

R. 22-941

LIBRO 1021310

043  
189

BCA

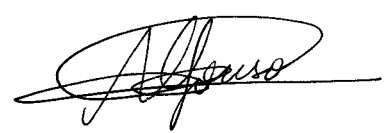
UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
FACULTAD DE MATEMATICAS  
BIBLIOTECA

# UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas

## SUBVARIEDADES SLANT EN VARIEDADES DE CONTACTO

Memoria presentada por  
Alfonso Carriazo Rubio  
para optar al grado de  
Doctor en Matemáticas.



Fdo.: Alfonso Carriazo  
Rubio.

Vº Bº

Los doctores directores:



J.L. Cabrerizo Jaraiz; M. Fernández Andrés; L.M. Fernández Fernández

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA, COMPUTACION, GEOMETRIA Y  
TOPOLOGIA

12

303

03 MAR. 1998

Alvarez

el Dpto. Álgebra, Comp. Geom. Top  
Fac. de Matemáticas  
3 de Marzo  
19 de Marzo  
20 de Marzo 1998

José A. Vicente

A mi madre, por todo lo que soy  
y lo que pueda llegar a ser.

A mis hermanos, Juan Luis y M<sup>a</sup>  
del Carmen, por su ánimo y su  
ayuda.

# Resumen

Las subvariedades slant constituyen un importante caso intermedio entre las subvariedades invariantes y anti-invariantes. De hecho, diremos que una subvariedad  $M$ , tangente al campo de estructura  $\xi$  de una variedad casi-contacto métrica  $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ , es *slant*, si para todo punto  $p \in M$  y para todo vector  $X \in T_pM$ , no proporcional a  $\xi_p$ ,  $\phi X$  forma un ángulo constante con  $T_pM$ , independientemente de la elección del punto y del vector. Dicho ángulo recibirá el nombre de *ángulo slant*.

En esta memoria, presentamos la definición de subvariedad slant de una variedad casi-contacto métrica y probamos las primeras propiedades y caracterizaciones referentes a dichas subvariedades. Centramos nuestra atención en el estudio de las subvariedades slant en variedades de contacto y, más concretamente, en variedades  $K$ -contacto y Sasakianas. Tratamos diversos aspectos de estas subvariedades: dimensión, minimalidad, curvaturas, etc. Merecen una especial atención los resultados obtenidos para subvariedades slant tridimensionales, así como la gran cantidad de ejemplos expuestos.

Además, establecemos sendos Teoremas de Existencia y Unicidad para subvariedades slant en espacios de curvatura  $\phi$ -seccional constante, obteniendo de esta manera interesantes aplicaciones.

Finalmente, extendemos la noción de subvariedad slant definiendo dos nuevos conceptos, las subvariedades *bi-slant* y, como caso particular de éstas, las subvariedades *semi-slant*. Estas últimas generalizan tanto a las subvariedades slant como a las semi-invariantes.

# Indice

<b>Introducción</b>	<b>iii</b>
<b>0 Preliminares</b>	<b>1</b>
0.1 Teoría General de Subvariedades. . . . .	1
0.2 Variedades de Contacto. . . . .	3
0.3 Subvariedades en Estructuras de Contacto. . . . .	6
<b>1 Subvariedades Slant</b>	<b>9</b>
1.1 Definición de Subvariedad Slant. . . . .	10
1.2 Primeros Resultados. . . . .	13
1.3 Dimensión de una Subvariedad Slant. . . . .	18
1.4 Ejemplos. . . . .	23
<b>2 Subvariedades Slant en Variedades de Contacto</b>	<b>46</b>
2.1 Subvariedades Slant en Variedades $K$ -contacto. . . . .	47
2.2 Subvariedades Slant de Dimensión 3. . . . .	50
2.3 Estructura en una Subvariedad Slant. . . . .	69
2.4 Curvatura Escalar. . . . .	78
2.5 Umbilicalidad y Minimalidad en Subvariedades Slant. . . . .	86
<b>3 Teoremas de existencia y unicidad</b>	<b>102</b>
3.1 Preliminares del Teorema de Existencia. . . . .	102
3.2 Teorema de Existencia. . . . .	108
3.3 Teorema de Unicidad. . . . .	116
3.4 Algunas Aplicaciones. . . . .	126

<b>4</b>	<b>Subvariedades Semi-slant</b>	<b>136</b>
4.1	Subvariedades Slant y Semi-slant. . . . .	137
4.2	Subvariedades Bi-slant. . . . .	140
4.3	Subvariedades Semi-slant de una Variedad Sasakiana. . . . .	151
	<b>Bibliografía</b>	<b>172</b>

# Introducción

La teoría de subvariedades, tanto de variedades casi Hermíticas, como de variedades casi-contacto, constituye hoy en día una de las áreas más interesantes en la Geometría Diferencial.

El desarrollo de la teoría de subvariedades de una variedad casi Hermítica comenzó, como un área separada de estudio, en el siglo pasado, a partir de la investigación de las curvas y superficies algebraicas. En este periodo, cabe citar el trabajo de algunos importantes matemáticos de la época, tales como Riemann, Picard, Enriques, Castelnuovo, Severi y Segre.

Sin embargo, fueron J.A. Schouten y D. van Dantzing ([38, 39]) quienes intentaron transferir, por primera vez, los resultados de la Geometría Diferencial de espacios con métrica Riemanniana y conexión afín al caso de espacios con estructuras complejas, a principios de los años 30. En sus artículos, aparece un espacio Hermítico con una conexión unitaria llamada simétrica. De manera independiente, E. Kaehler encontró un espacio con la misma conexión en 1933 ([27]), denominándose hoy tal espacio como espacio de Kaehler. Otros matemáticos, como S. Bochner, H. Guggenheimer y A. Lichnerowicz, han estudiado en profundidad tales espacios.

En 1947, A. Weil ([46]) señaló que en una variedad compleja existe un campo tensorial  $J$  de tipo  $(1, 1)$  cuyo cuadrado es igual a menos la transformación identidad del fibrado tangente, es decir,  $J^2 = -I$ . El mismo año, C. Ehresmann definió una variedad casi-compleja como una variedad diferenciable de dimensión par dotada de un tensor  $J$  con cuadrado menos la identidad. Una variedad casi-compleja recibe el nombre de variedad casi Hermítica si admite una métrica Riemanniana, compatible con el tensor  $J$ .

La teoría de las variedades complejas y casi-complejas se ha convertido en una de las ramas más importantes de la geometría diferencial moderna, y en ella han trabajado multitud de autores, entre los cuales podríamos

citar a Bochner, Boothby, Calabi, S.S. Chern, Goldberg, Hodge, Ishihara, S. Kobayashi, Lichnerowicz, Matshushima, Nomizu, Sasaki o Yano.

Por otra parte, la geometría de las variedades de contacto sigue un desarrollo paralelo. Una variedad diferenciable de dimensión  $2k + 1$  se dice variedad de contacto si sobre ella existe una 1-forma diferencial  $\eta$  tal que  $\eta \wedge (d\eta)^k \neq 0$  en todos los puntos.

El estudio de este tipo de variedades fue iniciado por S.S. Chern [18], W.M. Boothby y H.C. Wang [6]. Chern prueba que una estructura de contacto admite una reducción del grupo estructural del fibrado tangente a  $1 \times U(n)$ . J.W. Gray [23] llama a una variedad con esta reducción una variedad casi-contacto. Bouzon estudia en 1964 esta estructura en  $\mathbf{R}^{2m+1}$  y la llama estructura casi-cocompleja.

En 1960, el estudio de las variedades casi-contacto experimenta un nuevo y definitivo impulso, debido a S. Sasaki [35]. Este prueba que la existencia de una estructura casi-contacto sobre una variedad es equivalente a la existencia de una terna  $(\phi, \xi, \eta)$ , donde  $\phi$  es un tensor de tipo  $(1, 1)$ ,  $\xi$  es un campo de vectores y  $\eta$  es una 1-forma, tales que

$$\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad \eta(\xi) = 1.$$

Además, es posible definir en las variedades casi-contacto una métrica compatible con la estructura, apareciendo el concepto de variedad casi-contacto métrica.

Los resultados de Sasaki pusieron de manifiesto la relación existente entre las teorías de las variedades casi complejas y casi-contacto, permitiendo que estas últimas pudieran ser consideradas como la versión en dimensión impar de las primeras. En 1962, Sasaki y Hatakeyama estudian el tensor de Nijenhuis de  $\phi$  y las propiedades de las variedades casi-contacto cuando el campo  $\xi$  es de Killing ([36, 37]). Esto permitió la aparición en [24] de las definiciones de las estructuras contacto normales o Sasakianas y  $K$ -contacto.

Desde entonces, se ha definido y estudiado una gran variedad de estructuras casi-contacto. Multitud de autores han trabajado también en este área. Para una visión de conjunto de la geometría de contacto, véase [4].

Uno de los aspectos más interesantes en la teoría de subvariedades de variedades complejas y de contacto es el comportamiento del espacio tangente de la subvariedad con respecto a la estructura correspondiente.

Así, en la geometría compleja existen dos clases bien conocidas de subvariedades: las subvariedades complejas y las subvariedades totalmente reales.



Se dice que una subvariedad  $M$  de una variedad casi Hermítica  $(\widetilde{M}, g, J)$  es una subvariedad compleja si

$$J(T_p M) \subseteq T_p M,$$

para todo punto  $p \in M$ . Es decir,  $M$  es una subvariedad compleja de  $\widetilde{M}$  si y sólo si para cada vector no nulo  $X$ , tangente a  $M$  en un punto cualquiera  $p$ , el ángulo entre  $JX$  y  $T_p M$  es igual a cero.

El estudio de las subvariedades complejas de una variedad Kaehleriana, desde el punto de vista de la geometría diferencial, fue iniciado por E. Calabi y otros autores a principios de la década de los 50 ([7, 8]), habiéndose obtenido gran cantidad de resultados desde entonces.

En cuanto a las subvariedades totalmente reales ([50]), éstas vienen caracterizadas por la condición

$$J(T_p M) \subseteq T_p^\perp M,$$

para todo  $p \in M$ . En otras palabras, verifican que, para cada vector no nulo  $X \in T_p M$ , el ángulo entre  $JX$  y  $T_p M$  es igual a  $\pi/2$ , independientemente del punto  $p \in M$ .

Ambos tipos de subvariedades encuentran conceptos análogos en la geometría de las variedades casi-contacto: subvariedades invariantes y anti-invariantes, respectivamente. Así, se dice que una subvariedad  $M$  de una variedad casi-contacto métrica  $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$  es invariante si

$$\phi(T_p M) \subseteq T_p M,$$

para todo punto  $p \in M$ , mientras que  $M$  será anti-invariante si

$$\phi(T_p M) \subseteq T_p^\perp M,$$

independientemente también del punto  $p$  de la subvariedad. Así mismo, dado que  $\phi(\xi) = 0$ , podemos interpretar que en una subvariedad invariante (resp. anti-invariante) el ángulo entre  $\phi X$  y  $T_p M$  es igual a 0 (resp.  $\pi/2$ ), para todo vector  $X \in T_p M$ , no proporcional a  $\xi$ , y para todo punto  $p \in M$ .

Las subvariedades invariantes fueron definidas por M. Okumura ([32]), K. Yano y S. Ishihara ([49]). Respecto a las subvariedades anti-invariantes, destacan en este caso los trabajos de Yano y Kon ([50]).

En 1990, B.-Y. Chen presenta la tercera clase importante de subvariedades de una variedad casi Hermítica: las subvariedades slant. En [11], Chen define una subvariedad slant como aquella subvariedad  $M$  de una variedad casi Hermítica tal que, para cada vector no nulo  $X \in T_p M$ , el ángulo entre  $JX$  y el espacio tangente  $T_p M$  es una constante, independiente de la elección del punto  $p$  y del vector  $X$ . Dicho ángulo recibe el nombre de ángulo slant. Obviamente, esta definición generaliza las de las subvariedades complejas y totalmente reales, siendo éstas casos particulares de las subvariedades slant. Precisamente, una subvariedad slant se dirá propia cuando no sea compleja ni totalmente real, es decir, cuando su ángulo slant pertenezca al intervalo  $(0, \pi/2)$ .

No obstante, existe una noción previa de ángulo slant para superficies de una variedad Kaehleriana: el ángulo de Kaehler. Este concepto fue introducido y estudiado por S.S. Chern y J.G. Wolfson ([19]) como el ángulo comprendido entre  $J(\partial/\partial x)$  y  $\partial/\partial y$ , donde  $z = x + \sqrt{-1}y$  es un sistema local de coordenadas complejas sobre la superficie. Así, en [1] y [5] aparecen ya ejemplos de inmersiones slant de la esfera  $\mathbf{S}^2$  en el espacio proyectivo complejo  $\mathbf{CP}^n$ . Además, en [21] y [31], se estudian superficies minimales con ángulo de Kaehler constante.

Volviendo al concepto actual de inmersión slant, es decir, el introducido por Chen, este autor prueba en [11] las primeras propiedades fundamentales de tales inmersiones, además de dar diversos resultados para superficies slant en  $\mathbf{C}^2$ . En [14] y [15], B.-Y. Chen y Y. Tazawa estudian las superficies slant con codimensión 2 y las inmersiones slant en los espacios euclídeos complejos. Entre otras cosas, prueban que toda inmersión slant de una variedad compacta en  $\mathbf{C}^n$  ha de ser totalmente real. Además, clasifican las superficies slant propias de  $\mathbf{C}^2$  que estén contenidas en una esfera  $\mathbf{S}^3$ , en un hiperplano  $\mathbf{E}^3$ , o cuya aplicación de Gauss tenga rango menor que 2. En estos trabajos, aparecen diversos ejemplos de subvariedades slant en  $\mathbf{C}^2$  y  $\mathbf{C}^4$ .

Por otra parte, en [13], B.-Y. Chen y J.M. Morvan estudian algunas propiedades sobre la cohomología de las subvariedades slant. El libro [10] constituye un compendio de estos cuatro artículos de Chen, además de incluir algunas secciones nuevas, como el estudio de la estabilidad de una subvariedad totalmente real de una variedad Kaehleriana.

Posteriormente, T. Ikawa ([25]) calcula la longitud de la segunda forma fundamental de las superficies slant, mientras que S. Maeda, Y. Ohnita y S. Udagawa ([30]) estudian subvariedades slant en  $\mathbf{CP}^n$ . En [44, 45], Tazawa

construye inmersiones slant en  $C^n$ . En [12], Chen establece obstrucciones para la existencia de subvariedades slant, empleando para ello un invariante geométrico adecuado. Más recientemente, en [48], J. Yang estudia las superficies slant con curvatura media constante en  $C^2$ .

Finalmente, en un trabajo de reciente aparición ([17]), B.-Y. Chen y L. Vrancken demuestran un importante teorema de existencia y unicidad para inmersiones slant en un espacio de curvatura holomorfa constante. Ello les permite determinar un gran número de inmersiones slant, destacando los primeros ejemplos aparecidos en el espacio hiperbólico  $CH^2(-4)$ .

A este respecto, hemos de señalar que un par de errores de este artículo han sido corregidos posteriormente en [16], a raíz de las observaciones realizadas por el autor de esta memoria.

La bibliografía existente en estos momentos sobre subvariedades slant de variedades casi Hermíticas se completa con un trabajo de N. Papaghiuc ([33]), donde se presentan las subvariedades semi-slant, generalización tanto de las subvariedades slant, como de las subvariedades CR. A ellas hacemos referencia en el Capítulo 4.

El objetivo de esta memoria es presentar en la geometría de contacto el concepto análogo al de subvariedad slant en la geometría compleja, generalizando de manera natural las subvariedades invariantes y anti-invariantes.

El primer problema que encontramos para ello es el del papel que debe jugar el campo de estructura  $\xi$  respecto al fibrado tangente de la subvariedad. En los distintos estudios realizados en subvariedades de variedades casi-contacto, es usual considerar los casos en que dicho campo  $\xi$  sea siempre tangente o normal a la subvariedad. Sin embargo, tal y como señalamos en la primera sección del Capítulo 1, se sabe que toda subvariedad  $M$  de una variedad de contacto tal que  $\xi$  sea normal a  $M$ , ha de ser anti-invariante. Dado que nuestro estudio se centra en las estructuras de contacto y, fundamentalmente, en estructuras  $K$ -contacto y Sasakianas, carecerá entonces de interés para nosotros el definir subvariedades slant con  $\xi$  normal. Así, a lo largo de toda la memoria trabajaremos con subvariedades de una variedad casi-contacto métrica, tangentes al campo de estructura.

Previamente, en el Capítulo 0, presentamos un breve resumen de aquellos resultados de la Geometría Riemanniana y de la Geometría de Contacto que necesitaremos en los capítulos posteriores. Además, aprovechamos para fijar una notación uniforme, que facilitará la lectura de los resultados que se presentan en las siguientes secciones.

En el Capítulo 1, presentamos la definición de subvariedad slant de una variedad casi-contacto métrica y probamos las primeras propiedades de dichas subvariedades. Concretamente, diremos que una subvariedad  $M$  de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$ , tal que  $\xi \in TM$ , es *slant* si para todo punto  $p \in M$  y para todo vector tangente  $X \in T_pM$ , no proporcional a  $\xi_p$ ,  $\phi X$  forma un ángulo  $\theta$  constante con  $T_pM$ . Dicho ángulo recibirá el nombre de *ángulo slant*. Como vemos, esta definición es análoga a la dada por Chen en el caso complejo. Además, para  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi/2$ , obtenemos las subvariedades invariantes y anti-invariantes, respectivamente. El resto de las subvariedades slant recibirán el nombre de subvariedades *slant propias*.

De igual manera, presentamos en la Sección 1.1 la definición de *distribución slant* de una variedad casi-contacto métrica, probando que una subvariedad es slant si y sólo si la distribución  $\mathcal{D}$  ortogonal a  $\xi$  en el fibrado tangente es slant. La conveniencia de la introducción de esta noción de distribución slant quedará de manifiesto en el Capítulo 4, pues nos será de gran utilidad para definir las subvariedades bi-slant y semi-slant, que comentaremos en su momento.

Como resultado fundamental de la Sección 1.2, aparece el Teorema 1.2.1, el cual establece una caracterización de las subvariedades slant en función del cuadrado de la proyección tangente de la estructura casi-contacto sobre la subvariedad. Así, dicho teorema afirma que una subvariedad  $M$  de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$ , tal que  $\xi \in TM$ , es slant si y sólo si existe una constante  $\lambda \in [0, 1]$  tal que  $T^2 = -\lambda I + \lambda \eta \otimes \xi$ , siendo en tal caso  $\lambda = \cos^2 \theta$ , con  $\theta$  el ángulo slant de  $M$ .

Este teorema, al cual realizamos continuas referencias a lo largo de la memoria, nos permitirá resolver con facilidad innumerables cálculos, entre los que destacan los realizados en la Proposición 1.2.3 y los Corolarios 1.2.4, 1.2.5 y 1.2.6, que nos llevan a la obtención de un tipo especial de referencia ortonormal en una subvariedad slant propia tridimensional de una variedad casi-contacto métrica de dimensión 5: la referencia slant adaptada. El especial comportamiento de dicha referencia nos permitirá resolver algunas cuestiones en este contexto, que, como se ve más adelante, constituye el primer caso no trivial para las subvariedades slant.

La Sección 1.3 contiene el estudio de la dimensión de una subvariedad slant. Tras algunos resultados de carácter general, el Teorema 1.3.5 pone de manifiesto que toda subvariedad slant no anti-invariante ha de tener dimensión impar. Dado que, para nosotros, el campo  $\xi$  es siempre tangente

a las subvariedades slant, esto implica que las primeras subvariedades slant interesantes serán las de dimensión 3, que, en virtud de un resultado previo, habrán de estar inmersas en una variedad de dimensión 5 al menos.

El primer capítulo concluye con una amplia sección dedicada a la obtención de ejemplos de subvariedades slant. Tras la constatación de que, como cabía esperar, toda subvariedad slant de una variedad casi Hermítica proporciona un ejemplo de subvariedad slant de una variedad casi-contacto métrica, sin más que efectuar el producto usual por  $\mathbf{R}$ , emprendemos la búsqueda de subvariedades slant en una variedad de contacto, propiedad que no verifica la estructura mencionada.

Consideramos entonces la variedad  $\mathbf{R}^{2m+1}$  con su estructura Sasakiana usual  $(\phi_0, \xi, \eta, g)$  y, en el caso en que  $m$  sea par, definimos una nueva estructura casi-contacto  $\phi_1$ , compatible con la anterior. Especial importancia tendrá la variedad  $(\mathbf{R}^5, \phi_1, \xi, \eta, g)$ , que nos facilitará posteriormente interesantes ejemplos y contraejemplos.

En esta sección, resulta fundamental el Teorema 1.4.7, que nos proporciona un método para encontrar ejemplos en  $(\mathbf{R}^5, \phi_0, \xi, \eta, g)$ , a partir de los ejemplos que Chen da en  $\mathbf{C}^2$  en [10].

En nuestra opinión, merece una mención especial la cantidad de ejemplos de subvariedades slant que incluimos en esta memoria. Por una parte, esto demuestra el interés del trabajo realizado, al quedar patente la existencia de los objetos que se estudian. Por otra, la diversidad de ejemplos nos permitirá ilustrar la necesidad y la suficiencia de las condiciones de muchos de los teoremas que probamos, así como el desarrollo de algunas secciones, como la Sección 2.5.

El Capítulo 2 recoge los resultados fundamentales sobre subvariedades slant en variedades de contacto, propiamente dichas. En realidad, observamos que la obtención de resultados teóricos se facilita notablemente al trabajar en variedades al menos  $K$ -contacto. Esto es lo que ocurre en la Sección 2.1, en la cual se estudia  $\nabla Q$  para una subvariedad slant  $M$ , siendo  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita de  $M$ ,  $Q = T^2$  y

$$(\nabla_X Q)Y = \nabla_X QY - Q\nabla_X Y,$$

para todos  $X, Y \in TM$ . El Teorema 2.1.5 nos proporciona una caracterización de las subvariedades slant en estos términos. Una subvariedad  $M$ , tangente al campo estructural de una variedad  $K$ -contacto  $\tilde{M}$ , es slant, si y sólo si se verifican las condiciones:

- 1.- El endomorfismo  $Q|_{\mathcal{D}}$  tiene un único autovalor en cada punto de  $M$ .
- 2.- Existe una función  $\lambda : M \rightarrow [0, 1]$  tal que

$$(\nabla_X Q)Y = \lambda(g(X, TY)\xi - \eta(Y)TX),$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

Además, en este caso,  $\lambda = \cos^2 \theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo slant de  $M$ . Como consecuencia inmediata de este hecho, el Corolario 2.1.6 establece que la condición 2 caracteriza a las subvariedades slant tridimensionales de una variedad  $K$ -contacto.

En la Sección 2.2, se estudian  $\nabla T$  y  $\nabla N$ , donde por  $T$  (resp.  $N$ ) denotamos la proyección tangente (resp. normal) de la estructura casi-contacto  $\phi$ . Como veremos,  $\nabla T$  se define de manera análoga a  $\nabla Q$ , mientras que para definir  $\nabla N$  es preciso usar la conexión normal  $D$ .

El Teorema 2.2.5 nos ofrece una caracterización de las subvariedades slant propias tridimensionales en términos de  $\nabla T$ , apareciendo entonces el concepto de subvariedad *slant Sasakiana*. Diremos que una subvariedad slant propia, con ángulo  $\theta$ , es *slant Sasakiana*, si

$$(\nabla_X T)Y = \cos^2 \theta(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X),$$

para todo  $X, Y \in TM$ . Estas subvariedades constituirán un interesante objeto de estudio, desempeñando un papel análogo al de las subvariedades Kaehlerianas que Chen define en [11]. Especial relevancia tendrá la expresión que, en virtud del Teorema 2.2.9, verifica el operador de Weingarten de una subvariedad slant Sasakiana en una variedad Sasakiana.

En cuanto a  $\nabla N$ , para obtener resultados interesantes hemos de restringirnos a un marco más concreto. Así, estudiamos una subvariedad tridimensional  $M$  de una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$ , con dimensión 5. En estas condiciones, probamos en el Teorema 2.2.17 que, si  $M$  es invariante, anti-invariante o slant propia minimal, entonces

$$(\nabla_X N)Y = 2\eta(X)NTY + \eta(Y)NTX,$$

para todos  $X, Y \in TM$ . Además, en el caso slant propio, el Teorema 2.2.18 completa este resultado con un recíproco, teniendo para ello que añadir una leve hipótesis adicional. Una vez más, aparece una subvariedad de dimensión 3 en una variedad de dimensión 5, caso paradigmático en el estudio de las subvariedades slant en la geometría de contacto.

En la Sección 2.3, estudiamos la posibilidad de definir una estructura de contacto en una subvariedad slant no invariante. Es fácil probar que una subvariedad slant de una variedad  $K$ -contacto es  $K$ -contacto con respecto a alguna estructura si y sólo si es invariante, tal y como se expone en el Corolario 2.3.4. En cuanto al problema planteado inicialmente, el Teorema 2.3.6 nos da una solución, si bien ésta es parcial: es imposible inducir una estructura de contacto sobre una subvariedad slant tridimensional no invariante. Sin embargo, la metodología empleada en esta sección también ofrece resultados positivos, como son el Lema 2.3.8, el Teorema 2.3.9 y el Corolario 2.3.10, donde, esencialmente, aparecen nuevas caracterizaciones de las subvariedades slant.

Las dos últimas secciones del segundo capítulo están dedicadas a tratar sendos temas muy concretos. En primer lugar, en la Sección 2.4 se estudian la curvatura escalar y la curvatura escalar normal de una subvariedad slant tridimensional de una variedad Sasakiana con dimensión 5. Además, se introduce el concepto de curvatura seccional normal y se relaciona con la curvatura escalar. La importancia de este estudio se basa en la evidencia de la aplicación práctica de muchos resultados anteriores.

En segundo lugar, la Sección 2.5 recoge algunas notas sobre umbilicalidad y minimalidad en subvariedades slant. Destaca el Teorema 2.5.12, en el que se aprovechan ciertas condiciones sobre dos estructuras casi-contacto compatibles, para obtener la minimalidad de una subvariedad, slant propia en una de dichas estructuras y anti-invariante en la otra.

El Capítulo 3 es uno de los puntos centrales de nuestro trabajo. En él se recogen los teoremas de existencia y unicidad para subvariedades slant de un espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante. Dichos resultados constituyen el análogo de contacto a los teoremas presentados por Chen y Vrancken, en el caso complejo, en [17].

La Sección 3.1 está dedicada a la preparación del Teorema de Existencia, el cual se enuncia y demuestra en la siguiente sección. En cuanto al Teorema de Unicidad, éste aparece en la Sección 3.3. Su demostración se realiza de manera análoga a la expuesta por Chen y Vrancken en [16, 17], si bien los cálculos correspondientes resultan algo más extensos.

Ahora bien, la conveniencia de establecer el Teorema de Existencia en el caso de contacto, radica en la posibilidad de encontrar prontas consecuencias del mismo. Así, en la Sección 3.4, ofrecemos fundamentalmente dos aplicaciones. En primer lugar, aparecen multitud de ejemplos de subvariedades

slant propias tridimensionales en un espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante  $-3$  y dimensión  $5$ , que denotamos por  $\widetilde{M}^5(-3)$ . Además, podremos obtener dichos ejemplos con curvatura escalar o curvatura media prefijadas, tal y como se muestra en los Corolarios 3.4.3 y 3.4.4.

La segunda aplicación nos permite obtener ejemplos de subvariedades slant propias tridimensionales en  $\widetilde{M}^5(-7)$ ; variedad Sasakiana que, en virtud de la clasificación dada por S. Tanno en [41], resulta sustancialmente distinta de  $\widetilde{M}^5(-3)$ . Encontramos, por tanto, los primeros ejemplos de subvariedades slant propias en una variedad Sasakiana que no es un  $\mathbf{R}^{2m+1}$  con su estructura Sasakiana usual.

Comenzamos el Capítulo 4 con un estudio acerca del comportamiento de las subvariedades slant en relación con dos de los ejemplos clásicos para la obtención de variedades casi-complejas a partir de variedades casi-contacto y viceversa. En ambos, observamos la necesidad de emplear el concepto de subvariedad semi-slant dado por Papaghiuc en [33]. Así, el Teorema 4.1.2 establece que, si  $M$  es una subvariedad slant no invariante de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$ , entonces  $M \times \mathbf{R}$  es una subvariedad semi-slant de la variedad casi Hermítica  $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$ , con la estructura usual.

Por otra parte, en el Teorema 4.1.5 se examina el caso de una hipersuperficie de una variedad casi Hermítica, obteniéndose un resultado similar al anterior.

Este estudio nos da idea de la conveniencia de adaptar la noción de subvariedad semi-slant de Papaghiuc al caso de contacto. Para ello, definimos previamente la noción más general de subvariedad bi-slant.

La memoria se cierra con sendas secciones dedicadas a las subvariedades bi-slant y semi-slant, en variedades de contacto. Estos conceptos generalizan tanto a las subvariedades slant como a las subvariedades semi-invariantes, tal y como se pone de manifiesto en diversas ocasiones. Llamaremos subvariedad *bi-slant* a aquella subvariedad  $M$  de una variedad casi-contacto métrica, cuyo fibrado tangente admita una descomposición del tipo

$$TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle,$$

siendo  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  dos distribuciones slant. En el caso en que  $\mathcal{D}_1$  sea una distribución invariante y  $\mathcal{D}_2$  sea slant con ángulo no nulo, obtenemos las subvariedades *semi-slant*.

En lo referente a las subvariedades bi-slant, cabe destacar un par de resultados. Por una parte, la Proposición 4.2.8 aclara la relación con las



subvariedades semi-invariantes. Por otra, el Teorema 4.2.10 supone una generalización del ya comentado Teorema 1.2.1.

En cuanto a las subvariedades semi-slant, la Sección 4.3 se centra fundamentalmente en el estudio de la integrabilidad de las distribuciones  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$ , así como en la generalización del concepto de subvariedad slant Sasakiana, concluyendo de esta manera la materia presentada en nuestro trabajo.

Durante el proceso de redacción de esta memoria, hemos sabido, gracias al Profesor David E. Blair, de la existencia de una prepublicación de Antonio Lotta, estudiante de doctorado de la Universidad de Bari, titulada “Slant submanifolds in contact geometry”.

En este trabajo, se define una subvariedad slant de una variedad casi-contacto métrica como una subvariedad  $M$  tal que, para todo  $x \in M$  y todo  $X \in T_x N$ , con  $X$  y  $\xi_x$  linealmente independientes, el ángulo entre  $\phi X$  y  $T_x M$  sea una constante, que no dependa de las elecciones ni del punto ni del vector. Como puede verse, nuestra definición aparece como un caso particular de ésta, cuando  $\xi$  sea tangente a la subvariedad. Posteriormente, Lotta llega a la conclusión de que, si la variedad ambiente es de contacto, entonces  $\xi$  ha de ser tangente a toda subvariedad slant, hecho que señalábamos nosotros desde el principio.

Hay otros aspectos destacables en el trabajo de Lotta. Así, este autor proporciona una caracterización de las subvariedades slant de una variedad  $K$ -contacto, probando un recíproco del resultado que nosotros presentamos como Proposición 2.3.3. Por otra parte, en una última sección, examina los tres ejemplos clásicos que nosotros tratamos en el Ejemplo 1.4.1 y en los Teoremas 4.1.2 y 4.1.5., sin emplear las subvariedades semi-slant.

Una segunda prepublicación del mismo autor, con Anna Maria Pastore, titulada “Foliations of the Sasakian space  $\mathbf{R}^{2n+1}$  by minimal slant submanifolds”, se desarrolla en una línea de investigación totalmente distinta de la presentada en esta memoria.

No quisiéramos terminar esta introducción sin dejar constancia del gran desarrollo que la geometría de las subvariedades slant está experimentando en el seno de la Geometría Kaehleriana. Desde la aparición del correspondiente artículo de Chen en 1990, se han realizado diversos trabajos, estableciéndose importantes resultados teóricos y prácticos en esta área, tal y como señalamos anteriormente. Por todo ello, cabe esperar que la memoria que presentamos

permita también un rápido progreso en la investigación de las subvariedades slant en la Geometría de Contacto, caso aparentemente análogo al anterior, pero con las suficientes diferencias significativas como para constituir un interesante objeto de estudio en sí mismo.

Antes de pasar al desarrollo de la materia referida, quisiera mostrar mi agradecimiento a todas aquellas personas que, de una manera u otra, han contribuido a la realización de esta memoria.

En primer lugar, he de agradecer al Profesor David E. Blair, de Michigan State University, U.S.A., todos sus consejos y sugerencias. También he contraído una deuda de gratitud con el Profesor Bang-Yen Chen, de Michigan State University, quien, con sus consejos, me ha animado desde los primeros pasos de mi investigación en este tema, facilitándome además algunos materiales que, de otra forma, todavía no habría podido consultar. Por otra parte, he de agradecer al Profesor Luc Vrancken, de Katholieke Universiteit Leuven, Bélgica, su amabilidad al responder mis preguntas sobre el Teorema de Existencia y Unicidad en variedades Kaehlerianas, así como las aclaraciones efectuadas al respecto.

A los Profesores Dr. D. José Luis Cabrerizo Jaraiz, Dr. D. Manuel Fernández Andrés y Dr. D. Luis Manuel Fernández Fernández, directores de este trabajo, he de darles las gracias por su inestimable ayuda y colaboración en cada una de las etapas de creación y escritura del mismo.

También quisiera mostrar mi agradecimiento al Profesor Dr. D. Francisco Javier Echarte Reula, así como al Sr. Director del Departamento de Algebra, Computación, Geometría y Topología, Profesor Dr. D. José Luis Vicente Córdoba, por las facilidades de todo tipo recibidas para la elaboración de esta memoria. A mis compañeros de despacho, Profesores Dr. D. Manuel Cárdenas Escudero y Dr. D. Francisco Fernández Lasheras, por su amistad y por la calurosa acogida que me han dispensado desde mi incorporación al Departamento de Algebra, Computación, Geometría y Topología de la Universidad de Sevilla. A quienes han compartido conmigo mis primeras obligaciones docentes en dicha Universidad, Profesores Dr. D. Rafael Ayala Gómez, Dña. Desamparados Fernández Ternero, Dr. D. Francisco Jiménez Alcón y Dr. D. Francisco Ramírez López, por ayudarme en dichas tareas y permitirme dedicar gran parte de mi tiempo a este proyecto. En general, a todos mis compañeros de Departamento, por sus continuas muestras de

apoyo, así como al personal de la Biblioteca de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, por su trato siempre amable y su interés en facilitar la búsqueda de documentación. Y, por supuesto, a mi madre, mis hermanos y todos aquellos amigos que me han animado a llevar a buen término este trabajo.

# Capítulo 0

## Preliminares

Presentamos a continuación las definiciones y los resultados que hemos considerado imprescindibles para poder llevar a cabo una completa comprensión de los capítulos posteriores. Aunque se trata de conceptos bien conocidos en el campo de la Geometría Riemanniana y de la Geometría de las Variedades de Contacto, hemos decidido incluirlos aquí, con una doble intención. Por un lado, facilitar la lectura de este trabajo, así como las referencias a los resultados empleados. Por otro, fijar desde el principio una notación uniforme, que respetaremos siempre que nos sea posible.

Para ello, comenzamos con una sección de generalidades acerca de las subvariedades en la Geometría Riemanniana. Los resultados que aquí se refieren pueden encontrarse en multitud de manuales y libros sobre la materia, como, por ejemplo, [9, 28, 29, 40]. Las dos secciones siguientes están dedicadas a la introducción de los tipos de variedades casi-contacto en los que trabajaremos y al estudio de las primeras propiedades elementales de una subvariedad de una variedad casi-contacto. A este respecto, pueden consultarse, por ejemplo, [4, 50, 51, 52].

### 0.1 Teoría General de Subvariedades.

Sea  $M$  una variedad Riemanniana isométricamente inmersa en otra variedad Riemanniana  $\widetilde{M}$ . En lo sucesivo, denotaremos por  $g$  tanto a la métrica de  $M$  como a la de  $\widetilde{M}$ . Sean  $T\widetilde{M}$  el álgebra de Lie de los campos vectoriales en  $\widetilde{M}$ ,  $TM$  el álgebra de Lie de los campos vectoriales en  $M$  y  $T^\perp M$  el

conjunto de todos los campos tangentes a  $\widetilde{M}$  y normales a  $M$ .

Si denotamos por  $\nabla$  y  $\widetilde{\nabla}$  las conexiones de Levi-Civita de  $M$  y  $\widetilde{M}$  respectivamente, entonces, las fórmulas de Gauss y de Weingarten vienen dadas por

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y), \quad (0.1.1)$$

$$\widetilde{\nabla}_X V = -A_V X + D_X V, \quad (0.1.2)$$

para todos  $X, Y \in TM$  y todo  $V \in T^\perp M$ , donde  $D$  es la conexión en el fibrado normal,  $\sigma$  la segunda forma fundamental de  $M$  en  $\widetilde{M}$  y  $A_V$  el endomorfismo de Weingarten asociado con  $V$ . La segunda forma fundamental  $\sigma$  y el operador de Weingarten  $A$  están relacionados mediante

$$g(A_V X, Y) = g(\sigma(X, Y), V), \quad (0.1.3)$$

para todos  $X, Y \in TM$  y todo  $V \in T^\perp M$ .

Se define el vector curvatura media de  $M$  por

$$H = (1/m) \text{traza } \sigma = (1/m) \sum_{i=1}^m \sigma(e_i, e_i), \quad (0.1.4)$$

donde  $m$  es la dimensión de  $M$  y  $\{e_1, \dots, e_m\}$  es una referencia local ortonormal del fibrado tangente  $TM$  de  $M$ . Se dice que  $M$  es minimal si  $H$  se anula idénticamente.

Sea  $M$  una subvariedad de dimensión  $m$  de una variedad Riemanniana  $\widetilde{M}$  de dimensión  $\widetilde{m}$ . Elegimos un campo local de referencias ortonormales

$$e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{\widetilde{m}}$$

tales que, restringidos a  $M$ , los vectores  $e_1, \dots, e_m$  sean tangentes a  $M$  y, por tanto,  $e_{m+1}, \dots, e_{\widetilde{m}}$  sean normales a  $M$ .

Para cada campo vectorial  $X$  tangente a la subvariedad  $M$ , podemos escribir

$$\widetilde{\nabla}_X e_i = \sum_{j=1}^m \omega_i^j(X) e_j + \sum_{s=m+1}^{\widetilde{m}} \omega_i^s(X) e_s, \quad (0.1.5)$$

$$\widetilde{\nabla}_X e_r = \sum_{j=1}^m \omega_r^j(X) e_j + \sum_{s=m+1}^{\widetilde{m}} \omega_r^s(X) e_s, \quad (0.1.6)$$

para  $i = 1, \dots, m$  y  $r = m + 1, \dots, \widetilde{m}$ . Las 1-formas  $\omega_i^j$ ,  $\omega_i^s$  y  $\omega_r^s$  dadas por (0.1.5) y (0.1.6) reciben el nombre de *formas de conexión* de  $M$  en  $\widetilde{M}$ . Se verifica trivialmente que

$$\omega_j^i + \omega_i^j = 0, \quad (0.1.7)$$

para todos  $i, j = 1, \dots, m$ .

Denotemos por  $R$  y  $\widetilde{R}$  los tensores de curvatura de  $M$  y  $\widetilde{M}$ , respectivamente, y por  $R^D$  el tensor de curvatura de la conexión normal  $D$ . Entonces, la *ecuación de Gauss* y la *ecuación de Ricci* vienen dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X, Y; Z, W) &= R(X, Y; Z, W) + g(\sigma(X, Z), \sigma(Y, W)) - \\ &\quad - g(\sigma(X, W), \sigma(Y, Z)) \end{aligned} \quad (0.1.8)$$

y

$$R^D(X, Y; U, V) = \widetilde{R}(X, Y; U, V) + g([A_U, A_V](X), Y), \quad (0.1.9)$$

para todos  $X, Y, Z, W \in TM$  y todos  $U, V \in T^\perp M$ .

Con respecto a la segunda forma fundamental  $\sigma$ , se define la derivada covariante  $\overline{\nabla}\sigma$  de  $\sigma$  con respecto a la conexión en  $TM \oplus T^\perp M$  como

$$(\overline{\nabla}_X \sigma)(Y, Z) = D_X(\sigma(Y, Z)) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z), \quad (0.1.10)$$

con  $X, Y, Z \in TM$ . La *ecuación de Codazzi* viene dada por

$$(\widetilde{R}(X, Y)Z)^\perp = (\overline{\nabla}_X \sigma)(Y, Z) - (\overline{\nabla}_Y \sigma)(X, Z), \quad (0.1.11)$$

para todos  $X, Y, Z \in TM$ , donde  $(\widetilde{R}(X, Y)Z)^\perp$  denota la componente normal de  $\widetilde{R}(X, Y)Z$ .

## 0.2 Variedades de Contacto.

Sea  $\widetilde{M}$  una variedad diferenciable de dimensión impar. Se dice que  $\widetilde{M}$  es una *variedad casi-contacto* si existen en  $\widetilde{M}$  un tensor  $\phi$  de tipo  $(1, 1)$ , un campo vectorial global  $\xi$  (*campo vectorial de estructura*) y una 1-forma global  $\eta$  tales que

$$\eta(\xi) = 1 \quad (0.2.1)$$

y

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad (0.2.2)$$

para todo  $X \in T\widetilde{M}$ . También se dice que  $\widetilde{M}$  tiene una  $(\phi, \xi, \eta)$ -estructura o una estructura casi-contacto. En estas condiciones, es inmediato probar que

$$\phi\xi = 0, \quad (0.2.3)$$

$$\eta(\phi X) = 0, \quad (0.2.4)$$

para todo  $X \in T\widetilde{M}$  y que  $\phi$  tiene rango  $2k$ , siendo  $\dim \widetilde{M} = 2k + 1$ .

Sea ahora  $g$  una métrica Riemanniana sobre  $\widetilde{M}$ . Se dice que  $g$  es una métrica adaptada a la estructura casi-contacto de  $\widetilde{M}$  si se verifican

$$g(X, \xi) = \eta(X), \quad (0.2.5)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad (0.2.6)$$

para todos  $X, Y \in T\widetilde{M}$ . Se deduce de (0.2.1) y (0.2.5) que  $\xi$  es unitario para  $g$  y que  $\eta$  es la 1-forma dual de  $\xi$ . Una variedad casi-contacto dotada de una métrica  $g$  adaptada a la estructura se llama *variedad casi-contacto métrica* y se dice que tiene una  $(\phi, \xi, \eta, g)$ -estructura o una estructura casi-contacto métrica.

En una variedad casi-contacto métrica, se cumple

$$g(\phi X, Y) + g(X, \phi Y) = 0, \quad (0.2.7)$$

para todos  $X, Y \in T\widetilde{M}$ , lo cual implica, en particular, que

$$g(X, \phi X) = 0, \quad (0.2.8)$$

para todo  $X \in T\widetilde{M}$ .

Se denota por  $\Phi$  la 2-forma en  $\widetilde{M}$  definida por

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y), \quad (0.2.9)$$

para todos  $X, Y \in T\widetilde{M}$ . La 2-forma  $\Phi$  recibe el nombre de *2-forma fundamental* de  $\widetilde{M}$ . En virtud de (0.2.7), se tiene que  $\Phi$  es antisimétrica. Además, como  $\phi$  tiene rango  $2k$ , se verifica que:

$$\eta \wedge \Phi^k \neq 0. \quad (0.2.10)$$

Se dice que una variedad casi-contacto métrica es *de contacto métrica* si  $\Phi = d\eta$ . Entonces, a  $\eta$  se le llama *forma de contacto* y, en virtud de (0.2.10), se tiene que:

$$\eta \wedge (d\eta)^k \neq 0.$$

Si  $\xi$  es un campo vectorial de Killing con respecto a  $g$ , la estructura de contacto métrica recibe el nombre de *estructura  $K$ -contacto*. Es fácil probar que una variedad de contacto métrica es  $K$ -contacto si y sólo si

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -\phi X, \quad (0.2.11)$$

para todo  $X \in T\widetilde{M}$ , donde  $\widetilde{\nabla}$  denota la conexión de Levi-Civita de  $\widetilde{M}$ . Además, en una variedad  $K$ -contacto se verifica que

$$\widetilde{R}(X, \xi; \xi, X) = 1, \quad (0.2.12)$$

para todo  $X$  unitario, normal a  $\xi$ , donde  $\widetilde{R}$  denota el tensor de curvatura de la variedad.

Se dice que la estructura casi-contacto de  $\widetilde{M}$  es *normal* si

$$[\phi, \phi] + 2d\eta \otimes \xi = 0, \quad (0.2.13)$$

donde  $[\phi, \phi]$  es la torsión de Nijenhuis de  $\phi$ . Una variedad *Sasakiana* es una variedad de contacto métrica normal. Se prueba que toda variedad Sasakiana es  $K$ -contacto y que una variedad casi-contacto métrica es Sasakiana si y sólo si

$$(\widetilde{\nabla}_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \quad (0.2.14)$$

para todos  $X, Y \in T\widetilde{M}$ . Además, si  $\widetilde{M}$  es Sasakiana, se verifica que, para todos  $X, Y \in T\widetilde{M}$ :

$$\widetilde{R}(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y. \quad (0.2.15)$$

Se dice que una sección plana  $\pi$  en el espacio tangente  $T_x(\widetilde{M})$  en un punto  $x$  de una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$  es una  $\phi$ -sección si está generada por un vector  $X$  ortogonal a  $\xi$  y por  $\phi X$ . La curvatura seccional  $K(\pi)$  con respecto a una  $\phi$ -sección  $\pi$  determinada por un vector  $X$  recibe el nombre de *curvatura  $\phi$ -seccional*. Se dice que una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$  es un *espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante* y se denota por  $\widetilde{M}(c)$  si tiene curvatura  $\phi$ -seccional constante  $c$ .

El tensor de curvatura de un espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante  $\widetilde{M}(c)$  viene dado por

$$\widetilde{R}(X, Y)Z = \frac{c+3}{4}(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) +$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{c-1}{4}(\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi + \\
& \quad + \Phi(Z, Y)\phi X - \Phi(Z, X)\phi Y + 2\Phi(X, Y)\phi Z), \quad (0.2.16)
\end{aligned}$$

para todos  $X, Y, Z \in T\widetilde{M}$ .

Pueden encontrarse ejemplos de variedades Sasakianas y espacios de curvatura  $\phi$ -seccional constante en [4].

### 0.3 Subvariedades en Estructuras de Contacto.

Sea ahora  $M$  una subvariedad de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$ . Consideraremos sobre  $M$  la métrica inducida por la de  $\widetilde{M}$ , que denotaremos también por  $g$ . Así, la inmersión de  $M$  en  $\widetilde{M}$  es isométrica. Dado  $X \in TM$ , escribiremos

$$\phi X = TX + NX, \quad (0.3.1)$$

donde  $TX$  y  $NX$  son las componentes tangente y normal de  $\phi X$ , respectivamente. Entonces,  $T$  es un endomorfismo del fibrado tangente de  $M$  y  $N$  es una 1-forma de  $TM$  con valores en  $T^\perp M$ .

Se dice que la subvariedad  $M$  es *invariante* si  $N$  es idénticamente nula, es decir, si  $\phi X \in TM$ , para cada  $X \in TM$ . Por otra parte, se dice que  $M$  es una subvariedad *anti-invariante* si  $T$  se anula idénticamente, es decir, si  $\phi X \in T^\perp M$ , para todo  $X \in TM$ .

Para  $V \in T^\perp M$ , escribiremos

$$\phi V = tV + nV, \quad (0.3.2)$$

donde  $tV$  (resp.  $nV$ ) denota la componente tangente (resp. normal) de  $\phi V$ . Entonces,  $t$  es una 1-forma de  $T^\perp M$  con valores en  $TM$  y  $n$  es un endomorfismo de  $T^\perp M$ .

En virtud de (0.2.7), (0.3.1) y (0.3.2), se deduce que

$$g(TX, Y) = -g(X, TY), \quad (0.3.3)$$

$$g(nV, U) = -g(V, nU), \quad (0.3.4)$$

$$g(NX, V) = -g(X, tV), \quad (0.3.5)$$

para todos  $X, Y \in TM$  y todos  $U, V \in T^\perp M$ .

Así mismo, en virtud de (0.2.2), (0.3.1) y (0.3.2), si  $\xi \in TM$ , entonces para todo  $X \in TM$  y todo  $V \in T^\perp M$ , se tiene que:

$$-X + \eta(X)\xi = T^2X + tNX, \quad (0.3.6)$$

$$NTX + nNX = 0, \quad (0.3.7)$$

$$TtV + tnV = 0, \quad (0.3.8)$$

$$-V = NtV + n^2V. \quad (0.3.9)$$

Podemos obtener otras fórmulas relevantes si la variedad  $\widetilde{M}$  es  $K$ -contacto y  $\xi \in TM$ . En tal caso, en virtud de (0.2.11) y de las fórmulas de Gauss (0.1.1) y de Weingarten (0.1.2), se deduce que

$$\nabla_X \xi = -TX, \quad (0.3.10)$$

$$\sigma(X, \xi) = -NX, \quad (0.3.11)$$

$$A_V \xi = tV, \quad (0.3.12)$$

$$\sigma(\xi, \xi) = 0, \quad (0.3.13)$$

para todo  $X \in TM$  y todo  $V \in T^\perp M$ , donde se está denotando por  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita de  $M$ .

Para terminar, señalemos algunos hechos referentes a las subvariedades invariantes. En virtud de (0.3.5), se tiene que, si  $M$  es invariante, entonces:

$$t = 0. \quad (0.3.14)$$

Por otro lado, consideremos una subvariedad invariante  $M$  de una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$  tal que  $\xi \in TM$ . Entonces, aplicando la fórmula de Gauss, se verifican, para todos  $X, Y \in TM$ ,

$$\widetilde{\nabla}_X \phi Y = \nabla_X \phi Y + \sigma(X, \phi Y),$$

$$\phi(\widetilde{\nabla}_X Y) = \phi(\nabla_X Y) + \phi(\sigma(X, Y)),$$

de donde:

$$(\widetilde{\nabla}_X \phi)Y = (\nabla_X \phi)Y + \sigma(X, \phi Y) - \phi(\sigma(X, Y)).$$

Por tanto, usando (0.2.14), se llega a

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X, Y) - \eta(Y)X, \quad (0.3.15)$$

$$\sigma(X, \phi Y) = \phi(\sigma(X, Y)), \quad (0.3.16)$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

Así, si consideramos sobre  $M$  la estructura casi-contacto métrica inducida por  $\phi$ , se deduce de (0.3.15) que dicha estructura es Sasakiana. Por este motivo, una subvariedad invariante de una variedad Sasakiana tangente al campo estructural de la misma recibe a menudo el nombre de *subvariedad Sasakiana* (ver, por ejemplo, [50]). Es fácil probar que toda subvariedad Sasakiana es minimal.

Por otra parte, en virtud de la ecuación de Gauss (0.1.8), se obtiene de (0.2.2), (0.2.6) y (0.3.16) que

$$R(X, \phi X; X, \phi X) = \tilde{R}(X, \phi X; X, \phi X) + 2g(\sigma(X, X), \sigma(X, X)), \quad (0.3.17)$$

para todo  $X \in TM$ , donde  $\tilde{R}$  (resp.  $R$ ), denota el tensor de curvatura de  $\tilde{M}$  (resp.  $M$ ).

# Capítulo 1

## Subvariedades Slant

En este primer capítulo, presentamos la definición de subvariedad slant de una variedad casi-contacto métrica y obtenemos las primeras propiedades referentes a dichas subvariedades.

En la Sección 1.1, se define una *subvariedad slant* como aquella subvariedad  $M$ , tangente al campo estructural  $\xi$  de una variedad casi-contacto métrica, tal que para todo vector tangente  $X$ , no proporcional a  $\xi$ ,  $\phi X$  forma un ángulo constante con  $TM$ , llamado *ángulo slant*. Además, se introduce también la noción de *distribución slant*, ofreciéndose una definición equivalente de subvariedad slant en términos de distribuciones slant. Dicha noción nos permitirá definir, en el último capítulo de esta memoria, los conceptos de *subvariedad bi-slant* y *subvariedad semi-slant*.

A continuación, en la Sección 1.2, probamos un primer resultado que caracteriza las subvariedades slant mediante el cálculo del cuadrado de la proyección tangente de la estructura casi-contacto. Además de proporcionar una herramienta extraordinariamente útil para todos los cálculos posteriores, dicho resultado nos permitirá definir, al final de la sección, las referencias slant adaptadas, que emplearemos con profusión en esta memoria.

Por otra parte, en la Sección 1.3 discutimos sobre la dimensión de una subvariedad slant, mientras que en la Sección 1.4, ofrecemos una variada colección de ejemplos, que, además de avalar el interés de la materia presentada, nos permitirán realizar importantes precisiones a lo largo de nuestro estudio.

## 1.1 Definición de Subvariedad Slant.

Sea  $M$  una variedad Riemanniana isométricamente inmersa en una variedad casi-contacto métrica  $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ .

Es usual estudiar los casos en que  $M$  sea tangente o normal al campo estructural  $\xi$  de  $\widetilde{M}$ . Sin embargo, se prueba sin dificultad que, si  $\widetilde{M}$  es  $K$ -contacto y  $\xi \in T^\perp M$ , entonces  $M$  es anti-invariante (ver, por ejemplo, la Proposición 7.3. de [50], donde no es necesario exigir que  $\widetilde{M}$  sea Sasakiana).

Es más, en realidad, no es preciso exigir que la variedad  $\widetilde{M}$  sea  $K$ -contacto; basta con que sea una variedad de contacto. En efecto, dado que

$$d\eta(X, Y) = \frac{1}{2}(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y])),$$

para todos  $X, Y \in TM$ , si  $\xi \in T^\perp M$ , entonces  $d\eta = 0$  en  $M$ . Ahora bien, si  $\widetilde{M}$  es de contacto,  $d\eta = \Phi$ , de donde se deduce que  $M$  ha de ser anti-invariante.

Por lo tanto, como nuestro estudio se centrará en variedades de contacto, consideraremos en lo sucesivo el caso  $\xi \in TM$ , a no ser que se especifique lo contrario. En esta situación, denotaremos por  $\mathcal{D}$  la distribución ortogonal a  $\xi$  en  $TM$ . Así, podemos descomponer  $TM$  en una suma directa ortogonal de la forma:

$$TM = \mathcal{D} \oplus \langle \xi \rangle.$$

**Definición 1.1.1.**— *Para cada vector no nulo  $X$  tangente a  $M$  en  $x$ , el ángulo  $\theta(X)$  entre  $\phi X$  y  $T_x M$  se llama ángulo de Wirtinger de  $X$ .*

**Nota 1.1.2.**— Señalemos brevemente algunas formas de definir con más precisión el ángulo de Wirtinger de un vector tangente  $X$ ,  $\theta(X)$ . Denotemos por  $\varphi : M \rightarrow \widetilde{M}$  la inmersión de  $M$  en  $\widetilde{M}$  y por  $\varphi_*$  la diferencial de  $\varphi$ . Siguiendo una notación análoga a la empleada por Maeda, Ohnita y Udagawa en [30], dados  $x \in M$  y  $X \in T_x M$ , podemos describir el ángulo  $\theta(X)$  entre  $\varphi_*(X)$  y  $\varphi_*(T_x M)$  mediante la expresión:

$$\cos \theta(X) = \frac{g(\Pi \circ \phi \varphi_*(X), \phi \varphi_*(X))}{|\Pi \circ \phi \varphi_*(X)| |\phi \varphi_*(X)|},$$

donde  $\Pi : T_{\varphi(p)} \widetilde{M} \rightarrow \varphi_*(T_x M)$  es la proyección ortogonal.

Por otro lado, por analogía con la notación utilizada por Tazawa en [44] y [45], podemos simplificar la expresión anterior indicando el ángulo de Wirtinger de  $X$  por:

$$\theta(X) = \angle(\phi\varphi_*(X), \varphi_*(T_x M)).$$

No obstante, procuraremos evitar en lo sucesivo una notación excesivamente compleja, siempre y cuando sea posible hacerlo sin que por ello se vea afectada la claridad de la exposición.

Por analogía con la definición de subvariedad slant de una variedad casi Hermítica establecida por Chen en [10] y [11], damos la siguiente definición.

**Definición 1.1.3.**— *Decimos que  $M$  es slant si el ángulo de Wirtinger  $\theta(X)$  es constante, independientemente de la elección de  $x \in M$  y del vector  $X \in T_x M - \langle \xi_x \rangle$ .*

En tal caso, el ángulo constante  $\theta$  se llama *ángulo slant* de la subvariedad  $M$ .

También podemos introducir la noción de *distribución slant* de una subvariedad de una variedad casi-contacto, de manera similar a como lo hace Papaghiuc en [33], en el ámbito de la Geometría Kaehleriana.

**Definición 1.1.4.**— *Decimos que una distribución diferenciable  $\mathcal{V}$  en  $M$  es slant si para todo vector no nulo  $X \in \mathcal{V}_x$ , con  $x \in M$ , el ángulo  $\theta'(X)$  entre  $\phi X$  y el subespacio vectorial  $\mathcal{V}_x$  es constante, es decir,  $\theta'(X)$  es independiente de la elección de  $x \in M$  y de  $X \in \mathcal{V}_x$ .*

En tal caso, el ángulo constante  $\theta'$  se llama *ángulo slant* de la distribución slant  $\mathcal{V}$ .

Esto nos permite ofrecer otra definición de subvariedad slant.

**Definición 1.1.5.**— *Decimos que  $M$  es slant si la distribución  $\mathcal{D}$  ortogonal a  $\xi$  en  $TM$  es slant.*

Por supuesto, las Definiciones 1.1.3 y 1.1.5 son equivalentes. Para probarlo, necesitamos el siguiente lema.

**Lema 1.1.6.**— Sean  $x$  un punto de  $M$  y  $X \in T_x M$ . Entonces,  $\theta(X) = \theta'(X)$ , donde  $\theta'(X)$  representa el ángulo entre  $\phi X$  y  $\mathcal{D}_x$ .

DEMOSTRACIÓN: Sean  $m+1 = \dim(M)$  y  $\{e_1, \dots, e_m, \xi_x\}$  una base ortonormal de  $T_x M$ . Entonces,  $\{e_1, \dots, e_m\}$  es una base ortonormal de  $\mathcal{D}_x$ .

En virtud de la notación empleada,  $\theta(X)$  será el ángulo entre  $\phi X$  y  $TX$ , mientras que  $\theta'(X)$  coincide con el ángulo entre  $\phi X$  y  $\Pi_{\mathcal{D}} X$ , donde por  $\Pi_{\mathcal{D}}$  denotamos la proyección ortogonal de  $\phi$  sobre  $\mathcal{D}$ .

En función de las bases elegidas, resulta que  $TX = \sum_{i=1}^m g(\phi X, e_i) e_i + g(\phi X, \xi_x) \xi_x$ , mientras que  $\Pi_{\mathcal{D}} X = \sum_{i=1}^m g(\phi X, e_i) e_i$ . Ahora bien, dado que  $\phi \xi = 0$ , se tiene que  $g(\phi X, \xi) = 0$ , por lo que  $TX = \Pi_{\mathcal{D}} X$ , de donde se sigue el resultado.  $\square$

**Proposición 1.1.7.**— Las Definiciones 1.1.3 y 1.1.5 son equivalentes.

DEMOSTRACIÓN: En virtud del lema anterior, es evidente que la Definición 1.1.3 implica que la distribución  $\mathcal{D}$  es slant. Veamos el recíproco. Dado  $X \in TM$ , el ángulo  $\theta(X)$  viene dado por

$$\cos \theta(X) = \frac{g(TX, \phi X)}{|TX| |\phi X|} = \frac{|TX|}{\sqrt{|X|^2 - \eta^2(X)}},$$

pues  $\tilde{M}$  es una variedad casi-contacto métrica y  $\phi X = TX + NX$ . Por otra parte, consideremos  $X - \eta(X)\xi \in \mathcal{D}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \cos \theta'(X - \eta(X)\xi) &= \frac{g(\Pi_{\mathcal{D}}(X - \eta(X)\xi), \phi(X - \eta(X)\xi))}{|\Pi_{\mathcal{D}}(X - \eta(X)\xi)| |\phi(X - \eta(X)\xi)|} = \\ &= \frac{|\Pi_{\mathcal{D}}(X - \eta(X)\xi)|}{|X - \eta(X)\xi|}, \end{aligned}$$

donde  $\Pi_{\mathcal{D}}$  denota la proyección ortogonal de  $\phi$  sobre  $\mathcal{D}$ . Ahora bien, se verifica claramente que  $\sqrt{|X|^2 - \eta^2(X)} = |X - \eta(X)\xi|$  y que:

$$TX = T(X - \eta(X)\xi) = \Pi_{\mathcal{D}}(X - \eta(X)\xi).$$

Así,

$$\cos \theta(X) = \frac{|\Pi_{\mathcal{D}}(X - \eta(X)\xi)|}{|X - \eta(X)\xi|} = \cos \theta'(X - \eta(X)\xi),$$

que es constante al ser slant la distribución  $\mathcal{D}$ . □

Como caso particular de subvariedades slant, aparecen las subvariedades invariantes y anti-invariantes, obteniéndose éstas para  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi/2$  respectivamente. Dado que dichas subvariedades son ampliamente conocidas, resultan más interesantes para nosotros las subvariedades slant con ángulo  $0 < \theta < \pi/2$ .

**Definición 1.1.8.**— *Diremos que una subvariedad slant es propia si no es invariante ni anti-invariante.*

## 1.2 Primeros Resultados.

En lo sucesivo, denotaremos simplemente por  $\widetilde{M}$  a una variedad casi-contacto métrica  $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ .

Hemos observado ya que las subvariedades invariantes y anti-invariantes son clases especiales de subvariedades slant. En el primer caso, sabemos que  $N \equiv 0$ , por lo que  $T = \phi$  y por tanto  $T^2 = \phi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ . Para una subvariedad anti-invariante, tenemos que  $T^2 = 0$ . El siguiente resultado nos proporciona una expresión de  $T^2$  que caracteriza las inmersiones slant.

**Teorema 1.2.1.**— *Sea  $M$  una subvariedad de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$  tal que  $\xi \in TM$ . Entonces,  $M$  es slant si y sólo si existe una constante  $\lambda \in [0, 1]$  tal que:*

$$T^2 = -\lambda I + \lambda \eta \otimes \xi.$$

*Además, en este caso, si  $\theta$  es el ángulo slant de  $M$ , se verifica que  $\lambda = \cos^2 \theta$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Supongamos que  $M$  es slant con ángulo  $\theta$ . Si  $\theta = \pi/2$ , la subvariedad  $M$  es anti-invariante, por lo que el resultado se verifica trivialmente para  $\lambda = 0$ . Podemos suponer por tanto que  $\theta \neq \pi/2$ . Sea  $X \in TM - \langle \xi \rangle$ . Entonces,

$$\cos \theta = \frac{|TX|}{\sqrt{|X|^2 - \eta^2(X)}}, \quad (1.2.1)$$

de donde:

$$|TX|^2 = \cos^2 \theta (|X|^2 - \eta^2(X)). \quad (1.2.2)$$



Por otra parte, como  $\phi TX = T^2X + NTX$ , resulta:

$$g(T^2X, X) = g(\phi TX, X) = -g(TX, \phi X) = -|TX|^2. \quad (1.2.3)$$

Así, de (1.2.2) y (1.2.3), se tiene:

$$g(T^2X, X) = -\cos^2 \theta (|X|^2 - \eta^2(X)). \quad (1.2.4)$$

Como  $g(TX, \xi) = g(\phi X, \xi) = 0$  y la subvariedad  $M$  es slant no anti-invariante, podemos afirmar que  $TX \in TM - \langle \xi \rangle$ , de donde

$$\cos \theta = \frac{g(\phi TX, T^2X)}{|T^2X||\phi TX|} = \frac{|T^2X|}{|TX|}, \quad (1.2.5)$$

pues  $|\phi TX|^2 = g(\phi TX, \phi TX) = g(TX, TX) - \eta^2(TX) = |TX|^2$ , ya que  $\eta(TX) = \eta(\phi X) = 0$ . Por lo tanto, despejando  $|TX|$  de (1.2.1) y sustituyendo en (1.2.5), se obtiene

$$\cos \theta = \frac{|T^2X|}{\cos \theta \sqrt{|X|^2 - \eta^2(X)}},$$

de donde:

$$\cos^2 \theta \sqrt{|X|^2 - \eta^2(X)} = |T^2X|. \quad (1.2.6)$$

Así, de (1.2.4) y (1.2.6) resulta que

$$g(T^2X, X) = -|T^2X| \sqrt{|X|^2 - \eta^2(X)} = -|T^2X||\phi^2X|, \quad (1.2.7)$$

pues  $\phi^2X = -X + \eta(X)\xi$ .

Pero  $g(T^2X, X) = g(T^2X, \eta(X)\xi - \phi^2X) = -g(T^2X, \phi^2X)$ , ya que

$$g(T^2X, \eta(X)\xi) = \eta(X)g(\phi TX, \xi) = -\eta(X)g(TX, \phi\xi) = 0.$$

Por lo tanto, uniendo este resultado con (1.2.7), se tiene

$$\frac{g(T^2X, \phi^2X)}{|T^2X||\phi^2X|} = 1,$$

de donde podemos afirmar que existe un escalar  $\lambda$  tal que:

$$T^2X = \lambda\phi^2X = -\lambda X + \lambda\eta(X)\xi.$$

Para probar que  $\lambda$  es constante, basta observar que, a partir de (1.2.4) se deduce

$$\begin{aligned} -\cos^2 \theta |\phi X|^2 &= g(T^2 X, X) = g(\lambda \phi^2 X, X) = \\ &= \lambda g(\phi^2 X, X) = -\lambda g(\phi X, \phi X) = -\lambda |\phi X|^2, \end{aligned}$$

de donde:

$$\lambda = \cos^2 \theta.$$

Como la igualdad del enunciado se verifica trivialmente para todo campo tangente proporcional a  $\xi$ , queda demostrada la implicación directa.

Veamos el recíproco. Supongamos que existe una constante  $\lambda$  tal que  $T^2 = -\lambda I + \lambda \eta \otimes \xi$ . Entonces, para todo  $X \in TM - \langle \xi \rangle$  se verifica:

$$\begin{aligned} \cos \theta(X) &= \frac{g(\phi X, TX)}{|\phi X| |TX|} = -\frac{g(X, \phi TX)}{|\phi X| |TX|} = -\frac{g(X, T^2 X)}{|\phi X| |TX|} = \\ &= -\lambda \frac{g(X, \phi^2 X)}{|\phi X| |TX|} = \lambda \frac{g(\phi X, \phi X)}{|\phi X| |TX|} = \lambda \frac{|\phi X|}{|TX|}. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Por otra parte,

$$\cos \theta(X) = \frac{|TX|}{|\phi X|},$$

de donde, junto con (1.2.8), se deduce que

$$\cos^2 \theta(X) = \lambda,$$

por lo que  $\theta(X)$  es constante y, por tanto,  $M$  es slant.  $\square$

Como consecuencia del Teorema 1.2.1, obtenemos los siguientes resultados, que nos serán de gran utilidad en todo nuestro desarrollo.

**Corolario 1.2.2.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$ . Denotemos por  $\theta$  el ángulo slant de  $M$ . Entonces,*

$$tNX = \text{sen}^2 \theta (-X + \eta(X)\xi),$$

para todo  $X \in TM$ .

DEMOSTRACIÓN: Dado  $X \in TM$ , se tiene que

$$\phi^2 X = T^2 X + NTX + tNX + nNX,$$

de donde, al ser  $\widetilde{M}$  casi-contacto, se deduce:

$$-X + \eta(X)\xi = T^2X + NTX + tNX + nNX. \quad (1.2.9)$$

Así, identificando las partes tangentes de (1.2.9), se obtiene:

$$-X + \eta(X)\xi = T^2X + tNX. \quad (1.2.10)$$

Pero, al ser  $M$  slant con ángulo  $\theta$ , en virtud del Teorema 1.2.1, sabemos que:

$$T^2X = \cos^2\theta(-X + \eta(X)\xi). \quad (1.2.11)$$

Por lo tanto, de (1.2.10) y (1.2.11) resulta

$$tNX = \text{sen}^2\theta(-X + \eta(X)\xi),$$

como queríamos demostrar.  $\square$

**Proposición 1.2.3.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant, con ángulo  $\theta$ , de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$ . Entonces, para todos  $X, Y \in TM$ , se verifican:*

$$\begin{aligned} g(TX, TY) &= \cos^2\theta(g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)), \\ g(NX, NY) &= \text{sen}^2\theta(g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)). \end{aligned}$$

**DEMOSTRACIÓN:** En virtud de (0.3.3) y del Teorema 1.2.1, dados  $X, Y \in TM$ , se tiene:

$$\begin{aligned} g(TX, TY) &= -g(X, T^2Y) = g(X, \cos^2\theta Y - \cos^2\theta\eta(Y)\xi) = \\ &= \cos^2\theta(g(X, Y) - \eta(Y)g(X, \xi)) = \cos^2\theta(g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)). \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) &= g(\phi X, \phi Y) = g(TX + NX, TY + NY) = \\ &= g(TX, TY) + g(NX, NY), \end{aligned}$$

de donde, en virtud de (1.2.12),

$$g(NX, NY) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) - g(TX, TY) =$$

$$= \text{sen}^2\theta(g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)),$$

para todos  $X, Y \in TM$ . □

**Corolario 1.2.4.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant, con ángulo  $\theta > 0$ , de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$ . Supongamos que  $\dim M = m + 1$  y  $\dim \widetilde{M} = 2m + 1$ . Sea  $\{e_1, \dots, e_m, \xi\}$  una base local de campos ortonormal de  $TM$ . Entonces,  $\{(\text{csc } \theta)Ne_1, \dots, (\text{csc } \theta)Ne_m\}$  es una base local ortonormal de  $T^\perp M$ .*

DEMOSTRACIÓN: En virtud de la Proposición 1.2.3, se tiene que

$$g((\text{csc } \theta)Ne_i, (\text{csc } \theta)Ne_j) = \text{csc}^2 \theta \text{sen}^2 \theta g(e_i, e_j) = \delta_{ij},$$

pues  $\{e_1, \dots, e_m\}$  es una referencia local ortonormal de  $\mathcal{D}$ . □

**Corolario 1.2.5.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant tridimensional, con ángulo  $\theta < \pi/2$ , de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$ . Sea  $e_1$  un campo local unitario tangente a  $M$  y ortogonal a  $\xi$ . Si definimos  $e_2 = (\text{sec } \theta)Te_1$  y  $e_3 = \xi$ , se verifica que  $e_1 = -(\text{sec } \theta)Te_2$  y que  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es una referencia local ortonormal de  $TM$ .*

DEMOSTRACIÓN: Para probar que la referencia es ortonormal, basta tener en cuenta que, en virtud de la Proposición 1.2.3:

$$g(e_1, e_2) = \text{sec } \theta g(e_1, Te_1) = 0,$$

$$g(e_2, e_3) = \text{sec } \theta g(Te_1, \xi) = 0,$$

$$g(e_2, e_2) = \text{sec}^2 \theta g(Te_1, Te_1) = 1.$$

Por otra parte, aplicando el Teorema 1.2.1, resulta que

$$Te_2 = \text{sec } \theta T^2 e_1 = -\text{sec } \theta \cos^2 \theta e_1,$$

de donde  $e_1 = -(\text{sec } \theta)Te_2$ . □

**Corolario 1.2.6.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant propia, con ángulo  $\theta$ , de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$ . Supongamos que  $\dim M = 3$  y  $\dim \widetilde{M} = 5$ . Sea  $e_1$  un campo local unitario tangente a  $M$  y ortogonal a  $\xi$ . Si definimos*

$$e_2 = (\text{sec } \theta)Te_1, \quad e_3 = \xi, \quad e_4 = (\text{csc } \theta)Ne_1 \quad \text{y} \quad e_5 = (\text{csc } \theta)Ne_2.$$

se verifica que  $e_1 = -(\sec \theta)Te_2$  y  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  es una referencia local ortonormal tal que  $e_1, e_2, e_3$  son tangentes a  $M$  y  $e_4, e_5$  son normales a  $M$ . Además, se tiene:

$$te_4 = -\text{sen}\theta e_1, \quad ne_4 = -\text{cos}\theta e_5, \quad te_5 = -\text{sen}\theta e_2 \quad \text{y} \quad ne_5 = \text{cos}\theta e_4.$$

DEMOSTRACIÓN: Ver que  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es una referencia local ortonormal de  $TM$  es inmediato a partir del Corolario 1.2.5, mientras que el ser  $\{e_4, e_5\}$  una referencia local ortonormal de  $T^\perp M$  es consecuencia del Corolario 1.2.4.

En cuanto a los demás cálculos, se tiene

$$\begin{aligned} \phi e_4 &= te_4 + ne_4 = \text{csc}\theta \phi Ne_1 = \text{csc}\theta \phi(\phi e_1 - Te_1) = \\ &= \text{csc}\theta \phi^2 e_1 - \text{csc}\theta(T^2 e_1 + NTe_1) = -\text{sen}\theta e_1 - \text{csc}\theta NTe_1, \end{aligned}$$

pues, al ser  $e_1$  ortogonal a  $\xi$ ,  $\phi^2 e_1 = -e_1$  y  $T^2 e_1 = -\text{cos}^2 \theta e_1$ . Así, igualando componentes tangenciales y normales, resulta que  $te_4 = -\text{sen}\theta e_1$  y

$$ne_4 = -\text{csc}\theta NTe_1 = -\text{csc}\theta \text{cos}\theta Ne_2 = -\text{cos}\theta e_5.$$

Los cálculos para hallar  $te_5$  y  $ne_5$  son análogos. □

**Definición 1.2.7.**— *En las condiciones anteriores, llamaremos a la base local de campos  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  referencia slant adaptada.*

### 1.3 Dimensión de una Subvariedad Slant.

Sea  $M$  una subvariedad de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$  tal que  $\xi \in TM$ . Consideramos la descomposición ortogonal:

$$TM = \mathcal{D} \oplus \langle \xi \rangle.$$

Hemos dicho ya que  $T$  es un endomorfismo de  $TM$ . En lo sucesivo, denotaremos por  $Q$  al endomorfismo  $T^2$ . Es más, es fácil probar que  $Q|_{\mathcal{D}}$  es un endomorfismo de  $\mathcal{D}$ , ya que  $T(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$ . En efecto, basta ver que  $g(TX, \xi) = 0$  para todo  $X \in \mathcal{D}$ , pero esto es inmediato pues:

$$g(TX, \xi) = g(\phi X, \xi) = \eta(\phi X) = 0.$$

En virtud del Teorema 1.2.1, para ser  $M$  slant ha de verificarse que  $Q = T^2 = -\lambda I + \lambda\eta \otimes \xi$  para una cierta constante  $\lambda$ . Así, en este caso se tendría  $Q|_{\mathcal{D}} = -\lambda I$ . Por lo tanto, en una subvariedad slant el endomorfismo  $Q|_{\mathcal{D}}$  ha de ser diagonalizable en cada punto. Esto motiva el estudio de los autovalores de  $Q|_{\mathcal{D}}$  en cada punto de la subvariedad  $M$ .

A partir de (0.3.3), es fácil probar que  $Q$  es un endomorfismo autoadjunto (simétrico), dado que, para todos  $X, Y \in TM$ , se verifica:

$$g(QX, Y) = -g(TX, TY) = g(X, QY).$$

Así,  $Q|_{\mathcal{D}}$  es un endomorfismo autoadjunto de  $\mathcal{D}$ .

Por lo tanto, para cada  $x \in M$ , el subespacio  $\mathcal{D}_x$  del espacio tangente  $T_x M$  admite una descomposición en suma directa ortogonal de subespacios propios de  $Q|_{\mathcal{D}}$ ,

$$\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_x^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{D}_x^{k(x)},$$

donde denotamos por  $\mathcal{D}_x^i$  el subespacio propio de los autovectores asociados a un autovalor  $\lambda_i$  de  $Q|_{\mathcal{D}}$ . Se verifica la siguiente proposición.

**Proposición 1.3.1.**— *Sea  $M$  una subvariedad de una variedad casi-contacto métrica  $\tilde{M}$  tal que  $\xi \in TM$ . En cada punto de  $M$  se verifican las siguientes propiedades:*

- (i) *Cada autovalor  $\lambda_i$  de  $Q|_{\mathcal{D}}$  está en  $[-1, 0]$ .*
- (ii) *Si  $X \in \mathcal{D}^i$  entonces  $TX \in \mathcal{D}^i$ .*
- (iii) *Si  $\lambda_i \neq 0$  entonces  $\mathcal{D}^i$  es de dimensión par y  $T(\mathcal{D}^i) = \mathcal{D}^i$ .*
- (iv) *Los subespacios  $N(\mathcal{D}^i)$  son ortogonales entre sí.*
- (v) *Si  $\lambda_i \neq -1$  entonces  $\dim N(\mathcal{D}^i) = \dim \mathcal{D}^i$ .*
- (vi)  *$N(\mathcal{D}^{-1}) = \{0\}$ , donde  $\mathcal{D}^{-1}$  representa al subespacio asociado al autovalor  $-1$ .*

Así,

$$\dim \tilde{M} \geq 2 \dim M - \dim \mathcal{D}^{-1} - 1 \quad (1.3.1)$$

y se da la igualdad si y sólo si  $\nu = 0$ , siendo  $\nu$  el complemento ortogonal de  $N(TM)$  en  $T^\perp M$ .

DEMOSTRACIÓN: Probemos cada una de las propiedades anteriores.

Sea  $\lambda_i$  un autovalor de  $Q|_{\mathcal{D}^i}$  y  $X \in \mathcal{D}^i$  un autovector asociado. Se verifica que

$$\cos \theta(X) = \frac{g(\phi X, TX)}{|\phi X||TX|} = \frac{|TX|}{|X|},$$

dado que  $X$  es ortogonal a  $\xi$ . Así, en virtud de (0.3.3),

$$g(T^2 X, X) = -|TX|^2 = -\cos^2 \theta(X)|X|^2. \quad (1.3.2)$$

Pero, en virtud de la elección de  $\lambda_i$  y  $X$ , se tiene

$$g(T^2 X, X) = g(QX, X) = g(\lambda_i X, X) = \lambda_i |X|^2,$$

de donde, junto con (1.3.2), se deduce:

$$\lambda_i = -\cos^2 \theta(X) \in [-1, 0].$$

Esto prueba (i). Para ver (ii), tomemos ahora  $X \in \mathcal{D}^i$ . Así,  $QX = \lambda_i X$ . Por lo tanto,

$$QTX = T^3 X = TQX = \lambda_i TX,$$

de donde se deduce que  $TX \in \mathcal{D}^i$ .

En cuanto al apartado (iii), supongamos  $\lambda_i \neq 0$ . Sea  $\{X_1, \dots, X_r\}$  una base de  $\mathcal{D}^i$ . En virtud del apartado anterior,  $TX_i \in \mathcal{D}^i$ , por lo que  $TX_i = \sum_{k=1}^r a_i^k X_k$ , de donde:

$$QX_i = \sum_{k=1}^r a_i^k TX_k = \sum_{k,j=1}^r a_i^k a_k^j X_j.$$

Así, si llamamos  $A$  a la matriz  $(a_k^j)$ , se tiene  $\lambda_i I = A^2$ , de donde se deduce que  $(\lambda_i)^r = \det^2(A)$ . Entonces, como  $\lambda_i \in [-1, 0)$ ,  $r$  debe ser par.

En virtud, de nuevo, del apartado anterior, sabemos que  $T(\mathcal{D}^i) \subseteq \mathcal{D}^i$ . Probemos la otra inclusión. Sea  $X \in \mathcal{D}^i$ . Entonces,  $QX = T^2 X = \lambda_i X$ , de donde, al ser  $\lambda_i \neq 0$ , podemos escribir  $X = T(1/\lambda_i TX) \in T(\mathcal{D}^i)$ .

Sean ahora  $X_i \in \mathcal{D}^i$  y  $X_j \in \mathcal{D}^j$  con  $i \neq j$ . En virtud del segundo apartado, se tiene:

$$g(\phi X_i, \phi X_j) = g(TX_i, TX_j) + g(NX_i, NX_j) = g(NX_i, NX_j).$$

Así,

$$g(NX_i, NX_j) = g(\phi X_i, \phi X_j) = g(X_i, X_j) - \eta(X_i)\eta(X_j) = 0,$$

pues los subespacios  $\mathcal{D}^i, \mathcal{D}^j \subseteq \mathcal{D}$  son ortogonales entre sí. De aquí se deduce (iv).

Supongamos que  $\lambda_i \neq -1$ . Sea  $\{X_1, \dots, X_r\}$  una base de  $\mathcal{D}^i$ . Probemos que  $\{NX_1, \dots, NX_r\}$  es una base de  $N(\mathcal{D}^i)$ . Es trivial ver que es sistema de generadores. Demostremos que los vectores anteriores son linealmente independientes. Para ello, supongamos que  $\sum_{k=1}^r a^k NX_k = 0$ , de donde se deduce:

$$\phi^2 \left( \sum_{k=1}^r a^k X_k \right) = T^2 \left( \sum_{k=1}^r a^k X_k \right) + NT \left( \sum_{k=1}^r a^k X_k \right). \quad (1.3.3)$$

Ahora bien,

$$\phi^2 \left( \sum_{k=1}^r a^k X_k \right) = - \sum_{k=1}^r a^k X_k + \eta \left( \sum_{k=1}^r a^k X_k \right) \xi = - \sum_{k=1}^r a^k X_k, \quad (1.3.4)$$

pues  $\mathcal{D}^i$  es ortogonal a  $\xi$ , mientras que:

$$T^2 \left( \sum_{k=1}^r a^k X_k \right) = \sum_{k=1}^r a^k Q X_k = \lambda_i \sum_{k=1}^r a^k X_k. \quad (1.3.5)$$

Así, sustituyendo (1.3.4) y (1.3.5) en (1.3.3) e igualando las partes tangentes, resulta que  $(\lambda_i + 1) \sum_{k=1}^r a^k X_k = 0$ . Pero, como  $\lambda_i \neq -1$ , ha de ser  $a^k = 0$  para todo  $k$ . Esto prueba el apartado (v).

En cuanto al último apartado, sea ahora  $X \in \mathcal{D}^{-1}$ . Razonando como en la prueba del primer apartado, se tiene  $-\cos^2 \theta(X) = -1$ , por lo que  $\theta(X) = 0$ . Así,  $\phi X \in TM$ , de donde se deduce que  $NX = 0$ .

Finalmente, para las dimensiones, como  $T\widetilde{M} = TM \oplus T^\perp M$ , se tiene:

$$\dim \widetilde{M} = \dim M + \dim T^\perp M. \quad (1.3.6)$$

Por otra parte, podemos escribir:

$$T^\perp M = N(TM) \oplus \nu. \quad (1.3.7)$$



Ahora bien, a partir de las propiedades (iv), (v) y (vi) se deduce:

$$\dim N(TM) = \dim \mathcal{D} - \dim \mathcal{D}^{-1} = \dim M - 1 - \dim \mathcal{D}^{-1}. \quad (1.3.8)$$

Así, en virtud de (1.3.6), (1.3.7) y (1.3.8), resulta que

$$\dim \widetilde{M} = 2 \dim M - \dim \mathcal{D}^{-1} - 1 + \dim \nu \geq 2 \dim M - \dim \mathcal{D}^{-1} - 1$$

y se da la igualdad si y sólo si  $\nu = 0$  □

**Corolario 1.3.2.**— *Toda superficie  $M$  de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$  tal que  $\xi \in TM$  es anti-invariante.*

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia inmediata del apartado 3 de la Proposición 1.3.1. □

**Nota 1.3.3.**— Observemos que, como consecuencia del corolario anterior, no pueden existir superficies slant no anti-invariantes tangentes al campo estructural de una variedad casi-contacto métrica.

En cuanto a las posibles curvas slant, al imponerles la condición de ser tangentes a  $\xi$ , habrían de ser curvas integrales de dicho campo. En este caso, la distribución  $\mathcal{D}$  se anularía, es decir, no habría vectores tangentes no proporcionales a  $\xi$ . Entonces, no tiene sentido hablar de ángulo slant. Dichas curvas carecen de interés en nuestro estudio.

En lo sucesivo, centraremos por tanto nuestro trabajo en subvariedades de dimensión mayor o igual que 3 que, en virtud de (1.3.1), estarán inmersas en variedades casi-contacto de dimensión mayor o igual que 5.

Probemos a continuación que una subvariedad slant no anti-invariante, ha de ser de dimensión impar. Para ello, necesitamos el siguiente lema.

**Lema 1.3.4.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant de una variedad casi-contacto  $\widetilde{M}$ . Sea  $\theta$  el ángulo slant de  $M$ . Entonces, en cada punto  $x$  de  $M$ ,  $Q|_{\mathcal{D}}$  tiene un único autovalor  $\lambda_1 = -\cos^2 \theta$ .*

DEMOSTRACIÓN: Como  $M$  es slant, en virtud del Teorema 1.2.1,  $QX = -\cos^2 \theta X + \cos^2 \theta \eta(X)\xi$  para todo  $X \in TM$ . Así,  $Q|_{\mathcal{D}} = -\cos^2 \theta I$ , por lo que  $\lambda_1 = -\cos^2 \theta$  es el único autovalor de  $Q|_{\mathcal{D}}$  en cada punto de  $M$ . □

**Teorema 1.3.5.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant no anti-invariante de una variedad casi-contacto  $\widetilde{M}$ . Entonces,  $M$  tiene dimensión impar.*

DEMOSTRACIÓN: Dada la descomposición ortogonal  $TM = \mathcal{D} \oplus \langle \xi \rangle$ , se verifica que  $\dim M = \dim \mathcal{D} + 1$ . Ahora bien, como, en virtud del Lema 1.3.4,  $Q|_{\mathcal{D}}$  tiene un único autovalor  $\lambda_1 = -\cos^2 \theta$  en cada punto de  $M$ , resulta que  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^1$ , por lo que  $\dim M = \dim \mathcal{D}^1 + 1$ . Pero, si  $M$  no es anti-invariante,  $\lambda_1 \neq 0$ , por lo que, en virtud del apartado (iii) de la Proposición 1.3.1,  $\mathcal{D}^1$  es de dimensión par, lo cual concluye la prueba.  $\square$

## 1.4 Ejemplos.

En esta sección damos algunos ejemplos de subvariedades slant en variedades casi-contacto métricas. Nuestro objetivo es encontrar ejemplos interesantes de subvariedades slant propias en variedades Sasakianas.

Uno de los aspectos más importantes de los trabajos realizados en subvariedades slant de variedades casi Hermíticas es la caracterización de las superficies slant, de las que se dan numerosos resultados y ejemplos en [10, 11, 14, 15, 43]. Sin embargo, del Corolario 1.3.2 se deduce que las superficies no resultan interesantes en nuestro estudio. Así, para obtener ejemplos de subvariedades slant en nuestro caso, deberemos buscar subvariedades con dimensión mayor o igual que 3.

Los primeros ejemplos los obtenemos de manera inmediata a partir de los ejemplos de subvariedades slant en variedades casi Hermíticas:

**Ejemplo 1.4.1.**— Si  $V$  es una subvariedad slant de una variedad casi Hermítica  $\tilde{V}$ , entonces  $V \times \mathbf{R}$  es una subvariedad slant en la variedad casi-contacto métrica  $\tilde{V} \times \mathbf{R}$  con la estructura usual del producto.

En efecto, recordemos en primer lugar que si  $\tilde{V}$  es una variedad casi Hermítica con estructura casi-compleja  $J$  y métrica  $g_J$ , entonces  $\tilde{V} \times \mathbf{R}$  tiene una estructura natural de variedad casi-contacto métrica definiendo

$$\phi(X_0, f \frac{d}{dt}) = (JX_0, 0), \quad (1.4.1)$$

para todo campo  $X_0$  en  $\tilde{V}$  y toda función  $f \in \mathcal{F}(\tilde{V} \times \mathbf{R})$ ,

$$\xi = (0, \frac{d}{dt})$$

y considerando la métrica producto  $g$  correspondiente (ver, por ejemplo, [4]).

Sea  $X$  un campo tangente a  $V \times \mathbf{R}$ , no proporcional a  $\xi$ . Entonces, podemos escribir

$$X = (X_0, \eta(X) \frac{d}{dt}) = (X_0, 0) + \eta(X)\xi, \quad (1.4.2)$$

con  $X_0 \in TV$  no nulo. Entonces, en virtud de (1.4.1), se tiene:

$$\phi X = (JX_0, 0). \quad (1.4.3)$$

Ahora bien, como, en toda variedad casi-contacto métrica,  $\eta(\phi X) = 0$  para todo campo vectorial  $X$ , es fácil ver a partir de (1.4.3) que

$$TX = (PX_0, 0),$$

donde denotamos por  $PX_0$  la componente tangente de  $JX_0$ . Así:

$$\begin{aligned} |TX|^2 &= g(TX, TX) = g((PX_0, 0), (PX_0, 0)) = \\ &= g_J(PX_0, PX_0) = |PX_0|^2. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Pero, de (1.4.2) se deduce de manera inmediata que

$$|X|^2 - \eta^2(X) = |X_0|^2,$$

lo cual, junto con (1.4.4), implica

$$\frac{|TX|}{\sqrt{|X|^2 - \eta^2(X)}} = \frac{|PX_0|}{|X_0|},$$

que es constante al ser  $V$  una subvariedad slant en  $\tilde{V}$ .

Así, cada ejemplo de [10, 11, 14, 15, 30, 43, 44, 45], nos proporciona un ejemplo de subvariedad slant en una variedad casi-contacto métrica.

Podríamos pensar entonces que, si  $V$  fuera una subvariedad slant de una variedad Kaehleriana  $\tilde{V}$ ,  $V \times \mathbf{R}$  sería una subvariedad slant en una cierta variedad Sasakiana. Sin embargo, se tiene la siguiente proposición.

**Proposición 1.4.2.**— *Sea  $M$  una subvariedad de una variedad  $K$ -contacto  $\tilde{M}$ . Entonces,  $M$  es anti-invariante si y sólo si la distribución  $\mathcal{D}$  es integrable.*

DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta que, si  $\widetilde{M}$  es  $K$ -contacto, entonces, para todos  $X, Y \in \mathcal{D}$ ,

$$\begin{aligned} g([X, Y], \xi) &= g(\nabla_X Y, \xi) - g(\nabla_Y X, \xi) = -g(Y, \nabla_X \xi) + g(X, \nabla_Y \xi) = \\ &= g(Y, TX) - g(X, TY), \end{aligned}$$

en virtud de (0.3.10), lo cual implica que  $\mathcal{D}$  es integrable si y sólo si  $T \equiv 0$ .  
□

**Nota 1.4.3.**— En realidad, la proposición anterior también es cierta exigiendo que la variedad  $\widetilde{M}$  sea tan sólo de contacto métrica. En efecto, con esta condición,

$$2g(X, TY) = 2d\eta(X, Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X, Y]),$$

para todos  $X, Y \in TM$ . En particular,

$$2g(X, TY) = -\eta([X, Y]),$$

para todos  $X, Y \in \mathcal{D}$ , de donde se sigue el resultado.

Así, si  $V$  es una subvariedad slant de una variedad casi Hermítica,  $V \times \mathbf{R}$  no puede ser una subvariedad slant no anti-invariante en una variedad  $K$ -contacto. Notemos que  $\widetilde{V} \times \mathbf{R}$  no es  $K$ -contacto y, por lo tanto, no hay ninguna contradicción con el Ejemplo 1.4.1. De hecho, puede probarse sin ninguna dificultad que

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = 0,$$

para todo  $X \in T(\widetilde{V} \times \mathbf{R})$ , donde denotamos por  $\widetilde{\nabla}$  la conexión de Levi-Civita de  $\widetilde{V} \times \mathbf{R}$ .

Además, se tiene

$$(\widetilde{\nabla}_{(X_0, f \frac{d}{dt})} \phi)(Y_0, h \frac{d}{dt}) = (\nabla_{X_0}^{\widetilde{V}} J) Y_0,$$

para todos  $X_0, Y_0$  tangentes a  $\widetilde{V}$  y toda función  $f, h \in \mathcal{F}(\widetilde{V} \times \mathbf{R})$ , donde  $\nabla^{\widetilde{V}}$  denota la conexión de Levi-Civita de  $\widetilde{V}$ . Así, se verifica que  $\widetilde{V}$  es una variedad Kaehleriana si y sólo si

$$\widetilde{\nabla} \phi = 0,$$

es decir, si y sólo si  $\phi$  es paralelo<sup>1</sup>.

**Nota 1.4.4.**— Una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$  tal que  $\widetilde{\nabla}\phi = 0$  recibe el nombre de *variedad cosimpléctica*. Se puede probar, de manera análoga a la demostración de la equivalencia (0.2.14), que una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$  tiene  $\phi$  paralelo si y sólo si la variedad es normal y las formas  $\eta$  y  $\Phi$  son cerradas, es decir,  $d\eta = d\Phi = 0$ . En realidad, ésta última es la manera en que Blair define las variedades cosimplécticas en [3].

De ahora en adelante, denotaremos por  $(\mathbf{R}^{2m+1}, \phi_0, \xi, \eta, g)$  la variedad  $\mathbf{R}^{2m+1}$  con su estructura Sasakiana usual, dada por

$$\eta = 1/2(dz - \sum_{i=1}^m y^i dx^i), \quad \xi = 2\frac{\partial}{\partial z},$$

$$g = \eta \otimes \eta + 1/4 \left( \sum_{i=1}^m (dx^i \otimes dx^i + dy^i \otimes dy^i) \right),$$

$$\phi_0 \left( \sum_{i=1}^m (X_i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y_i \frac{\partial}{\partial y^i}) + Z \frac{\partial}{\partial z} \right) = \sum_{i=1}^m (Y_i \frac{\partial}{\partial x^i} - X_i \frac{\partial}{\partial y^i}) + \sum_{i=1}^m Y_i y^i \frac{\partial}{\partial z},$$

donde  $(x^i, y^i, z)$ ,  $i = 1 \dots m$  son las coordenadas cartesianas. Se sabe que

$$\left\{ 2\frac{\partial}{\partial y^i}, 2\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \frac{\partial}{\partial z}\right), \xi \right\} \quad (1.4.5)$$

es una base ortonormal de  $T\mathbf{R}^{2m+1}$  tal que  $\phi_0(2\frac{\partial}{\partial y^i}) = 2(\frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \frac{\partial}{\partial z})$ . Una tal base recibe el nombre de  $\phi_0$ -base.

Cuando  $m$  es par, podemos definir el endomorfismo  $\phi_1$ , que viene dado por:

$$\phi_1(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_m, Z) = (-X_2, X_1, \dots, -X_m, X_{m-1},$$

$$Y_2, -Y_1, \dots, Y_m, -Y_{m-1}, y^2 X_1 - y^1 X_2 + \dots + y^m X_{m-1} - y^{m-1} X_m).$$

---

<sup>1</sup>Para ver más relaciones entre las propiedades de  $\widetilde{V}$  y  $\widetilde{V} \times \mathbf{R}$ , consultar, por ejemplo, [20].

Es fácil probar que  $(\mathbf{R}^{2m+1}, \phi_1, \xi, \eta, g)$  es una variedad casi-contacto métrica. Además, si  $m = 2k$ , se verifica que

$$\phi_1\left(2\frac{\partial}{\partial y^{2j-1}}\right) = -2\frac{\partial}{\partial y^{2j}}$$

y

$$\phi_1\left(2\left(\frac{\partial}{\partial x^{2j-1}} + y^{2j-1}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right) = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^{2j}} + y^{2j}\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

para todo  $j = 1, \dots, k$ , de donde se deduce que

$$\left\{2\frac{\partial}{\partial y^{2j-1}}, 2\left(\frac{\partial}{\partial x^{2j-1}} + y^{2j-1}\frac{\partial}{\partial z}\right), -2\frac{\partial}{\partial y^{2j}}, 2\left(\frac{\partial}{\partial x^{2j}} + y^{2j}\frac{\partial}{\partial z}\right), \xi\right\}_{j=1, \dots, k} \quad (1.4.6)$$

es una  $\phi_1$ -base.

Por otra parte, dado  $X \in T\mathbf{R}^{2m+1}$ , podemos expresarlo en función de la base (1.4.5) en la forma

$$\begin{aligned} X &= \sum_{j=1}^k (\lambda_{2j-1} 2\frac{\partial}{\partial y^{2j-1}} + \lambda_{2j} 2\frac{\partial}{\partial y^{2j}}) + \\ &+ \sum_{j=1}^k (\mu_{2j-1} 2\left(\frac{\partial}{\partial x^{2j-1}} + y^{2j-1}\frac{\partial}{\partial z}\right) + \mu_{2j} 2\left(\frac{\partial}{\partial x^{2j}} + y^{2j}\frac{\partial}{\partial z}\right)) + \eta(X)\xi, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \phi_0 X &= \sum_{j=1}^k (\lambda_{2j-1} 2\left(\frac{\partial}{\partial x^{2j-1}} + y^{2j-1}\frac{\partial}{\partial z}\right) + \lambda_{2j} 2\left(\frac{\partial}{\partial x^{2j}} + y^{2j}\frac{\partial}{\partial z}\right)) - \\ &- \sum_{j=1}^k (\mu_{2j-1} 2\frac{\partial}{\partial y^{2j-1}} + \mu_{2j} 2\frac{\partial}{\partial y^{2j}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_1 X &= \sum_{j=1}^k (-\lambda_{2j-1} 2\frac{\partial}{\partial y^{2j}} + \lambda_{2j} 2\frac{\partial}{\partial y^{2j-1}}) + \\ &+ \sum_{j=1}^k (\mu_{2j-1} 2\left(\frac{\partial}{\partial x^{2j}} + y^{2j}\frac{\partial}{\partial z}\right) - \mu_{2j} 2\left(\frac{\partial}{\partial x^{2j-1}} + y^{2j-1}\frac{\partial}{\partial z}\right)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_1\phi_0X &= \sum_{j=1}^k(\lambda_{2j-1}2(\frac{\partial}{\partial x^{2j}} + y^{2j}\frac{\partial}{\partial z}) - \lambda_{2j}2(\frac{\partial}{\partial x^{2j-1}} + y^{2j-1}\frac{\partial}{\partial z})) + \\ &+ \sum_{j=1}^k(\mu_{2j-1}2\frac{\partial}{\partial y^{2j}} - \mu_{2j}2\frac{\partial}{\partial y^{2j-1}})\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\phi_0\phi_1X &= \sum_{j=1}^k(-\lambda_{2j-1}2(\frac{\partial}{\partial x^{2j}} + y^{2j}\frac{\partial}{\partial z}) + \lambda_{2j}2(\frac{\partial}{\partial x^{2j-1}} + y^{2j-1}\frac{\partial}{\partial z})) + \\ &+ \sum_{j=1}^k(-\mu_{2j-1}2\frac{\partial}{\partial y^{2j}} + \mu_{2j}2\frac{\partial}{\partial y^{2j-1}}),\end{aligned}$$

de donde se deduce que:

$$\phi_1\phi_0X = -\phi_0\phi_1X. \quad (1.4.7)$$

Así, para todo  $X \in TR^{2m+1}$ , en virtud de (0.2.7) y (1.4.7),

$$g(\phi_0X, \phi_1X) = -g(X, \phi_0\phi_1X) = g(X, \phi_1\phi_0X) = -g(\phi_1X, \phi_0X),$$

lo cual implica:

$$g(\phi_0X, \phi_1X) = 0. \quad (1.4.8)$$

Sin embargo,  $(\phi_1, \xi, \eta, g)$  no define una estructura de contacto sobre la variedad  $\mathbf{R}^{2m+1}$ . Esto se obtiene como caso particular de la siguiente proposición:

**Proposición 1.4.5.**— *Sea  $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$  una variedad de contacto. Si existe otra estructura casi-contacto  $\bar{\phi}$  sobre  $\widetilde{M}$  tal que  $(\widetilde{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, g)$  sea una variedad de contacto, entonces  $\bar{\phi} = \phi$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si  $\phi$  y  $\bar{\phi}$  definieran estructuras de contacto sobre  $\widetilde{M}$  con los mismos  $\xi, \eta$  y  $g$ , entonces, por definición,

$$\Phi = d\eta = \bar{\Phi},$$

donde  $\Phi$  (resp.  $\bar{\Phi}$ ) denota la 2-forma fundamental de  $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$  (resp.  $(\widetilde{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, g)$ ), de donde

$$g(X, \phi Y) = g(X, \bar{\phi} Y),$$

para todos  $X, Y \in T\widetilde{M}$ , lo cual implica que  $\phi Y = \bar{\phi}Y$  para todo campo  $Y$  tangente a  $\widetilde{M}$ .  $\square$

Cuando  $m = 2$ , es decir, en  $(\mathbf{R}^5, \phi_1, \xi, \eta, g)$ , se puede probar también que la estructura no es normal, pues

$$[\phi_1, \phi_1](X, Y) = 2d\eta \otimes \xi(X, Y),$$

para todos  $X, Y \in T\mathbf{R}^5$  y que  $\Phi_1$  es cerrada, es decir,

$$d\Phi_1 = 0.$$

Además, puede verse fácilmente que

$$(\widetilde{\nabla}_X \phi_1)Y = 2\eta(X)\phi_1\phi Y + \eta(Y)\phi_1\phi X + g(X, \phi_1\phi Y)\xi, \quad (1.4.9)$$

para todos  $X, Y \in T\mathbf{R}^5$ .

Empleando la estructura  $\phi_1$ , encontramos el siguiente método para obtener subvariedades slant, con ángulo slant dado, en una cierta variedad casi-contacto métrica.

**Ejemplo 1.4.6.**— Para cada constante  $\theta$ , definimos  $\phi_{0,\theta}$  y  $\phi_{1,\theta}$  como

$$\phi_{0,\theta} = (\cos\theta)\phi_0 + (\sen\theta)\phi_1$$

y

$$\phi_{1,\theta} = (\cos\theta)\phi_1 + (\sen\theta)\phi_0,$$

respectivamente. Entonces,  $(\phi_{0,\theta}, \xi, \eta, g)$  y  $(\phi_{1,\theta}, \xi, \eta, g)$  son estructuras casi-contacto métricas en  $\mathbf{R}^{2m+1}$ , para cualquier número par  $m$ . En particular, si  $m = 2$ , entonces cualquier subvariedad invariante  $M$  de dimensión 3 en  $(\mathbf{R}^5, \phi_0, \xi, \eta, g)$  (resp.  $(\mathbf{R}^5, \phi_1, \xi, \eta, g)$ ), tal que  $\xi \in TM$ , es una subvariedad slant minimal (resp. subvariedad slant), con ángulo slant  $\theta$ , en  $(\mathbf{R}^5, \phi_{0,\theta}, \xi, \eta, g)$  (resp.  $(\mathbf{R}^5, \phi_{1,\theta}, \xi, \eta, g)$ ).

Comprobemos en primer lugar que  $(\mathbf{R}^{2m+1}, \phi_{0,\theta}, \xi, \eta, g)$  es una variedad casi-contacto métrica. Para ello, bastará probar

$$\phi_{0,\theta}^2 = -I + \eta \otimes \xi \quad (1.4.10)$$



y

$$g(\phi_{0,\theta}X, \phi_{0,\theta}Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad (1.4.11)$$

para todos  $X, Y \in T\mathbf{R}^{2m+1}$ .

En efecto, dado  $X \in T\mathbf{R}^{2m+1}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \phi_{0,\theta}^2 X &= \cos^2 \theta (-X + \eta(X)\xi) + \operatorname{sen} \theta \cos \theta (\phi_1 \phi_0 X + \phi_0 \phi_1 X) + \\ &\quad + \operatorname{sen}^2 \theta (-X + \eta(X)\xi) = -X + \eta(X)\xi, \end{aligned}$$

en virtud de (1.4.7). Esto prueba (1.4.10).

Por otra parte, dados  $X, Y \in T\mathbf{R}^{2m+1}$ , se verifica

$$\begin{aligned} g(\phi_{0,\theta}X, \phi_{0,\theta}Y) &= \cos^2 \theta g(\phi_0 X, \phi_0 Y) + \operatorname{sen} \theta \cos \theta (g(\phi_0 X, \phi_1 Y) + \\ &\quad + g(\phi_1 X, \phi_0 Y)) + \operatorname{sen}^2 \theta g(\phi_1 X, \phi_1 Y) = \cos^2 \theta (g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)) - \\ &\quad - \operatorname{sen} \theta \cos \theta (g(X, \phi_0 \phi_1 Y) + g(X, \phi_1 \phi_0 Y)) + \operatorname{sen}^2 \theta (g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)) = \\ &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \end{aligned}$$

en virtud de (0.2.6) y (1.4.7). Así se obtiene (1.4.11).

De forma totalmente análoga se prueba que  $(\mathbf{R}^{2m+1}, \phi_{1,\theta}, \xi, \eta, g)$  es una variedad casi-contacto métrica.

Consideremos ahora una subvariedad invariante  $M$  de dimensión 3 en  $(\mathbf{R}^5, \phi_0, \xi, \eta, g)$ , con  $\xi$  tangente, y veamos que es slant, con ángulo  $\theta$ , en  $(\mathbf{R}^5, \phi_{0,\theta}, \xi, \eta, g)$  ( $M$  será minimal pues toda subvariedad invariante en una variedad Sasakiana lo es).

Al ser  $M$  invariante, en virtud de (0.2.4) y (0.2.8) podemos elegir una base local ortonormal de  $TM$  de la forma

$$\{e_1, \phi_0 e_1, \xi\}, \quad (1.4.12)$$

donde  $e_1 \in TM$  es unitario y ortogonal a  $\xi$ .

Así, dado  $X \in TM$ , si lo expresamos en función de (1.4.12),

$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 \phi_0 e_1 + \eta(X)\xi,$$

se tiene

$$|X|^2 - \eta^2(X) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \quad (1.4.13)$$

y:

$$\phi_{0,\theta}X = \lambda_1 \cos \theta \phi_0 e_1 + \lambda_1 \operatorname{sen} \theta \phi_1 e_1 - \lambda_2 \cos \theta e_1 + \lambda_2 \operatorname{sen} \theta \phi_1 \phi_0 e_1. \quad (1.4.14)$$

Si denotamos por  $T_{0,\theta}$  la proyección tangente de  $\phi_{0,\theta}$ , se verifica que:

$$|T_{0,\theta}X|^2 = g^2(\phi_{0,\theta}X, e_1) + g^2(\phi_{0,\theta}X, \phi_0 e_1). \quad (1.4.15)$$

Ahora bien, en virtud de (0.2.6), (0.2.7), (0.2.8), (1.4.8) y (1.4.14),

$$g(\phi_{0,\theta}X, e_1) = -\lambda_2 \cos \theta, \quad (1.4.16)$$

mientras que:

$$g(\phi_{0,\theta}X, \phi_0 e_1) = \lambda_1 \cos \theta. \quad (1.4.17)$$

Luego, sustituyendo (1.4.16) y (1.4.17) en (1.4.15) y teniendo en cuenta (1.4.13), se obtiene

$$\frac{|T_{0,\theta}X|}{\sqrt{|X|^2 - \eta^2(X)}} = \cos \theta,$$

de donde se deduce el resultado. Análogamente puede verse para  $\phi_{1,\theta}$ .

Sin embargo, usando este método no obtenemos ejemplos propios en una variedad Sasakiana, pues, en virtud de la Proposición 1.4.5, ni la variedad  $(\mathbf{R}^5, \phi_{0,\theta}, \xi, \eta, g)$  ni  $(\mathbf{R}^5, \phi_{1,\theta}, \xi, \eta, g)$  pueden ser variedades de contacto cuando  $\theta \in (0, \pi/2)$ .

Para obtener ejemplos en una variedad Sasakiana, podemos probar el siguiente teorema.

**Teorema 1.4.7.**— *Supongamos que*

$$x(u', v') = (f_1(u', v'), f_2(u', v'), f_3(u', v'), f_4(u', v'))$$

*define una superficie slant  $S$  en  $\mathbf{C}^2$  con su estructura Kaehleriana usual, tal que  $\partial/\partial u'$  y  $\partial/\partial v'$  son no nulos y ortogonales. Entonces,*

$$y(u, v, t) = 2(f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v), f_4(u, v), t) \quad (1.4.18)$$

define una subvariedad slant tridimensional  $M$  en  $(\mathbf{R}^5, \phi_0, \xi, \eta, g)$ , con el mismo ángulo slant que  $S$  y tal que, si escribimos

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial u} + (2f_3 \frac{\partial f_1}{\partial u} + 2f_4 \frac{\partial f_2}{\partial u}) \frac{\partial}{\partial t},$$

$$e_2 = \frac{\partial}{\partial v} + (2f_3 \frac{\partial f_1}{\partial v} + 2f_4 \frac{\partial f_2}{\partial v}) \frac{\partial}{\partial t},$$

entonces  $\{e_1, e_2, \xi\}$  es una base ortogonal del fibrado tangente de la subvariedad.

DEMOSTRACIÓN: Antes que nada, observemos que, en virtud de las hipótesis exigidas en el enunciado del Teorema, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial u'} = \frac{\partial f_1}{\partial u'} \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial u'} \left( \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial f_3}{\partial u'} \left( \frac{\partial}{\partial y^1} \right) + \frac{\partial f_4}{\partial u'} \left( \frac{\partial}{\partial y^2} \right)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial v'} = \frac{\partial f_1}{\partial v'} \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial v'} \left( \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial f_3}{\partial v'} \left( \frac{\partial}{\partial y^1} \right) + \frac{\partial f_4}{\partial v'} \left( \frac{\partial}{\partial y^2} \right)$$

constituyen una base ortogonal de  $TS$ .

Como  $x(u', v')$  define por hipótesis una superficie en  $\mathbf{C}^2$ , es evidente que  $y(u, v, t)$  define una subvariedad  $M$  de dimensión 3 en  $\mathbf{R}^5$ . Comprobemos en primer lugar que  $\{e_1, e_2, \xi\}$  es una base ortogonal de  $TM$ . Derivando en (1.4.18), obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial f_1}{\partial u} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial u} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial f_3}{\partial u} \left( 2 \frac{\partial}{\partial y^1} \right) + \frac{\partial f_4}{\partial u} \left( 2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right), \quad (1.4.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial f_1}{\partial v} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial v} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial f_3}{\partial v} \left( 2 \frac{\partial}{\partial y^1} \right) + \frac{\partial f_4}{\partial v} \left( 2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right), \quad (1.4.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial z} = \xi. \quad (1.4.21)$$

Pero, como, en los puntos de la subvariedad,  $y^1 = 2f_3(u, v)$  e  $y^2 = 2f_4(u, v)$ , en virtud de (1.4.19), (1.4.20) y (1.4.21) se tiene

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial u} + (2f_3 \frac{\partial f_1}{\partial u} + 2f_4 \frac{\partial f_2}{\partial u}) \frac{\partial}{\partial t} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial f_1}{\partial u} \left( 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial f_2}{\partial u} \left( 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial f_3}{\partial u} \left( 2 \frac{\partial}{\partial y^1} \right) + \frac{\partial f_4}{\partial u} \left( 2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right), \\
e_2 &= \frac{\partial}{\partial v} + \left( 2f_3 \frac{\partial f_1}{\partial v} + 2f_4 \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial t} = \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial v} \left( 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial f_2}{\partial v} \left( 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial f_3}{\partial v} \left( 2 \frac{\partial}{\partial y^1} \right) + \frac{\partial f_4}{\partial v} \left( 2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right),
\end{aligned}$$

donde, claramente, identificamos los vectores tangentes a  $M$  con sus imágenes por la aplicación inducida por la inmersión. Así, como (1.4.5) es una base ortonormal de  $T\mathbf{R}^5$ , está claro que

$$g(e_1, e_2) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f_i}{\partial u} \frac{\partial f_i}{\partial v} = 0,$$

en virtud de las hipótesis sobre  $x(u, v)$ . Además, está claro que

$$\eta(e_1) = \eta(e_2) = 0$$

y:

$$g(e_1, e_1) = \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial f_i}{\partial u} \right)^2 \quad \text{y} \quad g(e_2, e_2) = \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial f_i}{\partial v} \right)^2.$$

Dado  $X \in TM$ , podemos expresarlo en función de  $\{e_1, e_2, \xi\}$ ,

$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \eta(X) \xi,$$

de donde

$$\begin{aligned}
X &= \left( \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_1}{\partial v} \right) 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z} \right) + \left( \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) + \\
&\quad + \left( \lambda_1 \frac{\partial f_3}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_3}{\partial v} \right) 2 \frac{\partial}{\partial y^1} + \left( \lambda_1 \frac{\partial f_4}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_4}{\partial v} \right) 2 \frac{\partial}{\partial y^2} + \eta(X) \xi
\end{aligned}$$

y, por tanto:

$$|X|^2 - \eta^2(X) = \sum_{i=1}^4 \left( \lambda_1 \frac{\partial f_i}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_i}{\partial v} \right)^2. \quad (1.4.22)$$

Así, como (1.4.5) es una  $\phi_0$ -base, resulta:

$$\phi_0 X = \left( \lambda_1 \frac{\partial f_3}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_3}{\partial v} \right) 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z} \right) + \left( \lambda_1 \frac{\partial f_4}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_4}{\partial v} \right) 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) -$$

$$- (\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_1}{\partial v})^2 \frac{\partial}{\partial y^1} - (\lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial v})^2 \frac{\partial}{\partial y^2}. \quad (1.4.23)$$

Ahora bien, como  $\{e_1, e_2, \xi\}$  es una base ortogonal de  $TM$ , se tiene que

$$T_0X = \frac{g(\phi_0X, e_1)}{g(e_1, e_1)}e_1 + \frac{g(\phi_0X, e_2)}{g(e_2, e_2)}e_2,$$

donde  $T_0$  denota la proyección tangente de  $\phi_0$ , lo cual implica:

$$|T_0X|^2 = \frac{g^2(\phi_0X, e_1)}{g(e_1, e_1)} + \frac{g^2(\phi_0X, e_2)}{g(e_2, e_2)}. \quad (1.4.24)$$

Pero, en virtud de (1.4.23), puede comprobarse fácilmente que

$$\begin{aligned} g(\phi_0X, e_1) &= (\lambda_1 \frac{\partial f_3}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_3}{\partial v}) \frac{\partial f_1}{\partial u} + (\lambda_1 \frac{\partial f_4}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_4}{\partial v}) \frac{\partial f_2}{\partial u} - \\ &- (\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_1}{\partial v}) \frac{\partial f_3}{\partial u} - (\lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial v}) \frac{\partial f_4}{\partial u} = -g(J_0X_0, \frac{\partial}{\partial u'}), \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

donde denotamos por  $J_0$  la estructura casi-compleja usual de  $\mathbf{C}^2$  y por  $X_0$  el campo vectorial de  $TS$  dado por:

$$X_0 = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial u'} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial v'}.$$

Análogamente se tiene:

$$g(\phi_0X, e_2) = -g(J_0X_0, \frac{\partial}{\partial v'}). \quad (1.4.26)$$

Entonces, en virtud de (1.4.22), (1.4.24), (1.4.25) y (1.4.26), mediante una simple comprobación se llega a

$$\frac{|T_0X|}{\sqrt{|X|^2 - \eta^2(X)}} = \frac{|PX_0|}{|X_0|} = \cos \theta,$$

siendo  $PX_0$  la proyección tangente de  $J_0X_0$  y  $\theta$  el ángulo slant de  $S$ .  $\square$

**Nota 1.4.8.**— Observemos que si  $S$  no es totalmente real, entonces la distribución generada por  $e_1$  y  $e_2$  no es integrable y, por tanto,  $M$  no puede ser el producto de  $S$  por  $\mathbf{R}$ . Este hecho es coherente con la Proposición 1.4.2.

En efecto, en las condiciones del Teorema 1.4.7, si denotamos por  $g_0$  la métrica usual en  $\mathbf{R}^4$ , se tiene que

$$[e_1, e_2] = 2g_0\left(\frac{\partial}{\partial u'}, J_0\left(\frac{\partial}{\partial v'}\right)\right)\frac{\partial}{\partial t},$$

que es no nulo supuesto que  $S$  no sea totalmente real.

Entonces, en virtud del Teorema 1.4.7 y los ejemplos 2.1, 2.3, 2.4 y 2.5 de [10], obtenemos los Ejemplos 1.4.9, 1.4.10, 1.4.11 y 1.4.12 en  $\mathbf{R}^5$  con su estructura Sasakiana usual.

**Ejemplo 1.4.9.**— Para cada  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,

$$x(u, v, t) = 2(u \cos \theta, u \operatorname{sen} \theta, v, 0, t)$$

define una subvariedad slant minimal de dimensión 3 con ángulo slant  $\theta$  y curvatura escalar  $\tau = -1/3 \cos^2 \theta$ .

Tal y como se indica en el citado Teorema 1.4.7, elegimos como referencia de  $TM$  la formada por los campos tangentes

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial u} + 2 \cos \theta v \frac{\partial}{\partial t} = \cos \theta \left( 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) + \operatorname{sen} \theta \left( 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right),$$

$$e_2 = \frac{\partial}{\partial v} = 2 \frac{\partial}{\partial y^1},$$

$$e_3 = \frac{\partial}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial z} = \xi.$$

En cuanto a  $T^\perp M$ , podemos elegir como base de campos normales la constituida por:

$$e_4 = -\operatorname{sen} \theta \left( 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) + \cos \theta \left( 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right),$$

$$e_5 = 2 \frac{\partial}{\partial y^2}.$$

Se puede comprobar que tanto  $\{e_1, e_2, e_3\}$  como  $\{e_4, e_5\}$  son ortonormales. En estas condiciones, se verifica que los corchetes no nulos de los campos básicos elegidos son

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -2 \cos \theta e_3, & [e_1, e_5] &= -2 \operatorname{sen} \theta e_3, \\ [e_2, e_4] &= -2 \operatorname{sen} \theta e_3, & [e_4, e_5] &= -2 \cos \theta e_3, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$\widetilde{\nabla}_{e_i} e_i = 0,$$

para  $i = 1, 2, 3$ , lo cual implica que  $M$  es minimal. Además, se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= 0, & \nabla_{e_1} e_2 &= -\cos \theta e_3, & \nabla_{e_1} e_3 &= \cos \theta e_2, \\ \nabla_{e_2} e_1 &= \cos \theta e_3, & \nabla_{e_2} e_2 &= 0, & \nabla_{e_2} e_3 &= -\cos \theta e_1, \\ \nabla_{e_3} e_1 &= \cos \theta e_2, & \nabla_{e_3} e_2 &= -\cos \theta e_1, & \nabla_{e_3} e_3 &= 0. \end{aligned}$$

Así, es fácil calcular que

$$R(e_1, e_2)e_2 = -3 \cos^2 \theta e_1, \quad R(e_1, e_3)e_3 = \cos^2 \theta e_1, \quad R(e_2, e_3)e_3 = \cos^2 \theta e_2,$$

de donde se sigue:

$$\tau = \frac{1}{3}(R(e_1, e_2; e_2, e_1) + R(e_1, e_3; e_3, e_1) + R(e_2, e_3; e_3, e_2)) = -\frac{\cos^2 \theta}{3}.$$

**Ejemplo 1.4.10.**— Para cada constante  $k$ ,

$$x(u, v, t) = 2(e^{ku} \cos u \cos v, e^{ku} \operatorname{sen} u \cos v, e^{ku} \cos u \operatorname{sen} v, e^{ku} \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, t)$$

define una subvariedad slant de dimension 3 con ángulo slant

$$\theta = \cos^{-1}(|k|/\sqrt{1+k^2}),$$

curvatura escalar  $\tau = -k^2/(3(1+k^2))$  y curvatura media no constante dada por  $|H| = 2e^{-ku}/(3\sqrt{1+k^2})$ . Así, la subvariedad no es minimal.

En este caso, podemos elegir la referencia ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $TM$  dada por:

$$e_1 = \frac{e^{-ku}}{\sqrt{1+k^2}} \left( \frac{\partial}{\partial u} + k e^{2ku} \operatorname{sen}(2v) \frac{\partial}{\partial t} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-ku}}{2\sqrt{1+k^2}} \left\{ (kx^1 - x^2)2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1\frac{\partial}{\partial z}\right) + (kx^2 + x^1)2\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial}{\partial z}\right) + \right. \\
&\quad \left. + (ky^1 - y^2)2\frac{\partial}{\partial y^1} + (ky^2 + y^1)2\frac{\partial}{\partial y^2} \right\}, \\
e_2 &= e^{-ku} \left( \frac{\partial}{\partial v} - 2e^{2ku} \operatorname{sen}^2 v \frac{\partial}{\partial t} \right) = \\
&= \frac{e^{-ku}}{2} \left\{ -y^1 2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1\frac{\partial}{\partial z}\right) - y^2 2\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial}{\partial z}\right) + x^1 2\frac{\partial}{\partial y^1} + x^2 2\frac{\partial}{\partial y^2} \right\}, \\
e_3 &= \frac{\partial}{\partial t} = 2\frac{\partial}{\partial z} = \xi.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que, en los puntos de la subvariedad,

$$4e^{2ku} = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (y^1)^2 + (y^2)^2$$

y que, por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{e^{-ku}}{2} \right) &= -\frac{e^{-3ku}}{8} x^i, \\
\frac{\partial}{\partial y^i} \left( \frac{e^{-ku}}{2} \right) &= -\frac{e^{-3ku}}{8} y^i,
\end{aligned}$$

para  $i = 1, 2$ , se puede comprobar:

$$\begin{aligned}
\sigma(e_1, e_1) = \sigma(e_2, e_2) &= \frac{e^{-2ku}}{2(1+k^2)} \left\{ -(kx^2 + x^1)2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1\frac{\partial}{\partial z}\right) + \right. \\
&\quad \left. + (kx^1 - x^2)2\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial}{\partial z}\right) - (ky^2 + y^1)2\frac{\partial}{\partial y^1} + (ky^1 - y^2)2\frac{\partial}{\partial y^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
H &= \frac{e^{-2ku}}{3(1+k^2)} \left\{ -(kx^2 + x^1)2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1\frac{\partial}{\partial z}\right) + \right. \\
&\quad \left. + (kx^1 - x^2)2\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial}{\partial z}\right) - (ky^2 + y^1)2\frac{\partial}{\partial y^1} + (ky^1 - y^2)2\frac{\partial}{\partial y^2} \right\},
\end{aligned}$$

de donde se deduce:

$$|H| = \frac{2e^{-ku}}{3\sqrt{1+k^2}}.$$



Por otra parte, se tiene que

$$[e_1, e_2] = -\frac{ke^{-ku}}{\sqrt{1+k^2}}e_2 - \frac{2k}{\sqrt{1+k^2}}e_3,$$

$$[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0,$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= 0, & \nabla_{e_1} e_2 &= -C(k)e_3, & \nabla_{e_1} e_3 &= C(k)e_2, \\ \nabla_{e_2} e_1 &= C(k)\{e^{-ku}e_2 + e_3\}, & \nabla_{e_2} e_2 &= -C(k)e^{-ku}e_1, & \nabla_{e_2} e_3 &= -C(k)e_1, \\ \nabla_{e_3} e_1 &= C(k)e_2, & \nabla_{e_3} e_2 &= -C(k)e_1, & \nabla_{e_3} e_3 &= 0, \end{aligned}$$

siendo

$$C(k) = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

En virtud de estas expresiones, se obtiene

$$R(e_1, e_2; e_2, e_1) = -\frac{3k^2}{1+k^2}, \quad R(e_1, e_3; e_3, e_1) = R(e_2, e_3; e_3, e_2) = \frac{k^2}{1+k^2},$$

de donde resulta el cálculo de la curvatura escalar.

**Ejemplo 1.4.11.**— Para cada constante  $k$ ,

$$x(u, v, t) = 2(u, k \cos v, v, k \operatorname{sen} v, t)$$

define una subvariedad slant  $M$  con ángulo slant  $\cos^{-1}(1/\sqrt{1+k^2})$ , curvatura media constante  $|H| = |k|/(3(1+k^2))$  y curvatura escalar  $\tau = -1/(3(1+k^2))$ . Es más, las siguientes propiedades son equivalentes: (a)  $k = 0$ , (b)  $M$  es invariante, (c)  $M$  es minimal y (d)  $M$  tiene vector curvatura media paralelo.

Elegimos las referencias ortonormales  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $TM$  y  $\{e_4, e_5\}$  de  $T^\perp M$ , definidas por:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial}{\partial u} + 2v \frac{\partial}{\partial t} = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z}\right), \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} - 2k^2 \operatorname{sen}^2 v \frac{\partial}{\partial t} \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \left\{ -k \operatorname{sen}(v) 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y^1} + k \operatorname{cos}(v) 2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right\},$$

$$e_3 = \frac{\partial}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial z} = \xi,$$

$$e_4 = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \left\{ -\operatorname{sen}(v) 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) - k 2 \frac{\partial}{\partial y^1} + \operatorname{cos}(v) 2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right\},$$

$$e_5 = \operatorname{cos}(v) 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) + \operatorname{sen}(v) 2 \frac{\partial}{\partial y^2}.$$

Teniendo en cuenta que  $x^2 = 2k \operatorname{cos} v$  e  $y^2 = 2k \operatorname{sen} v$ , se puede calcular fácilmente:

$$\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 = 0,$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_2} e_2 = \frac{1}{1+k^2} \left\{ -\frac{y^2}{2} 2 \frac{\partial}{\partial y^2} - \frac{x^2}{2} 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\}.$$

Además, se verifican

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= 0, & \nabla_{e_1} e_2 &= -C(k) e_3, & \nabla_{e_1} e_3 &= C(k) e_2, \\ \nabla_{e_2} e_1 &= C(k) e_3, & \nabla_{e_2} e_2 &= 0, & \nabla_{e_2} e_3 &= -C(k) e_1, \\ \nabla_{e_3} e_1 &= C(k) e_2, & \nabla_{e_3} e_2 &= -C(k) e_1, & \nabla_{e_3} e_3 &= 0, \end{aligned}$$

siendo ahora

$$C(k) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

De todo ello se deduce que  $\sigma(e_1, e_1) = 0$ , mientras que

$$\sigma(e_2, e_2) = \widetilde{\nabla}_{e_2} e_2,$$

lo cual implica:

$$H = -\frac{1}{6(1+k^2)} \left\{ y^2 2 \frac{\partial}{\partial y^2} + x^2 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\}.$$

Así,  $M$  es minimal si y sólo si  $x^2 = y^2 = 0$  en los puntos de la subvariedad, lo cual es equivalente a decir que  $k = 0$ . Como el ángulo slant de  $M$  es  $\cos^{-1}(1/\sqrt{1+k^2})$ , esto ocurre si y sólo si  $M$  es invariante.

Para estudiar si el vector curvatura media de  $M$  es paralelo, calculamos:

$$D_{e_1}H = 0, \quad \text{y} \quad D_{e_2}H = D_{e_3}H = -\frac{k}{3(1+k^2)^{3/2}}e_4$$

Entonces,  $DH = 0$  si y sólo si  $k = 0$ .

La curvatura escalar de  $M$  se calcula directamente a partir de los valores de  $\nabla_{e_i}e_j$ .

Señalemos por último que, si  $k = 0$ , la estructura de  $M$  es la estructura Sasakiana usual de  $\mathbf{R}^3$ .

**Ejemplo 1.4.12.**— Sea  $k$  un número positivo cualquiera y  $(g(s), h(s))$  una curva plana parametrizada por su longitud de arco. Entonces,

$$x(u, v, t) = 2(-ks \operatorname{sen} u, g(s), ks \operatorname{cos} u, h(s), t)$$

define una subvariedad slant propia con ángulo slant  $k/\sqrt{1+k^2}$ .

Las comprobaciones relativas a este ejemplo se realizan de manera análoga a las de los ejemplos anteriores.

De manera similar, también podemos obtener ejemplos de subvariedades slant con dimensión mayor que 3.

**Ejemplo 1.4.13.**— Para cada  $k > 0$ ,

$$x(u, v, w, s, t) = 2(u, v, k \operatorname{sen} w, k \operatorname{sen} s, kw, ks, k \operatorname{cos} w, k \operatorname{cos} s, t)$$

define una subvariedad slant  $M$  con ángulo slant  $\pi/4$  en  $(\mathbf{R}^9, \phi_0, \xi, \eta, g)$ .

En efecto, consideremos una base ortonormal de  $TM$ ,  $\{e_1, \dots, e_5\}$ , definida por:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial}{\partial u} + 2kw \frac{\partial}{\partial t} = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z}\right), \\ e_2 &= \frac{\partial}{\partial v} + 2ks \frac{\partial}{\partial t} = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z}\right), \\ e_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}k} \left( \frac{\partial}{\partial w} + 2k^2 \operatorname{cos}^2 w \frac{\partial}{\partial t} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{2k}} \left\{ y^3 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^3} + y^3 \frac{\partial}{\partial z} \right) + 2k 2 \frac{\partial}{\partial y^1} - x^3 2 \frac{\partial}{\partial y^3} \right\}, \\
e_4 &= \frac{1}{\sqrt{2k}} \left( \frac{\partial}{\partial s} + 2k^2 \cos^2 s \frac{\partial}{\partial t} \right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2k}} \left\{ y^4 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^4} + y^4 \frac{\partial}{\partial z} \right) + 2k 2 \frac{\partial}{\partial y^2} - x^4 2 \frac{\partial}{\partial y^4} \right\}, \\
e_5 &= \frac{\partial}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial z} = \xi.
\end{aligned}$$

Sea, ahora:

$$X = \sum_{i=1}^4 \lambda_i e_i + \eta(X) e_5 \in TM.$$

Entonces, se verifican:

$$|X|^2 - \eta^2(X) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2, \quad (1.4.27)$$

$$T_0 X = \sum_{i=1}^4 g(\phi_0 X, e_i) e_i.$$

Pero, puede comprobarse fácilmente que

$$\begin{aligned}
g(\phi_0 X, e_1) &= \lambda_3 / \sqrt{2}, & g(\phi_0 X, e_2) &= \lambda_4 / \sqrt{2}, \\
g(\phi_0 X, e_3) &= -\lambda_1 / \sqrt{2}, & g(\phi_0 X, e_4) &= -\lambda_2 / \sqrt{2},
\end{aligned}$$

de donde:

$$|T_0 X|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2. \quad (1.4.28)$$

Así, de (1.4.27) y (1.4.28) se deduce

$$\frac{|T_0 X|}{\sqrt{|X|^2 - \eta^2(X)}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

lo cual implica que esta subvariedad es slant con ángulo  $\pi/4$ .

**Ejemplo 1.4.14.**— Para cada  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,

$$x(u, v, w, s, t) = 2(u, 0, w, 0, v \cos \theta, v \operatorname{sen} \theta, s \cos \theta, s \operatorname{sen} \theta, t)$$

define una subvariedad slant minimal de dimensión 5, con ángulo  $\theta$ , en  $\mathbf{R}^9$  con su estructura Sasakiana usual.

Así mismo, obtenemos el siguiente ejemplo de una subvariedad slant de dimensión 3 en  $(\mathbf{R}^7, \phi_0, \xi, \eta, g)$ .

**Ejemplo 1.4.15.**— Para cada  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,

$$x(u, v, t) = 2(u, 0, 0, v \cos \theta, v \operatorname{sen} \theta, 0, t)$$

define una subvariedad slant minimal de dimensión 3, con ángulo  $\theta$ , en  $\mathbf{R}^7$  con su estructura Sasakiana usual.

Estos dos últimos ejemplos pueden comprobarse eligiendo referencias ortonormales de forma totalmente análoga a como se hizo en el Ejemplo 1.4.9.

Análogamente, encontramos ejemplos de subvariedades slant en la variedad casi-contacto métrica  $(\mathbf{R}^5, \phi_1, \xi, \eta, g)$ .

**Ejemplo 1.4.16.**— Dados dos números reales no nulos  $p$  y  $q$ , consideramos la siguiente inmersión de  $\mathbf{R} \times (0, \infty) \times \mathbf{R}$  en  $\mathbf{R}^5$ , definida por:

$$x(u, v, t) = 2(pv \operatorname{sen} u, pv \cos u, v \operatorname{sen} qu, v \cos qu, t).$$

Entonces, la inmersión  $x$  nos da una subvariedad slant  $M$  tridimensional en la variedad casi-contacto métrica  $(\mathbf{R}^5, \phi_1, \xi, \eta, g)$ .

Sean

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \left\{ p \cos u 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z} \right) - p \operatorname{sen} u 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. + q \cos(qu) 2 \frac{\partial}{\partial y^1} - q \operatorname{sen}(qu) 2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right\},$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \left\{ p \operatorname{sen} u 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z} \right) + p \cos u 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) + \right.$$

$$+ \left. \text{sen}(qu)2\frac{\partial}{\partial y^1} + \cos(qu)2\frac{\partial}{\partial y^2} \right\},$$

$$e_3 = 2\frac{\partial}{\partial z} = \xi.$$

Puede comprobarse sin dificultad que  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es una referencia ortonormal de  $TM$ . Como (1.4.6) es una  $\phi_1$ -base, se tienen:

$$\begin{aligned} \phi_1 e_1 = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \left\{ p \text{sen } u 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z} \right) + p \cos u 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) - \right. \\ \left. - q \text{sen}(qu)2\frac{\partial}{\partial y^1} - q \cos(qu)2\frac{\partial}{\partial y^2} \right\}, \end{aligned} \quad (1.4.29)$$

$$\begin{aligned} \phi_1 e_2 = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \left\{ -p \cos u 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z} \right) + p \text{sen } u 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. + \cos(qu)2\frac{\partial}{\partial y^1} - \text{sen}(qu)2\frac{\partial}{\partial y^2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.4.30)$$

Sea, ahora:

$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \eta(X) e_3 \in TM.$$

Entonces,

$$T_1 X = g(\phi_1 X, e_1) e_1 + g(\phi_1 X, e_2) e_2,$$

donde  $T_1$  denota la proyección tangente de  $\phi_1$ . En virtud de (1.4.29) y (1.4.30), se deducen fácilmente

$$g(\phi_1 X, e_1) = -\lambda_2 \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} (p^2 - q),$$

$$g(\phi_1 X, e_2) = \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} (p^2 - q),$$

de donde se llega a que  $M$  es slant con ángulo:

$$\cos^{-1} \frac{|p^2 - q|}{\sqrt{p^2 + 1} \sqrt{p^2 + q^2}}.$$

**Ejemplo 1.4.17.**— Para cada  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,

$$x(u, v, t) = 2(u \cos \theta, v, u \text{sen } \theta, 0, t)$$

define una subvariedad slant minimal con ángulo slant  $\theta$  en  $(\mathbf{R}^5, \phi_1, \xi, \eta, g)$ .

**Ejemplo 1.4.18.**— Para cada  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,

$$x(u, v, t) = 2(u \cos \theta, v, 0, u \sin \theta, t)$$

define una subvariedad slant minimal con ángulo slant  $\theta$  en  $(\mathbf{R}^5, \phi_1, \xi, \eta, g)$ .

La comprobación de estos ejemplos son análogas a las realizadas anteriormente. No obstante, detengámonos brevemente en el Ejemplo 1.4.18. Elegimos la referencia ortonormal de  $TM$  dada por:

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial u} = \cos \theta 2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z}\right) + \sin \theta 2\frac{\partial}{\partial y^2}, \quad (1.4.31)$$

$$e_2 = \frac{\partial}{\partial v} + 2u \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z}\right), \quad (1.4.32)$$

$$e_3 = \frac{\partial}{\partial t} = 2\frac{\partial}{\partial z} = \xi. \quad (1.4.33)$$

Se tiene

$$\phi_1 e_1 = \cos \theta 2\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z}\right) + \sin \theta 2\frac{\partial}{\partial y^1}, \quad (1.4.34)$$

$$\phi_1 e_2 = -2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z}\right), \quad (1.4.35)$$

lo cual implica:

$$T_1(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3) = -\cos \theta \lambda_2 e_1 + \cos \theta \lambda_1 e_2.$$

De aquí se deduce directamente que la subvariedad  $M$  es slant, con ángulo  $\theta$ , en  $(\mathbf{R}^5, \phi_1, \xi, \eta, g)$ . Ahora bien, observemos que

$$\phi_0 e_1 = -\cos \theta 2\frac{\partial}{\partial y^1} + \sin \theta 2\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad (1.4.36)$$

y

$$\phi_0 e_2 = -2\frac{\partial}{\partial y^2}. \quad (1.4.37)$$

Entonces, dado  $X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \eta(X)\xi \in TM$ , escribimos, como es usual,

$$T_0 X = g(\phi_0 X, e_1)e_1 + g(\phi_0 X, e_2)e_2.$$

Pero, en virtud de (1.4.36) y (1.4.37), resulta

$$g(\phi_0 X, e_1) = -\lambda_2 \operatorname{sen} \theta$$

y

$$g(\phi_0 X, e_2) = \lambda_1 \operatorname{sen} \theta.$$

Así, se verifica

$$\frac{|T_0 X|}{\sqrt{|X|^2 - \eta^2(X)}} = \operatorname{sen} \theta.$$

Podemos concluir entonces que  $M$  es una subvariedad slant en la variedad Sasakiana  $(\mathbf{R}^5, \phi_0, \xi, \eta, g)$ , con ángulo:

$$\cos^{-1}(\operatorname{sen} \theta) = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Por lo tanto, hemos descrito un ejemplo de subvariedad slant en dos estructuras casi-contacto distintas, siendo una de ellas una estructura Sasakiana. Además, si  $\theta = \pi/4$ , la subvariedad tiene el mismo ángulo slant en ambas estructuras.

Finalmente, mostramos otro ejemplo de subvariedad slant en  $\mathbf{R}^5$  con su estructura Sasakiana usual, que no viene dado por el método del Teorema 1.4.7.

**Ejemplo 1.4.19.**— Para cada  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,

$$x(u, v, t) = 2(u, 0, v \cos \theta, v \operatorname{sen} \theta, 2uv \cos \theta + t)$$

define una subvariedad slant en  $\mathbf{R}^5$  con ángulo slant  $\theta$ .

En efecto, basta considerar la referencia ortonormal de  $TM$  dada por:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial}{\partial u} = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z}\right), \\ e_2 &= \frac{\partial}{\partial v} - 2u \cos \theta \frac{\partial}{\partial t} = \cos \theta \, 2\frac{\partial}{\partial y^1} + \operatorname{sen} \theta \, 2\frac{\partial}{\partial y^2}, \\ e_3 &= \frac{\partial}{\partial t} = 2\frac{\partial}{\partial z} = \xi. \end{aligned}$$

Expresando cualquier campo tangente a  $M$  en función de esta referencia, se demuestra de manera análoga a como hemos hecho antes que la subvariedad  $M$  es slant con ángulo  $\theta$ .



## Capítulo 2

# Subvariedades Slant en Variedades de Contacto

Examinamos a continuación algunas propiedades de las subvariedades slant en variedades de contacto. En concreto, resulta especialmente interesante el estudio de las subvariedades slant en las variedades  $K$ -contacto, pues dicha estructura nos permitirá probar importantes resultados teóricos.

Así, en la Sección 2.1 examinaremos el valor de  $\nabla Q$  para las subvariedades slant de una variedad  $K$ -contacto, obteniendo una caracterización de dichas subvariedades. Más tarde, centraremos nuestra atención en el estudio de  $\nabla T$  y  $\nabla N$ . En este caso, hallaremos también teoremas de caracterización. Estos resultados tendrán su aplicación en el caso de las subvariedades slant tridimensionales, que, como ya hemos señalado, constituyen la primera clase no trivial de subvariedades slant. Veremos esto en la Sección 2.2.

Otro problema interesante, que trataremos en la Sección 2.3, es el de la posibilidad de inducir una estructura de contacto sobre una subvariedad slant. En general, obtendremos resultados que negarán dicha posibilidad.

En la Sección 2.4, trabajaremos con subvariedades slant tridimensionales, relacionando su curvatura escalar con un nuevo concepto, el de la curvatura seccional normal, así como con su curvatura escalar normal.

Por último, ofrecemos en la Sección 2.5 algunas notas acerca de la umbilicalidad en las subvariedades slant, así como sendas condiciones suficientes para asegurar la austeridad y la minimalidad de dichas subvariedades.

## 2.1 Subvariedades Slant en Variedades $K$ -contacto.

Sea  $M$  una subvariedad Riemanniana isométricamente inmersa en una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$ . Recordemos que denotamos por  $\nabla$  y  $\widetilde{\nabla}$  las conexiones de Levi-Civita de  $M$  y  $\widetilde{M}$  respectivamente.

En esta sección, vamos a estudiar la relación existente entre el ser  $M$  slant y el valor de  $\nabla Q$ . Recordemos que se define

$$(\nabla_X Q)Y = \nabla_X QY - Q\nabla_X Y,$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

En el caso complejo, las subvariedades slant venían caracterizadas en cierta forma por la expresión  $\nabla Q = 0$ . Sin embargo, veremos que ahora la situación es distinta.

**Proposición 2.1.1.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$ . Entonces,  $\nabla Q = 0$  si y sólo si  $\nabla_X \xi = 0$  para todo  $X \in TM$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Sea  $M$  una subvariedad slant con ángulo  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Dado  $X \in TM$ , en virtud del Teorema 1.2.1, se verifica:

$$QX = -\cos^2 \theta X + \cos^2 \theta \eta(X)\xi. \quad (2.1.1)$$

Así, dados  $X, Y \in TM$ , sustituyendo  $X$  por  $\nabla_X Y$  en (2.1.1), resulta:

$$Q\nabla_X Y = -\cos^2 \theta \nabla_X Y + \cos^2 \theta \eta(\nabla_X Y)\xi. \quad (2.1.2)$$

Por otra parte, sustituyendo  $X$  por  $Y$  en (2.1.1) y derivando covariantemente respecto a  $X$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla_X QY &= -\cos^2 \theta \nabla_X Y + \cos^2 \theta \eta(\nabla_X Y)\xi + \\ &+ \cos^2 \theta g(Y, \nabla_X \xi)\xi + \cos^2 \theta \eta(Y)\nabla_X \xi, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

dado que:

$$X(\eta(Y)) = Xg(Y, \xi) = g(\nabla_X Y, \xi) + g(Y, \nabla_X \xi) = \eta(\nabla_X Y) + g(Y, \nabla_X \xi).$$

Por lo tanto,  $\nabla Q = 0$  si y sólo si (2.1.2) coincide con (2.1.3) para todos  $X, Y \in TM$ , lo cual equivale a decir que  $\nabla_X \xi = 0$  para todo  $X \in TM$ .  $\square$

**Corolario 2.1.2.**— *En las condiciones de la proposición anterior, si  $\widetilde{M}$  es una variedad  $K$ -contacto, entonces  $\nabla Q = 0$  si y sólo si  $M$  es una subvariedad anti-invariante.*

**DEMOSTRACIÓN:** Es consecuencia inmediata de la proposición anterior, pues al ser  $\widetilde{M}$  una variedad  $K$ -contacto, se verifica que  $\nabla_X \xi = -TX$  para todo  $X \in TM$ .  $\square$

Así, vemos que, mientras que las subvariedades slant de una variedad casi Hermítica verifican que  $\nabla Q = 0$  (ver [10]), en el caso de una variedad  $K$ -contacto, esta condición sólo podrían cumplirla las subvariedades anti-invariantes. En la siguiente proposición, calculamos el valor de  $\nabla Q$  para cualquier subvariedad slant de una variedad  $K$ -contacto. Además, como veremos en el Teorema 2.1.5, la expresión obtenida para  $\nabla Q$  nos servirá para caracterizar las subvariedades slant.

**Proposición 2.1.3.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant de una variedad  $K$ -contacto  $\widetilde{M}$ . Denotemos por  $\theta$  al ángulo slant de  $M$ . Entonces, para todos  $X, Y \in TM$ , se verifica:*

$$(\nabla_X Q)Y = \cos^2 \theta (g(X, TY)\xi - \eta(Y)TX).$$

**DEMOSTRACIÓN:** De (2.1.2) y (2.1.3), se deduce

$$\begin{aligned} (\nabla_X Q)Y &= \nabla_X QY - Q(\nabla_X Y) = \cos^2 \theta g(Y, \nabla_X \xi)\xi + \cos^2 \theta \eta(Y)\nabla_X \xi = \\ &= -\cos^2 \theta g(Y, TX)\xi - \cos^2 \theta \eta(Y)TX = \cos^2 \theta (g(X, TY)\xi - \eta(Y)TX), \end{aligned}$$

pues al ser  $\widetilde{M}$  una variedad  $K$ -contacto,  $\nabla_X \xi = -TX$ .  $\square$

**Nota 2.1.4.**— Por supuesto, no existe ninguna contradicción entre la Proposición 2.1.3 y el Corolario 2.1.2, pues las subvariedades anti-invariantes son subvariedades slant con ángulo  $\theta = \pi/2$ .

**Teorema 2.1.5.**— *Sea  $M$  una subvariedad de una variedad  $K$ -contacto  $\widetilde{M}$  tal que  $\xi \in TM$ . Entonces,  $M$  es slant si y sólo si se verifican las siguientes propiedades:*

(i) El endomorfismo  $Q|_{\mathcal{D}}$  tiene un único autovalor en cada punto de  $M$ .

(ii) Existe una función  $\lambda : M \rightarrow [0, 1]$  tal que

$$(\nabla_X Q)Y = \lambda(g(X, TY)\xi - \eta(Y)TX)$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

Además, en este caso, si  $\theta$  es el ángulo de Wirtinger de  $M$ , se tiene que  $\lambda = \cos^2\theta$ .

DEMOSTRACIÓN: Veamos la implicación directa. La condición (i) es consecuencia directa del Lema 1.3.4, mientras que la condición (ii) se tiene en virtud de la Proposición 2.1.3.

Recíprocamente, veamos que las dos condiciones expuestas implican que  $M$  es slant. Sea  $\lambda_1(x)$  el único autovalor de  $Q|_{\mathcal{D}}$  en cada punto  $x \in M$ . Probemos en primer lugar que  $\lambda_1$  es constante. Sea  $Y \in \mathcal{D}$  un autovector unitario asociado a  $\lambda_1$ . Así,  $QY = \lambda_1 Y$ .

Entonces, para todo  $X \in TM$ , en virtud de la condición (ii), se tiene que

$$\begin{aligned} X(\lambda_1)Y + \lambda_1 \nabla_X Y &= \nabla_X(\lambda_1 Y) = \nabla_X(QY) = \\ &= Q(\nabla_X Y) + \lambda(g(X, TY)\xi - \eta(Y)TX) = Q(\nabla_X Y) + \lambda g(X, TY)\xi, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

pues  $Y \in \mathcal{D}$ .

Ahora bien, al ser  $Y$  unitario, se deduce

$$g(\nabla_X Y, Y) = 0, \quad (2.1.5)$$

y, por lo tanto, al ser  $Q$  autoadjunto e  $Y$  autovector de  $Q|_{\mathcal{D}}$ :

$$g(Q(\nabla_X Y), Y) = g(\nabla_X Y, QY) = \lambda_1 g(\nabla_X Y, Y) = 0. \quad (2.1.6)$$

Luego, hallando el producto de (2.1.4) con  $Y$  y aplicando (2.1.5) y (2.1.6), se obtiene:

$$X(\lambda_1) = \lambda g(X, TY)\eta(Y) = 0.$$

Así,  $X(\lambda_1) = 0$  para todo  $X \in TM$ , lo cual implica que  $\lambda_1$  es constante.

En virtud del Teorema 1.2.1, para probar que  $M$  es slant, basta ver que existe una constante  $\mu$  tal que  $Q = -\mu I + \mu\eta \otimes \xi$ .

Sea  $X \in TM$ . Entonces,  $X = \widetilde{X} + \eta(X)\xi$ , con  $\widetilde{X} = X - \eta(X)\xi \in \mathcal{D}$ . Así,  $QX = Q\widetilde{X}$ , pues  $T\xi = 0$ . Como, por hipótesis,  $Q|_{\mathcal{D}} = \lambda_1 I$ , se tiene que  $Q\widetilde{X} = \lambda_1 \widetilde{X}$ . Por lo tanto:

$$QX = \lambda_1 \widetilde{X} = \lambda_1 X - \lambda_1 \eta(X)\xi.$$

Tomando entonces  $\mu = -\lambda_1$  se obtiene la constante deseada.

Además, cuando  $M$  sea slant, en virtud de la Proposición 2.1.3, ha de ser  $\lambda = -\lambda_1 = \mu = \cos^2 \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo slant de  $M$ .  $\square$

**Corolario 2.1.6.**— *Sea  $M$  una subvariedad de dimensión 3 de una variedad  $K$ -contacto  $\widetilde{M}$  tal que  $\xi \in TM$ . Entonces,  $M$  es slant si y sólo existe una función  $\lambda : M \rightarrow [0, 1]$  tal que*

$$(\nabla_X Q)Y = \lambda(g(X, TY)\xi - \eta(Y)TX)$$

para todos  $X, Y \in TM$ . Además, en este caso, si  $\theta$  es el ángulo de Wirtinger de  $M$ , se tiene que  $\lambda = \cos^2 \theta$ .

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que, al ser  $\dim \mathcal{D} = 2$ ,  $Q|_{\mathcal{D}}$  tiene un único autovalor en cada punto de  $M$ . Supongamos que, para un punto  $x \in M$ ,  $Q|_{\mathcal{D}}$  tuviera dos autovalores distintos  $\lambda_i$  y  $\lambda_j$ . Podemos suponer que  $\lambda_i \neq 0$ . Entonces, en virtud del apartado (iii) de la Proposición 1.3.1,  $\mathcal{D}_x^i$  es de dimensión par, por lo que

$$\dim \mathcal{D}_x \geq \dim \mathcal{D}_x^i + \dim \mathcal{D}_x^j > \dim \mathcal{D}_x^i \geq 2,$$

lo cual es contradictorio.  $\square$

## 2.2 Subvariedades Slant de Dimensión 3.

Continuando con el trabajo realizado en la sección anterior, estudiamos ahora los valores de  $\nabla T$  y  $\nabla N$ , estando definidos

$$(\nabla_X T)Y = \nabla_X TY - T\nabla_X Y,$$

$$(\nabla_X N)Y = D_X NY - N\nabla_X Y,$$

para todos  $X, Y \in TM$ . Comencemos por  $\nabla T$ .

**Proposición 2.2.1.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant, con ángulo  $\theta$ , de una variedad  $K$ -contacto  $\widetilde{M}$ . Entonces, se verifica que*

$$(\nabla_X T)\xi = \cos^2\theta(-X + \eta(X)\xi) \quad (2.2.1)$$

para todo  $X \in TM$ .

DEMOSTRACIÓN: Dado que  $T(\xi) = 0$ , se tiene que

$$(\nabla_X T)\xi = -T(\nabla_X \xi) = T^2X,$$

pues, al ser  $\widetilde{M}$  una variedad  $K$ -contacto,  $\nabla_X \xi = -TX$ . Ahora bien, como  $M$  es una subvariedad slant, en virtud del Teorema 1.2.1,

$$T^2X = -\cos^2\theta X + \cos^2\theta\eta(X)\xi,$$

por lo que se obtiene (2.2.1). □

**Nota 2.2.2.**— En las condiciones anteriores, la expresión (2.2.1) puede ser escrita en la forma

$$(\nabla_X T)\xi = \cos^2\theta(g(X, \xi)\xi - \eta(\xi)X),$$

para todo  $X \in TM$ .

**Lema 2.2.3.**— *Sea  $M$  una subvariedad de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$  tal que  $\xi \in TM$ . Supongamos que existe una función  $\lambda$  tal que*

$$(\nabla_X T)Y = \lambda(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X),$$

para todos  $X, Y \in TM$ . Entonces,

$$(\nabla_X Q)Y = \lambda(g(X, TY)\xi - \eta(Y)TX),$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

DEMOSTRACIÓN: para todos  $X, Y \in TM$ , se tiene

$$\begin{aligned} Q(\nabla_X Y) &= T^2(\nabla_X Y) = T(\nabla_X TY - \lambda(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X)) = \\ &= T(\nabla_X TY) + \lambda\eta(Y)TX = \nabla_X QY - \lambda(g(X, TY)\xi - \eta(Y)TX), \end{aligned}$$

de donde se deduce el resultado.  $\square$

Por analogía con las subvariedades slant Kaehlerianas de la Geometría Compleja, introducimos el concepto de subvariedad slant Sasakiana<sup>1</sup>.

**Definición 2.2.4.**— Decimos que una subvariedad slant propia  $M$ , con ángulo slant  $\theta$ , es una subvariedad slant Sasakiana si

$$(\nabla_X T)Y = \cos^2 \theta (g(X, Y)\xi - \eta(Y)X),$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

**Teorema 2.2.5.**— Sea  $M$  una subvariedad de dimensión 3 de una variedad  $K$ -contacto  $\widetilde{M}$  tal que  $\xi \in TM$ . Son equivalentes:

(i)  $M$  no es invariante ni anti-invariante y existe una función  $\lambda : M \rightarrow [0, 1]$  tal que

$$(\nabla_X T)Y = \lambda(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X)$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

(ii) Existe una función  $\lambda : M \rightarrow (0, 1)$  tal que

$$(\nabla_X T)Y = \lambda(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X)$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

(iii)  $M$  es slant Sasakiana.

(iv)  $M$  es slant propia.

**DEMOSTRACIÓN:** En virtud del Corolario 2.1.6 y del Lema 2.2.3, es evidente que los tres primeros enunciados son equivalentes. Por lo tanto, basta probar que si  $M$  es slant propia con ángulo  $\theta$ , se verifica

$$(\nabla_X T)Y = \cos^2 \theta (g(X, Y)\xi - \eta(Y)X)$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

---

<sup>1</sup>No se quiere indicar con esta notación que se tenga una estructura Sasakiana en la subvariedad. Esta posibilidad se estudiará en la Sección 2.3

Como, por hipótesis,  $\dim(M) = 3$ , en virtud del Corolario 1.2.5, podemos elegir una referencia local ortonormal de  $TM$ ,  $\{e_1, e_2, \xi\}$ , tal que  $e_2 = (\sec \theta)Te_1$  y  $e_1 = -(\sec \theta)Te_2$ .

Entonces, dado  $X \in TM$ , se tiene

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)e_1 &= \nabla_X Te_1 - T(\nabla_X e_1) = \nabla_X(\cos \theta e_2) - \\ &- T(\omega_1^1(X)e_1 + \omega_1^2(X)e_2 + \omega_1^3(X)\xi) = \cos \theta \nabla_X e_2 - \omega_1^2(X)Te_2 = \\ &= \cos \theta(\omega_2^1(X)e_1 + \omega_2^2(X)e_2 + \omega_2^3(X)\xi) + \cos \theta \omega_1^2(X)e_1 = \cos \theta \omega_2^3(X)\xi, \end{aligned}$$

pues  $\omega_i^i(X) = 0$  y  $\omega_i^j(X) = -\omega_j^i(X)$ . Ahora bien,

$$\omega_2^3(X) = g(\nabla_X e_2, \xi) = -g(e_2, \nabla_X \xi) = g(e_2, TX),$$

pues  $\widetilde{M}$  es  $K$ -contacto. Así:

$$(\nabla_X T)e_1 = \cos \theta g(e_2, TX)\xi = \cos^2 \theta (g(X, e_1)\xi - \eta(e_1)X). \quad (2.2.2)$$

Análogamente, se obtiene:

$$(\nabla_X T)e_2 = \cos^2 \theta (g(X, e_2)\xi - \eta(e_2)X). \quad (2.2.3)$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)\xi &= -T(\nabla_X \xi) = T^2 X = \cos^2 \theta (-X + \eta(X)\xi) = \\ &= \cos^2 \theta (g(X, \xi)\xi - \eta(\xi)X). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Sea ahora  $Y \in TM$  cualquiera. Localmente, podemos escribir  $Y = Y^1 e_1 + Y^2 e_2 + \eta(Y)\xi$ , de donde:

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)Y &= \nabla_X TY - T(\nabla_X Y) = \nabla_X(Y^1 Te_1 + Y^2 Te_2) - \\ &- T(\nabla_X(Y^1 e_1 + Y^2 e_2 + \eta(Y)\xi)) = X(Y^1)Te_1 + Y^1 \nabla_X Te_1 + X(Y^2)Te_2 + \\ &+ Y^2 \nabla_X Te_2 - T(X(Y^1)e_1 + Y^1 \nabla_X e_1 + X(Y^2)e_2 + Y^2 \nabla_X e_2 + X(\eta(Y))\xi + \\ &+ \eta(Y)\nabla_X \xi) = Y^1(\nabla_X T)e_1 + Y^2(\nabla_X T)e_2 + \eta(Y)(\nabla_X T)\xi. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Por lo tanto, sustituyendo (2.2.2), (2.2.3) y (2.2.4) en (2.2.5), se tiene

$$(\nabla_X T)Y = \cos^2 \theta (Y^1 g(X, e_1)\xi - Y^1 \eta(e_1)X + Y^2 g(X, e_2)\xi - Y^2 \eta(e_2)X +$$



$$+\eta(Y)g(X, \xi)\xi - \eta(Y)\eta(\xi)X = \cos^2 \theta(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X),$$

como queríamos demostrar.  $\square$

**Nota 2.2.6.**— La demostración del Teorema anterior también es válida en el caso invariante, pues sólo es preciso exigir que  $\cos \theta$  no se anule. Por otra parte, el resultado también es cierto en el caso anti-invariante, pues, al ser  $T \equiv 0$ , se tiene que

$$(\nabla_X T)Y = 0 = \cos^2 \theta(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X),$$

para todos  $X, Y \in TM$ , ya que  $\theta = \pi/2$ . Además, en este caso, no es necesario exigir que  $M$  tenga dimensión 3.

Así, podemos enunciar que, en las condiciones anteriores,  $M$  es slant si y sólo si existe una función  $\lambda : M \rightarrow [0, 1]$  tal que

$$(\nabla_X T)Y = \lambda(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X)$$

para todos  $X, Y \in TM$ , siendo, en este caso,  $\lambda = \cos^2 \theta$ .

Observemos que las condiciones del Teorema 2.2.5 son suficientes pero no necesarias. En efecto, si consideramos el Ejemplo 1.4.13 con la referencia ortonormal  $\{e_1, \dots, e_5\}$  que definimos en su momento, puede comprobarse que

$$[e_1, e_3] = [e_2, e_4] = -\sqrt{2}e_5,$$

siendo nulos los demás corchetes  $[e_i, e_j]$  con  $i < j$ . A partir de aquí, se tiene

$$\nabla_{e_1} e_3 = -\nabla_{e_3} e_1 = \nabla_{e_2} e_4 = -\nabla_{e_4} e_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_5,$$

$$\nabla_{e_1} e_5 = \nabla_{e_5} e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e_3, \quad \nabla_{e_2} e_5 = \nabla_{e_5} e_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}e_4,$$

$$\nabla_{e_3} e_5 = \nabla_{e_5} e_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_1, \quad \nabla_{e_4} e_5 = \nabla_{e_5} e_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_2,$$

mientras que los demás  $\nabla_{e_i} e_j$  se anulan. Entonces, dado que

$$T_0 e_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_3, \quad T_0 e_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_4, \quad T_0 e_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 \quad \text{y} \quad T_0 e_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}e_2,$$

se puede calcular que, para todos  $X, Y$  tangentes a la subvariedad,

$$(\nabla_X T_0)Y = \frac{1}{2}(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X) = \cos^2 \theta (g(X, Y)\xi - \eta(Y)X),$$

siendo  $\theta = \pi/4$  el ángulo slant. Así, obtenemos subvariedades slant Sasakianas con dimensión mayor que 3.

Análogamente, en el Ejemplo 1.4.14 se nos muestran subvariedades slant Sasakianas de dimensión 5, en  $\mathbf{R}^9$  con su estructura Sasakiana usual.

Por otra parte, tampoco es necesario el que la variedad ambiente  $\widetilde{M}$  sea  $K$ -contacto. Para justificar esta afirmación, observemos el Ejemplo 1.4.18. Considerando la referencia tangente  $\{e_1, e_2, \xi\}$  dada por (1.4.31), (1.4.32) y (1.4.33), se obtiene, en virtud de (1.4.34) y (1.4.35),

$$T_1 e_1 = \cos \theta e_2 \text{ y } T_1 e_2 = -\cos \theta e_1,$$

donde  $T_1$  es la proyección tangente de  $\phi_1$ , mientras que de (1.4.36) y (1.4.37) se deduce

$$T_0 e_1 = \cos \theta e_2 \text{ y } T_0 e_2 = -\cos \theta e_1,$$

siendo  $T_0$  la proyección tangente de  $\phi_0$ . Así, cuando  $\theta = \pi/4$ , se tendrá que  $T_0 \equiv T_1$ , lo cual implica que, para todos  $X, Y$  tangentes a la subvariedad  $M^2$ ,

$$(\nabla_X T_1)Y = (\nabla_X T_0)Y = \cos^2 \frac{\pi}{4} (g(X, Y)\xi - \eta(Y)X),$$

pues, para cada  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,  $M$  es subvariedad slant tridimensional con ángulo  $\pi/2 - \theta$  en  $(\mathbf{R}^5, \phi_0, \eta, \xi, g)$ , que es una variedad Sasakiana y, por tanto,  $K$ -contacto. De aquí se sigue que, para  $\theta = \pi/4$ ,  $M$  es subvariedad slant Sasakiana en la variedad  $(\mathbf{R}^5, \phi_1, \eta, \xi, g)$ , que no es  $K$ -contacto. De hecho, dado un  $\theta$  cualquiera, puede probarse sin dificultad que

$$(\nabla_X T_1)Y = \sin \theta \cos \theta (g(X, Y)\xi - \eta(Y)X),$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

No obstante, el Teorema 2.2.5 no ha de verificarse en una variedad casi-contacto cualquiera, tal y como se pone de manifiesto en el Ejemplo 1.4.17.

---

<sup>2</sup>Obsérvese que la conexión no depende de la estructura casi-contacto, sino de la métrica, que es la misma en ambas variedades.

Aquí se describen subvariedades slant propias de  $(\mathbf{R}^5, \phi_1, \eta, \xi, g)$  tales que  $\nabla T_1 = 0$ , como se puede comprobar con facilidad.

Relacionemos ahora el valor de  $\nabla T$  con el operador de Weingarten  $A$ . Sin exigir ninguna condición sobre  $\nabla T$ , se tiene la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.7.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant, con ángulo  $\theta$ , de una variedad  $K$ -contacto  $\widetilde{M}$ . Entonces, se verifica que*

$$A_{NY}\xi = -\text{sen}^2\theta(Y - \eta(Y)\xi) \quad (2.2.6)$$

para todo  $Y \in TM$ .

DEMOSTRACIÓN: Dado  $Y \in TM$ , como  $\widetilde{M}$  es  $K$ -contacto, se tiene

$$A_{NY}\xi = tNY, \quad (2.2.7)$$

de donde, en virtud del Corolario 1.2.2, se sigue el resultado.  $\square$

**Nota 2.2.8.**— En las condiciones anteriores, la expresión (2.2.6) puede ser escrita en la forma

$$A_{NY}\xi = A_{N\xi}Y - \text{sen}^2\theta(\eta(\xi)Y - \eta(Y)\xi),$$

para todo  $Y \in TM$ .

Para subvariedades de una variedad Sasakiana, se tiene el siguiente Teorema general.

**Teorema 2.2.9.**— *Sea  $M$  una subvariedad de una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$  tal que  $\xi \in TM$ . Entonces:*

(i) *para todos  $X, Y \in TM$ , se tiene:*

$$(\nabla_X T)Y = t\sigma(X, Y) + A_{NY}X + g(X, Y)\xi - \eta(Y)X. \quad (2.2.8)$$

Así, si  $\lambda$  es una función,  $(\nabla_X T)Y = \lambda(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X)$  para todos  $X, Y \in TM$ , si y sólo si

$$A_{NY}X = A_{NX}Y + (1 - \lambda)\widetilde{R}(X, Y)\xi$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

(ii) para todos  $X, Y \in TM$ , se tiene:

$$(\nabla_X N)Y = n\sigma(X, Y) - \sigma(X, TY). \quad (2.2.9)$$

Así,  $\nabla N = 0$  si y sólo si  $A_{nV}Y = -A_VTY$  para todo  $Y \in TM$  y todo  $V \in TM^\perp$ .

DEMOSTRACIÓN: Dados  $X, Y \in TM$  cualesquiera, como  $\widetilde{M}$  es una variedad Sasakiana, sabemos que

$$(\widetilde{\nabla}_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X,$$

de donde:

$$\widetilde{\nabla}_X \phi Y = \phi(\widetilde{\nabla}_X Y) + g(X, Y)\xi - \eta(Y)X. \quad (2.2.10)$$

Ahora bien, en virtud de la descomposición (0.3.1) y de las fórmulas de Gauss y de Weingarten, se tiene:

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X \phi Y &= \widetilde{\nabla}_X(TY + NY) = \widetilde{\nabla}_X TY + \widetilde{\nabla}_X NY = \\ &= \nabla_X TY + \sigma(X, TY) - A_{NY}X + D_X NY. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Por otra parte, se verifica:

$$\begin{aligned} \phi(\widetilde{\nabla}_X Y) &= \phi(\nabla_X Y + \sigma(X, Y)) = \phi(\nabla_X Y) + \phi(\sigma(X, Y)) = \\ &= T(\nabla_X Y) + N(\nabla_X Y) + t\sigma(X, Y) + n\sigma(X, Y). \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Así, sustituyendo (2.2.11) y (2.2.12) en (2.2.10) e igualando componentes tangentes y normales, resultan

$$\begin{aligned} \nabla_X TY - A_{NY}X &= T(\nabla_X Y) + t\sigma(X, Y) + g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \\ \sigma(X, TY) + D_X NY &= N(\nabla_X Y) + n\sigma(X, Y), \end{aligned}$$

de donde se obtiene (2.2.8) y (2.2.9).

Probemos a continuación la equivalencia del primer apartado. Para ello, supongamos que existe una función  $\lambda$  tal que

$$(\nabla_X T)Y = \lambda(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X) \quad (2.2.13)$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

Entonces, en virtud de (2.2.8) y (2.2.13), se deduce que

$$t\sigma(X, Y) + A_{NY}X = (\lambda - 1)(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X), \quad (2.2.14)$$

para todos  $X, Y \in TM$ . Intercambiando los papeles de  $X$  e  $Y$  en (2.2.14), resulta

$$t\sigma(Y, X) + A_{NX}Y = (\lambda - 1)(g(Y, X)\xi - \eta(X)Y), \quad (2.2.15)$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

Así, dado que tanto  $\sigma$  como  $g$  son tensores simétricos, de (2.2.14) y (2.2.15) se obtiene

$$A_{NY}X - A_{NX}Y = (\lambda - 1)(\eta(X)Y - \eta(Y)X) = (1 - \lambda)\tilde{R}(X, Y)\xi,$$

para todos  $X, Y \in TM$ , en virtud de (0.2.15), pues  $\tilde{M}$  es una variedad Sasakiana.

Recíprocamente, supongamos que

$$A_{NY}X - A_{NX}Y = (\lambda - 1)(\eta(X)Y - \eta(Y)X),$$

para todos  $X, Y \in TM$ , con  $\lambda$  una función. Entonces:

$$g(A_{NY}X, Z) = g(A_{NX}Y, Z) + (\lambda - 1)g(\eta(X)Y - \eta(Y)X, Z), \quad (2.2.16)$$

para todos  $X, Y, Z \in TM$ .

Pero, es fácil ver que:

$$\begin{aligned} g(\eta(X)Y - \eta(Y)X, Z) &= g(X, \xi)g(Y, Z) - \eta(Y)g(X, Z) = \\ &= g(g(Y, Z)\xi - \eta(Y)Z, X). \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Además, dado que el operador de Weingarten  $A$  es autoadjunto y en virtud de (0.1.3), se tiene:

$$g(A_{NY}X, Z) = g(X, A_{NY}Z), \quad (2.2.18)$$

$$g(A_{NX}Y, Z) = g(\sigma(Y, Z), NX) = -g(t\sigma(Y, Z), X). \quad (2.2.19)$$

Así, sustituyendo (2.2.17), (2.2.18) y (2.2.19) en (2.2.16), se verifica

$$g(A_{NY}Z, X) = -g(t\sigma(Y, Z), X) + (\lambda - 1)g(g(Y, Z)\xi - \eta(Y)Z, X),$$

para todos  $X, Y, Z \in TM$ , de donde:

$$A_{NY}Z + t\sigma(Y, Z) = (\lambda - 1)(g(Y, Z)\xi - \eta(Y)Z), \quad (2.2.20)$$

para todos  $Y, Z \in TM$ .

Entonces, de (2.2.8) y (2.2.20) se deduce

$$(\nabla_Z T)Y = \lambda(g(Y, Z)\xi - \eta(Y)Z),$$

para todos  $Y, Z \in TM$ , como queríamos demostrar.

En cuanto a la equivalencia del segundo apartado, en virtud de (2.2.9) podemos afirmar que  $\nabla N = 0$  si y sólo si  $n\sigma(X, Y) - \sigma(X, TY) = 0$  para todos  $X, Y \in TM$ , lo cual equivale a decir que

$$g(n\sigma(X, Y), V) = g(\sigma(X, TY), V), \quad (2.2.21)$$

para todos  $X, Y \in TM$  y todo  $V \in T^\perp M$ .

Ahora bien, dado que

$$g(\sigma(X, TY), V) = g(A_V TY, X)$$

y

$$g(n\sigma(X, Y), V) = g(\phi\sigma(X, Y), V) = -g(\sigma(X, Y), nV) = -g(A_{nV}Y, X),$$

se deduce de (2.2.21) que  $\nabla N = 0$  si y sólo si

$$g(A_{nV}Y, X) = -g(A_V TY, X),$$

para todos  $X, Y \in TM$  y todo  $V \in T^\perp M$ , lo cual equivale a decir

$$A_{nV}Y = -A_V TY,$$

para todo  $Y \in TM$  y todo  $V \in T^\perp M$ . □

**Corolario 2.2.10.**— *Sea  $M$  una subvariedad de dimensión 3 de una variedad Sasakiana  $\tilde{M}$  con  $\xi \in TM$ . Entonces,  $M$  es slant si y sólo si existe una función  $C$ , con valores en  $[0, 1]$ , tal que*

$$A_{NY}X = A_{NX}Y + C\tilde{R}(X, Y)\xi$$

para todos  $X, Y \in TM$ . Además, en este caso, si  $\theta$  es el ángulo de Wirtinger de  $M$ , se tiene que  $C = \sin^2\theta$ .

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia directa del Teorema 2.2.5, la Nota 2.2.6 y el primer apartado del Teorema 2.2.9.  $\square$

**Nota 2.2.11.**— Sea  $\widetilde{M}$  Sasakiana y  $M$  una subvariedad suya tal que  $\xi \in TM$ . Observemos que resulta sencillo obtener los valores de  $\nabla T$  y  $\nabla N$  cuando  $M$  es invariante o anti-invariante. En concreto, si  $M$  es invariante, dado que en tal caso  $N = 0$  y  $t = 0$ , en virtud del Teorema 2.2.9, se tiene que

$$(\nabla_X T)Y = \cos^2\theta(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X),$$

para todos  $X, Y \in TM$ , con  $\theta = 0$ , lo cual implica que el resultado del Teorema 2.2.5 es cierto para subvariedades invariantes, independientemente de su dimensión, siempre que la variedad ambiente sea Sasakiana. Por otra parte, es trivial señalar que, en este caso,

$$\nabla N = 0, \tag{2.2.22}$$

bastando para ello que la variedad  $\widetilde{M}$  sea casi-contacto métrica. Por supuesto, si  $\widetilde{M}$  es Sasakiana, no existe ninguna contradicción entre (2.2.22) y (2.2.9), pues  $n\sigma(X, Y) = \phi\sigma(X, Y)$  y  $\sigma(X, TY) = \sigma(X, \phi Y)$ , verificándose (0.3.16), en una subvariedad invariante de una variedad Sasakiana, para todos  $X, Y$  tangentes a la subvariedad.

En el caso en que  $M$  sea anti-invariante, ya señalamos en la Nota 2.2.6 que, como  $T = 0$ ,  $\nabla T = 0$ , es decir,

$$(\nabla_X T)Y = \cos^2\theta(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X)$$

para todos  $X, Y \in TM$ , con  $\theta = \pi/2$ , aunque la variedad  $\widetilde{M}$  sea sólo casi-contacto métrica. En cuanto al valor de  $\nabla N$ , sólo podemos decir, en general, que, en virtud del Teorema 2.2.9,  $(\nabla_X N)Y = n\sigma(X, Y)$ , para todos  $X, Y \in TM$ . En el siguiente Lema se presenta un caso en el que  $\nabla N = 0$ , imponiendo condiciones sobre las dimensiones de  $M$  y  $\widetilde{M}$ .

**Lema 2.2.12.**— Sea  $M$  una subvariedad anti-invariante de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$ . Supongamos que  $\dim M = 3$ ,  $\dim \widetilde{M} = 5$  y  $\xi \in TM$ . Se verifican:

(i) Si  $\{e_1, e_2, \xi\}$  es una referencia local ortonormal del fibrado tangente  $TM$ , entonces  $\{Ne_1, Ne_2\}$  es una referencia local ortonormal del fibrado normal a  $M$ .

(ii)  $n = 0$ .

(iii) Si  $\widetilde{M}$  es Sasakiana, entonces  $\nabla N = 0$ .

DEMOSTRACIÓN: (i) es un caso particular del Corolario 1.2.4, con  $\theta = \pi/2$ . En cuanto a (ii), dados una referencia local ortonormal  $\{e_1, e_2, \xi\}$  de  $TM$  y un campo normal  $V \in T^\perp M$ , se tiene que

$$V = V^1 Ne_1 + V^2 Ne_2 = V^1 \phi e_1 + V^2 \phi e_2,$$

de donde

$$\phi V = tV + nV = V^1 \phi^2 e_1 + V^2 \phi^2 e_2 = -V^1 e_1 - V^2 e_2,$$

por lo que  $nV = 0$ . Por otra parte, en virtud del segundo apartado y (2.2.9), se obtiene (iii).  $\square$

A continuación, vamos a estudiar el valor de  $\nabla N$  para una subvariedad slant tridimensional en una variedad Sasakiana de dimensión 5. Obtenemos en primer lugar la Proposición 2.2.15, que señala de nuevo las diferencias existentes entre nuestro estudio y el realizado en el caso Kaehleriano. Necesitamos previamente el siguiente lema, que nos será de utilidad para cálculos posteriores.

**Lema 2.2.13.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant propia, con ángulo  $\theta$ , de una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$ . Supongamos que  $\dim M = 3$  y  $\dim \widetilde{M} = 5$ . Consideremos una referencia slant adaptada  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ . Sea  $\sigma$  la segunda forma fundamental de  $M$  en  $\widetilde{M}$ . Denotemos*

$$\sigma_{ij}^r = g(\sigma(e_i, e_j), e_r),$$

para todos  $i, j = 1, 2, 3$  y todo  $r = 4, 5$ . Entonces, se verifican:

$$\sigma_{12}^4 = \sigma_{11}^5, \quad (2.2.23)$$

$$\sigma_{22}^4 = \sigma_{12}^5, \quad (2.2.24)$$

$$\sigma_{13}^4 = \sigma_{23}^5 = -\text{sen}\theta, \quad (2.2.25)$$

$$\sigma_{23}^4 = \sigma_{13}^5 = \sigma_{33}^4 = \sigma_{33}^5 = 0. \quad (2.2.26)$$



DEMOSTRACIÓN: En virtud de (0.1.3), se tiene

$$\sigma_{12}^4 = g(\sigma(e_1, e_2), e_4) = g(A_{e_4}e_2, e_1) = (\csc \theta)g(A_{Ne_1}e_2, e_1), \quad (2.2.27)$$

pues

$$e_4 = (\csc \theta)Ne_1. \quad (2.2.28)$$

Pero, en virtud del Corolario 2.2.10, como  $M$  es una subvariedad slant tridimensional de una variedad Sasakiana, se verifica

$$A_{Ne_1}e_2 = A_{Ne_2}e_1 + \sen^2\theta\tilde{R}(e_2, e_1)\xi = A_{Ne_2}e_1, \quad (2.2.29)$$

pues  $\tilde{R}(e_2, e_1)\xi = \eta(e_1)e_2 - \eta(e_2)e_1 = 0$ , dado que  $e_1$  y  $e_2$  son ortogonales a  $\xi$ . Así, de (2.2.27) y (2.2.29) se deduce

$$\sigma_{12}^4 = (\csc \theta)g(A_{Ne_2}e_1, e_1) = g(A_{e_5}e_1, e_1) = \sigma_{11}^5,$$

ya que  $e_5 = (\csc \theta)Ne_2$ . Luego, se tiene (2.2.23). La prueba de (2.2.24) se realiza de manera totalmente análoga.

En cuanto a (2.2.25), observemos que, como  $\tilde{M}$  es una variedad Sasakiana, es por tanto  $K$ -contacto. Así, dado que  $e_3 = \xi$ , en virtud de (0.3.11) y (2.2.28), se tiene

$$\sigma_{13}^4 = g(\sigma(e_1, e_3), e_4) = -(\csc \theta)g(Ne_1, Ne_1) = -\csc \theta \sen^2 \theta = -\sen \theta,$$

donde hemos empleado la Proposición 1.2.3. El cálculo de  $\sigma_{23}^5$ ,  $\sigma_{23}^4$  y  $\sigma_{13}^5$  se efectúa de forma análoga. En cuanto a las otras igualdades de (2.2.26), se deducen de manera inmediata a partir de (0.3.13).  $\square$

**Nota 2.2.14.**— Observemos que, para el cálculo de (2.2.25) y (2.2.26) no ha sido preciso emplear que la variedad ambiente  $\tilde{M}$  fuera Sasakiana, verificándose estas expresiones en el caso de que la variedad sea simplemente  $K$ -contacto.

**Proposición 2.2.15.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant de una variedad Sasakiana  $\tilde{M}$ . Supongamos que  $\dim M = 3$  y  $\dim \tilde{M} = 5$ . Entonces,  $\nabla N = 0$  si y sólo si  $M$  es invariante o anti-invariante.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $\nabla N = 0$ , en virtud de (2.2.9), se tiene

$$n\sigma(X, Y) = \sigma(X, TY), \quad (2.2.30)$$

para todos  $X, Y \in TM$ . Así, de (0.3.4) y (2.2.30), se sigue que

$$g(\sigma(X, Y), nV) = -g(\sigma(X, TY), V) \quad (2.2.31)$$

para todos  $X, Y \in TM$  y todo  $V \in T^\perp M$ .

Supongamos ahora que  $M$  fuera una subvariedad slant propia. Entonces, en un entorno de cada punto de  $M$  podríamos elegir una referencia slant adaptada  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ . Luego, aplicando (2.2.31), se tiene

$$g(\sigma(e_1, e_3), ne_5) = -g(\sigma(e_1, Te_3), e_5) = 0, \quad (2.2.32)$$

pues  $Te_3 = T\xi = 0$ . Pero, como  $ne_5 = \cos\theta e_4$ ,

$$g(\sigma(e_1, e_3), ne_5) = \cos\theta \sigma_{13}^4 = -\cos\theta \text{sen}\theta, \quad (2.2.33)$$

en virtud de (2.2.25). Así, (2.2.32) y (2.2.33) implican

$$\cos\theta \text{sen}\theta = 0,$$

lo cual es contradictorio con ser  $M$  slant propia.

Recíprocamente, si  $M$  es invariante,  $\nabla N = 0$  pues  $N \equiv 0$ , mientras que en el caso anti-invariante, basta aplicar el apartado (iii) del Lema 2.2.12.  $\square$

Antes de enunciar el resultado en el que se expresa el valor de  $\nabla N$  para una subvariedad slant, con ciertas condiciones, incluimos el siguiente lema, en el cual se relaciona dicho valor de  $\nabla N$  con el operador de Weingarten  $A$  de la subvariedad.

**Lema 2.2.16.**— *Sea  $M$  una subvariedad de una variedad Sasakiana  $\tilde{M}$  tal que  $\xi \in TM$ . Entonces,*

$$(\nabla_X N)Y = 2\eta(X)NTY + \eta(Y)NTX \quad (2.2.34)$$

para todos  $X, Y \in TM$  si y sólo si

$$A_V TY = -A_{nV} Y + 2g(Y, tnV)\xi + \eta(Y)tnV \quad (2.2.35)$$

para todo  $Y \in TM$  y para todo  $V \in TM^\perp$ .

DEMOSTRACIÓN: En virtud de (2.2.9), (2.2.34) equivale a

$$n\sigma(X, Y) = \sigma(X, TY) + 2\eta(X)NTY + \eta(Y)NTX,$$

para todos  $X, Y \in TM$ , lo cual es equivalente a su vez a decir que

$$g(n\sigma(X, Y), V) = g(\sigma(X, TY) + 2\eta(X)NTY + \eta(Y)NTX, V), \quad (2.2.36)$$

para todos  $X, Y$  tangentes a  $M$  y todo  $V$  normal a  $M$ . Pero, en virtud de (0.3.4) y (0.1.3):

$$g(n\sigma(X, Y), V) = -g(\sigma(X, Y), nV) = -g(A_{nV}Y, X), \quad (2.2.37)$$

$$g(\sigma(X, TY), V) = g(A_VTY, X). \quad (2.2.38)$$

Por otra parte,

$$2g(\eta(X)NTY, V) = g(2g(NTY, V)\xi, X), \quad (2.2.39)$$

mientras que, en virtud de (0.3.3), (0.3.5) y (0.3.8), resulta

$$g(NTX, V) = -g(TX, tV) = g(TtV, X) = -(tnV, X), \quad (2.2.40)$$

de donde:

$$\eta(Y)g(NTX, V) = -\eta(Y)g(tnV, X). \quad (2.2.41)$$

Así, sustituyendo (2.2.37)–(2.2.39) y (2.2.41) en (2.2.36), se tiene que (2.2.34) equivale a

$$-A_{nV}Y = A_VTY + 2g(NTY, V)\xi - \eta(Y)tnV, \quad (2.2.42)$$

para todo  $Y \in TM$  y todo  $V \in T^\perp M$ . Pero, razonando como en (2.2.40),

$$g(NTY, V) = -g(Y, tnV),$$

lo cual, sustituido en (2.2.42), nos da (2.2.35).  $\square$

Veamos por fin cómo se obtiene (2.2.34).

**Teorema 2.2.17.**— *Sea  $M$  una subvariedad de una variedad Sasakiana  $\tilde{M}$  tal que  $\xi \in TM$ . Supongamos que  $\dim M = 3$  y  $\dim \tilde{M} = 5$ . Entonces, si  $M$  es invariante, anti-invariante o slant propia minimal,*

$$(\nabla_X N)Y = 2\eta(X)NTY + \eta(Y)NTX \quad (2.2.43)$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

DEMOSTRACIÓN: Si  $M$  fuera invariante o anti-invariante, en virtud de la Proposición 2.2.15, se tendría que  $\nabla N = 0$ , lo cual coincide con (2.2.43) en ambos casos. Supongamos entonces que  $M$  es una subvariedad slant propia minimal con ángulo slant  $\theta$ . Por lo tanto, podemos elegir, en un entorno de cada punto de  $M$ , una referencia slant adaptada  $\{e_1, \dots, e_5\}$ , que verifica todas las propiedades expuestas en el Corolario 1.2.6. Calculemos ahora  $\nabla N$ .

En virtud de (2.2.9), se tiene

$$(\nabla_X N)Y = n\sigma(X, Y) - \sigma(X, TY), \quad (2.2.44)$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

Como trabajamos en una referencia slant adaptada, podemos probar fácilmente que

$$n\sigma(e_i, e_j) = \cos \theta \sigma_{ij}^5 e_4 - \cos \theta \sigma_{ij}^4 e_5, \quad (2.2.45)$$

para todos  $i, j = 1, \dots, 3$ . Además, como  $M$  es minimal y  $\sigma(e_3, e_3) = 0$ , se verifica

$$\sigma(e_1, e_1) + \sigma(e_2, e_2) = 0,$$

lo cual implica

$$\sigma_{11}^k = -\sigma_{22}^k, \quad (2.2.46)$$

para  $k = 4, 5$ .

Expresando los campos tangentes  $X, Y$  en función de  $e_1, e_2, e_3$  y teniendo en cuenta las expresiones (2.2.44), (2.2.45), (2.2.46) y (2.2.23)–(2.2.26), se prueba con un cálculo directo que

$$(\nabla_X N)Y = -2\eta(X)nNY - \eta(Y)nNX,$$

de donde, en virtud de (0.3.7), se deduce (2.2.43).  $\square$

Es más, podemos demostrar un recíproco al caso slant propio del teorema anterior, con una condición adicional:

**Teorema 2.2.18.**— *Sea  $M$  una subvariedad de una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$  tal que  $\xi \in TM$ ,  $\dim M = 3$  y  $\dim \widetilde{M} = 5$ . Supongamos que, para cada punto de  $M$ , existe un autovalor  $\lambda$  de  $Q|_{\mathcal{D}}$  tal que  $\lambda \in (-1, 0)$ . Entonces, si*

$$(\nabla_X N)Y = 2\eta(X)NTY + \eta(Y)NTX \quad (2.2.47)$$

para todos  $X, Y \in TM$ ,  $M$  es una subvariedad slant propia minimal.

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis, en un entorno de cada punto de  $M$ , podemos encontrar un campo vectorial local unitario  $e_1$ , normal a  $\xi$ , tal que

$$T^2 e_1 = -\cos^2 \theta_1 e_1, \quad (2.2.48)$$

con  $\theta_1 \in (0, \pi/2)$ , donde denotamos por

$$\theta_1 = \theta(e_1)$$

el ángulo de Wirtinger de  $e_1$ . Es fácil probar entonces

$$\cos^2 \theta_1 = g(Te_1, Te_1),$$

de donde, en virtud de (0.3.3), se sigue que:

$$g(T^2 e_1, e_1) = -\cos^2 \theta_1.$$

Definimos ahora

$$e_2 = (\sec \theta_1)Te_1, \quad e_3 = \xi, \quad e_4 = (\csc \theta_1)Ne_1 \quad \text{y} \quad e_5 = (\csc \theta_1)Ne_2,$$

por lo que  $e_1 = -(\sec \theta_1)Te_2$ . Está claro entonces que

$$g(e_1, e_2) = g(e_2, e_3) = 0,$$

así como

$$g(e_i, e_j) = 0,$$

para  $i = 1, \dots, 3$  y  $j = 4, 5$ . Además, de (0.2.6) y (0.3.1), se deduce

$$g(\phi e_1, \phi e_2) = g(Te_1, Te_2) + g(Ne_1, Ne_2) = g(e_1, e_2) = 0. \quad (2.2.49)$$

Pero, en virtud de (0.3.3) y (2.2.48),

$$g(Te_1, Te_2) = -g(T^2 e_1, e_2) = \cos^2 \theta_1 g(e_1, e_2) = 0,$$

por lo que se sigue de (2.2.49) que  $g(Ne_1, Ne_2) = 0$  y, por tanto,  $e_4$  y  $e_5$  son ortogonales.

Por otra parte, es fácil ver

$$g(Ne_1, Ne_1) = \sen^2 \theta_1,$$

lo cual implica que  $e_4$  es unitario. Similarmente, se tiene que  $e_5$  también es unitario.

Así,  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  es una referencia local ortonormal. Además, puede probarse de manera análoga a como se hizo en el Corolario 1.2.6 que:

$$te_4 = -\text{sen}\theta_1 e_1, ne_4 = -\text{cos}\theta_1 e_5, te_5 = -\text{sen}\theta_1 e_2 \text{ y } ne_5 = \text{cos}\theta_1 e_4. \quad (2.2.50)$$

Empleando esta referencia ortonormal, vemos en primer lugar:

$$A_{Ne_1}e_2 = \text{sec}\theta_1 \text{sen}\theta_1 A_{e_4}Te_1. \quad (2.2.51)$$

Pero, en virtud del Lema 2.2.16, se verifica

$$A_VTY = -A_{nV}Y + 2g(Y, tnV)\xi + \eta(Y)tnV$$

para todo  $Y \in TM$  y para todo  $V \in TM^\perp$ , por lo que

$$A_{e_4}Te_1 = -A_{ne_4}e_1 + 2g(e_1, tne_4)\xi + \eta(e_1)tne_4. \quad (2.2.52)$$

Ahora bien, de (2.2.50) se deduce:

$$tne_4 = -\text{cos}\theta_1 te_5 = \text{cos}\theta_1 \text{sen}\theta_1 e_2. \quad (2.2.53)$$

Así, sustituyendo (2.2.53) en (2.2.52), obtenemos:

$$A_{e_4}Te_1 = \text{cos}\theta_1 A_{e_5}e_1. \quad (2.2.54)$$

Por lo tanto, de (2.2.51) y (2.2.54) se deduce que

$$A_{Ne_1}e_2 = \text{sec}\theta_1 \text{sen}\theta_1 \text{cos}\theta_1 A_{e_5}e_1 = A_{Ne_2}e_1,$$

es decir:

$$A_{Ne_1}e_2 = A_{Ne_2}e_1 - \text{sen}^2\theta_1(\eta(e_2)e_1 - \eta(e_1)e_2). \quad (2.2.55)$$

Además, en virtud de (0.3.12) y (2.2.50), se tiene

$$A_{Ne_1}e_3 = \text{sen}\theta_1 A_{e_4}e_3 = \text{sen}\theta_1 te_4 = -\text{sen}^2\theta_1 e_1 \quad (2.2.56)$$

y, análogamente:

$$A_{Ne_2}e_3 = -\text{sen}^2\theta_1 e_2. \quad (2.2.57)$$

A partir de (2.2.55)–(2.2.57), puede probarse mediante un simple cálculo que

$$A_{NY}X = A_{NX}Y - \text{sen}^2\theta_1(\eta(X)Y - \eta(Y)X),$$

para todos  $X, Y \in TM$ , lo cual implica, en virtud del Corolario 2.2.10, que  $M$  es una subvariedad slant propia con ángulo  $\theta_1$ .

Veamos que, además,  $M$  es minimal. Dado que  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es una referencia local ortonormal de  $TM$  y que, en virtud de (0.3.13),  $\sigma(e_3, e_3) = 0$ , basta probar entonces:

$$\sigma(e_1, e_1) + \sigma(e_2, e_2) = 0.$$

Ahora bien,

$$\sigma(e_1, e_1) + \sigma(e_2, e_2) = (\sigma_{11}^4 + \sigma_{22}^4)e_4 + (\sigma_{11}^5 + \sigma_{22}^5)e_5,$$

por lo que basta probar

$$\sigma_{11}^4 = -\sigma_{22}^4 \tag{2.2.58}$$

y

$$\sigma_{11}^5 = -\sigma_{22}^5. \tag{2.2.59}$$

Se tiene

$$\sigma_{11}^4 = g(\sigma(e_1, e_1), e_4) = -(\sec\theta_1)g(\sigma(e_1, Te_2), e_4), \tag{2.2.60}$$

pues  $e_1 = -(\sec\theta_1)Te_2$ . Pero, en virtud de (2.2.9), (2.2.47) implica

$$\sigma(e_1, Te_2) = n\sigma(e_1, e_2) - 2\eta(e_1)NTe_2 - \eta(e_2)NTe_1 = n\sigma(e_1, e_2),$$

de donde, junto con (0.3.4), (2.2.50) y (2.2.60), se sigue que

$$\sigma_{11}^4 = (\sec\theta_1)g(\sigma(e_1, e_2), ne_4) = -\sigma_{12}^5.$$

Ahora bien, como hemos probado que  $M$  es una subvariedad slant propia y  $\{e_1, \dots, e_5\}$  una referencia slant adaptada, en virtud de (2.2.24),

$$\sigma_{12}^5 = \sigma_{22}^4,$$

de donde se deduce (2.2.58). La prueba de (2.2.59) es análoga.  $\square$

No obstante, debemos señalar que las condiciones sobre las dimensiones de  $M$  y  $\tilde{M}$  en el Teorema 2.2.17 son suficientes, pero no necesarias. En efecto, en el Ejemplo 1.4.15 (resp. 1.4.14) obtenemos subvariedades slant minimales de dimensión 3 (resp. 5) en  $\mathbf{R}^7$  (resp.  $\mathbf{R}^9$ ) con su estructura Sasakiana usual, que verifican la expresión (2.2.43), aunque las dimensiones no coinciden con las indicadas en dicho Teorema.

Por otra parte, el que la variedad ambiente sea Sasakiana tampoco es condición necesaria. Esto viene indicado por el Ejemplo 1.4.18 en el caso  $\theta = \pi/4$ , que determina una subvariedad slant propia minimal, de dimensión 3, verificando (2.2.43), en la variedad  $(\mathbf{R}^5, \phi_1, \xi, \eta, g)$ , que no es Sasakiana.

Sin embargo, esto no quiere decir que el Teorema 2.2.17 se tenga para una variedad casi-contacto cualquiera. En el Ejemplo 1.4.17 aparecen subvariedades slant propias minimales, con dimensión 3, en  $(\mathbf{R}^5, \phi_1, \xi, \eta, g)$ , tales que  $\nabla N = 0$ .

Las comprobaciones de los hechos señalados pueden llevarse a cabo sin mayor dificultad.

## 2.3 Estructura en una Subvariedad Slant.

Sea  $M$  una subvariedad de una variedad Sasakiana  $\tilde{M}$ . Supongamos que  $\xi \in TM$ .

Hemos visto que, en estas condiciones, si  $M$  es invariante, la estructura de  $\tilde{M}$  induce de manera natural una estructura Sasakiana sobre  $M$ , recibiendo la subvariedad el nombre de subvariedad Sasakiana.

El objetivo de esta sección es estudiar bajo qué condiciones cabe esperar una estructura Sasakiana inducida sobre  $M$  cuando ésta sea una subvariedad slant no necesariamente invariante.

En el caso de las subvariedades slant de una variedad Kaehleriana, Chen introduce en [11] la noción de subvariedad *slant Kaehleriana* como aquella subvariedad slant propia que verifica que  $\nabla P = 0$ , siendo  $P$  la proyección ortogonal sobre la subvariedad de la estructura casi-compleja de la variedad ambiente. Se prueba fácilmente que, en estas condiciones, la subvariedad es Kaehleriana con respecto a la métrica inducida y con la estructura casi-compleja dada por  $\tilde{J} = (\sec \theta)P$ , donde  $\theta$  denota el ángulo slant.



En nuestro caso, dada una subvariedad slant, no anti-invariante, de una variedad casi-contacto métrica, podemos inducir en ella, de manera inmediata, una estructura casi-contacto métrica:

**Proposición 2.3.1.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant, con ángulo  $\theta \in [0, \pi/2)$ , de una variedad casi-contacto métrica  $\tilde{M}$ . Entonces,  $\bar{\phi} = (\sec \theta)T$  dota a  $M$  de estructura de variedad casi-contacto métrica.*

DEMOSTRACIÓN: La prueba es inmediata, pues se verifica, para todo  $X \in TM$ ,

$$\bar{\phi}^2 X = \sec^2 \theta T^2 X = -X + \eta(X)\xi,$$

en virtud del Teorema 1.2.1, mientras que

$$\begin{aligned} g(\bar{\phi}X, \bar{\phi}Y) &= \sec^2 \theta g(TX, TY) = -\sec^2 \theta g(X, T^2 Y) = \\ &= g(X, Y - \eta(Y)\xi) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \end{aligned}$$

para todos  $X, Y \in TM$ . □

En particular, si  $\theta = 0$ , la estructura inducida sobre la subvariedad invariante  $M$  es la usual.

Por lo tanto, parece adecuado intentar emular el resultado del caso complejo en el caso de las variedades Sasakianas. Se trataría, pues, de buscar una condición adecuada sobre  $\nabla T$  que permita inducir sobre la subvariedad una estructura Sasakiana. Desde luego, está claro, que, si  $M$  fuera una subvariedad slant Sasakiana, entonces

$$(\nabla_X \bar{\phi})Y = \cos \theta (g(X, Y)\xi - \eta(Y)X),$$

para todos  $X, Y \in TM$ , en virtud de la Definición 2.2.4. Así,  $M$  no es Sasakiana con la estructura inducida  $\bar{\phi}$ . Intentemos mejorar este resultado.

Supongamos que  $M$  es una subvariedad slant propia, con ángulo  $\theta \in (0, \pi/2)$ , tal que

$$(\nabla_X T)Y = \cos \theta (g(X, Y)\xi - \eta(Y)X),$$

para todos  $X, Y \in TM$ . Entonces, está claro que la subvariedad  $M$  es Sasakiana con la estructura casi-contacto  $\bar{\phi}$ , pues se calcula fácilmente que

$$(\nabla_X \bar{\phi})Y = \sec \theta (\nabla_X T)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X,$$

para todos  $X, Y \in TM$ , en virtud de la hipótesis sobre  $\nabla T$ .

Sin embargo, una vez que parece resuelto el problema, nos planteamos la siguiente cuestión: ¿Existen subvariedades slant propias verificando la condición expuesta para  $\nabla T$ ? La respuesta viene dada en la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.2.**— *No existen subvariedades  $M$  slant propias de una variedad  $K$ -contacto, tales que*

$$(\nabla_X T)Y = \cos \theta (g(X, Y)\xi - \eta(Y)X),$$

para todos  $X, Y \in TM$ , siendo  $\theta$  el ángulo slant.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existiera una subvariedad  $M$  en las condiciones del enunciado. En virtud del Lema 2.2.3, se tiene, para todos  $X, Y \in TM$ ,

$$(\nabla_X Q)Y = \cos \theta (g(X, TY)\xi - \eta(Y)TX), \quad (2.3.1)$$

mientras que, al ser  $M$  slant, en virtud de la Proposición 2.1.3,

$$(\nabla_X Q)Y = \cos^2 \theta (g(X, TY)\xi - \eta(Y)TX). \quad (2.3.2)$$

Así, (2.3.1) y (2.3.2) implican que  $\cos \theta = \cos^2 \theta$ , lo cual es contradictorio pues  $\theta \in (0, \pi/2)$ .  $\square$

Por lo tanto, el método seguido no ofrece resultados satisfactorios. De hecho, es fácil ver que, si la subvariedad  $M$  es slant propia, la estructura inducida por  $\bar{\phi}$  ni siquiera puede ser de contacto, dado que

$$\bar{\Phi}(X, Y) = g(X, \bar{\phi}Y) = \sec \theta g(X, TY) = \sec \theta d\eta(X, Y),$$

para todos  $X, Y \in TM$ , pues suponemos que la variedad  $\tilde{M}$  es Sasakiana (y, por tanto, de contacto).

La pregunta que nos planteamos a continuación es si sería posible inducir una estructura Sasakiana sobre la subvariedad slant de forma diferente, encontrando obviamente las condiciones necesarias para ello. Sin embargo, tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 2.3.3.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant, con ángulo  $\theta$ , de una variedad  $K$ -contacto  $\widetilde{M}$ . Entonces, para todos  $X \in TM$  unitario y normal a  $\xi$ , se verifica:*

$$R(X, \xi; \xi, X) = \cos^2 \theta. \quad (2.3.3)$$

DEMOSTRACIÓN: En virtud de la ecuación de Gauss, (0.2.12), (0.3.11) y (0.3.13), se tiene que, dado  $X \in TM$  unitario y normal a  $\xi$ :

$$R(X, \xi; \xi, X) = 1 - g(\sigma(X, \xi), \sigma(X, \xi)) = 1 - g(NX, NX). \quad (2.3.4)$$

Pero, en virtud de la Proposición 1.2.3:

$$g(NX, NX) = \sin^2 \theta. \quad (2.3.5)$$

Así, de (2.3.4) y (2.3.5) se sigue (2.3.3).  $\square$

Podemos deducir el siguiente corolario:

**Corolario 2.3.4.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant de una variedad  $K$ -contacto  $\widetilde{M}$ . Entonces,  $M$  es  $K$ -contacto si y sólo si es invariante.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $M$  es  $K$ -contacto. Entonces, en virtud de (0.2.12), dado  $X \in TM$  unitario y normal a  $\xi$ , se tiene que  $R(X, \xi; \xi, X) = 1$ . Pero, la Proposición 2.3.3 implica que esta curvatura seccional ha de valer  $\cos^2 \theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo slant de  $M$ . Por lo tanto, ha de ser  $\theta = 0$  y, así,  $M$  es invariante.

El recíproco es evidente.  $\square$

No obstante, todavía podemos plantearnos si será posible definir una estructura de contacto sobre una subvariedad slant propia.

Emplearemos ahora un método radicalmente distinto. Partiremos de una inmersión de una variedad casi-contacto en otra y extraeremos conclusiones.

Sea

$$\varphi : (M, \bar{\phi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g}) \hookrightarrow (\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$$

una inmersión entre dos variedades casi-contacto métricas. Supongamos que  $\varphi$  es isométrica, es decir,  $\bar{g} = \varphi^*g$ , y que  $\varphi_{*x}\bar{\xi}_x = \xi_{\varphi(x)}$  para todo  $x \in M$ . En particular, esto quiere decir que  $\xi \in TM$ .

Sean  $\bar{\Phi}$  y  $\Phi$  las 2-formas fundamentales de  $M$  y  $\widetilde{M}$  respectivamente. Consideramos sobre  $M$  la 2-forma  $\varphi^*\Phi$  dada por

$$\varphi^*\Phi(X, Y) = \Phi(\varphi_*X, \varphi_*Y) = g(\varphi_*X, \phi\varphi_*Y),$$

para todos  $X, Y \in \chi(M)$ . En lo sucesivo, identificaremos  $X$  y  $\varphi_*X$  para todo  $X \in \chi(M)$ .

Comencemos por hallar, en el caso  $\dim M = 3$ , la relación entre  $\bar{\Phi}$  y  $\varphi^*\Phi$ .

**Proposición 2.3.5.**— *En las condiciones anteriores, supongamos que  $M$  es de dimensión 3 y que la inmersión  $\varphi$  es slant con ángulo  $\theta$ . Entonces,  $\varphi^*\Phi = \pm(\cos \theta)\bar{\Phi}$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Si la inmersión es anti-invariante, el resultado se obtiene de manera inmediata, pues en tal caso  $\varphi^*\Phi = 0$ . Podemos suponer entonces que  $\varphi$  es una inmersión slant no anti-invariante.

Sea  $e_1$  un campo local unitario tangente a  $M$  y ortogonal a  $\xi$ . Si definimos  $e_2 = (\sec \theta)Te_1$ , en virtud del Corolario 1.2.5, se verifica que  $\{e_1, e_2, \xi\}$  es una referencia local ortonormal de  $TM$ .

Sea  $\bar{\phi}$  la estructura casi-contacto de  $M$ . Entonces, claramente,  $\bar{\phi}e_1 = g(\bar{\phi}e_1, e_2)e_2$ , por lo que:

$$g(\bar{\phi}e_1, \bar{\phi}e_1) = g^2(\bar{\phi}e_1, e_2). \quad (2.3.6)$$

Ahora bien, al ser  $e_1$  unitario y ortogonal a  $\xi$  y  $\bar{\phi}$  una estructura casi-contacto métrica, resulta que  $g(\bar{\phi}e_1, \bar{\phi}e_1) = 1$ , de donde, junto con (2.3.6), se tiene:

$$\bar{\phi}e_1 = \pm e_2. \quad (2.3.7)$$

Aplicando  $\bar{\phi}$  en (2.3.7) tenemos:

$$\bar{\phi}e_2 = \mp e_1. \quad (2.3.8)$$

Sean  $X, Y \in TM$ . Los expresamos en función de la base local ortonormal:

$$X = X^1e_1 + X^2e_2 + \eta(X)\xi,$$

$$Y = Y^1e_1 + Y^2e_2 + \eta(Y)\xi.$$

Entonces, aplicando (2.3.7) y (2.3.8), resulta:

$$\bar{\Phi}(X, Y) = g(X, \bar{\phi}Y) = \mp X^1Y^2 \pm X^2Y^1. \quad (2.3.9)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\varphi^*\Phi(X, Y) &= \Phi(\varphi_*X, \varphi_*Y) = g(X, \phi Y) = \\ &= g(X, TY) = -\cos\theta X^1Y^2 + \cos\theta X^2Y^1,\end{aligned}\quad (2.3.10)$$

pues  $TY = -\cos\theta Y^2e_1 + \cos\theta Y^1e_2$ . Entonces, de (2.3.9) y (2.3.10), se sigue el resultado.  $\square$

La Proposición 2.3.5 nos permite demostrar el siguiente teorema:

**Teorema 2.3.6.**— *No existen inmersiones slant no invariantes  $\varphi : M \hookrightarrow \widetilde{M}$  de una variedad de contacto  $(M, \bar{\phi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$ , con  $\dim M = 3$ , en otra variedad de contacto  $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$  tal que  $\varphi_*\bar{\xi} = \xi$ .*

DEMOSTRACIÓN: Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existiera una inmersión slant no invariante  $\varphi : M \hookrightarrow \widetilde{M}$  en las condiciones del enunciado.

Al ser isométrica la inmersión  $\varphi$  y verificarse que  $\varphi_*\bar{\xi} = \xi$ , se tiene trivialmente que  $\varphi^*\eta = \bar{\eta}$ . Entonces, aplicando la diferencial exterior  $d$  resulta

$$d(\varphi^*\eta) = d\bar{\eta} = \bar{\Phi}, \quad (2.3.11)$$

pues  $M$  es una variedad de contacto.

Es un hecho conocido que  $d$  conmuta con  $\varphi^*$  (ver, por ejemplo, [28]), por lo que

$$d(\varphi^*\eta) = \varphi^*d\eta = \varphi^*\Phi = \pm(\cos\theta)\bar{\Phi}, \quad (2.3.12)$$

pues  $\widetilde{M}$  es de contacto y se verifica la Proposición 2.3.5.

Pero (2.3.11) y (2.3.12) no pueden darse simultáneamente, a no ser que el signo de (2.3.12) sea el positivo y que  $\cos\theta = 1$ , de donde se implicaría que la inmersión  $\varphi$  habría de ser invariante, lo cual es contradictorio pues partíamos de una inmersión slant no invariante.  $\square$

El Teorema 2.3.6 nos permite dar una respuesta al problema planteado en el caso de una subvariedad slant de dimensión 3.

**Corolario 2.3.7.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant de una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$ . Supongamos que  $\dim M = 3$ . Entonces, la estructura Sasakiana de  $\widetilde{M}$  induce una estructura de contacto sobre  $M$  si y sólo si  $M$  es invariante.*

DEMOSTRACIÓN: La implicación directa es consecuencia inmediata del Teorema 2.3.6, mientras que la implicación recíproca es un hecho conocido, ya comentado anteriormente.  $\square$

No obstante, sí tiene pleno sentido considerar inmersiones slant entre variedades casi-contacto. De hecho, en todos los ejemplos que se han dado de subvariedades slant de dimensión 3, es fácil definir una estructura casi-contacto métrica. Basta considerar una referencia local ortonormal  $\{e_1, e_2, \xi\}$  y definir  $\bar{\phi}$  tal que  $\bar{\phi}e_1 = e_2$  y  $\bar{\phi}e_2 = -e_1$ .

A continuación vamos a obtener una condición suficiente para que una variedad casi-contacto esté inmersa de manera slant en otra.

Sea

$$\varphi : (M, \bar{g}) \hookrightarrow (\tilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$$

una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana en una casi-contacto métrica tal que  $\xi \in TM$ .

**Lema 2.3.8.**— *En las condiciones anteriores, supongamos que  $\dim M = m+1$  y sea  $\{e_1, \dots, e_m, \xi\}$  una referencia local ortonormal de  $TM$ . Entonces, la inmersión  $\varphi$  es slant si y sólo si existe una constante  $\lambda \in [0, 1]$  tal que*

$$\sum_{i=1}^m g(\phi e_j, e_i)g(\phi e_k, e_i) = \lambda \delta_{jk} \quad (2.3.13)$$

para todos  $j, k = 1, \dots, m$ . Además, en tal caso,  $\lambda = \cos^2 \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo slant de la inmersión.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $\varphi$  es una inmersión slant con ángulo  $\theta$ . Entonces, dado  $X$  unitario en  $\mathcal{D}$ , se prueba fácilmente:

$$\sum_{i=1}^m g^2(\phi X, e_i) = \cos^2 \theta. \quad (2.3.14)$$

Así, tomando  $X = e_j$  en (2.3.14), resulta

$$\sum_{i=1}^m g^2(\phi e_j, e_i) = \cos^2 \theta, \quad (2.3.15)$$

de donde se sigue (2.3.13) en el caso en que  $j = k$  con  $\lambda = \cos^2 \theta$ . Supongamos por tanto que  $j \neq k$ . Entonces,  $X = (1/\sqrt{2})(e_j + e_k)$  es un campo local

unitario ortogonal a  $\xi$ , por lo que, en virtud de (2.3.14), se tiene

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta &= \sum_{i=1}^m g^2\left(\phi \frac{1}{\sqrt{2}}(e_j + e_k), e_i\right) = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}g(\phi e_j, e_i) + \frac{1}{\sqrt{2}}g(\phi e_k, e_i) \right\}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m g^2(\phi e_j, e_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m g^2(\phi e_k, e_i) + \sum_{i=1}^m g(\phi e_j, e_i)g(\phi e_k, e_i),\end{aligned}$$

lo cual, en virtud de (2.3.15), implica que  $\sum_{i=1}^m g(\phi e_j, e_i)g(\phi e_k, e_i) = 0$ , es decir, (2.3.13) en el caso  $j \neq k$ .

Recíprocamente, tomando  $j = k$  en (2.3.13) se tiene:

$$\sum_{i=1}^m g^2(\phi e_j, e_i) = \lambda. \quad (2.3.16)$$

Sea  $X \in TM$ . Es fácil ver que:

$$\cos^2 \theta(X) = \frac{\sum_{i=1}^m g^2(\phi X, e_i)}{|X|^2 - \eta^2(X)}. \quad (2.3.17)$$

En función de la referencia local ortonormal,  $X = \sum_{j=1}^m X^j e_j + \eta(X)\xi$ , de donde:

$$|X|^2 - \eta^2(X) = \sum_{j=1}^m (X^j)^2. \quad (2.3.18)$$

Además,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m g^2(\phi X, e_i) &= \sum_{j=1}^m (X^j)^2 \sum_{i=1}^m g^2(\phi e_j, e_i) + \\ &+ 2 \sum_{j < k} X^j X^k \sum_{i=1}^m g(\phi e_j, e_i)g(\phi e_k, e_i) = \lambda \sum_{j=1}^m (X^j)^2,\end{aligned} \quad (2.3.19)$$

en virtud de (2.3.16) y de (2.3.13) con  $j \neq k$ .

Así, de (2.3.17), (2.3.18) y (2.3.19) se deduce

$$\cos^2 \theta(X) = \lambda,$$

lo cual indica que  $\varphi$  es slant con ángulo  $\cos^{-1} \sqrt{\lambda}$ . □

Consideremos ahora una estructura casi-contacto métrica sobre  $M$ ,

$$(M, \bar{\phi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$$

tal que  $\varphi_{*x}\bar{\xi}_x = \xi_{\varphi(x)}$  para todo  $x \in M$ . Denotemos también por  $\bar{\Phi}$  y  $\Phi$  las 2-formas fundamentales de  $M$  y  $\widetilde{M}$  respectivamente. Asimismo, consideremos sobre  $M$  la 2-forma  $\varphi^*\Phi$ . Podemos enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.9.**— *En las condiciones anteriores, supongamos que existe una constante  $k \in [-1, 1]$  tal que  $\varphi^*\Phi = k\bar{\Phi}$ . Entonces,  $\varphi$  es slant con ángulo  $\cos^{-1} |k|$ .*

DEMOSTRACIÓN: Como  $M$  es una variedad casi-contacto métrica, podemos considerar una  $\bar{\phi}$ -base en  $M$  dada por  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_m, \bar{\phi}u_1, \dots, \bar{\phi}u_m, \bar{\xi}\}$ , donde  $\dim M = 2m + 1$ .

Para poder aplicar el Lema 2.3.8, vamos a evaluar

$$\sum_{i=1}^m g(\phi X, u_i)g(\phi Y, u_i) + \sum_{i=1}^m g(\phi X, \bar{\phi}u_i)g(\phi Y, \bar{\phi}u_i), \quad (2.3.20)$$

para todos  $X, Y \in \mathcal{B} - \{\bar{\xi}\}$ .

Ahora bien, como  $\varphi^*\Phi = k\bar{\Phi}$ , se tiene

$$g(\phi X, u_i) = kg(\bar{\phi}X, u_i) = -kg(X, \bar{\phi}u_i), \quad (2.3.21)$$

mientras que

$$g(\phi X, \bar{\phi}u_i) = kg(\bar{\phi}X, \bar{\phi}u_i) = kg(X, u_i), \quad (2.3.22)$$

pues  $\bar{\eta}(u_i) = 0$ .

Así, sustituyendo (2.3.21) y (2.3.22) en (2.3.20), resulta:

$$k^2 \left( \sum_{i=1}^m g(X, \bar{\phi}u_i)g(Y, \bar{\phi}u_i) + \sum_{i=1}^m g(X, u_i)g(Y, u_i) \right). \quad (2.3.23)$$

Evaluemos (2.3.23) según las posibles elecciones de  $X$  e  $Y$  en  $\mathcal{B}$ :

Caso 1.-  $X = u_j, \quad Y = u_k, \quad (2.3.23) \text{ vale } \delta_{jk},$

Caso 2.-  $X = \bar{\phi}u_j, \quad Y = \bar{\phi}u_k, \quad (2.3.23) \text{ vale } \delta_{jk},$

Caso 3.-  $X = u_j, \quad Y = \bar{\phi}u_k, \quad (2.3.23) \text{ vale } 0,$

Caso 4.-  $X = \bar{\phi}u_j, \quad Y = u_k, \quad (2.3.23) \text{ vale } 0.$



Entonces, en virtud del Lema 2.3.8,  $\varphi$  es una inmersión slant con ángulo  $\cos^{-1} |k|$ .  $\square$

**Corolario 2.3.10.**— *Supongamos que  $\dim M = 3$ . Entonces,  $\varphi$  es slant si y sólo si existe una constante  $k \in [-1, 1]$  tal que  $\varphi^*\Phi = k\bar{\Phi}$ . Además, en tal caso,  $|k| = \cos \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo slant de la inmersión.*

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia inmediata de la Proposición 2.3.5 y del Teorema 2.3.9  $\square$

## 2.4 Curvatura Escalar.

En esta sección, consideraremos una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$  de dimensión 5 y una subvariedad suya,  $M$ , de dimensión 3, tal que  $\xi \in TM$ . Denotaremos por  $\tau$  a la curvatura escalar de  $M$ .

Para todo  $p \in M$ , llamaremos  $K_p$  a la curvatura seccional de  $\mathcal{D}_p$  en  $M$ . Dada  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  una referencia local ortonormal tal que  $e_1, e_2 \in \mathcal{D}$ ,  $e_3 = \xi$  y  $e_4, e_5$  son normales a  $M$ , se verifican:

$$K = R(e_1, e_2; e_2, e_1),$$

$$\tau = \frac{1}{3}(R(e_1, e_2; e_2, e_1) + R(e_1, e_3; e_3, e_1) + R(e_2, e_3; e_3, e_2)).$$

Nuestro objetivo es estudiar  $\tau$  y  $K$  cuando  $M$  sea una subvariedad slant, relacionándolos con el siguiente concepto.

**Definición 2.4.1.**— *En las condiciones anteriores, se define la curvatura seccional normal de  $M$  en  $\widetilde{M}$  como*

$$K^D = R^D(e_1, e_2; e_5, e_4).$$

donde  $R^D$  es la curvatura asociada a la conexión normal  $D$ .

En primer lugar, hemos de comprobar que la definición dada no depende de la referencia ortonormal elegida. Esto se pone de manifiesto en el siguiente lema.

**Lema 2.4.2.**— *Sean  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  y  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5\}$  dos referencias locales ortonormales tales que  $e_1, e_2, \bar{e}_1, \bar{e}_2 \in \mathcal{D}$ ,  $e_3 = \bar{e}_3 = \xi$  y  $e_4, e_5, \bar{e}_4, \bar{e}_5$  son*

normales a  $M$ . Entonces,

$$R^D(\bar{e}_1, \bar{e}_2; \bar{e}_5, \bar{e}_4) = \det(A)\det(B)R^D(e_1, e_2; e_5, e_4),$$

donde  $A$  (resp.  $B$ ) es la matriz de cambio de  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$  (resp.  $\{\bar{e}_4, \bar{e}_5\}$ ) a  $\{e_1, e_2\}$  (resp.  $\{e_4, e_5\}$ ). Así, si ambas referencias tienen la misma orientación, se verifica que:

$$R^D(\bar{e}_1, \bar{e}_2; \bar{e}_5, \bar{e}_4) = R^D(e_1, e_2; e_5, e_4).$$

DEMOSTRACIÓN: La prueba se obtiene mediante un cálculo directo, en virtud de las propiedades de linealidad de  $R^D$  y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} R^D(X, X; V, W) &= 0, & R^D(X, Y; V, W) &= -R^D(Y, X; V, W), \\ R^D(X, Y; V, V) &= 0, & R^D(X, Y; V, W) &= -R^D(X, Y; W, V), \end{aligned}$$

para todos  $X, Y \in TM$  y todos  $V, W \in T^\perp M$ .  $\square$

Denotemos ahora

$$\sigma_{ij}^r = g(\sigma(e_i, e_j), e_r),$$

para  $i, j = 1, 2, 3$  y  $r = 4, 5$ . Entonces, en virtud de la ecuación de Gauss, se verifican:

$$K = \tilde{R}(e_1, e_2; e_2, e_1) + \sigma_{11}^4 \sigma_{22}^4 + \sigma_{11}^5 \sigma_{22}^5 - (\sigma_{12}^4)^2 - (\sigma_{12}^5)^2, \quad (2.4.1)$$

$$\begin{aligned} \tau &= 1/3(\tilde{R}(e_1, e_2; e_2, e_1) + \tilde{R}(e_1, e_3; e_3, e_1) + \tilde{R}(e_2, e_3; e_3, e_2) + \\ &\quad + \sigma_{11}^4 \sigma_{22}^4 + \sigma_{11}^5 \sigma_{22}^5 - (\sigma_{12}^4)^2 - (\sigma_{12}^5)^2 + \sigma_{11}^4 \sigma_{33}^4 + \sigma_{11}^5 \sigma_{33}^5 - \\ &\quad - (\sigma_{13}^4)^2 - (\sigma_{13}^5)^2 + \sigma_{22}^4 \sigma_{33}^4 + \sigma_{22}^5 \sigma_{33}^5 - (\sigma_{23}^4)^2 - (\sigma_{23}^5)^2). \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Por otra parte, de la ecuación de Ricci se deduce:

$$R^D(e_1, e_2; e_5, e_4) = \tilde{R}(e_1, e_2; e_5, e_4) + g([A_5, A_4](e_1), e_2), \quad (2.4.3)$$

siendo  $A_r = A_{e_r}$  para  $r = 4, 5$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned} g([A_5, A_4](e_1), e_2) &= g(A_5 A_4 e_1, e_2) - g(A_4 A_5 e_1, e_2) = \\ &= g(A_4 e_1, A_5 e_2) - g(A_5 e_1, A_4 e_2). \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Pero, para cada  $i = 1, 2, 3$  y cada  $r = 4, 5$ , se tiene

$$A_r e_i = \sum_{j=1}^3 g(A_r e_i, e_j) e_j = \sum_{j=1}^3 g(\sigma(e_i, e_j), e_r) e_j = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}^r e_j,$$

de donde, junto con (2.4.3) y (2.4.4) se sigue que:

$$\begin{aligned} K^D &= \tilde{R}(e_1, e_2; e_5, e_4) + \\ &+ \sigma_{11}^4 \sigma_{12}^5 + \sigma_{12}^4 \sigma_{22}^5 + \sigma_{13}^4 \sigma_{23}^5 - \sigma_{11}^5 \sigma_{12}^4 - \sigma_{12}^5 \sigma_{22}^4 + \sigma_{13}^5 \sigma_{23}^4. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Supongamos que  $M$  es una subvariedad slant propia, con ángulo  $\theta$ , de la variedad casi-contacto  $\tilde{M}$ . Entonces, podemos considerar que la referencia  $\{e_1, \dots, e_5\}$  es una referencia slant adaptada, verificando por tanto las propiedades enunciadas en el Corolario 1.2.6. En estas condiciones, podemos enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 2.4.3.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant propia tridimensional, con ángulo  $\theta$ , de un espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante,  $\tilde{M}(c)$ , de dimensión 5. Entonces, se verifican:*

$$K = K^D + \frac{3c-1}{2} \cos^2 \theta, \quad \tau = \frac{K^D}{3} + \frac{c+1}{2} \cos^2 \theta. \quad (2.4.6)$$

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, elegimos una referencia slant adaptada  $\{e_1, \dots, e_5\}$  y realizamos los cálculos anteriores. Ahora bien, en virtud de (2.2.23)–(2.2.26), se tiene:

$$\begin{aligned} K - \tilde{R}(e_1, e_2; e_2, e_1) &= \sigma_{11}^4 \sigma_{22}^4 + \sigma_{11}^5 \sigma_{22}^5 - (\sigma_{12}^4)^2 - (\sigma_{12}^5)^2 = \\ &= K^D - \tilde{R}(e_1, e_2; e_5, e_4) - \text{sen}^2 \theta = \\ &= 3\tau - \tilde{R}(e_1, e_2; e_2, e_1) - \tilde{R}(e_1, e_3; e_3, e_1) - \tilde{R}(e_2, e_3; e_3, e_2) + 2 \text{sen}^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Pero, en virtud de (0.2.16),

$$\begin{aligned} \tilde{R}(e_1, e_2; e_2, e_1) &= \frac{c+3}{4} + \frac{3(c-1)}{4} g^2(e_1, \phi e_2) = \\ &= \frac{c+3}{4} + \frac{3(c-1)}{4} \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

$$\tilde{R}(e_1, e_3; e_3, e_1) = \tilde{R}(e_2, e_3; e_3, e_2) = 1, \quad (2.4.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}(e_1, e_2; e_5, e_4) &= \frac{c-1}{4}(g(\phi e_2, e_5)g(\phi e_1, e_4) - g(\phi e_1, e_5)g(\phi e_2, e_4) + \\ &+ 2g(e_1, \phi e_2)g(\phi e_5, e_4)) = \frac{c-1}{4}(\text{sen}^2 \theta - 2 \cos^2 \theta), \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

pues

$$\begin{aligned} g(\phi e_2, e_5) &= \text{csc } \theta g(Ne_2, Ne_2) = \text{sen } \theta, \\ g(\phi e_1, e_4) &= \text{csc } \theta g(Ne_1, Ne_1) = \text{sen } \theta, \\ g(\phi e_1, e_5) &= \text{csc } \theta g(Ne_1, Ne_2) = 0, \\ g(e_4, \phi e_5) &= g(e_4, ne_5) = \cos \theta, \end{aligned}$$

ya que trabajamos con una referencia slant adaptada.

Así, de (2.4.7)–(2.4.10) se sigue el resultado.  $\square$

**Corolario 2.4.4.**– *En las condiciones del Teorema 2.4.3, si  $\tilde{M}$  es la esfera unidad  $S^5$  con su estructura sasakiana usual, entonces*

$$K = K^D + \cos^2 \theta \quad \text{y} \quad \tau = \frac{K^D}{3} + \cos^2 \theta,$$

mientras que si  $\tilde{M}$  es  $(\mathbf{R}^5, \phi_0, \eta, \xi, g)$ , entonces

$$K = K^D - 5\cos^2 \theta \quad \text{y} \quad \tau = \frac{K^D}{3} - \cos^2 \theta.$$

**DEMOSTRACIÓN:** El corolario es inmediato a partir del Teorema 2.4.3, teniendo en cuenta que, en el primer caso,  $c = 1$ , mientras que en el segundo,  $c = -3$ .  $\square$

Supongamos ahora que  $M$  fuera una subvariedad invariante o anti-invariante de un espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante  $\tilde{M}(c)$ , con  $\dim M = 3$  y  $\dim \tilde{M} = 5$ .

Caso 1.–  $M$  es invariante (subvariedad Sasakiana). Entonces, se verifican las igualdades (0.3.16), (0.3.17) y, en virtud de (0.3.11), se tiene que

$$\sigma(X, \xi) = 0 \quad (2.4.11)$$

para todo  $X \in TM$ . Podemos considerar dos subcasos.

Caso 1.1.-  $M$  no es totalmente geodésica. En esta situación, sea  $e_1$  un campo local unitario tangente a  $M$  y ortogonal a  $\xi$  tal que  $\sigma(e_1, e_1) \neq 0$ . Sea  $a$  el módulo de  $\sigma(e_1, e_1)$ . Si definimos

$$e_2 = \phi e_1, \quad e_3 = \xi, \quad e_4 = \frac{1}{a}\sigma(e_1, e_1), \quad e_5 = \frac{1}{a}\sigma(e_1, \phi e_1),$$

se verifica que  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  es una referencia local ortonormal tal que  $e_1, e_2, e_3$  son tangentes a  $M$  y  $e_4, e_5$  son normales a  $M$ .

Entonces,

$$K = R(e_1, e_2; e_2, e_1) = R(e_1, \phi e_1; \phi e_1, e_1) = \tilde{R}(e_1, \phi e_1; \phi e_1, e_1) - 2a^2,$$

en virtud de (0.3.17). Ahora bien, en virtud de (0.2.16), se tiene que:

$$\tilde{R}(e_1, \phi e_1; \phi e_1, e_1) = \frac{c+3}{4} + \frac{3(c-1)}{4} = c.$$

Así,

$$K = c - 2a^2. \quad (2.4.12)$$

Por otra parte, en virtud de la ecuación de Gauss, (0.2.12), (0.3.13) y (2.4.11):

$$\begin{aligned} R(e_1, e_3; e_3, e_1) &= \tilde{R}(e_1, e_3; e_3, e_1) + g(\sigma(e_1, e_1), \sigma(e_3, e_3)) - \\ &\quad - g(\sigma(e_1, e_3), \sigma(e_1, e_3)) = 1. \end{aligned}$$

Análogamente,  $R(e_2, e_3; e_3, e_2) = 1$ . Así:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{3}(R(e_1, e_2; e_2, e_1) + R(e_1, e_3; e_3, e_1) + R(e_2, e_3; e_3, e_2)) = \\ &= \frac{1}{3}(c - 2a^2 + 2). \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

En virtud de (2.4.5), la curvatura seccional normal de  $M$  viene dada por:

$$\begin{aligned} K^D &= \tilde{R}(e_1, e_2; e_5, e_4) + \\ &+ \sigma_{11}^4 \sigma_{12}^5 + \sigma_{12}^4 \sigma_{22}^5 + \sigma_{13}^4 \sigma_{23}^5 - \sigma_{11}^5 \sigma_{12}^4 - \sigma_{12}^5 \sigma_{22}^4 + \sigma_{13}^5 \sigma_{23}^4. \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Pero, a partir de la referencia elegida, empleando (0.2.6), (0.3.16) y (2.4.11), se tiene:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^4 &= g(\sigma(e_1, e_1), e_4) = a, \\
\sigma_{12}^5 &= 1/a g(\sigma(e_1, \phi e_1), \sigma(e_1, \phi e_1)) = a, \\
\sigma_{12}^4 &= 1/a g(\sigma(e_1, \phi e_1), \sigma(e_1, e_1)) = 0, \\
\sigma_{13}^4 &= g(\sigma(e_1, e_3), e_4) = 0, \\
\sigma_{22}^4 &= 1/a g(\sigma(\phi e_1, \phi e_1), \sigma(e_1, e_1)) = -a, \\
\sigma_{13}^5 &= g(\sigma(e_1, e_3), e_5) = 0.
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (2.4.14), se obtiene, en virtud de la ecuación (0.2.16),

$$K^D = \tilde{R}(e_1, e_2; e_5, e_4) + 2a^2 = \frac{c-1}{2} + 2a^2. \quad (2.4.15)$$

Así, de (2.4.12), (2.4.13) y (2.4.15) se deduce que

$$K = K^D + \frac{c+1}{2} - 4a^2 \quad \text{y} \quad 3\tau = K^D + \frac{c+5}{2} - 4a^2,$$

expresiones que dependen de la elección de la referencia ortonormal de partida. Así, el caso slant propio no puede extenderse al que acabamos de estudiar.

Caso 1.2.-  $M$  es totalmente geodésica. Sea  $e_1$  (resp.  $e_4$ ) un campo local unitario tangente (resp. normal) a  $M$  y ortogonal a  $\xi$ . Si definimos

$$e_2 = \phi e_1, \quad e_3 = \xi, \quad e_5 = \phi e_4,$$

se verifica que  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  es una referencia local ortonormal tal que  $e_1, e_2, e_3$  son tangentes a  $M$  y  $e_4, e_5$  son normales a  $M$ . En estas condiciones,

$$K = \tilde{R}(e_1, e_2; e_2, e_1) = c,$$

$$\tau = \frac{c+2}{3},$$

$$K^D = \tilde{R}(e_1, e_2; e_5, e_4) = \frac{c-1}{2},$$

de donde se deduce que

$$K = K^D + \frac{c+1}{2}, \quad \tau = \frac{K^D}{3} + \frac{c+5}{6},$$

expresiones que coinciden con las del caso slant propio si y sólo si  $c = 1$ , es decir, si  $\widetilde{M}$  es la esfera  $S^5$ .

Caso 2.-  $M$  es anti-invariante. Sean  $e_1$  y  $e_2$  dos campos locales unitarios tangentes a  $M$ , ortogonales entre sí y ortogonales a  $\xi$ . Si definimos

$$e_3 = \xi, \quad e_4 = Ne_1 \quad \text{y} \quad e_5 = Ne_2,$$

se verifica que  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  es una referencia local ortonormal tal que  $e_1, e_2, e_3$  son tangentes a  $M$  y  $e_4, e_5$  son normales a  $M$ . Utilizando esta referencia y siguiendo los pasos de la demostración del Lema 2.2.13, se puede probar:

$$\sigma_{12}^4 = \sigma_{11}^5, \quad (2.4.16)$$

$$\sigma_{22}^4 = \sigma_{12}^5, \quad (2.4.17)$$

$$\sigma_{13}^4 = \sigma_{23}^5 = -1, \quad (2.4.18)$$

$$\sigma_{23}^4 = \sigma_{13}^5 = \sigma_{33}^4 = \sigma_{33}^5 = 0. \quad (2.4.19)$$

Por otra parte, en virtud de (0.2.16), se verifican

$$\widetilde{R}(e_1, e_2; e_2, e_1) = \frac{c+3}{4}. \quad (2.4.20)$$

$$\widetilde{R}(e_1, e_2; e_5, e_4) = \frac{c-1}{4}. \quad (2.4.21)$$

de donde, junto con (2.4.16)–(2.4.19), se sigue que:

$$K = K^D \quad \text{y} \quad \tau = \frac{K^D}{3}.$$

Notemos que, en este caso, las relaciones entre  $K$ ,  $K^D$  y  $\tau$  se obtienen sustituyendo  $\theta = \pi/2$  en (2.4.6).

Para terminar, vamos a estudiar la relación entre la curvatura escalar y la curvatura escalar normal de una subvariedad slant propia  $M$  de un espacio

de curvatura  $\phi$ -seccional constante  $\widetilde{M}(c)$ , con las mismas hipótesis que antes sobre las dimensiones.

Recordemos en primer lugar que la *curvatura escalar normal* de una subvariedad viene dada por

$$K^\perp = \sum_{a,b} \text{traza}(A_a A_b - A_b A_a)^2,$$

realizándose la suma sobre una base ortonormal de  $T^\perp M$ . Considerando, entonces, una referencia slant adaptada y teniendo en cuenta las expresiones (2.2.23)–(2.2.26), puede calcularse que, en nuestro caso,

$$K^\perp = -4((\sigma_{12}^4)^2 + (\sigma_{22}^4)^2 - \sigma_{11}^4 \sigma_{22}^4 - \sigma_{12}^4 \sigma_{22}^5 - \text{sen}^2 \theta)^2, \quad (2.4.22)$$

siendo  $\theta$  el ángulo slant de  $M$ . Ahora bien, comparando (2.4.22) con (2.4.7)–(2.4.10), se deducen:

$$\begin{aligned} K^\perp &= -4\left(-K + \frac{c-1}{4} + \frac{3c+1}{4} \cos^2 \theta\right)^2, \\ K^\perp &= -4\left(-K^D + \frac{c-1}{4}(\text{sen}^2 \theta - 2 \cos^2 \theta)\right)^2, \\ K^\perp &= -4\left(-3\tau + \frac{c-1}{4} + \frac{3(c+3)}{4} \cos^2 \theta\right)^2. \end{aligned}$$

Observemos que, si la variedad ambiente es  $\mathbf{R}^5$  con su estructura Sasakiana usual, entonces,

$$K^\perp = -4(3\tau + 1)^2,$$

expresión que no depende del ángulo slant de la subvariedad.



## 2.5 Umbilicalidad y Minimalidad en Subvariedades Slant.

Examinamos en esta sección la segunda forma fundamental de una inmersión slant. Más concretamente, estamos interesados en el estudio, en este tipo de inmersiones, de los distintos conceptos usuales sobre umbilicalidad. Finalmente, ofrecemos sendos resultados con condiciones suficientes para asegurar la austeridad y la minimalidad de las subvariedades slant.

Como punto de partida, consideraremos una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana  $M$  en otra variedad  $\widetilde{M}$ , que supondremos al menos  $K$ -contacto, tal que  $\xi \in TM$ .

Recordemos que se dice que  $M$  es *totalmente geodésica* en  $\widetilde{M}$  si toda geodésica de  $M$  se transforma por la inmersión en una geodésica de  $\widetilde{M}$ . De hecho, se prueba fácilmente que  $M$  es totalmente geodésica si y sólo si la segunda forma fundamental  $\sigma$  se anula idénticamente.

A este respecto, tenemos el siguiente resultado evidente:

**Proposición 2.5.1.**— *En las condiciones anteriores, si  $M$  es totalmente geodésica, entonces es invariante.*

DEMOSTRACIÓN: Dado  $X \in TM$  cualquiera, en virtud de (0.3.10) se tiene que  $\sigma(X, \xi) = -NX = 0$ , si  $M$  es totalmente geodésica, lo cual implica que  $M$  ha de ser invariante.  $\square$

Así, podemos deducir para subvariedades slant:

**Corolario 2.5.2.**— *No existen subvariedades slant no invariantes y totalmente geodésicas de una variedad  $K$ -contacto.*

Por otra parte, se dice que  $M$  es *totalmente umbilical* si

$$\sigma(X, Y) = g(X, Y)H,$$

para todos  $X, Y \in TM$ , siendo  $H$  el vector curvatura media de  $M$ . En [51], se prueba el siguiente resultado:

**Proposición 2.5.3.**— [51] *Sea  $M$  una subvariedad de una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$  tal que  $\xi \in TM$ . Si  $M$  es totalmente umbilical, entonces es totalmente geodésica.*

Así, del Corolario 2.5.2 se deduce directamente:

**Corolario 2.5.4.**— *No existen subvariedades slant no invariantes y totalmente umbilicales de una variedad Sasakiana.*

De hecho, podemos observar que, en el Ejemplo 1.4.11, la subvariedad slant  $M$  es totalmente geodésica si y sólo si es totalmente umbilical, siendo ambas condiciones, en este caso, equivalentes a que la constante  $k$  sea nula, lo cual, según vimos, equivalía a su vez a que la subvariedad fuera invariante.

En la geometría de contacto, resulta más interesante el estudio de las subvariedades totalmente geodésicas de contacto y totalmente umbilicales de contacto, pues son estas nociones las que se corresponden realmente con las de subvariedades totalmente geodésicas y totalmente umbilicales de las variedades Kaehlerianas.

Se dice que  $M$  es una subvariedad *totalmente geodésica de contacto* si la segunda forma fundamental  $\sigma$  verifica la expresión

$$\sigma(X, Y) = \eta(X)\sigma(Y, \xi) + \eta(Y)\sigma(X, \xi), \quad (2.5.1)$$

para todos  $X, Y \in TM$ . Por otra parte, se dice que  $M$  es *totalmente umbilical de contacto* si existe un campo vectorial  $V$  normal a  $M$  tal que

$$\sigma(X, Y) = (g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y))V + \eta(X)\sigma(Y, \xi) + \eta(Y)\sigma(X, \xi), \quad (2.5.2)$$

para todos  $X, Y \in TM$ . En particular, toda subvariedad totalmente geodésica de contacto es totalmente umbilical de contacto. Es fácil ver que, en virtud de (0.3.13), ha de ser

$$V = \frac{m+1}{m}H,$$

siendo  $H$  el vector curvatura media de  $M$  y  $m+1$  la dimensión de dicha variedad. Así, una subvariedad totalmente umbilical de contacto es totalmente geodésica de contacto si y sólo si es minimal. Además, tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 2.5.5.**— *Si  $M$  es una subvariedad totalmente geodésica de contacto de una variedad  $K$ -contacto  $\widetilde{M}$ , tal que  $\xi \in TM$ , entonces  $M$  es minimal.*

DEMOSTRACIÓN: Dado un campo  $X \in \mathcal{D}$  cualquiera, se sigue de (2.5.1) que  $\sigma(X, X) = 0$ , lo cual, junto con (0.3.13), implica que la traza de  $\sigma$  es nula y así,  $M$  es minimal.  $\square$

Luego, dado que el Ejemplo 1.4.10 nos proporciona subvariedades slant no minimales, obtenemos ejemplos de subvariedades slant que no son totalmente geodésicas de contacto.

Por otra parte, se puede probar que una subvariedad dada por el Ejemplo 1.4.11 es totalmente geodésica de contacto si y sólo si  $k = 0$ , es decir, si y sólo si es invariante.

No obstante, también podemos encontrar subvariedades slant propias que sean totalmente geodésicas de contacto (y, por tanto, minimales). Es fácil ver que, si consideramos en el Ejemplo 1.4.9 la referencia ortonormal  $\{e_1, \dots, e_5\}$  que se definió en su momento, se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma(e_1, e_1) &= 0, & \sigma(e_1, e_2) &= 0, & \sigma(e_1, e_3) &= \text{sen } \theta e_5, \\ \sigma(e_2, e_2) &= 0, & \sigma(e_2, e_3) &= \text{sen } \theta e_4, & \sigma(e_3, e_3) &= 0, \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

de donde puede comprobarse que la subvariedad slant  $M$  es totalmente geodésica de contacto independientemente del valor del ángulo slant  $\theta$ .

Por lo que respecta a las subvariedades totalmente umbilicales de contacto, es bien conocido un resultado clásico de Ishihara y Kon (ver [26]), según el cual, toda subvariedad totalmente umbilical de contacto, tangente al campo de estructura de un espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante  $c \neq -3$ , ha de ser invariante o anti-invariante. Por lo tanto, podemos enunciar:

**Corolario 2.5.6.**— *No existen subvariedades slant propias totalmente umbilicales de contacto de un espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante  $c \neq -3$ .*

No obstante, este corolario no aporta información sobre el caso  $c = -3$ . En dicho caso, no podemos enunciar un resultado general para subvariedades slant. En efecto, dado que las subvariedades descritas en el Ejemplo 1.4.9 son totalmente geodésicas de contacto, serán por tanto subvariedades totalmente umbilicales de contacto del espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante  $\mathbf{R}^5(-3)$ . Así, tenemos subvariedades slant totalmente umbilicales de contacto para cualquier ángulo.

Sin embargo, si examinamos el Ejemplo 1.4.10, encontramos que  $\sigma(e_1, e_2)$  es no nulo, siendo  $e_1, e_2$  los dos campos definidos en su momento. En virtud de (2.5.2), esto quiere decir que estas subvariedades slant no pueden ser totalmente umbilicales de contacto. Además, como para cada valor de la constante real  $k$  obtenemos, en dicho ejemplo, una subvariedad slant con ángulo  $\cos^{-1}(|k|/\sqrt{1+k^2})$ , existen ejemplos de subvariedades slant no totalmente umbilicales en  $\mathbf{R}^5(-3)$  con cualquier ángulo  $\theta \in (0, \pi/2]$ .

Estudiemos ahora la pseudo-umbilicalidad en las subvariedades slant. Recordemos que se dice que una subvariedad es *pseudo-umbilical* si existe una función  $f$  tal que

$$g(\sigma(X, Y), H) = fg(X, Y), \quad (2.5.4)$$

para todos  $X, Y \in TM$ . Entonces, se verifica el siguiente resultado:

**Proposición 2.5.7.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant no invariante de una variedad  $K$ -contacto  $\widetilde{M}$ . Supongamos que  $\dim M = m + 1$  y que  $\dim \widetilde{M} = 2m + 1$ . Entonces,  $M$  es pseudo-umbilical si y sólo si es minimal.*

DEMOSTRACIÓN: Desde luego, está claro que si  $M$  es minimal, entonces es pseudo-umbilical, pues basta tomar  $f = 0$  en tal caso.

Recíprocamente, supongamos que  $M$  es pseudo-umbilical. Entonces, aplicando la igualdad (2.5.4) para  $X = Y = \xi$ , deducimos que la función  $f$  ha de ser nula, es decir,

$$g(\sigma(X, Y), H) = 0, \quad (2.5.5)$$

para todos  $X, Y \in TM$ . En particular, tomando  $Y = \xi$  en (2.5.5), obtenemos

$$g(NX, H) = 0, \quad (2.5.6)$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

Ahora bien, en virtud del Corolario 1.2.4, dada una referencia local ortonormal  $\{e_1, \dots, e_m, \xi\}$  de  $TM$ , se tiene que  $\{\csc \theta Ne_1, \dots, \csc \theta Ne_m\}$  es una base local ortonormal de  $T^\perp M$ . Por lo tanto, (2.5.6) implica que  $H$  ha de ser nulo, es decir,  $M$  debe ser minimal.  $\square$

Así, está claro que las subvariedades del Ejemplo 1.4.9 son pseudo-umbilicales, mientras que las del Ejemplo 1.4.10 no lo son.

De manera análoga a los conceptos estudiados antes, podemos definir una noción de pseudo-umbilicalidad más ligada a la estructura de contacto. Diremos que una subvariedad  $M$  es *pseudo-umbilical de contacto* si existe una función  $f$  tal que

$$\begin{aligned} g(\sigma(X, Y) - \eta(X)\sigma(Y, \xi) - \eta(Y)\sigma(X, \xi), H) &= \\ &= f(g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)), \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

Veamos que podemos encontrar, tanto ejemplos de subvariedades slant pseudo-umbilicales de contacto, como otras que no lo sean. En efecto, consideremos el Ejemplo 1.4.10, con la referencia ortonormal ya descrita  $\{e_1, e_2, \xi\}$ . Es trivial comprobar que la ecuación (2.5.7) se verifica para  $X = e_i$  e  $Y = \xi$ , con  $i = 1, 2$ , así como para  $X = Y = \xi$ , sea cual sea la función  $f$ . Por otra parte, se puede comprobar mediante un cálculo directo que, si bien  $\sigma(e_1, e_2) \neq 0$ , sí se tiene que  $g(\sigma(e_1, e_2), H) = 0$ , por lo que (2.5.7) se sigue cumpliendo para este caso, independientemente de la elección de  $f$ . Por último, se tiene que

$$g(\sigma(e_i, e_i), H) = \frac{2 e^{-2ku}}{3 + k^2},$$

para  $i = 1, 2$ , por lo que (2.5.7) se cumple para  $X = Y = e_i$ , tomando como función  $f = 2e^{-2ku}/(3 + k^2)$ . De todo esto se deduce que, para todo valor de  $k$ , las subvariedades definidas por el Ejemplo 1.4.10 son pseudo-umbilicales de contacto.

Sin embargo, si observamos el Ejemplo 1.4.11, puede verse que, para  $k$  distinto de cero (es decir, en los casos no invariantes),  $\sigma(e_1, e_1) = 0$ , mientras que  $\sigma(e_2, e_2) \neq 0$ , siendo  $\{e_1, e_2, \xi\}$  la referencia local ortonormal de la subvariedad definida en su momento. Por lo tanto, las subvariedades slant así obtenidas no pueden ser pseudo-umbilicales de contacto.

Otro concepto relacionado con la segunda forma fundamental es el de las subvariedades austeras. Se dice que una subvariedad  $M$  es *austera* si, para todo  $V \in T^\perp M$ , el conjunto de autovalores de  $A_V$  es invariante bajo la multiplicación por  $-1$ . En particular, es fácil probar que toda subvariedad austera es minimal.

Encontramos las siguientes condiciones suficientes para asegurar que una subvariedad slant sea austera, en términos de la ecuación (2.2.43).

**Teorema 2.5.8.**— Sea  $M$  una subvariedad slant propia de una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$ . Supongamos que se verifican las condiciones:

(i) para todos  $X, Y \in TM$ :

$$(\nabla_X N)Y = 2\eta(X)NTY + \eta(Y)NTX. \quad (2.5.8)$$

(ii) Para cualquier  $V \in T^\perp M$ , todo autovector  $X$  asociado a un autovalor no nulo de  $A_V$ , tal que  $\eta(X) = 0$ , verifica que:

$$g(TX, tV) = 0. \quad (2.5.9)$$

Entonces,  $M$  es una subvariedad austera.

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, observemos que, en virtud de (2.5.8) y del Teorema 2.2.9, se tiene

$$\sigma(X, TY) = n\sigma(X, Y) - 2\eta(X)NTY - \eta(Y)NTX, \quad (2.5.10)$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

Para llevar a cabo la demostración, vamos a elegir una referencia adecuada en  $TM$ . Dado que  $(\sec \theta T, \xi, \eta, g)$  es una estructura casi-contacto métrica sobre  $M$ , podemos elegir una referencia local ortonormal de la forma<sup>3</sup>

$$\{e_1, \sec \theta Te_1, \dots, e_k, \sec \theta Te_k, \xi\}, \quad (2.5.11)$$

siendo  $\dim M = 2k + 1$ . Además, en virtud de (2.5.10) y del Teorema 1.2.1, obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma(\sec \theta Te_i, \sec \theta Te_j) &= \sec^2 \theta \sigma(Te_i, Te_j) = \sec^2 \theta n \sigma(e_j, Te_i) = \\ &= \sec^2 \theta \sigma(e_j, T^2 e_i) = -\sigma(e_i, e_j), \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

para cada  $i = 1, \dots, k$ .

Por otra parte, dado  $X \in TM$  cualquiera, denotaremos por  $\widetilde{X}$  al campo  $X - \eta(X)\xi$  y por  $X_*$  al campo  $\sec \theta TX$ . Sean  $V \in T^\perp M$  cualquiera y  $\mu$  un autovalor no nulo de  $A_V$ . Tomemos  $X \in TM$  un autovector no nulo asociado al autovalor  $\mu$ . Vamos a probar que, en las condiciones del enunciado,

$$A_V(\sec \theta TX) = -\mu \sec \theta TX, \quad (2.5.13)$$

---

<sup>3</sup>Este hecho es una generalización evidente del Corolario 1.2.5.

siendo  $\theta$  el ángulo slant de  $M$ . Esto implicará que  $-\mu$  también será autovalor de  $A_V$ , con lo que concluirá la demostración.

Expresamos  $\widetilde{X}$  en la base (2.5.11):

$$\widetilde{X} = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^k \mu_i e_{i*}. \quad (2.5.14)$$

Así:

$$A_V \widetilde{X} = \sum_{i=1}^k \lambda_i A_V e_i + \sum_{i=1}^k \mu_i A_V e_{i*}. \quad (2.5.15)$$

Pero, para cada  $i = 1, \dots, k$ , en virtud de (0.1.3) y (0.3.12),

$$A_V e_i = \sum_{j=1}^k g(\sigma(e_i, e_j), V) e_j + \sum_{j=1}^k g(\sigma(e_i, e_{j*}), V) e_{j*} + g(tV, e_i) \xi. \quad (2.5.16)$$

Análogamente, en virtud de (2.5.12):

$$A_V e_{i*} = \sum_{j=1}^k g(\sigma(e_{i*}, e_j), V) e_j - \sum_{j=1}^k g(\sigma(e_i, e_j), V) e_{j*} + g(tV, e_{i*}) \xi. \quad (2.5.17)$$

Así, sustituyendo (2.5.16) y (2.5.17) en (2.5.15), se tiene:

$$\begin{aligned} A_V \widetilde{X} &= \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^k (\lambda_i g(\sigma(e_i, e_j), V) + \mu_i g(\sigma(e_{i*}, e_j), V)) \right) e_j + \\ &+ \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^k (\lambda_i g(\sigma(e_i, e_{j*}), V) - \mu_i g(\sigma(e_i, e_j), V)) \right) e_{j*} + \\ &+ \left( \sum_{i=1}^k (\lambda_i g(tV, e_i) + \mu_i g(tV, e_{i*})) \right) \xi. \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

Por otra parte,

$$A_V X = A_V \widetilde{X} + \eta(X) A_V \xi = A_V \widetilde{X} + \eta(X) tV, \quad (2.5.19)$$

siendo:

$$tV = \sum_{j=1}^k g(tV, e_j) e_j + \sum_{j=1}^k g(tV, e_{j*}) e_{j*}. \quad (2.5.20)$$

Ahora bien, dado que  $X$  es un autovector de  $A_V$ , asociado al autovalor  $\mu$ , se tiene:

$$A_V X = \mu X. \quad (2.5.21)$$

Así, igualando componentes respecto de la base (2.5.11), se sigue de (2.5.14) y (2.5.18)–(2.5.21) que

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_i g(\sigma(e_i, e_j), V) + \mu_i g(\sigma(e_{i*}, e_j), V)) + \eta(X)g(tV, e_j) = \mu \lambda_j, \quad (2.5.22)$$

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_i g(\sigma(e_i, e_{j*}), V) - \mu_i g(\sigma(e_i, e_j), V)) + \eta(X)g(tV, e_{j*}) = \mu \mu_j \quad (2.5.23)$$

y

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_i g(tV, e_i) + \mu_i g(tV, e_{i*})) = g(tV, \widetilde{X}) = \mu \eta(X). \quad (2.5.24)$$

Aplicando  $T$  en (2.5.14) y multiplicando por  $\sec \theta$ , se tiene:

$$X_* = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_{i*} - \sum_{i=1}^k \mu_i e_i,$$

en virtud del Teorema 1.2.1. Además, se prueba de forma similar a (2.5.12) que

$$\sigma(e_{i*}, e_j) = \sigma(e_i, e_{j*}),$$

para todos  $i, j$ . Entonces, procediendo de manera análoga a como hemos hecho antes y empleando las ecuaciones (2.5.22)–(2.5.24), se llega a:

$$A_V X_* = -\mu X_* + \sec \theta g(tV, TX)\xi. \quad (2.5.25)$$

Por lo tanto, para concluir la demostración, basta probar que  $g(tV, TX) = 0$ . Si  $\eta(X) = 0$ , en virtud de (2.5.9), esto se verifica. Podemos suponer por tanto que  $\eta(X) \neq 0$ . Ahora bien, de (0.3.3) y (2.5.21) se sigue que  $g(A_V X, TX) = 0$ . Pero, por otro lado, en virtud de (2.5.19):

$$g(A_V X, TX) = g(A_V \widetilde{X}, TX) + \eta(X)g(tV, TX).$$

Así,

$$\eta(X)g(tV, TX) = -g(A_V \widetilde{X}, TX) =$$



$$= -g(\widetilde{X}, A_V T X) = -\cos \theta g(\widetilde{X}, A_V X_*),$$

de donde, en virtud de (2.5.25), resulta:

$$\eta(X)g(tV, T X) = \cos \theta \mu g(\widetilde{X}, X_*) - g(tV, T X)g(\widetilde{X}, \xi) = 0.$$

Entonces, como  $\eta(X) \neq 0$ , ha de ser  $g(tV, T X) = 0$ .  $\square$

En virtud del Teorema 2.2.17, obtenemos:

**Corolario 2.5.9.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant propia minimal, de una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$ . Supongamos que  $\dim M = 3$ ,  $\dim \widetilde{M} = 5$  y que  $M$  verifica la condición (b) del Teorema 2.5.8. Entonces,  $M$  es austera.*

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia inmediata de los Teoremas 2.5.8 y 2.2.17, pues, en virtud de éste último, toda subvariedad slant propia minimal, con las condiciones dadas sobre las dimensiones, verifica la condición (a) del teorema anterior.  $\square$

**Nota 2.5.10.**— Observemos que las subvariedades obtenidas en el Ejemplo 1.4.9, para  $\theta \in (0, \pi/2)$ , verifican las hipótesis del Corolario 2.5.9. En efecto, si consideramos la referencia ortonormal usual  $\{e_1, \dots, e_5\}$ , puede calcularse fácilmente, en virtud de (2.5.3), que  $A_{e_4}$  y  $A_{e_5}$  vienen dados por las matrices:

$$A_{e_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{e_5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \text{sen } \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, es inmediato ver que, dado  $V = V^1 e_4 + V^2 e_5 \in T^\perp M$  cualquiera, los autovectores  $X$  asociados a un autovalor  $\mu$  de  $A_V$  están determinados por las siguientes ecuaciones implícitas

$$\begin{aligned} -\mu X^1 + V^2 \text{sen } \theta \eta(X) &= 0, \\ -\mu X^2 + V^1 \text{sen } \theta \eta(X) &= 0, \\ V^2 \text{sen } \theta X^1 + V^1 \text{sen } \theta X^2 - \mu \eta(X) &= 0, \end{aligned}$$

siendo  $X^i$  la coordenada respecto de  $e_i$ . Por lo tanto, si  $\eta(X) = 0$ , se sigue de aquí que  $X = 0$ . Luego, no existen autovectores no nulos, asociados a un autovalor  $\mu \neq 0$ , con  $\eta(X) = 0$ . Esto implica que se verifica la hipótesis (b) del Teorema 2.5.8.

De hecho, para cualquier  $V \in T^\perp M$ , la ecuación característica de  $A_V$  viene dada por

$$\mu(\mu - |V| \operatorname{sen} \theta)(\mu + |V| \operatorname{sen} \theta) = 0,$$

siendo por tanto  $\{0, \pm|V| \operatorname{sen} \theta\}$  los autovalores de  $A_V$ . Esto prueba directamente que la subvariedad es austera.

Finalmente, vamos a probar una condición suficiente para asegurar la minimalidad de una subvariedad slant propia. Previamente, necesitamos el siguiente lema:

**Lema 2.5.11.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant propia, con ángulo  $\theta$ , de una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$ . Supongamos que  $\dim M = 3$  y  $\dim \widetilde{M} = 5$ . Entonces, con respecto a una referencia slant adaptada  $\{e_1, \dots, e_5\}$ , se tiene que*

$$\omega_4^5 - \omega_1^2 = -\cot \theta \{(\operatorname{tr} \sigma^4)\omega^1 + (\operatorname{tr} \sigma^5)\omega^2 - (2\operatorname{sen} \theta)\eta\}, \quad (2.5.26)$$

donde  $\omega^1, \omega^2$  son las formas duales de  $e_1, e_2$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Dada la subvariedad  $M$ , elijamos una referencia slant adaptada  $\{e_1, \dots, e_5\}$ . Entonces,

$$D_{e_1} e_4 = \csc \theta D_{e_1} N e_1 = \csc \theta (N(\nabla_{e_1} e_1) + n\sigma(e_1, e_1) - \sigma(e_1, T e_1)), \quad (2.5.27)$$

en virtud del Teorema 2.2.9. Pero, se sigue de (0.1.5) y (0.1.7) que

$$\nabla_{e_1} e_1 = \omega_1^2(e_1)e_2 + \omega_1^3(e_1)e_3,$$

de donde:

$$N(\nabla_{e_1} e_1) = \omega_1^2(e_1)N e_2 = \operatorname{sen} \theta \omega_1^2(e_1)e_5. \quad (2.5.28)$$

Por otra parte,  $\sigma(e_1, e_1) = \sigma_{11}^4 e_4 + \sigma_{11}^5 e_5$ , lo cual implica

$$n\sigma(e_1, e_1) = \sigma_{11}^4 n e_4 + \sigma_{11}^5 n e_5 = \cos \theta (-\sigma_{11}^4 e_5 + \sigma_{11}^5 e_4), \quad (2.5.29)$$

en virtud del Corolario 1.2.6. Además:

$$\sigma(e_1, T e_1) = \cos \theta \sigma(e_1, e_2) = \cos \theta (\sigma_{12}^4 e_4 + \sigma_{12}^5 e_5). \quad (2.5.30)$$

Así, sustituyendo (2.5.28)–(2.5.30) en (2.5.27), resulta

$$D_{e_1} e_4 = \omega_1^2(e_1)e_5 + \cot \theta (-\sigma_{11}^4 e_5 + \sigma_{11}^5 e_4 - \sigma_{12}^4 e_4 - \sigma_{12}^5 e_5),$$

de donde, en virtud del Lema 2.2.13, se sigue que

$$D_{e_1} e_4 = \omega_1^2(e_1)e_5 - \cot \theta(\sigma_{11}^4 + \sigma_{22}^4)e_5 = \omega_1^2(e_1)e_5 - \cot \theta(\text{tr}\sigma^4)e_5, \quad (2.5.31)$$

pues  $\sigma(\xi, \xi) = 0$ . Pero, de (0.1.6) se tiene:

$$D_{e_1} e_4 = \omega_4^5(e_1)e_5. \quad (2.5.32)$$

Por lo tanto, igualando (2.5.31) y (2.5.32), obtenemos:

$$\omega_4^5(e_1) - \omega_1^2(e_1) = -\cot \theta(\text{tr}\sigma^4). \quad (2.5.33)$$

Procediendo de manera totalmente análoga a partir de  $D_{e_2} e_4$ , resulta:

$$\omega_4^5(e_2) - \omega_1^2(e_2) = -\cot \theta(\text{tr}\sigma^5). \quad (2.5.34)$$

Por otra parte,

$$D_{e_3} e_4 = \csc \theta(N(\nabla_{e_3} e_1) + n\sigma(e_1, e_3) - \sigma(Te_1, e_3)). \quad (2.5.35)$$

Pero, dado que  $e_3 = \xi$ , por definición de referencia slant adaptada, (0.3.7) y (0.3.11) implican que

$$n\sigma(e_1, e_3) - \sigma(Te_1, e_3) = -nNe_1 + NTe_1 = 2NTe_1,$$

de donde, en virtud del Lema 2.2.13, se sigue:

$$n\sigma(e_1, e_3) - \sigma(Te_1, e_3) = 2 \text{sen } \theta \cos \theta e_5. \quad (2.5.36)$$

Además:

$$N(\nabla_{e_3} e_1) = \omega_1^2(e_3)Ne_2 = \text{sen } \theta \omega_1^2(e_3)e_5. \quad (2.5.37)$$

Por lo tanto, sustituyendo (2.5.36) y (2.5.37) en (2.5.35),

$$D_{e_3} e_4 = \omega_1^2(e_3)e_5 + 2 \cos \theta e_5,$$

lo cual, teniendo en cuenta que  $D_{e_3} e_4 = \omega_4^5(e_3)e_5$ , implica:

$$\omega_4^5(e_3) - \omega_1^2(e_3) = 2 \cos \theta = -\cot \theta(-2 \text{sen } \theta). \quad (2.5.38)$$

Entonces, dado que  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es una referencia local ortonormal de  $TM$ , con referencia dual  $\{\omega^1, \omega^2, \eta\}$ , la ecuación (2.5.26) se sigue de (2.5.33), (2.5.34) y (2.5.38), con lo que concluye la prueba.  $\square$

**Teorema 2.5.12.**— *Sea  $M$  una subvariedad slant propia de una variedad Sasakiana  $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ . Supongamos que  $\dim M = 3$  y  $\dim \widetilde{M} = 5$ . Si existe un tensor  $\bar{\phi}$ , de tipo  $(1, 1)$ , en  $\widetilde{M}$  tal que*

$$(\widetilde{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, g)$$

*es una variedad casi-contacto métrica verificando*

$$g((\widetilde{\nabla}_X \bar{\phi})Y, Z) = 0, \quad (2.5.39)$$

*para todos  $X, Y, Z$  ortogonales a  $\xi$  y  $M$  es anti-invariante en ella, entonces  $M$  es una subvariedad minimal de  $\widetilde{M}$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Sea  $\{e_1, \dots, e_5\}$  una referencia slant adaptada en la variedad Sasakiana  $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ . Así,  $\{e_4, e_5\}$  será una referencia ortonormal local de  $T^\perp M$ .

Pero, al ser  $M$  anti-invariante en  $(\widetilde{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, g)$ , se tiene claramente que  $\{\bar{\phi}e_1, \bar{\phi}e_2\}$  es otra base ortonormal local de  $T^\perp M$ , en virtud de (0.2.6). Por lo tanto, la matriz de cambio entre ambas bases ha de ser ortogonal, es decir, existirá una función  $F$  en  $M$  tal que:

$$\begin{aligned} e_4 &= (\cos F)\bar{\phi}e_1 + (\sin F)\bar{\phi}e_2, \\ e_5 &= -(\sin F)\bar{\phi}e_1 + (\cos F)\bar{\phi}e_2. \end{aligned} \quad (2.5.40)$$

Sea  $X \in \mathcal{D}$  cualquiera. Derivando covariantemente respecto de  $X$  en la primera ecuación de (2.5.40), se obtiene,

$$\widetilde{\nabla}_X e_4 = X(\cos F)\bar{\phi}e_1 + X(\sin F)\bar{\phi}e_2 + (\cos F)\widetilde{\nabla}_X \bar{\phi}e_1 + (\sin F)\widetilde{\nabla}_X \bar{\phi}e_2,$$

de donde:

$$\begin{aligned} \omega_4^5(X) &= g(\widetilde{\nabla}_X e_4, e_5) = X(\cos F)g(\bar{\phi}e_1, e_5) + X(\sin F)g(\bar{\phi}e_2, e_5) + \\ &+ (\cos F)g(\widetilde{\nabla}_X \bar{\phi}e_1, e_5) + (\sin F)g(\widetilde{\nabla}_X \bar{\phi}e_2, e_5). \end{aligned} \quad (2.5.41)$$

Pero, en virtud de (2.5.40),

$$g(\bar{\phi}e_1, e_5) = -\sin F, \quad (2.5.42)$$

$$g(\bar{\phi}e_2, e_5) = \cos F, \quad (2.5.43)$$

mientras que, de (2.5.39), se deduce

$$g(\widetilde{\nabla}_X \bar{\phi} e_1, e_5) = g(\bar{\phi} \widetilde{\nabla}_X e_1, e_5) = g(\omega_1^2(X) \bar{\phi} e_2 + \omega_1^4(X) \bar{\phi} e_4, e_5),$$

pues  $\omega_1^1(X) = 0$ ,  $\bar{\phi} \xi = 0$  y  $g(\bar{\phi} e_5, e_5) = 0$ . Pero, (2.5.40) implica

$$\bar{\phi} e_4 = (\cos F) \bar{\phi}^2 e_1 + (\sen F) \bar{\phi}^2 e_2 = -(\cos F) e_1 - (\sen F) e_2 \in TM$$

y, por tanto,

$$g(\widetilde{\nabla}_X \bar{\phi} e_1, e_5) = \omega_1^2(X) g(\bar{\phi} e_2, e_5) = \cos F \omega_1^2(X), \quad (2.5.44)$$

en virtud de (2.5.43). Análogamente, se obtiene:

$$g(\widetilde{\nabla}_X \bar{\phi} e_2, e_5) = \omega_2^1(X) g(\bar{\phi} e_1, e_5) = -\sen F \omega_2^1(X). \quad (2.5.45)$$

Por otra parte, está claro que:

$$X(\cos F) = -\sen F(XF) \text{ y } X(\sen F) = \cos F(XF). \quad (2.5.46)$$

Así, de (2.5.41)–(2.5.46), se deduce, para todo  $X \in \mathcal{D}$ :

$$\omega_4^5(X) - \omega_1^2(X) = XF = dF(X). \quad (2.5.47)$$

Si tomamos ahora  $X = \widetilde{X} + \eta(X)\xi \in TM$ , cualquiera, con  $\widetilde{X} \in \mathcal{D}$ , se tiene, repitiendo los cálculos de (2.5.38),

$$\begin{aligned} \omega_4^5(X) - \omega_1^2(X) &= \omega_4^5(\widetilde{X}) - \omega_1^2(\widetilde{X}) + \eta(X)(\omega_4^5(\xi) - \omega_1^2(\xi)) = \\ &= dF(\widetilde{X}) + 2 \cos \theta \eta(X), \end{aligned}$$

en virtud de (2.5.47). Pero,  $dF(\widetilde{X}) = dF(X - \eta(X)\xi) = dF(X) - \xi(F)\eta(X)$ .

Así:

$$\omega_4^5 - \omega_1^2 = dF + (2 \cos \theta - \xi(F))\eta. \quad (2.5.48)$$

Entonces, igualando (2.5.26) con (2.5.48), podemos deducir:

$$-\cot \theta \{(\text{tr } \sigma^4) \omega^1 + (\text{tr } \sigma^5) \omega^2\} = dF - \xi(F)\eta. \quad (2.5.49)$$

Por otra parte,

$$\sigma_{11}^4 = g(\sigma(e_1, e_1), e_4) = g(A_{e_4} e_1, e_1) = -g(\widetilde{\nabla}_{e_1} e_4, e_1).$$

Pero, en virtud de (2.5.40):

$$\widetilde{\nabla}_{e_1} e_4 = e_1(\cos F)\bar{\phi}e_1 + e_1(\sin F)\bar{\phi}e_2 + (\cos F)\widetilde{\nabla}_{e_1}\bar{\phi}e_1 + (\sin F)\widetilde{\nabla}_{e_1}\bar{\phi}e_2.$$

Además, en virtud de (2.5.39),

$$g(\widetilde{\nabla}_{e_1}\bar{\phi}e_1, e_1) = g(\bar{\phi}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_1, e_1)$$

y, análogamente:

$$g(\widetilde{\nabla}_{e_1}\bar{\phi}e_2, e_1) = g(\bar{\phi}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_2, e_1).$$

Así, como  $\bar{\phi}e_1, \bar{\phi}e_2 \in T^\perp M$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^4 &= -\cos Fg(\bar{\phi}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_1, e_1) - \sin Fg(\bar{\phi}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_2, e_1) = \\ &= \cos Fg(\widetilde{\nabla}_{e_1}e_1, \bar{\phi}e_1) + \sin Fg(\widetilde{\nabla}_{e_1}e_2, \bar{\phi}e_1) = \\ &= \cos Fg(\sigma(e_1, e_1), \bar{\phi}e_1) + \sin Fg(\sigma(e_1, e_2), \bar{\phi}e_1). \end{aligned} \quad (2.5.50)$$

Ahora bien, de (2.5.40) se deduce:

$$\bar{\phi}e_1 = \cos Fe_4 - \sin Fe_5. \quad (2.5.51)$$

Entonces, (2.5.40) y (2.5.41) implican que

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^4 &= \cos^2 F\sigma_{11}^4 - \cos F\sin F\sigma_{11}^5 + \cos F\sin F\sigma_{12}^4 - \sin^2 F\sigma_{12}^5 = \\ &= \cos^2 F\sigma_{11}^4 - \sin^2 F\sigma_{22}^4, \end{aligned}$$

en virtud del Lema 2.2.13. De aquí se deduce

$$\sin^2 F(\sigma_{11}^4 + \sigma_{22}^4) = 0,$$

lo cual, dado que  $\sigma_{33}^4 = 0$ , implica a su vez:

$$\sin^2 F(\text{tr}\sigma^4) = 0. \quad (2.5.52)$$

Razonando de manera totalmente análoga a partir de  $\sigma_{22}^5$ , se prueba también:

$$\sin^2 F(\text{tr}\sigma^5) = 0. \quad (2.5.53)$$

Definimos a continuación el siguiente subconjunto de  $M$ :

$$U = \{x \in M / H(x) \neq 0\}.$$

Está claro que  $U$  es un abierto de  $M$ . Para concluir la demostración, bastará probar que  $U$  es vacío.

Por reducción al absurdo, supongamos que  $U \neq \emptyset$ . Así, en  $U$ ,

$$0 \neq H = \frac{1}{3}\text{tr}\sigma = \frac{1}{3}((\text{tr}\sigma^4)e_4 + (\text{tr}\sigma^5)e_5),$$

de donde:

$$\text{tr}\sigma^4 \neq 0 \quad \text{ó} \quad \text{tr}\sigma^5 \neq 0. \quad (2.5.54)$$

Esto implica, en virtud de (2.5.52) y (2.5.53), que  $F \equiv 0 \pmod{\pi}$  en  $U$ . Pero  $F$  ha de ser continua, lo cual significa que  $F = 0$  en  $U$ . Así,  $dF = 0$  y  $\xi(F) = 0$  en  $U$ . Por lo tanto, se deduce de (2.5.49)

$$\cot \theta \{(\text{tr} \sigma^4)\omega^1 + (\text{tr} \sigma^5)\omega^2\} = 0,$$

de donde, en virtud de (2.5.54), se sigue que

$$\cot \theta = 0,$$

lo cual es contradictorio pues  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Así,  $U = \emptyset$  y, por tanto,  $M$  es minimal.  $\square$

**Nota 2.5.13.**— Observemos que, en particular, el teorema anterior se verifica si  $(\bar{\phi}, \xi, \eta, g)$  es una estructura Sasakiana sobre  $\widetilde{M}$ , pues, en tal caso, para todos  $X, Y, Z \in T\widetilde{M}$ ,

$$g((\widetilde{\nabla}_X \bar{\phi})Y, Z) = g(X, Y)\eta(Z) - \eta(Y)g(X, Z),$$

anulándose esta expresión si  $Y, Z$  son ortogonales a  $\xi$ .

De hecho, éste sería el análogo al teorema presentado por Chen en [10] en el caso Kaehleriano. Sin embargo, en nuestro caso no tiene sentido el considerar una variedad con dos estructuras Sasakianas compatibles, pues, como ya se señaló en la Proposición 1.4.5, esta situación sólo puede darse si ambas estructuras son iguales.

Por otra parte, dada una variedad Sasakiana  $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ , sí puede existir un tensor  $\bar{\phi}$  tal que  $(\bar{\phi}, \xi, \eta, g)$  sea una estructura casi-contacto métrica de modo que verifique la condición (2.5.39). Por ejemplo, si consideramos la variedad Sasakiana  $(\mathbf{R}^5, \phi_0, \xi, \eta, g)$ , es decir,  $\mathbf{R}^5$  con su estructura Sasakiana usual, sabemos que el tensor  $\phi_1$  definido en la Sección 1.4 verifica que

$(\phi_1, \xi, \eta, g)$  es una estructura casi-contacto métrica sobre  $\mathbf{R}^5$ . Además, en virtud de (1.4.9), es fácil ver que se verifica (2.5.39). Es más, para cada  $\theta \in (0, \pi/2)$ , el Ejemplo 1.4.9 nos proporciona una subvariedad que verifica las hipótesis del Teorema 2.5.12, con las estructuras mencionadas. En efecto, basta probar que las subvariedades obtenidas en dicho ejemplo son anti-invariantes en  $(\mathbf{R}^5, \phi_1, \xi, \eta, g)$ , lo cual se comprueba de manera inmediata a partir de la referencia ortonormal local que se definió en su momento.



## Capítulo 3

# Teoremas de existencia y unicidad

Dedicamos este capítulo a la presentación de algunos de los resultados fundamentales de nuestro trabajo. Más concretamente, nuestro objetivo es establecer teoremas de existencia y unicidad para inmersiones slant en espacios de curvatura  $\phi$ -seccional constante, análogos a los teoremas presentados por Chen y Vrancken en [17]. A partir de estos teoremas, probaremos resultados de existencia de subvariedades slant propias con curvatura escalar y media predeterminadas. Además, otras aplicaciones nos permitirán demostrar la existencia de gran cantidad de ejemplos de subvariedades slant propias, tanto en  $\widetilde{M}^5(-3)$  como en  $\widetilde{M}^5(-7)$ .

Para todo ello, estructuraremos la materia en cuatro secciones. En la Sección 3.1, partiremos de una inmersión slant propia en un espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante. En este contexto, hallaremos ciertas expresiones (algunas ya conocidas del capítulo anterior) que nos permitirán enunciar y demostrar el Teorema de Existencia de la Sección 3.2. En la Sección 3.3, recogemos el Teorema de Unicidad. Por fin, en la Sección 3.4, se encuentran las aplicaciones del Teorema de Existencia.

### 3.1 Preliminares del Teorema de Existencia.

Tal y como hemos anunciado en el párrafo anterior, dedicaremos esta sección a la recopilación y obtención de aquellas expresiones que se verifi-

can para una inmersión slant propia en un espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante y que, como veremos más tarde, nos permitirán caracterizar dichas inmersiones mediante el Teorema de Existencia.

Denotemos por  $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$  la variedad Sasakiana de dimensión  $2m + 1$  y curvatura  $\phi$ -seccional constante  $c$ . Consideremos una inmersión slant, con ángulo slant  $\theta$ , de una variedad Riemanniana  $M$  en  $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$ . Recordemos que, en virtud del Teorema 1.2.1 y de (0.3.3), se verifican las expresiones

$$T^2X = -\cos^2\theta(X - \eta(X)\xi), \quad (3.1.1)$$

$$g(TX, Y) + g(X, TY) = 0, \quad (3.1.2)$$

para todos  $X, Y \in TM$ . Si  $\theta \neq 0$ , dado  $X \in TM$ , denotaremos, por simplicidad:

$$X^* = \frac{1}{\text{sen } \theta}NX. \quad (3.1.3)$$

Calculemos en primer lugar  $\widetilde{R}(X, Y; Z^*, W^*)$  con  $X, Y \in TM$  y  $Z, W \in \mathcal{D}$ . En virtud de (0.2.16), se llega a

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X, Y; Z^*, W^*) &= \frac{c-1}{4} \left\{ g(Y, \frac{1}{\text{sen } \theta}tNZ)g(X, \frac{1}{\text{sen } \theta}tNW) - \right. \\ &\left. - g(X, \frac{1}{\text{sen } \theta}tNZ)g(Y, \frac{1}{\text{sen } \theta}tNW) + 2g(X, TY)g(\frac{1}{\text{sen } \theta}nNZ, \frac{1}{\text{sen } \theta}NW) \right\}, \end{aligned}$$

lo cual, junto con el Corolario 1.2.2 y la Proposición 1.2.3, implica que:

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X, Y; Z^*, W^*) &= \frac{c-1}{4} \left\{ \text{sen }^2\theta(g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)) - \right. \\ &\left. - 2g(X, TY)g(TZ, W) \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Definimos en  $M$  la forma bilineal simétrica valuada en  $TM$  dada por

$$\alpha(X, Y) = t\sigma(X, Y), \quad (3.1.5)$$

para todos  $X, Y \in TM$ . Entonces, (0.3.1) y (3.1.3) implican:

$$\phi\alpha(X, Y) = T\alpha(X, Y) + \text{sen } \theta\alpha^*(X, Y). \quad (3.1.6)$$

Así mismo, (0.3.2) y (3.1.5) implican

$$\phi\sigma(X, Y) = \alpha(X, Y) + \beta^*(X, Y), \quad (3.1.7)$$

donde  $\beta$  es una forma bilineal simétrica en  $M$  valuada en  $\mathcal{D}$ . De (3.1.6) y (3.1.7) se deduce

$$-\sigma(X, Y) = T\alpha(X, Y) + (\text{sen } \theta)\alpha^*(X, Y) + \phi\beta^*(X, Y), \quad (3.1.8)$$

pues  $\eta(\sigma(X, Y)) = 0$ , para todos  $X, Y \in TM$ . De (3.1.3) se sigue que:

$$\begin{aligned} \phi\beta^*(X, Y) &= \frac{1}{\text{sen } \theta}\phi N\beta(X, Y) = \\ &= \frac{1}{\text{sen } \theta}(tN\beta(X, Y) + nN\beta(X, Y)). \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

En virtud del Corolario 1.2.2, se tiene

$$\begin{aligned} tN\beta(X, Y) &= -\text{sen}^2\theta(\beta(X, Y) - \eta(\beta(X, Y))\xi) = \\ &= -(\text{sen}^2\theta)\beta(X, Y), \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

pues  $\beta$  toma valores en  $\mathcal{D}$ . Por otra parte, (0.3.7) implica que

$$nN\beta(X, Y) = -NT\beta(X, Y) = -\text{sen } \theta(T\beta(X, Y))^*. \quad (3.1.11)$$

Así, sustituyendo (3.1.10) y (3.1.11) en (3.1.9), tenemos

$$\phi\beta^*(X, Y) = -(\text{sen } \theta)\beta(X, Y) - (T\beta(X, Y))^*,$$

de donde, junto con (3.1.8), se deduce que:

$$\begin{aligned} -\sigma(X, Y) &= T\alpha(X, Y) + (\text{sen } \theta)\alpha^*(X, Y) - \\ &\quad - (\text{sen } \theta)\beta(X, Y) - (T\beta(X, Y))^*. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Por lo tanto, igualando las partes tangentes en (3.1.12), resulta

$$\beta(X, Y) = (\text{csc } \theta)T\alpha(X, Y), \quad (3.1.13)$$

mientras que al igualar las partes normales se obtiene:

$$\sigma(X, Y) = -(\text{sen } \theta)\alpha^*(X, Y) + (T\beta(X, Y))^*. \quad (3.1.14)$$

Ahora bien, de (3.1.1) y (3.1.13) se deduce:

$$T\beta(X, Y) = (\text{csc } \theta)T^2\alpha(X, Y) = -\frac{\cos^2 \theta}{\text{sen } \theta}\alpha(X, Y).$$

Así, de (3.1.14) se sigue que

$$\sigma(X, Y) = -(\operatorname{sen} \theta)\alpha^*(X, Y) - \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta}\alpha^*(X, Y),$$

de donde se tiene

$$\sigma(X, Y) = -(\operatorname{csc} \theta)\alpha^*(X, Y), \quad (3.1.15)$$

lo cual, en virtud de (3.1.6), es equivalente a:

$$\sigma(X, Y) = \operatorname{csc}^2 \theta(T\alpha(X, Y) - \phi\alpha(X, Y)). \quad (3.1.16)$$

En virtud de (2.2.8) y (3.1.5), se verifica que

$$(\nabla_X T)Y = \alpha(X, Y) + A_{NY}X + g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \quad (3.1.17)$$

para todos  $X, Y \in TM$ . Dado que, de (0.1.3), (0.3.5) y (3.1.5) se tiene

$$g(A_{NY}X, Z) = g(\sigma(X, Z), NY) = -g(t\sigma(X, Z), Y) = -g(\alpha(X, Z), Y),$$

se sigue entonces que

$$\begin{aligned} g((\nabla_X T)Y, Z) &= g(\alpha(X, Y), Z) - g(\alpha(X, Z), Y) + \\ &+ g(X, Y)\eta(Z) - g(X, Z)\eta(Y), \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

para todos  $X, Y, Z \in TM$ . Por otra parte, si  $\theta \neq 0$  e  $Y \in \mathcal{D}$ , la notación introducida en (3.1.3) nos permite escribir la expresión (3.1.17) de la siguiente manera:

$$A_{Y^*}X = \operatorname{csc} \theta\{(\nabla_X T)Y - \alpha(X, Y) - g(X, Y)\xi\}. \quad (3.1.19)$$

También podemos reescribir la ecuación (2.2.9). Concretamente, en virtud de (0.3.7) y (3.1.15) y teniendo en cuenta que  $N\xi = 0$ , obtenemos la ecuación:

$$D_X Y^* = (\nabla_X Y - \eta(\nabla_X Y)\xi)^* + \operatorname{csc}^2 \theta\{(T\alpha(X, Y))^* + \alpha^*(X, TY)\}. \quad (3.1.20)$$

Determinemos a continuación las ecuaciones de Gauss y de Codazzi de una subvariedad  $\theta$ -slant en  $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$ , con  $\theta \neq 0$ . En primer lugar, es inmediato

observar que (0.1.8) y (0.2.16) implican que la ecuación de Gauss de  $M$  en  $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$  viene dada por

$$\begin{aligned} R(X, Y; Z, W) &= g(\sigma(X, W), \sigma(Y, Z)) - g(\sigma(X, Z), \sigma(Y, W)) + \\ &+ \frac{c+3}{4}(g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)) + \frac{c-1}{4}(\eta(X)\eta(Z)g(Y, W) - \\ &- \eta(Y)\eta(Z)g(X, W) + \eta(Y)\eta(W)g(X, Z) - \eta(X)\eta(W)g(Y, Z)) + \\ &+ g(TX, W)g(TY, Z) - g(TX, Z)g(TY, W) + 2g(X, TY)g(TZ, W)), \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

para todos  $X, Y, Z, W \in T\widetilde{M}$ . Ahora bien, en virtud de (3.1.16),

$$\begin{aligned} g(\sigma(X, W), \sigma(Y, Z)) &= \csc^4 \theta g(N\alpha(X, W), N\alpha(Y, Z)) = \\ &= \csc^2 \theta g(\alpha(X, W), \alpha(Y, Z)), \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la Proposición 1.2.3. Así, sustituyendo este cálculo en (3.1.21), obtenemos la expresión deseada para la ecuación de Gauss:

$$\begin{aligned} R(X, Y; Z, W) &= \csc^2 \theta (g(\alpha(X, W), \alpha(Y, Z)) - g(\alpha(X, Z), \alpha(Y, W))) + \\ &+ \frac{c+3}{4}(g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)) + \frac{c-1}{4}(\eta(X)\eta(Z)g(Y, W) - \\ &- \eta(Y)\eta(Z)g(X, W) + \eta(Y)\eta(W)g(X, Z) - \eta(X)\eta(W)g(Y, Z)) + \\ &+ g(TX, W)g(TY, Z) - g(TX, Z)g(TY, W) + 2g(X, TY)g(TZ, W)). \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Consideremos ahora la ecuación de Codazzi

$$(\widetilde{R}(X, Y)Z)^\perp = (\overline{\nabla}_X \sigma)(Y, Z) - (\overline{\nabla}_Y \sigma)(X, Z),$$

con  $X, Y, Z \in TM$ , donde  $(\widetilde{R}(X, Y)Z)^\perp$  denota la componente normal de  $\widetilde{R}(X, Y)Z$ . En virtud de (0.2.16):

$$(\widetilde{R}(X, Y)Z)^\perp = \frac{c-1}{4}(g(TY, Z)NX - g(TX, Z)NY + 2g(X, TY)NZ).$$

Así, en virtud de (0.1.10), podemos escribir la ecuación de Codazzi de la siguiente forma:

$$\frac{c-1}{4}(g(TY, Z)NX - g(TX, Z)NY + 2g(X, TY)NZ) =$$

$$\begin{aligned}
&= D_X(\sigma(Y, Z)) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z) - \\
&\quad - D_Y(\sigma(X, Z)) + \sigma(\nabla_Y X, Z) + \sigma(X, \nabla_Y Z). \quad (3.1.23)
\end{aligned}$$

Aplicando  $\phi$  en (3.1.23) y tomando la parte tangente, obtenemos, en virtud del Corolario 1.2.2:

$$\begin{aligned}
&-\text{sen}^2 \theta \frac{c-1}{4} (g(TY, Z)X - g(TY, Z)\eta(X)\xi - g(TX, Z)Y + g(TX, Z)\eta(Y)\xi + \\
&\quad + 2g(X, TY)Z - 2g(X, TY)\eta(Z)\xi) = tD_X(\sigma(Y, Z)) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \\
&\quad - \alpha(Y, \nabla_X Z) - tD_Y(\sigma(X, Z)) + \alpha(\nabla_Y X, Z) + \alpha(X, \nabla_Y Z). \quad (3.1.24)
\end{aligned}$$

En virtud de (3.1.16) y (2.2.9), tenemos

$$\begin{aligned}
D_X(\sigma(Y, Z)) &= -(\text{csc}^2 \theta) D_X(N\alpha(Y, Z)) = \\
&= -\text{csc}^2 \theta [N(\nabla_X \alpha(Y, Z)) + n\sigma(X, \alpha(Y, Z)) - \sigma(X, T\alpha(Y, Z))],
\end{aligned}$$

de donde, en virtud de (0.3.8) y del Corolario 1.2.2:

$$\begin{aligned}
tD_X(\sigma(Y, Z)) &= \nabla_X \alpha(Y, Z) - \eta(\nabla_X \alpha(Y, Z))\xi + \\
&\quad + \text{csc}^2 \theta [T\alpha(X, \alpha(Y, Z)) + \alpha(X, T\alpha(Y, Z))]. \quad (3.1.25)
\end{aligned}$$

Ahora bien, de (0.3.10), se sigue que:

$$\eta(\nabla_X \alpha(Y, Z)) = g(\alpha(Y, Z), TX). \quad (3.1.26)$$

Así, de (3.1.24), (3.1.25) y (3.1.26), resulta la ecuación:

$$\begin{aligned}
&(\nabla_X \alpha)(Y, Z) - g(\alpha(Y, Z), TX)\xi + \\
&\quad + \text{csc}^2 \theta \{T\alpha(X, \alpha(Y, Z)) + \alpha(X, T\alpha(Y, Z))\} + \\
&+ (\text{sen}^2 \theta) \frac{c-1}{4} \{g(X, TY)(Z - \eta(Z)\xi) + g(X, TZ)(Y - \eta(Y)\xi) = \\
&\quad = (\nabla_Y \alpha)(X, Z) - g(\alpha(X, Z), TY)\xi + \\
&\quad + \text{csc}^2 \theta \{T\alpha(Y, \alpha(X, Z)) + \alpha(Y, T\alpha(X, Z))\} + \\
&+ (\text{sen}^2 \theta) \frac{c-1}{4} \{g(Y, TX)(Z - \eta(Z)\xi) + g(Y, TZ)(X - \eta(X)\xi). \quad (3.1.27)
\end{aligned}$$

Para concluir estos preliminares, observemos que, de (0.3.11), del Corolario 1.2.2 y de (3.1.5), se deduce claramente

$$\alpha(X, \xi) = \operatorname{sen}^2 \theta (X - \eta(X)\xi), \quad (3.1.28)$$

para todo  $X \in TM$ .

En la siguiente sección mostraremos cómo las ecuaciones (3.1.1), (3.1.2), (3.1.18), (3.1.22), (3.1.27) y (3.1.28) nos permiten obtener el Teorema de Existencia de inmersiones slant en un espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante.

## 3.2 Teorema de Existencia.

El objetivo de esta sección es probar el siguiente Teorema de Existencia para inmersiones slant.

**Teorema 3.2.1.**— (*Teorema de Existencia.*) Sean  $c$  y  $\theta$  dos constantes con  $0 < \theta \leq \pi/2$  y  $M$  una variedad Riemanniana simplemente conexa, de dimensión  $m + 1$ , con métrica  $g$ . Supongamos que existen un campo diferenciable global unitario  $\xi$  en  $M$ , un endomorfismo  $T$  del fibrado tangente  $TM$  y una forma bilineal simétrica  $\alpha$  en  $M$ , valuada en  $TM$ , tales que, para todo  $X, Y, Z, W \in TM$ , se verifican las ecuaciones:

$$T(\xi) = 0, \quad (3.2.1)$$

$$g(\alpha(X, Y), \xi) = 0, \quad (3.2.2)$$

$$\nabla_X \xi = -TX, \quad (3.2.3)$$

$$\alpha(X, \xi) = \operatorname{sen}^2 \theta (X - \eta(X)\xi), \quad (3.2.4)$$

$$T^2 X = -\cos^2 \theta (X - \eta(X)\xi), \quad (3.2.5)$$

$$g(TX, Y) + g(X, TY) = 0, \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned} g((\nabla_X T)Y, Z) &= g(\alpha(X, Y), Z) - g(\alpha(X, Z), Y) + \\ &+ g(X, Y)\eta(Z) - g(X, Z)\eta(Y), \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

$$\begin{aligned} R(X, Y; Z, W) &= \operatorname{csc}^2 \theta (g(\alpha(X, W), \alpha(Y, Z)) - g(\alpha(X, Z), \alpha(Y, W))) + \\ &+ \frac{c+3}{4} (g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)) + \frac{c-1}{4} (\eta(X)\eta(Z)g(Y, W) - \end{aligned}$$

$$-\eta(Y)\eta(Z)g(X, W) + \eta(Y)\eta(W)g(X, Z) - \eta(X)\eta(W)g(Y, Z) + \\ + g(TX, W)g(TY, Z) - g(TX, Z)g(TY, W) + 2g(X, TY)g(TZ, W)), \quad (3.2.8)$$

$$\begin{aligned} & (\nabla_X \alpha)(Y, Z) - g(\alpha(Y, Z), TX)\xi + \\ & + \csc^2 \theta \{T\alpha(X, \alpha(Y, Z)) + \alpha(X, T\alpha(Y, Z))\} + \\ & + (\sin^2 \theta) \frac{c-1}{4} \{g(X, TY)(Z - \eta(Z)\xi) + g(X, TZ)(Y - \eta(Y)\xi)\} = \\ & = (\nabla_Y \alpha)(X, Z) - g(\alpha(X, Z), TY)\xi + \\ & + \csc^2 \theta \{T\alpha(Y, \alpha(X, Z)) + \alpha(Y, T\alpha(X, Z))\} + \\ & + (\sin^2 \theta) \frac{c-1}{4} \{g(Y, TX)(Z - \eta(Z)\xi) + g(Y, TZ)(X - \eta(X)\xi)\}, \quad (3.2.9) \end{aligned}$$

donde  $\eta$  denota la 1-forma dual de  $\xi$ . Entonces, existe una inmersión slant con ángulo  $\theta$  de  $M$  en  $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$  cuya segunda forma fundamental  $\sigma$  viene dada por:

$$\sigma(X, Y) = \csc^2 \theta (T\alpha(X, Y) - \phi\alpha(X, Y)). \quad (3.2.10)$$

DEMOSTRACIÓN: Sean  $c, \theta, M, \xi, T$  y  $\alpha$  en las condiciones del enunciado. Denotemos por  $\mathcal{D}$  la distribución ortogonal a  $\xi$  en  $M$  y consideremos la suma de Whitney  $TM \oplus \mathcal{D}$ . Para cada  $X \in TM$ , identificaremos en lo sucesivo  $(X, 0)$  con  $X$ . En particular, identificaremos  $\hat{\xi} = (\xi, 0)$  con  $\xi$ . Además, denotaremos  $(0, Z)$  por  $Z^*$  para cada  $Z \in \mathcal{D}$ .

Sea  $\hat{g}$  la métrica producto en  $TM \oplus \mathcal{D}$ . Así, si llamamos  $\hat{\eta}$  a la 1-forma dual de  $\hat{\xi}$ , entonces

$$\hat{\eta}(X, Z) = \hat{g}((X, Z), (\xi, 0)) = g(X, \xi) = \eta(X),$$

para todo  $X \in TM$  y todo  $Z \in \mathcal{D}$ .

Sea  $\hat{\phi}$  el endomorfismo en  $TM \oplus \mathcal{D}$  definido por

$$\hat{\phi}(X, 0) = (TX, \sin \theta (X - \eta(X)\xi)), \quad (3.2.11)$$

para todo  $X \in TM$  y

$$\hat{\phi}(0, Z) = (-(\sin \theta)Z, -TZ), \quad (3.2.12)$$



para todo  $Z \in \mathcal{D}$ . Observemos que las expresiones anteriores tienen sentido pues se verifica trivialmente que  $X - \eta(X)\xi \in \mathcal{D}$  y, en virtud de las condiciones (3.2.1) y (3.2.6), se tiene también que  $\eta(TZ) = 0$ . Entonces, se verifica que

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}^2(X, 0) &= \widehat{\phi}(TX, \text{sen } \theta(X - \eta(X)\xi)) = \widehat{\phi}(TX, 0) + \text{sen } \theta \widehat{\phi}(0, X - \eta(X)\xi) = \\ &= (T^2X, \text{sen } \theta TX) + \text{sen } \theta(-\text{sen } \theta(X - \eta(X)\xi), -T(X - \eta(X)\xi)) = \\ &= (-\cos^2 \theta(X - \eta(X)\xi), \text{sen } \theta TX) + (-\text{sen }^2 \theta(X - \eta(X)\xi), -\text{sen } \theta TX) = \\ &= (-X + \eta(X)\xi, 0) = (-X, 0) + \eta(X)(\xi, 0) = -(X, 0) + \widehat{\eta}(X, 0)\widehat{\xi},\end{aligned}$$

donde hemos empleado la condición (3.2.5). Análogamente

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}^2(0, Z) &= \widehat{\phi}(-\text{sen } \theta Z, -TZ) = -\text{sen } \theta \widehat{\phi}(Z, 0) - \widehat{\phi}(0, TZ) = \\ &= -\text{sen } \theta(TZ, \text{sen } \theta Z) - (-\text{sen } \theta TZ, -T^2Z) = \\ &= (-\text{sen } \theta TZ, -\text{sen }^2 \theta Z) + (\text{sen } \theta TZ, -\cos^2 \theta Z) = -(0, Z),\end{aligned}$$

pues  $Z \in \mathcal{D}$ . Así:

$$\widehat{\phi}^2(X, Z) = -(X, Z) + \widehat{\eta}(X, Z)\widehat{\xi}. \quad (3.2.13)$$

Sean ahora  $X_1, X_2 \in TM$  y  $Z_1, Z_2 \in \mathcal{D}$ . Entonces,

$$\widehat{g}((X_1, Z_1), (X_2, Z_2)) = g(X_1, X_2) + g(Z_1, Z_2), \quad (3.2.14)$$

por definición de la métrica producto. En virtud de (3.2.11) y (3.2.12), se tiene

$$\widehat{\phi}(X_i, Z_i) = (TX_i - \text{sen } \theta Z_i, \text{sen } \theta(X_i - \eta(X_i)\xi) - TZ_i),$$

para  $i = 1, 2$ , de donde:

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\widehat{\phi}(X_1, Z_1), \widehat{\phi}(X_2, Z_2)) &= g(TX_1 - \text{sen } \theta Z_1, TX_2 - \text{sen } \theta Z_2) + \\ &+ g(\text{sen } \theta(X_1 - \eta(X_1)\xi) - TZ_1, \text{sen } \theta(X_2 - \eta(X_2)\xi) - TZ_2) = g(TX_1, TX_2) + \\ &+ g(TZ_1, TZ_2) + \text{sen }^2 \theta(g(X_1, X_2) + g(Z_1, Z_2) - \eta(X_1)\eta(X_2)).\end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Pero, en virtud de (3.2.5) y (3.2.6), se tiene

$$g(TX_1, TX_2) = -g(X_1, T^2X_2) = \cos^2 \theta(g(X_1, X_2) - \eta(X_1)\eta(X_2))$$

y, análogamente,

$$g(TZ_1, TZ_2) = \cos^2 \theta g(Z_1, Z_2),$$

de donde, junto con (3.2.14) y (3.2.15), resulta que:

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\widehat{\phi}(X_1, Z_1), \widehat{\phi}(X_2, Z_2)) &= \widehat{g}((X_1, Z_1), (X_2, Z_2)) - \eta(X_1)\eta(X_2) = \\ &= \widehat{g}((X_1, Z_1), (X_2, Z_2)) - \widehat{\eta}(X_1, Z_1)\widehat{\eta}(X_2, Z_2). \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Así, (3.2.13) y (3.2.16) implican que  $(\widehat{\phi}, \widehat{g}, \widehat{\xi}, \widehat{\eta})$  es una estructura casi-contacto métrica en  $TM \oplus \mathcal{D}$ .

Definimos ahora  $A$ ,  $\sigma$  y  $D$  mediante las expresiones

$$A_{Z^*}X = \csc \theta \{(\nabla_X T)Z - \alpha(X, Z) - g(X, Z)\xi\}, \quad (3.2.17)$$

$$\sigma(X, Y) = -(\csc \theta)\alpha^*(X, Y), \quad (3.2.18)$$

$$D_X Z^* = (\nabla_X Z - \eta(\nabla_X Z)\xi)^* + \csc^2 \theta \{(T\alpha(X, Z))^* + \alpha^*(X, TZ)\}, \quad (3.2.19)$$

para cualesquiera campos vectoriales  $X, Y \in TM$  y  $Z \in \mathcal{D}$ .<sup>1</sup> Es fácil probar que cada  $A_{Z^*}$  es un endomorfismo en  $TM$ ,  $\sigma$  es una forma bilineal simétrica en  $TM$  valuada en  $(\mathcal{D})^*$  y  $D$  es una conexión métrica del fibrado vectorial  $(\mathcal{D})^*$  sobre  $M$ . Denotemos por  $\widehat{\nabla}$  la conexión en  $TM \oplus \mathcal{D}$  inducida por las fórmulas (3.2.17)–(3.2.19). Así, para todos  $X, Y \in TM$  y todo  $Z \in \mathcal{D}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_{(X,0)}(Y, Z) &= (\nabla_X Y, 0) + \sigma((X, 0), (Y, 0)) - A_{(0,Z)}(X, 0) + D_{(X,0)}(0, Z) = \\ &= (\nabla_X Y - \csc \theta \{(\nabla_X T)Z - \alpha(X, Z) - g(X, Z)\xi\}, 0) + (0, -(\csc \theta)\alpha(X, Y)) + \\ &\quad + (0, \nabla_X Z - \eta(\nabla_X Z)\xi + \csc^2 \theta \{T\alpha(X, Z) + \alpha(X, TZ)\}). \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Entonces, en virtud de (3.2.11), (3.2.12) y (3.2.20), calculamos, para todos  $X, Y \in TM$ :

$$\begin{aligned} (\widehat{\nabla}_{(X,0)}\widehat{\phi})(Y, 0) &= \widehat{\nabla}_{(X,0)}\widehat{\phi}(Y, 0) - \widehat{\phi}\widehat{\nabla}_{(X,0)}(Y, 0) = \\ &= \widehat{\nabla}_{(X,0)}(TY, \text{sen } \theta(Y - \eta(Y)\xi)) - \widehat{\phi}(\nabla_X Y, -(\csc \theta)\alpha(X, Y)) = \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Obsérvese que las ecuaciones (3.2.17)–(3.2.19) no se introducen de manera arbitraria. Estas expresiones son, formalmente, análogas a (3.1.19), (3.1.15) y (3.1.20), respectivamente.

$$\begin{aligned}
&= (\nabla_X TY - (\nabla_X T)(Y - \eta(Y)\xi) + \alpha(X, Y - \eta(Y)\xi) + g(X, Y - \eta(Y)\xi)\xi, 0) + \\
&+ (0, -(\csc \theta)\alpha(X, TY) + \sen \theta \nabla_X(Y - \eta(Y)\xi) - \sen \theta \eta(\nabla_X(Y - \eta(Y)\xi))\xi) + \\
&\quad + (0, \csc^2 \theta \{T\alpha(X, \sen \theta(Y - \eta(Y)\xi)) + \alpha(X, \sen \theta T(Y - \eta(Y)\xi))\}) - \\
&- (T\nabla_X Y, \sen \theta(\nabla_X Y - \eta(\nabla_X Y)\xi)) + \csc \theta(-\sen \theta \alpha(X, Y), -T\alpha(X, Y)) = \\
&= (-\eta(Y)T\nabla_X \xi - \eta(Y)\alpha(X, \xi) + g(X, Y)\xi - \eta(X)\eta(Y)\xi, 0) + \\
&\quad + (0, -\sen \theta \eta(Y)\nabla_X \xi + \sen \theta \eta(Y)\eta(\nabla_X \xi)\xi - \csc \theta \eta(Y)T\alpha(X, \xi)).
\end{aligned}$$

Ahora bien, (3.2.3)–(3.2.5) implican que

$$\begin{aligned}
(\widehat{\nabla}_{(X,0)}\widehat{\phi})(Y, 0) &= (-\eta(Y)\cos^2 \theta(X - \eta(X)\xi) - \eta(Y)\sen^2 \theta(X - \eta(X)\xi), 0) + \\
&\quad + (g(X, Y)\xi - \eta(X)\eta(Y)\xi, 0) = (g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, 0),
\end{aligned}$$

de donde se deduce:

$$(\widehat{\nabla}_{(X,0)}\widehat{\phi})(Y, 0) = \widehat{g}((X, 0), (Y, 0))\widehat{\xi} - \widehat{\eta}(Y, 0)(X, 0). \quad (3.2.21)$$

Análogamente, se puede calcular sin mayor dificultad

$$(\widehat{\nabla}_{(X,0)}\widehat{\phi})(0, Z) = \widehat{g}((X, 0), (0, Z))\widehat{\xi} - \widehat{\eta}(0, Z)(X, 0) = 0, \quad (3.2.22)$$

para todo  $X \in TM$  y todo  $Z \in \mathcal{D}$ .

Denotemos por  $R^D$  el tensor de curvatura asociado a la conexión  $D$  en  $(\mathcal{D})^*$ , es decir,

$$R^D(X, Y)Z^* = D_X D_Y Z^* - D_Y D_X Z^* - D_{[X, Y]}Z^*, \quad (3.2.23)$$

para todos  $X, Y \in TM$  y todo  $Z \in \mathcal{D}$ . De (3.2.19), se tiene, empleando las condiciones (3.2.1)–(3.2.6):

$$\begin{aligned}
D_X D_Y Z^* &= (\nabla_X \nabla_Y Z - \eta(\nabla_X \nabla_Y Z)\xi + \eta(\nabla_Y Z)TX)^* + \\
&+ \{\csc^2 \theta [T\alpha(X, \nabla_Y Z) - \eta(\nabla_Y Z)\sen^2 \theta TX + \alpha(X, T\nabla_Y Z) + \\
&+ \nabla_X T\alpha(Y, Z) - \eta(\nabla_X T\alpha(Y, Z))\xi + \csc^2 \theta T\alpha(X, T\alpha(Y, Z)) - \\
&- \csc^2 \theta \cos^2 \theta \alpha(X, \alpha(Y, Z)) + \nabla_X \alpha(Y, TZ) - \eta(\nabla_X \alpha(Y, TZ))\xi + \\
&+ \csc^2 \theta T\alpha(X, \alpha(Y, TZ)) + \csc^2 \theta \alpha(X, T\alpha(Y, TZ))\}\xi^*. \quad (3.2.24)
\end{aligned}$$

Por otra parte, aplicando  $T$  en (3.2.9) se deduce:

$$\begin{aligned}
& T\alpha(X, \nabla_Y Z) + \csc^2 \theta T\alpha(X, T\alpha(Y, Z)) - \csc^2 \theta \cos^2 \theta \alpha(X, \alpha(Y, Z)) - \\
& - T\alpha(Y, \nabla_X Z) - \csc^2 \theta T\alpha(Y, T\alpha(X, Z)) + \csc^2 \theta \cos^2 \theta \alpha(Y, \alpha(X, Z)) = \\
& = T\alpha(\nabla_X Y, Z) - T\alpha(\nabla_Y X, Z) - T\nabla_X \alpha(Y, Z) + T\nabla_Y \alpha(X, Z) + \\
& + \operatorname{sen}^2 \theta \frac{c-1}{4} \{g(Y, TZ)TX - g(X, TZ)TY - 2g(X, TY)TZ\}. \quad (3.2.25)
\end{aligned}$$

Así, a partir de (3.2.19) y (3.2.23)–(3.2.25), puede comprobarse, mediante un simple pero laborioso cálculo, que:

$$\begin{aligned}
R^D(X, Y)Z^* &= (R(X, Y)Z - \eta(R(X, Y)Z)\xi)^* + \\
& + \left\{ \frac{c-1}{4} T[g(Y, TZ)X - g(X, TZ)Y - 2g(X, TY)Z] + \right. \\
& + \frac{c-1}{4} [g(Y, T^2 Z)(X - \eta(X)\xi) - g(X, T^2 Z)(Y - \eta(Y)\xi) - 2g(X, TY)TZ] + \\
& + \csc^2 \theta [(\nabla_X T)\alpha(Y, Z) - (\nabla_Y T)\alpha(X, Z) - \eta(\nabla_X T\alpha(Y, Z))\xi + \\
& + \eta(\nabla_Y T\alpha(X, Z))\xi - \alpha(X, (\nabla_Y T)Z) + \alpha(Y, (\nabla_X T)Z)] \}^*. \quad (3.2.26)
\end{aligned}$$

A partir de (3.2.26), es fácil comprobar, aplicando (3.2.5) y (3.2.8):

$$\begin{aligned}
g(R^D(X, Y)Z^*, W^*) &= \csc^2 \theta \{g((\nabla_X T)\alpha(Y, Z), W) - \\
& - g((\nabla_Y T)\alpha(X, Z), W) - g(\alpha(X, (\nabla_Y T)Z), W) + \\
& + g(\alpha(Y, (\nabla_X T)Z), W) + g(\alpha(X, W), \alpha(Y, Z)) - g(\alpha(X, Z), \alpha(Y, W))\} + \\
& + \frac{c+3}{4} \{g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)\} + \\
& + \frac{c-1}{4} \{-\cos^2 \theta g(X, W)g(Y, Z) + \cos^2 \theta g(X, Z)g(Y, W) - \\
& - 2g(X, TY)g(TZ, W)\}. \quad (3.2.27)
\end{aligned}$$

para todos  $X, Y \in TM$  y todos  $Z, W \in \mathcal{D}$ .

Empleando las ecuaciones (3.2.7), (3.2.17) y (3.2.18), obtenemos, para  $X, Y \in TM$  y  $Z \in \mathcal{D}$ , la expresión

$$\hat{g}(A_{Z^*} X, Y) = \csc \theta \{g(\nabla_X T)Z, Y\} - g(\alpha(X, Z).Y) - g(X, Z)\eta(Y) =$$

$$= -\csc \theta g(\alpha(X, Y), Z) = \hat{g}(-\csc \theta \alpha^*(X, Y), Z^*),$$

es decir,

$$\hat{g}(A_{Z^*}X, Y) = \hat{g}(\sigma(X, Y), W^*), \quad (3.2.28)$$

ecuación análoga a la conocida fórmula que relaciona el operador de Weingarten con la segunda forma fundamental.

Entonces, de (3.2.18) y (3.2.28) se deduce que, para  $X, Y \in TM$  y  $Z, W \in \mathcal{D}$ ,

$$g(A_{Z^*}A_{W^*}X, Y) - g(A_{W^*}A_{Z^*}X, Y) = \hat{g}(\sigma(A_{W^*}X, Y), Z^*) - \hat{g}(\sigma(A_{Z^*}X, Y), W^*) = \csc \theta \{-g(\alpha(A_{W^*}X, Y), Z) + g(\alpha(A_{Z^*}X, Y), W)\},$$

lo cual, en virtud de (3.2.2), (3.2.7), (3.2.17) y mediante un cálculo directo puede verse en la forma:

$$\begin{aligned} & \csc^2 \theta \{-g(\nabla_Y T \{(\nabla_X T)W - \alpha(X, W)\}, Z) + \\ & + g(T\nabla_Y \{(\nabla_X T)W - \alpha(X, W) - g(X, W)\xi\}, Z) - g(\alpha(Y, Z), (\nabla_X T)W) + \\ & + g(\alpha(Y, Z), \alpha(X, W)) - \eta((\nabla_X T)W)g(Y, Z) + g(X, W)g(Y, Z) + \\ & + g(\nabla_Y T \{(\nabla_X T)Z - \alpha(X, Z)\}, W) - \\ & - g(T\nabla_Y \{(\nabla_X T)Z - \alpha(X, Z) - g(X, Z)\xi\}, W) + g(\alpha(Y, W), (\nabla_X T)Z) + \\ & + g(\alpha(Y, W), \alpha(X, Z)) - \eta((\nabla_X T)Z)g(Y, W) + g(X, Z)g(Y, W)\}. \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Ahora bien, pueden probarse sin dificultad:

$$\begin{aligned} & g(\nabla_Y T \{(\nabla_X T)Z - \alpha(X, Z)\}, W) - \\ & - g(T\nabla_Y \{(\nabla_X T)Z - \alpha(X, Z) - g(X, Z)\xi\}, W) = -g((\nabla_X T)Z, (\nabla_Y T)W) + \\ & + g(\alpha(X, Z), (\nabla_Y T)W) + g(X, Z)\eta(\nabla_Y TW), \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

$$\eta((\nabla_X T)Z) = \eta(\nabla_X TZ) = g(TZ, TX) = \cos^2 \theta g(Z, X). \quad (3.2.31)$$

Así, de (3.2.29)-(3.2.31), se obtiene:

$$\begin{aligned} & \sin^2 \theta g([A_{Z^*}, A_{W^*}]X, Y) = \\ & = g((\nabla_Y T)Z, (\nabla_X T)W) - g((\nabla_X T)Z, (\nabla_Y T)W) + g((\nabla_X T)Z, \alpha(Y, W)) + \\ & + g((\nabla_Y T)W, \alpha(X, Z)) - g((\nabla_Y T)Z, \alpha(X, W)) - g((\nabla_X T)W, \alpha(Y, Z)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +g(\alpha(X, W), \alpha(Y, Z)) - g(\alpha(X, Z), \alpha(Y, W)) + \\
& + (1 - 2 \cos^2 \theta)(g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)). \quad (3.2.32)
\end{aligned}$$

De (3.2.6) se deduce directamente que:

$$g(\alpha(Y, Z), TW) + g(T\alpha(Y, Z), W) = 0. \quad (3.2.33)$$

Calculando la derivada de (3.2.33) respecto a  $X$  se tiene, en virtud de (3.2.6), la siguiente igualdad:

$$g(\alpha(Y, Z), (\nabla_X T)W) + g((\nabla_X T)\alpha(Y, Z), W) = 0. \quad (3.2.34)$$

Además, (3.2.7) y (3.2.31) implican:

$$\begin{aligned}
& g((\nabla_X T)Z, (\nabla_Y T)W) = g(\alpha(Y, W), (\nabla_X T)Z) - \\
& - g(\alpha(Y, (\nabla_X T)Z), W) + \cos^2 \theta g(X, Z)g(Y, W). \quad (3.2.35)
\end{aligned}$$

Entonces, aplicando (3.2.27), (3.2.32), (3.2.34)-(3.2.35) y un cálculo directo, obtenemos:

$$\begin{aligned}
& g(R^D(X, Y)Z^*, W^*) - g([A_{Z^*}, A_{W^*}]X, Y) = \\
& = \frac{c+3}{4} \{g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)\} + \\
& + \frac{c-1}{4} \{-\cos^2 \theta g(X, W)g(Y, Z) + \cos^2 \theta g(X, Z)g(Y, W) - \\
& - 2g(X, TY)g(TZ, W)\} - g(X, W)g(Y, Z) + g(X, Z)g(Y, W) = \\
& = \frac{c-1}{4} \{\sin^2 \theta (g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)) - \\
& - 2g(X, TY)g(TZ, W)\}. \quad (3.2.36)
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (3.1.4) y (3.2.36) implican que  $(M, A, D)$  satisface la ecuación de Ricci (0.1.9) de una subvariedad  $\theta$ -slant de dimensión  $m+1$  en  $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$ . Además, (3.2.8) y (3.2.9) implican que  $(M, \sigma)$  satisface las ecuaciones de Gauss y Codazzi de una subvariedad  $\theta$ -slant en  $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$ . Así, el fibrado vectorial  $TM \oplus \mathcal{D}$  sobre  $M$  dotado de la métrica producto, el operador  $A$ , la segunda forma fundamental  $\sigma$  y las conexiones  $D$  y  $\widehat{\nabla}$  satisface las ecuaciones de estructura de una subvariedad  $\theta$ -slant de dimensión  $m+1$  en  $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$ . Por lo tanto, aplicando un resultado de [47] (o por el Teorema 1 de [22]), podemos afirmar que existe una inmersión slant con ángulo  $\theta$  de  $M$  en  $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$  con (3.2.10) como segunda forma fundamental,  $A$  como operador de Weingarten y  $D$  como conexión normal.  $\square$

### 3.3 Teorema de Unicidad.

El siguiente resultado nos proporciona condiciones suficientes para asegurar la unicidad de una inmersión slant.

**Teorema 3.3.1.**— (Teorema de Unicidad.) Sean  $x^1, x^2 : M \rightarrow \widetilde{M}^{2m+1}(c)$  dos inmersiones slant, con ángulo  $\theta$  ( $0 < \theta \leq \pi/2$ ), de una variedad Riemanniana conexas  $M$ , de dimensión  $m+1$ , en el espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante  $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$ . Denotemos por  $\sigma^1$  y  $\sigma^2$  las segundas formas fundamentales de  $x^1$  y  $x^2$  respectivamente. Supongamos que existe un campo  $\bar{\xi} \in \chi(M)$  tal que

$$x_{*p}^i(\bar{\xi}_p) = \xi_{x^i(p)}, \quad (3.3.1)$$

para  $i = 1, 2$  y para todo  $p \in M$  y que

$$g(\sigma^1(X, Y), \phi x_*^1 Z) = g(\sigma^2(X, Y), \phi x_*^2 Z), \quad (3.3.2)$$

para cualesquiera campos vectoriales  $X, Y, Z$  tangentes a  $M$ . Supongamos que, además, se verifica una de las condiciones siguientes:

- (i)  $\theta = \pi/2$ ,
- (ii) existe un punto  $p$  de  $M$  tal que  $T_1 = T_2$  en  $p$ ,
- (iii)  $c \neq 1$ ,
- (iv)  $m = 2$ .

Entonces, existe una isometría  $\varphi$  de  $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$  tal que  $x^1 = \varphi \circ x^2$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Sea  $p$  un punto cualquiera de  $M$ . Podemos suponer que  $x^1(p) = x^2(p)$  y que  $x_*^1(p) = x_*^2(p)$ . En caso contrario, bastaría aplicar una isometría de  $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$  para estar en esta situación. Tomemos entonces una geodésica  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = p$ . Es suficiente probar que  $\gamma_1 = x^1(\gamma)$  y  $\gamma_2 = x^2(\gamma)$  coinciden. Sabemos ya que  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$  y que  $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$ .

Sea  $e_1, \dots, e_m, \bar{\xi}$  una referencia ortonormal a lo largo de  $\gamma$ . Podemos definir una referencia ortonormal a lo largo de  $\gamma_1$  y de  $\gamma_2$  como sigue. Tomemos, para cada  $i = 1, \dots, m$ ,

$$\begin{aligned} A_i &= x_*^1(e_i), & B_i &= x_*^2(e_i), \\ A_{m+i} &= (x_*^1(e_i))^*, & B_{m+i} &= (x_*^2(e_i))^*, \\ A_{2m+1} &= x_*^1(\bar{\xi}), & B_{2m+1} &= x_*^2(\bar{\xi}), \end{aligned}$$

estando  $X^*$  definido por (3.1.3). Dado que, en virtud de (3.1.15),  $\sigma^i = -\csc \theta(\alpha^i)^*$ ,  $i = 1, 2$ , la condición (3.3.2) implica que  $\alpha^1 = \alpha^2$ , lo que a su vez implica que  $T_1 = T_2$ . Veamos con detalle este último paso, adaptando la demostración del caso Kaehleriano presentada por Chen y Vrancken en [16].

Si se verifica la condición (i), el paso anterior es obvio, pues entonces  $T_1 = T_2 = 0$ .

Por otra parte, en virtud de (3.2.7), se tiene que, para todos  $X, Y, Z \in TM$ ,

$$g((\nabla_X T_1)Y, Z) = g((\nabla_X T_2)Y, Z),$$

pues  $\alpha^1 = \alpha^2$ , lo cual implica que:

$$(\nabla_X(T_1 - T_2))Y = 0.$$

Así, si se verifica la condición (ii), se sigue de aquí que  $T_1$  y  $T_2$  han de coincidir en todos los puntos.

Supongamos ahora que se verifica la condición (iii). Podemos suponer también que  $\theta \neq \pi/2$ , pues, si no, estaríamos de nuevo en el caso (i) y habríamos terminado.

Como  $c \neq 1$ , se deduce directamente de (3.2.8) que

$$\begin{aligned} &g(T_1 X, W)g(T_1 Y, Z) - g(T_1 X, Z)g(T_1 Y, W) + \\ &+ 2g(X, T_1 Y)g(T_1 Z, W) = g(T_2 X, W)g(T_2 Y, Z) - \\ &- g(T_2 X, Z)g(T_2 Y, W) + 2g(X, T_2 Y)g(T_2 Z, W), \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

para todos  $X, Y, Z, W \in TM$ . Tomando  $X = W$  e  $Y = Z$  en (3.3.3), se tiene:

$$g^2(X, T_1 Y) = g^2(X, T_2 Y). \quad (3.3.4)$$

Sean ahora  $e_1 = X$  y  $e_2 = T_1 X$  y supongamos que  $T_2 e_1$  tuviera una componente en la dirección de un vector  $e_3$ , que fuera ortogonal tanto a  $e_1$  como a  $e_2$ . Entonces, se produce una contradicción con (3.3.4), pues:

$$g^2(T_2 e_1, e_3) = g^2(T_1 e_1, e_3) = g^2(e_2, e_3) = 0.$$

Así, aplicando (3.2.1), (3.2.5) y (3.2.6), deducimos que  $T_1 v = \pm T_2 v$  para cada vector tangente  $v$ .

Elegimos ahora una base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_m, \xi\}$  del espacio tangente en un punto  $p$ . Siguiendo el razonamiento anterior, podemos afirmar que



existen números  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$  tales que  $T_1 e_i = \varepsilon_i T_2 e_i$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ . Tenemos también que:

$$\pm T_1(e_i + e_j) = T_2(e_i + e_j) = \varepsilon_i T_1 e_i + \varepsilon_j T_1 e_j.$$

Esta fórmula prueba que todos los  $\varepsilon_i$  han de ser iguales. Como, además,  $T_1 \xi = T_2 \xi = 0$ , se verifica que  $T_1 v = T_2 v$  para todo  $v \in T_p M$ , o que  $T_1 v = -T_2 v$  para todo  $v \in T_p M$ . Dado que  $M$  es conexa, esto implica que  $T_1 = T_2$  o que  $T_1 = -T_2$ . En el primer caso, habríamos acabado. Supongamos pues que  $T_1 = -T_2$ .

Como  $\alpha^1 = \alpha^2 = \alpha$ , de (3.2.7) se sigue que

$$g(\alpha(X, Y), Z) = g(\alpha(X, Z), Y) - g(X, Y)\eta(Z) + g(X, Z)\eta(Y), \quad (3.3.5)$$

para todos  $X, Y, Z \in TM$ .

Denotemos  $T_1 = T$ . Reescribiendo la ecuación (3.2.9) para ambas inmersiones y usando el hecho de que  $T_2 = -T_1 = -T$ , deducimos:

$$\begin{aligned} & g(\alpha(X, Z), TY)\xi - g(\alpha(Y, Z), TX)\xi + \csc^2 \theta \{T\alpha(X, \alpha(Y, Z)) - \\ & - T\alpha(Y, \alpha(X, Z)) + \alpha(X, T\alpha(Y, Z)) - \alpha(Y, T\alpha(X, Z))\} + \\ & + (\sin^2 \theta) \frac{c-1}{4} \{g(X, TZ)(Y - \eta(Y)\xi) - g(Y, TZ)(X - \eta(X)\xi) + \\ & + 2g(X, TY)(Z - \eta(Z)\xi)\} = 0. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Por otra parte, en virtud de (3.2.1), (3.2.2), (3.2.6) y (3.3.5), se tiene

$$\begin{aligned} g(T\alpha(X, \alpha(Y, Z)), W) &= -g(\alpha(X, \alpha(Y, Z)), TW) = \\ &= -g(\alpha(X, TW), \alpha(Y, Z)), \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

mientras que:

$$\begin{aligned} g(\alpha(X, T\alpha(Y, Z)), W) &= \\ &= g(\alpha(X, W), T\alpha(Y, Z)) - g(X, T\alpha(Y, Z))\eta(W). \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Así, tomando el producto escalar de (3.3.6) por un vector  $W$ , en virtud de (3.3.7)–(3.3.8) resulta:

$$\eta(W)g(\alpha(X, Z), TY) - \eta(W)g(\alpha(Y, Z), TX) +$$

$$\begin{aligned}
& + \csc^2 \theta \{ -g(\alpha(X, TW), \alpha(Y, Z)) + g(\alpha(Y, TW), \alpha(X, Z)) + \\
& \quad + g(\alpha(X, W), T\alpha(Y, Z)) + g(\alpha(Y, Z), TX)\eta(W) - \\
& \quad - g(\alpha(Y, W), T\alpha(X, Z)) - g(\alpha(X, Z), TY)\eta(W) \} + \\
& + \operatorname{sen}^2 \theta \frac{c-1}{4} \{ g(X, TZ)g(Y, W) - g(X, TZ)\eta(Y)\eta(W) - \\
& \quad - g(Y, TZ)g(X, W) + g(Y, TZ)\eta(X)\eta(W) + \\
& + 2g(X, TY)g(Z, W) - 2g(X, TY)\eta(Z)\eta(W) \} = 0. \quad (3.3.9)
\end{aligned}$$

Si  $\alpha$  se anulara idénticamente, entonces, como estamos suponiendo que  $c \neq 1$ , llegaríamos a una contradicción con (3.3.9). Consideremos ahora un punto  $p$  de  $M$  donde  $\alpha$  no se anule. Denotemos por  $UM_p$  el conjunto de todos los vectores tangentes en  $p$  unitarios. Definimos en  $UM_p$  la función:

$$f(v) = g(\alpha(v, v), v).$$

Se sabe que el conjunto  $UM_p$  es compacto. Llamaremos  $UD_p$  al conjunto de los vectores de  $\mathcal{D}_p$  unitarios, es decir,

$$UD_p = \mathcal{D}_p \cap UM_p.$$

Como

$$\mathcal{D}_p = g_{\xi_p}^{-1}\{0\},$$

siendo  $g_{\xi_p} = g(\cdot, \xi_p)$ , se tiene que  $\mathcal{D}_p$  es un cerrado en  $T_pM$ , de donde se sigue que  $UD_p$  es cerrado en  $UM_p$  y, por tanto, compacto. Así, existe un vector  $u \in \mathcal{D}_p$  tal que  $f|_{\mathcal{D}_p}$  alcanza un máximo absoluto en el vector  $u$ . Sea  $w$  un vector unitario de  $\mathcal{D}_p$  ortogonal a  $u$ . Entonces, la función

$$g(t) = f(\cos t u + \operatorname{sen} t w)$$

verifica que  $g'(0) = 0$  y  $g''(0) \leq 0$ . Puede verse que, en virtud de (3.3.5), la primera condición implica

$$g(\alpha(u, u), w) = 0,$$

mientras que la segunda se reduce a:

$$g(\alpha(u, w), w) \leq \frac{1}{2}g(\alpha(u, u), u).$$

Usando la simetría de  $\alpha$ , se sigue entonces que podemos elegir una base ortonormal  $\{e_1 = u, e_2, \dots, e_m\}$  de  $\mathcal{D}_p$  tal que

$$\begin{aligned}\alpha(e_1, e_1) &= \lambda_1 e_1, \\ \alpha(e_1, e_i) &= \lambda_i e_i, \quad i > 1,\end{aligned}$$

con  $\lambda_i \leq 1/2\lambda_1$  y  $\lambda_1 > 0$ .

Aplicando ahora (3.3.9) con  $X = Z = W = e_1$  e  $Y = e_i$ , tenemos:

$$\begin{aligned}3 \operatorname{sen}^4 \theta \frac{c-1}{4} g(Te_1, e_i) &= -\lambda_i g(\alpha(e_1, Te_1), e_i) + \\ + \lambda_1 g(\alpha(e_i, Te_1), e_1) + \lambda_1 g(e_1, T\alpha(e_1, e_i)) - \lambda_1 \lambda_i g(e_i, Te_1) &= \\ = g(Te_1, e_i)(-\lambda_i^2 - \lambda_1 \lambda_i).\end{aligned}$$

Así,

$$g(Te_1, e_i)(\lambda_i^2 + \lambda_i \lambda_1 + 3 \frac{c-1}{4} \operatorname{sen}^4 \theta) = 0. \quad (3.3.10)$$

Vamos a probar a continuación que  $Te_1$  es un autovector de  $\alpha(e_1, \cdot)$ . Para ello, aplicamos de nuevo (3.3.9). En primer lugar, tomamos  $X = Z = e_1$ ,  $Y = e_i$  y  $Z = e_j$ . Entonces, se tiene:

$$(-\lambda_i^2 + \lambda_1 \lambda_i - \lambda_i \lambda_j) g(Te_j, e_i) - \lambda_1 g(\alpha(e_i, e_j), Te_1) = 0. \quad (3.3.11)$$

Intercambiando los índices  $i$  y  $j$  en (3.3.11), obtenemos también:

$$(-\lambda_j^2 + \lambda_1 \lambda_j - \lambda_i \lambda_j) g(Te_j, e_i) + \lambda_1 g(\alpha(e_i, e_j), Te_1) = 0. \quad (3.3.12)$$

Sumando (3.3.11) y (3.3.12), se deduce:

$$g(Te_j, e_i)(\lambda_i + \lambda_j)(\lambda_1 - \lambda_i - \lambda_j) = 0. \quad (3.3.13)$$

Observemos que, como  $\lambda_1 \geq 2\lambda_i$ , el tercer término de (3.3.13) sólo puede anularse si  $\lambda_i = \lambda_j = 1/2\lambda_1$ .

Si ponemos  $X = e_1$ ,  $Z = e_j$ ,  $Y = e_i$  y  $W = e_1$  en (3.3.9), tenemos:

$$\begin{aligned}-g(\alpha(e_i, e_j), \alpha(e_1, Te_1)) + \lambda_j g(\alpha(e_i, e_j), Te_1) - \lambda_1 g(\alpha(e_i, e_j), Te_1) - \\ - \lambda_i \lambda_j g(Te_j, e_i) - \frac{c-1}{4} \operatorname{sen}^4 \theta g(Te_j, e_i) = 0.\end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Intercambiando los índices  $i$  y  $j$  en (3.3.14):

$$\begin{aligned}
 & -g(\alpha(e_i, e_j), \alpha(e_1, Te_1)) + \lambda_i g(\alpha(e_i, e_j), Te_1) - \lambda_1 g(\alpha(e_i, e_j), Te_1) + \\
 & + \lambda_i \lambda_j g(Te_j, e_i) + \frac{c-1}{4} \text{sen}^4 \theta g(Te_j, e_i) = 0. \quad (3.3.15)
 \end{aligned}$$

Restando (3.3.14) y (3.3.15), vemos que:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_j - \lambda_i)g(\alpha(e_i, e_j), Te_1) - 2\lambda_i \lambda_j g(Te_j, e_i) - \\
 & - 2\frac{c-1}{4} \text{sen}^4 \theta g(Te_j, e_i) = 0. \quad (3.3.16)
 \end{aligned}$$

Vamos a combinar de modo correcto las ecuaciones anteriores. En primer lugar, tomando  $i = j$  en (3.3.11), tenemos que  $g(\alpha(e_i, e_i), Te_1) = 0$ . Así, si  $v$  es un autovector de  $\alpha(e_1, \cdot)$ , se verifica:

$$g(\alpha(v, v), Te_1) = 0. \quad (3.3.17)$$

Entonces, si  $\lambda_i = \lambda_j$ , como  $e_i + e_j$  sería un autovalor de  $\alpha(e_1, \cdot)$ , (3.3.17) implica:

$$g(\alpha(e_i, e_j), Te_1) = 0.$$

Consideramos los siguientes casos:

- (a) Si no se verifica que  $\lambda_i = \lambda_j = 1/2\lambda_1$  y  $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ , entonces (3.3.13) implica claramente que  $g(Te_i, e_j) = 0$ .
- (b) Supongamos que  $\lambda_i + \lambda_j = 0$ ,  $\lambda_i \neq 0$ . En este caso, (3.3.11) implica que  $g(\alpha(e_i, e_j), Te_1) = \lambda_i g(Te_j, e_i)$ . Sustituyendo esto en (3.3.16), se tiene que

$$\frac{c-1}{2} \text{sen}^4 \theta g(Te_j, e_i) = 0$$

y así,  $g(Te_j, e_i) = 0$ .

- (c) Si  $\lambda_i = \lambda_j = 0$ , se sigue de (3.3.16) que  $g(Te_i, e_j) = 0$ .
- (d) Tenemos que  $\lambda_i = \lambda_j = 1/2\lambda_1$ .

Supongamos que existiera un autovector no nulo  $v$  asociado a un autovalor distinto de  $1/2\lambda_1$ . Aplicando la discusión anterior, se sigue que  $Tv$  sólo puede tener una componente en la dirección de  $e_1$ , es decir,

$$Tv = \mu e_1,$$

de donde, aplicando  $T$ :

$$Te_1 = -\frac{1}{\mu}v.$$

Esto implica que  $Te_1$  es un autovector. En caso contrario, es decir, si no existe ningún autovector asociado a un autovalor distinto de  $1/2\lambda_1$ , entonces  $\alpha(e_1, \cdot)$  restringido al espacio  $\langle e_1 \rangle^\perp$  sólo puede tener el autovalor  $1/2\lambda_1$ . Como  $Te_1$  es siempre ortogonal a  $e_1$ ,  $Te_1$  habrá de ser también en este caso un autovector. Así,  $Te_1$  es un autovector de  $\alpha(e_1, \cdot)$ . Podemos suponer que  $e_2$  está en la dirección de  $Te_1$ . Entonces,

$$\alpha(e_1, Te_1) = \lambda_2 Te_1,$$

donde, en virtud de (3.3.10),  $\lambda_2$  verifica la ecuación:

$$\lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2 + 3 \frac{c-1}{4} \operatorname{sen}^4 \theta = 0. \quad (3.3.18)$$

Sea  $e_i$  ortogonal tanto a  $e_1$  como a  $Te_1$ . Entonces, se sigue de (3.3.9) con  $X = Z = e_1$ ,  $Y = e_i$  y  $W = Te_1$ , que:

$$g(\alpha(Te_1, Te_1), e_i) = 0.$$

Así, como  $g(\alpha(Te_1, Te_1), Te_1) = 0$  y

$$g(\alpha(Te_1, Te_1), e_1) = g(\alpha(Te_1, e_1), Te_1) = \lambda_2 g(Te_1, Te_1) = \lambda_2 \cos^2 \theta,$$

se tiene:

$$\alpha(Te_1, Te_1) = \lambda_2 \cos^2 \theta e_1.$$

Apliquemos (3.3.9) una vez más. Tomando en esta ocasión  $X = Z = W = Te_1$  e  $Y = e_1$ , obtenemos

$$\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 - 3 \frac{c-1}{4} \operatorname{sen}^4 \theta = 0, \quad (3.3.19)$$

pues  $\cos \theta \neq 0$ , al ser  $\theta \neq \pi/2$ . Así, restando (3.3.18) y (3.3.19), llegamos a que

$$\frac{3}{2}(c-1)\sin^4\theta = 0,$$

lo cual es contradictorio con  $c \neq 1$  y  $\theta \neq 0$ . Por lo tanto, en el caso (iii) no puede ser  $T_1 = -T_2$  y, por tanto,  $T_1 = T_2$  también en este caso.

Por último, supongamos que se verifica la hipótesis (iv), es decir,  $m = 2$ . De nuevo, podemos suponer que  $\theta \neq \pi/2$ . Sea  $p \in M$  y  $e_1$  un vector unitario en  $p$ , ortogonal a  $\xi_p$ . Entonces,  $\{e_1, \sec \theta T_1 e_1\}$  es una base ortonormal de  $\mathcal{D}_p$ . Como  $g(T_2 e_1, e_1) = 0$  y  $\eta(T_2 e_1) = 0$ ,  $T_2 e_1$  ha de tener la misma dirección que  $T_1 e_1$ . Ahora bien, dado que

$$g(T_2 e_1, T_2 e_1) = \cos^2 \theta = g(T_1 e_1, T_1 e_1),$$

ha de ser  $T_2 e_1 = \pm T_1 e_1$ .

Así, dada una base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $\mathcal{D}_p$ , existirán  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$  tales que  $T_1 e_i = \varepsilon_i T_2 e_i$ , para  $i = 1, 2$ . Razonando como al principio de la demostración del caso (iii), deducimos que  $T_1 v = T_2 v$ , para todo  $v \in T_p M$ , o bien  $T_1 v = -T_2 v$ , para todo  $v \in T_p M$ . Como  $M$  es conexa, ha de ser  $T_1 = T_2$  o  $T_1 = -T_2$ . Si suponemos que se verifica la segunda ecuación, razonando de manera análoga al caso anterior, llegaríamos a contradicción. Por lo tanto, se tiene de nuevo que  $T_1 = T_2$ .

Luego, hemos visto que, en cualquiera de las condiciones (1)–(4), se tiene que, dado que  $\alpha^1 = \alpha^2$ ,  $T_1 = T_2$ .

Continuemos con la demostración. Veamos ahora que

$$g(\gamma'_1, A_k) = g(\gamma'_2, B_k) \quad (3.3.20)$$

para todo  $k = 1, \dots, 2m + 1$ . En efecto, se tiene

$$g(\gamma'_1, A_k) = \begin{cases} g(x_*^1 \gamma', x_*^1(e_k)) = g(\gamma', e_k), & \text{si } i = 1, \dots, m, \\ g(x_*^1 \gamma', (x_*^1(e_{k-m}))^*) = 0, & \text{si } i = m + 1, \dots, 2m, \\ g(x_*^1 \gamma', x_*^1(\bar{\xi})) = g(\gamma', \bar{\xi}), & \text{si } i = 2m + 1, \end{cases}$$

obteniéndose expresiones análogas para  $g(\gamma'_2, B_k)$ .

Comprobemos a continuación que

$$g(\widetilde{\nabla}_{\gamma'_1} A_k, A_l) = g(\widetilde{\nabla}_{\gamma'_2} B_k, B_l), \quad (3.3.21)$$

para todo  $k, l = 1, \dots, 2m+1$ . Para ello, bastará calcular ambos miembros de la ecuación y comparar los resultados obtenidos. Vamos a hallar  $g(\widetilde{\nabla}_{\gamma'_1} A_k, A_l)$  para los distintos valores de  $k, l$ , siendo análogos los cálculos para el segundo miembro de (3.3.21). Distinguiremos los siguientes casos:

Caso 1.-  $k = 1, \dots, m$ . En virtud de la ecuación de Gauss, se tiene que:

$$g(\widetilde{\nabla}_{\gamma'_1} A_k, A_l) = g(\widetilde{\nabla}_{x_*^1 \gamma'} x_*^1(e_k), A_l) = g(x_*^1 \nabla_{\gamma'} e_k + \sigma^1(\gamma', e_k), A_l). \quad (3.3.22)$$

Encontramos los siguientes subcasos.

Caso 1.1.-  $l = 1, \dots, m$ . La ecuación (3.3.22) es igual a:

$$g(x_*^1 \nabla_{\gamma'} e_k, x_*^1(e_l)) = g(\nabla_{\gamma'} e_k, e_l). \quad (3.3.23)$$

Caso 1.2.-  $l = m+1, \dots, 2m$ . La ecuación (3.3.22) es igual a:

$$g(\sigma^1(\gamma', e_k), (x_*^1(e_{l-m}))^*) = \csc \theta g(\sigma^1(\gamma', e_k), \phi x_*^1(e_{l-m})). \quad (3.3.24)$$

Caso 1.3.-  $l = 2m+1$ . La ecuación (3.3.22) es igual a:

$$g(x_*^1 \nabla_{\gamma'} e_k, x_*^1(\bar{\xi})) = g(\nabla_{\gamma'} e_k, \bar{\xi}). \quad (3.3.25)$$

Caso 2.-  $k = m+1, \dots, 2m$ . En virtud de la ecuación de Weingarten, se tiene que:

$$\begin{aligned} g(\widetilde{\nabla}_{\gamma'_1} A_k, A_l) &= g(\widetilde{\nabla}_{x_*^1 \gamma'} (x_*^1(e_{k-m}))^*, A_l) = \\ &= g(-A_{(x_*^1(e_{k-m}))^*}^1 x_*^1 \gamma' + D_{x_*^1 \gamma'} (x_*^1(e_{k-m}))^*, A_l). \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Encontramos los siguientes subcasos.

Caso 2.1.-  $l = 1, \dots, m$ . En virtud de (0.1.3), la ecuación (3.3.26) es igual a:

$$\begin{aligned} -g(A_{(x_*^1(e_{k-m}))^*}^1 x_*^1 \gamma', x_*^1(e_l)) &= -g(\sigma^1(\gamma', e_l), (x_*^1(e_{k-m}))^*) = \\ &= -\csc \theta g(\sigma^1(\gamma', e_l), \phi x_*^1(e_{k-m})). \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

Caso 2.2.-  $l = m+1, \dots, 2m$ . La ecuación (3.3.26) es igual a

$$g(D_{x_*^1 \gamma'} (x_*^1(e_{k-m}))^*, (x_*^1(e_{l-m}))^*),$$

expresión que, en virtud de (3.1.20), (3.1.3) y de la Proposición 1.2.3, se transforma en:

$$\begin{aligned} g((\nabla_{\gamma'} e_{k-m})^* + \csc^2 \theta \{T_1 \alpha^1(\gamma', e_{k-m}) + \alpha^1(\gamma', T_1 e_{k-m})\}^*, (x_*^1(e_{l-m}))^*) &= \\ = g(\nabla_{\gamma'} e_{k-m} + \csc^2 \theta \{T_1 \alpha^1(\gamma', e_{k-m}) + \alpha^1(\gamma', T_1 e_{k-m})\}, e_{l-m}). \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Caso 2.3.-  $l = 2m + 1$ . De manera análoga al Caso 2.1, se obtiene que, en virtud de (0.3.11), (3.1.3) y de la Proposición 1.2.3, la ecuación (3.3.26) es igual a

$$\begin{aligned} -g(A_{(x_*^1(e_{k-m}))^*}^1 x_*^1 \gamma', x_*^1(\bar{\xi})) &= -g(\sigma^1(\gamma', \bar{\xi}), (x_*^1(e_{k-m}))^*) = \\ = g(N^1 \gamma', \csc \theta N^1 e_{k-m}) &= \text{sen } \theta g(\gamma', e_{k-m}). \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Caso 3.-  $k = 2m + 1$ . En virtud de la ecuación de Gauss, se tiene:

$$g(\widetilde{\nabla}_{\gamma'_1} A_k, A_l) = g(\widetilde{\nabla}_{x_*^1 \gamma'} x_*^1(\bar{\xi}), A_l) = g(x_*^1 \nabla_{\gamma'} \bar{\xi} + \sigma^1(\gamma', \bar{\xi}), A_l). \quad (3.3.30)$$

Encontramos los siguientes subcasos.

Caso 3.1.-  $l = 1, \dots, m$ . La ecuación (3.3.30) es igual a:

$$g(x_*^1 \nabla_{\gamma'} \bar{\xi}, x_*^1(e_l)) = g(\nabla_{\gamma'} \bar{\xi}, e_l). \quad (3.3.31)$$

Caso 3.2.-  $l = m + 1, \dots, 2m$ . Siguiendo los razonamientos del Caso 2.3, se tiene que la ecuación (3.3.30) es igual a:

$$g(\sigma^1(\gamma', \bar{\xi}), (x_*^1(e_{l-m}))^*) = -\text{sen } \theta g(\gamma', e_{l-m}). \quad (3.3.32)$$

Caso 3.3.-  $l = 2m + 1$ . En virtud de (0.2.11) y (3.3.1), se tiene directamente:

$$g(\widetilde{\nabla}_{\gamma'_1} A_{2m+1}, A_{2m+1}) = -g(\phi \gamma'_1 \cdot \xi) = 0. \quad (3.3.33)$$

Es fácil ver que los valores de  $g(\widetilde{\nabla}_{\gamma'_2} B_k, B_l)$  serán análogos a (3.3.23)–(3.3.25), (3.3.27)–(3.3.29) y (3.3.31)–(3.3.33), cambiando el 1, cuando aparezca, por un 2. Entonces, dado que  $\alpha^1 = \alpha^2$  y  $T_1 = T_2$  y teniendo en cuenta la hipótesis (3.3.2), se sigue que la ecuación (3.3.21) se verifica. Por tanto, en virtud de las ecuaciones (3.3.20), (3.3.21) y de la Proposición 3 de [34], se tiene que  $\gamma_1 = \gamma_2$ .  $\square$



### 3.4 Algunas Aplicaciones.

Presentamos en esta sección dos aplicaciones del Teorema de Existencia de inmersiones slant. La primera de dichas aplicaciones nos proveerá de múltiples ejemplos de subvariedades slant tridimensionales de  $\widetilde{M}^5(-3)$ . Además, podremos encontrarlas con curvatura escalar o media prefijadas. En cuanto a la segunda aplicación, es de interés para nuestro estudio pues nos proporcionará ejemplos de subvariedades slant en otro espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante,  $\widetilde{M}^5(-7)$ .

Sean  $\psi = \psi(x)$ ,  $\psi_i = \psi_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , cuatro funciones definidas en un intervalo abierto que contenga al 0. Sean  $c$  y  $\theta$  dos constantes con  $0 < \theta \leq \pi/2$ . Definimos:

$$f(x) = \exp\left(\int \psi_3(x) dx\right). \quad (3.4.1)$$

Sea  $M$  un abierto simplemente conexo, entorno del origen  $(0, 0, 0) \in \mathbf{R}^3$ , sea

$$\eta = dz + 2(\cos \theta)f(x)y dx \quad (3.4.2)$$

y consideramos sobre  $M$  la métrica:

$$g = \eta \otimes \eta + (dx \otimes dx + f^2(x)dy \otimes dy). \quad (3.4.3)$$

Sean ahora:

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x} - 2(\cos \theta)f(x)y \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_2 = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \xi = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.4.4)$$

Entonces, es fácil comprobar que  $\{e_1, e_2, \xi\}$  es una referencia ortonormal de  $TM$  y que  $\eta$  es la 1-forma dual de  $\xi$ . Además, en virtud de (3.4.1),

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \frac{\partial}{\partial y} + 2 \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{f'(x)}{f(x)} e_2 + 2 \cos \theta \xi = \\ &= -\psi_3 e_2 + 2 \cos \theta \xi, \end{aligned}$$

mientras que:

$$[e_1, \xi] = [e_2, \xi] = 0.$$

Así, si consideramos la conexión de Levi-Civita asociada a  $g$ , podemos obtener:

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1}e_1 &= 0, & \nabla_{e_1}e_2 &= \cos\theta\xi, & \nabla_{e_1}\xi &= -\cos\theta e_2, \\ \nabla_{e_2}e_1 &= \psi_3e_2 - \cos\theta\xi, & \nabla_{e_2}e_2 &= -\psi_3e_1, & \nabla_{e_2}\xi &= \cos\theta e_1, \\ \nabla_{\xi}e_1 &= -\cos\theta e_2, & \nabla_{\xi}e_2 &= \cos\theta e_1, & \nabla_{\xi}\xi &= 0.\end{aligned}$$

A continuación, definimos el tensor  $\phi$  dado por:

$$\phi e_1 = e_2, \quad \phi e_2 = -e_1, \quad \phi\xi = 0.$$

Se comprueba fácilmente que

$$\phi^2X = -X + \eta(X)\xi, \quad (3.4.5)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

para todos  $X, Y \in TM$ . Por tanto,  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  es una variedad casi-contacto métrica. Además, se tiene que:

$$(\nabla_X\phi)Y = \cos\theta(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X). \quad (3.4.6)$$

Definiendo entonces  $T = \cos\theta\phi$ , es fácil comprobar que

$$Te_1 = \cos\theta e_2, \quad Te_2 = -\cos\theta e_1, \quad T\xi = 0, \quad (3.4.7)$$

mientras, de (3.4.5) y (3.4.6) se siguen

$$T^2X = -\cos^2\theta(X - \eta(X)\xi), \quad (3.4.8)$$

$$(\nabla_XT)Y = \cos^2\theta(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X), \quad (3.4.9)$$

respectivamente. Como  $(\phi, \xi, \eta, g)$  es una estructura casi-contacto métrica sobre  $M$ , se verifica la ecuación (0.2.7), que a su vez implica

$$g(TX, Y) + g(X, TY) = 0, \quad (3.4.10)$$

para todos  $X, Y \in TM$ . También se comprueba fácilmente que

$$\nabla_X\xi = -TX, \quad (3.4.11)$$

para todo  $X \in TM$ .

Definimos en  $M$  la forma bilineal simétrica  $\alpha$  valuada en  $TM$  dada por:

$$\alpha(e_1, e_1) = \psi e_1 + \psi_1 e_2, \quad \alpha(e_1, e_2) = \psi_1 e_1 + \psi_2 e_2, \quad \alpha(e_1, \xi) = \text{sen}^2 \theta e_1, \quad (3.4.12)$$

$$\alpha(e_2, e_2) = \psi_2 e_1 - \psi_1 e_2, \quad \alpha(e_2, \xi) = \text{sen}^2 \theta e_2, \quad \alpha(\xi, \xi) = 0. \quad (3.4.13)$$

En primer lugar, se verifican directamente:

$$g(\alpha(X, Y), \xi) = 0, \quad (3.4.14)$$

$$\alpha(X, \xi) = \text{sen}^2 \theta (X - \eta(X)\xi). \quad (3.4.15)$$

Por otra parte, para todos  $X, Y, Z \in TM$ :

$$\begin{aligned} g(\alpha(X, Y), Z) - g(\alpha(X, Z), Y) &= \\ &= -\text{sen}^2 \theta (g(X, Y)\eta(Z) - g(X, Z)\eta(Y)). \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Así, en virtud de (3.4.9) y (3.4.16), obtenemos:

$$\begin{aligned} g((\nabla_X T)Y, Z) &= g(\alpha(X, Y), Z) - g(\alpha(X, Z), Y) + \\ &+ g(X, Y)\eta(Z) - g(X, Z)\eta(Y). \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

En resumen, (3.4.7), (3.4.14), (3.4.11), (3.4.15), (3.4.8), (3.4.10) y (3.4.17) implican que  $(M, g, \xi, T, \alpha)$  verifica las condiciones (3.2.1)–(3.2.7) del Teorema de Existencia, respectivamente. A continuación, hallaremos los requisitos necesarios para que se verifiquen las dos condiciones restantes.

En primer lugar, expresamos los campos  $X, Y, Z, W$  en función de la base de campos  $\{e_1, e_2, \xi\}$ . Teniendo en cuenta que, en condiciones de regularidad suficiente, se verifican

$$\begin{aligned} e_1(e_2(h)) &= e_2(e_1(h)) - \psi_3 e_2(h) + 2 \cos \theta \xi(h), \\ e_1(\xi(h)) &= \xi(e_1(h)), \\ e_2(\xi(h)) &= \xi(e_2(h)), \end{aligned}$$

para toda función diferenciable  $h$ , puede probarse<sup>2</sup> que  $M$  verifica la condición (3.2.8) si y sólo si:

$$\psi'_3 = -\psi_3^2 - \text{csc}^2 \theta \{\psi \psi_2 - 2\psi_1^2 - \psi_2^2\} - \frac{c+3}{4}(1 + 3 \cos^2 \theta). \quad (3.4.18)$$

---

<sup>2</sup>Omitimos los detalles concretos de dicha prueba, dada su longitud. Recomendamos la utilización de algún programa de cálculo simbólico para llevar a cabo tanto estos cálculos como los siguientes.

Por otra parte, siguiendo las mismas técnicas, llegamos a la conclusión de que  $M$  verifica (3.2.9) si se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\psi'_2 = (-2\psi_2 + \psi)\psi_3 - \csc \theta \cot \theta (\psi_2 + \psi)\psi_1,$$

$$\psi'_1 = -3\psi_1\psi_3 + \csc \theta \cot \theta (\psi_2 + \psi)\psi_2 + 3\frac{c+3}{4} \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta, \quad (3.4.19)$$

y

$$\psi'_1 = -3\psi_1\psi_3 + \csc \theta \cot \theta (\psi_2 + \psi)\psi_2 - 3\frac{c+3}{4} \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta. \quad (3.4.20)$$

Pero, para que se tengan simultáneamente (3.4.19) y (3.4.20), es necesario y suficiente que:

$$\frac{c+3}{4} \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta = 0.$$

Ahora bien, como  $0 < \theta \leq \pi/2$ , sabemos que  $\operatorname{sen}^2 \theta \neq 0$ . Por tanto, ha de ser  $c = -3$  ó  $\cos \theta = 0$ , siendo esto último equivalente a decir que  $\theta = \pi/2$ . Eligiendo la primera opción, obtenemos el siguiente resultado de existencia de subvariedades slant propias y anti-invariantes en  $\widetilde{M}^5(-3)$ .

**Teorema 3.4.1.**— Sean  $\psi = \psi(x)$  una función definida en un intervalo abierto que contenga al 0 y  $a_1, a_2, a_3, \theta$  cuatro constantes con  $0 < \theta \leq \pi/2$ . Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\begin{aligned} y'_1 &= -3y_1y_3 + \csc \theta \cot \theta (y_2 + \psi)y_2 \\ y'_2 &= (-2y_2 + \psi)y_3 - \csc \theta \cot \theta (y_2 + \psi)y_1 \\ y'_3 &= -y_3^2 - \csc^2 \theta (\psi y_2 - 2y_1^2 - y_2^2) \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales:

$$y_1(0) = a_1, \quad y_2(0) = a_2, \quad y_3(0) = a_3.$$

Sean  $\psi_1, \psi_2$  y  $\psi_3$  las tres componentes de la única solución de dicho sistema en un intervalo abierto que contiene al 0. Sea  $M$  un abierto simplemente conexo, entorno del origen  $(0,0,0) \in \mathbf{R}^3$ . Definimos sobre  $M$  la métrica dada por (3.4.1)–(3.4.3). Entonces, existe una inmersión slant, con ángulo  $\theta$ , de  $(M, g)$  en  $\widetilde{M}^5(-3)$ , cuya segunda forma fundamental viene dada por

$$\sigma(X, Y) = \csc^2 \theta (T\alpha(X, Y) - \phi\alpha(X, Y)), \quad (3.4.21)$$

donde  $\alpha$  está definida por (3.4.12)-(3.4.13).

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia inmediata de los desarrollos anteriores y de la aplicación directa del Teorema de Existencia.  $\square$

Si tomamos  $\theta = \pi/2$ , podemos enunciar el siguiente teorema de existencia de subvariedades anti-invariantes en cualquier espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante  $c$ .

**Teorema 3.4.2.**— Sean  $\psi = \psi(x)$  una función definida en un intervalo abierto que contenga al 0 y  $a_1, a_2, a_3, c$  cuatro constantes. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1y_3 + \csc \theta \cot \theta (y_2 + \psi)y_2 \\ y_2' &= (-2y_2 + \psi)y_3 - \csc \theta \cot \theta (y_2 + \psi)y_1 \\ y_3' &= -y_3^2 - \csc^2 \theta (\psi y_2 - 2y_1^2 - y_2^2) - (c + 3)/4 \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales:

$$y_1(0) = a_1, \quad y_2(0) = a_2, \quad y_3(0) = a_3.$$

Sean  $\psi_1, \psi_2$  y  $\psi_3$  las tres componentes de la única solución de dicho sistema en un intervalo abierto que contiene al 0. Sea  $M$  un abierto simplemente conexo, entorno del origen  $(0, 0, 0) \in \mathbf{R}^3$ . Definimos sobre  $M$  la métrica dada por (3.4.1)-(3.4.3). Entonces, existe una inmersión anti-invariante de  $(M, g)$  en  $\widetilde{M}^5(c)$ , cuya segunda forma fundamental viene dada por

$$\sigma(X, Y) = -\phi\alpha(X, Y), \quad (3.4.22)$$

donde  $\alpha$  está definida por (3.4.12)-(3.4.13).

Podemos deducir de manera inmediata del Teorema 3.4.1 los siguientes resultados de existencia de subvariedades slant con curvatura escalar o curvatura media predeterminadas.

**Corolario 3.4.3.**— Dadas una constante  $\theta$  con  $0 < \theta \leq \pi/2$  y una función  $F_1 = F_1(x)$ , existen subvariedades  $\theta$ -slant tridimensionales en  $\widetilde{M}^5(-3)$  con curvatura escalar  $F_1$ .

DEMOSTRACIÓN: Elegimos  $(M, g)$  tal y como se describe en el Teorema 3.4.1. Si consideramos la conexión de Levi-Civita asociada a  $g$  y tomamos la referencia ortonormal  $\{e_1, e_2, \xi\}$  dada por (3.4.4), se tienen:

$$R(e_1, e_2; e_2, e_1) = -\psi'_3 - \psi_3^2 - 3 \cos^2 \theta,$$

$$R(e_1, \xi; \xi, e_1) = R(e_2, \xi; \xi, e_2) = \cos^2 \theta.$$

Esto implica que la curvatura escalar de  $M$  viene dada por

$$\tau = 1/3(-\psi'_3 - \psi_3^2 - \cos^2 \theta),$$

expresión que, en virtud de (3.4.18) (con  $c = -3$ ), se transforma en:

$$3 \operatorname{sen}^2 \theta \tau = \psi \psi_2 - 2\psi_1^2 - \psi_2^2 - \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta.$$

Así, para terminar la demostración, basta considerar  $a_2 \neq 0$ , elegir  $\psi$  como una función que satisfaga la ecuación

$$3 \operatorname{sen}^2 \theta F_1 = \psi \psi_2 - 2\psi_1^2 - \psi_2^2 - \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta$$

y aplicar el Teorema 3.4.1. □

**Corolario 3.4.4.**— *Dadas una constante  $\theta$  con  $0 < \theta \leq \pi/2$  y una función  $F_2 = F_2(x)$ , existen subvariedades  $\theta$ -slant tridimensionales en  $\widetilde{M}^5(-3)$  con curvatura media  $F_2$ .*

DEMOSTRACIÓN: Elegimos  $(M, g)$  tal y como se describe en el Teorema 3.4.1. Tomamos la referencia ortonormal  $\{e_1, e_2, \xi\}$  dada por (3.4.4). Al aplicar el Teorema 3.4.1, la inmersión slant correspondiente tendrá segunda forma fundamental dada por (3.4.21). Entonces, un cálculo directo del vector curvatura media tendría como resultado

$$H = -\frac{1}{3} \operatorname{csc}^2 \theta (\psi + \psi_2) N e_1,$$

de donde la curvatura media sería:

$$|H| = \frac{1}{3} \operatorname{csc} \theta (\psi + \psi_2).$$

Así, la demostración se acaba eligiendo  $\psi = 3 \operatorname{sen} \theta F_2 - \psi_2$  y aplicando directamente el Teorema 3.4.1. □

Obtenemos también los corolarios análogos para el Teorema 3.4.2:

**Corolario 3.4.5.**— *Dadas una constante  $c$  y una función  $F_1 = F_1(x)$ , existen subvariedades anti-invariantes tridimensionales en  $\widetilde{M}^5(c)$  con curvatura escalar  $F_1$ .*

DEMOSTRACIÓN: Procedemos como en el Corolario 3.4.3. En este caso, dado que  $\theta = \pi/2$ , la curvatura escalar de  $M$  verifica, en virtud de (3.4.18), la ecuación:

$$\tau = 1/3(\psi\psi_2 - 2\psi_1^2 - \psi_2^2 + \frac{c+3}{4}).$$

Así, para obtener el corolario basta considerar  $a_2 \neq 0$ , elegir  $\psi$  como una función que satisfaga la ecuación

$$3F_1 = \psi\psi_2 - 2\psi_1^2 - \psi_2^2 + \frac{c+3}{4}$$

y aplicar el Teorema 3.4.2. □

**Corolario 3.4.6.**— *Dadas una constante  $c$  y una función  $F_2 = F_2(x)$ , existen subvariedades anti-invariantes tridimensionales en  $\widetilde{M}^5(c)$  con curvatura media  $F_2$ .*

DEMOSTRACIÓN: Seguimos ahora los pasos del Corolario 3.4.4. En este caso, al venir dada la segunda forma fundamental por (3.4.22), la curvatura media de una subvariedad anti-invariante obtenida mediante el Teorema 3.4.2 vendría dada por:

$$|H| = \frac{1}{3}(\psi + \psi_2).$$

Así, concluimos la demostración eligiendo  $\psi = 3F_2 - \psi_2$  y aplicando directamente el Teorema 3.4.2. □

En particular, los cuatro corolarios anteriores se pueden aplicar si las curvaturas escalar o media son constantes.

Exponemos a continuación la segunda aplicación del Teorema de Existencia. Dicha aplicación nos proporciona los primeros ejemplos de subvariedades slant propias en un espacio de curvatura  $\phi$ -seccional constante distinto de  $\mathbf{R}^{2m+1}$ .

**Proposición 3.4.7.**— *Para cada constante  $\theta$  con  $0 < \theta < \pi/2$ , existe una subvariedad  $\theta$ -slant tridimensional en  $\widetilde{M}^5(-7)$  con curvatura media constante no nula y curvatura escalar constante negativa.*

DEMOSTRACIÓN: Dada una constante  $\theta$  con  $0 < \theta < \pi/2$ , elegimos dos constantes no nulas  $\beta, \gamma$  tales que

$$\beta^2 + \gamma^2 = 4 \cos^2 \theta. \quad (3.4.23)$$

Sean  $a, b, c$  las constantes definidas por:

$$a_1 = -\sin^2 \theta \sec^3 \theta \left( \frac{1}{4} \beta^3 - \frac{3}{2} \beta \cos^2 \theta + \frac{6}{\beta} \cos^4 \theta \right), \quad (3.4.24)$$

$$a_2 = \gamma \sin^2 \theta \sec^3 \theta \left( \frac{1}{4} \beta^2 - \cos^2 \theta \right), \quad (3.4.25)$$

$$a_3 = -\beta \sin^2 \theta \sec^3 \theta \left( \frac{1}{4} \beta^2 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \gamma^2 \right). \quad (3.4.26)$$

Sea  $M$  la variedad  $\mathbf{R}^3$  y sea la 1-forma  $\eta$ :

$$\eta = dz + 2 \cos \theta e^{-\gamma x} dy.$$

Consideramos sobre  $M$  la métrica  $g$  dada por:

$$g = \eta \otimes \eta + (dx \otimes dx - \beta e^{-\gamma x} (dx \otimes dy + dy \otimes dx) + (\beta^2 + \gamma^2) e^{-2\gamma x} dy \otimes dy).$$

Sean:

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{1}{\gamma} \left( \beta \frac{\partial}{\partial x} + e^{\gamma x} \frac{\partial}{\partial y} - 2 \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \xi = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.4.27)$$

Entonces,  $e_1, e_2, \xi$  constituyen una referencia ortonormal para  $(M, g)$  y  $\eta$  es la 1-forma dual de  $\xi$ . Además, se halla directamente que

$$[e_1, e_2] = e^{\gamma x} \frac{\partial}{\partial y} = \gamma e_2 - \beta e_1 + 2 \cos \theta \xi,$$

mientras que:

$$[e_1, \xi] = [e_2, \xi] = 0.$$



Así, si consideramos la conexión de Levi-Civita asociada a  $g$ , podemos calcular:

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1} e_1 &= \beta e_2, & \nabla_{e_1} e_2 &= -\beta e_1 \cos \theta \xi, & \nabla_{e_1} \xi &= -\cos \theta e_2, \\ \nabla_{e_2} e_1 &= -\gamma e_2 - \cos \theta \xi, & \nabla_{e_2} e_2 &= \gamma e_1, & \nabla_{e_2} \xi &= \cos \theta e_1, \\ \nabla_{\xi} e_1 &= -\cos \theta e_2, & \nabla_{\xi} e_2 &= \cos \theta e_1, & \nabla_{\xi} \xi &= 0.\end{aligned}$$

A partir de estas igualdades, obtenemos

$$R(e_1, e_2; e_2, e_1) = -\beta^2 - \gamma^2 - \cos^2 \theta,$$

$$R(e_1, \xi; \xi, e_1) = R(e_2, \xi; \xi, e_2) = \cos^2 \theta,$$

de donde se sigue que la curvatura escalar de  $M$  viene dada por:

$$\tau = \frac{1}{3}(-\beta^2 - \gamma^2 + \cos^2 \theta).$$

Entonces, en virtud de (3.4.23):

$$\tau = -\cos^2 \theta < 0. \quad (3.4.28)$$

Definimos en  $M$  una forma bilineal simétrica  $\alpha$  valuada en  $TM$  mediante las igualdades:

$$\alpha(e_1, e_1) = a_1 e_1 + a_2 e_2, \quad \alpha(e_2, e_2) = a_3 e_1 - a_2 e_2, \quad \alpha(\xi, \xi) = 0, \quad (3.4.29)$$

$$\alpha(e_1, e_2) = -a_2 e_1 + a_3 e_2, \quad \alpha(e_1, \xi) = \sin^2 \theta e_1, \quad \alpha(e_2, \xi) = \sin^2 \theta e_2. \quad (3.4.30)$$

Sea  $T$  el endomorfismo de  $TM$  definido por:

$$T e_1 = \cos \theta e_2, \quad T e_2 = -\cos \theta e_1, \quad T \xi = 0. \quad (3.4.31)$$

Mediante un cálculo directo, se comprueba que, en virtud de las ecuaciones (3.4.24)–(3.4.26) y (3.4.29)–(3.4.31),  $(M, \xi, T, \alpha)$  verifica las condiciones (3.2.1)–(3.2.7) del Teorema de Existencia para cualquier valor de  $c$ .

Para la comprobación de la condición (3.2.8), expresamos los campos  $X, Y, Z, W$  en función de la base de campos  $\{e_1, e_2, \xi\}$ . Teniendo en cuenta (3.4.23) y que, en condiciones de regularidad suficiente, (3.4.27) implica que

$$e_1(e_2(f)) = e_2(e_1(f)) + e^{\gamma x} \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$e_1(\xi(f)) = \xi(e_1(f)),$$

$$e_2(\xi(f)) = \xi(e_2(f)),$$

para toda función diferenciable  $f$ , puede probarse que  $M$  verifica dicha condición si y sólo si se tienen las ecuaciones:

$$\operatorname{sen}^2 \theta - \frac{c+3}{4} + \frac{c-1}{4} = -\cos^2 \theta, \quad (3.4.32)$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \frac{c+3}{4} + 3\frac{c-1}{4} \cos^2 \theta = -7 \cos^2 \theta. \quad (3.4.33)$$

Ahora bien, es inmediato que la ecuación (3.4.32) es en realidad una identidad para cualquier valor de  $c$ . Sin embargo, al imponer (3.4.33), ha de cumplirse que  $c = -7$ . Un cálculo sencillo pero extremadamente largo nos asegura que, en estas condiciones, también se tiene (3.2.9).

Entonces, el Teorema de Existencia implica que existe una inmersión slant, con ángulo  $\theta$ , de  $(M, g)$  en  $\widetilde{M}^5(-7)$ , cuya segunda forma fundamental viene dada por  $\sigma = \operatorname{csc}^2 \theta (T\alpha - \phi\alpha)$ . Así, en virtud de (3.4.29) se obtienen:

$$\sigma(e_1, e_1) = -\operatorname{csc}^2 \theta (a_1 N e_1 + a_2 N e_2),$$

$$\sigma(e_2, e_2) = -\operatorname{csc}^2 \theta (a_3 N e_1 - a_2 N e_2),$$

de donde, en virtud de (3.4.24) y (3.4.26):

$$|H| = \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{3\beta}. \quad (3.4.34)$$

Como  $\theta$  y  $\beta$  son constantes tales que  $0 < \theta < \pi/2$  y  $\beta \neq 0$ , en virtud de (3.4.28) y (3.4.34),  $M$  tiene curvatura escalar constante negativa y curvatura media constante no nula.  $\square$

## Capítulo 4

# Subvariedades Semi-slant

Estudiamos en este capítulo una extensión de las subvariedades slant de una variedad casi-contacto métrica. En [33], Neculai Papaghiuc introdujo la noción de subvariedad semi-slant de una variedad Kaehleriana, definiéndola como aquella subvariedad cuyo fibrado tangente admite una descomposición ortogonal en dos distribuciones, siendo una de ellas compleja y la otra slant con ángulo no nulo.

En el primer capítulo de esta memoria presentamos la definición de distribución slant en una subvariedad de una variedad casi-contacto métrica (Definición 1.1.4). Así, nos será sencillo adaptar la definición anterior, obteniendo las subvariedades semi-slant en la geometría de contacto.

Llevaremos a cabo dicha tarea en la Sección 4.3. Previamente, en la Sección 4.1 estudiaremos dos ejemplos de cómo a partir de las subvariedades slant de una variedad casi-contacto métrica, podemos obtener subvariedades semi-slant de una variedad casi Hermítica, y viceversa. Esto pondrá de manifiesto la importancia de la relación entre dichos conceptos.

Por otra parte, en la Sección 4.2, introduciremos la definición de una clase más general de subvariedades, que llamaremos subvariedades bi-slant. Como caso particularmente importante de dichas subvariedades, obtendremos las semi-slant.

## 4.1 Subvariedades Slant y Semi-slant.

Tal y como anunciábamos en la introducción de este capítulo, estudiaremos a continuación el paso entre subvariedades slant de una variedad casi-contacto métrica y subvariedades semi-slant de una variedad casi Hermítica. Para ello, emplearemos dos ejemplos clásicos que relacionan dichas variedades (ver [4, 52]).

En primer lugar, partimos de una variedad casi-contacto métrica, que seguiremos denotando por  $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ . Consideremos la variedad  $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$ . Denotamos un campo vectorial de  $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$  por  $(X, f \frac{d}{dt})$ , donde  $X$  es tangente a  $\widetilde{M}$ ,  $t$  es la coordenada de  $\mathbf{R}$  y  $f$  es una función diferenciable en  $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$ . Definimos en esta variedad la estructura casi-compleja  $J$  dada por:

$$J(X, f \frac{d}{dt}) = (\phi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}). \quad (4.1.1)$$

Entonces, se sabe que  $(\widetilde{M} \times \mathbf{R}, J, g_1)$  es una variedad casi Hermítica, donde  $g_1$  denota la métrica producto:

$$g_1((X, f \frac{d}{dt}), (Y, h \frac{d}{dt})) = g(X, Y) + fh.$$

Precisamente, ésta es la construcción clásica que se emplea para definir la noción de normalidad en variedades casi-contacto. Así, se dice que  $\widetilde{M}$  es normal si y sólo si  $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$  es una variedad Hermítica. Es fácil ver que esta definición es equivalente a la que recordamos en el capítulo de preliminares (ver (0.2.13)).

**Nota 4.1.1.**— Examinemos brevemente bajo qué condiciones sobre  $\widetilde{M}$  obtenemos una estructura Kaehleriana para  $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$ .

Sean  $\Phi$  la 2-forma fundamental de  $\widetilde{M}$  y  $\omega$  la forma de Kaehler de  $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$ . Puede verse, mediante un simple cálculo, que

$$\begin{aligned} \omega((X, f \frac{d}{dt}), (Y, h \frac{d}{dt})) &= \Phi(X, Y) - h\eta(X) + f\eta(Y), \\ 3d\omega &= ((X, f \frac{d}{dt}), (Y, h \frac{d}{dt}), (Z, l \frac{d}{dt})) = \\ &= 3d\Phi(X, Y, Z) - 2ld\eta(X, Y) + 2hd\eta(X, Z) - 2fd\eta(Y, Z), \end{aligned}$$

para cualesquiera campos vectoriales  $X, Y, Z$  tangentes a  $\widetilde{M}$  y para cualesquiera funciones diferenciables  $f, h, l$  en  $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$ . Así, si  $\widetilde{M}$  es una variedad de contacto,  $d\Phi = 0$ , pero  $d\omega \neq 0$ . En el caso en que  $\widetilde{M}$  sea una variedad *casi cosimpléctica* (ver [20]), es decir, si  $d\Phi = d\eta = 0$ , entonces  $d\omega = 0$  y  $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$  es casi-Kaehler. Por tanto, si  $\widetilde{M}$  es normal y casi cosimpléctica, se tiene que  $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$  es Kaehleriana.

El siguiente resultado nos permite obtener subvariedades semi-slant en  $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$  a partir de subvariedades slant de  $\widetilde{M}$ .

**Teorema 4.1.2.**— Sean  $\widetilde{M}$  una variedad casi-contacto métrica y  $M$  una subvariedad slant no invariante de  $\widetilde{M}$ . Denotemos por  $\mathcal{D}$  la distribución ortogonal a  $\xi$  en  $M$ . Entonces  $M \times \mathbf{R}$  es una subvariedad semi-slant de  $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$ , con distribución compleja

$$\mathcal{D}_1 = \left\langle (\xi, 0), \left(0, \frac{d}{dt}\right) \right\rangle \quad (4.1.2)$$

y distribución slant:

$$\mathcal{D}_2 = \{(X, 0) / X \in \mathcal{D}\}. \quad (4.1.3)$$

DEMOSTRACIÓN: Es inmediato observar que las distribuciones  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  dadas por (4.1.2) y (4.1.3) son ortogonales y que  $T(M \times \mathbf{R}) = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ . Además,  $\mathcal{D}_1$  es una distribución compleja, dado que, en virtud de (4.1.1),

$$J(\xi, 0) = \left(0, \frac{d}{dt}\right)$$

y, por tanto:

$$J\left(0, \frac{d}{dt}\right) = -(\xi, 0).$$

Veamos por último que  $\mathcal{D}_2$  es una distribución slant (en el sentido de [33]). Para ello, basta probar que, para todo  $X \in \mathcal{D}$ ,

$$\frac{|P(X, 0)|}{|(X, 0)|}$$

es constante. Es fácil ver que  $P(X, 0) = (TX, 0)$ . Así,

$$\frac{|P(X, 0)|}{|(X, 0)|} = \frac{|TX|}{|X|} = \cos \theta,$$

siendo  $\theta$  el ángulo slant de  $M$ . □

**Nota 4.1.3.**— Hemos excluido el caso invariante en el teorema anterior pues en la definición de subvariedad semi-slant dada en [33] se pide que la distribución slant tenga ángulo no nulo. No obstante, es fácil determinar qué ocurre en este caso. Así, siguiendo el mismo razonamiento que antes, se comprueba fácilmente que si  $M$  es una subvariedad invariante de  $\widetilde{M}$ , entonces  $M \times \mathbf{R}$  es una subvariedad invariante de  $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$ .

El segundo ejemplo clásico fue desarrollado por Tashiro en [42]. Partimos ahora de una variedad casi Hermítica  $\widetilde{V}$  con estructura casi-compleja  $J$ . Sea  $\widetilde{M} \hookrightarrow \widetilde{V}$  una hipersuperficie orientable, isométricamente inmersa en  $\widetilde{V}$ . Denotaremos por  $g$  tanto la métrica de  $\widetilde{V}$  como la métrica inducida en  $\widetilde{M}$ .

Sea  $C$  la normal unitaria a  $\widetilde{M}$ . Entonces,  $\xi = -JC$  es tangente a  $M$ . Se definen  $\phi$  y  $\eta$  por

$$JX = \phi X + \eta(X)C, \quad (4.1.4)$$

cuando  $X$  es tangente a  $\widetilde{M}$ . A partir de esta expresión es inmediato probar que se verifican las ecuaciones (0.2.1)–(0.2.6). Así,  $(\phi, \xi, \eta, g)$  es una estructura casi-contacto métrica en  $\widetilde{M}$ .

**Nota 4.1.4.**— En las condiciones anteriores, se puede probar que la variedad  $\widetilde{M}$  es normal si y sólo si  $\xi$  es un campo de Killing [52]. Por otra parte, si denotamos por  $\widetilde{A}$  el operador de Weingarten de la inmersión de  $\widetilde{M}$  en  $\widetilde{V}$  y suponemos que  $\widetilde{V}$  es una variedad Kaehleriana, se tiene que  $\widetilde{M}$  es Sasakiana si y sólo si existe una función  $f$  tal que  $\widetilde{A} = -I + f\eta \otimes \xi$ , donde  $I$  denota la identidad.

Sea  $V \hookrightarrow \widetilde{V}$  una inmersión tal que  $C$  y  $\xi$  sean tangentes a  $V$ . Denotemos por  $\mathcal{D}_1$  la distribución en  $TV$  generada por  $C$  y  $\xi$ ,

$$\mathcal{D}_1 = \langle C, \xi \rangle$$

y por  $\mathcal{D}_2$  la distribución ortogonal de la anterior en  $TV$ . Supongamos que existen una hipersuperficie orientable  $M \hookrightarrow V$ , normal a  $C$  y una inmersión  $M \hookrightarrow \widetilde{M}$  tales que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \hookrightarrow & \widetilde{V} \\ \uparrow & & \uparrow \\ M & \hookrightarrow & V \end{array}$$

Podemos enunciar el siguiente resultado:

**Teorema 4.1.5.**— *En las condiciones anteriores,  $M$  es una subvariedad slant de  $\tilde{M}$ , con ángulo slant  $\theta \neq 0$ , si y sólo si  $V$  es una subvariedad semi-slant de  $\tilde{V}$ , con distribución invariante  $\mathcal{D}_1$  y distribución  $\theta$ -slant  $\mathcal{D}_2$ .*

DEMOSTRACIÓN: Dado que  $\xi = -JC$  por definición, resulta evidente que  $\mathcal{D}_1$  es siempre una distribución invariante. Así, basta probar que  $M$  es slant si y sólo si  $\mathcal{D}_2$  es una distribución slant en  $V$ . Ahora bien, con las identificaciones usuales, podemos escribir:

$$TM = \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle .$$

Así, en virtud de la Proposición 1.1.7, decir que  $M$  sea una subvariedad slant es equivalente a afirmar que la distribución  $\mathcal{D}_2$  sea slant, considerando la estructura casi-contacto  $\phi$ . Pero, dado que, en virtud de (4.1.4),  $\phi$  y  $J$  coinciden sobre  $\mathcal{D}_2$ , lo anterior será equivalente a decir que  $\mathcal{D}_2$  sea una distribución slant de  $V$ , con el mismo ángulo. Esto concluye la prueba.  $\square$

**Nota 4.1.6.**— Al igual que antes, podemos completar el resultado anterior observando que  $M$  es invariante si y sólo si la distribución  $\mathcal{D}_2$  es invariante, lo cual implica que  $V$  es invariante. Es más, de ser  $V$  invariante se deduce también que  $\mathcal{D}_2$  ha de ser invariante. En efecto, dado  $X \in \mathcal{D}_2$ ,  $JX \in TV$ . Ahora bien, se verifican:

$$g(JX, C) = -g(X, JC) = g(X, \xi) = 0,$$

$$g(JX, \xi) = -g(X, J\xi) = -g(X, C) = 0.$$

Así,  $JX \in \mathcal{D}_2$ . Así, podemos afirmar que  $M$  es invariante si y sólo si  $V$  lo es.

## 4.2 Subvariedades Bi-slant.

En esta sección introducimos la noción de subvariedad *bi-slant* como una generalización natural de las subvariedades slant. Para ello, empleamos el concepto de distribución slant en una subvariedad de una variedad casi-contacto métrica, presentado en la Definición 1.1.4.

Sea  $M$  una variedad Riemanniana isométricamente inmersa en una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$ , tal que  $\xi \in TM$ .

**Definición 4.2.1.**— Diremos que  $M$  es una subvariedad bi-slant de  $\widetilde{M}$  si existen dos distribuciones ortogonales  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  en  $M$  tales que:

(i)  $TM$  admite la descomposición en suma directa ortogonal:

$$TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle .$$

(ii) Para  $i = 1, 2$ ,  $\mathcal{D}_i$  es una distribución slant con ángulo slant  $\theta_i$ .

Dada una subvariedad bi-slant  $M$ , para todo  $X \in TM$  podemos escribir

$$X = P_1X + P_2X + \eta(X)\xi, \quad (4.2.1)$$

donde denotamos por  $P_iX$  la componente de  $X$  en  $\mathcal{D}_i$ , para  $i = 1, 2$ . En particular, si  $X \in \mathcal{D}_i$ , se obtiene  $X = P_iX$ . Si definimos  $T_i = P_i \circ T$ , se tendrá que

$$\phi X = T_1X + T_2X + NX, \quad (4.2.2)$$

para todo  $X \in TM$ , dado que  $\eta(\phi X) = 0$ .

Denotemos por  $d_1$  (resp.  $d_2$ ) la dimensión de la distribución  $\mathcal{D}_1$  (resp.  $\mathcal{D}_2$ ). En virtud de la Proposición 1.1.7, si  $d_1$  ó  $d_2$  es cero, la subvariedad bi-slant es una subvariedad slant. Así, las subvariedades slant (entre las cuales se encuentran, como ya sabemos, las subvariedades invariantes y anti-invariantes) son casos particulares de subvariedades bi-slant. Además, podemos encontrar fácilmente ejemplos de subvariedades bi-slant tales que ambas distribuciones slant sean no triviales.

**Ejemplo 4.2.2.**— Dados  $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi/2]$ ,

$$x(u, v, w, s, t) = 2(u, 0, w, 0, v \cos \theta_1, v \sin \theta_1, s \cos \theta_2, s \sin \theta_2, t)$$

define una subvariedad bi-slant  $M$  de dimensión 5 con ángulos slant  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en  $\mathbf{R}^9$  con su estructura Sasakiana usual  $(\phi_0, \xi, \eta, g)$ .



En efecto, es fácil ver que

$$\begin{aligned}
e_1 &= 2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z}\right), \\
e_2 &= \cos \theta_1 \left(2\frac{\partial}{\partial y^1}\right) + \operatorname{sen} \theta_1 \left(2\frac{\partial}{\partial y^2}\right), \\
e_3 &= 2\left(\frac{\partial}{\partial x^3} + y^3 \frac{\partial}{\partial z}\right), \\
e_4 &= \cos \theta_2 \left(2\frac{\partial}{\partial y^3}\right) + \operatorname{sen} \theta_2 \left(2\frac{\partial}{\partial y^4}\right), \\
e_5 &= 2\frac{\partial}{\partial z} = \xi
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

forman una referencia local ortonormal de  $TM$ . Definimos las distribuciones:

$$\mathcal{D}_1 = \langle e_1, e_2 \rangle, \quad \mathcal{D}_2 = \langle e_3, e_4 \rangle.$$

Entonces, está claro que  $TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ . Veamos que  $\mathcal{D}_i$  es una distribución slant con ángulo  $\theta_i$ , para  $i = 1, 2$ . Se calcula directamente que:

$$\begin{aligned}
\phi_0 e_1 &= -2\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right), \\
\phi_0 e_2 &= \cos \theta_1 \left(2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z}\right)\right) + \operatorname{sen} \theta_1 \left(2\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z}\right)\right), \\
\phi_0 e_3 &= -2\left(\frac{\partial}{\partial y^3}\right), \\
\phi_0 e_4 &= \cos \theta_2 \left(2\left(\frac{\partial}{\partial x^3} + y^3 \frac{\partial}{\partial z}\right)\right) + \operatorname{sen} \theta_2 \left(2\left(\frac{\partial}{\partial x^4} + y^4 \frac{\partial}{\partial z}\right)\right), \\
\phi_0 e_5 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Así, dado  $X \in \mathcal{D}_1$  no nulo, podemos escribir  $X = X^1 e_1 + X^2 e_2$ , de donde  $\phi_0 X = X^1 \phi_0 e_1 + X^2 \phi_0 e_2$ . En virtud de los cálculos anteriores,

$$T_1 X = g(\phi_0 X, e_1) e_1 + g(\phi_0 X, e_2) e_2 = \cos \theta_1 X^2 e_1 - \cos \theta_1 X^1 e_2,$$

lo cual implica que:

$$|T_1 X|^2 = \cos^2 \theta_1 ((X^1)^2 + (X^2)^2). \tag{4.2.5}$$

Ahora bien,  $|X|^2 = (X^1)^2 + (X^2)^2$ , de donde se sigue, junto con (4.2.5), que

$$\frac{g(\phi_0 X, T_1 X)}{|\phi_0 X| |T_1 X|} = \frac{|T_1 X|}{|X|} = \cos \theta_1,$$

es decir, el ángulo entre  $\phi_0 X$  y  $\mathcal{D}_1$  es la constante  $\theta_1$ . Esto indica, por definición, que  $\mathcal{D}_1$  es una distribución slant con ángulo  $\theta_1$ . Análogamente, se puede probar que  $\mathcal{D}_2$  es una distribución slant con ángulo  $\theta_2$ .

En particular, si consideramos en el Ejemplo 4.2.2 que  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ , resulta que la subvariedad  $M$  es  $\theta$ -slant. En efecto, puede comprobarse que, en tal caso, si expresamos  $X \in TM$  en función de la referencia local ortonormal  $\{e_1, \dots, e_5\}$  en la forma  $X = \sum_{i=1}^4 X^i e_i + \eta(X)\xi$ , se tiene que:

$$TX = \cos \theta (X^2 e_1 - X^1 e_2 + X^4 e_3 - X^3 e_4).$$

Así,

$$\frac{|TX|}{\sqrt{|X|^2 - \eta^2(X)}} = \cos \theta,$$

siempre que  $X$  no sea proporcional a  $\xi$ , es decir,  $M$  es slant.

Sin embargo, éste no es un hecho general, tal y como pone de manifiesto el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 4.2.3.**— Sea  $\theta_1 \in [0, \pi/2]$  cualquiera. Elegimos  $\theta_2 \in (0, \pi/2]$  tal que:

$$\frac{\cos \theta_1}{\sqrt{2}} = \cos \theta_2. \quad (4.2.6)$$

Entonces,

$$x(u, v, w, s, t) = 2(u, 0, w, u, v \cos \theta_1, v \sin \theta_1, s \cos \theta_2, s \sin \theta_2, t)$$

define una subvariedad bi-slant  $M$  de dimensión 5 en  $(\mathbf{R}^9, \phi_0, \xi, \eta, g)$ , con ambos ángulos slant iguales a  $\theta_2$ , tal que no es slant.

Comprobemos que  $M$  es bi-slant. De manera similar a como hicimos antes, podemos elegir una referencia local ortonormal  $\{e_1, \dots, e_5\}$  de  $TM$  tal que

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z} \right) + 2 \left( \frac{\partial}{\partial x^4} + y^4 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} \quad (4.2.7)$$

y los campos  $e_2, \dots, e_5$  estén definidos por (4.2.3). Así,

$$\phi_0 e_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial y^1} + 2 \frac{\partial}{\partial y^4} \right\}, \quad (4.2.8)$$

mientras que  $\phi e_i$  viene dado por (4.2.4) para cada  $i = 2, \dots, 5$ . Definimos, al igual que en el Ejemplo 4.2.2:

$$\mathcal{D}_1 = \langle e_1, e_2 \rangle, \quad \mathcal{D}_2 = \langle e_3, e_4 \rangle.$$

Es fácil ver que, en virtud de (4.2.3), (4.2.4), (4.2.7) y (4.2.8),

$$T_1 e_1 = -\frac{\cos \theta_1}{\sqrt{2}} e_2, \quad T_1 e_2 = \frac{\cos \theta_1}{\sqrt{2}} e_1, \quad (4.2.9)$$

obteniéndose también:

$$T_2 e_1 = -\frac{\text{sen } \theta_2}{\sqrt{2}} e_4. \quad (4.2.10)$$

Las ecuaciones (4.2.6) y (4.2.9) implican que, para todo  $X \in \mathcal{D}_1$  no nulo:

$$\frac{|T_1 X|}{|X|} = \cos \theta_2.$$

Así,  $\mathcal{D}_1$  es una distribución slant con ángulo  $\theta_2$ . Se puede probar, mediante un razonamiento análogo, que  $\mathcal{D}_2$  es también slant con el mismo ángulo.

Sin embargo, de (4.2.9) y (4.2.10) se sigue que

$$T e_1 = T_1 e_1 + T_2 e_1 = -\frac{\cos \theta_1}{\sqrt{2}} e_2 - \frac{\text{sen } \theta_2}{\sqrt{2}} e_4,$$

de donde, en virtud de (4.2.6):

$$\frac{|T e_1|}{|e_1|} = \sqrt{\frac{\cos^2 \theta_1 + \text{sen }^2 \theta_2}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \theta_2}{2}}. \quad (4.2.11)$$

Ahora bien, de (4.2.3) y (4.2.4) se tiene:

$$\frac{|T e_3|}{|e_3|} = \cos \theta_2. \quad (4.2.12)$$

Si la subvariedad  $M$  fuera slant, en particular las ecuaciones (4.2.11) y (4.2.12) deberían coincidir, pero es trivial ver que  $\sqrt{(1 + \cos^2 \theta_2)}/2 = \cos \theta_2$  si y sólo si  $\theta_2 = 0$ , lo cual es imposible dada la elección del ángulo  $\theta_2$ . Por tanto,  $M$  no es slant.

Podemos, no obstante, dar una condición suficiente para que una subvariedad bi-slant con ángulos iguales sea una subvariedad slant.

**Proposición 4.2.4.**— *Sea  $M$  una subvariedad bi-slant con ángulos  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ . Si*

$$g(\phi X, Y) = 0 \quad (4.2.13)$$

para todo  $X \in \mathcal{D}_1$  y todo  $Y \in \mathcal{D}_2$ , entonces  $M$  es slant con ángulo  $\theta$ .

DEMOSTRACIÓN: El suponer que los dos ángulos slant de  $M$  sean iguales implica que, para todo  $X \in \mathcal{D}_i$ ,  $i = 1, 2$ :

$$|T_i X| = \cos \theta |X|. \quad (4.2.14)$$

Dado  $X \in TM$ , (4.2.1) implica:

$$|X|^2 - \eta^2(X) = |P_1 X|^2 + |P_2 X|^2. \quad (4.2.15)$$

Por otra parte, también se sigue de (4.2.1) que:

$$TX = TP_1 X + TP_2 X. \quad (4.2.16)$$

Ahora bien, en virtud de (4.2.13), para todo  $Y \in \mathcal{D}_2$ ,

$$g(TP_1 X, Y) = g(\phi P_1 X, Y) = 0,$$

de donde se deduce que  $TP_1 X \in \mathcal{D}_1$  y, por tanto, podemos escribir:

$$TP_1 X = P_1 TP_1 X = T_1 P_1 X. \quad (4.2.17)$$

Análogamente, para todo  $Z \in \mathcal{D}_1$ ,

$$g(TP_2 X, Z) = g(\phi P_2 X, Z) = -g(P_2 X, \phi Z) = 0,$$

de nuevo en virtud de (4.2.13). Esto implica:

$$TP_2 X = P_2 TP_2 X = T_2 P_2 X. \quad (4.2.18)$$

Luego, de (4.2.16)–(4.2.18) se tiene que

$$TX = T_1 P_1 X + T_2 P_2 X,$$

de donde se sigue:

$$|TX|^2 = |T_1P_1X|^2 + |T_2P_2X|^2. \quad (4.2.19)$$

Dado que  $P_iX \in \mathcal{D}_i$ , para  $i = 1, 2$ , (4.2.14) implica:

$$|T_iP_iX| = \cos \theta |P_iX|. \quad (4.2.20)$$

Finalmente, en virtud de (4.2.15), (4.2.19) y (4.2.20), tenemos que:

$$|TX|^2 = \cos^2 \theta (|P_1X|^2 + |P_2X|^2) = \cos^2 \theta (|X|^2 - \eta^2(X)).$$

Así, para todo  $X \in TM$  no proporcional a  $\xi$ , se obtiene:

$$\frac{|TX|}{\sqrt{|X|^2 - \eta^2(X)}} = \cos \theta.$$

Como sabemos, esto quiere decir que la subvariedad  $M$  es slant.  $\square$

**Nota 4.2.5.**— Observemos que la condición adicional presentada en la Proposición 4.2.4 se verifica trivialmente para el Ejemplo 4.2.2.

Las subvariedades bi-slant no sólo generalizan a las slant, sino que también engloban a las subvariedades semi-invariantes, introducidas por Bejancu y Papaghiuc en [2]. En este trabajo, dada una subvariedad  $M$  de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$ , tal que  $\xi$  es tangente a  $M$ , se dice que  $M$  es semi-invariante si existen en  $M$  dos distribuciones diferenciables ortogonales  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{D}^\perp$  tales que:

- (i)  $TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp \oplus \langle \xi \rangle$ .
- (ii) La distribución  $\mathcal{D}$  es invariante, es decir,  $\phi\mathcal{D} = \mathcal{D}$ .
- (iii) La distribución  $\mathcal{D}^\perp$  es anti-invariante, es decir,  $\phi\mathcal{D}^\perp \subset T^\perp M$ .

Veamos que, en realidad, las subvariedades semi-invariantes son subvariedades bi-slant con ángulos  $\theta_1 = 0$  y  $\theta_2 = \pi/2$ . Para ello, precisaremos los siguientes lemas.

**Lema 4.2.6.**— Sea  $M$  una subvariedad de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$  tal que  $\xi \in TM$ . Supongamos que existen dos distribuciones ortogonales en  $M$ ,  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  tales que  $TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ . Entonces,  $\mathcal{D}_1$  es invariante si y sólo si es slant con ángulo  $\theta_1 = 0$ .

DEMOSTRACIÓN: Es inmediato probar que si  $\mathcal{D}_1$  es invariante, entonces es slant con ángulo nulo. En efecto, dado que para todo  $X \in \mathcal{D}_1$  no nulo,  $\phi X \in \mathcal{D}_1$ , la proyección de  $\phi X$  sobre  $\mathcal{D}_1$  coincide con el mismo  $\phi X$ , lo cual implica que el ángulo entre  $\phi X$  y  $\mathcal{D}_1$  es cero.

Recíprocamente, supongamos que  $\mathcal{D}_1$  es una distribución slant con ángulo  $\theta_1 = 0$ . Probemos que  $\phi(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_1$ . Para ello, sea  $X \in \mathcal{D}_1$ . Como, por hipótesis,  $\mathcal{D}_1$  es ortogonal a  $\xi$ , en virtud de (0.2.6), se tiene:

$$|\phi X|^2 = |X|^2. \quad (4.2.21)$$

Además, al ser  $\mathcal{D}_1$  una distribución slant con ángulo nulo, obtenemos:

$$|T_1 X| = |X|. \quad (4.2.22)$$

Así, de (4.2.21) y (4.2.22) se deduce:

$$|\phi X|^2 = |T_1 X|^2. \quad (4.2.23)$$

Por otra parte, la ecuación (4.2.2) implica

$$|\phi X|^2 = |T_1 X|^2 + |T_2 X|^2 + |NX|^2, \quad (4.2.24)$$

de donde, junto con (4.2.23), se deduce que  $T_2 X = 0$  y  $NX = 0$ . Por tanto, se obtiene  $\phi X = T_1 X \in \mathcal{D}_1$ .

Esto prueba  $\phi(\mathcal{D}_1) \subseteq \mathcal{D}_1$ . Para demostrar la otra inclusión, basta observar que, dado  $X \in \mathcal{D}_1$ , podemos escribir  $X = \phi(-\phi X)$ , estando  $-\phi X$  en  $\mathcal{D}_1$ , como ya hemos probado.  $\square$

**Lema 4.2.7.**— Sea  $M$  una subvariedad de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$  tal que  $\xi \in TM$ . Supongamos que existen dos distribuciones ortogonales en  $M$ ,  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  tales que  $TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ . Si  $\mathcal{D}_1$  es invariante, entonces  $TX = T_2 X$  para todo  $X \in \mathcal{D}_2$ .

DEMOSTRACIÓN: Dados  $X \in \mathcal{D}_1$  e  $Y \in \mathcal{D}_2$ , se tiene

$$g(TX, Y) = g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y) = 0,$$

pues  $\mathcal{D}_1$  es invariante. Así,  $T_1X = 0$ , de donde se sigue el resultado.  $\square$

**Proposición 4.2.8.**— *Sea  $M$  una subvariedad de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$  tal que  $\xi \in TM$ . Entonces,  $M$  es semi-invariante si y sólo si  $M$  es bi-slant con ángulos  $\theta_1 = 0$  y  $\theta_2 = \pi/2$ .*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $M$  es una subvariedad semi-invariante. Entonces, es inmediato observar que la distribución invariante es una distribución slant con ángulo 0, mientras que la distribución anti-invariante es slant con ángulo  $\pi/2$ . Luego,  $M$  es trivialmente una subvariedad bi-slant en las condiciones del enunciado.

Recíprocamente, supongamos que  $M$  es una subvariedad bi-slant con distribuciones slant  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  con ángulos  $\theta_1 = 0$  y  $\theta_2 = \pi/2$  respectivamente. Entonces, en virtud del Lema 4.2.6, la distribución  $\mathcal{D}_1$  es invariante. Por tanto, basta probar que  $\mathcal{D}_2$  es anti-invariante, es decir, que  $\phi X \in T^\perp M$  para todo  $X \in \mathcal{D}_2$ . Pero esto es inmediato ya que, en virtud del Lema 4.2.7,  $TX = T_2X = 0$ , al ser  $\mathcal{D}_2$  slant con ángulo  $\pi/2$ . Así, (4.2.2) implica que  $\phi X = NX \in T^\perp M$ .  $\square$

Sea  $M$  una subvariedad de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$  tal que admite una descomposición ortogonal de la forma  $TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ . En la demostración anterior hemos señalado que, si  $\mathcal{D}_2$  es una distribución anti-invariante, entonces es slant con ángulo  $\pi/2$ . Parece pues natural preguntarnos ahora si el recíproco también es cierto. En tal caso, podríamos enunciar un resultado análogo al Lema 4.2.6.

En la demostración de la Proposición 4.2.8, se ve que dicho recíproco es cierto en el caso en que  $\mathcal{D}_1$  sea invariante. Sin embargo, en general no tiene por qué verificarse. Esto se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo, obtenido a partir del Ejemplo 4.2.3 con  $\theta_1 = \pi/2$ .

**Ejemplo 4.2.9.**— La ecuación

$$x(u, v, w, s, t) = 2(u, 0, w, u, 0, v, 0, s, t)$$

define una subvariedad  $M$  de dimensión 5 en  $(\mathbf{R}^9, \phi_0, \xi, \eta, g)$ , tal que existen en  $M$  dos distribuciones ortogonales  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  verificando las condiciones:

- (i)  $TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ .
- (ii)  $\mathcal{D}_2$  es slant con ángulo  $\pi/2$  pero no es anti-invariante.

En efecto, de manera similar a como hicimos en los ejemplos anteriores, podemos elegir una base local ortonormal en  $TM$ , formada por los campos:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z}\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial x^4} + y^4 \frac{\partial}{\partial z}\right) \right\} \\ e_2 &= 2\frac{\partial}{\partial y^2}, \\ e_3 &= 2\left(\frac{\partial}{\partial x^3} + y^3 \frac{\partial}{\partial z}\right), \\ e_4 &= 2\frac{\partial}{\partial y^4}, \\ e_5 &= 2\frac{\partial}{\partial z} = \xi. \end{aligned}$$

Definimos:

$$\mathcal{D}_1 = \langle e_3, e_4 \rangle \text{ y } \mathcal{D}_2 = \langle e_1, e_2 \rangle.$$

Es inmediato entonces comprobar que se verifica la condición (i) anterior. Por otra parte, es fácil ver que en estas condiciones,

$$\phi_0 e_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 2\frac{\partial}{\partial y^1} + 2\frac{\partial}{\partial y^4} \right\} \text{ y } \phi_0 e_2 = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

de donde se deduce que  $T_1 e_1 = T_1 e_2 = 0$ . Así,  $\mathcal{D}_2$  es slant con ángulo  $\pi/2$ . Sin embargo,  $T_2 e_1 = -1/\sqrt{2}e_4$ , lo cual implica que  $\phi_0 e_1$  no es normal a  $M$ , pues tiene una componente tangente en  $\mathcal{D}_1$ . Por lo tanto,  $\mathcal{D}_2$  no es anti-invariante.

Para finalizar esta sección, presentamos el siguiente resultado general para subvariedades bi-slant, que nos será de utilidad para cálculos posteriores.

**Teorema 4.2.10.**— *Sea  $M$  una subvariedad bi-slant de una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$ . Denotemos por  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  las distribuciones slant de  $M$ , con ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  respectivamente. Entonces, para  $i = 1, 2$ ,*

$$T_i^2 X = -\cos^2 \theta_i X, \quad (4.2.25)$$

para cada  $X \in \mathcal{D}_i$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Vamos a demostrar el resultado para  $i = 1$ . Para  $i = 2$  se procedería de manera totalmente análoga.



Podemos suponer que  $\theta_1 \in [0, \pi/2)$ , pues si  $\theta_1 = \pi/2$ , se verifica trivialmente el resultado. Por otra parte, en lo sucesivo podemos considerar  $X \in \mathcal{D}_1$  no nulos, pues si  $X = 0$ , (4.2.25) se obtiene inmediatamente.

Como  $\mathcal{D}_1$  es una distribución slant con ángulo  $\theta_1$ , sabemos que

$$|T_1 X| = \cos \theta_1 |X|, \quad (4.2.26)$$

para todo  $X \in \mathcal{D}_1$ . En particular, si  $X \neq 0$  esto implica que  $T_1 X \neq 0$ , pues suponemos  $\theta_1 \neq \pi/2$ . Ahora, en virtud de (4.2.2),

$$\phi T_1 X = T_1^2 X + T_2 T_1 X + N T_1 X,$$

de donde:

$$g(T_1^2 X, X) = g(\phi T_1 X, X) = -g(T_1 X, \phi X) = -|T_1 X|^2. \quad (4.2.27)$$

Así, de (4.2.26) y (4.2.27) se deduce:

$$g(T_1^2 X, X) = -\cos^2 \theta_1 |X|^2. \quad (4.2.28)$$

Pero,  $T_1 X \in \mathcal{D}_1$ , por lo que, en virtud de (4.2.26), resulta:

$$|T_1^2 X| = \cos \theta_1 |T_1 X|. \quad (4.2.29)$$

Entonces, de (4.2.26) y (4.2.29) se sigue:

$$|T_1^2 X| = \cos^2 \theta_1 |X|. \quad (4.2.30)$$

Luego, de (4.2.28) y (4.2.30), obtenemos que  $g(T_1^2 X, X) = -|T_1^2 X||X|$ , lo cual implica finalmente:

$$\frac{g(T_1^2 X, X)}{|T_1^2 X||X|} = -1.$$

Así, ha de existir un escalar  $\lambda$  tal que  $T_1^2 X = -\lambda X$ , de donde se deduce:

$$g(T_1^2 X, X) = -\lambda |X|^2.$$

Comparando esta expresión con (4.2.28), llegamos a la conclusión de que  $\lambda = \cos^2 \theta_1$ , lo cual concluye la demostración.  $\square$

**Nota 4.2.11.**— Observemos que el Teorema 4.2.10 es una generalización de la implicación directa del Teorema 1.2.1, obteniéndose éste cuando  $d_1 = 0$  ó  $d_2 = 0$ . Veamos que esto es cierto.

Supongamos que  $M$  es una subvariedad slant, con ángulo  $\theta$ , y denotemos por  $\mathcal{D}$  la distribución slant de  $M$ . Entonces, está claro que en esta situación, la proyección tangente sobre la distribución  $\mathcal{D}$  coincide con  $T$ . Así, en virtud del Teorema 4.2.10, para todo  $Y \in \mathcal{D}$ , se tendría que  $T^2Y = -\cos^2\theta Y$ . Ahora bien, dado  $X \in TM$ , podemos escribir  $X = \widetilde{X} + \eta(X)\xi$ , siendo  $\widetilde{X} \in \mathcal{D}$ . Por tanto:

$$T^2\widetilde{X} = -\cos^2\theta \widetilde{X} = -\cos^2\theta(X - \eta(X)\xi).$$

Dado que  $T^2\widetilde{X} = T^2(X - \eta(X)\xi) = T^2X$ , se obtiene la ya habitual expresión del Teorema 1.2.1:

$$T^2X = -\cos^2\theta X + \cos^2\theta\eta(X)\xi.$$

### 4.3 Subvariedades Semi-slant de una Variedad Sasakiana.

Un caso particularmente interesante de subvariedades bi-slant, al que dedicaremos esta sección, será el de las subvariedades semi-slant.

Sea  $M$  una variedad Riemanniana isométricamente inmersa en una variedad casi-contacto métrica  $\widetilde{M}$ , tal que  $\xi \in TM$ .

**Definición 4.3.1.**— Diremos que  $M$  es una subvariedad semi-slant de  $\widetilde{M}$  si existen dos distribuciones ortogonales  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  en  $M$  tales que:

(i)  $TM$  admite la descomposición en suma directa ortogonal:

$$TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle.$$

(ii) La distribución  $\mathcal{D}_1$  es una distribución invariante, es decir,  $\phi(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_1$ .

(iii) La distribución  $\mathcal{D}_2$  es slant con ángulo  $\theta \neq 0$ .

Por abuso de lenguaje, llamaremos al ángulo  $\theta$  *ángulo slant* de la subvariedad  $M$ .

En virtud del Lema 4.2.6, la distribución invariante de una subvariedad semi-slant es una distribución slant de ángulo nulo. Así, es trivial observar que, en efecto, las subvariedades semi-slant son casos particulares de subvariedades bi-slant. Además, en virtud de la Proposición 4.2.8, está claro que si  $\theta = \pi/2$ , entonces la subvariedad semi-slant es una subvariedad semi-invariante. Por otra parte, las subvariedades semi-slant engloban también a las subvariedades slant. Si denotamos por  $d_i$  la dimensión de la distribución  $\mathcal{D}_i$ , para  $i = 1, 2$ , encontramos los siguientes casos:

- (a) Si  $d_2 = 0$ , entonces  $M$  es una subvariedad invariante.
- (b) Si  $d_1 = 0$  y  $\theta = \pi/2$ , entonces  $M$  es una subvariedad anti-invariante.
- (c) Si  $d_1 = 0$  y  $\theta \neq \pi/2$ , entonces  $M$  es una subvariedad slant propia, con ángulo  $\theta$ .

Los casos más interesantes de subvariedades semi-slant serán aquellos en los que ambas distribuciones sean no triviales y el ángulo slant sea distinto de  $\pi/2$ .

**Definición 4.3.2.**— Diremos que una subvariedad semi-slant es propia si  $d_1 d_2 \neq 0$  y  $\theta \neq \pi/2$ .

Es fácil probar que existen ejemplos de subvariedades semi-slant propias. Concretamente, tomando  $\theta_1 = 0$  y  $\theta_2 = \theta \in (0, \pi/2)$  en el Ejemplo 4.2.2, obtenemos:

**Ejemplo 4.3.3.**— Para cada  $\theta \in (0, \pi/2)$ ,

$$x(u, v, w, s, t) = 2(u, 0, w, 0, v, 0, s \cos \theta, s \sin \theta, t)$$

define una subvariedad semi-slant propia  $M$ , de dimensión 5, con ángulo slant  $\theta$  en  $\mathbf{R}^9$  con su estructura Sasakiana usual  $(\phi_0, \xi, \eta, g)$ .

Dada una subvariedad semi-slant  $M$ , seguiremos denotando por  $P_i$  la proyección sobre la distribución  $\mathcal{D}_i$ , para  $i = 1, 2$ , y por  $T_i$  la composición de

$T$  con  $P_i$ , es decir, para cada  $X \in TM$ ,

$$T_i X = P_i T X,$$

para  $i = 1, 2$ . Así, las expresiones (4.2.1) y (4.2.2) continúan siendo válidas.

Por otra parte, aplicando  $\phi$  en (4.2.1), en virtud de (0.3.1), obtenemos, para todo  $X \in TM$ :

$$\phi X = \phi P_1 X + T P_2 X + N P_2 X. \quad (4.3.1)$$

Enunciamos en primer lugar el siguiente lema, que nos será de utilidad en los desarrollos posteriores.

**Lema 4.3.4.**— *Si  $M$  es una subvariedad semi-slant, entonces, para todo  $X \in TM$ :*

$$(i) \quad \phi P_1 X = T P_1 X \text{ y } N P_1 X = 0.$$

$$(ii) \quad T P_2 X \in \mathcal{D}_2.$$

**DEMOSTRACIÓN:** Como, para todo  $X \in TM$ ,  $P_1 X \in \mathcal{D}_1$  y que esta distribución es invariante, se tiene que  $\phi P_1 X \in \mathcal{D}_1$ , de donde se sigue el apartado (i). Para probar (ii), dado que  $T P_2 X \in TM$  y  $\eta(T P_2 X) = 0$ , basta observar que, para todo  $Z \in \mathcal{D}_1$ ,

$$g(T P_2 X, Z) = g(\phi P_2 X, Z) = -g(P_2 X, \phi Z) = 0,$$

pues  $P_2 X \in \mathcal{D}_2$  y  $\phi Z \in \mathcal{D}_1$ . □

En particular, (4.3.1) y el apartado (i) del Lema 4.3.4 implican que, para todo  $X \in TM$ :

$$T X = \phi P_1 X + T P_2 X. \quad (4.3.2)$$

En el caso en que la variedad  $\widetilde{M}$  sea  $K$ -contacto, obtenemos la siguiente generalización de la Proposición 1.2.3:

**Lema 4.3.5.**— *Sea  $M$  una subvariedad semi-slant, con ángulo  $\theta$ , de una variedad  $K$ -contacto  $\widetilde{M}$ . Entonces, para todo  $X, Y \in TM$ :*

$$g(T X, T P_2 Y) = \cos^2 \theta g(X, P_2 Y), \quad (4.3.3)$$

$$g(N X, N P_2 Y) = \sen^2 \theta g(X, P_2 Y). \quad (4.3.4)$$

DEMOSTRACIÓN: Dados  $X, Y \in TM$ , está claro que:

$$g(TX, TP_2Y) = g(TP_1X, TP_2Y) + g(TP_2X, TP_2Y). \quad (4.3.5)$$

Ahora bien, en virtud del Lema 4.3.4,  $TP_1X \in \mathcal{D}_1$ , mientras que  $TP_2Y \in \mathcal{D}_2$ , por lo cual:

$$g(TP_1X, TP_2Y) = 0. \quad (4.3.6)$$

Por otra parte:

$$g(TP_2X, TP_2Y) = -g(P_2X, T^2P_2Y).$$

Pero, como  $TP_2Y \in \mathcal{D}_2$ , podemos afirmar que  $TP_2Y = P_2TP_2Y = T_2P_2Y$  y, análogamente,  $T^2P_2Y = T_2^2P_2Y = -\cos^2\theta P_2Y$ , en virtud del Teorema 4.2.10. De todo ello deducimos que:

$$g(TP_2X, TP_2Y) = \cos^2\theta g(P_2X, P_2Y) = \cos^2\theta g(X, P_2Y). \quad (4.3.7)$$

Sustituyendo (4.3.6) y (4.3.7) en (4.3.5), se obtiene la ecuación (4.3.3). Por otra parte, (4.3.4) resulta simplemente de observar que

$$\begin{aligned} g(NX, NP_2Y) &= g(\phi X, \phi P_2Y) - g(TX, TP_2Y) = \\ &= g(X, P_2Y) - g(TX, TP_2Y) \end{aligned}$$

y de aplicar (4.3.3). □

En lo sucesivo, trabajaremos con subvariedades semi-slant de una variedad Sasakiana. Nuestro objetivo para el resto de esta sección se centra en el estudio de la integrabilidad de las distribuciones  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$ , así como en la generalización del concepto de subvariedad slant Sasakiana (ver Definición 2.2.4). En primer lugar, aplicando el que la variedad  $\widetilde{M}$  sea Sasakiana, obtenemos el siguiente resultado:

**Lema 4.3.6.**— *Sea  $M$  una subvariedad semi-slant de una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$ . Entonces, para todos  $X, Y \in TM$ , se verifican:*

$$\begin{aligned} P_1(\nabla_X \phi P_1Y) + P_1(\nabla_X TP_2Y) &= \\ = \phi P_1(\nabla_X Y) + P_1 A_{NP_2Y} X - \eta(Y) P_1 X, \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

$$\begin{aligned}
& P_2(\nabla_X \phi P_1 Y) + P_2(\nabla_X T P_2 Y) = \\
& = T P_2(\nabla_X Y) + P_2 A_{NP_2 Y} X + t\sigma(X, Y) - \eta(Y) P_2 X, \quad (4.3.9)
\end{aligned}$$

$$\eta(\nabla_X \phi P_1 Y) + \eta(\nabla_X T P_2 Y) = \eta(A_{NP_2 Y} X) + g(\phi X, \phi Y), \quad (4.3.10)$$

$$\sigma(\phi P_1 Y, X) + \sigma(T P_2 Y, X) + D_X N P_2 Y = N P_2(\nabla_X Y) + n\sigma(X, Y). \quad (4.3.11)$$

DEMOSTRACIÓN: Sean  $X, Y \in TM$ . Como la variedad  $\widetilde{M}$  es Sasakiana, sabemos que:

$$\widetilde{\nabla}_X \phi Y = \phi \widetilde{\nabla}_X Y + g(X, Y)\xi - \eta(Y)X. \quad (4.3.12)$$

Calculemos  $\widetilde{\nabla}_X \phi Y$  y  $\phi \widetilde{\nabla}_X Y$ . En virtud de (4.3.1), se tiene:

$$\widetilde{\nabla}_X \phi Y = \widetilde{\nabla}_X \phi P_1 Y + \widetilde{\nabla}_X T P_2 Y + \widetilde{\nabla}_X N P_2 Y. \quad (4.3.13)$$

Ahora bien, el Lema 4.3.4 nos indica que  $\phi P_1 Y = T P_1 Y$ , lo cual, en particular, indica que  $\phi P_1 Y$  es tangente a  $M$ . Por lo tanto, podemos aplicar la fórmula de Gauss para obtener:

$$\widetilde{\nabla}_X \phi P_1 Y = \nabla_X \phi P_1 Y + \sigma(\phi P_1 Y, X). \quad (4.3.14)$$

En cuanto a los dos últimos sumandos de (4.3.13), en virtud de las fórmulas de Gauss y de Weingarten, respectivamente, resulta:

$$\begin{aligned}
& \widetilde{\nabla}_X T P_2 Y + \widetilde{\nabla}_X N P_2 Y = \\
& = \nabla_X T P_2 Y + \sigma(T P_2 Y, X) - A_{NP_2 Y} X + D_X N P_2 Y. \quad (4.3.15)
\end{aligned}$$

Por otra parte, aplicando  $\phi$  en la fórmula de Gauss, se obtiene

$$\phi \widetilde{\nabla}_X Y = \phi \nabla_X Y + \phi \sigma(X, Y),$$

de donde, en virtud de (0.3.2) y (4.3.1), se sigue:

$$\phi \widetilde{\nabla}_X Y = \phi P_1 \nabla_X Y + T P_2 \nabla_X Y + N P_2 \nabla_X Y + t\sigma(X, Y) + n\sigma(X, Y). \quad (4.3.16)$$

Así, a partir de (4.3.12)–(4.3.16), llegamos a

$$\begin{aligned}
& \nabla_X \phi P_1 Y + \sigma(\phi P_1 Y, X) + \nabla_X T P_2 Y + \sigma(T P_2 Y, X) - A_{NP_2 Y} X + \\
& + D_X N P_2 Y = \phi P_1 \nabla_X Y + T P_2 \nabla_X Y + N P_2 \nabla_X Y + t\sigma(X, Y) +
\end{aligned}$$

$$+ n\sigma(X, Y) + g(X, Y)\xi - \eta(Y)P_1X - \eta(Y)P_2X - \eta(Y)\eta(X)\xi, \quad (4.3.17)$$

donde  $X$  se descompone en virtud de (4.2.1). Al ser  $\mathcal{D}_1$  invariante, sabemos que  $\phi P_1 \nabla_X Y \in \mathcal{D}_1$ . En virtud del Lema 4.3.4, podemos afirmar también que  $TP_2 \nabla_X Y \in \mathcal{D}_2$ . Además,  $t\sigma(X, Y) \in \mathcal{D}_2$ , dado que, para todo  $Z \in \mathcal{D}_1$ ,

$$g(t\sigma(X, Y), Z) = -g(\sigma(X, Y), \phi Z) = 0,$$

pues  $\sigma(X, Y) \in T^\perp M$  y  $\phi Z \in \mathcal{D}_1 \subset TM$ , mientras que, trivialmente,  $g(t\sigma(X, Y), \xi) = 0$ .

Por lo tanto, teniendo en cuenta estas observaciones, (4.3.8), (4.3.9), (4.3.10) y (4.3.11) se obtienen identificando en (4.3.17) las componentes en  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$ ,  $\langle \xi \rangle$  y  $T^\perp M$  respectivamente.  $\square$

**Nota 4.3.7.**— Observemos que en las demostraciones de los Lemas 4.3.4 y 4.3.6 no se ha empleado el que la distribución  $\mathcal{D}_2$  sea slant, sino simplemente el que  $\mathcal{D}_1$  sea invariante. Así, dichos resultados se verifican para una subvariedad que cumpla tan sólo las condiciones (i) y (ii) de la definición de subvariedad semi-slant. Por otra parte, notemos que la conveniencia de trabajar con subvariedades semi-slant frente a las subvariedades bi-slant, se fundamenta precisamente en las importantes conclusiones a las que se llega a partir de la condición (ii).

Notemos también que, para obtener la condición (4.3.10), no es preciso suponer que la variedad  $\tilde{M}$  sea Sasakiana. Más concretamente, si  $M$  es una subvariedad semi-slant de una variedad  $K$ -contacto, se verifica (4.3.10). Recogemos este resultado en la siguiente proposición, en cuya demostración sí es preciso utilizar el que la distribución  $\mathcal{D}_2$  sea slant.

**Proposición 4.3.8.**— *Sea  $M$  una subvariedad semi-slant, con ángulo  $\theta$ , de una variedad  $K$ -contacto  $\tilde{M}$ . Entonces, para todos  $X, Y \in TM$ , se verifican:*

$$\eta(\nabla_X \phi P_1 Y) = g(X, P_1 Y), \quad (4.3.18)$$

$$\eta(\nabla_X TP_2 Y) = \cos^2 \theta g(X, P_2 Y), \quad (4.3.19)$$

$$\eta(A_{NP_2 Y} X) = -\sin^2 \theta g(X, P_2 Y). \quad (4.3.20)$$

*En particular:*

$$\eta(\nabla_X \phi P_1 Y) + \eta(\nabla_X TP_2 Y) = \eta(A_{NP_2 Y} X) + g(\phi X, \phi Y).$$

DEMOSTRACIÓN: Dados  $X, Y \in TM$ , como  $g(\phi P_1 Y, \xi) = 0$  se tiene

$$\eta(\nabla_X \phi P_1 Y) = -g(\phi P_1 Y, \nabla_X \xi) = g(\phi P_1 Y, TX),$$

en virtud de (0.3.10). Pero, al ser  $\phi P_1 Y \in TM$ , resulta

$$g(\phi P_1 Y, TX) = g(\phi P_1 Y, \phi X) = g(P_1 Y, X),$$

pues  $\eta(P_1 Y) = 0$ . De aquí se obtiene (4.3.18). Análogamente, en virtud de (4.3.3),

$$\eta(\nabla_X T P_2 Y) = g(T P_2 Y, TX) = \cos^2 \theta g(X, P_2 Y),$$

lo que prueba (4.3.19). Veamos la tercera ecuación. En virtud de (0.3.11),

$$\eta(A_{NP_2 Y} X) = g(A_{NP_2 Y} X, \xi) = g(\sigma(X, \xi), NP_2 Y) = -g(NX, NP_2 Y),$$

de donde, aplicando (4.3.4), resulta (4.3.20).

La conclusión se obtiene de manera trivial de (4.3.18)–(4.3.20), (4.2.1) y (0.2.6).  $\square$

Nos planteamos a continuación el problema de la integrabilidad de las distribuciones  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  de una subvariedad semi-slant. A este respecto, podemos ofrecer los siguientes resultados:

**Proposición 4.3.9.**— *Sea  $M$  una subvariedad semi-slant de una variedad Sasakiana  $\tilde{M}$  tal que  $d_1 \neq 0$ . Entonces, la distribución invariante  $\mathcal{D}_1$  no es nunca integrable.*

DEMOSTRACIÓN: Como ya hicimos en la prueba de la Proposición 1.4.2, podemos calcular que, para todos  $X, Y \in TM$ , ortogonales a  $\xi$ :

$$g([X, Y], \xi) = 2g(Y, TX). \quad (4.3.21)$$

Tomemos entonces  $X \in \mathcal{D}_1$  no nulo. Como  $\mathcal{D}_1$  es invariante,  $TX = \phi X \in \mathcal{D}_1$ . Así, podemos tomar  $Y = \phi X$ . Por tanto, en virtud de (4.3.21) y (0.2.6):

$$g([X, Y], \xi) = 2g(X, X) \neq 0.$$

En consecuencia, existen campos en  $\mathcal{D}_1$  cuyo corchete no pertenece a dicha distribución, lo cual indica que  $\mathcal{D}_1$  no es integrable.  $\square$



De nuevo, no hemos utilizado en la proposición anterior el que  $\mathcal{D}_2$  sea slant. Así, dicho resultado se verifica con hipótesis más generales. En particular, se tiene para subvariedades semi-invariantes (ver Teorema 2.3 en [2]). En cuanto a la distribución  $\mathcal{D}_2$ , tenemos:

**Proposición 4.3.10.**— *Sea  $M$  una subvariedad semi-slant de una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$ . Entonces, la distribución slant  $\mathcal{D}_2$  es integrable si y sólo si  $M$  es semi-invariante.*

DEMOSTRACIÓN: Aplicando de nuevo la ecuación (4.3.21), deducimos que, para todos  $X, Y \in \mathcal{D}_2$ ,

$$g([X, Y], \xi) = 2g(Y, TX) = 2g(Y, T_2X).$$

Así, si suponemos que  $\mathcal{D}_2$  es integrable, ha de ser  $T_2 \equiv 0$ , lo cual implicaría a su vez que  $T_2^2 \equiv 0$ . Ahora bien, en virtud del Teorema 4.2.10,  $T_2^2 = -\cos^2 \theta I$ , donde  $I$  denota la identidad y  $\theta$  el ángulo slant de  $M$ . Luego, ha de ser  $\theta = \pi/2$ , lo cual implica, como ya sabemos, que  $M$  es semi-invariante.

La implicación recíproca viene dada por el Teorema 2.1 de [2].  $\square$

**Nota 4.3.11.**— Observemos que en las Proposiciones 4.3.9 y 4.3.10, basta considerar que la variedad  $\widetilde{M}$  sea  $K$ -contacto. Así, en el caso particular en que  $d_1 = 0$  en la Proposición 4.3.10, obtenemos la Proposición 1.4.2.

Resulta, no obstante, más interesante el estudiar la integrabilidad de las distribuciones  $\mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$  y  $\mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ .

**Proposición 4.3.12.**— *Sea  $M$  una subvariedad semi-slant de una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$ . Entonces, se verifican:*

(i) *La distribución  $\mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$  es integrable si y sólo si*

$$\sigma(X, \phi Y) = \sigma(Y, \phi X), \quad (4.3.22)$$

*para todos  $X, Y \in \mathcal{D}_1$ .*

(ii) *La distribución  $\mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$  es integrable si y sólo si*

$$P_1(\nabla_X TY - \nabla_Y TX) = P_1(A_{NY}X - A_{NX}Y), \quad (4.3.23)$$

*para todos  $X, Y \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ .*

DEMOSTRACIÓN: Probemos en primer lugar el apartado (i). En virtud de (4.3.11),

$$\sigma(\phi Y, X) = NP_2(\nabla_X Y) + n\sigma(X, Y), \quad (4.3.24)$$

para todos  $X, Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$ , pues:

$$\phi P_1 Y = \phi(Y - \eta(Y)\xi) = \phi Y.$$

Análogamente, cambiando los papeles de  $X$  e  $Y$  en (4.3.24), se tiene:

$$\sigma(\phi X, Y) = NP_2(\nabla_Y X) + n\sigma(Y, X). \quad (4.3.25)$$

Como la segunda forma fundamental  $\sigma$  es simétrica, de (4.3.24) y (4.3.25) resulta que, para todos  $X, Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$ :

$$\sigma(X, \phi Y) - \sigma(Y, \phi X) = NP_2[X, Y]. \quad (4.3.26)$$

Si suponemos que  $\mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$  es integrable, entonces  $[X, Y] \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$  para todos  $X, Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$ , de donde  $P_2[X, Y] = 0$ . Así, en virtud de (4.3.26) se deduce la condición (4.3.22). Recíprocamente, supongamos que se verifica la condición (4.3.22). Sean

$$X = P_1 X + \eta(X)\xi, \quad Y = P_1 Y + \eta(Y)\xi,$$

dos campos de  $\mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \sigma(X, \phi Y) &= \sigma(P_1 X + \eta(X)\xi, \phi P_1 Y) = \\ &= \sigma(P_1 X, \phi P_1 Y) + \eta(X)\sigma(\xi, \phi P_1 Y). \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

Pero, en virtud de (0.3.11),

$$\sigma(\xi, \phi P_1 Y) = -N\phi P_1 Y = 0, \quad (4.3.28)$$

pues,  $\phi P_1 Y = P_1 \phi P_1 Y$  y aplicamos el Lema 4.3.4. Así, de (4.3.27) y (4.3.28) se deduce que

$$\sigma(X, \phi Y) - \sigma(Y, \phi X) = \sigma(P_1 X, \phi P_1 Y) - \sigma(P_1 Y, \phi P_1 X) = 0,$$

en virtud de (4.3.22). Entonces, de (4.3.26) se sigue que  $NP_2[X, Y] = 0$ . Por lo tanto, teniendo en cuenta la expresión (0.3.1), ha de ser

$$\phi P_2[X, Y] = TP_2[X, Y] \in \mathcal{D}_2,$$

en virtud del Lema 4.3.4, lo cual implica que el ángulo entre  $\phi P_2[X, Y]$  y  $\mathcal{D}_2$  es cero. Pero, si  $P_2[X, Y] \neq 0$ , dicho ángulo debe ser  $\theta \neq 0$ , pues  $M$  es una subvariedad semi-slant. De todo ello se deduce que  $P_2[X, Y] = 0$ , de donde se sigue que  $[X, Y] \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$ . Esto concluye la prueba del primer apartado.

En cuanto al apartado (ii), vemos primero que, en virtud de (4.3.8),

$$\phi P_1(\nabla_X Y) = P_1(\nabla_X T Y) - P_1 A_{NY} X,$$

para todos  $X, Y \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ , pues  $T\xi = N\xi = 0$ , de donde se sigue que:

$$\phi P_1[X, Y] = P_1(\nabla_X T Y - \nabla_Y T X) - P_1(A_{NY} X - A_{NX} Y).$$

Así, (4.3.23) se verifica si y sólo si

$$\phi P_1[X, Y] = 0, \quad (4.3.29)$$

para todos  $X, Y \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ . Veamos que esto último es equivalente a la integrabilidad de la distribución  $\mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ . Desde luego, si dicha distribución es integrable, la condición (4.3.29) está clara. Recíprocamente, si se tiene (4.3.29), entonces dados  $X, Y \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ ,

$$\phi^2 P_1[X, Y] = -P_1[X, Y] = 0,$$

lo cual implica que  $[X, Y] \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ . Esto concluye la demostración.  $\square$

**Nota 4.3.13.**— El apartado (i) de la Proposición 4.3.12 generaliza claramente el Teorema 2.4 de [2]. Veamos que el apartado (ii) generaliza a su vez el Teorema 2.2 del mismo trabajo. Ahora bien, dicho teorema nos indica que en una subvariedad semi-invariante, la distribución  $\mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$  es siempre integrable. Por lo tanto, cuando  $\theta = \pi/2$ , la condición (4.3.23) ha de verificarse siempre.

Dados  $X, Y \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ , sabemos que, si  $\theta = \pi/2$ ,  $\phi X = NX$  y  $\phi Y = NY$ , siendo nulos  $TX$  y  $TY$ . Así, el primer miembro de (4.3.23) se anula trivialmente. Basta ver entonces que:

$$P_1(A_{NY} X - A_{NX} Y) = 0. \quad (4.3.30)$$

Dado  $Z \in \mathcal{D}_1$ , se tiene que

$$\begin{aligned} g(A_{NY}X, Z) &= g(A_{\phi Y}X, Z) = g(X, A_{\phi Y}Z) = \\ &= -g(X, \widetilde{\nabla}_Z \phi Y) = -g(X, \phi \widetilde{\nabla}_Z Y), \end{aligned}$$

pues  $\widetilde{M}$  es Sasakiana y  $X, Y \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ . Luego:

$$g(A_{NY}X, Z) = g(\phi X, \widetilde{\nabla}_Z Y) = g(NX, \sigma(Y, Z)) = g(A_{NX}Y, Z).$$

De aquí se sigue (4.3.30).

A continuación, vamos a generalizar el concepto de subvariedad slant Sasakiana al ámbito de las subvariedades semi-slant. Recordemos que llamamos subvariedad slant Sasakiana a una subvariedad slant propia  $M$ , con ángulo  $\theta$ , tal que

$$(\nabla_X T)Y = \cos^2 \theta (g(X, Y)\xi - \eta(Y)X), \quad (4.3.31)$$

para todos  $X, Y \in TM$ . Por lo tanto, parece lógico buscar una expresión para  $\nabla T$  en una subvariedad semi-slant, de modo que para toda subvariedad que la verifique, se tenga (4.3.31) para todo  $X, Y \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ . Además, dicha expresión ha de ser "lo más natural" posible.

Si calculamos  $\nabla T$  en el Ejemplo 4.3.3, puede comprobarse directamente que se verifica:

**Ejemplo 4.3.14.**— Para cada  $\theta \in (0, \pi/2)$ , la subvariedad semi-slant, con ángulo  $\theta$ , de  $(\mathbf{R}^9, \phi_0, \xi, \eta, g)$ , definida por

$$x(u, v, w, s, t) = 2(u, 0, w, 0, v, 0, s \cos \theta, s \sin \theta, t),$$

verifica que:

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)Y &= g(P_1 X, Y)\xi - \eta(Y)P_1 X + \\ &+ \cos^2 \theta (g(P_2 X, Y)\xi - \eta(Y)P_2 X), \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

Si tomamos  $X = P_2 X + \eta(X)\xi$  e  $Y = P_2 Y + \eta(Y)\xi$  en  $\mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ , la ecuación (4.3.32) implica:

$$(\nabla_X T)Y = \cos^2 \theta (g(X - \eta(X)\xi, Y)\xi - \eta(Y)(X - \eta(X)\xi)) \doteq$$

$$= \cos^2 \theta (g(X, Y)\xi - \eta(Y)X).$$

Así, la distribución  $\mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$  se comporta, con respecto a  $\nabla T$ , como el fibrado tangente de una subvariedad slant Sasakiana. Por otra parte, si  $X, Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$ , se deduce de (4.3.32) que

$$(\nabla_X T)Y = g(X, Y) - \eta(Y)X,$$

expresión que se tiene en las subvariedades invariantes.

Así, nos parece adecuado dar la siguiente definición:

**Definición 4.3.15.**— *Diremos que una subvariedad semi-slant propia  $M$ , con ángulo slant  $\theta$ , es una subvariedad semi-slant Sasakiana si*

$$(\nabla_X T)Y = g(P_1 X, Y)\xi - \eta(Y)P_1 X + \cos^2 \theta (g(P_2 X, Y)\xi - \eta(Y)P_2 X),$$

para todo  $X, Y \in TM$ .

Vamos a probar que la condición (4.3.32) no sólo ofrece buenos resultados, sino que es “natural” imponerla como generalización de (4.3.31). Para ello, necesitamos el siguiente lema:

**Lema 4.3.16.**— *Sea  $M$  una subvariedad semi-slant propia, con ángulo  $\theta$ , de una variedad Sasakiana  $\tilde{M}$ . Para todos  $X, Y \in TM$ , se tiene:*

$$(\nabla_X T)Y = A_{NP_2 Y}X + t\sigma(X, Y) + g(X, Y)\xi - \eta(Y)X. \quad (4.3.33)$$

Así,  $M$  es una subvariedad semi-slant Sasakiana si y sólo si

$$A_{NP_2 Y}X = A_{NP_2 X}Y - \sin^2 \theta (\eta(X)P_2 Y - \eta(Y)P_2 X), \quad (4.3.34)$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

DEMOSTRACIÓN: Dados  $X, Y \in TM$ , en virtud de (4.3.2), se tiene que:

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)Y &= \nabla_X T Y - T \nabla_X Y = \\ &= \nabla_X \phi P_1 Y + \nabla_X T P_2 Y - \phi P_1 \nabla_X Y - T P_2 \nabla_X Y. \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

Aplicando la descomposición (4.2.1), obtenemos

$$\nabla_X \phi P_1 Y = P_1(\nabla_X \phi P_1 Y) + P_2(\nabla_X \phi P_1 Y) + \eta(\nabla_X \phi P_1 Y)\xi$$

y, análogamente:

$$\nabla_X T P_2 Y = P_1(\nabla_X T P_2 Y) + P_2(\nabla_X T P_2 Y) + \eta(\nabla_X T P_2 Y)\xi.$$

Entonces, sumando las dos ecuaciones anteriores y aplicando (4.3.8)–(4.3.10), podemos concluir que

$$\nabla_X \phi P_1 Y + \nabla_X T P_2 Y = \phi P_1(\nabla_X Y) +$$

$$+ T P_2(\nabla_X Y) + A_{N P_2 Y} X + t\sigma(X, Y) + g(X, Y)\xi - \eta(Y)X,$$

lo cual, junto con (4.3.35), implica (4.3.33).

Supongamos ahora que  $M$  es semi-slant Sasakiana. Entonces igualando (4.3.32) y (4.3.33), obtenemos:

$$\begin{aligned} t\sigma(X, Y) + A_{N P_2 Y} X &= g(P_1 X, Y)\xi - \eta(Y)P_1 X + \\ &+ \cos^2 \theta (g(P_2 X, Y)\xi - \eta(Y)P_2 X) - g(X, Y)\xi + \eta(Y)X. \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

Ahora bien, en virtud de (4.2.1), está claro que

$$g(X, Y) = g(P_1 X, Y) + g(P_2 X, Y) + \eta(X)\eta(Y),$$

mientras:

$$\eta(Y)X = \eta(Y)P_1 X + \eta(Y)P_2 X + \eta(Y)\eta(X)\xi.$$

Así, se sigue de (4.3.36) que

$$t\sigma(X, Y) + A_{N P_2 Y} X = -\operatorname{sen}^2 \theta (g(P_2 X, Y)\xi - \eta(Y)P_2 X),$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} A_{N P_2 Y} X - A_{N P_2 X} Y &= \\ &= -\operatorname{sen}^2 \theta (g(P_2 X, Y)\xi - g(P_2 Y, X)\xi + \eta(X)P_2 Y - \eta(Y)P_2 X), \end{aligned}$$

que coincide a su vez con (4.3.34), pues  $g(P_2 X, Y) = g(P_2 Y, X)$ .

Recíprocamente, supongamos que se verifica (4.3.34) para todo par de campos  $X, Y$  tangentes a  $M$ . Entonces,

$$\begin{aligned} g(A_{N P_2 Y} X, Z) &= \\ &= g(A_{N P_2 X} Y, Z) - \operatorname{sen}^2 \theta (g(\eta(X)P_2 Y - \eta(Y)P_2 X, Z)), \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

para todos  $X, Y, Z \in TM$ .

Como el operador de Weingarten es autoadjunto, se tiene:

$$g(A_{NP_2Y}X, Z) = g(A_{NP_2Y}Z, X). \quad (4.3.38)$$

Además, en virtud de (0.1.3) y (0.3.5):

$$g(A_{NP_2X}Y, Z) = -g(t\sigma(Y, Z), X). \quad (4.3.39)$$

Por otra parte, es fácil comprobar:

$$g(\eta(X)P_2Y - \eta(Y)P_2X, Z) = g(g(P_2Y, Z)\xi - \eta(Y)P_2Z, X). \quad (4.3.40)$$

Así, sustituyendo (4.3.38)–(4.3.40) en (4.3.37), obtenemos

$$g(A_{NP_2Y}Z, X) = -g(t\sigma(Y, Z), X) - \text{sen}^2\theta g(g(P_2Y, Z)\xi - \eta(Y)P_2Z, X),$$

para todos  $X, Y, Z \in TM$ , lo cual implica:

$$A_{NP_2Y}Z = -t\sigma(Y, Z) - \text{sen}^2\theta(g(P_2Y, Z)\xi - \eta(Y)P_2Z).$$

Entonces, en virtud de (4.3.33),

$$\begin{aligned} (\nabla_Z T)Y &= g(Z, Y)\xi - \eta(Y)Z - \text{sen}^2\theta(g(P_2Y, Z)\xi - \eta(Y)P_2Z) = \\ &= g(P_1Z, Y)\xi - \eta(Y)P_1Z + \text{cos}^2\theta(g(P_2Z, Y)\xi - \eta(Y)P_2Z), \end{aligned}$$

para todos  $Y, Z \in TM$ . Esto concluye la prueba.  $\square$

**Teorema 4.3.17.**— *Sea  $M$  una subvariedad semi-slant propia, con ángulo  $\theta$ , de una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$ . Son equivalentes:*

(i)  $M$  es semi-slant Sasakiana.

(ii)  $(\nabla_X TP_2)Y = \text{cos}^2\theta(g(P_2X, Y)\xi - \eta(Y)P_2X)$ , para todos  $X, Y \in TM$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Supongamos que  $M$  es una subvariedad semi-slant Sasakiana. Entonces, razonando de manera análoga a como se hizo en la demostración del Lema 4.3.16, se tiene que

$$t\sigma(X, Y) + A_{NP_2Y}X + \text{sen}^2\theta(g(P_2X, Y)\xi - \eta(Y)P_2X) = 0, \quad (4.3.41)$$

para todos  $X, Y \in TM$ . Aplicando  $P_1$  en (4.3.41), resulta que

$$P_1 A_{NP_2 Y} X = 0, \quad (4.3.42)$$

para todos  $X, Y \in TM$ , pues  $t\sigma(X, Y) \in \mathcal{D}_2$ , tal y como se señaló en la demostración del Lema 4.3.6.

Si reescribimos la ecuación (4.3.41) tomando  $Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$ , se obtiene

$$t\sigma(X, Y) = \text{sen}^2 \theta \eta(Y) P_2 X, \quad (4.3.43)$$

para todo  $X \in TM$  y todo  $Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$ . Por otra parte, reescribiendo (4.3.11) en el mismo caso, resulta

$$\sigma(\phi Y, X) = NP_2 \nabla_X Y + n\sigma(X, Y), \quad (4.3.44)$$

para todo  $X \in TM$  y todo  $Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$ . Entonces, de (4.3.43) y (4.3.44) se sigue que:

$$\sigma(\phi Y, X) = NP_2 \nabla_X Y + \phi\sigma(X, Y) - \text{sen}^2 \theta \eta(Y) P_2 X. \quad (4.3.45)$$

Ahora bien, en virtud de (0.1.3), dados  $X \in TM$  e  $Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$ ,

$$g(NP_2 \nabla_X Y, \sigma(\phi Y, X)) = g(A_{NP_2 \nabla_X Y} X, \phi Y) = 0, \quad (4.3.46)$$

pues  $\phi Y \in \mathcal{D}_1$  y, aplicando (4.3.42), sabemos que  $P_1 A_{NP_2 \nabla_X Y} X = 0$ . Además, aplicando sucesivamente (0.2.7), (0.3.2), (0.3.7) y (0.1.3), se tiene:

$$\begin{aligned} g(NP_2 \nabla_X Y, \phi\sigma(X, Y)) &= -g(\phi NP_2 \nabla_X Y, \sigma(X, Y)) = \\ &= -g(nNP_2 \nabla_X Y, \sigma(X, Y)) = g(NT P_2 \nabla_X Y, \sigma(X, Y)) = \\ &= g(A_{NT P_2 \nabla_X Y} X, Y). \end{aligned}$$

Pero, en virtud del Lema 4.3.4,  $TP_2 \nabla_X Y = P_2 TP_2 \nabla_X Y$ , lo cual implica

$$g(NP_2 \nabla_X Y, \phi\sigma(X, Y)) = g(A_{NP_2 TP_2 \nabla_X Y} X, Y) = 0, \quad (4.3.47)$$

si consideramos  $Y \in \mathcal{D}_1$ , pues, de nuevo por (4.3.42), se tiene:

$$P_1 A_{NP_2 TP_2 \nabla_X Y} X = 0.$$



Por lo tanto, a partir de (4.3.45)–(4.3.47), podemos concluir que

$$NP_2\nabla_X Y = 0,$$

para todo  $X \in TM$  y todo  $Y \in \mathcal{D}_1$ . Como la subvariedad  $M$  es semi-slant propia, se sigue de aquí que  $P_2\nabla_X Y$  ha de ser nulo. Así,

$$\nabla_X Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle, \quad (4.3.48)$$

para todo  $X \in TM$  y todo  $Y \in \mathcal{D}_1$ . En particular, esto implica que, dados  $X \in TM$ ,  $Y \in \mathcal{D}_1$  y  $Z \in \mathcal{D}_2$ ,

$$g(\nabla_X Z, Y) = -g(Z, \nabla_X Y) = 0,$$

de lo cual se deduce

$$\nabla_X Z \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle, \quad (4.3.49)$$

para todo  $X \in TM$  y todo  $Z \in \mathcal{D}_2$ . Entonces, en virtud del Lema 4.3.4,

$$P_1(\nabla_X TP_2 Y) = 0, \quad (4.3.50)$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

Veamos ahora que se verifica el apartado (ii). En virtud de (4.3.48), sabemos que  $\nabla_X \phi P_1 Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$ , para todos  $X, Y \in TM$ . Así,

$$\begin{aligned} \nabla_X \phi P_1 Y &= P_1(\nabla_X \phi P_1 Y) + \eta(\nabla_X \phi P_1 Y)\xi = \\ &= P_1(\nabla_X \phi P_1 Y) + g(P_1 X, Y)\xi, \end{aligned}$$

en virtud de (4.3.18). Despejando de aquí  $P_1(\nabla_X \phi P_1 Y)$  y sustituyéndolo en (4.3.8), resulta, junto con (4.3.42) y (4.3.50), que

$$(\nabla_X \phi P_1)Y = g(P_1 X, Y)\xi - \eta(Y)P_1 X, \quad (4.3.51)$$

para todos  $X, Y \in TM$ . Ahora bien, de (4.3.2) se deduce que  $TP_2 = T - \phi P_1$ . Así,

$$(\nabla_X TP_2)Y = (\nabla_X T)Y - (\nabla_X \phi P_1)Y,$$

para todos  $X, Y \in TM$ , de donde, junto con (4.3.32) y (4.3.51) se sigue (ii).

Recíprocamente, supongamos

$$(\nabla_X TP_2)Y = \cos^2 \theta (g(P_2 X, Y)\xi - \eta(Y)P_2 X),$$

para todos  $X, Y \in TM$ . Dado que, en virtud del Lema 4.3.4,  $TP_2\nabla_X Y \in \mathcal{D}_2$ , se sigue de aquí que

$$P_1(\nabla_X TP_2 Y) = 0, \quad (4.3.52)$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

Sea ahora  $Z = P_2 Z + \eta(Z)\xi \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$  cualquiera. En virtud del Teorema 4.2.10:

$$T_2^2(Z - \eta(Z)\xi) = -\cos^2 \theta(Z - \eta(Z)\xi). \quad (4.3.53)$$

Pero, por el Lema 4.3.4:

$$T_2^2(Z - \eta(Z)\xi) = P_2 T T_2 Z = T T_2 Z.$$

Entonces, de (4.3.53) se sigue que

$$Z = -TP_2(\sec^2 \theta T Z) + \eta(Z)\xi,$$

lo cual implica, usando (0.3.10),

$$\nabla_X Z = -\nabla_X TP_2(\sec^2 \theta T Z) + X(\eta(Z))\xi - \eta(Z)TX, \quad (4.3.54)$$

para todo  $X \in TM$ . Dado que, en virtud de (4.3.52),

$$P_1(\nabla_X TP_2(\sec^2 \theta T Z)) = 0,$$

tomando  $P_1$  en (4.3.54) se deduce que

$$P_1(\nabla_X Z) = -\eta(Z)T_1 X, \quad (4.3.55)$$

para todo  $X \in TM$  y todo  $Z \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ . Así,

$$\nabla_X Z \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle, \quad (4.3.56)$$

para todo  $X \in TM$  y todo  $Z \in \mathcal{D}_2$ . Razonando de manera análoga a como se hizo en la implicación directa, se deduce de aquí

$$\nabla_X Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle,$$

para todo  $X \in TM$  y todo  $Y \in \mathcal{D}_1$ . Por tanto, dado que, por el Lema 4.3.4,  $\phi P_1 Y \in \mathcal{D}_1$ , para todo  $Y \in TM$ , se tiene entonces

$$\nabla_X \phi P_1 Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle,$$

de donde, para todos  $X, Y \in TM$ :

$$P_1(\nabla_X \phi P_1 Y) = \nabla_X \phi P_1 Y - \eta(\nabla_X \phi P_1 Y)\xi. \quad (4.3.57)$$

Como, en virtud de (4.3.55),  $P_1(\nabla_X T P_2 Y) = 0$ , para todos  $X, Y \in TM$ , se sigue de (4.3.8), (4.3.18) y (4.3.57) que

$$(\nabla_X \phi P_1)Y = P_1 A_{NP_2 Y} X + g(P_1 X, Y) - \eta(Y)P_1 X, \quad (4.3.58)$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

Por otra parte, como  $T P_2 Y \in \mathcal{D}_2$ , se deduce de (4.3.56) que  $\nabla_X T P_2 Y \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ . Por tanto,

$$P_2(\nabla_X T P_2 Y) = \nabla_X T P_2 Y - \eta(\nabla_X T P_2 Y)\xi,$$

de donde, junto con la hipótesis (ii), (4.3.9) y (4.3.19), se sigue que

$$t\sigma(X, Y) = -P_2 A_{NP_2 Y} X + \text{sen}^2 \theta \eta(Y)P_2 X, \quad (4.3.59)$$

para todos  $X, Y \in TM$ , teniendo en cuenta que  $P_2(\nabla_X \phi P_1 Y) = 0$ . Ahora bien, dado  $Z \in \mathcal{D}_1$ , se tiene que

$$\begin{aligned} g(P_1 A_{NP_2 Y} X, Z) &= g(A_{NP_2 Y} X, Z) = g(\sigma(X, Z), NP_2 Y) = \\ &= -g(t\sigma(X, Z), P_2 Y) = 0, \end{aligned}$$

pues, usando (4.3.59),  $t\sigma(X, Z) = 0$ . Así, para todos  $X, Y \in TM$ :

$$P_1 A_{NP_2 Y} X = 0. \quad (4.3.60)$$

Finalmente, de (4.3.2), (4.3.58), (4.3.60) y la hipótesis (ii), se obtiene la expresión (4.3.32), con lo que concluye la prueba.  $\square$

A partir de la demostración del Teorema 4.3.17, se obtienen directamente las siguientes conclusiones inmediatas:

**Corolario 4.3.18.**— *Si  $M$  es una subvariedad semi-slant Sasakiana de una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$ , entonces*

$$(\nabla_X \phi P_1)Y = g(P_1 X, Y)\xi - \eta(Y)P_1 X,$$

para todos  $X, Y \in TM$ .

DEMOSTRACIÓN: La igualdad anterior aparece como la ecuación (4.3.51) de la demostración del Teorema 4.3.17.  $\square$

**Corolario 4.3.19.**— *Si  $M$  es una subvariedad semi-slant Sasakiana de una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$ , entonces*

$$\nabla_X Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle, \quad \nabla_X Z \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle, \quad (4.3.61)$$

para todo  $X \in TM$ ,  $Y \in \mathcal{D}_1$  y  $Z \in \mathcal{D}_2$ . En particular, las distribuciones  $\mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$  y  $\mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$  son integrables.

DEMOSTRACIÓN: Las expresiones de (4.3.61) se obtienen en la demostración del Teorema 4.3.17.

Veamos ahora que la distribución  $\mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$  es integrable. Basta probar que, dados  $X, Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$ ,  $\nabla_X Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$ . Pero, dado  $Y = P_1 Y + \eta(Y)\xi$ , en virtud de (0.3.10), se tiene que:

$$\nabla_X Y = \nabla_X P_1 Y + X(\eta(Y))\xi - \eta(Y)TX. \quad (4.3.62)$$

Ahora bien, en virtud de (4.3.61),  $\nabla_X P_1 Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$ , mientras que del Lema 4.3.4 se deduce que  $TX \in \mathcal{D}_1$ . Por lo tanto, de (4.3.62) se sigue que  $\nabla_X Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$ .

La prueba de la integrabilidad de la distribución  $\mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$  se realiza de manera totalmente análoga, pues, de nuevo por el Lema 4.3.4,  $TZ \in \mathcal{D}_2$  para todo  $Z \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ .  $\square$

**Nota 4.3.20.**— Observemos que, dado que las distribuciones  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  son ortogonales, se tiene que

$$g(\nabla_X Y, Z) = -g(Y, \nabla_X Z),$$

para todo  $X \in TM$ ,  $Y \in \mathcal{D}_1$  y  $Z \in \mathcal{D}_2$ . Por lo tanto, se prueba trivialmente que las dos expresiones de (4.3.61) son equivalentes, hecho que se ha empleado implícitamente en la demostración del Teorema 4.3.17. Más aún, si  $\dim \mathcal{D}_2 = 2$ , dichas expresiones son equivalentes a las condiciones del teorema anterior, tal y como se prueba en el Teorema 4.3.21, que generaliza el Teorema 2.2.5.

**Teorema 4.3.21.**— *Sea  $M$  una subvariedad semi-slant propia, con ángulo  $\theta$ , de una variedad Sasakiana  $\widetilde{M}$ . Supongamos que  $\dim \mathcal{D}_2 = 2$ . Entonces, son equivalentes:*

(i)  $M$  es semi-slant Sasakiana.

(ii)  $(\nabla_X TP_2)Y = \cos^2 \theta (g(P_2X, Y)\xi - \eta(Y)P_2X)$ , para todo  $X, Y \in TM$ .

(iii)  $\nabla_X Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle \xi \rangle$ , para todo  $X \in TM$  y todo  $Y \in \mathcal{D}_1$ .

(iv)  $\nabla_X Y \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ , para todo  $X \in TM$  y todo  $Y \in \mathcal{D}_2$ .

DEMOSTRACIÓN: En virtud del Teorema 4.3.17, el Corolario 4.3.19 y la Nota 4.3.20, basta probar que (iv) implica (ii).

Sea  $e_1 \in \mathcal{D}_2$  unitario. Consideremos  $e_2 = \sec \theta T e_1$ . Aplicando el Lema 4.3.4, sabemos que  $e_2 \in \mathcal{D}_2$ . Además, se sigue de (4.3.3) que  $e_2$  es unitario y ortogonal a  $e_1$ . Por lo tanto, dado que  $\dim \mathcal{D}_2 = 2$ , se tiene que  $\{e_1, e_2\}$  es una referencia local ortonormal de  $\mathcal{D}_2$ .

Calculemos  $(\nabla_X TP_2)Y$ , para  $X, Y \in TM$  cualesquiera. Denotemos  $Y = P_1Y + P_2Y + \eta(Y)\xi$  y  $P_2Y = Y^1 e_1 + Y^2 e_2$ . Así,

$$\begin{aligned} (\nabla_X TP_2)Y &= \nabla_X TP_2Y - TP_2 \nabla_X Y = \\ &= \nabla_X T(Y^1 e_1 + Y^2 e_2) - TP_2 \nabla_X (P_1Y + P_2Y + \eta(Y)\xi) = \\ &= \cos \theta X(Y^1) e_2 + \cos \theta Y^1 \nabla_X e_2 - \cos \theta X(Y^2) e_1 - \cos \theta Y^2 \nabla_X T e_2 - \\ &- TP_2(X(Y^1) e_1 + Y^1 \nabla_X e_1 + X(Y^2) e_2 + Y^2 \nabla_X e_2 + \eta(Y) \nabla_X \xi), \end{aligned} \quad (4.3.63)$$

pues (iv) implica que  $P_2(\nabla_X P_1Y) = 0$  y, naturalmente, se tiene que  $P_2\xi = 0$ .

Pero, usando (0.3.10) y (4.3.2),

$$\nabla_X \xi = -\phi P_1X - TP_2X,$$

de donde

$$TP_2(\nabla_X \xi) = -TP_2TP_2X = -T_2^2 P_2X = \cos \theta P_2X, \quad (4.3.64)$$

en virtud del Lema 4.3.4 y del Teorema 4.2.10. Ahora bien, dado que  $\nabla_X e_1, \nabla_X e_2 \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle \xi \rangle$ , si notamos  $e_3 = \xi$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \cos \theta \nabla_X e_2 - TP_2 \nabla_X e_1 &= \cos \theta \nabla_X e_2 - T \nabla_X e_1 = \\ &= \cos \theta (\omega_2^1(X) e_1 + \omega_2^2(X) e_2 + \omega_2^3(X) e_3) - T(\omega_1^1(X) e_1 + \omega_1^2(X) e_2 + \omega_1^3(X) e_3) = \\ &= \cos \theta \omega_2^3(X) \xi = \cos \theta g(\nabla_X e_2, \xi) \xi = \end{aligned}$$

$$= \cos \theta g(e_2, TX)\xi = \cos^2 \theta g(X, e_1)\xi. \quad (4.3.65)$$

Análogamente se prueba:

$$- \cos \theta \nabla_X e_1 - TP_2 \nabla_X e_2 = \cos^2 \theta g(X, e_2)\xi. \quad (4.3.66)$$

Entonces, sustituyendo (4.3.64)–(4.3.66) en (4.3.63), obtenemos el apartado (ii).  $\square$

# Bibliografía

- [1] S. Bando y Y. Ohnita. Minimal 2-spheres with constant curvature in  $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ . *J. Math. Soc. Japan*, 39: 477–487, 1987.
- [2] A. Bejancu y N. Papaghiuc. Semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold. *An. st. Univ. Iasi*, tom. XXVII, s. I. a (f1): 163–170, 1981.
- [3] D. E. Blair. The theory of quasi-Sasakian structures. *J. Differential Geometry*, 1: 331–345, 1967.
- [4] D. E. Blair. *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*, volumen 509 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1976.
- [5] J. Bolton, G.R. Jensen, M. Rigoli y L.M. Woodward. On conformal minimal immersions of  $\mathbf{S}^2$  into  $\mathbf{CP}^n$ . *Math. Ann.*, 279: 599–620, 1988.
- [6] W.M. Boothby y H.C. Wang. On contact manifolds. *Ann. of Math.*, 68: 721–734, 1958.
- [7] E. Calabi. Isometric embeddings of complex manifolds. *Ann. of Math.*, 58: 1–23, 1953.
- [8] E. Calabi. Metric Riemann surfaces. En *Contributions to the theory of Riemann surfaces*, volumen 30 de *Ann. of Math. Studies*, pages 77–85. Princeton University Press, Princeton, 1953.
- [9] B. Y. Chen. *Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type*, volumen 1 de *Series in Pure Mathematics*. World Scientific, Singapore, 1984.
- [10] B. Y. Chen. *Geometry of Slant Submanifolds*. Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, 1990.

- [11] B. Y. Chen. Slant immersions. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 41: 135–147, 1990.
- [12] B. Y. Chen. A Riemannian invariant and its applications to submanifold theory. *Results in Mathematics*, 27: 17–26, 1995.
- [13] B. Y. Chen y J. M. Morvan. Cohomologie des sous-variétés  $\alpha$ -obliques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 314, Série I: 931–934, 1992.
- [14] B. Y. Chen y Y. Tazawa. Slant surfaces with codimension 2. *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, XI(3): 29–43, 1990.
- [15] B. Y. Chen y Y. Tazawa. Slant submanifolds in complex euclidean spaces. *Tokyo J. Math.*, 14(1): 101–120, 1991.
- [16] B. Y. Chen y L. Vrancken. Addendum to: Existence and uniqueness theorem for slant immersions and its applications. Preprint.
- [17] B. Y. Chen y L. Vrancken. Existence and uniqueness theorem for slant immersions and its applications. *Results in Math.*, 31: 28–39, 1997.
- [18] S.S. Chern. Pseudo-groupes continus infinis. In *Colloques Internationaux du C.N.R.S.*, pages 119–136, Strasbourg, 1953.
- [19] S.S. Chern y J.G. Wolfson. Minimal surfaces by moving frames. *Amer. J. Math.*, 105: 59–83, 1983.
- [20] D. Chinea. *Subvariedades Invariantes y Semi-invariantes de Variedades Casi-contacto y Casi-complejas*, volumen 17 de *Col. Monografías*. Secretariado Publicaciones Univ. La Laguna, La Laguna, 1985.
- [21] J. H. Eschenburg, I.V. Guadalupe y R.A. Tribuzy. The fundamental equations of minimal surfaces in  $\mathbf{CP}^2$ . *Math. Ann.*, 270: 571–578, 1985.
- [22] J. H. Eschenburg y R. Tribuzy. Existence and uniqueness of maps into affine homogeneous spaces. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 89: 11–18, 1993.
- [23] J.W. Gray. Some global properties of contact structures. *Ann. of Math.*, 69: 421–450, 1959.



- [24] Y. Hatakeyama, Y. Ogawa y S. Tanno. Some properties of manifolds with contact metric structures. *Tôhoku Math. J.*, 15: 176–181, 1963.
- [25] T. Ikawa. On the length of the second fundamental form of slant surfaces. *Tensor, N. S.*, 52: 249–254, 1993.
- [26] I. Ishihara y M. Kon. Contact totally umbilical submanifolds of a Sasakian space form. *Ann. Mat. Pura Appl.*, (4) 114: 351–364, 1977.
- [27] E. Kähler. Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 9: 173–186, 1933.
- [28] S. Kobayashi y K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, volumen I. Johy Wiley and Sons, New York, 1963.
- [29] S. Kobayashi y K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, volumen II. Johy Wiley and Sons, New York, 1969.
- [30] S. Maeda, Y. Ohnita y S. Udagawa. On slant immersions into Kähler manifolds. *Kodai Math. J.*, 16: 205–219, 1993.
- [31] Y. Ohnita. Minimal surfaces with constant curvature and Kähler angle in complex space forms. *Tsukuba J. Math.*, 13: 191–207, 1989.
- [32] M. Okumura. On contact metric immersion. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 20: 389–409, 1968.
- [33] N. Papaghiuc. Semi-slant submanifolds of a Kaehlerian manifold. *An. st. Univ. Iasi*, tom. XL, s. I. a (f1): 55–61, 1994.
- [34] H. Reckziegel. On the problem whether the image of a given differentiable map into a riemannian manifold is contained in a submanifold with parallel second fundamental form. *J. Reine. Angew. Math.*, 325: 87–104, 1981.
- [35] S. Sasaki. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I. *Tôhoku Math. J.*, 12: 459–476, 1960.

- [36] S. Sasaki y Y. Hatakeyama. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure II. *Tôhoku Math. J.*, 13: 281–294, 1961.
- [37] S. Sasaki y Y. Hatakeyama. On differentiable manifolds with contact metric structures. *J. Math. Soc. Japan*, 14: 249–271, 1962.
- [38] J.A. Schouten y D. van Dantzig. Über unitäre Geometrie. *Math. Ann.*, 103: 319–346, 1930.
- [39] J.A. Schouten y D. van Dantzig. Über unitäre Geometrie konstanter Krümmung. *Proc. Kon. Nederl. Akad. Amsterdam*, 34: 1293–1314, 1931.
- [40] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volumen 3. Publish or Perish, Boston, 1975.
- [41] S. Tanno. Sasakian manifolds with constant  $\phi$ -holomorphic sectional curvature. *Tôhoku Math. J.*, 21: 501–507, 1969.
- [42] Y. Tashiro. On contact structures of hypersurfaces in almost complex manifolds I. *Tôhoku Math. J.*, 15: 62–78, 1963.
- [43] Y. Tazawa. *Differential Geometry of Slant Surfaces*. PhD thesis, Michigan State University, 1989.
- [44] Y. Tazawa. Construction of slant immersions. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 22 (2): 153–166, 1994.
- [45] Y. Tazawa. Construction of slant immersions II. *Bull. Belg. Math. Soc. (New Series)*, 1: 569–576, 1994.
- [46] A. Weil. Sur la théorie des formes différentielles attachée analytique complexe. *Comm. Math. Helv.*, 20: 110–116, 1947.
- [47] B. Wettstein. *Congruence and existence of differentiable maps*. PhD thesis, ETH Zürich 89, 1978.
- [48] J. Yang. On slant surfaces with constant mean curvature in  $\mathbb{C}^2$ . *J. Geom.*, 59 (1-2): 184–201, 1997.

- [49] K. Yano y S. Ishihara. Invariant submanifolds of an almost contact manifold. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 21: 350–364, 1969.
- [50] K. Yano y M. Kon. *Anti-invariants Submanifolds*, volumen 21 de *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, New York, 1976.
- [51] K. Yano y M. Kon. *CR Submanifolds of Kaehlerian and Sasakian Manifolds*, volumen 30 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, Boston, 1983.
- [52] K. Yano y M. Kon. *Structures on Manifolds*, volumen 3 de *Series in Pure Mathematics*. World Scientific, Singapore, 1984.

ALFONSO CARRIAZO RUBIO

Subvariedades Slant en Variedades de  
Contacto

APTO CUM LAUDE

19

Mayo

98

1º

2º

3º

David S. Blain

José Vicente

Manuel →  
→

