llect. Math. **38** (1987), 117–122

FUNCIONES CON DERIVADAS SUCESIVAS GRANDES Y PEQUEÑAS POR DOQUIER

Luis Bernal González

ABSTRACT. In this paper we show that, given two double sequences of positive real numbers, α and β, the subset of all functions defined on an open real set which have big derivatives and small ones with respect to α and β, at every point, is residual in $\mathcal{C}^\infty$. As a corollary, we derive that Baire-almost every function of $\mathcal{C}^\infty$ has null radius of convergence at each point.

1. Introducción, definiciones, notaciones y resultados conocidos

a Ω un subconjunto abierto de la recta real $\mathbf{R}$, y sea $E = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ la clase de ; funciones complejas que son indefinidamente diferenciables en Ω. Supongamos e sobre E se da la toplogía τ de la convergencia de funciones y de sus derivadas, iformemente en subconjuntos compactos. Entonces E es un espacio de Fréchet órvath, [6], p. 136) y por tanto es un espacio de Baire. Recordemos brevemente ;unos conceptos topológicos. Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, se dice e A es un G_δ (F_σ, resp.) cuando es intersección numerable de abiertos (unión merable de cerrados, resp.). Un subconjunto $B \subset X$ se dice que es de primera tegoría cuando B es unión de conjuntos B_n ($n \in \omega = \{1, 2, \ldots\}$) con $\operatorname{int} \bar{B}_n$ vacío. unión numerable de subconjuntos de primera categoría es de primera categoría. se dice de Baire si y sólo si cada abierto no vacío no es de primera categoría. En l caso, un $B \subset X$ se llama residual cuando su complemento es de primera categoría equivalentemente, cuando contiene algún G_δ denso. La intersección numerable de bconjuntos residuales es residual. Una propiedad $P(\cdot)$ se verifica, por definición, ire-en casi todo X si y sólo si $\{x \in X : P(x)$ es verdadera$\}$ es residual. En un ntido topológico, un subconjunto residual abarca casi todo el espacio. Cfr., por emplo, Oxtoby [7].

Volviendo a E, se sabe que existen funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ que no son analíticas ningún punto. Es más, Baire-casi todas las funciones de E no son analíticas en ning punto de Ω, como se prueba en [4]. Esta afirmación se ha demostrado también c más detalle en [2]. Si $f \in E$ y $x \in \Omega$, denotemos por $r(f,x)$ el radio de convergen de la serie formal de Taylor asociada a f con centro en el punto x, a saber,

$$r(f,x) = \left(\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right|^{1/n}\right)^{-1}$$

Entonces $r(f,x) > 0$ si f es analítica en x. Pero $r(f,x)$ puede ser positivo aunc f no sea analítica en x. Tal ocurre, por ejemplo, con la clásica función $f : \mathbf{R} \to$ definida por

$$f(0) = 0,$$
$$f(x) = \exp(-x^{-2}) \qquad \text{si } x \neq 0.$$

Aquí $r(f,x) = +\infty$. En este trabajo probaremos un resultado más fuerte que el R. Darst [4], concretamente, que Baire-casi todas las funciones de E tienen radio convergencia nulo en todos los puntos de Ω. En Rudin [8], p. 418, se da un ejem concreto de una función con esa propiedad, donde $\Omega = \mathbf{R}$. Nuestro resultado también más fino que el de Christensen [3], el cual establece que existe un G_δ de $G \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que cada función $f \in G$ satisface $r(f,x) = 0$ si x está en un G_δ de de $\mathbb{R}$, que depende de f. Advirtamos que existen funciones de $\mathcal{C}^\infty$ no analíticas ningún punto pero con radio de convergencia positivo en muchos puntos. En [1 construye y estudia una de tales funciones para $\Omega = (-1,1)$, resultando que la s formal de Taylor centrada en cada número diádico es un polinomio.

No obstante, podemos establecer nuestro teorema de forma más general qu expuesta. Es sabido que no existe restricción alguna en cuanto a la velocidad de cimiento o decrecimiento de las derivadas de una función en un punto dado. De hec dados $x_0 \in \mathbf{R}$ y a_n números complejos ($n \in \omega$), existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ con $f^{(n)}(x_0) =$ ($n \in \omega$). Este teorema es debido a Borel (cfr. Donoghe [5], p. 50–51). En pa cular, si prefijamos una sucesión de números reales positivos a_n y un $x_0 \in \mathbf{R}$, ex f con $|f^{(n)}(x_0)| \geq a_n$ ($n \in \omega$). Probaremos en un lema que es posible efectuar acotación uniformemente en $\mathbf{R}$. Basándonos en él, demostraremos que Baire-casi to las funciones de E tienen a la vez, en cada punto de Ω, infinitas derivadas grand infinitas derivadas pequeñas, respecto de dos sucesiones prefijadas de números re positivos. Es viable incluso conseguir la misma propiedad asintótica respecto sucesiones dobles. Como corolario inmediato surgirá el resultado anunciado sc radios de convergencia.

Si $\alpha = \{a_n : n \in \omega\}$ es una sucesión de números reales positivos, denotaremc

$$A(\alpha) = \left\{f \in E : \text{existe } x = x(f) \in \Omega \text{ tal que } \liminf_{n\to\infty} \left(a_n \left|f^{(n)}(x)\right|\right) > 0\right\}$$

$$B(\alpha) = \left\{ f \in E : \text{existe } x = x(f) \in \Omega \text{ tal que } \limsup_{n\to\infty} \left(a_n \left| f^{(n)}(x) \right| \right) < +\infty \right\}.$$

2. Establecimiento del teorema

ma. *Sea $\{c_n : n \in \omega\}$ una sucesión de números reales positivos. Entonces existe a función $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que*

$$c_n \leq \inf \left\{ \left| f^{(n)}(x) \right| : x \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{para } n \in \omega.$$

mostración. Consideremos la función dada por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{1-k} \exp(\mathrm{i}\, x\, b_k),$$

nde los números b_k vienen definidos recurrentemente por

$$b_1 = 2 + c_1,$$

$$b_k = c_k + 2 + \sum_{j=1}^{k-1} b_j^{k+1-j} \qquad \text{para } k = 2, 3, \ldots.$$

da serie derivada

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{n+1-k}\, \mathrm{i}^n \exp(\mathrm{i}\, x\, b_k) \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

ne una mayorante convergente independiente de x, que es

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{n+1-k}$$

ótese que $b_k > 2$), luego $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y cada $f^{(n)}$ es la suma de la serie derivada ésima. Fijamos ahora $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left| f^{(n)}(x) \right| &\geq \left| b_n^{n+1-n}\, \mathrm{i}^n \exp(\mathrm{i}\, x\, b_k) \right| - \sum_{k \neq n} \left| b_k^{n+1-k}\, \mathrm{i}^n \exp(\mathrm{i}\, x\, b_n) \right| \\
&= b_n - \sum_{k\neq n} b_k^{n+1-k} \\
&= b_n - (b_1^n + b_2^{n-1} + \cdots + b_{n-1}^2) - (1 + b_{n+2}^{-1} + b_{n+3}^{-2} + \cdots) \\
&> b_n - b_1^n - b_2^{n-1} - \cdots - b_{n-1}^2 - 2 \\
&= c_n.
\end{aligned}$$

Si $n = 1$, el paréntesis central desaparece, y queda

$$|f'(x)| > b_1 - 2 = c_1.$$

Por tanto se tiene (1) en cualquier caso.

Teorema. *Sean $\{a_{np} : n, p \in \omega\}$ y $\{b_{np} : n, p \in \omega\}$ dos sucesiones dobles de núme reales positivos. Entonces G es un G_δ denso, y por tanto residual en E, siendo C conjunto de las funciones $f \in E$ tales que:*

$$\liminf_{n\to\infty} \left(a_{np} \left|f^{(n)}(x)\right|\right) = 0$$

y

$$\limsup_{n\to\infty} \left(b_{np} \left|f^{(n)}(x)\right|\right) = +\infty$$

para todo $x \in \Omega$ y todo $p \in \omega$.

Demostración. Denotemos respectivamente por α_p y β_p cada sucesión $\{a_{np} : n \in$ y $\{b_{np} : n \in \omega\}$ $(p \in \omega)$. Entonces

$$G = \bigcap_{p\in\omega} ((E \setminus A(\alpha_p)) \cap (E \setminus B(\beta_p))).$$

Luego es suficiente probar que, dada cualquier sucesión $\alpha = \{\alpha_n : n \in \omega\}$ de núme reales positivos, se tiene que $A(\alpha)$ y $B(\alpha)$ son F_σ con interiores vacíos.

a) Elijamos una sucesión $\{K_p : p \in \omega\}$ de compactos no vacíos tales que

$$\Omega = \bigcup_{p\in\omega} K_p.$$

Es evidente que

$$A(\alpha) = \bigcup \{F(p, q, s) : p, q, s \in \omega\}$$

y

$$B(\alpha) = \bigcup \{H(p, q, s) : p, q, s \in \omega\},$$

donde $F(p, q, s)$ es el conjunto de las funciones $f \in E$ tales que existe $x = x(f) \in$ de modo que

$$a_n \left|f^{(n)}(x)\right| \geq \frac{1}{q} \qquad \forall n \geq s$$

y $H(p, q, s)$ es el conjunto de las funciones $f \in E$ tales que existe $x = x(f) \in K_p$ modo que

$$a_n \left|f^{(n)}(x)\right| \leq q \qquad \forall n \geq s.$$

emos $p, q, s \in \omega$. Cada aplicación

$$(f, x) \in E \times K_p \mapsto \left|f^{(n)}(x)\right| \in \mathbb{R} \qquad (n \in \omega)$$

continua, luego cada T_n definido por

$$T_n = \left\{(f, x) : a_n \left|f^{(n)}(x)\right| \geq 1/q\right\}$$

:errado en $E \times K_p$, y por tanto $\bigcap\{T_n : n \geq s\}$ es también cerrado. En consecuencia, proyección sobre E es cerrada, ya que es una proyección paralela a K_p, que es npacto. Pero tal proyección es $F(p, q, s)$, así que éste es cerrado y $A(\alpha)$ es un F_σ. álogamente, $B(\alpha)$ es un F_σ.

b) Trivialmente, cada polinomio está en el complemento de $A(\alpha)$, luego $A(\alpha)$ tiene puntos interiores al ser densos los polinomios en E para la topología τ. En ınto a $B(\alpha)$, escojamos una función $u \in E$ que cumpla (1) con $c_n = n/a_n$. Entonces Ξ $E \setminus B(\alpha)$. Asimismo, $P + \epsilon u \in E \setminus B(\alpha)$ para todo $\epsilon > 0$ y todo polinomio P. ıora bien, es fácil comprobar que el conjunto de las funciones $P + \epsilon u$, donde $\epsilon > 0$ y es un polinomio, es denso en E. Por consiguiente $E \setminus B(\alpha)$ es denso y $B(\alpha)$ carece puntos interiores.

ɔrolario. *Baire-casi todas las funciones de E tienen radio de convergencia nulo en do punto de Ω.*

:mostración. Basta considerar el conjunto $B(\alpha)$ con

$$\alpha = \left\{n^{-n} (n!)^{-1} : n \in \omega\right\}.$$

inmediato verificar que $D \supset E \setminus B(\alpha)$, siendo

$$D = \{f \in E : r(f, x) = 0 \ \forall x \in \Omega\}.$$

Referencias

] J. ARIAS DE REYNA, Definición y estudio de una función indefinidamente diferenciable de soporte compacto, *Rev. Real Acad. Ci. Madrid* **76** (1982), 21–38.

:] F. S. CATER, Differentiable, nowhere analytic functions, *Amer. Math. Monthly* **91** (1984), 618–624.

[3] J. P. R. CHRISTENSEN, A topological analogue of the Fubini theorem and so applications, in *Papers from the Open House for Probabilists*, pages 26–31, M Inst. Aarhus Univ., Aarhus, 1971.

[4] R. DARST, Most infinitely differentiable functions are nowhere analytic, *Can Math. Bull.* **16** (1973), 597–598.

[5] W. F. DONOGHE, Jr., *Distributions and Fourier Transforms*, Academic Pr New York, 1969.

[6] J. HÓRVATH, *Topological Vector Spaces and Distributions*, vol. 1, Addis Wesley, Reading, 1966.

[7] J. C. OXTOBY, *Measure and Category*, Springer, New York, 1980.

[8] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, Tata McGraw-Hill, Faribadad, 1974

Received 3/DEC/

Luis Bernal Gonzá
Departamento de Análisis Matemát
Facultad de Matemáti
Universidad de Sev
Tarfia s.
Sevilla 41(
SPA