ALGUNOS ESPACIOS TOPOLOGICOS QUE ADMITEN UNA MEDIDA-CATEGORIA

por

J. M. AYERBE TOLEDANO

ABSTRACT

Let X be a topological space. A category measure m on X is a countably aditive finite measure defined on the σ-algebra formed by all sets with the Baire property, such that $m(E) = 0$ iff E is of Baire first category. It is known that one can define a density topology on every space of finite measure X such that X becomes a category measure space. In this paper some conditions are given so that a topological space be a category measure space.

1. *Introducción*

Una medida-categoría en un espacio topológico es una medida finita m, numerablemente aditiva, y definida sobre los conjuntos que tienen la propiedad de Baire y tal que $m(E) = 0$ sii E es de primera categoría. Es conocido que sobre cualquier espacio de medida finita y completa puede definirse una topología, a la que llamamos de densidad, que convierte dicho espacio en uno de medida-categoría. En este artículo planteamos el problema opuesto, esto es, daremos condiciones para que sobre algunos espacios topológicos puedan definirse medidas que los conviertan en espacios de medida-categoría.

Los conjuntos que tienen la propiedad de Baire en un espacio X son los de la forma $G + P$, donde G es abierto, P de primera categoría y "+" denota la diferencia simétrica. Estos conjuntos constituyen un σ-álgebra de subconjuntos de X.

Diremos que una medida definida sobre un espacio X es no atómica si es nula para puntos. Caso contrario se llamará atómica. Es obvio que si en un e.t. X el conjunto de puntos aislados es no vacío y el espacio admite una medida-categoría no nula, ésta ha de ser necesariamente atómica. Del mismo modo, si X es un e.t. T_1 y sin puntos aislados, si admite una medida-categoría, ha de ser necesariamente no atómica.

2.- Medidas-categorías y espacios numerables

Prop. 1. – Sea (X, T) un e.t. numerable y T_1. Sea D el conjunto de puntos aislados de dicho espacio. Entonces D es no vacío sii X es un espacio que admite una medida-categoría no nula. Además, en ese caso, las medidas-categorías en X son aquellas y solo aquellas que son finitas, positivas para cada punto de D y nulas sobre X-D.

Demost.: Supongamos que D es no vacío y definamos sobre X una medida m tal que:

$$m(A) = 0 \text{ para cada } A \subseteq X\text{-}D$$
$$m(x) > 0 \text{ para cada } x \in D, \text{ siendo } \sum_{x \in D} m(x) < +\infty$$

Restrinjo ahora la medida m a los conjuntos que tienen la propiedad de Baire y resulta ser una medida-categoría. En efecto, basta ver que la medida de un conjunto es nula sii éste es de primera categoría.

Si $m(A) = 0$, entonces $A \subseteq X\text{-}D$ y por tanto A es de primera categoría.

Del mismo modo, si A es de primera categoría, entonces $A = \bigcup_n A_n$, donde cada A_n es raro. Se tiene por tanto que int $(\bar{A}_n)$ es vacío, de donde sigue que $A_n \cap D$ es vacío para cada n. Por tanto $A \cap D$ es vacío y sigue que $m(A) = 0$.

Ahora si m es una medida-categoría cualquiera definida sobre X ha de ser $m(A) = 0$ sii A es de primera categoría sii $A \cap D = \emptyset$ y por tanto $m = 0$ sobre X-D.

Por otro lado cada punto de D es abierto y no vacío, por lo que $m(x) > 0$ para cada punto de D, y como la medida ha de ser finita, $\sum_{x \in D} m(x) < +\infty$.

El recíproco es trivial.#

3. - Medidas-categorías y espacios separables

Prop. 2. – Sea X un e.t. separable y T_1. Sea H un conjunto denso y numerable y D el conjunto de los puntos aislados. Supongamos que X-H es de primera categoría. Entonces X admite una medida-categoría no nula sii D es no vacío. Además, en ese caso, las medidas-categorías son aquellas y solo aquellas que son nulas sobre X-D, positivas para cada punto de D y finitas.

Demost.: Supongamos que D es no vacío y definamos sobre X una medida como en la prop. 1. Resulta estar bien definida al ser numerable el conjunto de puntos aislados. Además, restringida a los conjuntos que tienen la propiedad de Baire resulta ser una medida-categoría. (Basta razonar como en prop. 1, teniendo en cuenta que X-D = (X-H) ∪ (H-D) es de primera categoría). Es además la única medida-categoría no nula que puede definirse sobre X.

Recíprocamente, supongamos que X admite una medida-categoría y D es vacío. En este caso, la medida m que se defina sobre X habrá de ser no atómica, por lo que m(H) = m(X-H) = 0, de donde se obtiene que m(X) = 0, llegando a contradicción.≠

Nota 1: Una condición suficiente para que X-H sea de primera categoría es que H sea abierto (En ese caso X-H no solo es de primera categoría, sino raro, pues X-H = H̄-H cerrado de interior vacío).

Prop. 3.– Sea (X, T) un e.t. en el que el conjunto D de puntos aislados es denso y numerable. Entonces X es un espacio de Baire que admite una medida-categoría. Además, en este caso, las medidas-categorías son aquellas y solo aquellas que son finitas, nulas sobre X-D y positivas para cada punto de D.

Demost.: Veamos primero que un conjunto A es raro en X sii no corta a D.
Si A es raro en X, sigue inmediatamente que su clausura, y por tanto él mismo, no cortan a D. Recíprocamente, si A no corta a D, sigue que su clausura tampoco, y por tanto como D es denso en X y corta a todos los abiertos, no puede haber ninguno contenido en la clausura de A. De ahí que A sea raro.

A partir de aquí es inmediato obtener que cada conjunto de primera categoría en X es raro, y por tanto X es un espacio de Baire. Ademas dicho espacio de Baire admite una medida-categoría no nula definida por el procedimiento habitual y no hay otra forma de definir medidas-categorías sobre estos espacios.≠

Nota 2: Oxtoby ha probado (1) que en los espacios metrizables el recíproco de este teorema también es cierto, esto es, si X es un espacio de Baire metrizable que admite una medida-categoría, entonces D es denso y numerable.

Prop. 4.– Sea (X, T) un e.t. separable y T_1. Sea H el conjunto denso y numerable y supongamos que X-H no es denso. Entonces, si X admite una media-categoría, el conjunto D de puntos aislados ha de ser no vacío.

Demost.: Basta tener en cuenta que si D fuese vacío, al ser el espacio T_1, la medida-categoría m definida sobre él habría de ser no atómica, y por tanto m(H) = 0. Entonces como X-H no es denso, existe algún abierto G que no lo corta, por lo que m(G) = 0, lo que contradice el hecho de ser X un espacio de Baire.#

Nota 3: Por tanto, si X es un espacio de Baire separable y T_1 que admite una medida-categoría no atómica, entonces el complemento de cualquier conjunto denso y numerable ha de ser también denso.

Hasta ahora hemos planteado el estudio en espacios separables, y por lo tanto en espacios que tienen a lo más una cantidad numerable de puntos aislados. Falta, naturalmente, plantear el problema para espacios en los que haya una cantidad no numerable de puntos aislados. Para éstos tenemos:

Prop. 5.– Sea (X, T) un e.t. y D el conjunto de sus puntos aislados. Supongamos que es c el cardinal de D. Entonces X no admite una medida-categoría.

Demost.: Sea $D = \{ x_i : i \in I \}$ el conjunto de puntos aislados. Si X admitiese una medida-categoría m, ésta habría de cumplir:

1) $m(x_i) > 0$ para cada $i \in I$
2) $\sum_{x \in I} m(x_i) < +\infty$

Sin embargo estas dos condiciones no son compatibles, pues si se da 1), la familia $\{ m(x_i) : i \in I \}$ no puede ser sumable en $\mathbb{R}$.#

4.– Medidas-categorías y abiertos regulares

En los apartados precedentes hemos abordado el problema de dotar de esttructura de espacio de medida-categoría a espacios topológicos en los cuales el conjunto de puntos aislados era "grande" en el sentido de que su complemento era de primera categoría. Naturalmente, ahora el problema que se plantea es esencialmente como definir medidas-categorías en espacios topológicos en los que no haya puntos aislados (o al menos este conjunto no sea "grande" en el sentido anterior). Para abordar este problema tengamos en cuenta lo siguiente:

Sea (X, T) un e.t. T_1 al que vamos a exigir tener la propiedad de Baire. Sabemos que entonces (2) cualquier conjunto con la propiedad de Baire puede escribirse de manera única como diferencia simétrica de un conjunto de primera categoría y un abierto regular.

Un conjunto G se dice que es un abierto regular si $G = G^{\perp\perp}$. Denotemos por R(X) el conjunto de todos los abiertos regulares de un e.t. X. Es conocido que constituyen un σ-álgebra de Boole completo, donde las operaciones de Boole estan definidas por:

$$G \vee H = (G \cup H)^{-\prime -\prime}, \; G \wedge V = G \cap V, \; G^* = G^{-\prime}$$

y la relación de orden es la inclusión.

Sea m una medida finita, nula únicamente para el vacío definida sobre R(X). Esta medida verificará por tanto $m(\bigvee_n G_n) = \sum_n m(G_n)$ para cualquier sucesión $\{G_n\}$ de abiertos regulares disjuntos. Vamos a extender la definición de m al σ-álgebra de los conjuntos de X con la propiedad de Baire de manera que m sea una medida sobre X de la siguiente manera:

Cada conjunto $A \subset X$ con la propiedad de Baire se escribe de manera única en la forma $A = G + P$, donde G es abierto regular y P es de primera categoría. Entonces defino $m(A) = m(G)$. Se verifica:

1) $m(\emptyset) = 0$

2) Si $\{A_n\} = \{G_n + P_n\}$ tienen la propiedad de Baire y son disjuntos se puede escribir

$$\bigcup_n A_n = (\bigcup_n G_n)^{-\prime -\prime} + Q, \text{ donde Q es de primera categoría,}$$

y entonces $m(\bigcup_n A_n) = m(\bigvee_n G_n) = \sum_n m(G_n)$

2) m está definida sobre los conjuntos que tienen la propiedad de Baire.

3) $m(A) = 0$ sii $A = \emptyset + P$ sii $A = P$ de primera categoría

Podemos pues concluir enunciando lo siguiente:

Prop. 6.– Un e.t. (X, T) de Baire, admite una medida-categoría sii su álgebra regular R(X) admite una medida finita nula solo para el vacío.

Nota 4: Es obvio que este resultado únicamente es interesante en espacios en los que la unión numerable de abiertos regulares sea un abierto regular, pues es en ellos donde la complicada condición $m(\bigvee_n G_n) = m((\bigcup_n G_n)^{-\prime -\prime}) = \sum_n m(G_n)$ se reduce a $m(\bigcup_n G_n) = \sum_n m(G_n)$.

Vamos ahora a buscar un tipo particular de espacios topológicos a los que podamos dotar de estructura de espacios de medida-categoría por este procedimiento.

Sabemos que un espacio se dice extremadamente disconexo si la clausura de cada abierto es un abierto. En estos espacios $R(X) = C(X) = \{$ clopen de X $\}$ (Esto es, los subconjuntos de X que son a la vez abiertos y cerrados). Una familia $\{ D_i: i\epsilon I \}$ se dice localmente finita en un e.t. (X, T) si para cada $x\epsilon X$ existe V_x entorno de x y $F \subset I$ finito tal que $V_x \cap D_i = \emptyset$ para cada $i\epsilon I$-F. Se verifica que si $\{ D_i: i\epsilon I \}$ es una familia localmente finita, $\overline{\bigcup_i D_i} = \bigcup_i \overline{D_i}$. Es fácil verificar que si X es un e.t. extremadamente disconexo en el que C(X) es una familia localmente finita. entonces la unión numerable de abiertos regulares es un abierto regular. Podemos además enunciar:

Prop. *7.*-- Sea (X, T) un e.t. en el que C(X) es una familia localmente finita y hay una base de la topología formada por clopen. Entonces la unión numerable de abiertos regulares de X es un abierto regular y X es extremadamente disconexo.

Demost.: Puesto que una base de la topología está formada por clopen sigue que cualquier abierto puede expresarse como una unión numerable de clopen. De aquí, al ser C(X) una familia localmente finita sigue que cualquier abierto del espacio es un clopen. Por tanto $T = C(X) = R(X)$ y obtengo que la unión numerable de abiertos regulares de X es un abierto regular, puesto que todos los abiertos son regulares. Además el espacio es extremadamente disconexo pues todos los abiertos son clopen. #

Sobre espacios de este tipo vamos a definir ahora una medida, estudiar el espacio de medida resultante y en que casos se trata de un espacio de medida-categoria.

Sea (X, T) un e.t. segundo numerable con una base numerable de clopen. Defino sobre el álgebra C(X) de los clopen de X la siguiente medida:

Sea $B = \{ G_n: n\epsilon N \}$ base de T formada con el menor número de abiertos posible. Sea $p: B \to (0,1]$ definida de forma que $\{ p(G_n): n\epsilon N \}$ es sumable y $\sum_{n=1}^{\infty} p(G_n) = 1$. Defino $\tau: C(X) \to (0,1]$ tal que si $G = \bigcup_n G_n$, $\tau(G) = \sum_n p(G_n)$ donde para expresar G de esta manera se han tomado todos los elementos de la base contenidos en G. Así la expresión de G en función de los elementos de la base está univocamente determinada. Puede probarse inmediatamente que τ es una medida finita, numerablemente aditiva sobre el álgebra C(X) de los clopen de X. Además únicamente se anula para el vacío. Ahora el teorema de extensión de Hahn permite extender esta medida definida sobre C(X) al σ-álgebra generado $C(X)^\sigma$ de la siguiente forma:

Para cada $B\epsilon C(X)^\sigma$ $\qquad \mu(B) = \inf \{ \sum \tau(A_n): A_n \epsilon\ C(X), B \subset \bigcup_n A_n \}$.

Es conocido que μ es una medida sobre $C(X)^{\sigma}$ que sobre C(X) coincide con τ y que el espacio de medida (X, $C(X)^{\sigma}$, μ) es completo. Además es inmediato comprobar que $C(X)^{\sigma}$ coincide con el σ-álgebra de los Borel de X B(X), y por el procedimiento habitual puede darse una caracterización de los conjuntos medibles de este espacio idéntica a la de los medibles Lebesgue en $\mathbb{R}^k$. Del mismo modo es inmediato comprobar que el espacio de medida obtenido es regular.

Veamos ahora alguna condición para que el espacio (X, T, B(X), μ) topológico y de medida construido sea un espacio de medida-categoría. Para ello tengamos en cuenta lo siguiente:

Prop. 8.– Si (X, T, M, m) es un espacio de Baire y de medida finita que solo se anula en R(X) para el vacío y tal que la unión numerable de abiertos regulares sea un abierto regular, entonces (X, T, M, m) es un espacio de medida-categoría.

Demost.: Como la expresión de cada conjunto con la propiedad de Baire en la forma A = G + P, donde G es abierto regular y P es de primera categoría es única, basta definir la medida de A como la de G.≠

Nota 5: De una manera más general puedo concluir que cualquier e.t. X para el que la unión numerable de abiertos regulares sea un abierto regular admitirá una medida-categoría si es homeomorfo a un e.t. Y sobre el que hay definida una medida finita, nula solo para el vacío en R(Y).

Aplicando la proposición 8 a nuestro espacio topológico y de medida podemos enunciar:

Prop. 9.– Si (X, T) es un e.t. de Baire, segundo numerable, en el que C(X) es una base de la topología y una familia localmente finita, entonces (X, T, B(X), μ) es un espacio de medida-categoría.

Veamos estos resultados a la luz de la teoría de algebras de Boole. Observemos en primer lugar que la medida que se definió sobre C(X) considerado como un álgebra de conjuntos, es también una medida sobre C(X) considerado como un álgebra de Boole. Por tanto C(X) es un álgebra de Boole que admite una medida estrictamente positiva y nula solo para el vacío.

Sea entonces (X, T) un e.t. cualquiera y R(X) el álgebra de Boole completo de todos los abiertos regulares de X. Denotemos por SR(X) el espacio de Stone de R(X) que es un e.t. extremadamente disconexo, T_2, compacto (y por tanto de Baire) y con una base de clopen. Si exigimos a SR(X) ser además segundo numerable tendremos que sobre C(SR(X)) considerado como álgebra de Boole hay definida una medida, y como R(X) es isomorfo a C(SR(X)) seguirá que R(X) es isomorfo a un álgebra de Boole medible. Concluimos pues con la siguiente

Prop. 10.– Sea (X, T) e.t. Entonces si SR(X) es segundo numerable, R(X) es isomorfo a un álgebra de Boole medible.

Sobre los espacios de Stone podemos además añadir:

Prop. 11.– Si (X, T) es un espacio de Stone segundo numerable en el que C(X) es una familia localmente finita, entonces X admite una medida-categoría.

Por otro lado sabemos que una medida álgebra es una medida normalizada, nula solo para el vacío y positiva definida sobre un σ-álgebra de Boole. Podemos pues enunciar:

Prop. 12.– El espacio de Stone correspondiente a cualquier medida álgebra es un espacio de medida-categoría.

Demost.: Basta tener en cuenta que el espacio de Stone correspondiénte a la medida algebra (B, m) es un e.t. de Baire tal que $C(SB) = R(SB) \approx B$, y por tanto sobre R(SB) hay definida una medida positiva, nula solo para el vacío, de donde sigue que SB admite una medida-categoría.$\#$

5. *Medidas-categorías y categorías-base*

En el año 1977 J.C. Morgan II definió en (3) el concepto de categoría-base y fundamentó una teoría abstracta de categoría de Baire la cual ha sido desarrollada por él mismo.

La consecuencia más importante de este punto de vista abstracto es la unificación de ciertas analogías las cuales habian sido observadas entre los conjuntos medibles y los que tienen la propiedad de Baire.

Nosotros en esta sección vamos a mostrar como la teoría de categorías-base puede aportar resultados al estudio de los e.t. que admiten una medida-categoría.

Sea (X, Ω) una categoría-base en la cual cada región contiene una región minimal y sea (X, Ω^*) la topología básica (4) correspondiente. Entonces

Prop. 13. – (X, Ω^*) admite una medida-categoría si y sólo si Ω contiene únicamente una cantidad numerable de regiones minimales.

Demost: Se verifica que cualquier conjunto S con la propiedad de Baire para Ω^* es representable en la forma

$$S = E \cup P$$

donde E es una unión de regiones minimales y P es un conjunto singular. Puesto que las regiones minimales son disjuntas dos a dos y a su vez disjuntas con cualquier conjunto singular, se obtiene que la representación debe ser única.

Pretendemos dotar al σ-álgebra de los conjuntos con la propiedad de Baire para Ω^* de una medida-categoría m. Ha de ser, por tanto una medida positiva para cada región minimal y nula para cada conjunto singular. Si llamo $\mathcal{B}$ a la familia de todas las regiones minimales, la familia $\{ m(B): B \in \mathcal{B} \}$ ha de ser sumable, y además cada uno de sus elementos ha de ser positivo. Esto sólo es posible si $\mathcal{B}$ es numerable. Por tanto, si (X, Ω^*) admite una medida-categoría, ha de contener únicamente una cantidad numerable de regiones minimales.

Recíprocamente, si Ω contiene únicamente una cantidad numerable de regiones minimales, basta asignar a cada elemento de Ω una medida aleatoria de modo que la familia $\{ m(B): B \in \mathcal{B} \}$ sea numerable y $m(B) > 0$ para cada $B \in \mathcal{B}$.

Se define entonces para cada conjunto S con la propiedad de Baire para Ω^*, $S = E \cup P$, donde E es una unión de regiones minimales y P es un conjunto singular

$$m(S) = \sum_{\substack{B \subseteq E \\ B \in \mathcal{B}}} m(B)$$

que es una medida finita, definida para todos los conjuntos que tienen la propiedad de Baire y nula sólo sobre los conjuntos singulares.

Nota 6: Un caso particular de una categoría-base sabemos que es una topología. En este caso las regiones son los abiertos. Sea pues (X, T) un c.t. en el que cada abierto contiene un abierto minimal, y sea (X, T^*) la topología básica correspondiente. Por el teorema de equivalencia de (4) se verifica que los conjuntos magros para T y T^* coinciden, y del mismo modo coinciden los conjuntos que tienen la propiedad de Baire para T y T^*. Por tanto

Prop. 14.– Si (X, T) es un e.t. en el que cada abierto contiene un abierto minimal, entonces (X, T) admite una medida-categoría si y sólo si T contiene sólo una cantidad numerable de abiertos minimales.

Demost.: Como (X, T) es un caso particular de una categoría-base, (X, T*) admitirá una medida-categoría si y sólo si T contiene únicamente una cantidad numerable de abiertos minimales.

Pero puesto que los conjuntos magros y los que tienen la propiedad de Baire para T y T* coinciden, es únicamente en este caso y con la misma medida cuando (X, T) admite una medida-categoría.

Nota 7: En particular si (X, T) es un e.t. en el que cada abierto contiene un abierto minimal y verifica CCC (cada familia de abiertos disjuntos es numerable) admite una medida-categoría.

REFERENCIAS

[1] Oxtoby, J.C.: Spaces that admit a category measure, J. Reine Angew. Math. 205, 156-170 (1961).

[2] Oxtoby, J.C.: Measure and category (Cap. 4), Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin.

[3] Morgan II, J.C.: Baire category from an abstract viewpoint, Fund. Math. 94, 13-23 (1977).

[4] Morgan II, J.C.: On equivalent category bases, Pacific J. Math. 105, 207-215 (1983).

Dpto. de Teoría de Funciones
Facultad de Matemáticas
41012 SEVILLA