

Trabajo de Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Estrategias de optimización para trayectorias sujetas
a incertidumbre en los datos

Autor: Santiago Hoyos Martín

Tutor: Alfonso Valenzuela Romero

Dep. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de
Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Sevilla, 2016



Trabajo de Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Estrategias de optimización para trayectorias sujetas a incertidumbre en los datos

Autor:

Santiago Hoyos Martín

Tutor:

Alfonso Valenzuela Romero

Profesor Contratado Doctor Interino

Dpto. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016

Trabajo de Fin de Grado: Estrategias de optimización para trayectorias sujetas a incertidumbre en los datos

Autor: Santiago Hoyos Martín

Tutor: Alfonso Valenzuela Romero

El tribunal nombrado para juzgar el Trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2016

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis maestros

Resumen

Algunos de los últimos artículos del Departamento de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos en los que se está trabajando están enfocados al estudio del consumo de combustible en trayectorias de aeronaves.

En este Trabajo de Fin de Grado, se tratará el problema de optimización de trayectorias de aeronaves, en el que, dadas unas condiciones, se buscará obtener un consumo mínimo de combustible. Para ello hay que tener en cuenta, evidentemente, el modelo de atmósfera, así como los modelos aerodinámico y propulsivo de la aeronave y, además, que hay parámetros y variables de la aeronave o de su trayectoria de los que se desconoce su valor exacto, es decir, se trabaja con variables que se consideran inciertas. En base a esto, mediante una serie de estrategias que se exponen y desarrollan en el presente documento, se trata de obtener un consumo de combustible que sea óptimo, es decir, la mínima carga de combustible que permite que la aeronave realice una trayectoria determinada, independientemente de los valores reales finales que tomen las variables inciertas de las que se habla.

Summary

Some of the last articles in which professors of the Aerospace Engineer and Fluid Mechanics Department are working are focused in the analysis of aircraft's fuel consumption.

That's where this assignment comes from. Its main target is the study and optimization of aircrafts' trajectories, searching for the minimum fuel consumption, under some given circumstances. While solving this problem, there are some things which need taking care of, as the atmosphere model, the aerodynamic and propulsive models of the aircraft. On top of that, there are some parameters and variables from the aircraft or its trajectory of which the precise value is unknown, these variables are considered as uncertain variables. So, some strategies will be explained and used to find the optimum fuel consumption, i.e, the minimum fuel charge the aircraft needs for a particular trajectory, regardless of uncertain variables real and exact values.

Índice

Resumen	ix
Summary	xi
Índice	xiii
Índice de Tablas	xv
Índice de Figuras	xvii
1 Introducción	1
1.1 <i>Motivación</i>	1
1.2 <i>Objetivo</i>	2
1.3 <i>Antecedentes</i>	2
1.4 <i>Estructura del documento</i>	2
2 Formulación del problema	3
2.1 <i>Consumo de combustible</i>	3
2.2 <i>Incertidumbre en las variables</i>	7
2.2.1 <i>Distribución uniforme</i>	7
2.2.2 <i>Distribución gamma</i>	8
2.3 <i>Método de Monte Carlo</i>	9
3 Estrategias de optimización	13
3.1 <i>El Caso Perfecto</i>	13
3.2 <i>Estrategia 1</i>	16
3.3 <i>Estrategia 2</i>	17
3.4 <i>Estrategia 3</i>	19
4 El Caso Perfecto	21
4.1 <i>Caso monovariable</i>	21
4.1.1 <i>Distribución uniforme</i>	21
4.1.2 <i>Distribución gamma</i>	25
4.2 <i>Caso multivariable</i>	28
5 Resultados de la Estrategia 1	33
5.1 <i>Caso monovariable</i>	33
5.1.1 <i>Distribución uniforme</i>	34
5.1.2 <i>Distribución gamma</i>	36
5.2 <i>Caso multivariable</i>	37
6 Resultados de la Estrategia 2	41
6.1 <i>Caso monovariable</i>	41
6.1.1 <i>Distribución uniforme</i>	41
6.1.2 <i>Distribución gamma</i>	45
6.2 <i>Caso multivariable</i>	48
7 Resultados de la Estrategia 3	51
7.1 <i>Caso monovariable</i>	51

7.1.1	Distribución uniforme	51
7.1.2	Distribución gamma	53
7.2	<i>Caso multivariable</i>	55
8	Resumen de resultados	59
8.1	<i>Caso monovariable</i>	59
8.1.1	Distribución uniforme	59
8.1.2	Distribución gamma	61
8.2	<i>Caso multivariable</i>	62
9	Conclusiones y trabajo futuro	65
	Referencias	67
	Apéndice	69

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2-1. Coeficientes de resistencia compresible	4
Tabla 2-2. Propiedades de las variables aleatorias definidas	7
Tabla 4-1. Caso Perfecto, resultados caso monovariante, distribución uniforme	21
Tabla 4-2. Caso Perfecto, resultados caso monovariante, distribución gamma	25
Tabla 4-3. Caso Perfecto, resultados caso multivariante	28
Tabla 5-1. Estrategia 1, variables de decisión caso monovariante, distribución uniforme y gamma	33
Tabla 5-2. Estrategia 1, resultados caso monovariante, distribución uniforme	34
Tabla 5-3. Estrategia 1, resultados caso monovariante, distribución gamma	36
Tabla 5-4. Estrategia 1, variables de decisión caso multivariante	37
Tabla 5-5. Estrategia 1, resultados caso multivariante	38
Tabla 6-1. Estrategia 2, variables de decisión caso monovariante, distribución uniforme	41
Tabla 6-2. Estrategia 2, resultados caso monovariante, distribución uniforme	42
Tabla 6-3. Estrategia 2, variables de decisión caso monovariante, distribución gamma	45
Tabla 6-4. Estrategia 2, resultados caso monovariante, distribución gamma	45
Tabla 6-5. Estrategia 2, variables de decisión caso multivariante	48
Tabla 6-6. Estrategia 2, resultados caso multivariante	48
Tabla 7-1. Estrategia 3, variables de decisión caso monovariante, distribución uniforme	52
Tabla 7-2. Estrategia 3, resultados caso monovariante, distribución uniforme	53
Tabla 7-3. Estrategia 3, variables de decisión caso monovariante, distribución gamma	54
Tabla 7-4. Estrategia 3, resultados caso monovariante, distribución gamma	55
Tabla 7-5. Estrategia 3, variables de decisión caso multivariante	56
Tabla 7-6. Estrategia 3, resultados caso multivariante	57
Tabla 8-1. Comparación del Mach, caso monovariante y distribución uniforme	59
Tabla 8-2. Comparación de δ , caso monovariante y distribución uniforme	60
Tabla 8-3. Comparación del consumo, caso monovariante y distribución uniforme	60
Tabla 8-4. Comparación del Mach, caso monovariante y distribución gamma	61
Tabla 8-5. Comparación de δ , caso monovariante y distribución gamma	61
Tabla 8-6. Comparación del consumo, caso monovariante y distribución gamma	61
Tabla 8-7. Comparación del Mach, caso multivariante	62
Tabla 8-8. Comparación de δ , caso multivariante	63
Tabla 8-9. Comparación del consumo, caso multivariante	63

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1. Distribución uniforme. Función de densidad del peso final	8
Figura 2-2. Distribución gamma. Función de densidad del peso final	9
Figura 3-1. Caso Perfecto. Diagrama de flujo.	14
Figura 3-2. Estrategia 1. Diagrama de flujo.	16
Figura 3-3. Estrategia 2. Diagrama de flujo.	18
Figura 3-4. Estrategia 3. Diagrama de flujo.	19
Figura 4-1. Caso Perfecto, fdp del Mach, caso monovariante y distribución uniforme	22
Figura 4-2. Caso perfecto. Mach frente al peso final. Distribución uniforme.	23
Figura 4-3. Caso Perfecto, fdp de δ , caso monovariante y distribución uniforme	24
Figura 4-4. Caso Perfecto. Delta frente al peso final. Distribución uniforme.	24
Figura 4-5. Caso Perfecto, fdp del consumo, caso monovariante y distribución uniforme	25
Figura 4-6. Caso Perfecto, fdp del Mach, caso monovariante y distribución gamma	26
Figura 4-7. Caso Perfecto, fdp de δ , caso monovariante y distribución gamma	27
Figura 4-8. Caso Perfecto, fdp del consumo, caso monovariante y distribución gamma	28
Figura 4-9. Caso Perfecto, fdp del Mach, caso multivariante	29
Figura 4-10. Caso Perfecto, fdp de δ , caso multivariante	30
Figura 4-11. Caso Perfecto, fdp del consumo de combustible, caso multivariante	31
Figura 5-1. Estrategia 1, fdp del consumo, caso monovariante y distribución uniforme	35
Figura 5-2. Estrategia 1. Consumo - peso final, caso monovariante y distribución uniforme	35
Figura 5-3. Estrategia 1, fdp del consumo, caso monovariante y distribución gamma	37
Figura 5-4. Estrategia 1, fdp del consumo, caso multivariante	39
Figura 6-1. Estrategia 2, fdp del consumo, caso monovariante y distribución uniforme	43
Figura 6-2. Estrategia 2. Consumos - peso final, caso monovariante y distribución uniforme	44
Figura 6-3. Estrategia 2. Consumos - δ , caso monovariante y distribución uniforme	44
Figura 6-4. Estrategia 2, fdp del consumo, caso monovariante y distribución gamma	46
Figura 6-5. Estrategia 2. Consumos - peso final, caso monovariante y distribución gamma	47
Figura 6-6. Estrategia 2, fdp del consumo, caso multivariante	49
Figura 7-1. Estrategia 3, curvas de nivel del consumo, caso monovariante y distribución uniforme	52
Figura 7-2. Estrategia 3, curvas de nivel del consumo, caso monovariante y distribución gamma	54
Figura 7-3. Estrategia 3, curvas de nivel del consumo, caso multivariante	56

1 INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo se describen las razones que llevan a la realización de este Trabajo de Fin de Grado, cuál es su objetivo, sobre qué teoría o resultados está asentado y la estructura que tiene.

1.1 Motivación

El reto bajo el cual se enmarca este trabajo es el de la optimización de trayectorias de aeronaves sujetas a incertidumbre. La incertidumbre puede ser definida como la falta de un conocimiento seguro y claro de algo. En el cálculo de trayectorias de aeronaves, según lo visto en el Trabajo de Fin de Grado “Análisis de trayectorias de crucero de aviones comerciales sujetas a variables estocásticas” [1], ésta puede presentarse en los datos empleados, la operación de la aeronave y la meteorología:

- Los datos empleados.

Esta incertidumbre se tiene cuando se emplean datos que son obtenidos a través de medidas o de estimaciones que pueden presentar un determinado nivel de error. Los datos aquí considerados están relacionados con las condiciones iniciales de la aeronave y con los modelos empleados en el cálculo de trayectorias. Ejemplos de datos con incertidumbre son aquellos relacionados con la falta de conocimiento exacto de la posición inicial de la aeronave debido a los errores asociados al sistema GPS, o no conocer exactamente los valores de los coeficientes aerodinámicos debido a desconocer el desgaste del acabado superficial de la aeronave.

- La operación de la aeronave.

Hablar de la operación de la aeronave en el cálculo de trayectorias es equivalente a hablar de la definición de los segmentos de vuelo. En este caso la incertidumbre puede aparecer en los valores que definen las ligaduras de vuelo o en las condiciones de parada. Por ejemplo, puede existir desconocimiento en los valores de altitud y velocidad a los que se va a realizar un segmento de crucero si éstos dependen de la decisión de un controlador aéreo, o el instante en el que comenzará un viraje si éste depende de la pericia del piloto.

- La meteorología.

Las condiciones meteorológicas se obtienen normalmente a través de predicciones, las cuales llevan asociadas de manera inherente una incertidumbre. De manera general, cuanto mayor es el horizonte temporal para el cual se proporciona la predicción, mayor es la incertidumbre asociada. Ejemplos de datos meteorológicos que pueden presentar incertidumbre son la velocidad y la dirección del viento.

El interés de optimizar teniendo en cuenta la incertidumbre viene dado porque, en términos de esperanza estadística, se obtienen unos mejores resultados en los problemas de optimización si se resuelven con incertidumbre, en vez de obviarla, como sugiere Birge [2].

En este Trabajo, se aborda el problema de optimizar el vuelo de crucero de una aeronave en términos de velocidad y altitud de vuelo, a fin de minimizar el consumo de combustible cuando existe incertidumbre en los datos empleados. Se considera que la masa final de la aeronave es fija, por lo que optimizar el consumo de combustible se traduce en optimizar la cantidad de combustible a cargar en la aeronave.

1.2 Objetivo

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado consiste en evaluar diferentes estrategias de optimización. En dichas estrategias se obtiene un resultado directo, el consumo de combustible, y un resultado indirecto, el tiempo de cálculo empleado para obtener dicho consumo. Es decir, se podrá observar cuál de esas estrategias podría considerarse la óptima en media y desviación típica de consumo de combustible, cuál es más rápida, y si hay una diferencia apreciable en los resultados a los que se llega al aplicar las diferentes estrategias. Para ello, se desarrollan cálculos basados en el método de Monte Carlo (para la obtención de elevados números de muestras) y, apoyándose en una serie de modelos que se describen más adelante, se procede a la optimización de vuelos en crucero de una aeronave. Hay que recalcar que, en este Trabajo, estas estrategias de optimización están enfocadas a la reducción del consumo de combustible.

1.3 Antecedentes

El presente Trabajo de Fin de Grado se apoya en tres trabajos previos realizados en el departamento de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos:

El primero de ellos, es el artículo “Propagation of Initial Mass Uncertainty in Aircraft Cruise Flight” [3] realizado por Rafael Vázquez Valenzuela y Damián Rivas Rivas en el año 2013. En él se analiza la propagación de la incertidumbre en las trayectorias de las aeronaves, siendo el tema principal el estudio de la incertidumbre en la masa inicial y su propagación a lo largo de la etapa de crucero. En este artículo se desarrollan dos métodos aproximados para el estudio de la evolución de la función de distribución de la masa. Estos métodos son aplicables para problemas en los cuales existe una única variable aleatoria, y para el análisis de funciones de distribución de variables aleatorias que son invertibles.

El segundo, es el Trabajo de Fin de Grado “Análisis de trayectorias de crucero de aviones comerciales sujetas a variables estocásticas” [1] realizado por Manuel Ángel Zapata Habas en el año 2015. En dicho Trabajo de Fin de Grado se utiliza el método de Monte Carlo para reproducir los resultados obtenidos en el artículo [3] mencionado anteriormente y estudiar nuevos casos, con más de una variable aleatoria, para los que no se podían utilizar los métodos desarrollados en el artículo [3].

El tercero en el que se apoya, es en el Proyecto de Fin de Carrera “Análisis de las actuaciones de aviones comerciales incluyendo efectos de compresibilidad” [4] realizado por Mónica Manuela Rodríguez Heredia en el año 2015. En dicho Proyecto de Fin de Carrera se realiza un estudio de compresibilidad sobre un avión comercial y se compara con un modelo BADA. Es importante destacar que es del estudio de compresibilidad de este Proyecto de Fin de Carrera de donde se extraen los modelos aerodinámico y propulsivo de la aeronave, y las expresiones para la optimización del consumo de combustible que se desarrollan en el presente Trabajo de Fin de Grado.

1.4 Estructura del documento

El documento consiste de nueve capítulos, incluyendo el de introducción. Siguiendo una línea lógica, se empieza en el segundo capítulo mostrando la formulación del problema, presentando la determinación de la ecuación del consumo de combustible y, también, el modelo de la incertidumbre en las variables. En el tercer capítulo, se explican el Caso Perfecto, basado en el conocimiento perfecto de una variable incierta como si ésta no estuviese sujeta a incertidumbre, y las estrategias con las que se ha realizado la optimización, justificando por qué se consideran adecuadas para el análisis. En el capítulo cuarto, se exponen los resultados del Caso Perfecto y en los capítulos del quinto al séptimo se presentan los resultados tras aplicar cada una de las estrategias. Posteriormente, en el octavo capítulo se hace un breve resumen de los resultados, que permite comparar los datos obtenidos en cada una de las estrategias de una forma más esquemática. Por último, en el noveno capítulo se extraen las conclusiones del presente trabajo y se proponen posibles trabajos futuros.

2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En este capítulo se presenta la formulación del problema, en lo referente a: 1) la determinación de la expresión que permite calcular el consumo de combustible; 2) la incertidumbre en las variables, uno de los principales sucesos a tener en cuenta al realizar el modelado de un sistema de este tipo; 3) el método Monte Carlo.

2.1 Consumo de combustible

En este apartado se describen las expresiones que nos permiten obtener un valor del consumo de combustible en función de los parámetros de la aeronave y las condiciones de vuelo. Para ello, primero, se describe el modelo de aeronave, tanto aerodinámico como propulsivo, tratando algunas de las expresiones de estos modelos en el apéndice. Después, se plantea el modelado del sistema, y por último se deduce la ecuación que permite realizar el cálculo de consumo.

Se proceden a presentar las hipótesis, así como la expresión que permite calcular el consumo de combustible como función del número de Mach (M) y del cociente de presiones ($\delta = \frac{p}{p_0}$). Siendo p la presión a la altitud a la que se encuentra la aeronave, y p_0 la presión a nivel de mar. Es decir, δ , como cociente de presiones, equivale a una altitud que viene determinada por el modelo de atmósfera utilizado.

Para el cálculo de dicho consumo de combustible se considera que el vuelo es simétrico, horizontal, rectilíneo y con el aire en calma, siendo el modelo de atmósfera la atmósfera ISA.

El equilibrio de fuerzas proporciona:

$$L = W \quad (2-1)$$

$$T = D \quad (2-2)$$

donde L es la sustentación, W el peso de la aeronave, T el empuje y D la resistencia. La resistencia (D) viene dada por la siguiente expresión:

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D(M, C_L) = q_0 \delta M^2 C_D(M, C_L) \quad (2-3)$$

donde ρ es la densidad del aire, V la velocidad, S la superficie de la aeronave y C_D el coeficiente de resistencia aerodinámico, que depende del Mach (M) y C_L , el coeficiente de sustentación. Además, se tiene que $q_0 = \frac{1}{2} \gamma_g p_0 S$, expresión en la que γ_g es el coeficiente de dilatación adiabática del aire.

El coeficiente de resistencia (C_D) viene dado por la siguiente polar compresible, adaptada de Cavcar (2004) [5] y empleada también en el Proyecto de M. M. Rodríguez [4].

$$\begin{aligned}
C_D &= K_{C_{D_0}} \left(C_{D_{0,i}} \sum_{j=1}^5 k_{0j} \cdot K^j(M) \right) + K_{C_{D_1}} \left(C_{D_{1,i}} \sum_{j=1}^5 k_{1j} \cdot K^j(M) \right) \cdot C_L \\
&\quad + K_{C_{D_2}} \left(C_{D_{2,i}} \sum_{j=1}^5 k_{2j} \cdot K^j(M) \right) \cdot C_L^2 \\
&= K_{C_{D_0}} C_{D_0}(M) + K_{C_{D_1}} C_{D_1}(M) \cdot C_L + K_{C_{D_2}} C_{D_2}(M) \cdot C_L^2
\end{aligned} \tag{2-4}$$

donde $K_{C_{D_0}}, K_{C_{D_1}}, K_{C_{D_2}}$ son variables que permiten incorporar en los cálculos la incertidumbre relacionada, respectivamente, con los coeficientes de resistencia $C_{D_0}, C_{D_1}, C_{D_2}$, además

$$K(M) = \frac{(M - 0.4)^2}{\sqrt{1 - M^2}} \tag{2-5}$$

para $M \geq 0.4$, y $K(M) = 0$ para $M < 0.4$.

En cuanto al resto de parámetros que aparecen en la expresión (2-4), se tienen, por un lado, los siguientes valores para los coeficientes de resistencia incompresible del modelo:

$$C_{D_{0,i}} = 0.01322, \quad C_{D_{1,i}} = -0.00610, \quad C_{D_{2,i}} = 0.06000$$

Y, por otro lado, los coeficientes de resistencia compresible, expuestos en la Tabla 2-1.

Tabla 2-1. Coeficientes de resistencia compresible

j	1	2	3	4	5
k_{0j}	0.0067	-0.1861	2.2420	-6.4350	6.3428
k_{1j}	0.0962	-0.7602	-1.2870	3.7925	-2.7672
k_{2j}	-0.1317	1.3427	-1.2839	5.0164	0.0000

Siguiendo el desarrollo, se presenta la definición cinemática de la trayectoria con respecto a un sistema de referencia inercial:

$$\frac{dr}{dt} = V \tag{2-6}$$

donde r es la posición, y t el tiempo.

Y la expresión de cómo el peso varía con el tiempo:

$$\frac{1}{g} \frac{dW}{dt} = -c_E T \tag{2-7}$$

siendo g la aceleración de la gravedad, y c_E el consumo específico.

En el que dicho consumo específico (c_E) viene dado por [4]

$$c_E = c_{E0} \cdot \sqrt{\theta} \cdot (1.0 + 1.2 \cdot M) \quad (2-8)$$

donde c_{E0} es el consumo específico, parámetro de la aeronave, y θ la temperatura..

De esta manera, se puede llegar a la siguiente expresión, relacionando la posición con el peso de la aeronave:

$$\frac{dr}{dW} = -\frac{V}{gc_E T} = -\frac{V}{gc_E D} \quad (2-9)$$

Por último, se integra desde una posición inicial r_i hasta una posición final r_f , siendo $R = r_f - r_i$ el alcance. Reflejando la expresión en forma integral, teniendo en cuenta que se integra desde un peso inicial W_i a uno final W_f , se tiene la siguiente expresión del alcance:

$$R = -\frac{1}{g} \int_{W_i}^{W_f} \frac{V}{c_E D} dW \quad (2-10)$$

Ahora bien, el problema de optimización de trayectorias se pretende resolver en función del peso final (W_f) y la carga de combustible (W_F). De esta manera, hay que reescribir el peso inicial de la aeronave, entonces $W_i = W_f + W_F = W_f(1 + \zeta)$. El peso inicial queda expresado, por tanto, en función de las variables W_f (peso final), la variable W_F (peso de combustible), y ζ (el cociente entre el peso de combustible y el peso final, es decir, $\zeta = \frac{W_F}{W_f}$). Conforme a lo descrito, la expresión 2-10 pasa a ser de la siguiente manera

$$R = -\frac{1}{g} \int_{W_f(1+\zeta)}^{W_f} \frac{V}{c_E D} dW \quad (2-11)$$

Con este desarrollo previo, y haciendo los cálculos oportunos para la integración, se llega a la expresión del alcance presentada a continuación.

$$\begin{aligned}
R = & \frac{1}{g} \frac{a_0 M}{c_{E0} \cdot (1.0 + 1.2 \cdot M)} \cdot \frac{2}{\sqrt{4K_{C_{D0}} C_{D0}(M) K_{C_{D2}} C_{D2}(M) - (K_{C_{D1}} C_{D1}(M))^2}} \\
& \cdot \left(\tan^{-1} \frac{2K_{C_{D2}} C_{D2}(M) \frac{W_f(1+\zeta)}{q_0 \delta M^2} + K_{C_{D1}} C_{D1}(M)}{\sqrt{4K_{C_{D0}} C_{D0}(M) K_{C_{D2}} C_{D2}(M) - (K_{C_{D1}} C_{D1}(M))^2}} \right. \\
& \left. - \tan^{-1} \frac{2K_{C_{D2}} C_{D2}(M) \frac{W_f}{q_0 \delta M^2} + K_{C_{D1}} C_{D1}(M)}{\sqrt{4K_{C_{D0}} C_{D0}(M) K_{C_{D2}} C_{D2}(M) - (K_{C_{D1}} C_{D1}(M))^2}} \right) \quad (2-12)
\end{aligned}$$

De esta manera se tiene la expresión del alcance que se utiliza para la optimización del problema. Fijando dicho alcance, y teniendo en cuenta que las variables Mach y δ se calculan para ser las óptimas mediante la búsqueda de los ceros en la función objetivo 2-12 (derivando la expresión con respecto a Mach y a δ), es posible obtener el consumo de combustible mínimo. Así, reescribiendo la expresión para despejar el consumo de combustible (W_F), en función del Mach, de δ y del alcance (R), utilizando las siguientes variables intermedias,

$$\begin{aligned}
A = & \frac{a_0 M}{g c_{E0} (1.0 + 1.2 \cdot M)}, \quad B = \frac{2}{\sqrt{4K_{C_{D0}} C_{D0}(M) K_{C_{D2}} C_{D2}(M) - (K_{C_{D1}} C_{D1}(M))^2}} \\
u = & \tan\left(\frac{R}{A B}\right), \quad b = \frac{K_{C_{D1}} C_{D1} + \frac{2K_{C_{D2}} C_{D2}(M) W_f}{M^2 \delta q_0}}{\sqrt{4K_{C_{D0}} C_{D0}(M) K_{C_{D2}} C_{D2}(M) - (K_{C_{D1}} C_{D1}(M))^2}}, \\
a = & \frac{u + b}{1 - u b}
\end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta que $a = a(M, \delta, R, W_f, c_{E0}, K_{C_{D0}}, K_{C_{D1}}, K_{C_{D2}})$, se llega a la expresión del consumo de combustible (W_F) que se utiliza para el cálculo

$$W_F = - \frac{M^2 \delta q_0 \left(K_{C_{D1}} C_{D1}(M) - a \sqrt{4K_{C_{D0}} C_{D0}(M) K_{C_{D2}} C_{D2}(M) - (K_{C_{D1}} C_{D1}(M))^2} \right)}{2K_{C_{D2}} C_{D2}} - W_f \quad (2-13)$$

2.2 Incertidumbre en las variables

Con el objetivo de estudiar el comportamiento del consumo de combustible se consideran dos casos. El primero, monovariante, en el que la única variable incierta es el peso final (W_f). El segundo, multivariante, en el que se consideran como variables inciertas, aparte del peso final (W_f), el consumo específico (c_{E0}), los coeficientes $K_{C_{D0}}, K_{C_{D1}}, K_{C_{D2}}$ relacionados con los coeficientes de resistencia C_{D0}, C_{D1} , y C_{D2} , y, por último, el alcance (R).

En este trabajo se consideran dos distribuciones, la uniforme y la gamma, ya que estas dos son las que se consideraron en [1] y [3]. Cabe mencionar que la distribución gamma sólo se utiliza en el caso monovariante, mientras que la distribución uniforme se emplea tanto en el caso monovariante como en el caso multivariante.

2.2.1 Distribución uniforme

En este apartado, aprovechando que la distribución uniforme es, como se comentó anteriormente, la que se utiliza para modelar la incertidumbre de las variables en el caso multivariante, se van a presentar aquí las propiedades de $W_f, c_{E0}, K_{C_{D0}}, K_{C_{D1}}, K_{C_{D2}}$, y R . Primero, es necesaria la exposición de la formulación de una variable aleatoria uniforme. Para simplificar esta formulación se utiliza una variable intermedia S , que sirve como sustituta de las variables inciertas del caso multivariante. Siendo S una variable aleatoria continua uniformemente distribuida, su función de densidad es

$$f_S(S) = \frac{1}{2\delta_S}$$

en el intervalo $[S_0 - \delta_S, S_0 + \delta_S]$, y cero en cualquier otro punto. Siendo S_0 el valor central y δ_S el valor correspondiente al ancho de la distribución uniforme.

Las expresiones de la esperanza y la varianza son: $E[S] = S_0$ y $Var[S] = \frac{\delta_S^2}{3}$.

De esta manera, las propiedades de las variables inciertas que se utilizan en el Trabajo quedan definidas en la Tabla 2-2.

Tabla 2-2. Propiedades de las variables aleatorias definidas

Variable	Valor central	δ
W_f	1.1500 e+06 [N]	5 e+04 [N]
c_{E0}	9.0101 e-06 [kg/sN]	4.5051 e-07 [kg/sN]
$K_{C_{D0}}, K_{C_{D1}}, K_{C_{D2}}$	1	0.05
R	6 e+06 [km]	3 e5 [km]

La incertidumbre de todas las variables es del 5% con respecto al valor central, excepto para el peso final (W_f) que varía 50 kN con respecto al valor medio, un nivel de incertidumbre en torno al 4%.

La incertidumbre en $c_{E0}, K_{C_{D0}}, K_{C_{D1}}, K_{C_{D2}}$ viene dada por la falta de conocimiento exacto de los parámetros de la aeronave, mientras que la incertidumbre en el alcance (R) puede asociarse a la meteorología, vientos en contra o a favor que puedan aumentar o disminuir la distancia recorrida por la aeronave en el aire.

Es importante destacar que los números aleatorios que se obtienen para este apartado han sido generados por la función *rand* disponible en el programa MATLAB, el algoritmo de dicha función está basado en el método de Mersenn Twister.

Representando la función de densidad de una de las variables, por ejemplo el peso final, por ser la única variable que presenta incertidumbre en el caso monovariable, se obtiene lo presentado en la figura 2.1.

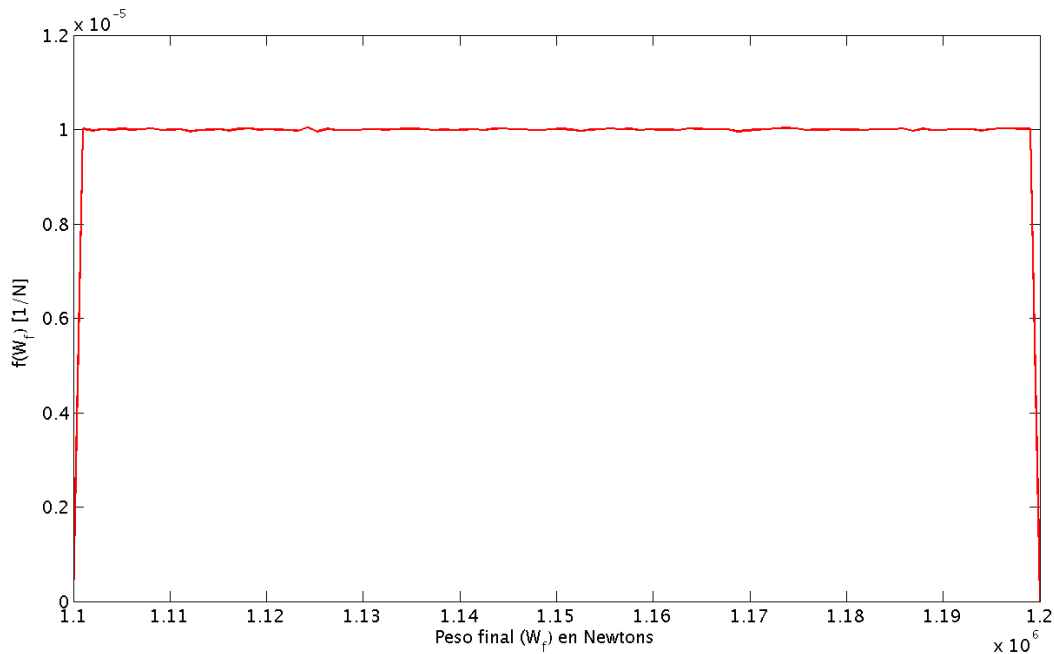


Figura 2-1. Distribución uniforme. Función de densidad del peso final

Aunque aparece cierto rizado en la zona horizontal de la función se desestima, ya que se considera despreciable. Dicho rizado, al igual que la falta de verticalidad en las bandas laterales, es una cuestión puramente de MATLAB, y está asociada al número de elementos que se toman para la representación de la función de densidad.

Por último, es importante volver a recordar que esta distribución es la que se utiliza también para las variables aleatorias que forman parte del problema en el caso multivariable, que ya han sido presentadas en la Tabla 2-2.

2.2.2 Distribución gamma

La distribución gamma representa una variable aleatoria continua no negativa y se nombra como $G(k, \theta)$, donde $k > 0$ es el parámetro de forma y $\theta > 0$ es el parámetro de escala. Las expresiones de la esperanza y la varianza son, $E[G(k, \theta)] = k \theta$ y $Var[G(k, \theta)] = k \theta^2$. La expresión de la función de densidad es la siguiente:

$$f(x; k; \theta) = x^{k-1} \frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)}$$

para $x \geq 0$, donde Γ es la función gamma de Euler. Usando la propiedad de que para $\theta > 0$, $G(k, \theta) = \theta G(k, 1)$, se considera el valor $\theta = 1$ sin que eso conlleve una pérdida de generalidad.

Ahora bien, esta distribución sólo se utiliza para el caso monovariante, por lo que la formulación se realiza directamente para la variable peso final (W_f), quedando la expresión de la siguiente forma

$$W_f = W_{f_0} + \frac{\delta_{W_f}}{\sqrt{3k}}(G(k, 1) - k)$$

donde los valores de W_{f_0} y δ_{W_f} coinciden con los de la distribución uniforme descrita anteriormente ($W_{f_0} = 1.15e+06$ N, $\delta_{W_f} = 5e+04$ N), y el valor $k = 8.5$ viene impuesto por un artículo del departamento, algo que se puede observar en la página 421 de *Propagation of Initial Mass Uncertainty in Aircraft Cruise Flight* [3].

En este caso, la función que se utiliza para la generación de números aleatorios es *gamrnd*, también disponible en el programa MATLAB.

Representando la función de densidad para el peso final se obtiene lo presentado en la figura 2.2.

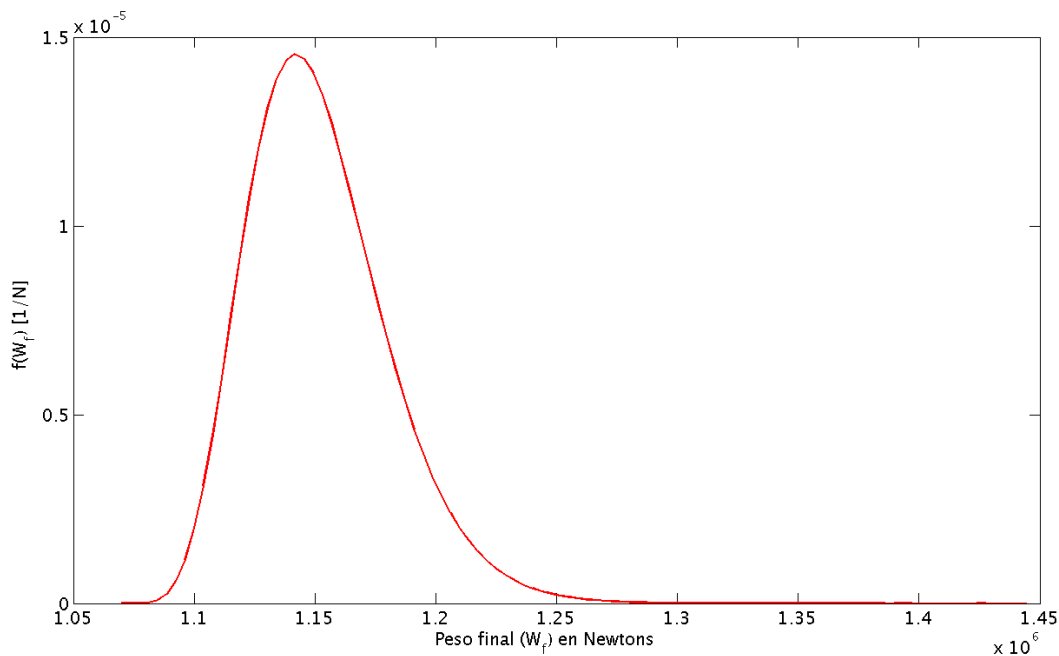


Figura 2-2. Distribución gamma. Función de densidad del peso final

Con lo que queda comprobado que la variable de partida (W_f) se ajusta a la forma de distribución que le habíamos impuesto.

Una vez planteadas las distribuciones y las funciones de densidad de las variables de partida para ambos casos, se pasa a presentar el método de Monte Carlo.

2.3. Método de Monte Carlo

Basándonos en lo expuesto en [3] y [6], se expone cómo aplicar el método Monte Carlo y obtener una función de densidad a partir de una muestra de valores.

Poniendo de ejemplo el caso monovariable, se obtienen N muestras aleatorias del peso final (W_f). Posteriormente, se calculan los valores del consumo de combustible W_F^i , obteniendo un valor para cada una de las N muestras de la secuencia de pesos finales, teniendo en cuenta que dichos valores dependen de las variables de decisión (M y δ) y de la estrategia que se esté aplicando. De este conjunto de valores del consumo de combustible se pueden obtener aproximaciones de la media y la desviación típica.

Para determinar la función de densidad se toman n puntos equidistantes $W_{F,j}$ para discretizar el dominio de la función de densidad estableciendo

$$\begin{aligned} W_{F,1} &= \min\{W_F^i\} \\ W_{F,n} &= \max\{W_F^i\} \\ W_{F,j} &= W_{F,1} + (j-1)d_F, \quad j = 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

donde $d_F = \frac{W_{F,n} - W_{F,1}}{n-1}$, es la distancia entre puntos de la discretización.

Entonces, para $j=2, \dots, n-1$, la función de densidad en los puntos de discretización es aproximada de la forma siguiente

$$f_{W_F}(W_{F,j}) = \frac{N_j}{N} d_F$$

donde N_j es el número de muestras de W_F^i que satisface

$$W_F^i \in \left[W_{F,j} - \frac{d_F}{2}, W_{F,j} + \frac{d_F}{2} \right]$$

Esto es, el número de muestras más cercanas a $W_{F,j}$. En los puntos de los extremos del intervalo hay una ligera diferencia

$$\begin{aligned} f_{W_F}(W_{F,1}) &= \frac{N_1}{2N} d_F \\ f_{W_F}(W_{F,n}) &= \frac{N_n}{2N} d_F \end{aligned}$$

donde N_1 y N_n están definidas como el número de muestras W_F^i que satisface, respectivamente

$$\begin{aligned} W_F^i &\in \left[W_{F,1}, W_{F,1} + \frac{d_F}{2} \right] \\ W_F^i &\in \left[W_{F,n} - \frac{d_F}{2}, W_{F,n} \right] \end{aligned}$$

El principal inconveniente del método es que se requieren muchas muestras, y para cada muestra hay que resolver el problema de optimización de trayectorias. Como cada cálculo es independiente de los otros, esta tarea se suele paralelizar para reducir el tiempo total de cálculo.

Teniendo en cuenta la bondad de las aproximaciones, se puede estimar la probabilidad para la que el error de la media obtenida por el método de Monte Carlo es mayor que cierta tolerancia. Llamando $\overline{W_F}$ a la media estimada y $E[W_F]$ a la media verdadera, ε la tolerancia, y $\sigma[W_F]$ la desviación típica del consumo de combustible, se tiene, tomado de [6]

$$\Pr[|\overline{W_F} - E[W_F]| < \varepsilon] \approx 2 \left(1 - \Phi \left[\frac{\sqrt{N}\varepsilon}{\sigma[W_F]} \right] \right) \quad (2-14)$$

donde Φ es la función de distribución normal estándar acumulativa. Esta fórmula se podría utilizar para estimar la bondad de la aproximación.

Por otro lado, es importante determinar el número de muestras que se deben tomar a la hora de resolver el problema de optimización de trayectorias. Teniendo en cuenta el procedimiento seguido en [1], mediante el método de Monte Carlo, se estima que se tiene un error lo suficientemente pequeño (del orden de 1 kg) y con una probabilidad inferior a un 4% cuando el número de muestras es de 33554432, expresado de otra forma 2^{25} . Por eso, en este trabajo se decide tomar, a priori, dicho número de muestras.

Las muestras de las variables sujetas a incertidumbre se generan en MATLAB mediante dos funciones diferentes *rand* y *gamrnd*, según la distribución con la que se esté trabajando sea uniforme o gamma.

3 ESTRATEGIAS DE OPTIMIZACIÓN

En este capítulo se procede a presentar las tres estrategias que se utilizan para abordar el problema de optimización de trayectorias de aeronaves. Cada una de estas estrategias exhibe una serie de características diferentes, de manera que se describen de forma independiente, y se exponen sus resultados, como se dijo anteriormente, en distintos capítulos.

Para cada estrategia los resultados constan de los valores únicos obtenidos para las variables de decisión (M y δ) y de los valores de consumo de combustible obtenidos, en términos de media y desviación típica. Además, se comparan los resultados de las estrategias con lo que llamaremos el Caso Perfecto.

Es necesario, pues, introducir los conceptos *Expected Value of Perfect Information* (EVPI) y *Value of Stochastic Solution* (VSS).

Expected Value of Perfect Information representa la pérdida de beneficios debida a la incertidumbre, en este caso, el consumo extra de combustible que se puede producir entre la resolución del Caso Perfecto y las estrategias en las que se optimiza el problema de trayectorias al tener en cuenta la incertidumbre. En el presente Trabajo, dicho valor se obtiene al comparar el Caso Perfecto con la Estrategia 2 o la Estrategia 3.

Value of Stochastic Solution representa la ganancia por haber incorporado la incertidumbre al problema de optimización de trayectorias. En el presente Trabajo, ésta ganancia se obtiene al comparar la Estrategia 1 con la Estrategia 2 o la Estrategia 3, ya que ambas incorporan incertidumbre en su resolución.

Sobre ambos conceptos, *Expected Value of Perfect Information* y *Value of Stochastic Solution*, se puede leer de forma más extensa en [2].

3.1 El Caso Perfecto

Esta estrategia, aunque se podría considerar una estrategia de optimización, no es una de las que podría utilizarse para el estudio del problema. Esto es debido a que se basa en un conocimiento perfecto del comportamiento de las variables inciertas, algo que no sucede en la realidad. Consiste, básicamente, en optimizar para cada uno de los pesos finales que se obtienen de forma aleatoria, ya sea mediante una distribución uniforme o una distribución gamma, considerando que se conocen exactamente los valores que toman las variables, aunque éstas vengan dadas por funciones de distribución.

De esta manera, se obtienen en el caso monovariable, a partir de un conjunto de valores de peso final, un conjunto de valores de Mach óptimos, un conjunto de valores de delta óptimos, y un último conjunto de valores del consumo de combustible óptimo. Es decir, en vez de elegir un régimen de vuelo y volar en unas condiciones de Mach y δ fijas, como se hace en las estrategias de optimización, se considera que se tiene conocimiento absoluto de la variable peso final, tratándola como un conjunto de datos y no como una variable aleatoria.

El proceso sería tal y como queda expresado en el siguiente diagrama de flujo.

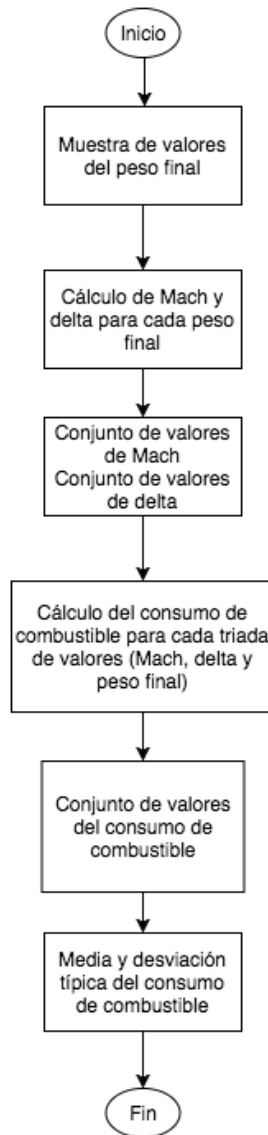


Figura 3-1.Caso Perfecto. Diagrama de flujo.

La manera de obtener los valores de las variables de decisión (M y δ), es derivando la expresión 2-12 con respecto a Mach y a δ , siendo los valores obtenidos los óptimos. Para facilitar dicha derivación, se plantea una descripción similar a la hecha en [4].

Llamando:

$$A = \frac{1}{g} \frac{a_0 M}{c_{E0} \cdot (1.0 + 1.2 \cdot M)} \quad (3-1)$$

$$B = \frac{2}{\sqrt{4K_{C_{D_0}} C_{D_0}(M) K_{C_{D_2}} C_{D_2}(M) - (K_{C_{D_1}} C_{D_1}(M))^2}} \quad (3-2)$$

$$a = \frac{2K_{C_{D_2}} C_{D_2}(M) \frac{W_f(1+\zeta)}{q_0 \delta M^2} + K_{C_{D_1}} C_{D_1}(M)}{\sqrt{4K_{C_{D_0}} C_{D_0}(M) K_{C_{D_2}} C_{D_2}(M) - (K_{C_{D_1}} C_{D_1}(M))^2}} \quad (3-3)$$

$$b = \frac{2K_{C_{D_2}} C_{D_2}(M) \frac{W_f}{q_0 \delta M^2} + K_{C_{D_1}} C_{D_1}(M)}{\sqrt{4K_{C_{D_0}} C_{D_0}(M) K_{C_{D_2}} C_{D_2}(M) - (K_{C_{D_1}} C_{D_1}(M))^2}} \quad (3-4)$$

y, por simplicidad en cálculos posteriores:

$$u = \frac{a - b}{1 + ab} \quad (3-5)$$

$$\tan^{-1}(a) - \tan^{-1}(b) = \tan^{-1}\left(\frac{a - b}{1 + ab}\right) \quad (3-6)$$

Utilizando las expresiones descritas, la ecuación del alcance (2-12) queda, por tanto, de la siguiente forma:

$$R = A \cdot B \cdot \tan^{-1}(u) \quad (3-7)$$

Ahora bien, se procede a derivar la expresión con respecto a las variables de decisión, como ya se comentó. Derivando el alcance (3-7) con respecto al Mach, se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial R}{\partial M} = \frac{dA}{dM} \cdot B \cdot \tan^{-1}(u) + A \cdot \frac{dB}{dM} \cdot \tan^{-1}(u) + A \cdot B \cdot \left(\frac{\partial u / \partial M}{1 + u^2}\right) \quad (3-8)$$

Y derivando el alcance (3-7) con respecto al cociente de presiones δ :

$$\frac{\partial R}{\partial \delta} = A \cdot B \cdot \left(\frac{\partial u / \partial \delta}{1 + u^2}\right) \quad (3-9)$$

Las derivadas de los términos A , B y u , se describen en el Apéndice. Teniendo en cuenta lo desarrollado en dicho apéndice y las expresiones de las derivadas (3-8) y (3-9), se plantea un sistema de dos ecuaciones con las incógnitas Mach y δ , de forma que al resolver dicho sistema se obtienen sus respectivos valores óptimos.

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial M} = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial \delta} = 0 \end{cases} \quad (3-10)$$

Hay que tener en cuenta que primero han de haberse fijado los valores de las variables inciertas, en caso contrario no se puede resolver el sistema. Una vez hecho eso, es posible obtener valores para las variables de decisión (M y δ). La resolución de este sistema se realiza en MATLAB mediante la función *fsolve*, que permite encontrar los valores de Mach y δ que cumplen con el sistema (3-10), como se toman 33554432 (2^{25}) muestras de las variables inciertas hay 2^{25} valores de cada variable de decisión. Ya conseguidos los valores de Mach y δ se puede calcular el consumo de combustible mínimo asociado a cada muestra de las variables sujetas a incertidumbre, mediante la expresión (2-13).

3.2 Estrategia 1

En esta primera estrategia, la idea es optimizar para el valor central de las funciones de distribución, y con dichos valores centrales se calculan un Mach y un δ óptimos. Al utilizar esos valores para todas las muestras del peso final se está imponiendo, de esta forma, el régimen de vuelo a partir del cual se calcula el conjunto de consumos de combustible. Hay que destacar que al optimizar para el valor central de las funciones de distribución se está calculando el consumo de combustible sin tener en cuenta la incertidumbre en el problema.

En la Figura 3-2, se presenta un diagrama de flujo que muestra las variables y los pasos a seguir para resolver el problema de optimización de trayectorias mediante la Estrategia 1.

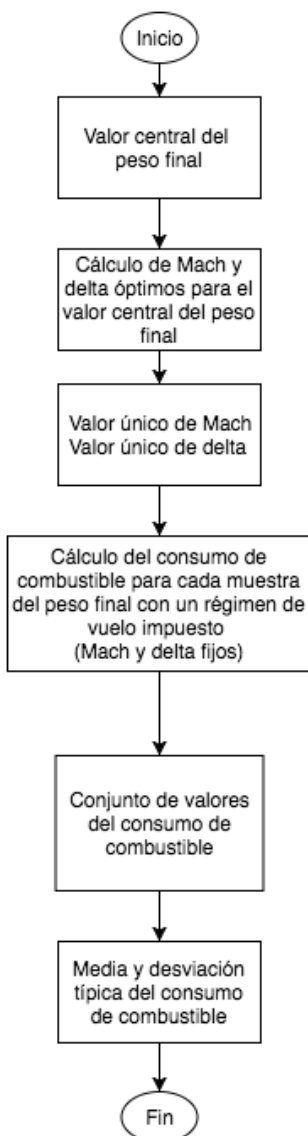


Figura 3-2. Estrategia 1. Diagrama de flujo.

Con ello, la idea es tratar de determinar si se puede realizar cualquier trayectoria con unos valores de Mach y delta determinados, independientes del peso final real. Teniendo en cuenta los valores ya calculados de Mach y δ se realiza el cómputo del consumo de combustible para todos y cada uno de los pesos finales que se han obtenido de forma aleatoria. Es decir, una vez fijados Mach y δ , teniendo un único valor de cada uno, se calcula el consumo con éstos dos valores para cada uno de los pesos finales, por lo que, siendo el conjunto de muestras de 2^{25} , se obtienen esa misma cantidad de valores del consumo de combustible. Posteriormente, se calcula la media y la desviación típica de ese conjunto. El análisis de esta estrategia se realiza tanto con una distribución uniforme como con una distribución gamma.

La búsqueda de los valores de las variables de decisión (M y δ) se realiza mediante la función *fsolve* de MATLAB, comentada anteriormente. El conjunto de valores del consumo de combustible, así como su media y desviación típica, se calculan fácilmente una vez que se han obtenido M y δ , mediante la expresión 2-13.

Esta primera estrategia se basa en resolver el problema de optimización de trayectorias de una aeronave sin tener en cuenta la incertidumbre. Al compararla con la Estrategia 2 o la Estrategia 3, la diferencia entre las medias del consumo de combustible representa el *Value of Stochastic Solution* (VSS).

3.3 Estrategia 2

En esta estrategia, primero se obtienen las muestras de las variables inciertas de forma aleatoria, basadas en las propiedades descritas en el apartado 2.2. A continuación, se calcula el Mach óptimo y δ óptimo para cada una de estas muestras mediante la resolución del sistema de ecuaciones 3-10, tal y como se hizo en el Caso Perfecto, y, posteriormente, se hace la media, obteniendo un único valor de Mach y otro único valor de δ . Utilizando dichos valores en los cálculos del consumo de combustible se está imponiendo el régimen de vuelo, y con estas condiciones es posible calcular cada uno de los consumos de combustible, uno por peso final, llegando a obtener un conjunto de 33554432 (2^{25}) valores de consumo de combustible. Hallando la media de ese conjunto de valores se consigue el valor del consumo de combustible buscado.

Como se puede ver en la descripción de la Estrategia 2, hay una serie de cálculos que coinciden con los que se plantean a realizar en el Caso Perfecto. Además, cabe destacar que en todas las estrategias se utiliza el mismo conjunto de muestras aleatorias, por lo que las muestras generadas en el Caso Perfecto se utilizan de nuevo en la presente estrategia. Por este motivo, dichos cálculos no se repiten, de manera que parte de los resultados obtenidos en el Caso Perfecto se reaprovechan en la presente estrategia. Esto supone que al conjunto de valores de Mach y δ calculados anteriormente en el Caso Perfecto, baste con hallarles la media para obtener los valores únicos que se utilizan, aquí, para imponer el régimen de vuelo.

Una visión más esquemática de cómo se resuelve el problema de optimización de trayectorias utilizando el proceso descrito en la presente estrategia puede observarse en la Figura 3-3.

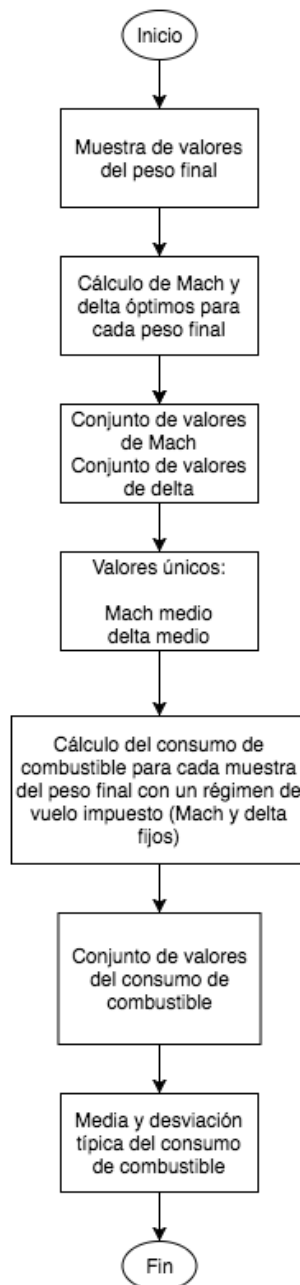


Figura 3-3. Estrategia 2. Diagrama de flujo.

Tal y como se ha comentado anteriormente, la búsqueda de los valores de las variables de decisión (M y δ) se realiza mediante la función *fsolve* de MATLAB aplicada al sistema 3-10. El conjunto de valores del consumo de combustible, así como su media y desviación típica, se pueden calcular una vez que se han obtenido M y δ , mediante la expresión 2-13.

Esta segunda estrategia se basa en resolver el problema de optimización de trayectorias de una aeronave teniendo en cuenta la incertidumbre. La diferencia entre el consumo de combustible medio obtenido al aplicar ambas estrategias, 1 y 2, equivale al valor asociado al concepto *Value of Stochastic Solution* (VSS).

Por otro lado, la diferencia al comparar el valor medio del consumo de combustible obtenido en el Caso Perfecto con el obtenido en la Estrategia 2 representa el *Expected Value of Perfect Information* (EVPI).

3.4 Estrategia 3

En esta tercera estrategia, en la que también se tiene en cuenta la incertidumbre, se trata de optimizar la trayectoria utilizando como función objetivo la media del consumo de combustible.

Primero, se imponen valores de Mach y δ , es decir, el régimen de vuelo, y utilizando el conjunto de pesos finales obtenidos con anterioridad se calcula un conjunto de valores del consumo de combustible, al que posteriormente se le halla la media. Este proceso se repite una y otra vez, imponiendo otros valores de las variables de decisión (M y δ), con el objetivo de encontrar un par de valores que minimice la media del consumo de combustible.

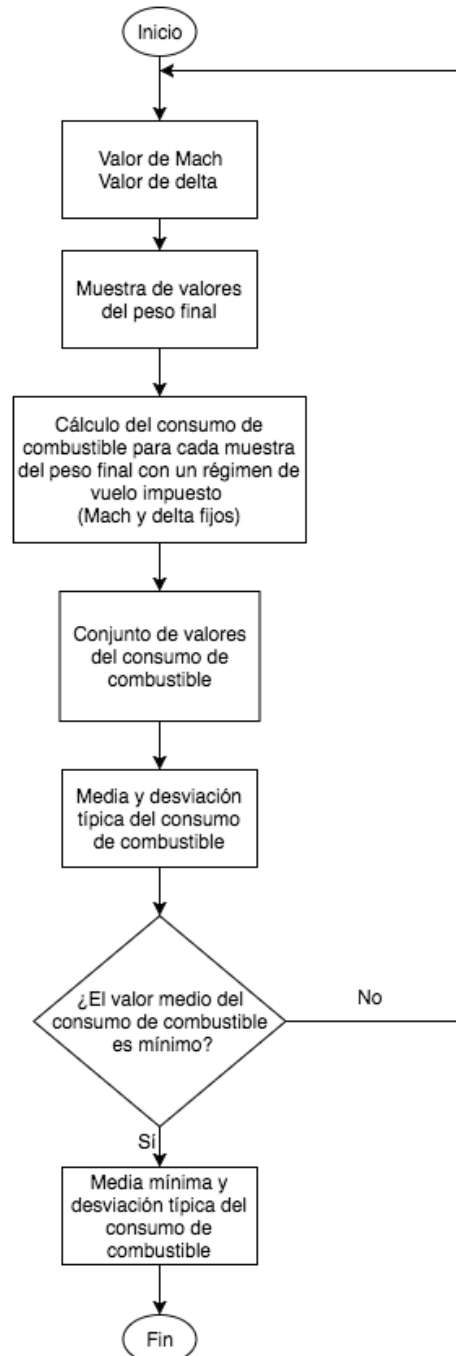


Figura 3-4. Estrategia 3. Diagrama de flujo.

Dichos cálculos para la búsqueda del valor mínimo de combustible se realizan en base a la expresión (2-13), esto supone, a efectos prácticos, utilizar la función *fmincon* de MATLAB, que dada una función nos permite encontrar su mínimo.

Como el conjunto de valores del peso final es de 33554432 (2^{25}) muestras, se van a obtener ese número de valores de consumo de combustible para cada combinación de las variables de decisión (M y δ). Hallando los valores de dichos conjuntos de consumos de combustible, se calcula la media y la desviación típica hasta encontrar aquel cuya media sea mínima, siendo ese el valor buscado. Es decir, el resultado de esta estrategia va a ser un valor de consumo medio, que ha sido optimizado, para una determinada combinación de Mach y δ .

Esta tercera estrategia permite, de una forma semejante a la Estrategia 2, resolver el problema de optimización de trayectorias de una aeronave teniendo en cuenta la incertidumbre. Siendo así, al compararla con la Estrategia 1, la diferencia entre ambos consumos de combustible medio equivale al valor asociado al concepto *Value of Stochastic Solution* (VSS).

Por otro lado, la diferencia al comparar el valor medio del consumo de combustible obtenido en el Caso Perfecto con el obtenido en la Estrategia 3 representa el *Expected Value of Perfect Information* (EVPI). Además, esta estrategia también permitiría considerar otras funciones objetivo como, por ejemplo, minimizar el peor caso posible, minimizar la desviación típica, etc.

4 EL CASO PERFECTO

En este capítulo se exponen los resultados del Caso Perfecto. En éste, se resuelve el problema de optimización de trayectorias para cada uno de los pesos finales como si se tuviese un conocimiento perfecto de la variable peso final, es decir, como si no estuviese sujeta a incertidumbre. Dichos resultados se presentan como relaciones entre dos variables o mediante funciones de densidad del Mach, δ y el consumo de combustible. Además, se distinguen dos casos: monovariante y multivariante.

En el caso monovariante los cálculos se han realizado en un equipo con las siguientes características: Intel Core2 Quad Q6600 2.40 GHz, 8 Gb RAM. El tiempo de procesamiento para hallar los resultados del caso monovariante, tanto para la distribución uniforme como para la distribución gamma, ha sido del orden de 4 días y medio.

En el caso multivariante se ha utilizado un equipo con las siguientes características: 2x Intel Xeon CPU E5-2667 3.20 GHz, 32 Gb RAM, trabajando con 12 hilos en paralelo. El tiempo de procesamiento para hallar los resultados en este caso ha rondado las 20 horas.

4.1 Caso monovariante

En base a lo descrito en la sección 2.2 sobre incertidumbre en las variables, separamos los resultados según si la variable peso final ha sido modelada mediante una distribución uniforme o mediante una distribución gamma. Cabe recordar que el consumo de combustible (W_F), es el mínimo para cada muestra del peso final (W_f), ya que para cada una de ellas se toman los valores óptimos de las variables de decisión (M y δ).

4.1.1 Distribución uniforme

Una vez obtenidas las muestras aleatorias del peso final en base a una distribución uniforme, se calculan las variables de decisión (M y δ) y el consumo de combustible. De manera que, en la siguiente tabla, se presentan los resultados, en términos de media aritmética y desviación típica, de esta estrategia.

Tabla 4-1. Caso Perfecto, resultados caso monovariante, distribución uniforme

Variable	Media	Desviación típica
<i>Mach</i>	0.7615	6.4275e-10
δ	0.2472	0.0062
W_F	2.6740 e+05 [N]	6.7125 e+03 [N]

En la Tabla 4-1, se observa que, al optimizar la trayectoria, el valor medio de Mach es 0.7615. Sumado al valor de la desviación típica, el valor del Mach parece que no va a desplazarse apenas con respecto a su valor central, siendo todos sus valores superiores a 0.4. De esta forma, se podría afirmar que el vuelo en crucero que estaría realizando la aeronave se hace en condiciones en las que se tiene en cuenta la compresibilidad, incluyendo éste efecto en los coeficientes de resistencia de la misma aeronave, tal y como se comentó en la formulación del problema al describir la polar adaptada de Cavcar [5].

En cuanto a δ , cabe recordar que su valor representa un cociente de presiones, de manera que va asociado a una altitud determinada. Del valor medio de δ se obtiene una altitud media en la atmósfera ISA, que es el modelo de atmósfera utilizado en el presente Trabajo, de unos 10351 metros. La desviación típica de δ es significativa y afectaría, por tanto, al valor de la altitud, que podría verse alterada del orden de 200 metros.

Una vez comentados los valores de las variables de decisión (M y δ), se observa que el valor de combustible medio asociado al Caso Perfecto es de unos $2.6740e+05$ N, dato que por sí sólo no ofrece ninguna información. Ahora bien, siendo el valor central del peso final de $1.15e+06$ N, tal y como se definió anteriormente, el consumo de combustible, es decir, la carga de combustible representaría el 23.25% del peso final.

Es importante destacar que el número de muestras que se toman a la hora de resolver el problema de optimización de trayectorias es de 33554432 (2^{25}), cifra que viene dada por [1], como ya se comentó anteriormente. Con dicha cantidad de muestras, al estimar mediante la expresión (2-14) la probabilidad de error para este caso, se obtiene un error lo suficientemente pequeño (del orden de 0.5 kg) con una probabilidad inferior a un 0.0016% en los cálculos del consumo de combustible. El hecho de que se calcule la probabilidad de error para 0.5 kg y no para 1 kg, como se hizo en [1], es que en este último caso al calcular dicha probabilidad sale un resultado igual a 0, valor de probabilidad que no se considera asumible.

A continuación, se van a representar las funciones de densidad de las variables M , δ y W_F , empezando por la función de densidad del Mach.

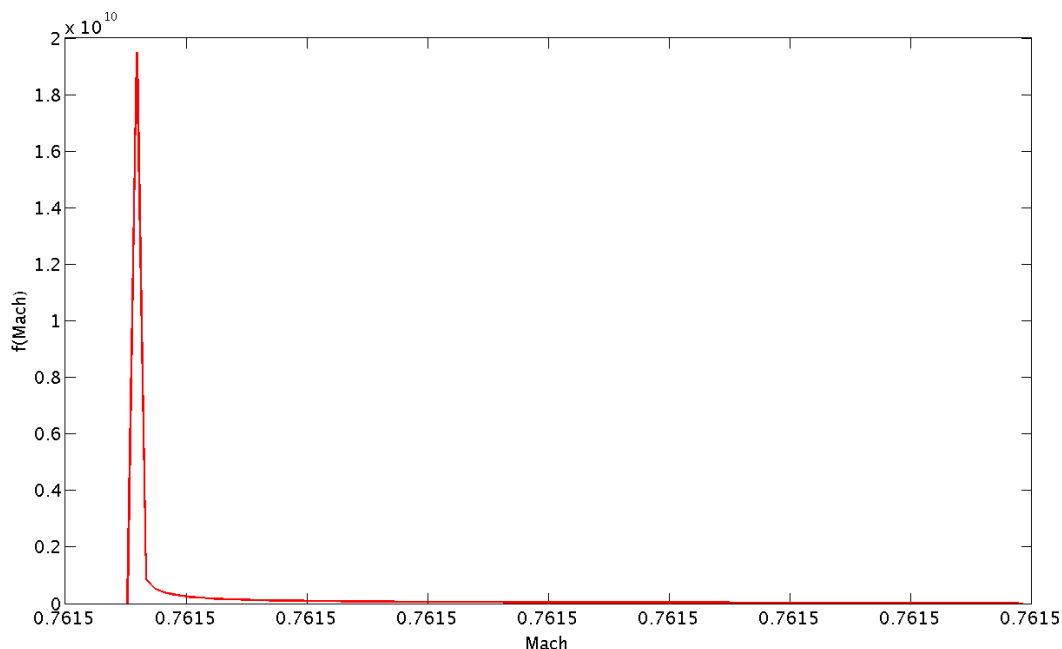


Figura 4-1. Caso Perfecto, fdp del Mach, caso monovariante y distribución uniforme

Puede apreciarse que los valores están concentrados en un punto, algo que cuadra con los valores de media y desviación típica proporcionados en la Tabla 4-1, donde el valor de la desviación típica es muy pequeño. Por ello, se busca el valor máximo y el valor mínimo del conjunto de valores del Mach obtenidos y se compara la diferencia entre ambos. Esta diferencia parece deberse al error de precisión que se comete en el cálculo con la función *fsolve* de MATLAB, y no a la incertidumbre en el peso final, ya que el error que se comete en los cálculos con dicha función es del orden de $10e-9$.

Otra manera de observar el comportamiento de la desviación típica del Mach podría ser mediante la representación de la relación de ésta variable con el peso final (W_f), que es la variable sujeta a incertidumbre.

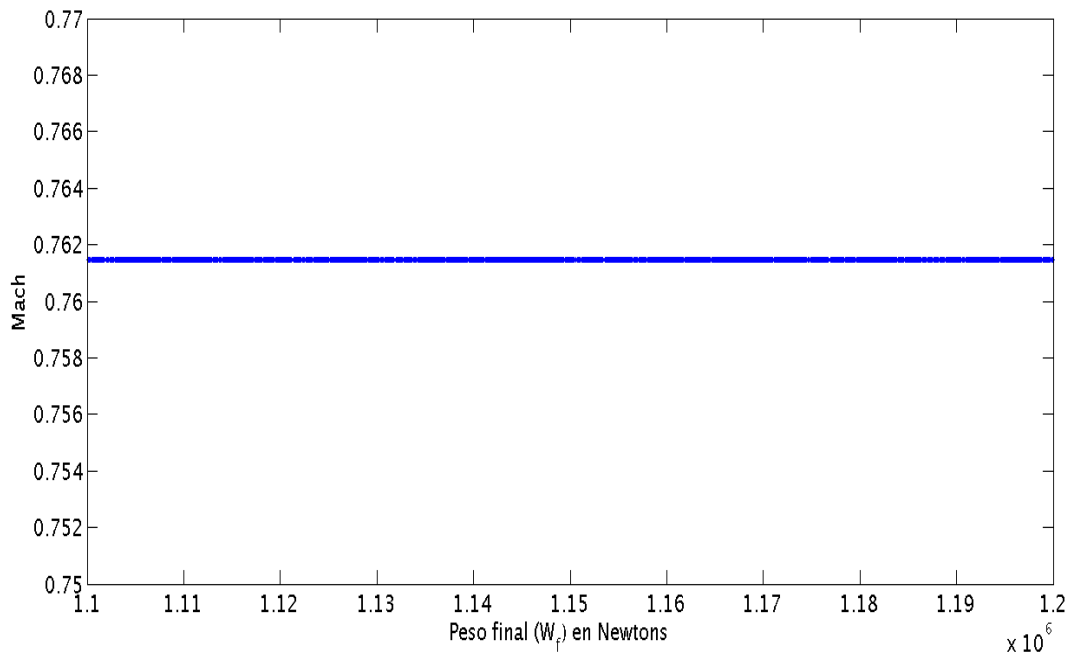


Figura 4-2. Caso perfecto. Mach frente al peso final. Distribución uniforme.

Por lo que se puede observar en la Figura 4-2, el Mach es constante para todo peso final. Teniendo en cuenta también la función de densidad del Mach, en la Figura 4-1, queda claro que la incertidumbre en el peso final no afecta a los valores que toma el Mach, de ahí el valor tan pequeño que toma la desviación típica.

De forma semejante, se estudia la función de densidad de la otra variable de decisión (δ).

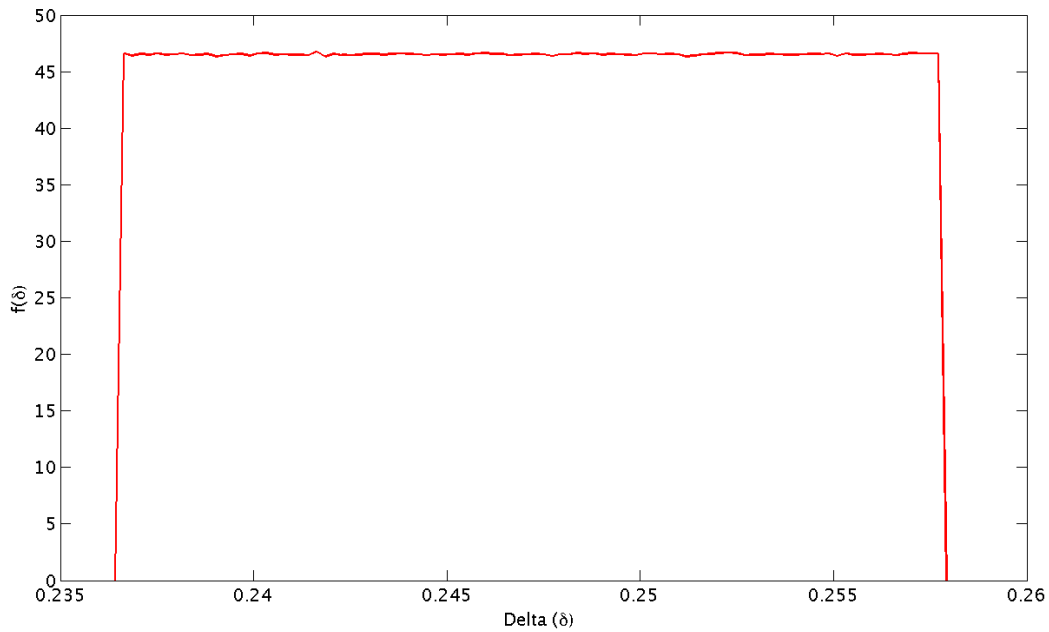


Figura 4-3. Caso Perfecto, fdp de δ , caso monovariante y distribución uniforme

Tal y como se observa en la figura 4-3, la función de densidad de delta se asemeja a una distribución uniforme. Aunque vuelve a aparecer rizado en la parte superior y existe una ligera falta de verticalidad en las bandas laterales, éstos se consideran despreciables, ya que, como se comentó anteriormente, son producidos en su totalidad por cómo realiza MATLAB la representación de la función de densidad.

Ahora bien, para ayudar a la comprensión del comportamiento de dicha variable se representa δ frente al peso final, y así poder observar la relación entre ambas, de igual manera que se hizo con el Mach.

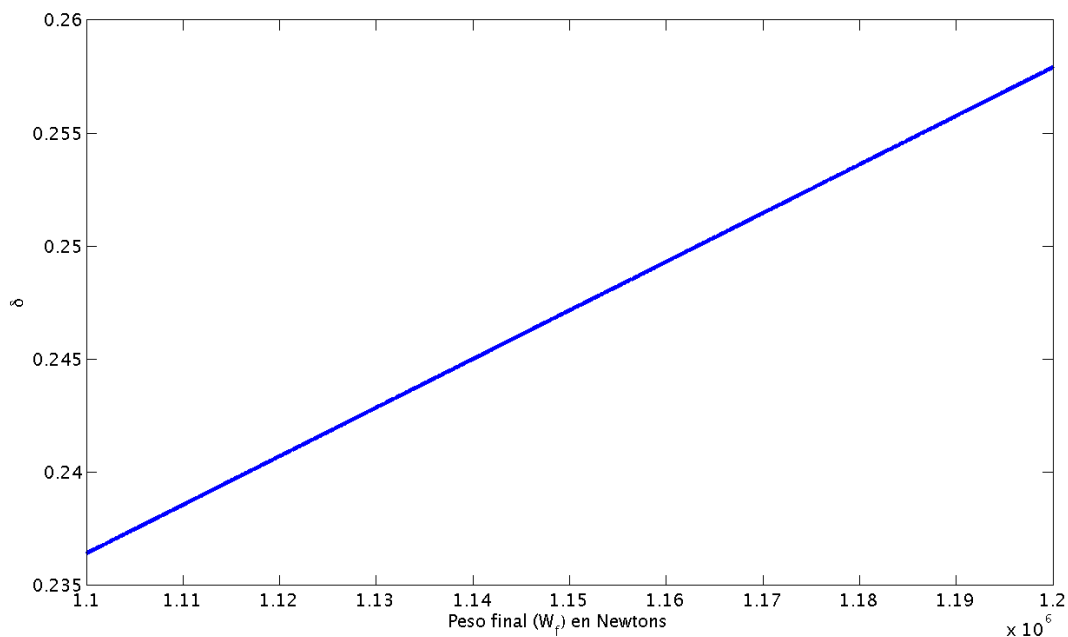


Figura 4-4. Caso Perfecto. Delta frente al peso final. Distribución uniforme.

Con las figuras 4-3 y 4-4 se llega a la conclusión de que la dependencia entre el peso final y delta (que recordemos representa un cociente de presiones y, por tanto, la altitud) es prácticamente lineal, y se puede interpretar que a menor peso final menor δ , o expresado de otro modo, mayor altitud.

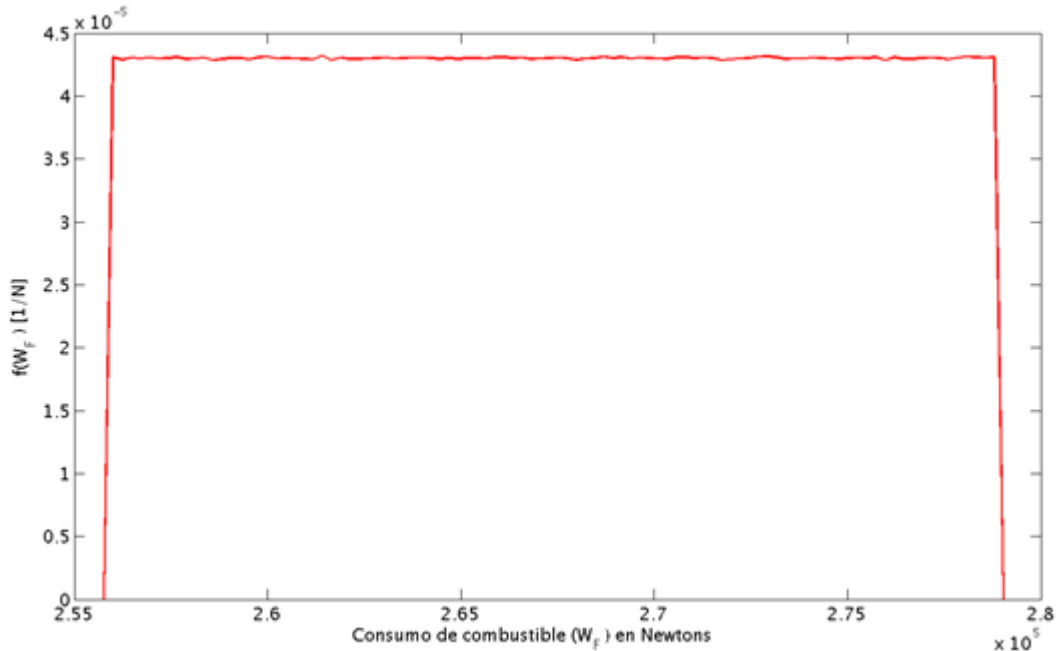


Figura 4-5. Caso Perfecto, fdp del consumo, caso monovariante y distribución uniforme

La función de densidad del consumo de combustible se asemeja a una uniforme, observable en la Figura 4-5, con las mismas particularidades que presentaba la representación de la función de densidad de δ , esto es, el rizado en la zona horizontal y la falta de verticalidad en las bandas. La relación entre el peso final y el consumo de combustible óptimo es prácticamente lineal, y teniendo en cuenta el ancho de la función de densidad se tiene que el consumo de combustible puede llegar a sufrir una variación aproximada de un 4% respecto a su valor central, que es $2.6740 \text{ e}+05 \text{ N}$ según lo expuesto anteriormente en la Tabla 4-1.

4.1.2 Distribución gamma

De la misma manera que en el apartado anterior, se presentan los resultados en términos de media y desviación típica, tratando aquí el peso final como una variable aleatoria con distribución gamma. Presentando en la siguiente tabla los valores para Mach, δ y W_F :

Tabla 4-2. Caso Perfecto, resultados caso monovariante, distribución gamma

Variable	Media	Desviación típica
<i>Mach</i>	0.7615	$7.1293\text{e}-10$
δ	0.2472	0.0062
W_F	$2.6740 \text{ e}+05 \text{ [N]}$	$6.7125 \text{ e}+03 \text{ [N]}$

De la tabla, observando el valor medio y la desviación típica del Mach se extrae que el vuelo en crucero se está realizando bajo efectos de compresibilidad. Cabe recordar que esto mismo ocurriría en la distribución uniforme, y comparando los valores del Mach en ambas distribuciones, se tiene que el valor medio es el mismo, pero que en la presente distribución la desviación típica es ligeramente superior, ya que de $6.4275e-10$, correspondiente a la distribución uniforme, se pasa a $7.1293e-10$.

En cuanto al valor medio de δ y su desviación típica, se obtienen los mismos resultados que en la distribución uniforme. Es decir, traduciendo el cociente de presiones a términos de altitud, se tendría una altitud media de unos 10351 metros con variaciones de hasta unos 200 metros con respecto a dicho valor.

En relación al consumo de combustible, los resultados son los mismos que en la distribución uniforme. Siendo el valor central $2.6740e+05$ N y la desviación típica $6.7215e+03$ N, se tiene una variación de aproximadamente un 4% de combustible con respecto a dicho valor central. Además, esto supone que, en términos medios, la carga de combustible represente un 23.25% del peso final, cuyo valor central recordemos era de $1.15e+06$ N.

De igual forma que en la distribución uniforme, es importante destacar que el número de muestras que se toman a la hora de resolver el problema de optimización de trayectorias es de 2^{25} (33554432), como ya se ha comentado anteriormente esta cifra viene dada por [1]. En la presente distribución gamma se estima que con dicha cantidad de muestras se tiene, con una probabilidad inferior a un 0.0016% en los cálculos del consumo de combustible, un error lo suficientemente pequeño (del orden de 0.5 kg).

Una vez obtenidas las medias y desviaciones típicas de las variables de interés (M , δ y W_F) se representan sus funciones de densidad, empezando por la función de densidad del Mach.

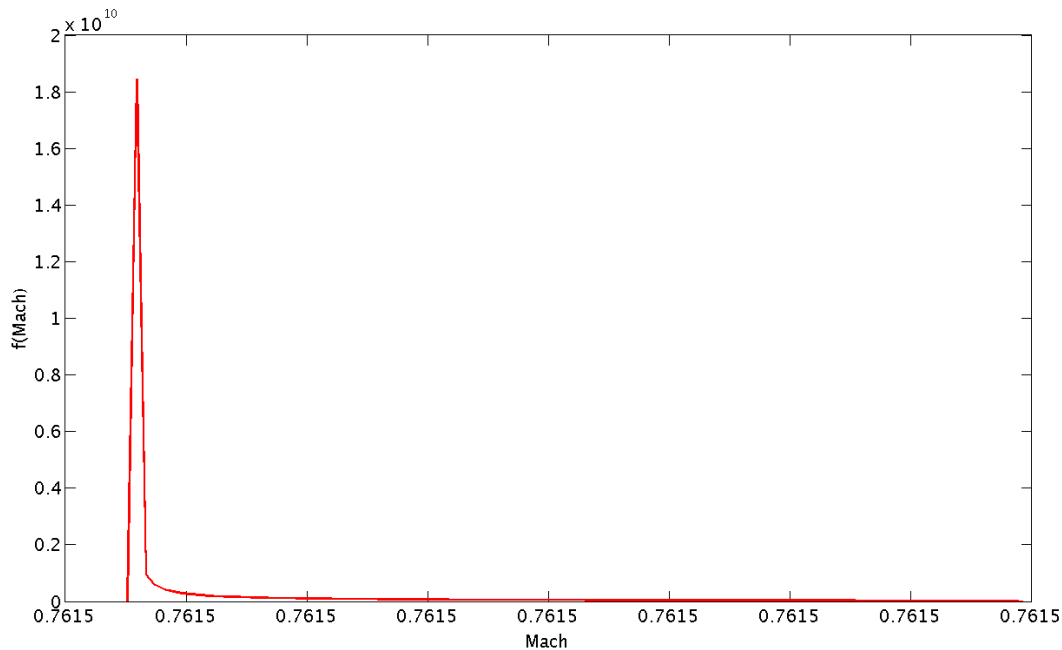


Figura 4-6. Caso Perfecto, fdp del Mach, caso monovariante y distribución gamma

Tal y como se tenía en la distribución uniforme, la representación de la función de densidad del Mach parece indicar que todos los valores están concentrados en un punto, y, observando los valores de la media y de la desviación del conjunto, presentados en la Tabla 4-2, se corrobora dicha idea.

El valor tan pequeño en la desviación típica se explica mediante la relación entre el Mach y la variable sujeta a incertidumbre, que es el peso final. Esta relación está representada en la distribución uniforme, Figura 4-2, en la que se puede observar que el valor del Mach es constante e independiente del valor que tome el peso final. De esta forma, se puede afirmar que el Mach no varía en el caso monovariante, pues no depende del peso final, que es la variable incierta que se utiliza para este caso en el problema de optimización de trayectorias. Es decir, ambas variables, Mach y peso final, están desacopladas.

Una vez expuesta la función de densidad del Mach, siguiendo el orden de la distribución uniforme, se presenta la función de densidad de la variable δ , observable en la Figura 4-7.

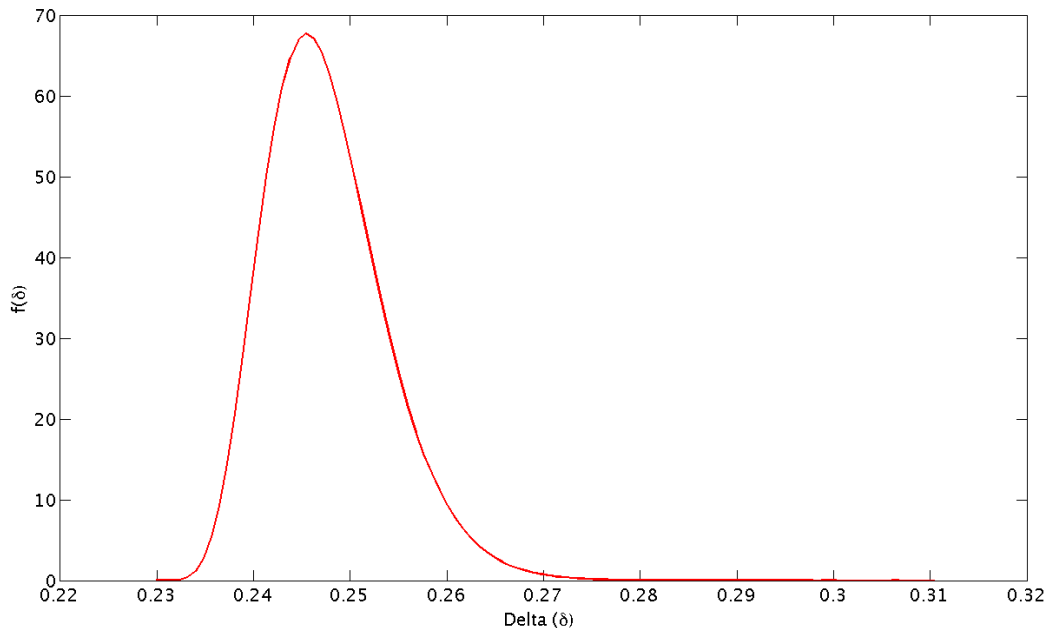


Figura 4-7. Caso Perfecto, fdp de δ , caso monovariante y distribución gamma

Como se puede observar en la figura, la función de densidad se ajusta a la forma de una distribución gamma. Se destaca, también, que se asemeja bastante a la función de densidad del peso final, presentada en la Figura 2-2. Además, teniendo en cuenta el ancho de la función de densidad, y la desviación presentada en la Tabla 4-2, se puede explicar, como ya se hizo en la distribución uniforme mediante la Figura 4-4, que la dependencia entre δ y W_f es prácticamente lineal. Es decir, presentan una relación tal que a menor peso final, menor el cociente de presiones δ , y, por tanto, mayor altitud. Con estos hechos por delante, se concluye que δ , al contrario que ocurría con el Mach, sí que se ve influida por la incertidumbre de la variable peso final, pero en el comportamiento de δ no tiene repercusión, en términos de media y desviación típica, que dicha incertidumbre venga dada por una distribución gamma en vez de una uniforme, ya que no se podría apreciar cuál es la distribución empleada.

Por último, ya analizadas las funciones de densidad de las variables de decisión, M y δ , sólo queda analizar el comportamiento de la variable consumo de combustible (W_F). Para ello se presenta la función de densidad del consumo de combustible en la Figura 4-8.

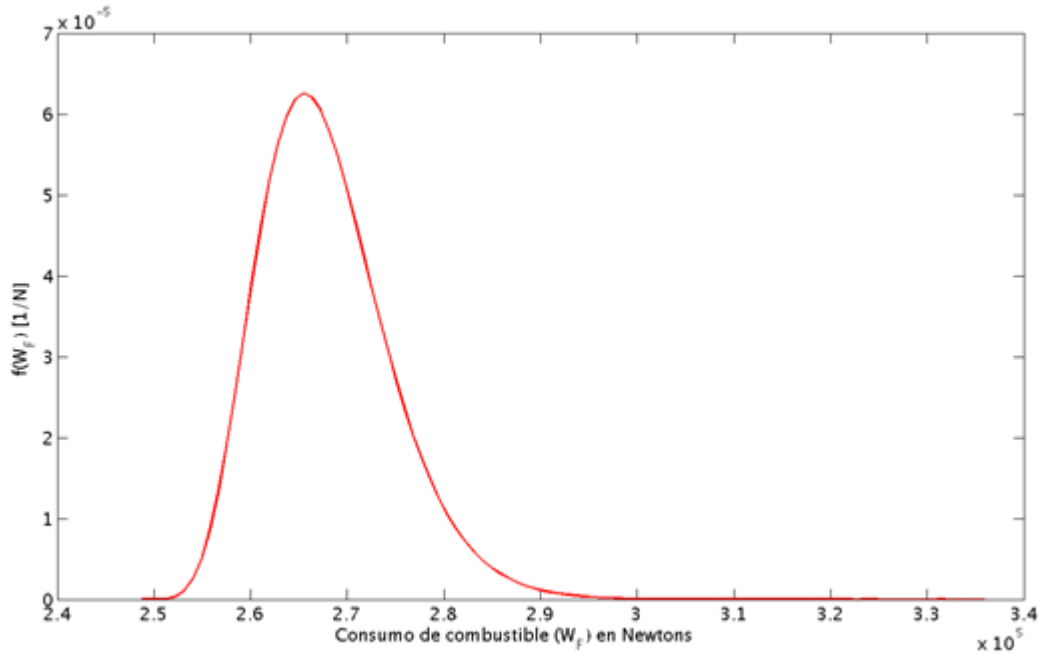


Figura 4-8. Caso Perfecto, fdp del consumo, caso monovariante y distribución gamma

Observable en la Figura 4-8, esta función de densidad presenta una forma similar a la de una distribución gamma. Como ya se comentó antes, teniendo en cuenta los resultados de la Tabla 4-2, se puede ver que la media y la desviación típica del consumo de combustible son iguales que en el caso de la distribución uniforme, Tabla 4-1. Por otro lado, en términos de desviación, la variación que sufre el consumo de combustible con respecto al valor central podría llegar a suponer un 8%. La diferencia con respecto al 4% en la distribución uniforme es debida a que en la distribución gamma el rango de valores que puede tomar el peso final, y por ende el consumo de combustible, es mayor.

4.2 Caso multivariable

Es importante volver a destacar que la aleatoriedad de los coeficientes de resistencia C_{D0} , C_{D1} , y C_{D2} viene dada durante el cálculo del Mach, de manera que cada uno de estos coeficientes va multiplicado por una variable aleatoria uniforme cuyos valores están entre 0.95 y 1.05, siendo dichas variables aleatorias $K_{C_{D0}}$, $K_{C_{D1}}$ y $K_{C_{D2}}$. Además, c_{E0} también es una variable aleatoria uniforme. La aleatoriedad de C_{D0} , C_{D1} , y C_{D2} y c_{E0} está asociada a la falta de conocimiento absoluto de los parámetros de la aeronave. Por otro lado, el alcance (R) también es una variable incierta, esta incertidumbre se asocia a la presencia de vientos a favor o en contra que se podría encontrar la aeronave a lo largo de su trayectoria.

Tabla 4-3. Caso Perfecto, resultados caso multivariable

Variable	Media	Desviación típica
$Mach$	0.7620	0.0121
δ	0.2472	0.0062
W_F	2.6694 e+05 [N]	1.6838 e+04 [N]

Con el valor medio y la desviación típica del Mach expuestos en la Tabla 4-3, se tiene que la trayectoria que está realizando la aeronave, que es un vuelo en crucero, se está efectuando de manera que se consideran efectos de compresibilidad. Este hecho se produce debido a que los valores del Mach son superiores a 0.4, valor a partir del cual se incluían los términos de compresibilidad asociados a la polar de la aeronave adaptada de [5], como ya se había comentado anteriormente. Comparando con el caso monovariante, el valor medio del Mach aumenta ligeramente, del orden de diezmilésimas, y la desviación típica aumenta de forma drástica, pasando del orden de $1e-10$ al orden de $1e-2$. Esto da a entender que el Mach depende en mayor medida de las nuevas variables que se han introducido como inciertas.

Para δ , el valor medio y el de la desviación típica permanecen igual al caso monovariante. Esto indica que δ sólo depende de forma significativa del peso final. Realizando el mismo análisis que se hizo en el caso monovariante, y teniendo en cuenta que δ representa un cociente de presiones y por tanto la altitud, se tendría una altitud media de unos 10351 metros con desviaciones de unos 200 metros con respecto a dicho valor.

En cuanto al consumo de combustible, la media disminuye unos 46 kg con respecto al caso monovariante, y la desviación típica aumenta de $6.7125e+03$ N a $1.6838e+04$ N, lo que indica que hay una mayor variación en los valores del consumo de combustible, asociada esta variación a la incertidumbre de las nuevas variables que se han supuesto inciertas y al efecto que producen sobre el comportamiento del Mach, que es la variable de decisión que más se ve afectada.

Como ya se comentó en el caso monovariante, es importante destacar que el número de muestras que se toman es de 33554432 (2^{25}), que viene dado por [1]. Aquí se estima que con dicha cantidad se tiene, con una probabilidad inferior a un 8.55%, un error lo suficientemente pequeño (del orden de 0.5 kg) en la resolución del problema de optimización de trayectorias. Ya que en el caso multivariante es posible calcular la probabilidad para 1 kg, expresado de otra forma se tiene que la probabilidad de error para 1 kg es inferior a 0.0581%. Ambos porcentajes difieren significativamente de aquellos hallados en el caso monovariante.

A continuación, se presentan las funciones de densidad de las variables de interés (M , δ y W_F), empezando por la función de densidad del Mach, Figura 4-9.

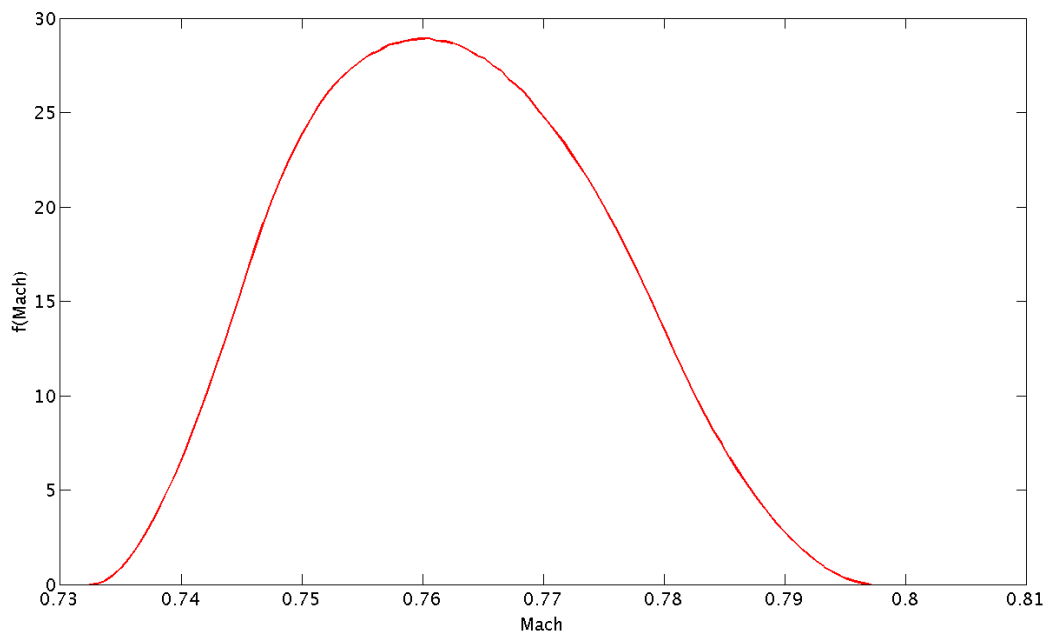


Figura 4-9. Caso Perfecto, fdp del Mach, caso multivariante

Tal y como se puede observar en la figura, la función de densidad del Mach tiene un aspecto que se podría asemejar al de una distribución normal, aunque de proporciones algo más ancha y achatada. Comparando con las funciones de densidad del Mach en el caso monovariante, la actual función de densidad nos sugiere que los valores del Mach varían más que en ocasiones anteriores. Además, en conjunto con la Tabla 4-3, se puede apreciar que los valores son superiores con respecto a otros casos, pero la variación sólo es significativa en términos de la desviación típica, que aumenta considerablemente con respecto a los valores del caso monovariante, ya fuese la distribución uniforme o gamma. De esta forma, se conoce que el Mach varía considerablemente en el caso multivariante, quedando de nuevo reflejada la dependencia del Mach con las nuevas variables que se consideran inciertas en el caso multivariante ($c_{E0}, K_{C_{D0}}, K_{C_{D1}}, K_{C_{D2}}$ y R). Dicha dependencia ya se había comentado a raíz del valor de la desviación típica del Mach en la Tabla 4-3.

Una vez presentada la función de densidad del Mach, se hace lo mismo con la de δ , expuesta en la siguiente figura.

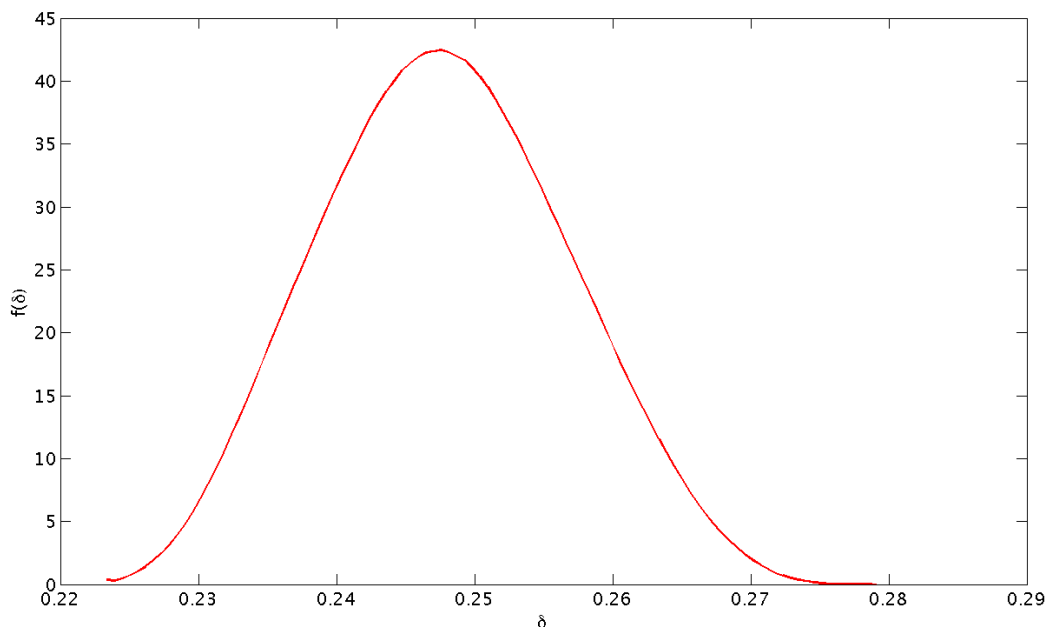


Figura 4-10. Caso Perfecto, fdp de δ , caso multivariante

Semejante en forma a una distribución normal, la función de densidad de δ es ligeramente más ancha y achatada que la función de densidad que presentaba ésta misma variable en la Figura 4-7. Al comparar las funciones de densidad de ambos casos, se extrae que pese a tener los mismos valores de media y desviación típica, observables en las Tabla 4-2 y 4-3, la presente función de densidad no está tan concentrada en torno al punto medio. Atendiendo a los valores que toma la función de densidad, se observa que en la Figura 4-7 el valor de la función en la zona central se aproximaba a 70, frente a los 45 de la Figura 4-10. Ahí queda patente la dependencia de δ con las variables inciertas incluidas en el caso multivariante, una dependencia muy ligera ya que afecta sólo de manera visible a la función de densidad y no a los valores de la media y la desviación típica.

Teniendo en cuenta lo descrito anteriormente, con respecto al cálculo del consumo de combustible en el Caso Perfecto, mediante la obtención de un par de valores de las variables de decisión (M y δ) se llega a un conjunto de consumos de combustible cuya función de densidad toma la siguiente forma:

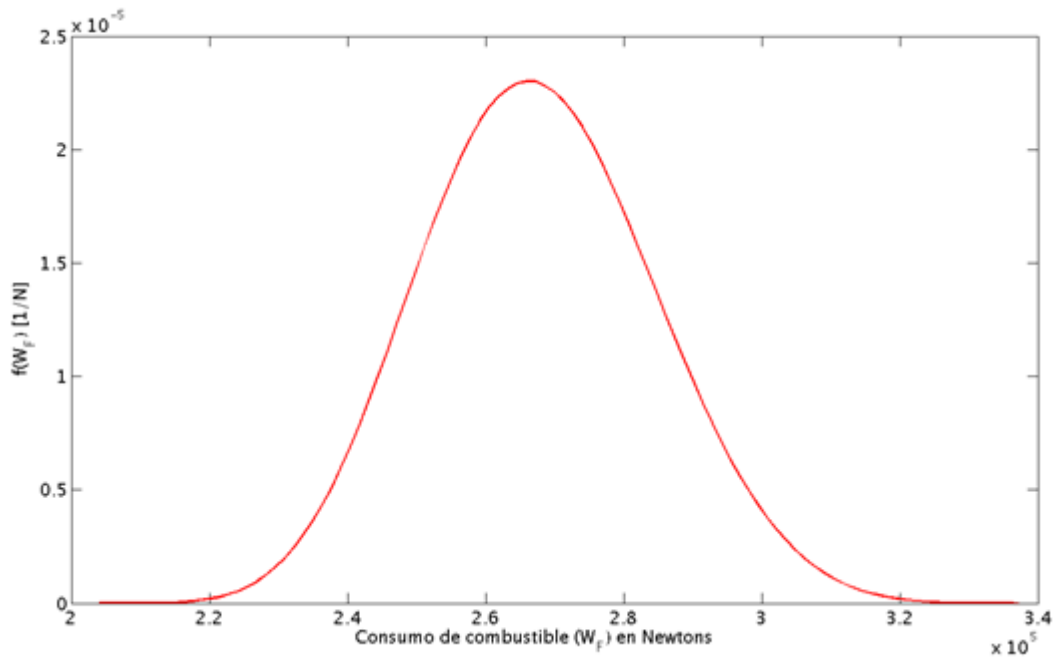


Figura 4-11. Caso Perfecto, fdp del consumo de combustible, caso multivariable

La función de densidad del consumo de combustible expuesta en la Figura 4-11 se asemeja a una función de densidad de una distribución normal. Comparándola con la Figura 4-8 del caso monovariable y distribución gamma se observa que la presente función de densidad es más ancha y achatada, algo parecido a lo que ocurría con δ . Ahora bien, con unas características semejantes a la función de densidad de δ , los valores que toma el consumo de combustible no están tan concentrados en torno al valor central como ocurría en el caso monovariable. Esto se visualiza de dos maneras, por un lado, el valor de la función de densidad en la zona central se aproxima a $2.5e-5$, antes era de $7e-5$, y, por otro lado, el valor de la desviación típica ha aumentado de forma significativa.

Teniendo en cuenta estos hechos, la variación que sufre el consumo de combustible podría llegar a suponer aproximadamente un 20% con respecto a su valor central, que es $2.6694e+05$ N según lo expuesto en la Tabla 4-3. Un porcentaje considerable, más aún si se compara con los que se tenía en el caso monovariable, en torno a un 4% en la distribución uniforme y un 8% en la distribución gamma.

De este análisis se obtiene una idea de conjunto de cómo es la dependencia del consumo de combustible con las variables sujetas a incertidumbre que se incluyen en el caso multivariable, ($c_{E0}, K_{CD_0}, K_{CD_1}, K_{CD_2}$ y R). Como se ha visto, esta dependencia afecta al consumo de combustible en dos aspectos. Por un lado, el valor central se ve desplazado con respecto al caso monovariable, y, por otro lado, el rango de valores que podría tomar dicho consumo de combustible aumenta con respecto al caso monovariable. De esta manera, al resolver el problema de optimización de trayectorias sujetas a incertidumbre, es importante mencionar que se obtiene que el consumo de combustible podría tomar valores más dispersos de lo esperado. Este hecho es algo que puede tener bastante repercusión ya que se ha visto la diferencia existente al comparar los resultados del caso multivariable con el caso monovariable. Además, habría que incluir, para un mejor análisis, la diferencia existente al comparar los resultados con un supuesto en el que se resuelva el cálculo del combustible sin haber introducido incertidumbre, como se hace en la Estrategia 1.

5 RESULTADOS DE LA ESTRATEGIA 1

En este capítulo se exponen los resultados de la Estrategia 1. Esta estrategia se basa en resolver el problema de optimización de trayectorias con los valores medios de las variables inciertas, obviando de esta manera su incertidumbre o carácter aleatorio, obteniendo un par de valores para las variables de decisión (M y δ) y un conjunto de valores para el consumo de combustible. Dichos resultados se presentan como relaciones entre dos variables o mediante funciones de densidad. Además, se distinguen dos casos: monovariante y multivariante.

Los resultados con los que se trabaja a continuación han sido obtenidos en un equipo con las siguientes características: Intel Core2 Quad Q6600 2.40 GHz, 8 Gb RAM.

El tiempo de procesamiento es del orden de minutos, tanto para el caso monovariante como para el multivariante. Cabe aclarar que la optimización, es decir, la resolución del sistema para hallar M y δ , se realiza en cuestión de segundos. Es en el cómputo del conjunto de consumos de combustible, para las 33554432 muestras de las variables inciertas, en el que se emplea más tiempo, del orden de minutos.

5.1 Caso monovariante

Según lo descrito en la sección 2.2 Incertidumbre en las variables, dividimos los resultados en dos partes. Una, en la que la variable peso final se modela según una distribución uniforme y otra en la que se utiliza una distribución gamma. En este capítulo, además, se tiene en cuenta que la variable W_F representa el valor del consumo de combustible una vez fijadas las condiciones de vuelo, es decir, una vez fijadas M y δ .

Los valores de M y δ que se utilizan son los correspondientes al cálculo y optimización para el peso final central (W_{f_0}) de la función de densidad. Como el valor central del peso final ($W_{f_0} = 1.15e+06$ N) es el mismo para las dos distribuciones, según lo descrito en la formulación del problema el cálculo de M y de δ no se ve afectado, por lo que toman el mismo valor en la distribución uniforme y en la distribución gamma. A continuación se reflejan los valores de dichas variables de decisión:

Tabla 5-1. Estrategia 1, variables de decisión caso monovariante, distribución uniforme y gamma

Variable	Valor obtenido
$Mach$	0.7615
δ	0.2472

Según lo descrito para esta estrategia, de $Mach$ y de δ , únicamente se obtiene un valor, por lo que la desviación típica no es aplicable para estas variables.

En cuanto a los valores obtenidos para $Mach$ y δ , cabe destacar que coinciden con los valores medios a los que se llegó en el Caso Perfecto.

Así que, por un lado, referido al Mach, se estaría imponiendo un régimen de vuelo en el que se tienen en cuenta efectos de compresibilidad. Esto es debido a que el valor es superior a 0.4, a partir del cual se incluían los términos de compresibilidad en los coeficientes de resistencias definidos en la polar compresible dada por Cavcar [5], polar que recordemos se ha adaptado para el presente Trabajo.

Por otro lado, el valor de δ , que representa un cociente de presiones y, por tanto, la altitud, refleja que se impone una altitud fija de vuelo a unos 10351 metros, tomando como modelo de atmósfera la atmósfera ISA.

Una vez comentados los valores de las variables de decisión (M y δ) comunes a la distribución uniforme y a la distribución gamma, se pasa a analizar lo obtenido específicamente en cada distribución.

5.1.1 Distribución uniforme

Una vez hecho el cómputo descrito en la sección 3.2, se realizan una serie de representaciones para justificar si sería válido imponer un régimen de vuelo independientemente del peso final real o no, con los valores hallados anteriormente, esto es $M = 0.7615$ y $\delta = 0.2472$.

Tabla 5-2. Estrategia 1, resultados caso monovariante, distribución uniforme

Variable	Media	Desviación típica
W_F	2.6753 e+05 [N]	6.7145 e+03 [N]

Observando la tabla, y recordando que el valor central del peso final es $1.15e+6$ N, se tiene que el combustible representaría aproximadamente un 20% del peso final de la aeronave.

Comparando con los resultados del Caso Perfecto, la diferencia en la media del consumo es de unos 13 kg, valor que representaría la diferencia entre resolver el problema con conocimiento perfecto de las variables inciertas (Caso Perfecto) y hacerlo obviando la incertidumbre de dichas variables, que es el método de resolución de la presente estrategia. La diferencia en términos de desviación típica es mínima, siendo ligeramente superior en la Estrategia 1.

De nuevo, se vuelve a destacar, como se hizo en el Caso Perfecto, que el número de muestras que se toman a la hora de resolver el problema de optimización de trayectorias es de 2^{25} , cifra que viene dada por [1]. Se estima que con dicha cantidad de muestras se tiene un error lo suficientemente pequeño (del orden de 0.5 kg) y con una probabilidad de error inferior a un 0.0017% en los cálculos del consumo de combustible.

Una vez comentados los valores obtenidos para el consumo de combustible, se presenta su función de densidad.

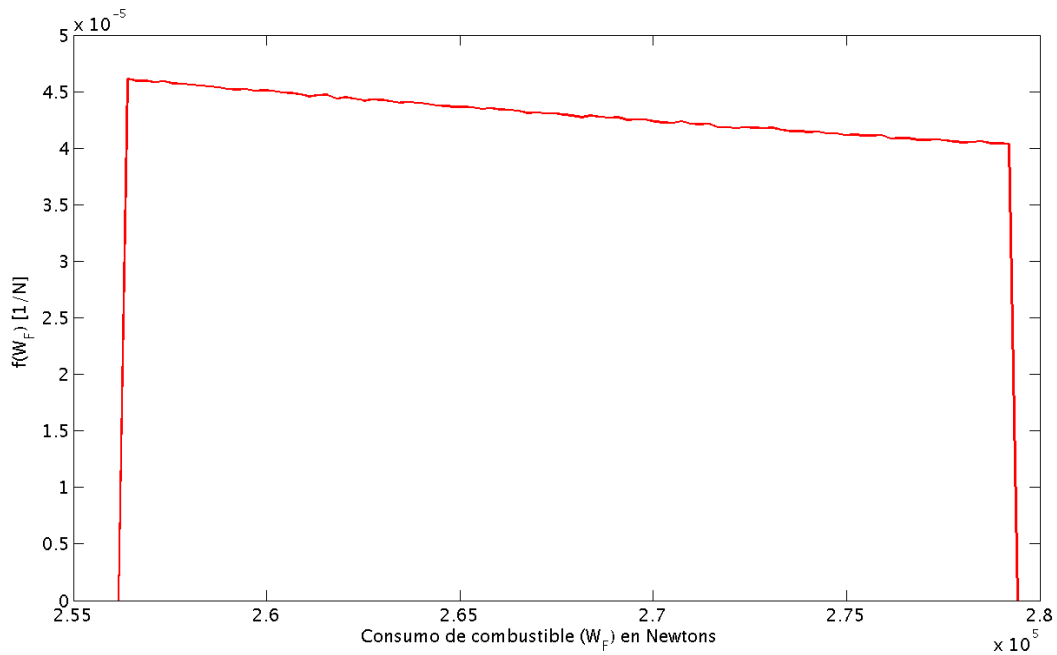


Figura 5-1. Estrategia 1, fdp del consumo, caso monovariante y distribución uniforme

En la Figura 5-1, la función de densidad del consumo de combustible no parece ofrecer apenas información, ni permite extraer ninguna conclusión con respecto al comportamiento de dicha variable. Aparte, claro está, de dar una idea del valor medio, que ya había sido presentado en la Tabla 5-2, y el rango de valores que podría tomar el consumo de combustible. Esto es, en casos extremos, la variación del consumo de combustible con respecto a su valor central, que es 2.6753×10^5 N, supondría aproximadamente un 4%. Este valor se corresponde con lo obtenido en el caso monovariante y distribución uniforme del Caso Perfecto, algo evidente, debido a la semejanza en los valores de la desviación típica, 6.7145×10^3 N de la presente estrategia, frente a 6.7125×10^3 N del Caso Perfecto.

Además, se representa la relación entre el consumo de combustible (W_F) y el peso final (W_f).

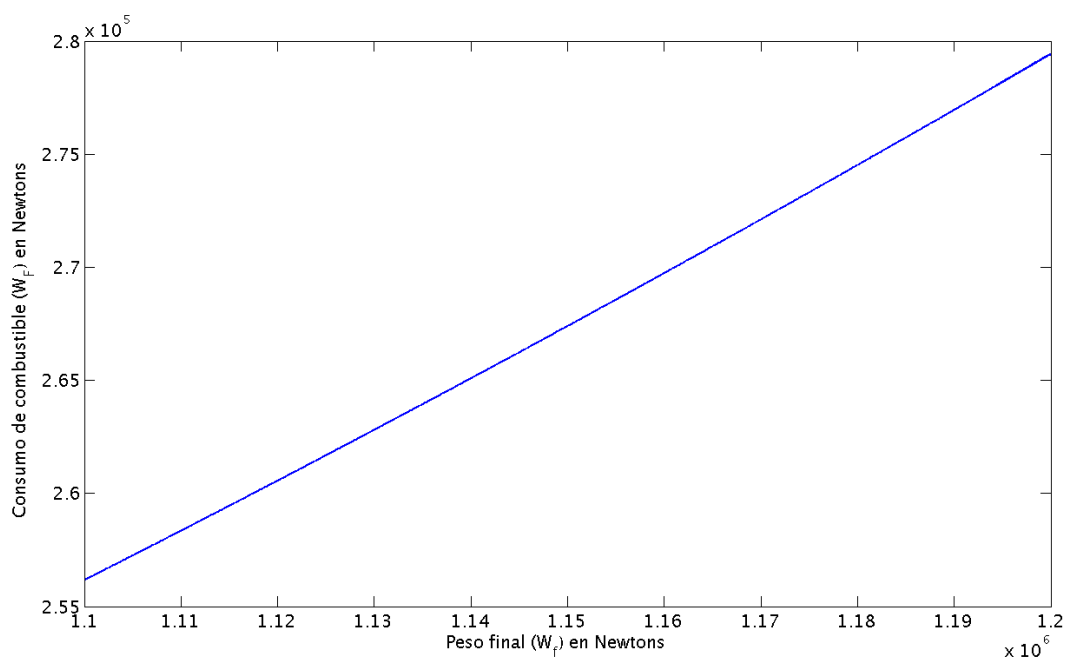


Figura 5-2. Estrategia 1. Consumo - peso final, caso monovariante y distribución uniforme

En la Figura 5-2, se puede observar que la correspondencia entre las variables es prácticamente lineal, creciente. Sin ninguna cualidad destacable más.

De esta forma, observando la diferencia con el Caso Perfecto referida al consumo de combustible, que es de 13 kg, podría considerarse que la Estrategia 1 es buena, en términos medios, como método de resolución del problema de optimización de trayectorias para el caso monovariable y distribución uniforme. Más aún sabiendo que esos 13 kg no llegan a suponer ni el 0.05% del valor central del consumo de combustible.

5.1.2 Distribución gamma

Según lo comentado en la sección 3.2, y ya analizados los valores que toman las variables de decisión, $M=0.7615$ y $\delta=0.2472$ expuestos en la Tabla 5-1, se pasan a presentar, utilizando una distribución gamma para la variable peso final (W_f), los resultados en términos de media y desviación típica que se obtienen para el consumo de combustible.

Tabla 5-3. Estrategia 1, resultados caso monovariable, distribución gamma

Variable	Media	Desviación típica
W_f	2.6753 e+05 [N]	6.8082 e+03 [N]

Tal y como se hizo en la distribución uniforme, observando el valor medio del consumo de combustible y el valor central del peso final, $1.15e+06$ N, se tiene que el combustible supone aproximadamente un 20% del peso final de la aeronave.

Por otro lado, comparando con los resultados del Caso Perfecto, la diferencia en la media del consumo es de unos 13 kg. Este valor coincide con el que se obtuvo en la distribución uniforme. Además, la diferencia en términos de desviación típica con el Caso Perfecto es mínima, siendo, de nuevo, ligeramente superior en la Estrategia 1.

De igual forma que en la distribución uniforme, es importante destacar que el número de muestras que se toman a la hora de resolver el problema de optimización de trayectorias es de 33554432. En la presente distribución se estima que con dicha cantidad se tiene, con una probabilidad de error inferior a un 0.0021% en los cálculos del consumo de combustible, un error lo suficientemente pequeño, del orden de 0.5 kg.

Una vez analizada la media y la desviación típica se presenta la función de densidad del consumo de combustible.

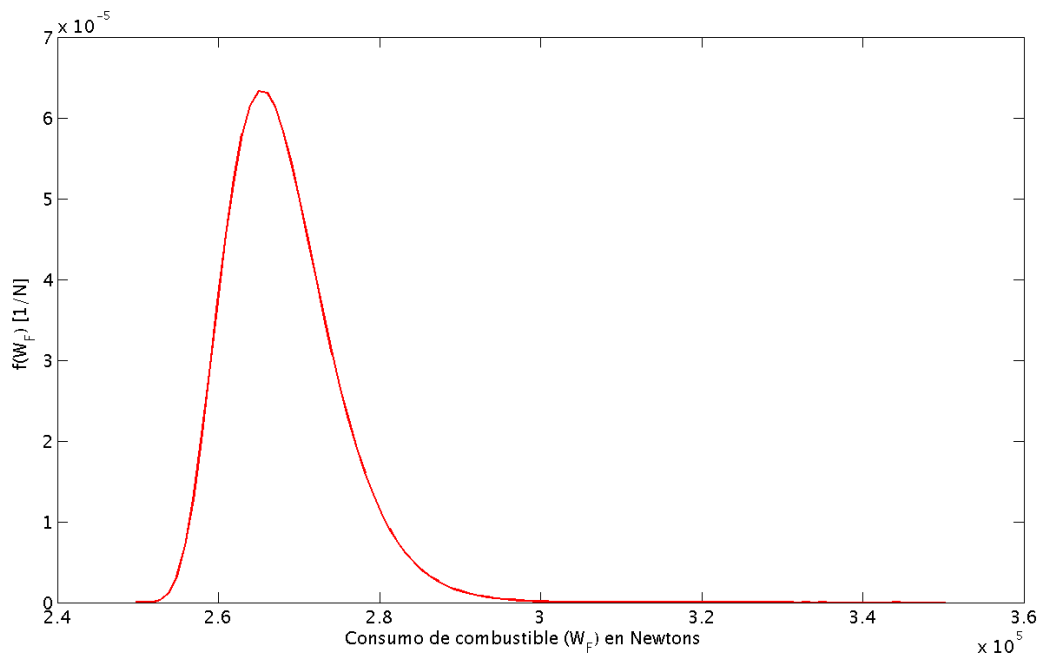


Figura 5-3. Estrategia 1, fdp del consumo, caso monovariante y distribución gamma

Se puede observar que la forma de la función de densidad del consumo de combustible es semejante a la de una distribución gamma, con ligeras variaciones, apenas apreciables, en las proporciones con respecto a la función de densidad del peso final, Figura 2-2. Siendo las propiedades del consumo las expuestas en la Tabla 5-3, se tiene que la variación máxima del combustible ronda el 10% con respecto al valor central.

Por otro lado, la relación entre el consumo de combustible y el peso final sería semejante a la expuesta en la Figura 5-2, ya que dicha relación no depende de la distribución elegida para el peso final, y las variables de decisión (M y δ) tienen los mismos valores en ambas distribuciones

Con los resultados y el análisis expuesto, y teniendo en cuenta que la desigualdad con el Caso Perfecto referida al consumo es de 13 kg, podría considerarse que la Estrategia 1 sirve, en términos medios, para resolver el problema de optimización de trayectorias para el caso monovariante y distribución gamma. Ya que, como se tenía en la distribución uniforme, esos 13 kg no llegan a suponer ni el 0.05% del valor central del consumo de combustible.

5.2 Caso multivariante

Según los valores medios del peso final (W_f), c_{E0} , K_{CD_0} , K_{CD_1} y K_{CD_2} y R descritos anteriormente en la Tabla 2-2, se resuelve el problema de optimización de trayectorias para la presente estrategia.

Tabla 5-4. Estrategia 1, variables de decisión caso multivariante

Variable	Valor obtenido
$Mach$	0.7615
δ	0.2472

Como se puede observar en la Tabla 5-4, los valores obtenidos para Mach y δ son únicos, por lo que no es aplicable el cálculo de la desviación típica, y, además, coinciden con aquellos dados en la Tabla 5-1 del caso monovariante. Esta coincidencia es evidente, dado que los valores centrales de las variables inciertas son los mismos en ambos casos. Con respecto al Caso Perfecto, el valor de Mach aumenta ligeramente, del orden de diezmilésimas, mientras que el valor de δ no cambia, correspondiéndose con una altitud de unos 10351 metros. De esta manera, se puede ver la influencia de las variables sujetas a incertidumbre en el caso multivariante sobre las variables de decisión.

Una vez impuesto el régimen de vuelo, es decir, una vez fijados los valores de Mach y de δ , se procede a calcular el consumo de combustible.

Tabla 5-5. Estrategia 1, resultados caso multivariante

Variable	Media	Desviación típica
W_F	2.6763 e+05 [N]	1.6818 e+04 [N]

El valor medio del consumo de combustible supone aproximadamente un 20% del peso final de la aeronave, cuyo valor central es 1.15e+06 N.

Con respecto al Caso Perfecto, la media del consumo de combustible aumenta unos 70 kg. Un aumento que parece significativo dado que, en el caso monovariante, la diferencia entre el consumo del Caso Perfecto y el consumo de combustible de la Estrategia 1 era de unos 13 kg, independientemente de la distribución elegida. En términos porcentuales, se pasa de un 0.05% de variación con respecto al valor central del consumo de combustible en el caso monovariante a un 0.26% en el caso multivariante, aún así sigue siendo una cantidad relativamente pequeña. En cuanto a la desviación típica, comparándola con la del multivariante del Caso Perfecto se observa una ligera diferencia, siendo inferior en la presente estrategia, con cambios en la tercera cifra significativa.

Observando los resultados del caso monovariante de la presente estrategia, la media del consumo aumenta unos 10 kg, y la desviación típica aumenta de forma significativa, ya que no llegaba a 7e+03 N en ninguna de las distribuciones, y ahora alcanza 1.6818e+04 N, expuesto en la Tabla 5-5. Este cambio supone un aumento significativo en el rango de valores que puede tomar el consumo de combustible.

Como ya se ha comentado anteriormente, es importante destacar que el número de muestras que se toman es de 33554432. Se estima que con dicho número se tiene, con una probabilidad inferior a un 8.51% un error lo suficientemente pequeño (del orden de 0.5 kg) en la resolución del problema de optimización de trayectorias. Como para el caso multivariante es posible hallar el error para 1 kg, se tiene que la probabilidad es inferior a un 0.058%.

A continuación, se representa la función de densidad del consumo de combustible en la Figura 5-4.

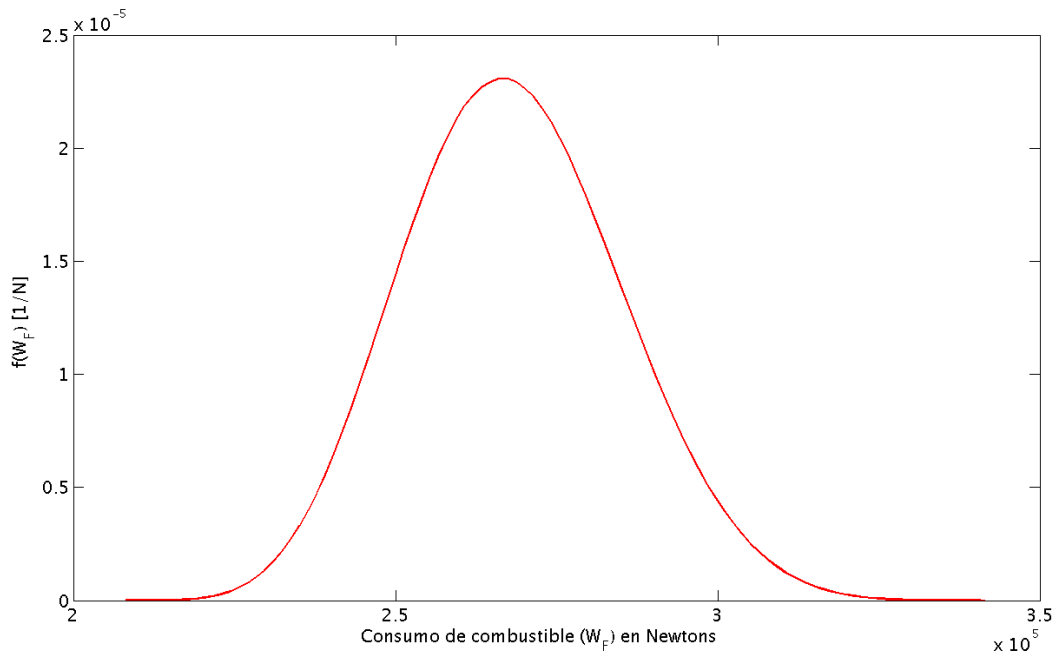


Figura 5-4. Estrategia 1, fdp del consumo, caso multivariable

Se puede observar que esta función de densidad se asemeja en forma a una distribución normal, aunque algo más achatada y ancha, ya que los valores no están tan concentrados en torno al valor central. La similitud con el Caso Perfecto, Figura 4-11, es digna de mención, porque pese a que haya cierta variación en el valor central, las formas de las funciones de densidad de ambos consumos y sus desviaciones típicas se parecen mucho.

Teniendo en cuenta estas similitudes, no es de extrañar que el rango de valores que puede tomar el consumo de combustible se mueva, de nuevo, en una variación de hasta aproximadamente un 20% con respecto al valor central, $2.6763 \text{ e}+05 \text{ N}$.

Con los resultados expuestos, y recordando que la diferencia en la media del consumo de combustible con el Caso Perfecto para el caso monovariable es de 70 kg, además de que ésta cantidad supone un 0.26% de la carga de combustible, se puede asumir que la Estrategia 1 es válida para la resolución del problema descrito de optimización de trayectorias sujetas a incertidumbre.

6 RESULTADOS DE LA ESTRATEGIA 2

En este capítulo se presentan los resultados de la Estrategia 2. Esta estrategia se basa en resolver el problema de optimización de trayectorias con los valores medios de las variables de decisión. Esto es, obteniendo un conjunto de muestras de cada variable incierta para, a continuación, calcular los conjuntos de valores de las variables de decisión (M y δ), hallar la media para tener un valor único para cada una y por último, ya fijado el régimen de vuelo, calcular el consumo de combustible. De nuevo se distinguen dos casos: monovariable y multivariable.

En el caso monovariable los cálculos se han realizado en un equipo con las siguientes características: Intel Core2 Quad Q6600 2.40 GHz, 8 Gb RAM. El tiempo de procesamiento para hallar los resultados del caso monovariable, tanto para la distribución uniforme como para la distribución gamma, ha sido del orden de 4 días y medio, igual que en el monovariable del Caso Perfecto. Cabe recordar que hay una serie de cálculos del Caso Perfecto que puede reutilizarse en esta estrategia.

En el caso multivariable se ha utilizado un equipo con las siguientes características: 2x Intel Xeon CPU E5-2667 3.20 GHz, 32 Gb RAM, trabajando con 12 hilos en paralelo. El tiempo de procesamiento para hallar los resultados en este caso ha rondado las 20 horas, igual que en el multivariable del Caso Perfecto. Cabe recordar también en este caso que hay una serie de cálculos del Caso Perfecto que puede reutilizarse en esta estrategia.

6.1 Caso monovariable

En este caso, apoyado por lo descrito en la sección 2.2 Incertidumbre en las variables, se dividen los resultados en dos partes. Es decir, tal y como se hizo en la estrategia anterior, se trabaja con una distribución uniforme y con una distribución gamma.

6.1.1 Distribución uniforme

Obteniendo la variable peso final (W_f) según lo expuesto en el apartado 2.2.1, esto es, tratando dicha variable como una variable aleatoria uniforme, se pasan a presentar los resultados. Para ello, primero se exponen los valores en media y desviación típica de las variables de decisión (M y δ).

Tabla 6-1. Estrategia 2, variables de decisión caso monovariable, distribución uniforme

Variable	Valor obtenido
$Mach$	0.7615
δ	0.2472

Cabe recordar que los valores de Mach y δ , vienen definidos por lo dado en el Capítulo 4, en el que se presentaban y explicaban los resultados del Caso Perfecto. Tomando los valores medios de la Tabla 4-1, se tienen los valores de la Tabla 6-1, que son únicos y por tanto no les es aplicable el cálculo de la desviación típica.

Resulta importante destacar que los resultados de las variables de decisión en esta estrategia coinciden con los obtenidos en la Estrategia 1. Esto va a suponer, como se ve a continuación, que los resultados de consumo de combustible en ambas estrategias también coincidan.

Ahora bien, una vez fijadas las variables de decisión (M y δ), se calcula el consumo de combustible (W_F), cuyos valores en media y desviación son expuestos en la siguiente tabla.

Tabla 6-2. Estrategia 2, resultados caso monovariante, distribución uniforme

Variable	Media	Desviación típica
W_F	2.6753e+05 [N]	6.7145e+03 [N]

Evidentemente, la media y la desviación típica del consumo de combustible coinciden con las de la Estrategia 1. Siendo así, el combustible supone, de nuevo, en torno al 20% del peso final de la aeronave, cuyo valor central es 1.15e+06 N.

Con respecto al Caso Perfecto, el valor medio del consumo de combustible aumenta del orden de 13 kg, valor que representaría en el problema de optimización de trayectorias el *Expected Value of Perfect Information* (EVPI) comentado anteriormente. Esto es, en términos porcentuales, un 0.05% de la carga de combustible. En cuanto a la desviación típica, su valor también aumenta, aunque de forma muy ligera, produciendo diferencias en la tercera cifra significativa.

Con respecto a la Estrategia 1, como ya se ha comentado, los valores de media y desviación del combustible permanecen iguales, ya que los valores de las variables de decisión (M y δ) coinciden. Al ser así, en este caso, el *Value of Stochastic Solution* (VSS), es decir, la mejora producida al incluir la incertidumbre de la variable peso final (W_f) en la resolución del problema de optimización de trayectorias, es prácticamente despreciable.

Por otro lado, la probabilidad de cometer un error lo suficientemente pequeño, del orden de 0.5 kg, y teniendo en cuenta que se han tomado 2^{25} muestras, es inferior a un 0.0017%.

Una vez comentados los valores, se presenta, a continuación, la función de densidad del consumo de combustible, que va a permitir observar el comportamiento de la variable.

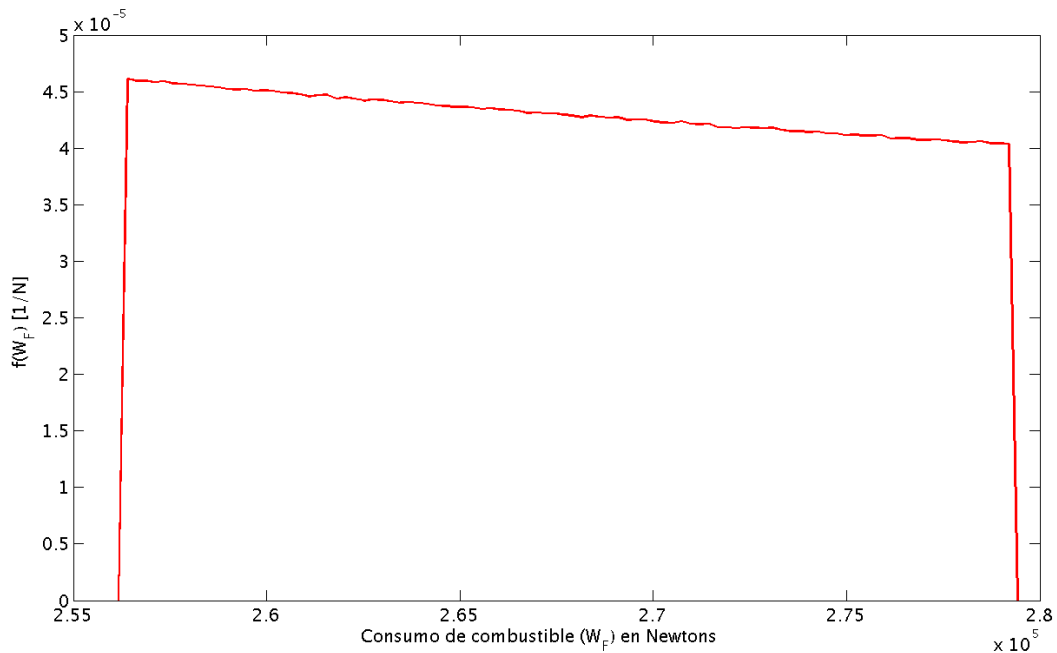


Figura 6-1. Estrategia 2, fdp del consumo, caso monovariable y distribución uniforme

Observando la Figura 6-1, el consumo de combustible presenta una forma semejante a la de una distribución uniforme con una rampa descendente, y con las mismas particularidades que se podían observar en las otras funciones de densidad (en cuanto al rizado y falta de verticalidad). Cabe destacar que la forma de la función de densidad es igual que la de la estrategia anterior (Estrategia 1), resultado que se podría presuponer ya que, como se ha comentado, los valores de Mach y δ son los mismos en ambas estrategias.

Teniendo en cuenta el valor de la desviación típica presentada en la Tabla 6-2, y el rango de valores que puede tomar el consumo de combustible según su función de densidad, se tiene una variación máxima de aproximadamente un 4% con respecto a su valor central, $2.6753e+05$ N. Este porcentaje se corresponde con la Estrategia 1 y, además, con el correspondiente del Caso Perfecto, siendo también de un 4% la variación que sufre el peso final.

Como la dependencia entre consumo de combustible (W_F) y el peso final (W_f) es la misma que se representó en la Estrategia 1, Figura 5-2, se decide representar ésta junto a la relación entre el consumo de combustible del Caso Perfecto (W_F CP) y así poder compararlas. De esta manera, se puede analizar cómo afecta el grado de incertidumbre del peso final, es decir, el rango de valores que puede tomar el peso final, a la diferencia en el consumo de combustible entre las estrategias y el Caso Perfecto, y su repercusión sobre la optimización que se realiza.

En la Figura 6-2, los consumos son prácticamente iguales en la zona central, algo previsible ya que los resultados de la presente estrategia coinciden con aquellos de la Estrategia 1, que realiza los cálculos para el valor del peso final medio. Por otro lado, es en las bandas donde se observa cómo se aleja el consumo de la estrategia con respecto al consumo del Caso Perfecto, siendo inferior, obviamente, en el Caso Perfecto.

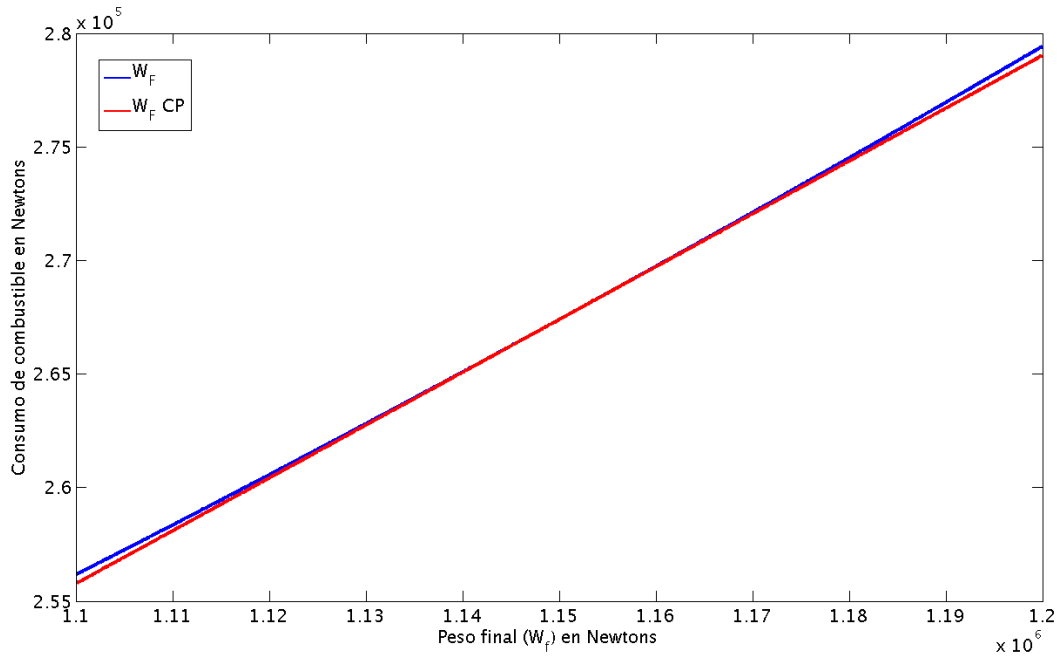


Figura 6-2. Estrategia 2. Consumos - peso final, caso monovariante y distribución uniforme

Como se puede observar en la figura, el grado de incertidumbre afecta al consumo. Ya que, cuanto mayor sea la incertidumbre, mayor será la diferencia entre la media de los consumos de combustible.

Como previamente se había llegado a la conclusión de que no hay relación entre el Mach y el consumo de combustible, apartado 5.1.1, se obvia dicha gráfica, y se pasa a comparar la relación de δ con ambos consumos (W_f del Caso Perfecto y W_f de la presente estrategia).

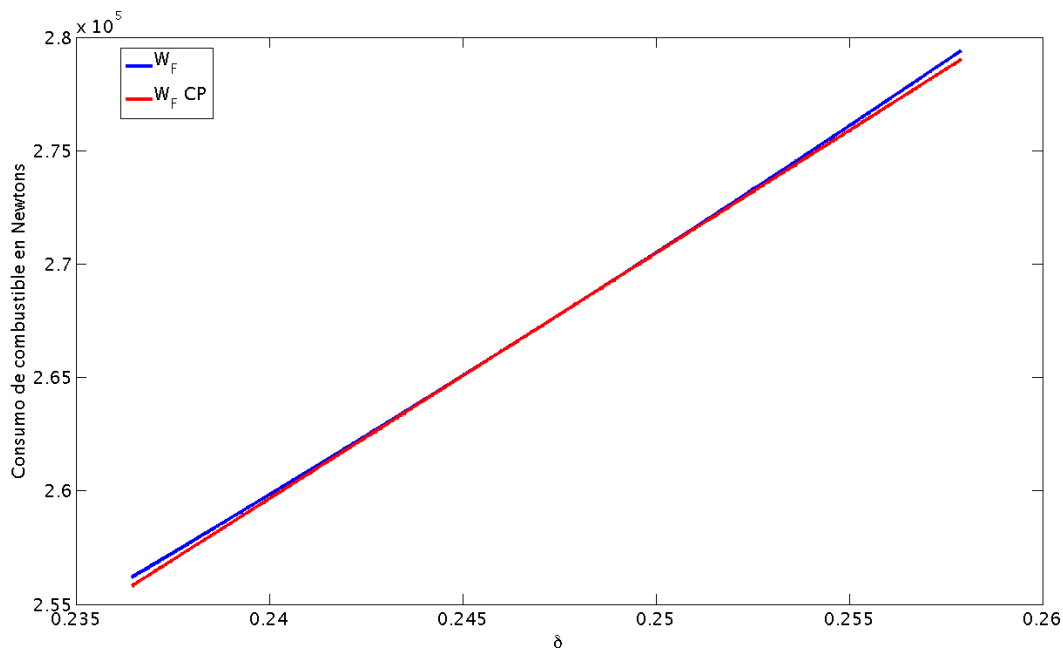


Figura 6-3. Estrategia 2. Consumos - δ , caso monovariante y distribución uniforme

Se observa que en la parte central, la diferencia entre ambos consumos es mínima, ya que tienden a coincidir, pero en los extremos se separan ligeramente, y tal y como están representados se da a entender que, en estas zonas, el consumo del Caso Perfecto sería menor. Algo previsible teniendo en cuenta cómo se ha obtenido el consumo de combustible del Caso Perfecto.

Por último, una vez presentados todos los resultados y realizado el análisis de la distribución uniforme cabe hacer hincapié sobre el concepto *Value of Stochastic Solution* (VSS). Este valor, como se ha visto anteriormente, es prácticamente nulo, por lo que la Estrategia 2 no ofrecería ninguna ventaja frente a la Estrategia 1 en la resolución del problema de optimización de trayectorias sujetas a incertidumbre definido en el presente Trabajo. Sumado esto al tiempo de cálculo empleado en esta estrategia, que es de unos 4 días y medio, se concluye que la Estrategia 2 no es una buena forma de abordar el problema para el caso monovariante y distribución uniforme. Habría que explorar otros problemas para tener una mayor certeza sobre la utilidad de la presente estrategia.

6.1.2 Distribución gamma

De nuevo, siguiendo el esquema de la distribución uniforme, y utilizando una distribución gamma para la variable peso final, se obtienen los resultados de Mach y de δ presentados a continuación.

Tabla 6-3. Estrategia 2, variables de decisión caso monovariante, distribución gamma

Variable	Valor obtenido
<i>Mach</i>	0.7615
δ	0.2472

Los valores de las variables de decisión se consiguen en base a los valores medios del caso monovariante y distribución gamma del Caso Perfecto, Tabla 4-2 del Capítulo 4. De manera que era esperable que los valores medios contemplados en dicha tabla y los de la Tabla 6-3 coincidieran. Así como que al ser valores únicos no sea aplicable calcular la desviación típica.

De nuevo, tal y como ocurría en la distribución uniforme, los valores de Mach y δ , son iguales a los de la Estrategia 1. Al suceder esto, los resultados que se obtuvieron en dicha estrategia se van a volver a repetir en la estrategia presente. Ahora, una vez fijados los valores de Mach y δ , imponiendo por tanto el régimen de vuelo, se calcula el consumo de combustible, quedando expuestos los resultados en la Tabla 6-4.

Tabla 6-4. Estrategia 2, resultados caso monovariante, distribución gamma

Variable	Media	Desviación típica
W_F	2.6753e+05 [N]	6. 8082 e+03 [N]

Por un lado, los valores de la media y la desviación típica coinciden con los de la Estrategia 1, por lo que además de que el análisis de los resultados es semejante, el *Value of Stochastic Solution* (VSS) es prácticamente cero, lo mismo que sucedía en la distribución uniforme. Por otro lado, observando el valor medio del consumo de combustible y el valor central del peso final, 1.15e+06 N, se tiene que el combustible supone aproximadamente un 20% del peso final de la aeronave.

Comparando con el resultado obtenido en el Caso Perfecto, la diferencia con la media del consumo de combustible de la presente estrategia es de unos 13 kg. Este valor representaría el *Expected Value of Perfect Information*, es decir, el consumo de combustible aumenta 13 kg en la Estrategia 2, lo que supone, en términos porcentuales, un 0.05% de la carga de combustible.

Dado que se toman 33554432 (2^{25}) muestras, se asegura para la distribución gamma de la presente Estrategia una probabilidad de cometer un error lo suficientemente pequeño, del orden de 0.5 kg, inferior a un 0.0021%.

Una vez analizada la media y la desviación típica, se procede a presentar la función de densidad.

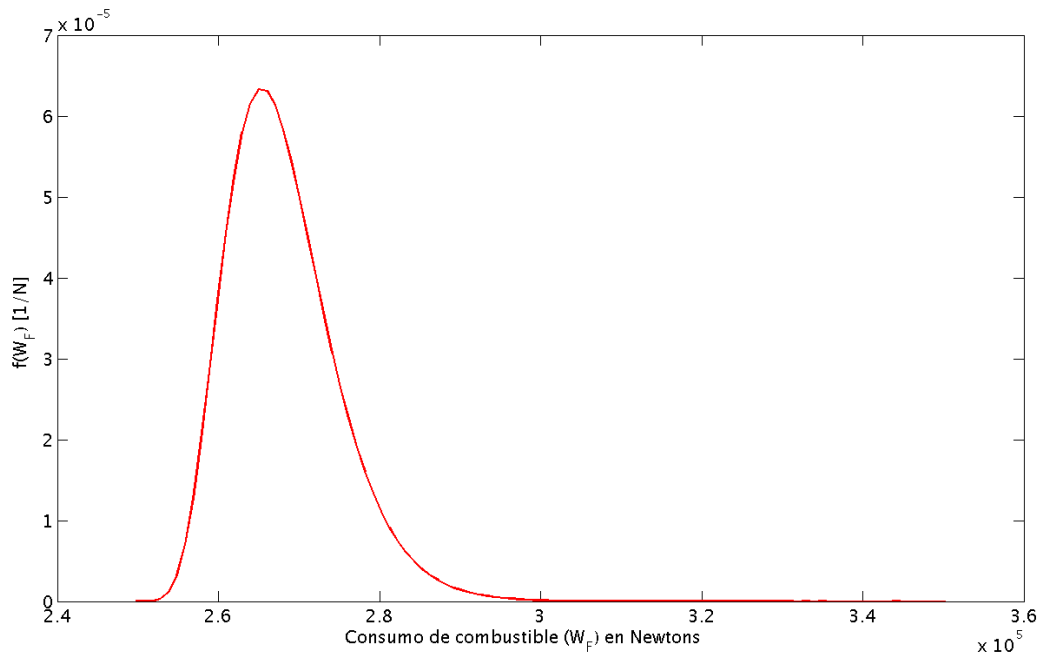


Figura 6-4. Estrategia 2, fdp del consumo, caso monovariante y distribución gamma

Observando la función de densidad del consumo de combustible, se ve que la forma es semejante a la de una distribución gamma, con unas proporciones semejantes a la función de densidad del peso final (W_f), Figura 2-2. Además, al tener Mach y δ el mismo valor, la función de densidad coincide con la de la distribución gamma de la Estrategia 1, Figura 5-3. En cuanto al rango de valores que puede tomar el consumo de combustible, la variación máxima con respecto al valor central, 2.6753×10^5 N, es de aproximadamente un 10%.

Otra forma de ver cómo afecta la desviación típica al rango de valores que puede tomar el consumo de combustible es analizando la relación entre este consumo y el peso final. Así, se obtiene una gráfica parecida a la del apartado de la distribución uniforme. Es importante destacar que la principal diferencia es el rango de valores que toma el peso final y, por tanto, el consumo de combustible. Además, al utilizar una distribución gamma se produce un desplazamiento de la zona central, que es para la que se resuelve el problema de optimización de trayectorias, con respecto a los valores que puede tomar el consumo, tal y como se observa en la siguiente figura.

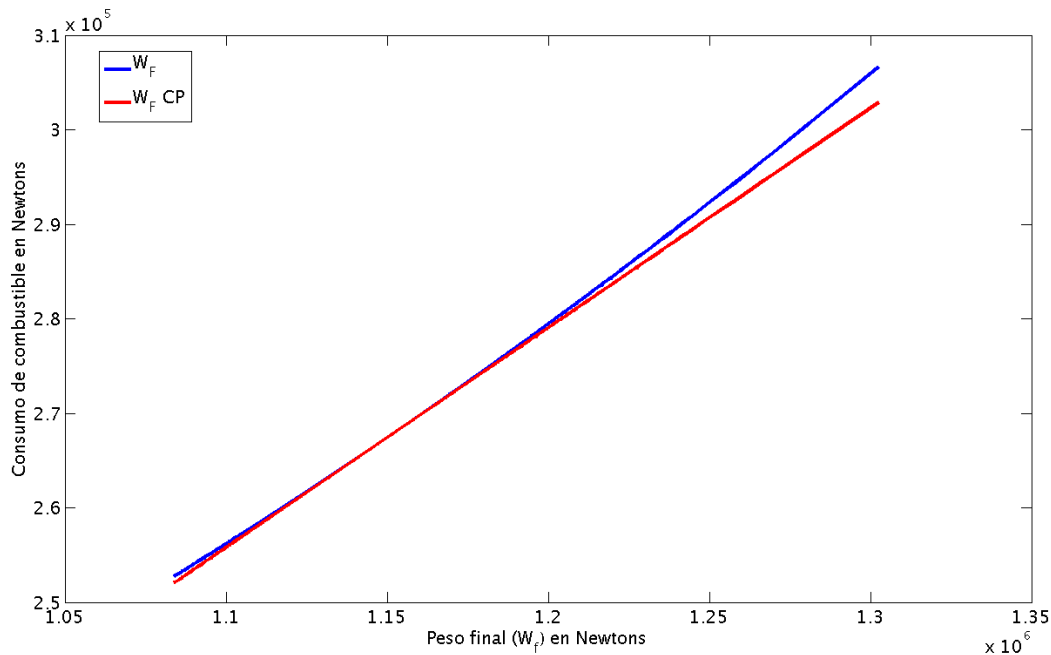


Figura 6-5. Estrategia 2. Consumos - peso final, caso monovariante y distribución gamma

En la figura 6-5, se puede constatar la diferencia entre el consumo de combustible de la Estrategia 2 (W_f) y el consumo de combustible del Caso Perfecto (W_f CP). Observándose de nuevo que en los valores centrales, los regímenes de vuelo producen consumos semejantes, pero en las bandas, el consumo del caso perfecto es menor.

Tal y como ocurre en la distribución anterior, se observa que la diferencia entre ambos consumos, el de la presente estrategia y el del Caso Perfecto, es mínima en la zona central, en la que coinciden. En los extremos, los valores de los consumos se separan, ligeramente en el lateral izquierdo y con una diferencia más acuciada en el derecho. Esto ocurre debido a que la optimización se realiza para unos valores que coinciden con los resultados de la Estrategia 1, y que dichos valores medios están ligeramente desplazados hacia la izquierda en el conjunto de valores que se obtienen para una distribución gamma, tal y como se puede observar en la función de densidad presentada en la Figura 6-4.

De la representación se podría extraer que el consumo es menor, en términos generales, es decir, sin conocer en qué rango de valores está el problema, en el Caso Perfecto con respecto a esta Estrategia. Algo previsible, dadas las características del Caso Perfecto y la presente estrategia.

Por último, una vez analizado el comportamiento del consumo de combustible para la distribución gamma, se recalca que el valor obtenido para el *Value of Stochastic Solution* (VSS), como se ha visto anteriormente, es prácticamente cero. De nuevo, como ocurría en la distribución uniforme, la Estrategia 2 no ofrecería ventaja frente a la Estrategia 1 en la resolución del problema definido en el presente Trabajo. Teniendo en cuenta el tiempo de cálculo necesario para esta estrategia, que se recuerda es de unos 4 días y medio, se concluye que la Estrategia 2 no es una buena forma de abordar el problema para la distribución gamma.

A raíz de lo expuesto, se extrae la misma conclusión a la que se llegó en la distribución uniforme, esto es, la Estrategia 2 no podría considerarse una estrategia adecuada para la resolución del problema de optimización de trayectorias de aeronave para el caso monovariante descrito en el presente Trabajo, independientemente de la distribución elegida. Sería necesario explorar otros problemas, con diversas condiciones, para validar la utilidad de la presente estrategia.

6.2 Caso multivariable

Se pasa a resolver según esta estrategia el problema de optimización de trayectorias para el caso multivariable, en el que cabe recordar que se incluían como variables inciertas c_{E0} , K_{CD_0} , K_{CD_1} , K_{CD_2} y R , además del peso final (W_f), todas ellas modeladas como variables aleatorias uniformes, siendo sus propiedades las reflejadas en la Tabla 2-2.

De esta manera, se obtienen los resultados de las variables de decisión presentados en la Tabla 6-5.

Tabla 6-5. Estrategia 2, variables de decisión caso multivariable

Variable	Valor obtenido
$Mach$	0.7620
δ	0.2472

Como se puede observar, dichos valores de $Mach$ y δ son los mismos que los valores medios a los que se llegó en el Caso Perfecto, Tabla 4-3. Coincidencia que no sorprende, ya que para esta estrategia el régimen de vuelo que se impone es el dado por dichos valores medios. Además, al ser los valores de la presente estrategia únicos no es aplicable calcular la desviación típica.

Una vez impuesto el régimen de vuelo, se calcula el consumo de combustible, siendo los valores de media y desviación típica los que se presentan a continuación.

Tabla 6-6. Estrategia 2, resultados caso multivariable

Variable	Media	Desviación típica
W_F	2.6763 e+05 [N]	1.6824 e+04 [N]

Como se puede observar, la diferencia en el valor del $Mach$ con el obtenido en la Estrategia 1, siendo del orden de diezmilésimas, no afecta al valor medio del consumo de combustible, que coincide con el de dicha estrategia. Este valor, 2.6763e+05 N, supondría aproximadamente un 20% del peso final de la aeronave, cuyo valor central es 1.15e+06 N.

Comparando con el caso monovariable, se observa que el consumo de combustible medio es unos 10 kg superior, algo que también ocurría en la Estrategia 1.

Con respecto al Caso Perfecto, la media del consumo de combustible aumenta unos 70 kg, correspondiéndose este valor con el EVPI, mientras que la desviación típica disminuye en torno a la cuarta cifra significativa. Esto produce que el rango de valores que puede tomar el consumo es ligeramente menor en la presente estrategia.

Realizando la comparación con la Estrategia 1, la media del consumo de combustible coincide, por lo que el *Value of Stochastic Solution* (VSS) es prácticamente nulo, igual que ocurría en el caso monovariable. La desviación típica aumenta ligeramente, del orden de la cuarta cifra significativa, por lo que no hay apenas variación en los rangos de valores que toman los consumos de ambas estrategias.

No hay que olvidar que el número de muestras que se toman es de 33554432 (2^{25}). Se estima que con dicha cantidad de muestras se tiene, con una probabilidad inferior a un 8.52% un error lo suficientemente pequeño, del orden de 0.5 kg. Además, como para el caso multivariable es posible calcular la probabilidad de cometer un error superior a 1 kg, se halla una probabilidad inferior a un 0.058% en el cálculo del consumo de combustible.

A continuación, se presenta la función de densidad del consumo de combustible.

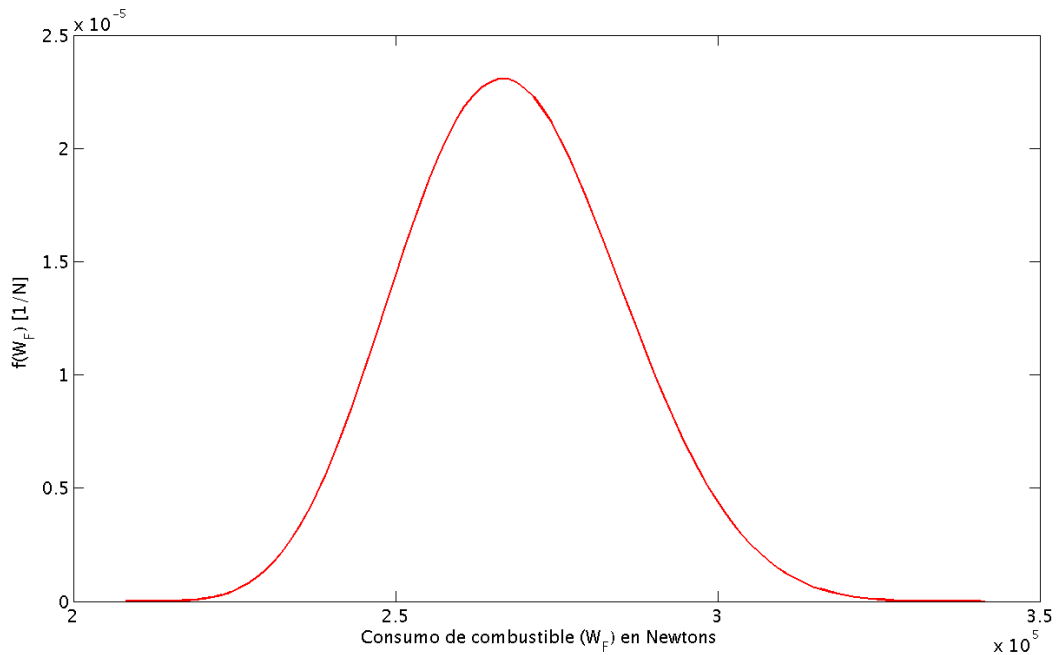


Figura 6-6. Estrategia 2, fdp del consumo, caso multivariable

Como se puede observar en la figura, la función de densidad toma una forma semejante a la de una distribución normal, aunque algo más achatada y ancha, ya que los valores no están tan concentrados en torno al punto central como lo estaban en la distribución gamma. Esto es algo que sucedía también en los casos multivariados del Caso Perfecto y la Estrategia 1.

Además, a la vista de la función de densidad, el rango de valores que puede tomar el consumo de combustible varía hasta aproximadamente un 20% con respecto al valor central, 2.6763×10^5 N.

Valorando los resultados obtenidos, y recalando el papel de comparación entre estrategias del *Value of Stochastic Solution* (VSS), se tiene que la Estrategia 2 no ofrecería ventaja frente a la Estrategia 1 en la resolución del problema de optimización de trayectorias sujetas a incertidumbre, ya que el VSS es prácticamente nulo. Teniendo en cuenta el tiempo de cálculo empleado en la Estrategia 2, que se recuerda es de unos 4 días y medio, se concluye que la presente estrategia no es una buena forma de abordar el problema para el caso multivariable.

Por último, englobando todos los resultados que se han ido obteniendo en los diferentes casos de la Estrategia 2, con los que se ha resuelto el problema de optimización de trayectorias de aeronave, ésta no podría considerarse una estrategia adecuada para la resolución del problema según se ha descrito en el presente Trabajo, ya que en ningún caso presenta mejora con respecto a la Estrategia 1, aunque cabe recordar que en esta última estrategia no se tenía en cuenta la incertidumbre. Habría que valorar las estrategias en diferentes condiciones, resolviendo diferentes problemas para determinar si existe una diferencia apreciable al utilizar una u otra estrategia.

7 RESULTADOS DE LA ESTRATEGIA 3

En este capítulo se presentan los resultados de la Estrategia 3. Esta estrategia se basa en encontrar el valor de Mach y el valor de δ que minimizan la media del consumo de combustible. De igual manera que en las estrategias anteriores, se presentan los casos monovariante y multivariante.

Los resultados con los que se trabaja a continuación han sido obtenidos en un equipo con las siguientes características: Intel Core2 Quad Q6600 2.40 GHz, 8 Gb RAM. El tiempo de procesamiento para hallar los resultados en esta estrategia ha sido del orden de media hora para ambos casos, monovariante y multivariante.

7.1 Caso monovariante

Volviendo a plantear el problema de optimización de trayectorias de forma semejante a las estrategias anteriores, se utilizan dos distribuciones para la obtención de pesos finales. Primero, se trabaja modelando el peso final según una distribución uniforme y, después, se modela dicha variable según una distribución gamma.

Para observar el comportamiento de la función objetivo, minimizar el consumo de combustible, se realiza una visualización mediante curvas de nivel, creando para ello una malla de Mach y δ , equivalente a una matriz 50x50, y asociada a un conjunto de valores del consumo. Los límites inferiores y superiores de la malla son Mach $\in [0.74, 0.78]$ y $\delta \in [0.23, 0.28]$, que se pueden observar en las gráficas, y con un paso linealmente espaciado entre puntos dentro una misma fila o dentro de una misma columna.

Para resolver el problema de optimización de trayectorias, se utiliza la función *fmincon*, que nos permite encontrar el mínimo de la media del consumo de combustible para un par de valores de las variables de decisión (M y δ).

7.1.1 Distribución uniforme

Una vez hecho el cómputo descrito en la sección 3.4, se presentan los resultados en forma de curvas de nivel para determinar cómo se comporta la función objetivo consumo de combustible con respecto a δ y al Mach, habiéndose modelado el peso final como una variable aleatoria uniforme.

De esta manera, como ya se ha comentado anteriormente, se tiene un valor del consumo de combustible por cada par de valores de Mach y δ . Dicho valor se obtiene imponiendo el régimen de vuelo, es decir, fijando para Mach y δ unos valores, y haciendo el cálculo del consumo de combustible para el conjunto de 2^{25} muestras del peso final. El valor único buscado se consigue calculando la media del conjunto de valores de consumo de combustible.

Ahora bien, para la representación de la curvas de nivel presentada a continuación, se realiza el proceso descrito para una serie de valores de Mach y de δ ya determinados de antemano. Esto implica que sirve como método de visualización del comportamiento del consumo de combustible pero no para encontrar el valor exacto del mínimo.

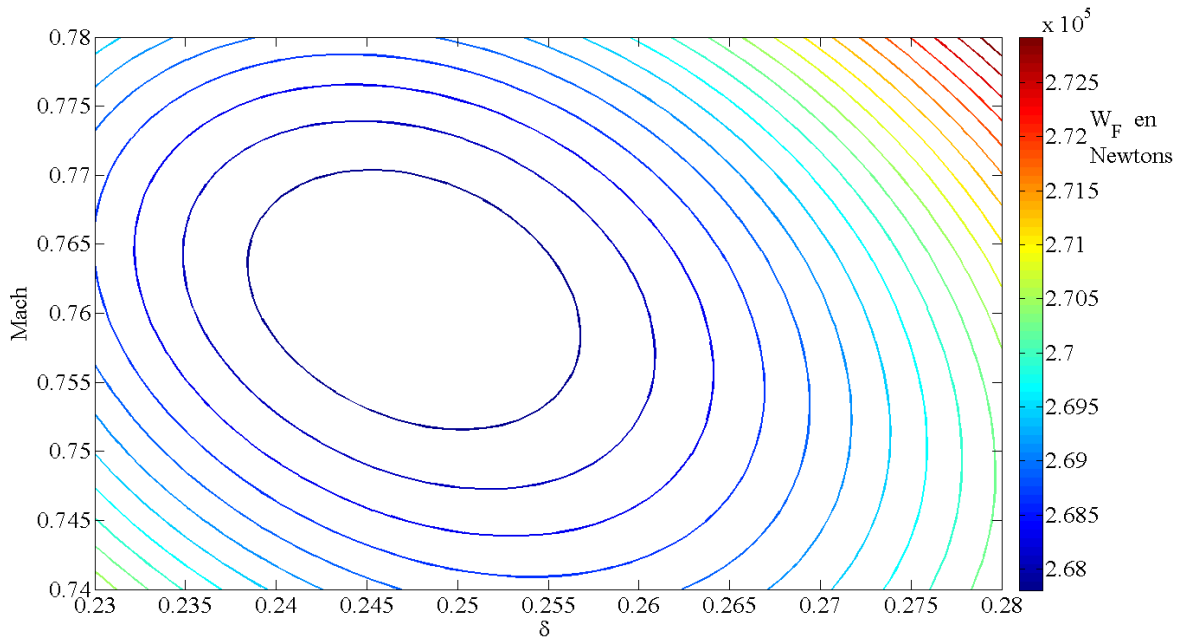


Figura 7-1. Estrategia 3, curvas de nivel del consumo, caso monovariante y distribución uniforme

Observando la Figura 7-1, la zona del mínimo está situada en torno a los valores que se obtuvieron en estrategias anteriores. Por lo que como estrategia de visualización del valor óptimo podría ser válida. El problema es que, a priori, no se sabe dónde está localizado el mínimo, ni cuál podría ser con exactitud la zona de interés. Este hecho podría producir una extensión, hasta cierto punto innecesaria, en los valores de δ y Mach para el cálculo de la malla.

Para hallar el mínimo del consumo se procede a utilizar la función *fmincon* de MATLAB, que, dada una función, en este caso la que define al consumo de combustible, nos permite encontrar su mínimo, y, además los valores de las variables de decisión (M , δ) asociados. Para ello, hay que darle un punto de arranque a la función, así como unos límites que puede tomar *fmincon* para las variables de decisión. El punto de arranque se corresponde con los valores de Mach y de δ hallados en la Estrategia 1. Los límites de *fmincon*, se toman con Mach $\in [0.74, 0.78]$ y $\delta \in [0.23, 0.28]$. Los mismos que se han utilizado para la representación de las curvas de nivel. Obteniéndose así los valores de Mach y δ presentados en la Tabla 7-1.

Tabla 7-1. Estrategia 3, variables de decisión caso monovariante, distribución uniforme

Variable	Valor obtenido
<i>Mach</i>	0.7614
δ	0.2473

Los valores obtenidos para Mach y δ son muy parecidos a los del Caso Perfecto o las estrategias anteriores, esto va a producir que los resultados sean también semejantes.

En cuanto al Mach, se tiene de nuevo que se está volando bajo efectos de compresibilidad, dado que se tiene una velocidad mayor a Mach = 0.4, valor partir del cuál, como se comentó anteriormente, se empiezan a incluir los términos asociados a este tipo de efectos en el cálculo de la trayectoria.

El valor de δ representa ahora una altitud de unos 10348 metros, marcando una diferencia de 3 metros con respecto a la altitud que se había obtenido en las estrategias anteriores, 10351 metros.

Tabla 7-2. Estrategia 3, resultados caso monovariable, distribución uniforme

Variable	Valor obtenido	Desviación típica
W_F	2.6753e+05 [N]	6.7030e+03 [N]

Evaluando en base a estos valores de Mach y δ y al conjunto de pesos finales obtenidos anteriormente, el valor que se obtiene del consumo de combustible es el presentado en la Tabla 7-2. Suponiendo así en torno al 20% del peso final de la aeronave, cuyo valor central es 1.15e+06 N. Además, se observa que la desviación típica del consumo es ligeramente menor que en las otras estrategias, con cambios en la tercera cifra significativa.

Comparando con el Caso Perfecto, el consumo de combustible de la presente estrategia es unos 13 kg superior, y, dado el valor del consumo de combustible en la Estrategia 1, el valor *Value of Stochastic Solution* es prácticamente cero.

Cabe recordar que el número de muestras que se toman para la resolución del problema es de 33554432 (2^{25}), cifra que viene dada por [1]. Con dicha cantidad de muestras se estima un error lo suficientemente pequeño, del orden de 0.5 kg, en el cálculo del consumo de combustible, con una probabilidad inferior a un 0.0016%.

A la vista de los resultados, podría afirmarse, como ocurrió con la Estrategia 2, que la Estrategia 3 no es eficiente para la resolución del problema de optimización de trayectorias descrito, ya que no ofrece ninguna mejora con respecto a la Estrategia 1. Aún así, cabe destacar que la Estrategia 2 y la Estrategia 3 son las únicas que tienen en cuenta la incertidumbre de las variables a la hora de optimizar, y que la presente funciona bastante mejor, ya que tarda menos en ser procesada y la función objetivo ataca directamente al consumo medio. Teniendo en cuenta los tiempos de cálculo, la presente estrategia tarda del orden de media hora y la Estrategia 2 unos 4 días y medio. Respecto a la Estrategia 1, ésta no tiene en cuenta la incertidumbre, y aunque los resultados que proporcionan ambas estrategias sean muy parecidos, es posible que en otros problemas se obtengan mayores diferencias. De esta manera, se podría considerar que La Estrategia 1 es un buen complemento de la Estrategia 3, dado que ésta última precisa de un punto de arranque y la Estrategia 1 proporciona un punto de arranque muy próximo al óptimo.

7.1.2 Distribución gamma

De igual manera que en la distribución uniforme, y según la sección 3.4 se presentan los resultados del consumo de combustible, utilizando en esta ocasión una distribución gamma para modelar el peso final (W_f).

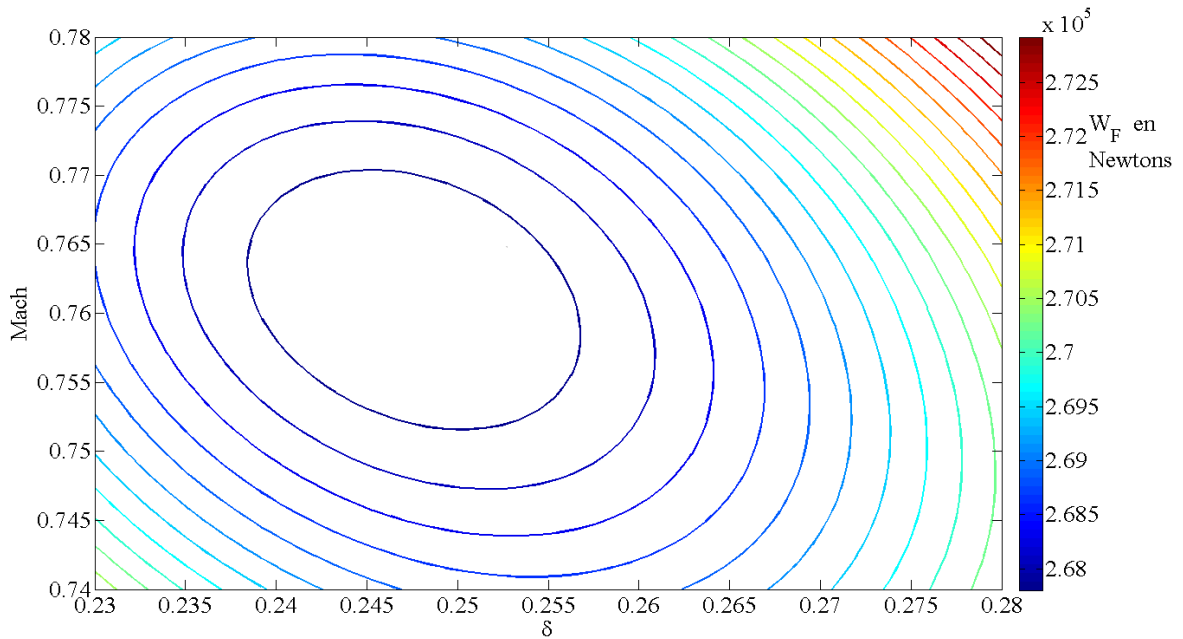


Figura 7-2. Estrategia 3, curvas de nivel del consumo, caso monovariante y distribución gamma

Coincidiendo con lo obtenido en la distribución uniforme, la zona del mínimo parece estar en concordancia con los resultados a los que se llega en las otras estrategias. Aún así, se están haciendo cálculos, hasta cierto punto innecesarios, del consumo de combustible, ya que hay valores de δ y Mach más alejados de la zona de interés que no tienen tanta relevancia.

De nuevo, tal y como se hizo en la distribución uniforme, se procede a utilizar la función *fmincon* de MATLAB para encontrar el mínimo de la función consumo de combustible, que es el presentado en la Tabla 7-2. Siendo, además, los valores de Mach y de δ aquellos para los que se encuentra dicho consumo mínimo. Referido al punto de arranque y a los límites de la función *fmincon*, se toman, de nuevo, los resultados para Mach y δ de la Estrategia 1, y los límites que fueron definidos previamente, esto es $\text{Mach} \in [0.74, 0.78]$ y $\delta \in [0.23, 0.28]$.

De esta manera, el mínimo se encuentra para los valores de Mach y δ presentados en la siguiente tabla.

Tabla 7-3. Estrategia 3, variables de decisión caso monovariante, distribución gamma

Variable	Valor obtenido
<i>Mach</i>	0.7614
δ	0.2473

Los valores de Mach y de δ se corresponden con los de la distribución uniforme, y, por tanto, se asemejan a los hallados en las otras estrategias.

Por otro lado, el valor medio mínimo del consumo de combustible y la desviación asociada a ese conjunto quedan reflejados en la Tabla 7-3.

Tabla 7-4. Estrategia 3, resultados caso monovariante, distribución gamma

Variable	Media	Desviación típica
W_F	2.6753e+05 [N]	6.7964e+03 [N]

En cuanto al valor medio del consumo de combustible, se tiene que es el mismo que en la distribución uniforme. De manera que en términos medios, el consumo de combustible representaría en torno al 20% del peso final de la aeronave, sabiendo que el valor central de dicho peso final es $1.15e+06$ N. De nuevo, el consumo de combustible resulta ser 13 kg superior al consumo calculado en el Caso Perfecto (EVPI). Comparando estos resultados con la Estrategia 1, el valor *Value of Stochastic Solution* es, otra vez, prácticamente cero.

Por otro lado, la desviación típica es ligeramente menor que en las estrategias anteriores, pero algo superior que la obtenida en el Caso Perfecto, estando la diferencia en todas las ocasiones en la tercera cifra significativa.

Cabe recordar que el número de muestras que se toman para la resolución del problema es de 33554432 (2^{25}). Con dicha cantidad de muestras se estima, con una probabilidad inferior a un 0.0021%, un error, del orden de 0.5 kg, que se considera lo suficientemente pequeño en el cálculo del consumo de combustible.

Por tanto, podría afirmarse que la Estrategia 3 no es eficiente en la distribución gamma para la resolución del problema de optimización de trayectorias descrito. La razón es que no ofrece ninguna mejora con respecto a la Estrategia 1. Aún así, sería mejor que la Estrategia 2, teniendo en cuenta los respectivos tiempos de cálculo. Como se comenta en la distribución uniforme, merece la pena destacar que la Estrategia 2 y la Estrategia 3 incluyen incertidumbre a la hora de optimizar, por lo que aunque en el problema definido en el presente Trabajo no ofrezcan ventaja podría darse mejora en otros problemas. En ese caso, la Estrategia 1 podría considerarse complementaria a la Estrategia 3, ya que podría ofrecer un punto de arranque próximo al óptimo, como ya se comentó en la distribución uniforme.

7.2 Caso multivariable

Siguiendo el esquema de la distribución uniforme y la distribución gamma del caso uniforme, se presentan las curvas de nivel de la función consumo de combustible, obtenidas al tratar como variables aleatorias uniformes las variables $c_{E0}, K_{C_{D0}}, K_{C_{D1}}, K_{C_{D2}}$ y R , además del peso final (W_f).

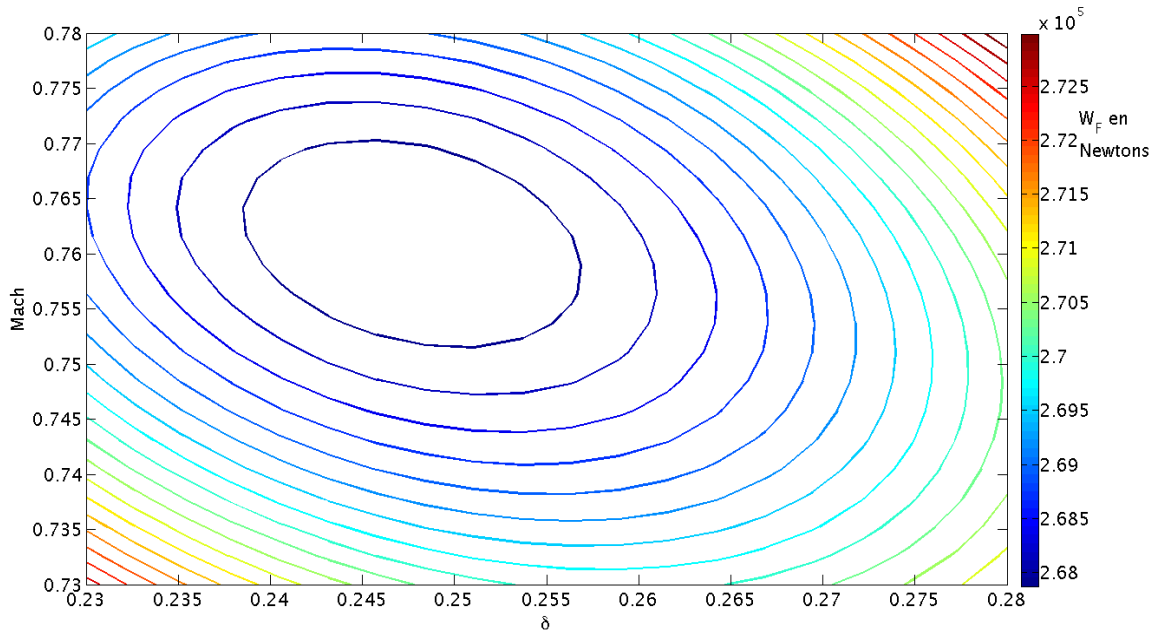


Figura 7-3. Estrategia 3, curvas de nivel del consumo, caso multivariable

Como se puede observar en la figura, el mínimo parece encontrarse en la zona de los valores obtenidos en estrategias previas, tablas 5-4 y 5-5 para la Estrategia 1 y tablas 6-5 y 6-6 para la Estrategia 2. Además, puede suponerse cómo va a ser el consumo, su comportamiento y un valor aproximado, aunque para hallar una aproximación más exacta se utiliza la función *fmincon*. Como punto de arranque para dicha función se vuelven a elegir los valores de Mach y de δ de la Estrategia 1, esto es Mach = 0.7615 y $\delta = 0.2472$, y como límites del espacio entre los que se encuentra el mínimo: Mach $\in [0.73, 0.78]$ y $\delta \in [0.23, 0.28]$.

Una vez realizados los cálculos, el mínimo se encuentra para los valores de Mach y δ presentados en la siguiente tabla.

Tabla 7-5. Estrategia 3, variables de decisión caso multivariable

Variable	Valor obtenido
<i>Mach</i>	0.7613
δ	0.2474

Valores que difieren del caso monovariable en la cuarta cifra significativa, algo que podría asociarse a errores de redondeo o quizás a una mayor proximidad al óptimo.

Con respecto al valor obtenido del Mach, está imponiendo una velocidad para el vuelo en crucero de la aeronave que produce que esté sujeta a efectos de compresibilidad, algo que también ocurría en el caso monovariable. Cabe recordar que según la polar utilizada en el presente Trabajo, adaptada de Cavcar [5], si el valor del Mach es superior a 0.4 se incluyen los términos asociados a la compresibilidad en los coeficientes de resistencia.

Observando δ , el valor obtenido para el cociente de presiones se corresponde, en este caso, con una altitud de unos 10345 metros, presentándose una diferencia de 3 metros con respecto al caso monovariable, 10348 metros, y de 6 metros con respecto a la Estrategia 1 y a la Estrategia 2, 10351 metros.

Es para los valores de $Mach$ y δ presentados en la Tabla 7-5 para los que se obtienen los resultados del consumo de combustible expuestos a continuación.

Tabla 7-6. Estrategia 3, resultados caso multivariable

Variable	Mínimo [N]	Desviación [N]
W_F	2.6763 e+05	1.6806 e+04

La media del consumo aumenta con respecto a los otros casos, monovariable uniforme y monovariable gamma, pero de nuevo vuelve a ser la misma que en el caso multivariable de las otras estrategias, por lo que se puede extraer que la estrategia escogida para resolver el problema no mejora los resultados.

Como ocurrió en la Estrategia 2, el consumo es unos 70 kg superior al multivariable del Caso Perfecto, correspondiéndose este valor con el *Expected Value of Perfect Information*. Y en relación a los valores de las variables de decisión (M y δ) no hay diferencia con la Estrategia 1, por lo que el *Value of Stochastic Solution* es prácticamente nulo.

Para el número de muestras que se toman, 33554432 (2^{25}), se estima, con una probabilidad inferior a un 8.49% un error del orden de 0.5 kg. Es decir, una probabilidad de error inferior a un 0.058% para un error lo suficientemente pequeño, del orden de 1 kg, en el cálculo del consumo de combustible.

En base a todo lo expuesto, se podría afirmar que la Estrategia 3 no es del todo eficiente, ya sea en el caso monovariable o multivariable, para resolver el problema de optimización de trayectorias descrito en el presente Trabajo, ya que no presenta ninguna mejora frente a la Estrategia 1. Eso sí, en comparación con la Estrategia 2, que también incluye incertidumbre en su resolución, la presente estrategia se considera más adecuada, ya que en términos de tiempo de cálculo es la más rápida de las dos.

Aún así, la Estrategia 3 incluye incertidumbre a la hora de optimizar, por lo que en otros problemas podría suponer una mejora con respecto a la Estrategia 1. Además, ambas estrategias podrían considerarse complementarias, ya que la Estrategia 1 podría proporcionar un punto de arranque para la Estrategia 3 muy próximo al óptimo, disminuyendo el número de cálculos y el tiempo de procesamiento de la estrategia, lo que permitiría hallar una solución que se considere más óptima en un menor tiempo global. Habría que explorar otros problemas con otras condiciones para determinar las diferencias.

8 RESUMEN DE RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados de las tres estrategias presentadas anteriormente así como los del Caso Perfecto, de manera que se puedan observar y comparar de una forma más rápida. Para ello, se exponen los resultados en tablas, diferenciadas según los casos y las distribuciones.

8.1 Caso monovariante

Como ya se ha comentado antes, se presentan los resultados según la distribución utilizada para las variables de decisión (M y δ) y para el peso final (W_f).

8.1.1 Distribución uniforme

Se empieza exponiendo los resultados de Mach para el Caso Perfecto y todas las estrategias.

Tabla 8-1. Comparación del Mach, caso monovariante y distribución uniforme

Estrategia	Valor obtenido	Desviación típica
Caso Perfecto	0.7615	6.4275e-10
Estrategia 1	0.7615	-
Estrategia 2	0.7615	-
Estrategia 3	0.7614	-

Como se puede observar, el valor es el mismo, y la diferencia en la Estrategia 3 podría asociarse a consecuencias de redondeo o a verdaderas diferencias en los cálculos, es decir, podría darse que el óptimo fuese el dado por la Estrategia 3.

De esta manera se tiene que independientemente de la estrategia que se escoja para la resolución del problema de optimización de trayectorias, en la distribución uniforme siempre se tiene un vuelo en crucero sujeto a efectos de compresibilidad, algo a tener en cuenta en los cálculos. Esto se hace en el presente Trabajo al utilizar una polar compresible adaptada de Cavcar [5], que incluye términos asociados a la compresibilidad.

A continuación, se presentan los valores de δ , observables en la Tabla 8-2.

Tabla 8-2. Comparación de δ , caso monovariante y distribución uniforme

Estrategia	Valor obtenido	Desviación típica
Caso Perfecto	0.2472	0.0062
Estrategia 1	0.2472	-
Estrategia 2	0.2472	-
Estrategia 3	0.2473	-

Algo semejante a lo explicado con el Mach ocurre con δ . Se obtiene prácticamente el mismo resultado independientemente de la estrategia. Este hecho hace que, en la distribución uniforme, se fije la altitud de vuelo a unos 10351 metros en todas las estrategias salvo la Estrategia 3, en la que la altitud fijada sería de unos 10348 metros.

Por último, en la Tabla 8-3 hay una comparación de los valores óptimos de consumo de combustible que se han ido obteniendo, a lo largo del presente Trabajo, tanto para el Caso Perfecto como para el resto de estrategias.

Tabla 8-3. Comparación del consumo, caso monovariante y distribución uniforme

Estrategia	Media [N]	Desviación típica [N]
Caso Perfecto	2.6740 e+05	6.7125 e+03
Estrategia 1	2.6753 e+05	6.7145 e+03
Estrategia 2	2.6753 e+05	6.7145 e+03
Estrategia 3	2.6753 e+05	6.7030 e+03

Tal y como se puede observar en la Tabla 8-3, se obtiene un valor más bajo, en términos medios, en el Caso Perfecto. Algo previsible y evidente, según la descripción del Caso Perfecto y las demás estrategias. La diferencia de valores entre el Caso Perfecto y la Estrategia 2 y 3 se explica mediante el concepto introducido anteriormente, *Expected Value of Perfect Information*, que tendría un valor de 13 kg. En referencia al valor medio del consumo de combustible, el EVPI supone un 0.05%, un valor prácticamente despreciable, dado, además, que la incertidumbre de la función de distribución es de un 4%. Por otro lado, en este problema, se ve que no hay diferencia apreciable entre resolverlo teniendo en cuenta la aleatoriedad de las variables o no, es decir, entre la Estrategia 1 y las Estrategias 2 y 3, por lo que según el concepto *Value of Stochastic Solution* no habría mejora en ese aspecto.

Por otro lado hay que tener en cuenta los tiempos de cálculo:

El cálculo del Caso Perfecto tarda del orden de 4 días y medio. Para la Estrategia 1 la duración del cálculo es del orden de minutos. Para la Estrategia 2, el tiempo de procesamiento es del orden de 4 días y medio, aunque en la práctica se reutilicen cálculos del Caso Perfecto. Y, por último, la Estrategia 3 tarda en ser procesada en torno a media hora.

8.1.2 Distribución gamma

En la siguiente tabla se tienen los resultados del Mach para la distribución gamma obtenidos a lo largo del presente Trabajo.

Tabla 8-4. Comparación del Mach, caso monovariante y distribución gamma

Estrategia	Valor obtenido	Desviación típica
Caso Perfecto	0.7615	7.1293e-10
Estrategia 1	0.7615	-
Estrategia 2	0.7615	-
Estrategia 3	0.7614	-

Como puede observarse, los resultados son idénticos a los de la distribución uniforme. Por lo tanto se tiene, de nuevo, un vuelo en crucero sujeto a efectos de compresibilidad, según la polar adaptada de Cavcar [5], independientemente de la estrategia elegida.

Para δ , los valores en la distribución gamma son los siguientes.

Tabla 8-5. Comparación de δ , caso monovariante y distribución gamma

Estrategia	Valor obtenido	Desviación típica
Caso Perfecto	0.2472	0.0062
Estrategia 1	0.2472	-
Estrategia 2	0.2472	-
Estrategia 3	0.2473	-

De nuevo, los resultados para δ coinciden con los de la distribución uniforme, obteniéndose prácticamente el mismo resultado independientemente de la estrategia. Este cociente de presiones representa una altitud de vuelo de unos 10351 metros en todas las estrategias excepto en la Estrategia 3, que son unos 10348 metros.

Una vez expuestas las variables de decisión, se presentan los resultados para el consumo de combustible.

Tabla 8-6. Comparación del consumo, caso monovariante y distribución gamma

Estrategia	Media [N]	Desviación típica [N]
Caso Perfecto	2.6740 e+05	6.7125 e+03
Estrategia 1	2.6753 e+05	6.8082 e+03
Estrategia 2	2.6753e+05	6.8082 e+03
Estrategia 3	2.6753e+05	6.7964 e+03

Tal y como se puede observar en la Tabla 8-6 se obtiene un valor más bajo, en términos medios, en el Caso Perfecto, siendo la explicación la misma ya comentada en el apartado 8.1.1. Además, el EVPI, que es de 13 kg, supone en referencia al valor medio del consumo de combustible un 0.05%, y, teniendo en cuenta que la incertidumbre de la función de distribución es de un 4%, podría considerarse una cantidad prácticamente poco significativa. Además, según el VSS no se produciría mejora entre resolver el problema sin tener en cuenta la incertidumbre (Estrategia 1) y teniéndola en cuenta (Estrategias 2 y 3). Cabe apreciar que los resultados son semejantes al caso de la distribución uniforme, por lo que resolver el problema de optimización de trayectorias con una u otra distribución no aporta ventajas apreciables.

Referido al tiempo de procesamiento de cada una de las estrategias, hay que recordar que el cálculo del Caso Perfecto tarda del orden de 4 días y medio. Para la Estrategia 1 se tarda del orden de minutos. Para la Estrategia 2, el tiempo de cálculo es del orden de 4 días y medio, aunque en la práctica se pueden reaprovechar cálculos y resultados del Caso Perfecto. Y, por último, para la Estrategia 3 se tarda en torno a media hora.

8.2 Caso multivariable

A continuación se expone el caso multivariable, teniendo en cuenta que las variables de partida afectadas por la incertidumbre han sido W_f , $K_{C_{D_0}}$, $K_{C_{D_1}}$, $K_{C_{D_2}}$, C_{E0} y R . Se recuerda que todas estas variables han sido tratadas como variables aleatorias uniformes.

Siguiendo el esquema marcado anteriormente, se presentan los resultados del Mach, de δ y del consumo de combustible, tanto para el Caso Perfecto como para las estrategias de optimización que han sido utilizadas a lo largo del trabajo.

Tabla 8-7. Comparación del Mach, caso multivariable

Estrategia	Valor obtenido	Desviación típica
Caso Perfecto	0.7620	0.0121
Estrategia 1	0.7615	-
Estrategia 2	0.7620	-
Estrategia 3	0.7613	-

Ahora, en este caso, sí que se aprecian diferencias en los valores del Mach, aunque siguen siendo pequeñas, ya que el valor máximo que se observa en la Tabla 8-7 es 0.7620, asociado al Caso Perfecto y a la Estrategia 2, y es 7 diez-milésimas superior al valor mínimo, asociado a la Estrategia 3. Aún así, independientemente de la estrategia elegida, se tiene un vuelo en crucero sujeto a efectos de compresibilidad, según la polar compresible adaptada de Cavcar [5] que se utiliza en el presente Trabajo.

La desviación típica aumenta considerablemente con respecto al caso monovariable, indicando esto una mayor dependencia del Mach con las nuevas variables que se toman como inciertas en el caso multivariable.

Los resultados de δ , obtenidos en el caso multivariable para el Caso Perfecto y las estrategias de optimización, se presentan en la Tabla 8-8.

Tabla 8-8. Comparación de δ , caso multivariable

Estrategia	Valor obtenido	Desviación típica
Caso Perfecto	0.2472	0.0062
Estrategia 1	0.2472	-
Estrategia 2	0.2472	-
Estrategia 3	0.2474	-

En cuanto a δ , la única variación apreciable es en la Estrategia 3, que es ligeramente superior aunque hasta cierto punto despreciable, lo mismo sucedía en el caso monovariable. Haciendo la conversión a altitud, se estaría imponiendo un vuelo en crucero a unos 10351 metros.

En la siguiente Tabla 8-9 se exponen los resultados de consumo de combustible óptimo obtenidos en el presente Trabajo para el caso multivariable.

Tabla 8-9. Comparación del consumo, caso multivariable

Estrategia	Media [N]	Desviación típica [N]
Caso Perfecto	2.6694 e+05	1.6838 e+04
Estrategia 1	2.6763 e+05	1.6818 e+04
Estrategia 2	2.6763 e+05	1.6824 e+04
Estrategia 3	2.6763 e+05	1.6806 e+04

No se aprecia diferencia en los resultados entre las estrategias, por lo que el *Value of Stochastic Solution* que surge al comparar la Estrategia 1 con la Estrategia 2 o la Estrategia 3 es prácticamente nulo, pero es de nuevo el Caso Perfecto el que presenta una media menor. La explicación de este hecho se apoya de nuevo en las descripciones del Caso Perfecto y de las estrategias, además de en el concepto *Expected Value of Perfect Information*, tal y como se comentó en el apartado 8.1.1. En el caso multivariable, siendo el EVPI 69 kg, supone porcentualmente el 0.25% del valor medio del consumo de combustible, valor significativamente mayor al 0.05% del caso monovariable, pero que sigue relativamente pequeño. Más si se recuerda que el nivel de incertidumbre considerado se corresponde con una semianchura de las funciones de distribución de como máximo el 5%, para $c_{E0}, K_{CD_0}, K_{CD_1}, K_{CD_2}$ y R , y un 4% para el peso final (W_f).

Además, cabe destacar que la media del consumo en las estrategias aumenta con respecto a los otros casos, monovariable uniforme y monovariable de distribución gamma, del orden de 10 kg. Sin embargo, en el Caso Perfecto, dicha media de consumo disminuye sobre 40 kg.

Por otro lado hay que considerar, de nuevo, los tiempos de cálculo. Al cambiar de ordenador, cuyas especificaciones están recogidas en la introducción del Capítulo 4, el tiempo de procesamiento del Caso Perfecto pasa a ser de unas 20 horas. Es sólo en este caso y en la Estrategia 2 donde se presentan diferencias.

Por lo que, el tiempo de cálculo en la Estrategia 1 es del orden de minutos. En la Estrategia 2 es del orden de 20 horas. Y en la Estrategia 3 es necesaria una media hora para obtener resultados.

Una vez expuesto el resumen de resultados obtenidos a lo largo del presente Trabajo, quedan por describir las conclusiones e interpretaciones que pueden extraerse de estos resultados.

9 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este Trabajo de Fin de Grado se ha realizado la optimización de trayectorias de aeronaves sujetas a incertidumbre, cuestión que no se había abordado con anterioridad en el Departamento.

Ahora bien, para los criterios de incertidumbre elegidos, es decir, incluyendo incertidumbre de un 5%, para c_{E0} , K_{CD_0} , K_{CD_1} , K_{CD_2} y R , y un 4% para el peso final (W_f), se extraen las siguientes conclusiones tras aplicar tres estrategias diferentes:

- Los resultados de Mach y δ obtenidos en las tres estrategias son muy parecidos, esto ocurre tanto en el caso monovariable como en el multivariable.
- El valor medio del consumo de combustible para las tres estrategias es el mismo. De nuevo, esto es algo que ocurre tanto para el caso monovariable como para el multivariable.

Comparando el consumo de la Estrategia 1, que no tiene en cuenta la incertidumbre, con aquel de la Estrategia 2 y la Estrategia 3, que sí la incluyen, se tiene un valor de VSS (*Value of Stochastic Solution*) prácticamente nulo. Esto indica que resolver el problema de optimización de trayectorias de aeronave añadiendo incertidumbre, en las condiciones expuestas en el Trabajo, no nos ofrece ninguna ventaja. Habría que explorar otros problemas con otras condiciones: como tener en cuenta mayores niveles de incertidumbre, tratar como inciertas otras variables,... Para determinar si merecería la pena resolver el problema de optimización de trayectorias con incertidumbre mediante la Estrategia 3 en conjunto con la Estrategia 1, para obtener una mejora en los resultados.

En este problema, el EVPI (*Expected Value of Perfect Information*), obtenido de comparar las Estrategias 2 y 3 con el Caso Perfecto, es de unos 13 kg para el caso monovariable y de unos 70 kg para el caso multivariable. Esta diferencia es relativamente pequeña, ya que, en el peor de los casos, supone un 0.26% de la carga de combustible.

- La Estrategia 1 es la más rápida, seguida de la Estrategia 3. Cabe destacar que la Estrategia 3 incluye incertidumbre en su resolución, aunque no ofrezca ventajas en el problema de optimización de trayectorias planteado.

Expuestas las conclusiones del presente Trabajo de Fin de Grado se proponen dos nuevos problemas.

El primer problema consistiría en tomar la carga de combustible que cubra un porcentaje determinado de los casos, por ejemplo el 99%, y observar el impacto que tendría esa decisión, en términos del consumo de combustible final, al resolver el problema de optimización de trayectorias de aeronaves. Dicho de otra manera, se trataría de resolver un problema semejante al Caso Perfecto del presente Trabajo, obteniendo un conjunto de valores de las variables de decisión y un conjunto de valores del consumo de combustible. Como estos conjuntos están asociados a variables inciertas, éstas se podrían discriminar según la distancia al valor central correspondiente, estableciendo un percentil, y cubriendo un determinado porcentaje de los casos. A priori, sin conocer el problema, se sugiere un 99%, aunque podría tratar de resolverse con una serie de percentiles diferentes y ver, además, cómo afecta esta elección al consumo de combustible final de la aeronave.

El segundo problema consistiría en un ajuste dinámico del régimen de vuelo, es decir, dividir el vuelo en crucero en una serie de tramos, y calcular Mach y δ para que el consumo de combustible sea mínimo en cada uno de estos tramos. Los cálculos se realizarían teniendo en cuenta la incertidumbre que pueden presentar las variables y la acumulación de dicha incertidumbre conforme se avanza en la trayectoria, al completar un tramo y pasar al siguiente. De esta manera, podría observarse cómo se propaga la incertidumbre y si el continuo ajuste de Mach y δ es beneficioso para obtener una mejora en la reducción del consumo de combustible.

REFERENCIAS

- [1] Manuel Ángel Zapata Habas. Trabajo de Fin de Grado “*Análisis de trayectorias de crucero de aviones comerciales sujetas a variables estocásticas*”, 2015.
- [2] John R. Birge and François Louveaux, *Introduction to Stochastic Programming*, 2011.
- [3] Rafael Vazquez and Damián Rivas. *Propagation of Initial Mass Uncertainty in Aircraft Cruise Flight*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics., March-April 2013, Vol. 36, No.2, pp. 415-429
- [4] Mónica Manuela Rodríguez Heredia. Proyecto de Fin de Carrera “*Análisis de las actuaciones de aviones comerciales incluyendo efectos de compresibilidad*”, 2015.
- [5] Cavcar, A. and M. Cavcar. *Approximate solutions of range for constant altitude - constant high subsonic speed flight of transport aircraft*. Aerospace Science and Technology, 8:557-567, 2004.
- [6] Rafael Vázquez and Damián Rivas. *Analysis of the Effect of Uncertain Average Winds on Cruise Fuel Load*, 2015.

APÉNDICE

Derivadas con respecto al Mach:

$$\frac{dA}{dM} = \frac{1}{g} \frac{a_0}{c_{E0} \cdot (1.0 + 1.2 \cdot M)^2} \quad (\text{A-1})$$

$$\frac{dB}{dM} = - \frac{4 \frac{dC_{D0}}{dM} C_{D2} + 4C_{D0} \frac{dC_{D2}}{dM} - 2C_{D1} \frac{dC_{D1}}{dM}}{\sqrt{(4C_{D0}C_{D2} - C_{D1}^2)^3}} \quad (\text{A-2})$$

$$\frac{\partial u}{\partial M} = \frac{\frac{\partial a}{\partial M} - \frac{\partial b}{\partial M} + \frac{\partial a}{\partial M} b^2 - \frac{\partial b}{\partial M} a^2}{(1 + ab)^2} \quad (\text{A-3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial M} = \frac{1}{\sqrt{(4C_{D0}C_{D2} - C_{D1}^2)^3}} & \left[\left(2 \frac{dC_{D2}}{dM} \frac{W_f(1+\xi)}{q_0 \delta M^2} - 4C_{D2} \frac{W_f(1+\xi)}{q_0 \delta M^3} + \frac{dC_{D1}}{dM} \right) \right. \\ & \cdot (4C_{D0}C_{D2} - C_{D1}^2) - \left(2 \frac{dC_{D0}}{dM} C_{D2} + 2C_{D0} \frac{dC_{D2}}{dM} - C_{D1} \frac{dC_{D1}}{dM} \right) \\ & \left. \cdot \left(2C_{D2} \frac{W_f(1+\xi)}{q_0 \delta M^2} + C_{D1} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial M} = \frac{1}{\sqrt{(4C_{D0}C_{D2} - C_{D1}^2)^3}} & \left[\left(2 \frac{dC_{D2}}{dM} \frac{W_f}{q_0 \delta M^2} - 4C_{D2} \frac{W_f(1+\xi)}{q_0 \delta M^3} + \frac{dC_{D1}}{dM} \right) \cdot (4C_{D0}C_{D2} - C_{D1}^2) \right. \\ & \left. - \left(2 \frac{dC_{D0}}{dM} C_{D2} + 2C_{D0} \frac{dC_{D2}}{dM} - C_{D1} \frac{dC_{D1}}{dM} \right) \cdot \left(2C_{D2} \frac{W_f}{q_0 \delta M^2} + C_{D1} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

$$\frac{dC_{Di}}{dM} = \sum_{j=1}^5 k_{ij} \frac{2 \cdot j(M - 0.4)^{2j-1} (1 - M^2)^{j/2} + (M - 0.4)^{2j} \cdot M \cdot j \cdot (1 - M^2)^{\frac{j}{2}-1}}{(1 - M^2)^j} \quad (\text{A-6})$$

La expresión (A-6) sirve para C_{D0} , C_{D1} y C_{D2} .

También cabe destacar que se ha corregido la expresión (A-5), ya que la equivalente en [4], expresión (4-44) en dicho proyecto, contenía un error.

Derivadas con respecto al cociente de presiones δ :

$$\frac{\partial u}{\partial \delta} = \frac{\frac{\partial a}{\partial \delta} - \frac{\partial b}{\partial \delta} + \frac{\partial a}{\partial \delta} b^2 - \frac{\partial b}{\partial \delta} a^2}{(1 + ab)^2} \quad (\text{A-7})$$

$$\frac{\partial a}{\partial \delta} = \frac{-2C_{D2} \frac{W_f(1+\xi)}{q_0 \delta^2 M^2}}{\sqrt{4C_{D0}C_{D2} - C_{D1}^2}} \quad (\text{A-8})$$

$$\frac{\partial b}{\partial \delta} = \frac{-2C_{D2} \frac{W_f}{q_0 \delta^2 M^2}}{\sqrt{4C_{D0}C_{D2} - C_{D1}^2}} \quad (\text{A-9})$$

Recordar que A , B y C_D no dependen de δ .