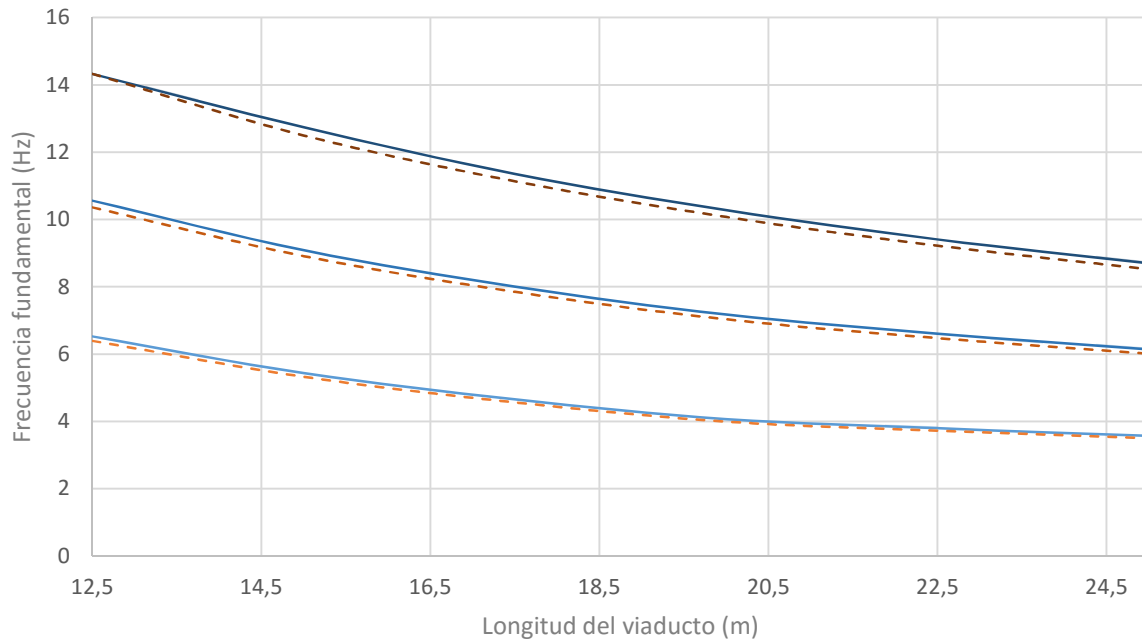
Para la obtención de los resultados analíticos se usa la expresión:

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{EIg}{m}}$$

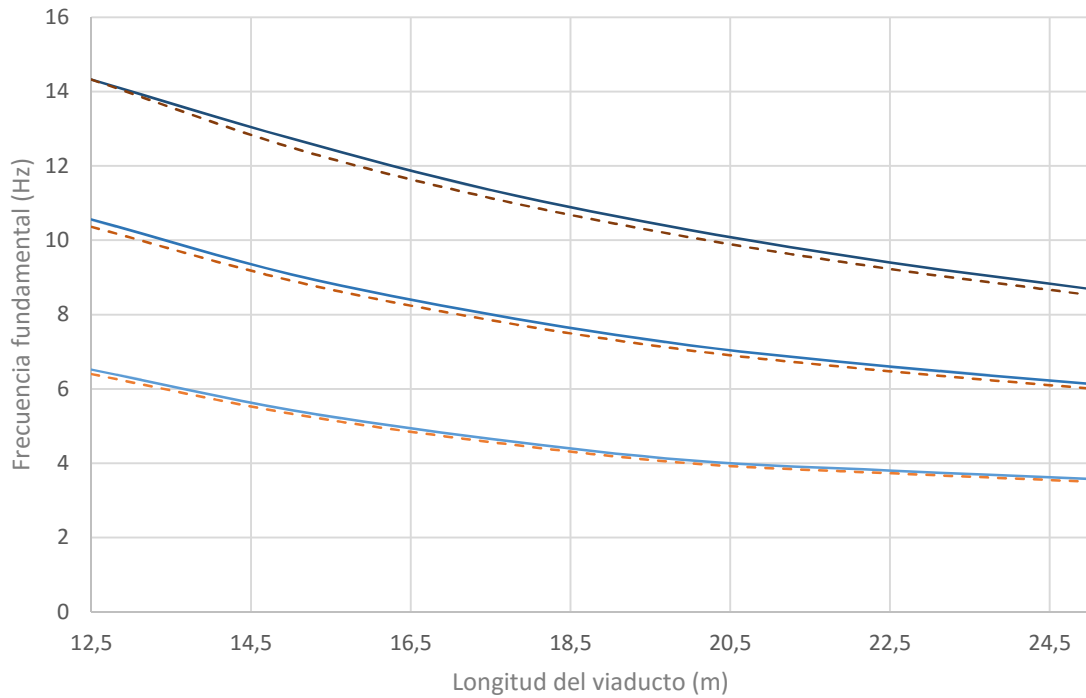
y si se considera amortiguamiento estructural, se usa la aproximación:

$$f^{am} = f \cdot \sqrt{1 - \rho^2}$$

Se presentan a continuación los resultados obtenidos del análisis modal para el modelo viga.



**Gráfica 1. Frecuencias fundamentales del modelo viga frente a longitud del viaducto, sin amortiguamiento estructural. Resultados analíticos (línea discontinua naranja) y numéricos (línea continua azul) en el límite inferior, límite intermedio y límite superior del Eurocódigo.**



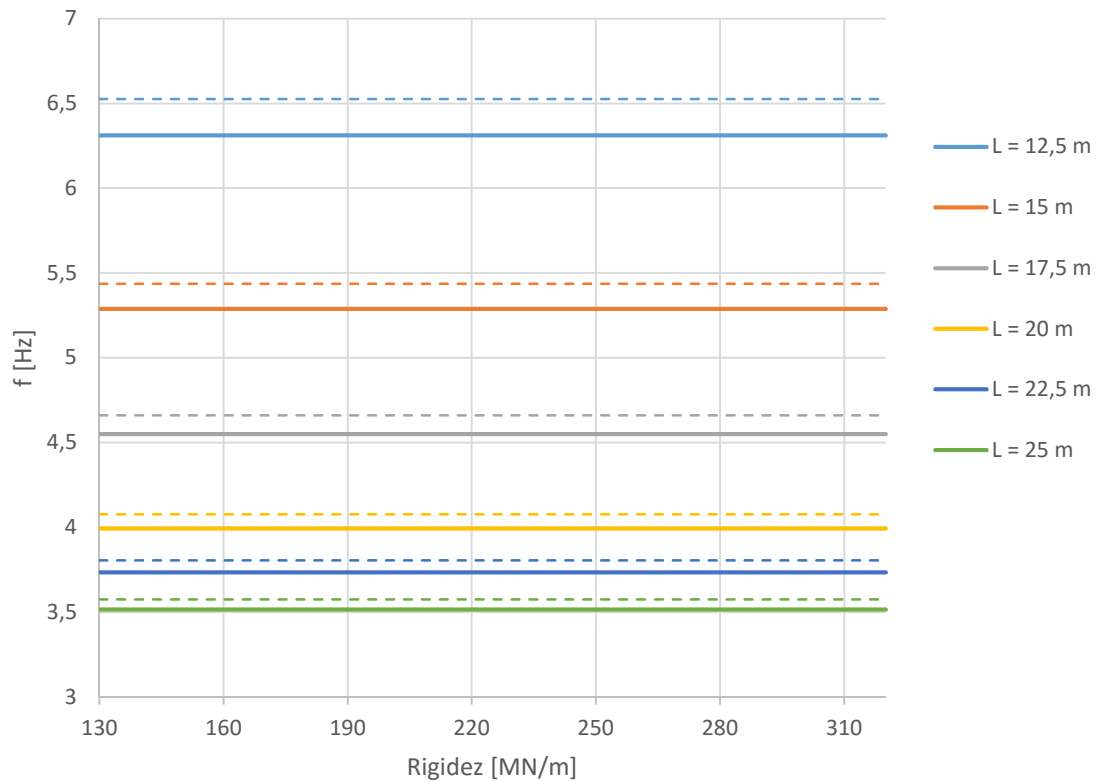
**Gráfica 2. Frecuencias fundamentales (Hz) del modelo viga frente a longitud del viaducto (m), considerando amortiguamiento estructural (2%). Resultados analíticos (línea discontinua naranja) y numéricos (línea continua azul) en el límite inferior, límite intermedio y límite superior del Eurocódigo.**

Las variaciones entre resultados sin amortiguamiento y con amortiguamiento del 2% son mínimas. En los siguientes apartados se van a usar para comprobar la validez de lo obtenido.

### 3.3 ANÁLISIS MODAL: INFLUENCIA DE LAS PROPIEDADES DEL BALASTO

En este apartado se van a obtener las frecuencias fundamentales del modelo viga considerando la vía variando la rigidez del balasto. Los parámetros usados para el análisis se recogen en 2.3.5.2, pero manteniendo la rigidez de los rail pads en 250 MN/m; así, los valores que se van a usar para la rigidez del balasto son 130, 260, 320 MN/m. Además, las frecuencias fundamentales obtenidas se van a comparar con los resultados numéricos del modelo viga presentados anteriormente.

### 3.3.1 LÍMITE INFERIOR DEL EUROCÓDIGO

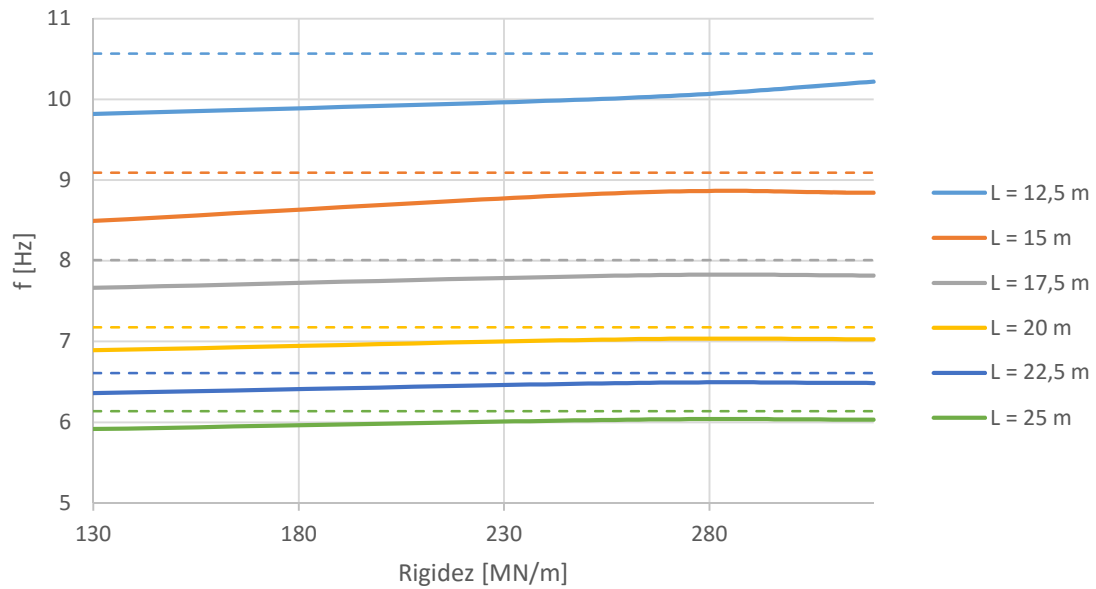


**Gráfica 3. Frecuencias fundamentales frente a rigidez del balasto en el modelo viga considerando la vía (línea gruesa continua), en el límite inferior del Eurocódigo. En línea punteada, resultados del análisis modal numérico para el modelo viga.**

Las curvas presentadas tienen valores constantes para todos los valores de rigidez, lo cual indica que en el límite inferior del Eurocódigo el aumento o disminución de la rigidez del balasto no afecta a los resultados. Las diferencias con el modelo viga van disminuyendo conforme aumenta la luz, aunque el hecho de que las curvas sean tan aplanadas hace que esa diferencia sea constante con el aumento de la rigidez de balasto.



### 3.3.2 LÍMITE INTERMEDIO DEL EUROCÓDIGO

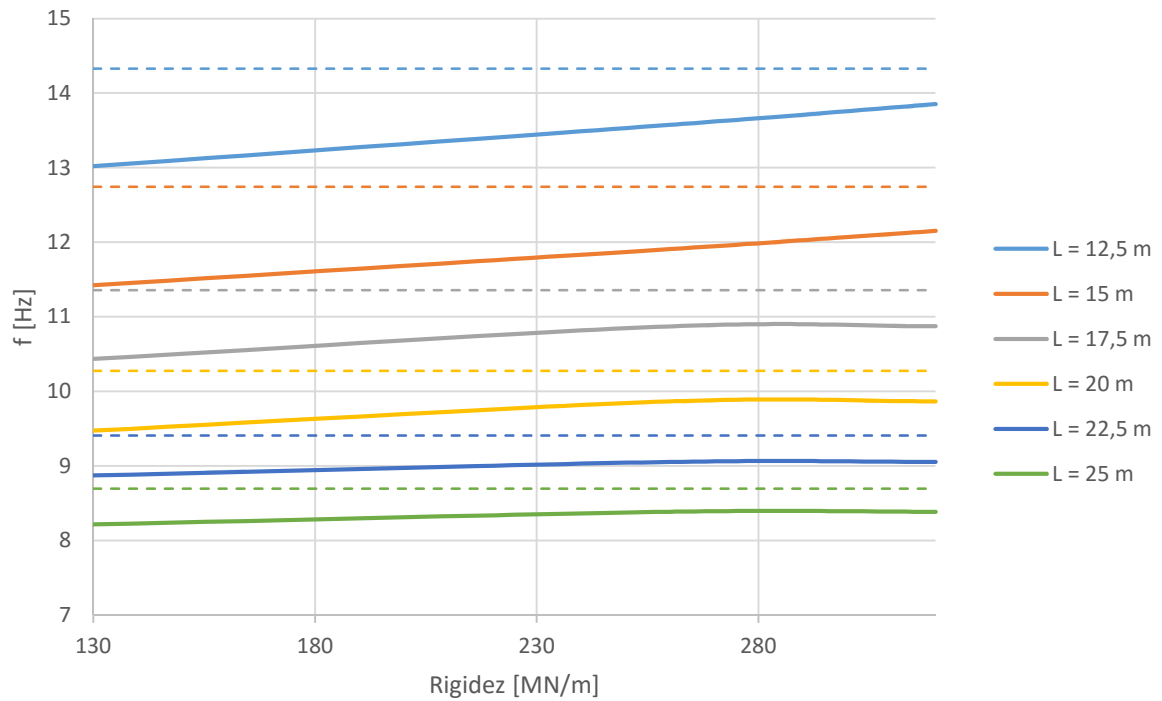


**Gráfica 4. Frecuencias fundamentales frente a rigidez del balasto en el modelo viga considerando la vía (línea gruesa continua), en el límite intermedio del Eurocódigo. En línea punteada, resultados del análisis modal numérico para el modelo viga.**

Los resultados para el límite intermedio del Eurocódigo empiezan a ser afectados por el cambio de rigidez del balasto: en luces de 12,5 y 15 metros, las curvas son menos aplanadas, mientras que en luces mayores que 17,5 metros los resultados son más constantes. En viaductos de 12,5 y 15 metros de luz (los más afectados), la variación entre la frecuencia fundamental entre el balasto más y menos rígido es de algo más de un 4%; este porcentaje disminuye hasta rondar el 2% en el resto de luces.

Además, se observa cómo a medida que aumenta la rigidez del balasto los resultados obtenidos con el modelo viga y el modelo viga considerando la vía se van aproximando, como es intuitivo, reduciendo las diferencias entre ambos modelos.

### 3.3.3 LÍMITE SUPERIOR DEL EUROCÓDIGO



**Gráfica 5. Frecuencias fundamentales frente a rigidez del balasto en el modelo viga considerando la vía (línea gruesa continua), en el límite superior del Eurocódigo. En línea punteada, resultados del análisis modal numérico para el modelo viga.**

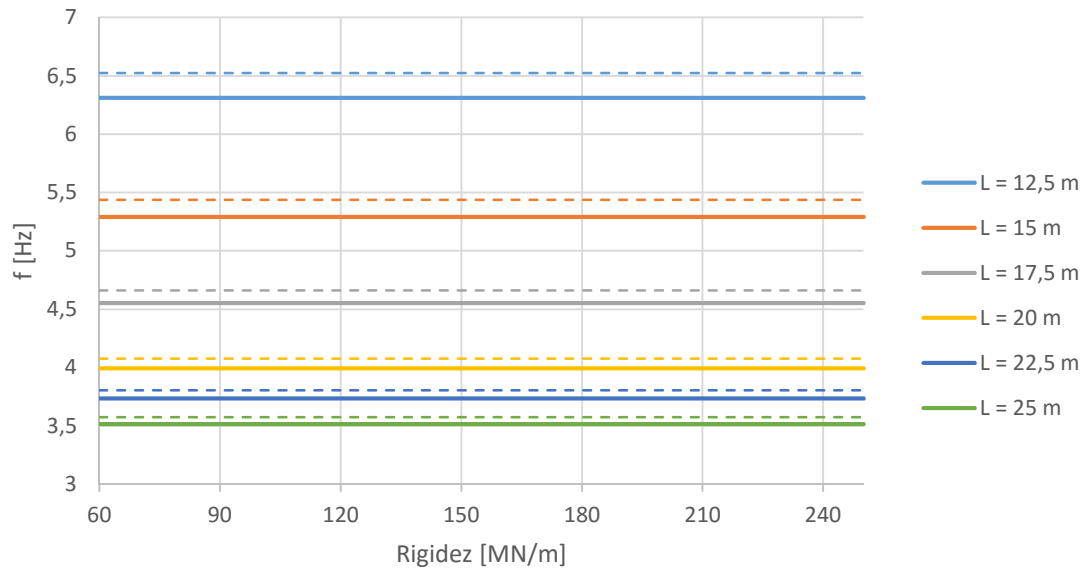
Observando estos resultados es evidente que la tendencia plana de las curvas cambia en el límite superior del Eurocódigo. Para viaductos de 12,5 y 15 metros, por ejemplo, existe una variación de la frecuencia fundamental entre los 130 y 320 MN/m de rigidez de balasto de casi un 6,4%.

Se vuelve a observar cómo la variación en la rigidez de balasto hace que las curvas se vayan aproximando al modelo viga. Llama la atención el efecto que tiene el balasto de baja rigidez sobre los resultados: la frecuencia fundamental de los viaductos con balasto de estas propiedades es similar a la de los viaductos de longitud inmediatamente superior.

### 3.4 ANÁLISIS MODAL: INFLUENCIA DE LAS PROPIEDADES DE LOS RAIL PADS

En este apartado se busca obtener resultados del análisis modal del modelo viga considerando la vía, para distintos valores de la rigidez de los rail pads. Todos los parámetros se mantienen constantes, como se indica en el apartado 2.3.5.2 (la rigidez de balasto se fija en 320 MN/m), excepto la rigidez de los rail pads, que va a variar entre los valores 60, 150 y 250 MN/m.

#### 3.4.1 LÍMITE INFERIOR DEL EUROCÓDIGO

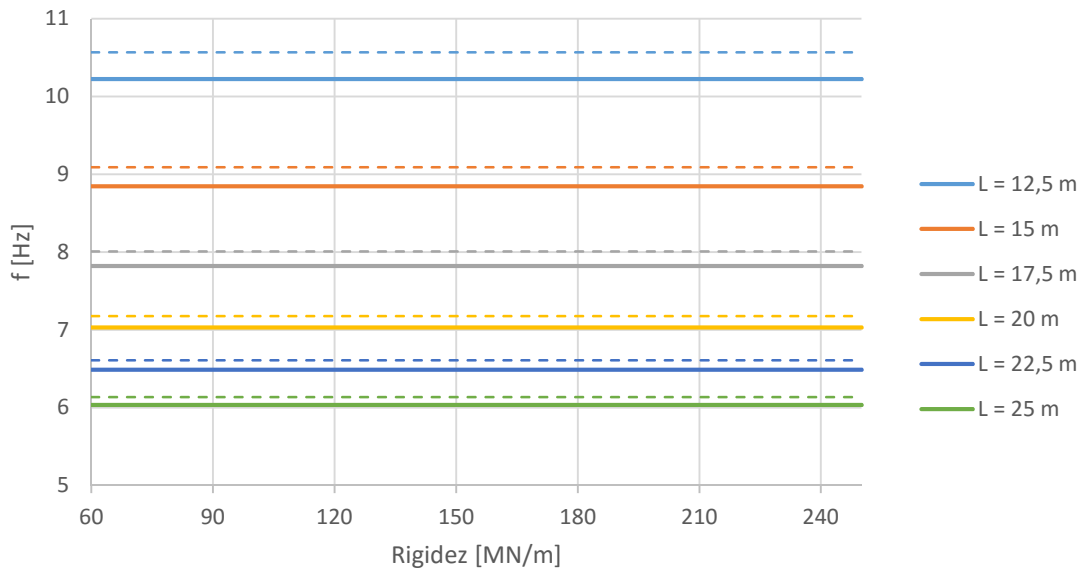


**Gráfica 6. Frecuencias fundamentales frente a rigidez de rail pads en el modelo viga considerando la vía (línea gruesa continua), en el límite inferior del Eurocódigo. En línea punteada, resultados del análisis modal numérico para el modelo viga.**

Las curvas que se presentan variando la rigidez de los rail pads son constantes con esta variación, es decir, la frecuencia fundamental del viaducto no cambia conforme aumenta la rigidez de las almohadillas bajo carril.

Los resultados del modelo viga son más próximos cuanto mayor es la luz del viaducto.

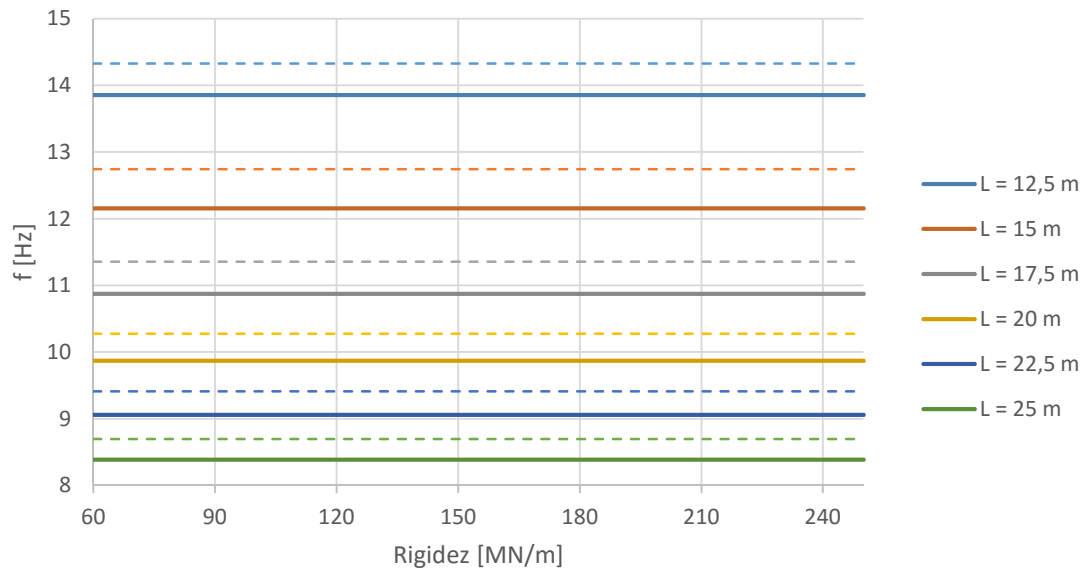
### 3.4.2 LÍMITE INTERMEDIO DEL EUROCÓDIGO



**Gráfica 7.** Frecuencias fundamentales frente a rigidez de rail pads en el modelo viga considerando la vía (línea gruesa continua), en el límite intermedio del Eurocódigo. En línea punteada, resultados del análisis modal numérico para el modelo viga.

Estos resultados son similares a los obtenidos en el límite inferior del Eurocódigo. La frecuencia fundamental del viaducto obtenida en el modelo viga considerando la vía es constante con la rigidez de los rail pads. Además, los resultados de los dos modelos son más próximos cuanto mayor es la luz salvada.

### 3.4.3 LÍMITE SUPERIOR DEL EUROCÓDIGO



**Gráfica 8.** Frecuencias fundamentales frente a rigidez de rail pads en el modelo viga considerando la vía (línea gruesa continua), en el límite superior del Eurocódigo. En línea punteada, resultados del análisis modal numérico para el modelo viga.

Aunque en el límite superior del Eurocódigo los resultados entre el modelo viga y el modelo considerando la vía no son tan próximos, se obtiene una conclusión similar a la obtenida en el límite inferior y límite intermedio: la variación en la rigidez de los rail pads no produce variaciones en las frecuencias fundamentales de los viaductos.

## 4 ANÁLISIS EN VIBRACIÓN LIBRE

---

### 4.1 INTRODUCCIÓN

**E**n este apartado se procede a evaluar la respuesta dinámica máxima producida en el punto medio del tablero del viaducto, cuando se produce sobre el carril el paso de una carga puntual a una serie de velocidades determinadas. El hecho de escoger una carga puntual se destina a obtener una primera aproximación de los resultados que se obtendrían ante la simulación del paso de un tren de cargas completo; si se ha escogido el punto medio del tablero es debido a que, como es intuitivo, recogerá los desplazamientos más desfavorables de todo el tablero.

Se van a estudiar puentes de las mismas características que en el apartado anterior: las luces abarcan desde 12,5 hasta 25 metros, con un paso entre ellas de 2,5 metros. La velocidad de la carga puntual llega a un máximo de 360 km/h (100 m/s), que es aproximadamente la velocidad máxima alcanzada en líneas de alta velocidad.

Se pueden diferenciar dos comportamientos diferentes en el viaducto tras el paso de la carga móvil por él:

- En primer lugar, cuando la carga se encuentra dentro del propio puente, éste se encuentra en vibración forzada. Los desplazamientos máximos se producen en esta etapa; sin embargo, los resultados de estos desplazamientos no son de interés en este apartado.
- En segundo lugar, una vez la carga ha abandonado el puente, éste se encuentra en estado de vibración libre. El estudio se centra en este tipo de vibración.

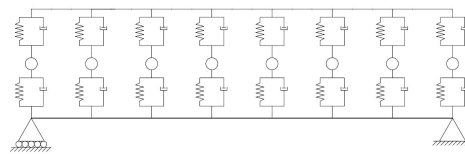
En el estudio del viaducto en vibración libre, se va a intentar determinar a qué velocidades de paso de la carga móvil se alcanzan valores mínimos en el desplazamiento del tablero. Estas velocidades, para las cuales la amplitud de la respuesta del viaducto se puede considerar nula, se denominan velocidades de cancelación, y son de gran relevancia en el diseño de puentes y vías ferroviarios, dado que se busca limitar las vibraciones para una mejor conservación de la infraestructura.

Este capítulo está estructurado de forma similar al anterior:



MODELO VIGA

4.3 Obtención de las velocidades de cancelación



MODELO VIGA CONSIDERANDO LA VÍA

4.4 Obtención de las velocidades de cancelación: influencia de las propiedades del balasto

4.5 Obtención de las velocidades de cancelación: influencia de las propiedades de los rail pads

#### 4.1.1 VELOCIDADES DE RESONANCIA Y CANCELACIÓN

En la introducción de este documento se ha explicado de manera muy breve en qué consiste el fenómeno de la resonancia, indicando que se produce cuando la frecuencia a la que actúan las cargas coinciden con las frecuencias naturales de la estructura.

Para explicar correctamente el objetivo principal de este capítulo, es necesario analizar el fenómeno vibratorio de vigas simplemente apoyadas bajo la acción de cargas puntuales móviles [6]. Antes, se ha de definir el parámetro

$$K = \frac{V\pi}{L\omega_0},$$

como la velocidad adimensional asociada al modo fundamental de vibración de la estructura, siendo  $V$  la velocidad de la carga [m/s],  $L$  la longitud de la viga [m],  $\omega_0$  la frecuencia fundamental de la estructura [rad/s],  $K$  adimensional.

Como se ha indicado anteriormente, el período de vibración forzada de la estructura no es de interés en este estudio (o al menos no es de más interés que el de proporcionar las condiciones iniciales para el período de vibración libre). El período de vibración libre se da a partir de  $t=L/V$  (es decir, a partir de que la carga haya abandonado la viga), y viene gobernado por la ecuación

$$\ddot{\xi}(t) + \omega_0^2 \xi(t) = 0, \text{ para } t > \frac{L}{V}$$

Sabiendo que la respuesta de la estructura ante carga estática es

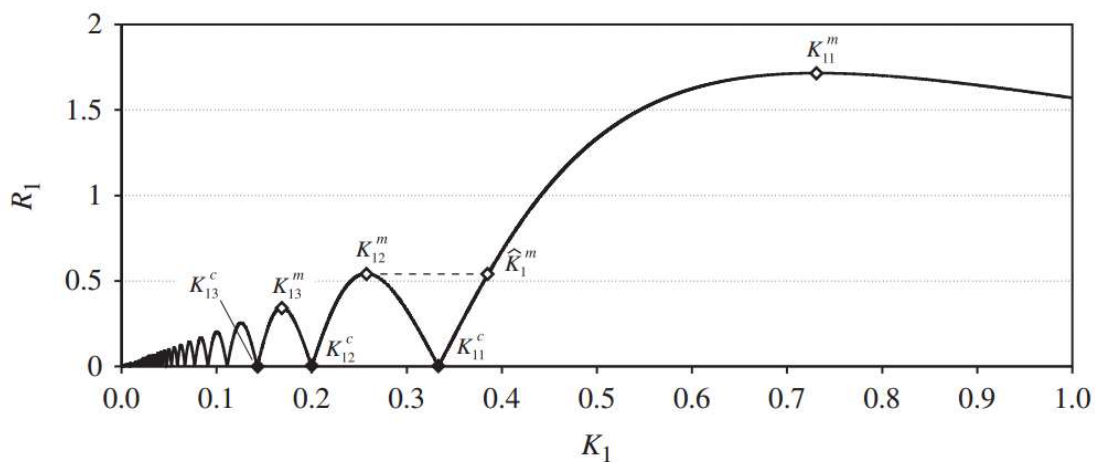
$$\xi_{est} = \frac{2P}{mL\omega_0^2}$$

(siendo  $m$  la masa lineal de la viga [kg/m],  $P$  la carga [N],  $L$  la longitud de la viga [m] y  $\omega_0$  la frecuencia fundamental de la misma [rad/s]), y dividiendo la amplitud de la solución de la ecuación de vibración libre por este valor, puede definirse la amplitud adimensional en vibración libre como

$$R = \frac{K \cdot \sqrt{2}}{1 - K^2} \cdot \sqrt{1 - \cos \frac{\pi}{K}}$$

siendo tanto  $R$  como  $K$  parámetros adimensionales.

La representación de esta ecuación, dependiente de la velocidad adimensional  $K$  es



**Fig. 13 Amplitud frente a velocidad de la carga puntual. Fuente: Martínez Rodrigo et al. [6]**

Es decir, conforme varía la velocidad de aplicación de la carga puntual, se suceden velocidades a las cuales la amplitud de la vibración libre alcanza un máximo, y velocidades a las cuales esta amplitud se hace nula.

Estas últimas velocidades se denominan velocidades de cancelación, y son de gran interés en el diseño de viaductos ferroviarios, debida a la amplia problemática que genera la vibración libre estas estructuras sobre ellas mismas y sobre la vía.

El objetivo principal de este capítulo es, por tanto, la obtención de los valores de dichas velocidades.

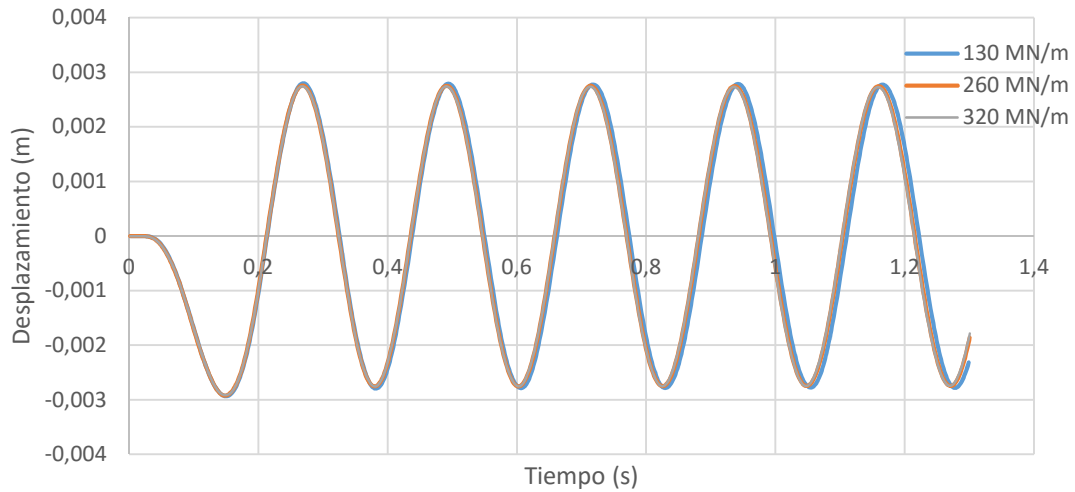
## 4.2 EXPLICACIÓN DEL MÉTODO

En este apartado se explica cómo se han obtenido las velocidades de cancelación de los distintos modelos.

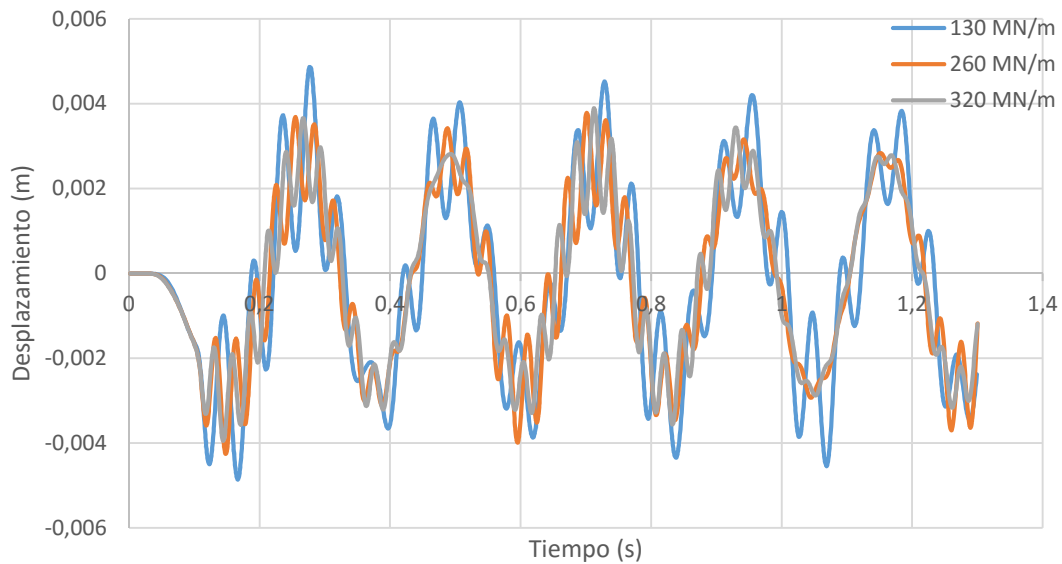


En primer lugar, se obtienen los resultados de hacer pasar una carga puntual por la viga o por el carril (según corresponda al modelo), a distintas velocidades. Estas velocidades deben constituir un barrido lo suficientemente denso (por ejemplo, probar a barrer con un paso de velocidad de 50 km/h difícilmente resultaría en la obtención de las velocidades de cancelación buscadas); el barrido realizado para la obtención de los resultados que se presentan se realizó con un paso de velocidad medio de 4 km/h.

Las respuestas en vibración forzada y libre de los viaductos resultan en gráficas como las siguientes:



**Gráfica 9.** Respuesta de viaducto de 17,5 m del modelo viga considerando la vía ante carga puntual circulando a 250 km/h en el límite inferior del Eurocódigo, para distintos valores de la rigidez del balasto.



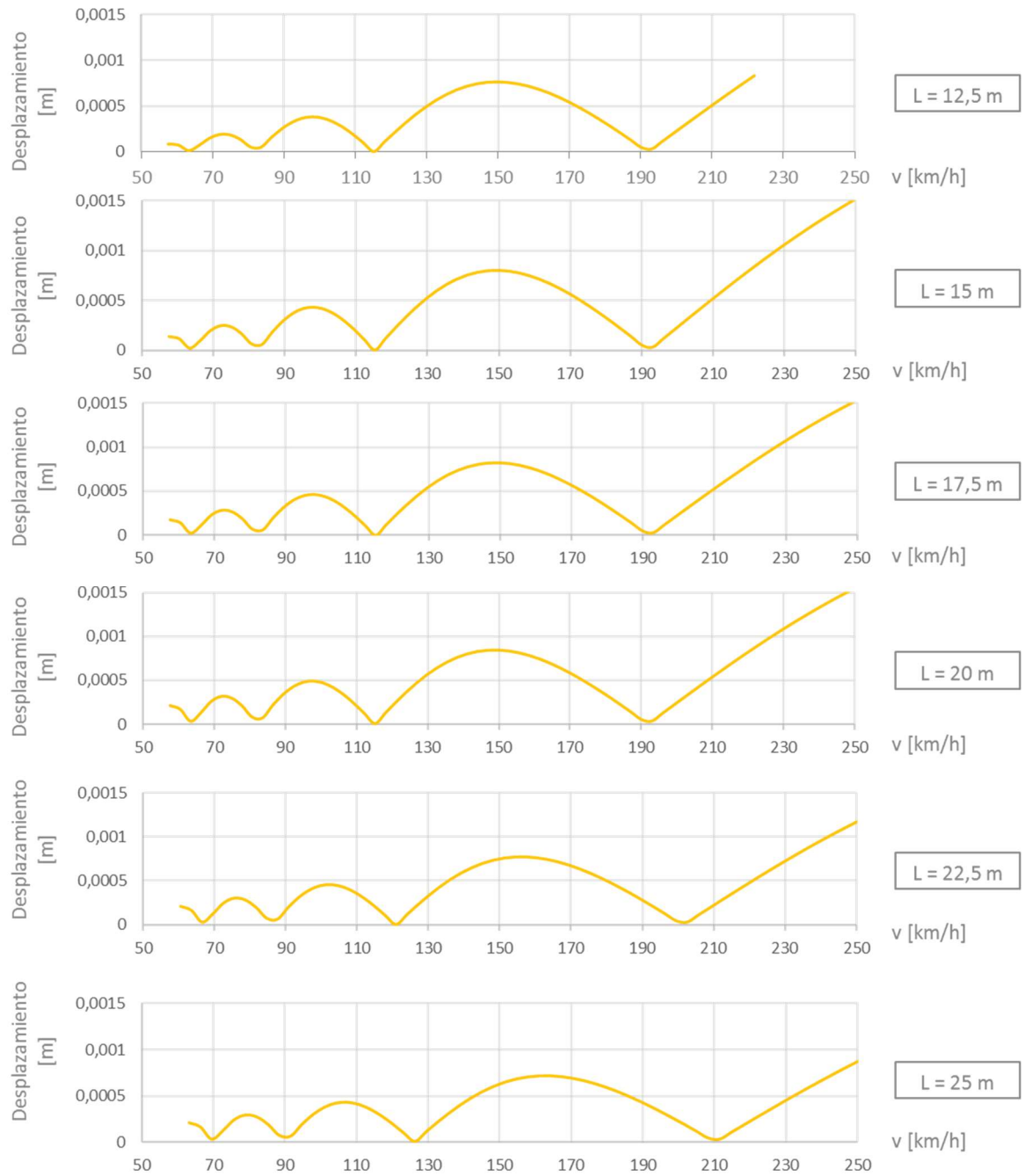
**Gráfica 10.** Respuesta del carril en viaducto de 17,5 m del modelo viga considerando la vía ante carga puntual circulando a 250 km/h en el límite inferior del Eurocódigo, para distintos valores de la rigidez del balasto.

Una vez obtenidos los resultados para todas las velocidades del barrido, se busca la amplitud máxima en vibración libre (se usó el código de MATLAB `viv_libre.m`, presentado en el Anexo) para cada velocidad; estos valores se representan frente a las velocidades de circulación de la carga, obteniendo gráficas de las que se obtienen directamente las velocidades de cancelación del viaducto.

### 4.3 VELOCIDADES DE CANCELACIÓN EN EL MODELO VIGA

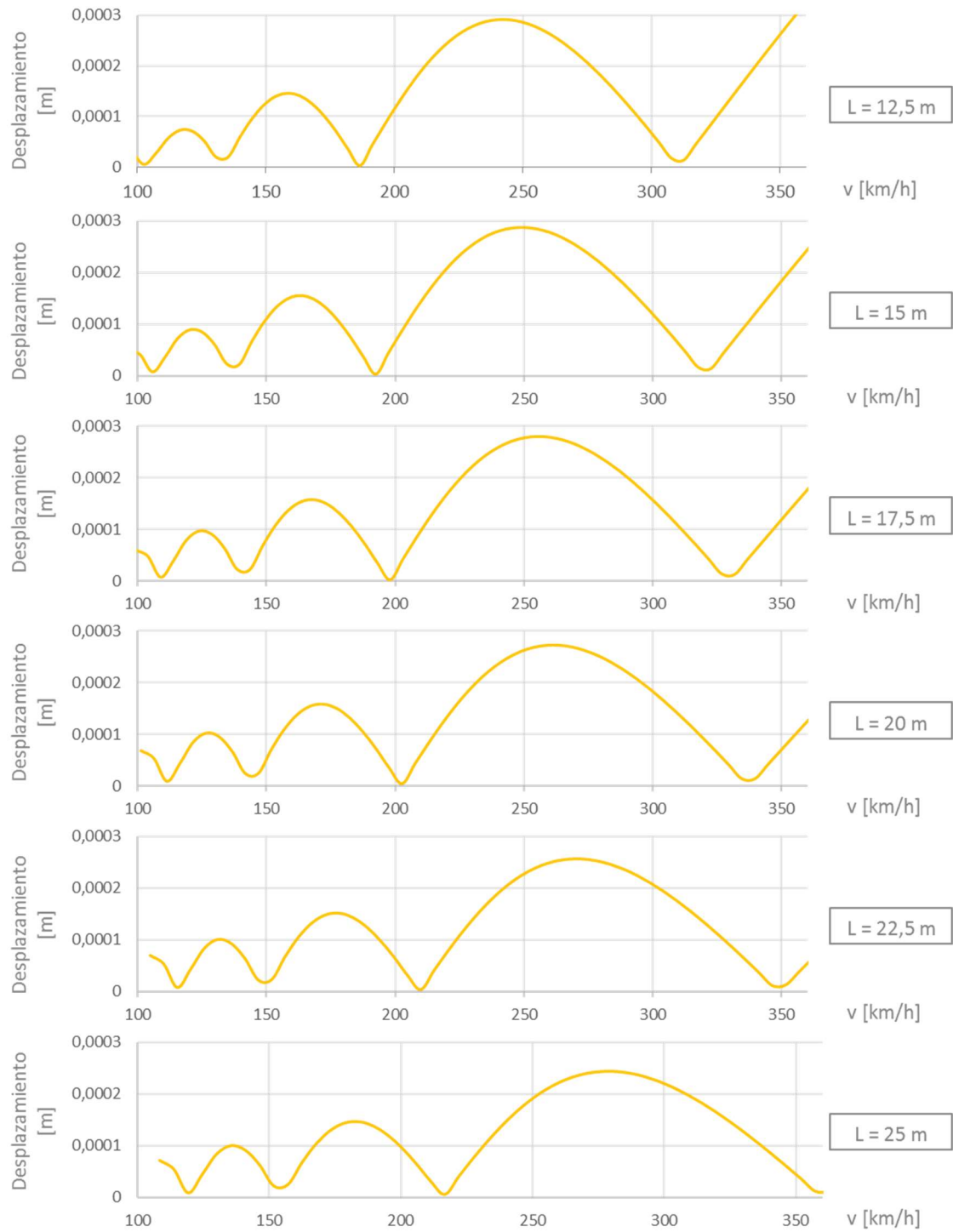
Una vez obtenida las amplitudes en el centro del vano que conforman los viaductos, se va a representar este valor (expresado en metros) frente a la velocidad de circulación de la carga puntual (expresada en kilómetros por hora), en 6 gráficas por cada límite del Eurocódigo (para cada una de las longitudes estudiadas en este trabajo, 12.5, 15, 17.5, 20, 22.5 y 25 metros). El hecho de representar todas las gráficas juntas se destina a comparar los valores de las velocidades de cancelación, y poder analizar fácilmente cómo varían estos valores para cada una de las longitudes de puente.

### 4.3.1 LÍMITE INFERIOR DEL EUROCÓDIGO



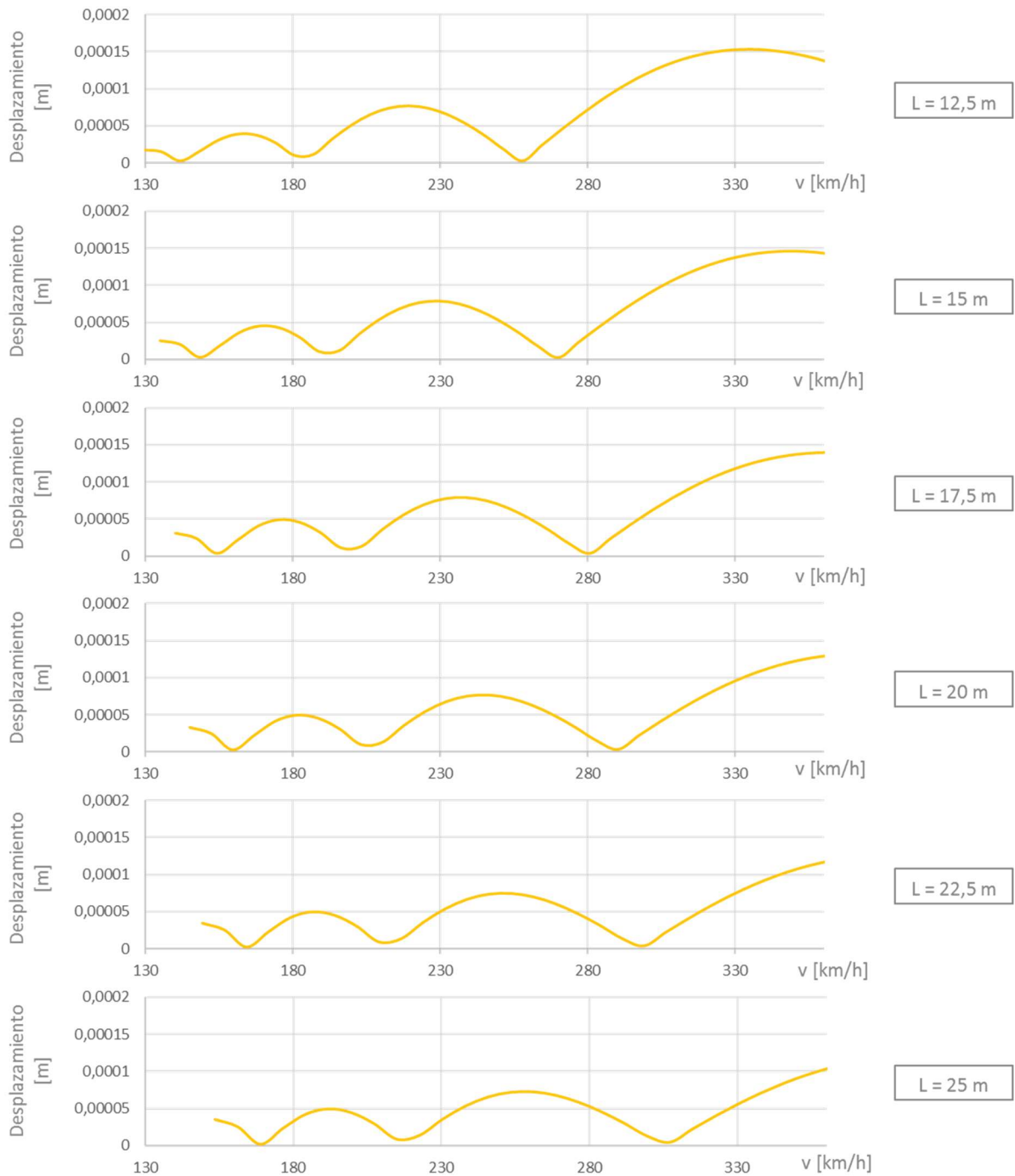
Gráfica 11. Máxima amplitud en vibración libre (m) en el modelo viga frente a velocidad (km/h), en viaductos de 12,5 – 25 metros (de arriba abajo), en el límite inferior del Eurocódigo.

### 4.3.2 LÍMITE INTERMEDIO DEL EUROCÓDIGO



Gráfica 12. Máxima amplitud en vibración libre (m) en el modelo viga frente a velocidad (km/h), en viaductos de 12,5 – 25 metros (de arriba abajo), en el límite intermedio del Eurocódigo.

### 4.3.3 LÍMITE SUPERIOR DEL EUROCÓDIGO



Gráfica 13. Máxima amplitud en vibración libre (m) en el modelo viga frente a velocidad (km/h), en viaductos de 12,5 – 25 metros (de arriba abajo), en el límite superior del Eurocódigo.

#### 4.3.4 ANÁLISIS DE RESULTADOS

En las gráficas representadas anteriormente, la respuesta dinámica del viaducto varía en tramos parabólicos frente a la velocidad de la carga puntual, tal y como se explicó en la introducción de este capítulo.

Para los tres límites de frecuencias definidos, se puede extraer una conclusión común: las velocidades de cancelación en la viga crecen conforme aumenta la luz de la misma. Además, las variaciones de estos valores para distintas luces son mucho menos marcadas en el límite inferior del Eurocódigo: para luces de 12,5 a 20 metros, las velocidades de cancelación son prácticamente constantes y para 22,5 y 25 metros la variación es baja. Sin embargo, en el límite superior del Eurocódigo sí existe una tendencia más clara de las velocidades de cancelación a aumentar conforme aumenta la luz.

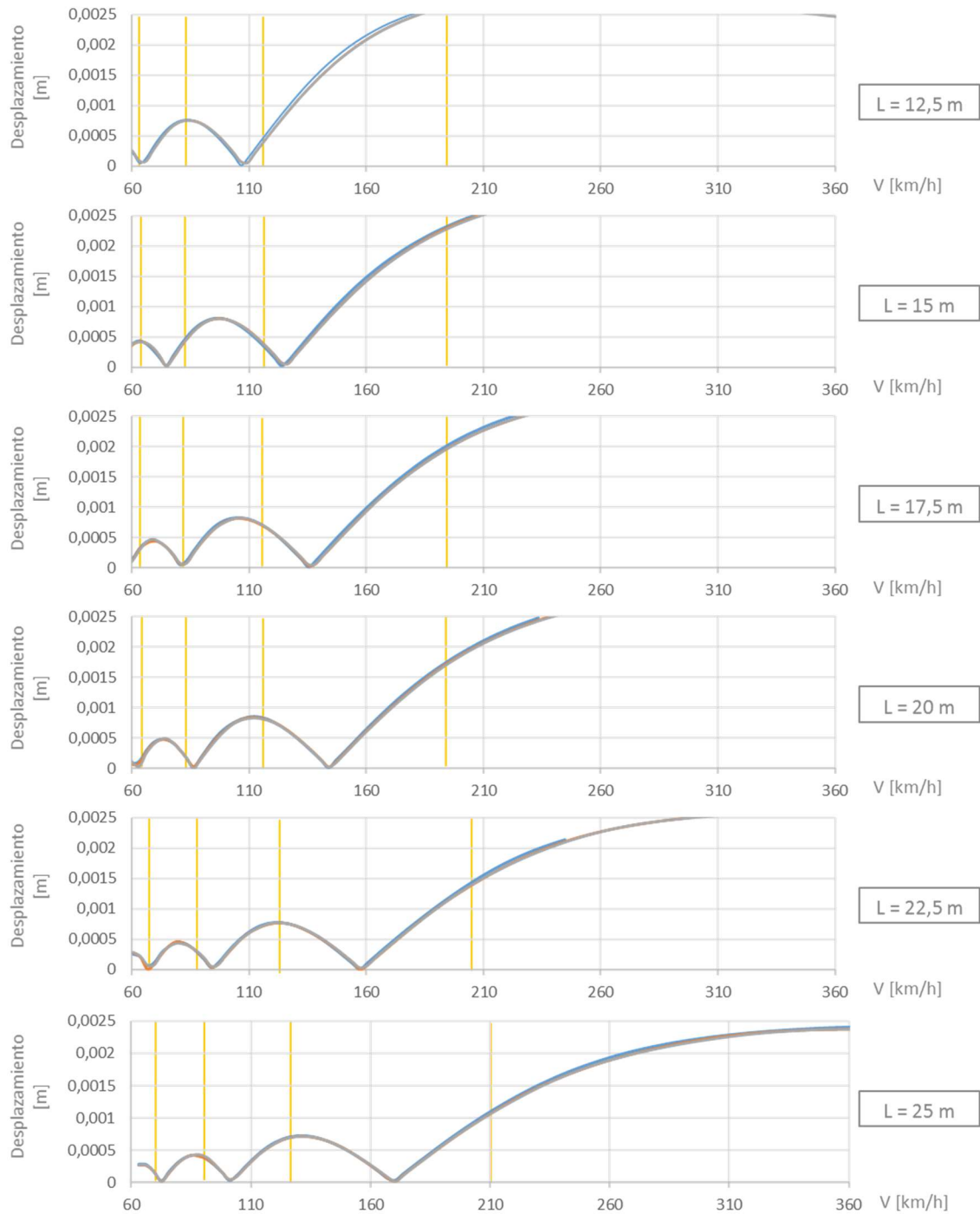
En todas las gráficas obtenidas se observa cómo la segunda cancelación no es tan clara como la primera y la tercera (la amplitud no llega a alcanzar el valor nulo); esto es probablemente debido a que la densidad del barrido de velocidades no ha sido lo suficientemente alta, y no resta validez a los resultados.

#### 4.4 OBTENCIÓN DE LAS VELOCIDADES DE CANCELACIÓN: INFLUENCIA DE LAS PROPIEDADES DEL BALASTO

Una vez se han obtenido los resultados de las velocidades de cancelación del modelo viga, se procede a analizar la influencia de los parámetros de vía escogidos, recurriendo para ello al modelo viga con vía implementada. En este capítulo se van a obtener las velocidades de cancelación de dicho modelo para varios valores de la rigidez del balasto estudiando así como varían.

En las siguientes gráficas se muestran de manera similar a la anterior los resultados en vibración libre para distintos valores de rigidez de balasto, representando en el eje vertical la amplitud en vibración libre (m) frente a la velocidad de circulación de la carga puntual (km/h). Además, las líneas verticales amarillas indican un valor de velocidad de cancelación en el modelo viga; añadiéndolas se busca comparar los resultados obtenidos con el modelo anterior.

#### 4.4.1 LÍMITE INFERIOR DEL EUROCÓDIGO



**Gráfica 14.** Máxima amplitud en vibración libre (m) en el modelo viga considerando la vía frente a velocidad (km/h), en viaductos de 12,5 – 25 metros (de arriba abajo), en el límite inferior del Eurocódigo. Rigidez de balasto  $K = 130$  MN/m (línea azul),  $K = 260$  MN/m (línea naranja),  $K = 320$  MN/m (línea gris). Las líneas verticales amarillas indican las velocidades de cancelación del modelo viga en límite inferior del EC (extraídas de resultados de Gráfica 11).

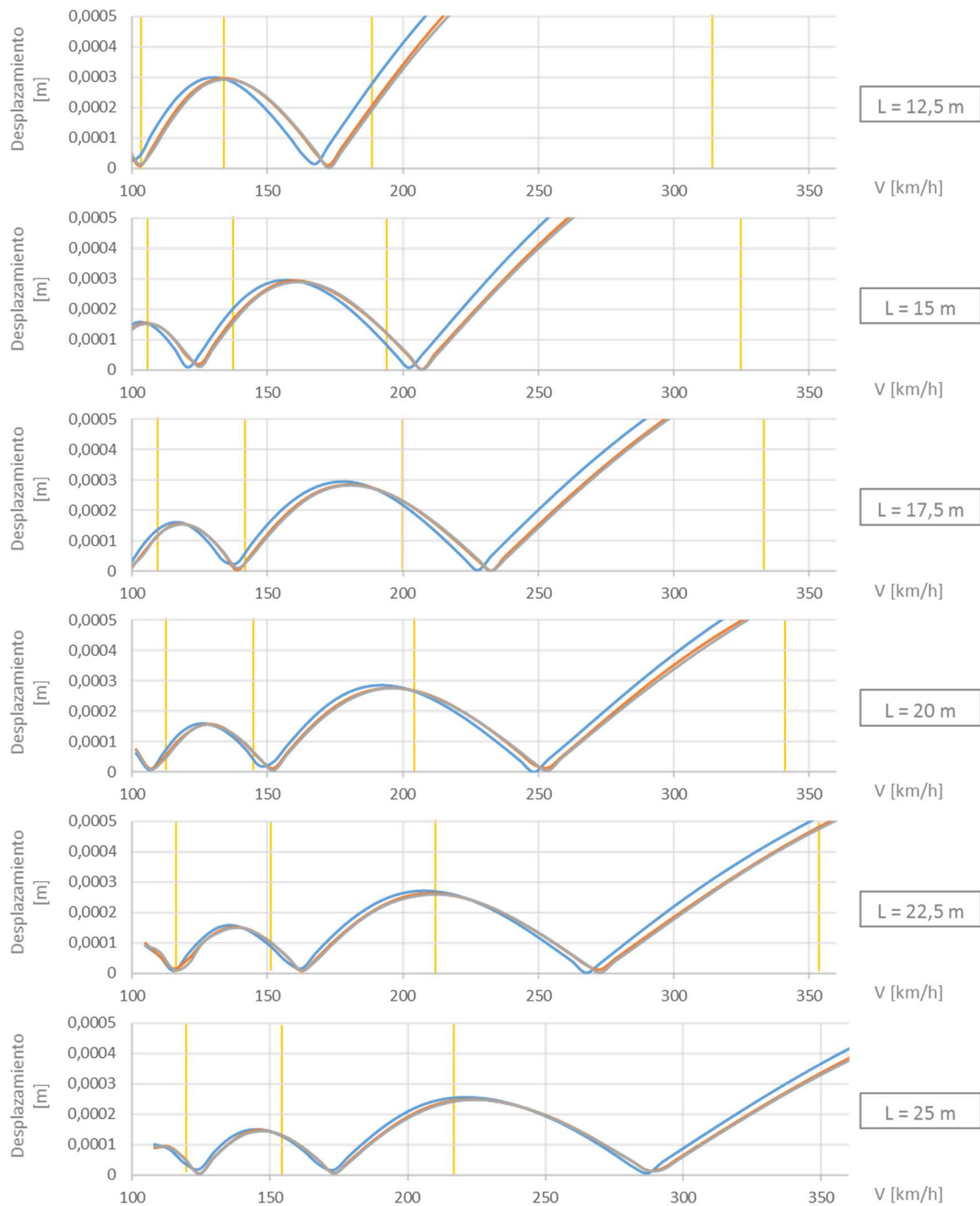


A fin de poder facilitar la comparativa entre ambos modelos, se presentan a continuación las frecuencias naturales de los puentes con vía y del modelo viga analizados en la gráfica anterior.

		K = 130 MN/m	K = 220 MN/m	K = 320 MN/m	Viga
Rango Inferior del Eurocódigo ( $f_{1,000}$ )	L = 12,5 m	6,3121	6,3121	6,3121	6,5247
	L = 15 m	5,2893	5,2893	5,2893	5,4373
	L = 17,5 m	4,5514	4,5514	4,5514	4,6605
	L = 20 m	3,9939	3,9939	3,9939	4,0780
	L = 22,5 m	3,5164	3,5164	3,5164	3,8057
	L = 25 m	3,5168	3,5168	3,5168	3,5756

**Tabla 1. Frecuencias fundamentales [Hz] de los puentes analizados en la Gráfica 14**

#### 4.4.2 LÍMITE INTERMEDIO DEL EUROCÓDIGO



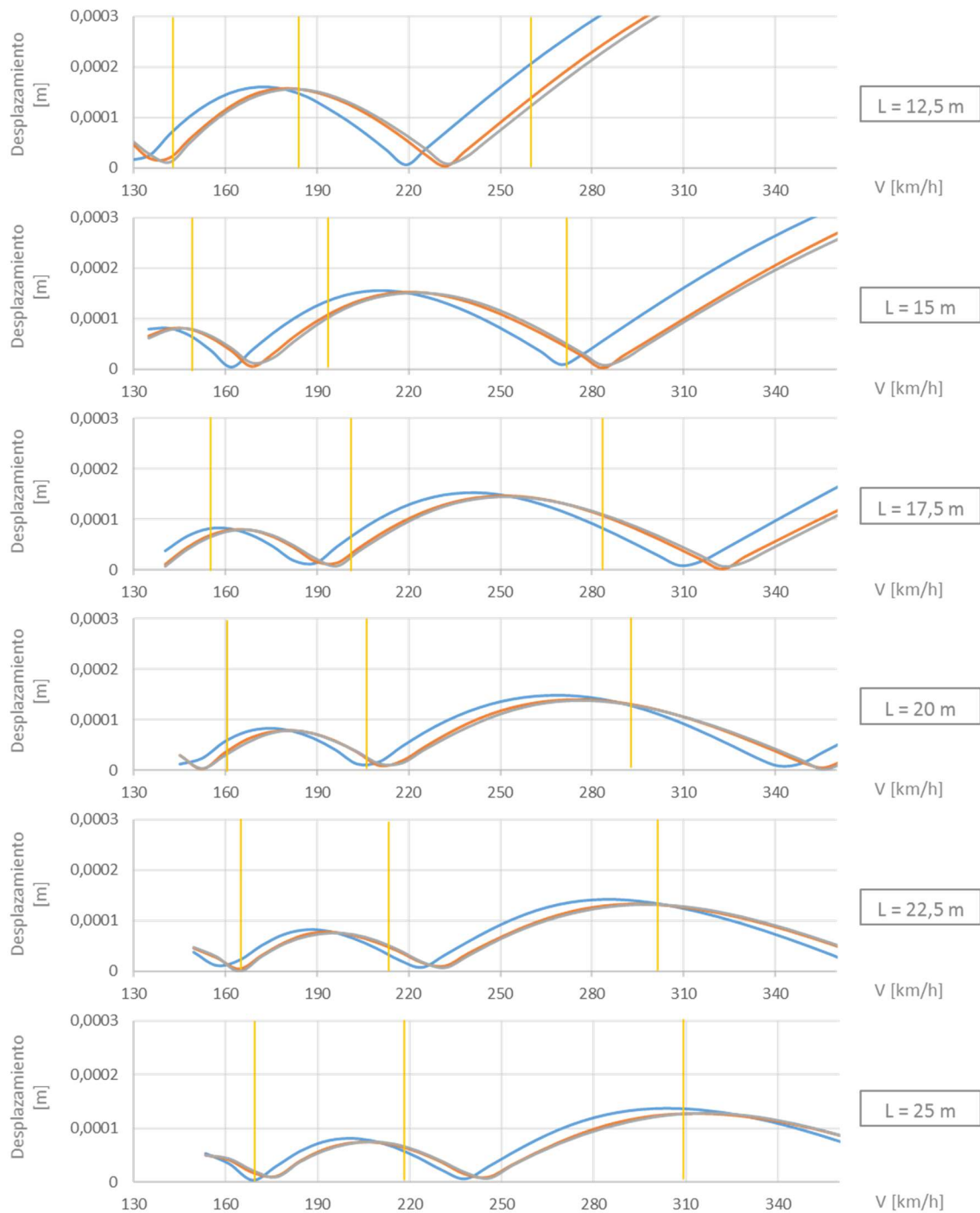
Gráfica 15. Máxima amplitud en vibración libre (m) en el modelo viga considerando la vía frente a velocidad (km/h), en viaductos de 12,5 – 25 metros (de arriba abajo), en el límite intermedio del Eurocódigo. Rigidez de balasto  $K = 130 \text{ MN/m}$  (línea azul),  $K = 260 \text{ MN/m}$  (línea naranja),  $K = 320 \text{ MN/m}$  (línea gris). Las líneas verticales amarillas indican las velocidades de cancelación del modelo viga en límite intermedio del EC (extraídas de resultados de Gráfica 12).

Para permitir una mayor facilidad a la hora de comparar los dos modelos, se presentan a continuación las frecuencias naturales de los puentes con vía y modelo viga analizadas en la gráfica anterior.

		K = 130 MN/m	K = 220 MN/m	K = 320 MN/m	Viga
Rango Intermedio del Eurocódigo ( $f_{1,050}$ )	L = 12,5 m	9,82	10,0204	10,2208	10,5652
	L = 15 m	8,4963	8,8431	8,8431	9,0904
	L = 17,5 m	7,6672	7,8206	7,8206	8,0081
	L = 20 m	6,8914	7,0293	7,0293	7,1771
	L = 22,5 m	6,3598	6,487	6,487	6,6077
	L = 25 m	5,9169	6,0353	6,0353	6,1361

**Tabla 2. Frecuencias fundamentales [Hz] de los puentes analizados en la Gráfica 15**

#### 4.4.3 LÍMITE SUPERIOR DEL EUROCÓDIGO



**Gráfica 16. Máxima amplitud en vibración libre (m) en el modelo viga considerando la vía frente a velocidad (km/h), en viaductos de 12,5 – 25 metros (de arriba abajo), en el límite superior del Eurocódigo. Rigidez de balasto  $K = 130 \text{ MN/m}$  (línea azul),  $K = 260 \text{ MN/m}$  (línea naranja),  $K = 320 \text{ MN/m}$  (línea gris). Las líneas verticales amarillas indican las velocidades de cancelación del modelo viga en límite superior del EC (extraídas de resultados de Gráfica 13).**

Buscando la facilidad en la comparativa de modelos de la gráfica anterior, se presentan a continuación las frecuencias fundamentales de los puentes con vía y modelo viga estudiados en dicha gráfica.

		K = 130 MN/m	K = 220 MN/m	K = 320 MN/m	Viga
Rango Superior del Eurocódigo ( $f_{1,100}$ )	L = 12,5 m	13,0214	13,5755	13,8525	14,6056
	L = 15 m	11,4245	11,9107	12,1538	12,7436
	L = 17,5 m	10,4374	10,8723	10,8723	11,3557
	L = 20 m	9,4726	9,8673	9,8673	10,2763
	L = 22,5 m	8,8755	9,0567	9,0567	9,4097
	L = 25 m	8,2183	8,386	8,386	8,6966

**Tabla 3. Frecuencias fundamentales [Hz] de los puentes analizados en la Gráfica 16**

#### 4.4.4 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Antes de obtener los resultados del análisis en vibración libre, y observando lo obtenido en el análisis modal variando las propiedades del balasto, podía resultar predecible el hecho de que generalmente el comportamiento de viaductos con balasto de 130 MN/m de rigidez iba a diferir de viaductos con balasto de 260 y 320 MN/m de rigidez; las frecuencias fundamentales obtenidas así lo indicaban. Además, también resultaba intuitivo que los viaductos con balasto menos rígido tuviesen mayores desplazamientos que viaductos con valores de rigidez más rígido. Estas dos tendencias se han confirmado por lo general en los análisis en vibración libre realizados en este apartado.

En los viaductos en el límite inferior del Eurocódigo, las diferencias en el comportamiento dinámico para viaductos con distintos valores de rigidez de la capa de balasto no son demasiado destacables. Se trata de puentes con una rigidez a flexión baja, por lo cual las variaciones estudiadas no toman un papel importante. Sin embargo, observando las gráficas puede observarse cómo, aunque mínimamente, los desplazamientos disminuyen conforme aumenta la rigidez del balasto.

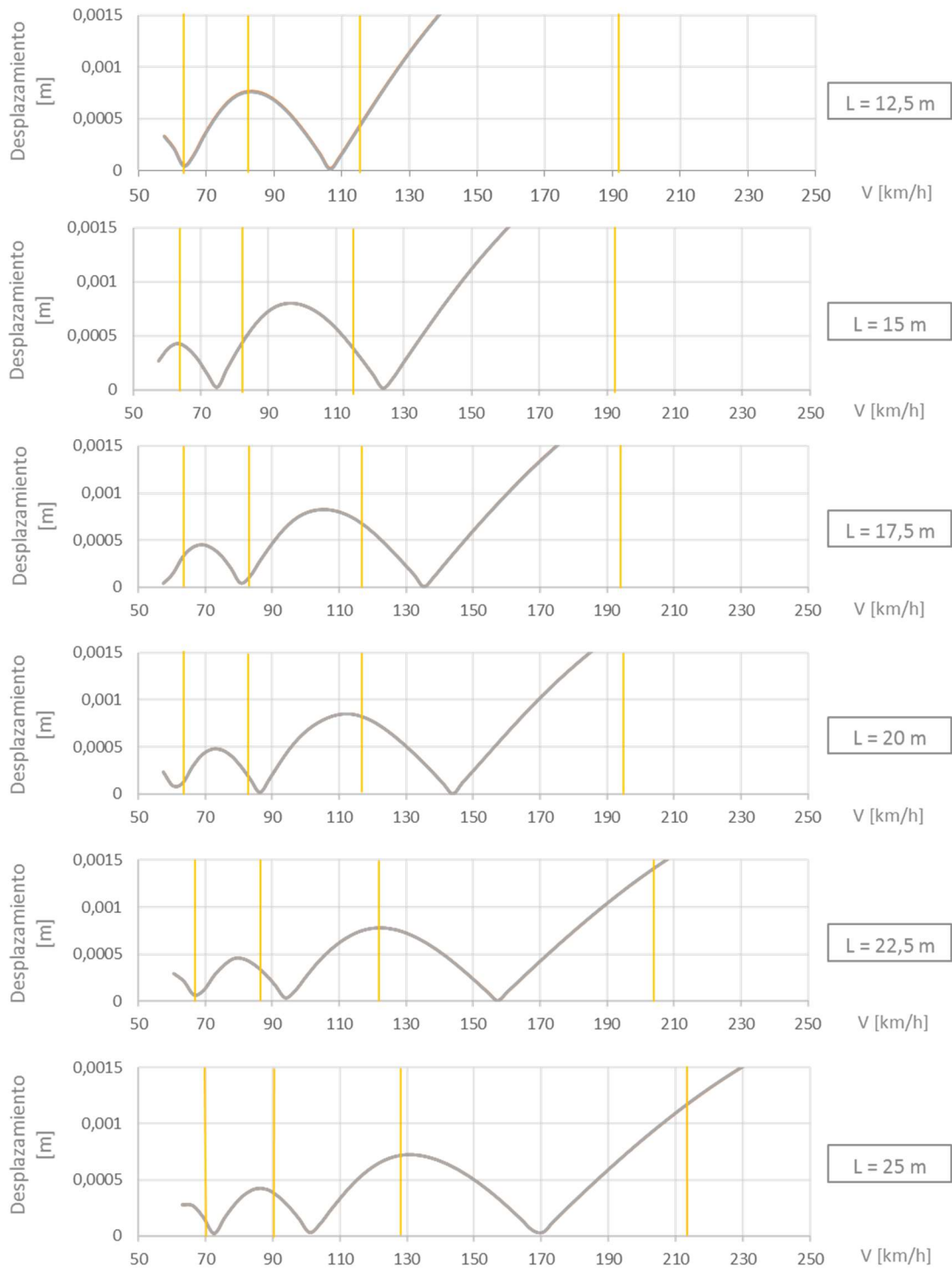
Las diferencias sí se observan claramente en los límites intermedio y superior del Eurocódigo. En estos viaductos, con mayor rigidez a flexión, las variaciones en las propiedades de la capa de balasto determinan de forma evidente los resultados: los valores más bajos en la rigidez del balasto conllevan claramente mayores desplazamientos en vibración libre. Además, las velocidades de cancelación también se ven notoriamente afectadas, siendo los valores de éstas superiores conforme aumenta la rigidez del balasto.

En relación a la comparativa con el modelo viga, aunque existen velocidades de cancelación iguales o muy próximas en ambos modelos, es difícil obtener conclusiones sobre esta relación; cuando se consideran los parámetros de vía generalmente se obtienen menos velocidades de cancelación (en ningún caso con este modelo se han obtenido cuatro velocidades, lo cual es algo común en el modelo viga). Ambos modelos comparten, en cambio, la tendencia clara del aumento del valor de las velocidades de cancelación conforme aumenta la luz del viaducto.

## 4.5 OBTENCIÓN DE LAS VELOCIDADES DE CANCELACIÓN: INFLUENCIA DE LAS PROPIEDADES DE LOS RAIL PADS

En este apartado se sigue un proceso similar al del anterior: se busca obtener las velocidades de cancelación de los viaductos, variando la rigidez de las almohadillas bajo carril, buscando así estudiar la influencia que este valor tiene en la vibración libre de los viaductos.

#### 4.5.1 LÍMITE INFERIOR DEL EUROCÓDIGO



Gráfica 17. Máxima amplitud en vibración libre (m) en el modelo viga considerando la vía frente a velocidad (km/h), en viaductos de 12,5 – 25 metros (de arriba abajo), en el límite inferior del Eurocódigo. Rigidez de rail pad  $K = 60 \text{ MN/m}$  (línea azul),  $K = 150 \text{ MN/m}$  (línea naranja),  $K = 250 \text{ MN/m}$  (línea gris) – Las tres curvas se encuentran prácticamente solapadas. Las líneas verticales amarillas indican las velocidades de cancelación del modelo viga en límite inferior del EC (extraídas de resultados de Gráfica 11).

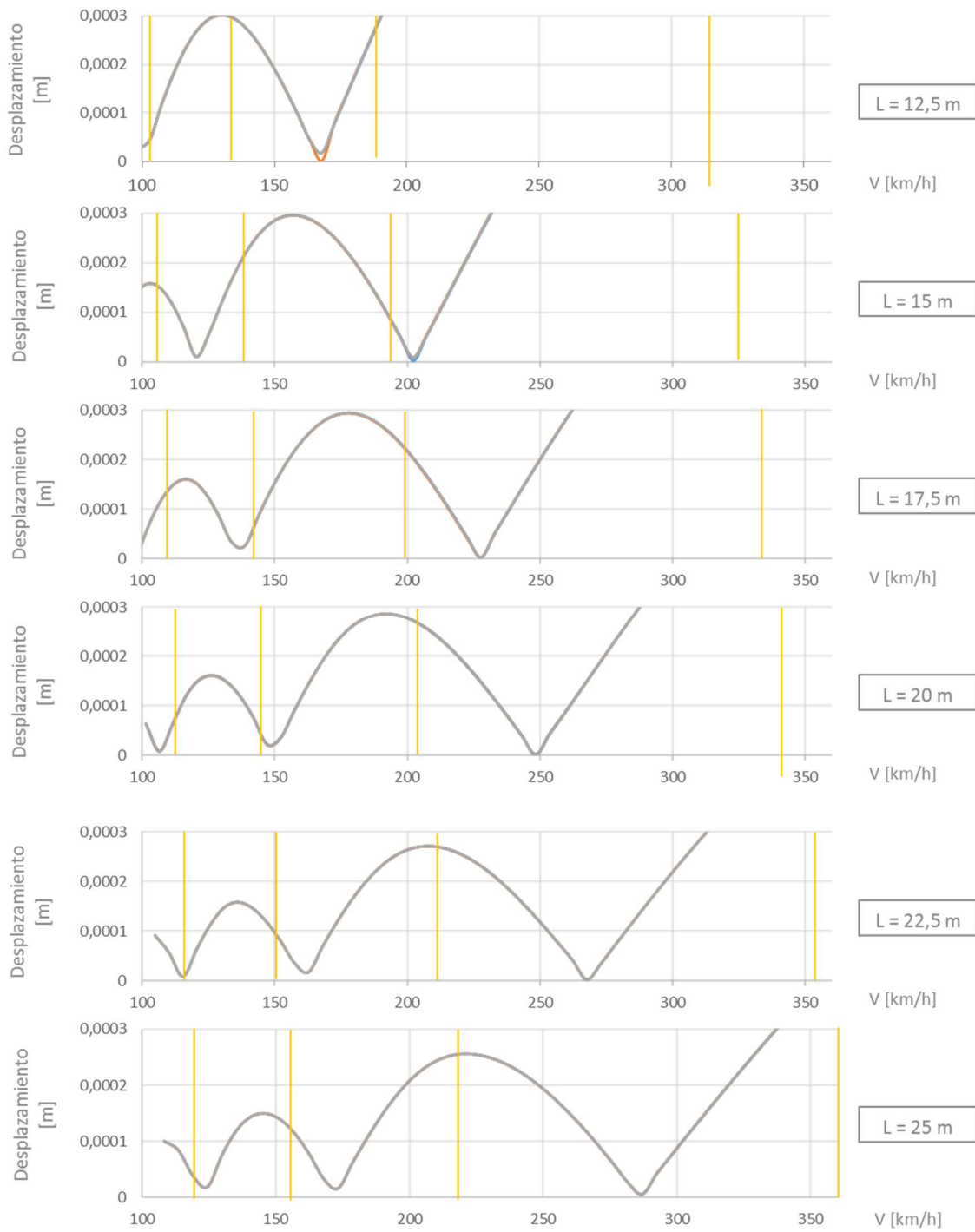


A fin de poder facilitar la comparativa entre ambos modelos, se presentan a continuación las frecuencias naturales de los puentes con vía y del modelo viga analizados en la gráfica anterior.

		K = 60 MN/m	K = 150 MN/m	K = 250 MN/m	Viga
Rango Inferior del Eurocódigo ( $f_{1,000}$ )	L = 12,5 m	6,3121	6,3121	6,3121	6,5247
	L = 15 m	5,2893	5,2893	5,2893	5,4373
	L = 17,5 m	4,5514	4,5514	4,5514	4,6605
	L = 20 m	3,9939	3,9939	3,9939	4,0780
	L = 22,5 m	3,7362	3,7362	3,7362	3,8057
	L = 25 m	3,5168	3,5168	3,5168	3,5756

**Tabla 4. Frecuencias fundamentales [Hz] de los puentes analizados en la Gráfica 17**

#### 4.5.2 LÍMITE INTERMEDIO DEL EUROCÓDIGO



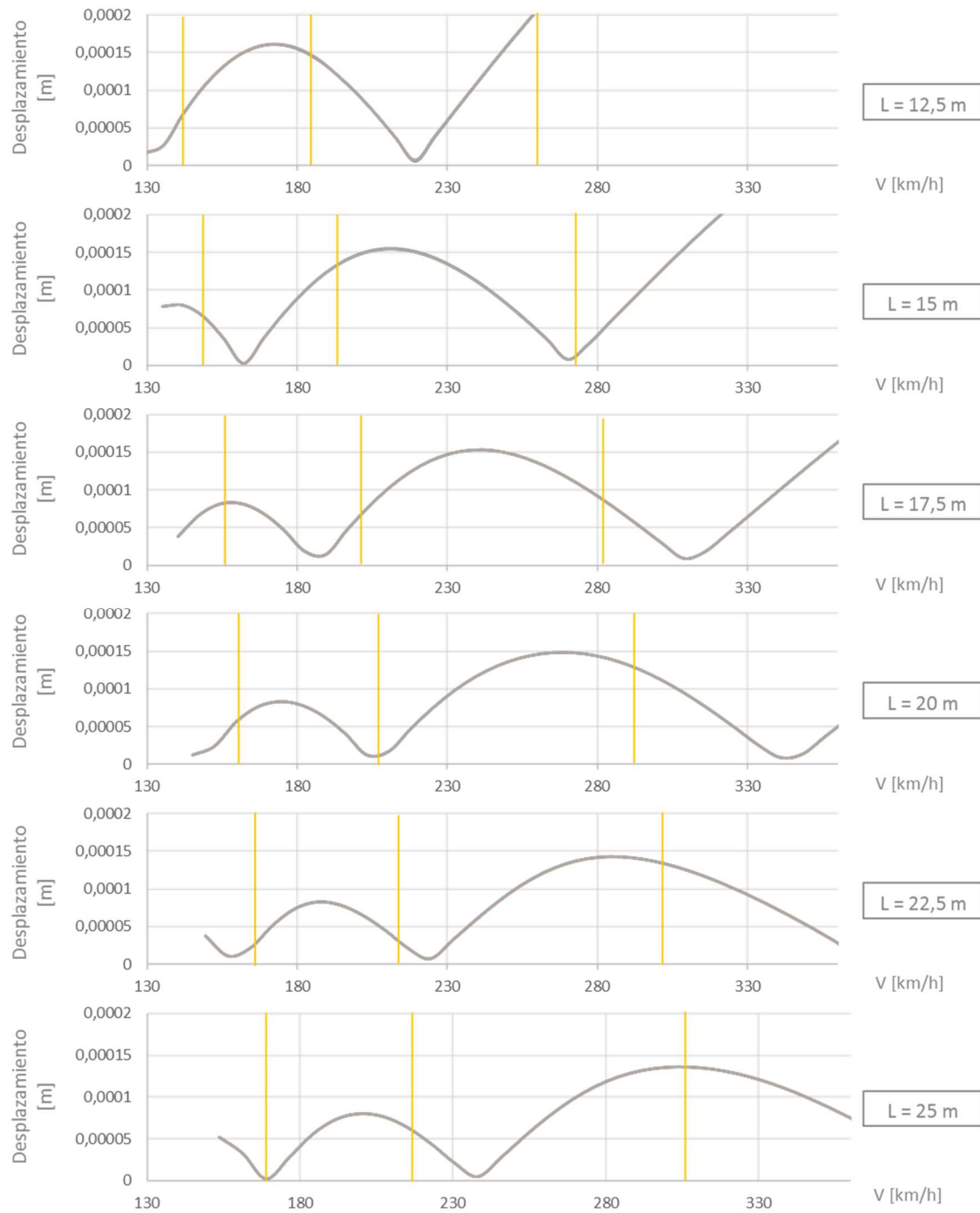
**Gráfica 18. Máxima amplitud en vibración libre (m) en el modelo viga considerando la vía frente a velocidad (km/h), en viaductos de 12,5 – 25 metros (de arriba abajo), en el límite inferior del Eurocódigo. Rigidez de rail pad  $K = 60$  MN/m (línea azul),  $K = 150$  MN/m (línea naranja),  $K = 250$  MN/m (línea gris) – Las tres curvas se encuentran prácticamente solapadas. Las líneas verticales amarillas indican las velocidades de cancelación del modelo viga en límite intermedio del EC (extraídas de resultados de Gráfica 12).**

Para permitir una mayor facilidad a la hora de comparar los dos modelos, se presentan a continuación las frecuencias naturales de los puentes con vía y modelo viga analizados en la gráfica anterior.

		K = 60 MN/m	K = 150 MN/m	K = 250 MN/m	Viga
Rango Intermedio del Eurocódigo ( $f_{1,050}$ )	L = 12,5 m	9,82	9,82	9,82	10,5652
	L = 15 m	8,4963	8,4963	8,4963	9,0904
	L = 17,5 m	7,6672	7,6672	7,6672	8,0081
	L = 20 m	6,8914	6,8914	6,8914	7,1771
	L = 22,5 m	6,3598	6,3598	6,3598	6,6077
	L = 25 m	5,9169	5,9169	5,9169	6,1361

**Tabla 5. Frecuencias fundamentales [Hz] de los puentes analizados en la Gráfica 18**

### 4.5.3 LÍMITE SUPERIOR DEL EUROCÓDIGO



**Gráfica 19. Máxima amplitud en vibración libre (m) en el modelo viga considerando la vía frente a velocidad (km/h), en viaductos de 12,5 – 25 metros (de arriba abajo), en el límite superior del Eurocódigo. Rigidez de rail pad  $K = 60$  MN/m (línea azul),  $K = 150$  MN/m (línea naranja),  $K = 250$  MN/m (línea gris) – Las tres curvas se encuentran prácticamente solapadas. Las líneas verticales amarillas indican las velocidades de cancelación del modelo viga en límite superior del EC (extraídas de resultados de Gráfica 13).**

Buscando la facilidad en la comparativa de modelos de la gráfica anterior, se presentan a continuación las frecuencias fundamentales de los puentes con vía y modelo viga estudiados en dicha gráfica.

		K = 60 MN/m	K = 150 MN/m	K = 250 MN/m	Viga
Rango Superior del Eurocódigo ( $f_{1,100}$ )	L = 12,5 m	13,0214	13,0214	13,0214	14,6056
	L = 15 m	11,4245	11,4245	11,4245	12,7436
	L = 17,5 m	10,4374	10,4374	10,4374	11,3557
	L = 20 m	9,4726	9,4726	9,4726	10,2763
	L = 22,5 m	8,8755	8,8755	8,8755	9,4097
	L = 25 m	8,2183	8,2183	8,2183	8,6966

**Tabla 6. Frecuencias fundamentales [Hz] de los puentes analizados en la Gráfica 19**

#### 4.5.4 ANÁLISIS DE RESULTADOS

A priori, y observando los resultados del análisis modal en el que se tuvieron en cuenta las propiedades de los rail pads, podía intuirse que el comportamiento en vibración libre de viaductos iba a variar poco con los cambios en la rigidez de estos elementos.

En efecto, como se observa en las gráficas, las amplitudes en vibración libre y los valores de velocidades de cancelación permanecen invariables con el cambio en las propiedades de las almohadillas bajo carril, de tal forma que las líneas que representan estos resultados son indiferenciables en las gráficas.

De esta forma, puede concluirse que las variaciones en la rigidez de los rail pads no causan ningún cambio substancial en la respuesta global de la estructura.

Se aprecia también en estos resultados un aumento del valor de las velocidades de cancelación a medida que aumenta la luz del viaducto.

## 5 CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

---

A lo largo del trabajo, se ha hablado continuamente de dos fenómenos dinámicos que afectan a las estructuras: el fenómeno de resonancia, el cual se ha presentado como un fenómeno por lo general negativo, y el fenómeno de la cancelación de vibraciones, el cual es por lo general, beneficioso para el comportamiento de las estructuras.

Siguiendo en esta línea de beneficioso, y ~~negativo~~ menos beneficioso, en este capítulo se van a presentar las conclusiones a las que se han llegado a lo largo del trabajo, y los desarrollos futuros de particularidades o casos que, por falta de tiempo o medios, no se han podido presentar en este trabajo, pero que hubiese sido interesante tratar. Sirva esta segunda parte como autocrítica de lo presentado.

### 5.1 CONCLUSIONES

Al principio de este documento se comentaba la problemática que sufren los puentes debido a las cargas cíclicas, y cómo el paso de ferrocarriles ha sido siempre el origen por excelencia de estas cargas.

Los estudios llevados a cabo variando los valores de la rigidez de balasto y rail pads han constado de dos partes principales y bien diferenciadas: en primer lugar, se llevó a cabo un análisis modal para los diversos casos, obteniendo las frecuencias fundamentales de la estructura, y analizando cómo variaban éstas con el cambio de rigidez. A continuación, se realizó el análisis en vibración libre de la estructura, para así obtener las velocidades de cancelación de la misma.

Del análisis modal es posible extraer varias conclusiones: las frecuencias naturales de los viaductos se ven afectadas claramente por la rigidez de la capa de balasto; además, estas diferencias se van haciendo más acentuadas cuanto más se asciende en el rango de frecuencias del Eurocódigo. En el límite superior, la variación entre la frecuencia fundamental de algunos viaductos según la rigidez del balasto puede alcanzar más de un 6%.

No se puede decir lo mismo de la rigidez de los rail pads, cuya variación no provoca cambios en la frecuencia fundamental de los viaductos, en ninguno de los rangos de frecuencias; al igual que cuando se varía el amortiguamiento estructural, las frecuencias fundamentales permanecen prácticamente iguales, o iguales en su totalidad.

Se ha observado una tendencia clara en los resultados del análisis modal: los resultados del modelo viga y el modelo viga considerando la vía son más próximos cuanto más alto es el valor de la rigidez del balasto, lo cual es intuitivo.

Del análisis de los viaductos en vibración libre se extraen también varias conclusiones claras: en primer lugar, y relacionado con la amplitud de las vibraciones, los desplazamientos en el punto central

del tablero son mayores cuanto menor es la rigidez del balasto; sin embargo, la rigidez de los rail pads no afecta prácticamente a este valor, manteniéndose invariable con el cambio de rigidez.

Además, es claro observando los resultados que las velocidades de cancelación de los viaductos aumentan conforme aumenta la rigidez de la capa de balasto, pero estos valores también se mantienen inalterados con el cambio de rigidez de los rail pads.

Analizando estas conclusiones, es evidente que el comportamiento dinámico del viaducto está determinado en mucha mayor medida por las propiedades de la capa de balasto que por las propiedades de las almohadillas bajo carril.

## 5.2 DESARROLLOS FUTUROS

Una vez se han extraído las conclusiones presentadas en el apartado anterior, se van a numerar a continuación algunas consideraciones que pueden tenerse en cuenta de cara a trabajos futuros.

Con el modelo con el que se ha trabajado podría haberse llevado a cabo un análisis mediante los trenes de cargas HSLM, para profundizar más que con la carga móvil y obtener conclusiones acerca del fenómeno de la cancelación con trenes de cargas. Además, ya se ha comentado el problema existente con el amortiguamiento de los rail pads, limitación que podría salvarse tomando otro tipo de modelo de amortiguamiento que no fuese el de Rayleigh. Hay que añadir que el modelo con el que se ha trabajado también nos permitiría obtener resultados en el carril (en el capítulo de Análisis en vibración libre, por ejemplo, se presentó una gráfica en la que se observaban las vibraciones en este elemento), o datos relativos a la vibración de las traviesas y balasto (la aceleración máxima está limitada por la normativa); sería interesante comprobar cómo afectan las propiedades que se han estudiado al comportamiento dinámico de la vía.

De cara a la construcción de modelos futuros, más completos que éste, llama la atención la consideración de modelos de los bogies o de trenes completos. Además, la construcción de un modelo 3D con otro tipo de elementos finitos permitiría por ejemplo tener en cuenta viaductos con dos vías, además de poder considerar los modos de vibración torsionales propios del paso de un tren por una sola de ellas.



## 6 REFERENCIAS

---

- [1] E. C. f. Standardisation, Eurocode 1: actions on structures - Part 2: Traffic loads on bridges, 2008.
- [2] W. W. T. S. Young D.H., Vibration problems in engineering, 1990.
- [3] F. L., Dynamics of solids and structures under moving loads, 1999.
- [4] S. E., «Dynamic amplification factor and response spectrum for the evaluation of vibrations of beams under successive moving loads,» 2001.
- [5] Y. Y. Y. J. Hsu L.C., «Vibration of simple beams due to trains moving at high speeds».
- [6] M. P. M. E. Martínez Rodrigo M.D., «Free vibrations of simply supported beam bridges under moving loads: maximum resonance, cancellation and resonant vertical acceleration,» 2013.
- [7] R. C. S. d. S. L. Rigueiro C., «Influence of ballast models in the dynamic response of railway viaducts,» 2010.
- [8] B. H. H. B. F. M. Rauert T., «On the prediction of the interaction effect caused by continuous ballast on filler beam railway bridges by experimentally supported numerical studies,» 2010.
- [9] C. H. N. M. Proença J.M., Effect of the type of track on the dynamic behaviour of high speed railway bridges, 2011.
- [10] W. K. L. J. Zhai W., «Modelling and experiment of railway ballast vibrations,» 2004.
- [11] M. D. N. K. Kumaran G., «Dynamic studies of railtrack sleepers in a track structure system,» vol. 268.
- [12] M. d. Fomento, «Estudios Informativos para el desarrollo de la red de Alta Velocidad en Asturias. Tramo Oviedo / Gijón - Avilés».
- [13] R. Kaewunruen, Experimental investigation on dynamic railway sleeper/ballast interaction.
- [14] R. Kaewunruen, State dependent properties of rail pads.
- [15] t. E. O. Zienkiewicz O.C., El método de los Elementos Finitos.

- [16] G. P. Romero A., «A MATLAB toolbox for soil-structure interaction analysis with finite and boundary elements,» 2014.
- [17] N. N.M., «A method of computation for structural dynamics,» 1959.
- [18] D. A. R. A. M. R. M. Galvín P., Soil-structure interaction effects on the transverse response of beam bridges under moving loads and its application to railway traffic, 2015.
- [19] D. A. M.-R. M. R. A. Galvín P., «On the basic phenomenon of soil-structure interaction on the free vibration response of beams: Application to railway bridges,» 2016.

## 7 ANEXO

---

Se presentan en este apartado los códigos de realización propia utilizados para los cálculos llevados a cabo en este trabajo; para ello se ha usado el programa MATLAB R2014a.

## VIB\_LIBRE

```
% Este código lee los resultados del análisis con carga puntual móvil  
% y extrae un vector con las máximas amplitudes de la vibración libre  
% de la estructura
```

```
for i=1:1:numeroarchivos,  
    if i<10,  
        archivo=sprintf('puntualRep%1.0f.results.mat',i);  
    elseif i>=10,  
        archivo=sprintf('puntualRep%2.0f.results.mat',i);  
    end  
    load(archivo)  
    vector=FEDISP(6*(49-1)+3,:);  
    pks=findpeaks(vector);  
    flag=0;  
    for j=1:1:length(pks),  
        if flag==0,  
            if pks(j)<=0,  
                flag=0;  
            elseif pks(j)>0,  
                vectoramp(i)=pks(j);  
            end  
        end  
    end  
end  
end
```