

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

R. AYALA

E. DOMINGUEZ

A. QUINTERO

Approximation axiomatique à la théorie du bordisme

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques,
tome 30, n° 3 (1989), p. 189-212.

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1989__30_3_189_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**APPROXIMATION AXIOMATIQUE A LA
THÉORIE DU BORDISME¹**

by R. AYALA, E. DOMINGUEZ et A. QUINTERO

ABSTRACT. This paper gives an axiomatical approximation to Bordism Theory. It proves those properties of a geometrical nature that a class of models must satisfy to develop a bordism theory in an abstract category.

INTRODUCTION.

Pendant les dernières années, les théories de bordisme ont connu un développement extraordinaire, et on peut trouver dans la littérature un grand nombre d'exemples. Ceux-ci sont obtenus non seulement par le choix de modèles différents, mais aussi par changement de la catégorie base. Dans ce travail, nous développons un système axiomatique qui conserve le langage géométrique et qui est assez général pour englober les théories de bordisme connues, ainsi que plusieurs théories en cours de développement (voir §7).

Akin et Dominguez [1,6] ont défini des axiomes qui permettent de construire une théorie de bordisme, mais ces axiomes ne sont pas suffisamment généraux. Par ailleurs, Stong [16] a donné une axiomatique plus générale concernant les modèles, mais qui ne tient pas compte de la catégorie base; cette axiomatique ne fournit pas un outil convenable pour étudier les liens du bordisme avec les théories d'homologie.

En général, toutes ces axiomatiques attachent aux modèles des propriétés catégorielles, mais dans ce travail on met en évidence que ceci n'est pas nécessaire, et qu'il suffit d'imposer ces propriétés sur la catégorie base. Par exemple, l'abstraction du recollement n'exige un pushout que dans cette catégorie.

Il serait trop long de démontrer comment les théories usuelles rentrent dans ce cadre abstrait; nous nous bornons donc à indiquer comment quelques exemples simples doivent être traités pour les intégrer dans l'axiomatique présentée.

¹ Ce travail s'insère dans un programme soutenu par CAICYT 0812-84.

On désignera par $O(\mathcal{C})$ la classe des objets d'une catégorie \mathcal{C} . Le pushout du diagramme

$$X \xleftarrow{u} A \xrightarrow{v} Y$$

sera noté XUY si aucune confusion n'est à craindre. Lorsque $f: X \rightarrow Z \leftarrow Y: g$ sont des \mathcal{C} -morphisms tels que $f \cdot u = g \cdot v$, le \mathcal{C} -morphisme défini de façon canonique sera noté $f \cup g: XUY \rightarrow Z$. Etant donné $X, Y \in O(\mathcal{C})$, leur coproduit sera noté $X+Y$, et le morphisme induit par deux \mathcal{C} -morphisms $f: X \rightarrow Z \leftarrow Y: g$ sera désigné par $f+g: X+Y \rightarrow Z$. Si l'on écrit $XUY=Z$ ou $X+Y=Z$, ceci signifie que le pushout ou le coproduit correspondant est défini, et qu'il est isomorphe à Z .

1. MONOIDES HOMOLOGIQUES.

1. DEFINITIONS. Un *semi-groupe involutif* est un triplet $(C, +, \vartheta)$, où C est un ensemble, $+: C \times C \rightarrow C$ est une loi de composition commutative et associative notée $U+V$, et $\vartheta: C \rightarrow C$ est une involution additive, c'est-à-dire

$$\vartheta^2 = \text{id} \text{ et } \vartheta(U+V) = \vartheta U + \vartheta V .$$

Si la loi de composition possède un élément neutre \emptyset , on supposera $\vartheta \emptyset = \emptyset$, et on dira que $(C, +, \vartheta)$ est un *monoïde involutif*. On a une notion naturelle de morphisme entre monoïdes involutifs.

Un *monoïde homologique* est $\mathbf{M} = (\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \partial)$, où:

(1) \mathbf{R} est un ensemble dont les éléments seront appelés *chaînes* ou *relations*.

(2) $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}, +, \vartheta)$ est un monoïde involutif, et ses éléments sont appelés *cycles*.

(3) $\partial: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$ est une fonction satisfaisant aux conditions suivantes:

3a) Pour chaque couple $R_1, R_2 \in \mathbf{R}$, il existe une chaîne $R_1 \tilde{+} R_2$ telle que $\partial(R_1 \tilde{+} R_2) = \partial R_1 + \partial R_2$.

3b) Si $R \in \mathbf{R}$, il existe une chaîne $\tilde{\vartheta} R$ telle que $\partial \tilde{\vartheta} R = \vartheta \partial R$.

3c) Pour tout cycle Z il existe une chaîne $Z \tilde{\times} I$ telle que l'on ait $\partial(Z \tilde{\times} I) = Z + \vartheta Z$.

3d) Soit R_1, R_2 deux chaînes telles que $\partial R_1 = Z_1 + Z$ et $\partial R_2 = Z_2 + \vartheta Z$. Alors, il existe

$$R = R_1 \underset{Z}{\tilde{\cup}} R_2 \in \mathbf{R} \text{ avec } \partial R = Z_1 + Z_2 .$$

Si ϑ est l'identité, on dira que \mathbf{M} est un Z_2 -monoïde homologique.

Soit \mathbf{M} un monoïde homologique. Deux cycles Z et Z' de \mathbf{M} sont dits *homologues* s'il existe une chaîne R telle que $\partial R = Z + \vartheta Z'$. On écrira $Z \sim Z'$.

D'après les axiomes 3b)-3d), la relation d'homologie est une relation d'équivalence, et on notera $[Z]$ la classe d'équivalence de Z . La loi de composition

$$[Z_1] + [Z_2] = [Z_1 + Z_2]$$

définit une structure de groupe abélien sur l'ensemble quotient $\Omega^{\mathbf{M}}$. L'élément neutre est représenté par les cycles Z tels qu'il existe une chaîne R avec $\partial R = Z$, et l'inverse de $[Z]$ est $[\vartheta Z]$. Nous dirons que $\Omega^{\mathbf{M}}$ est le *groupe d'homologie associé à \mathbf{M}* .

2. EXEMPLES.

(a) Soit (G, d) un groupe différentiel, et \mathbf{ZG} le sous-groupe des cycles. Alors (G, \mathbf{ZG}, d) est un monoïde homologique: on pose $\vartheta(Z) = Z$ et $Z \times I = 0$ pour chaque cycle Z , et on définit $g_1 + g_2$ comme étant la somme dans G des éléments g_1 et g_2 . L'homologie de ce monoïde est isomorphe à celle du groupe différentiel.

(b) Si H est un groupe abélien et $\varphi: G \rightarrow H$ un morphisme de groupes, (G, H, φ) admet une structure naturelle de monoïde homologique dont le groupe d'homologie est $\text{Coker } \varphi$. En particulier, une présentation abélienne d'un groupe abélien G définit un monoïde homologique dont le groupe d'homologie est G .

(c) Soit \mathbf{R} (resp. \mathbf{Z}) l'ensemble des classes des PL-variétés compactes (resp. fermées) par la relation de PL-isomorphisme. On démontre que ces modèles définissent un monoïde homologique dont le groupe d'homologie est le groupe de PL-bordisme non-orienté. Des exemples analogues peuvent être construits en utilisant les variétés topologiques [15], les variétés différentiables [4], les variétés d'homologie [13], les Z_2 -complexes [18], les pseudovariétés [5] et les L -variétés [2]. Si l'on considère les classes de modèles orientés par la relation d'isomorphisme conservant l'orientation et l'on définit ϑ comme étant l'opérateur qui renverse l'orientation, on obtient les bordismes orientés respectifs. Remarquons que si dans ces cas on prend $\vartheta = \text{id}$, l'axiome 3c) n'est pas vérifié en général.

(d) Quintero [11] a donné un exemple de catégorie de modèles qui est une sous-classe des variétés d'homologie et qui

n'admet pas de structure cylindrique. Pourtant, ces modèles définissent une théorie de bordisme qui est une théorie d'homologie généralisée sur les espaces topologiques, équivalente au PL-bordisme. Le même auteur [12] considère une autre sous-classe des variétés d'homologie qui n'admet ni recollements le long des composantes du bord ni voisinages réguliers, et il démontre que ces modèles définissent une théorie de bordisme qui, comme théorie d'homologie généralisée sur les espaces topologiques, est équivalente au bordisme d'homologie. En fait, la classe de modèles considérée constitue une théorie de prébordisme relatif sur les espaces topologiques.

3. DEFINITION. Un *morphisme entre monoïdes homologiques* $\mathbf{M}=(\mathbf{R},\mathbf{Z},\partial)$ et $\mathbf{M}'=(\mathbf{R}',\mathbf{Z}',\partial')$ est un morphisme de monoïdes involutifs $\psi:\mathbf{Z}\rightarrow\mathbf{Z}'$ tel que pour chaque $R\in\mathbf{R}$ il existe $R^*\in\mathbf{R}'$ avec $\partial'R^*=\psi\partial R$.

On voit facilement que tout morphisme $\psi:\mathbf{M}\rightarrow\mathbf{M}'$ induit un morphisme $\psi_*:\Omega\mathbf{M}\rightarrow\Omega\mathbf{M}'$.

Les monoïdes homologiques et leurs morphismes forment une catégorie **GH** telle que les groupes d'homologie et les morphismes associés définissent un foncteur covariant à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens.

On dira que deux morphismes $\psi,\xi:\mathbf{M}\rightarrow\mathbf{M}'$ sont *équivalents* si pour chaque $Z\in\mathbf{Z}$ il existe $R'\in\mathbf{R}'$ tel que $\partial R'=\psi Z+\vartheta\xi Z$. Dans ce cas, il est clair que $\psi_*=\xi_*$.

4. REMARQUES. Soit $\mathbf{M}=(\mathbf{R},\mathbf{Z},\partial)$ un monoïde homologique.

a) Supposons que \mathbf{Z} admet un élément neutre \emptyset . Alors, on voit facilement que $\vartheta\emptyset=\emptyset$ et qu'il existe $R\in\mathbf{R}$ avec $\partial R=\emptyset$. Donc l'élément neutre de $\Omega\mathbf{M}$ est représenté par \emptyset .

Considérons la réunion de $\mathbf{R}\cup\mathbf{Z}$ avec les expressions formelles $R+Z$ ou $Z+R$, pour tout $R\in\mathbf{R}$ et $Z\in\mathbf{Z}$. Notons \mathbf{R}' le quotient de cette réunion par les relations

$$R+Z=Z+R \text{ et } R+\emptyset=R.$$

Soit $\partial':\mathbf{R}'\rightarrow\mathbf{Z}$ l'application définie par:

$$\partial'R'=\partial R' \text{ si } R'\in\mathbf{R}, \quad \partial'R'=\emptyset \text{ si } R'\in\mathbf{Z}.$$

Alors $\mathbf{M}'=(\mathbf{R}',\mathbf{Z},\partial')$ est un monoïde homologique tel que le morphisme naturel $\mathbf{M}\rightarrow\mathbf{M}'$ induit un isomorphisme entre les groupes d'homologie correspondants.

b) Soit $M^* = (R^*, Z^*, \partial^*)$ où:

i) $Z = Z \cup \{\emptyset\}$ est muni de la structure de monoïde involutif déterminée par $Z + \emptyset = \emptyset = \emptyset + Z$ pour tout $Z \in Z$, \emptyset étant un objet quelconque.

ii) $R^* = R \cup \{\emptyset\}$, et ∂^* est défini par $\partial^* R = \partial R$ si $R \in R$ et $\partial^* \emptyset = \emptyset$. Alors M^* admet une structure naturelle de monoïde homologique, telle que le morphisme canonique $M \rightarrow M^*$ induit un isomorphisme entre les groupes d'homologie associés.

2. PRÉBORDISME ABSOLU.

1. DEFINITIONS. Etant donné une catégorie C , un *pseudocylindre* sur un objet $X \in O(C)$ est un triplet $\{v_0, v_1; X \tilde{\times} I\}$, où $v_0, v_1: X \rightarrow X \tilde{\times} I$ sont des C -morphisms tels que, pour chaque C -morphisme $f: X \rightarrow Y$, il existe un C -morphisme $\tilde{f}: X \tilde{\times} I \rightarrow Y$, appelé *relèvement de f*, avec $\tilde{f} \cdot v_0 = f = \tilde{f} \cdot v_1$.

Une *catégorie de modèles pour une théorie de prébordisme absolu* sur C est une donnée $M = (R, Z, \partial, F, u, C)$, où:

(1) C est une catégorie admissible pour une théorie de prébordisme absolu, c'est-à-dire il n'y a pas d'autres C -isomorphismes que les identités.

(2) (R, Z, ∂) est un monoïde homologique.

(3) $F = (F_1, F_2)$, où $F_1: R \rightarrow O(C)$ et $F_2: Z \rightarrow O(C)$ sont des applications telles que

$$F_2 \cdot \vartheta = F_2 \text{ et } F_2(Z_1 + Z_2) = F_2 Z_1 + F_2 Z_2.$$

(4) $u = \{u_R; R \in R\}$ est une famille de C -morphisms

$$u_R: F_2 \partial R \rightarrow F_1 R.$$

(5) Etant donné $R_1, R_2 \in R$, il existe $R_1 \tilde{+} R_2 \in R$ tel que l'on ait:

$$\partial(R_1 \tilde{+} R_2) = \partial R_1 + \partial R_2, F_1(R_1 \tilde{+} R_2) = F_1 R_1 + F_1 R_2 \text{ et } u_{R_1 \tilde{+} R_2} = u_{R_1} + u_{R_2}.$$

(6) Pour chaque $R \in R$ il existe $\tilde{\vartheta} R \in R$ tel que

$$\partial \tilde{\vartheta} R = \vartheta \partial R, F_1 \tilde{\vartheta} R = F_1 R \text{ et } u_{\tilde{\vartheta} R} = u_R.$$

(7) Pour chaque $Z \in Z$ il existe $Z \tilde{\times} I \in R$ tel que $\partial(Z \tilde{\times} I) = Z + \vartheta Z$, $F_1(Z \tilde{\times} I)$ est un pseudocylindre sur $F_2 Z$ et $u_{Z \tilde{\times} I} = v_0 \cup v_1$.

(8) Quels que soient $R_1, R_2 \in R$ avec $\partial R_1 = Z_1 + Z$ et $\partial R_2 = Z_2 + \vartheta Z$, il existe $R_1 \tilde{\cup} R_2 \in R$ et le pushout

$$\begin{array}{ccccc}
 F_2Z & \longrightarrow & F_2Z + F_2Z_1 & \xrightarrow{u_{R_1}} & F_1R_1 \\
 \downarrow & & & & \downarrow \omega_1 \\
 F_2Z_2 + F_2\vartheta Z & & & & \\
 \downarrow u_{R_2} & & & & \\
 F_1R_2 & \xrightarrow{\omega_2} & & & F_1(R_1 \tilde{\cup} R_2)
 \end{array}$$

tels que l'on ait

$$\partial(R_1 \tilde{\cup} R_2) = Z_1 + Z_2 \text{ et } u_{R_1 \tilde{\cup} R_2} = \rho_1 \cup \rho_2,$$

ρ_i (pour $i=1,2$) étant le composé

$$F_2Z_i \longrightarrow F_2\partial R_i \longrightarrow F_1R_i \xrightarrow{\omega_i} F_1(R_1 \tilde{\cup} R_2).$$

Si $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, on notera \mathbf{R}/X la famille des couples (R, f) où $f: F_1R \rightarrow X$ est un \mathcal{C} -morphisme. De façon analogue, on définit l'ensemble \mathbf{Z}/X .

2. THEOREME. Soit $\mathbf{M} = (\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \partial, F, u, \mathcal{C})$ une catégorie de modèles pour une théorie de prébordisme absolu, et soit $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. Alors avec les ensembles \mathbf{R}/X et \mathbf{Z}/X on peut construire de façon naturelle un monoïde homologique \mathbf{M}/X tel que tout \mathcal{C} -morphisme $h: X \rightarrow Y$ définisse un morphisme de monoïdes homologiques $h_*: \mathbf{M}/X \rightarrow \mathbf{M}/Y$. Et $\mathbf{M}/$ définit un foncteur covariant sur \mathcal{C} à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens.

On utilisera la notation $\mathbf{M}/X = \Omega^{\mathbf{M}}(X)$.

PROOF. Il suffit de considérer les définitions suivantes:

$$\begin{aligned}
 \vartheta(Z, f) &= (\vartheta Z, f), & (Z_1, f_1) + (Z_2, f_2) &= (Z_1 + Z_2, f_1 \cup f_2), \\
 \partial(R, g) &= (\partial R, g \cdot u_R), & h_*[Z, f] &= [Z, h \cdot f].
 \end{aligned}$$

3. REMARQUES. La catégorie des espaces topologiques peut être considérée comme une catégorie admissible pour une théorie de prébordisme de la façon suivante: Ses objets sont les classes d'équivalence d'espaces topologiques pour la relation d'homéomorphisme, et ses morphismes sont les classes d'applications continues pour la relation suivante:

$f: X \rightarrow Y$ et $f': X' \rightarrow Y'$ sont dans la même classe s'il existe des homéomorphismes $h: X \rightarrow X'$ et $h': Y \rightarrow Y'$ tels que $h' \cdot f = f' \cdot h$.

On peut faire des considérations analogues pour les catégories usuelles.

3. PRÉBORDISME RELATIF.

1. **DEFINITIONS.** Un *pseudocylindre sur un \mathbf{C} -morphisme $f: X \rightarrow Y$* est la donnée d'un pseudocylindre $\{v_0, v_1; X \tilde{\times} I\}$ sur X , d'un pseudocylindre $\{w_0, w_1; Y \tilde{\times} I\}$ sur Y et d'un \mathbf{C} -morphisme $f \tilde{\times} I: X \tilde{\times} I \rightarrow Y \tilde{\times} I$, de sorte que l'on ait:

- (a) $w_i \cdot f = (f \tilde{\times} I) \cdot v_i$ ($i=1,2$).
- (b) Etant donné le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 g \downarrow & & \downarrow h \\
 A & \xrightarrow{k} & B
 \end{array}$$

il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X \tilde{\times} I & \xrightarrow{f \tilde{\times} I} & Y \tilde{\times} I \\
 \tilde{g} \downarrow & & \downarrow \tilde{h} \\
 A & \xrightarrow{k} & B
 \end{array}$$

où \tilde{g} et \tilde{h} sont des relèvements de g et h respectivement.

Une *catégorie de modèles pour une théorie de prébordisme relatif sur \mathbf{C}* est la donnée de $\mathbf{M} = (\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \partial, F, u, \mathbf{C})$, où:

- (1) \mathbf{C} est une catégorie admissible pour une catégorie de prébordisme absolu.
- (2) \mathbf{R} et \mathbf{Z} sont des monoïdes involutifs.
- (3) $\partial: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$ est un morphisme tel que $\partial \vartheta = \vartheta \partial$.
- (4) $F = (F_1, F_2)$, où $F_1: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{O}(\mathbf{C})$ et $F_2: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{O}(\mathbf{C})$ sont des fonctions additives telles que $F_i \cdot \vartheta = F_j$ ($i=1,2$).
- (5) $u = \{u_{\mathbf{R}}; \mathbf{R} \in \mathbf{R}\}$ est une famille de \mathbf{C} -morphisms

$$u_{\mathbf{R}}: F_2 \partial \mathbf{R} \rightarrow F_1 \mathbf{R} \text{ tels que } u_{\mathbf{R} + \mathbf{R}'} = u_{\mathbf{R}} + u_{\mathbf{R}'} \text{ et } u_{\vartheta \mathbf{R}} = u_{\mathbf{R}}.$$

- (6) Pour chaque $\mathbf{R} \in \mathbf{R}$, il existe $\mathbf{R} \tilde{\times} I, \partial \mathbf{R} \tilde{\times} I \in \mathbf{R}$ tels que

$$i) \quad \partial(\partial \mathbf{R} \tilde{\times} I) = \partial \mathbf{R} + \vartheta \partial \mathbf{R} \text{ et } u_{\partial \mathbf{R} \tilde{\times} I} = v_0 \cup v_1.$$

ii) Il existe un pseudocylindre sur u_R ,

$$u_{R \times I}: F_1(\partial R \times I) \longrightarrow F_1(R \times I).$$

iii) Il existe le pushout $(F_2\partial(R \times I); I_1, I_2)$ du diagramme

$$F_1(R + \partial R) \xleftarrow{u_R + u_R} F_2(\partial R + \partial \partial R) \xrightarrow{v_0 \cup v_1} F_1(\partial R \times I)$$

et l'on a

$$u_{R \times I} = (w_0 \cup w_1) \cup u_{R \times I}.$$

(7) Soit $\{R, R_0, R_1, \hat{R}, R^*, R'_0, R'_1, R', \hat{R}'\} \subset \mathbf{R}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

i) $R_1 = \hat{R} + R^*$, $R'_1 = \hat{R}' + \partial R^*$. $F_2\partial R_1 = F_2\partial R_0$, $F_2\partial R'_1 = F_2\partial R'_0$.

ii) Il existe des pushouts

$$\begin{array}{ccc} F_2\partial R_0 & \xrightarrow{u_{R_1}} & F_1(\hat{R} + R^*) \\ \downarrow u_{R_0} & & \downarrow t_1 \\ F_1R_0 & \xrightarrow{t_0} & F_2\partial R \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F_2\partial R'_0 & \xrightarrow{u_{R'_1}} & F_1(\hat{R}' + \partial R^*) \\ \downarrow u_{R'_0} & & \downarrow t'_1 \\ F_1R'_0 & \xrightarrow{t'_0} & F_2\partial R' \end{array}$$

Alors il existe $R \tilde{\cup} R'$ et $R_0 \tilde{\cup} R'_0$, de sorte que l'on vérifie:

(a) Il existe un pushout

$$\begin{array}{ccc} F_2\partial R^* & \xrightarrow{j} & F_2\partial(\hat{R} + R^*) & \xrightarrow{u_{R_0}} & F_1R_1 \\ \downarrow j' & & & & \downarrow l \\ F_2(\hat{R}' + \partial R^*) & & & & \\ \downarrow u_{R'_0} & & & & \\ F_1R'_0 & \xrightarrow{l'} & & & F_1(R_0 \tilde{\cup} R'_0) \end{array}$$

et l'on a

$$\partial(R_0 \tilde{\cup} R'_0) = \partial \hat{R} + \partial \hat{R}' \text{ et } u_{R_0 \tilde{\cup} R'_0} = \rho_1 \cup \rho_2,$$

ρ_1 et ρ_2 étant les composés

$$\begin{array}{l} \rho_1: F_2\partial \hat{R} \xrightarrow{n} F_2\partial(\hat{R} + R^*) = F_2\partial R \xrightarrow{u_{R_0}} F_1R_0 \xrightarrow{l} F_1(R_0 \tilde{\cup} R'_0), \\ \rho_2: F_2\partial \hat{R}' \xrightarrow{n'} F_2\partial(\hat{R}' + \partial R^*) = F_2\partial R'_0 \xrightarrow{u_{R'_0}} F_1R'_0 \xrightarrow{l'} F_1(R_0 \tilde{\cup} R'_0). \end{array}$$

(b) Il existe des pushouts

$$\begin{array}{ccc}
 F_2\partial(R_0 \tilde{U}R'_0) & \xrightarrow{u_{R_0 \cup R'_0}} & F_1(R_0 \tilde{U}R'_0) \\
 \begin{array}{c} u_{\hat{R} + \hat{R}'} = \\ u_{\hat{R}} + u_{\hat{R}'} \end{array} \downarrow & & \downarrow r \\
 F_1(\hat{R} + \hat{R}') & \xrightarrow{r'} & F_2\partial(R \tilde{U}R')
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 F_1 R^* & \xrightarrow{j_1} & F_1(\hat{R} + R^*) & \xrightarrow{t_1} & F_2\partial R & \xrightarrow{u_R} & F_1 R \\
 \downarrow j_1 & & & & & & \downarrow m \\
 F_1(\hat{R}' + \vartheta R^*) & & & & & & \\
 \downarrow t'_1 & & & & & & \\
 F_2\partial R' & \xrightarrow{u_{R'}} & F_1 R' & \xrightarrow{m'} & F_1(R \tilde{U}R') & & \\
 & & & & \downarrow & &
 \end{array}$$

et $u_{R \tilde{U}R'} = (g_0 \cup g'_0) \cup (\hat{h} \cup \hat{h}')$, avec

$$\begin{array}{l}
 g_0: F_1 R_0 \xrightarrow{t_0} F_2\partial R \xrightarrow{u_R} F_1 R \xrightarrow{m} F_1(R \tilde{U}R'), \\
 g'_0: F_1 R'_0 \xrightarrow{t'_0} F_2\partial R' \xrightarrow{u_{R'}} F_1 R' \xrightarrow{m'} F_1(R \tilde{U}R'), \\
 \hat{h}: F_1 \hat{R} \xrightarrow{s} F_1(\hat{R} + R^*) \xrightarrow{t_1} F_2\partial R \xrightarrow{u_R} F_1 R \xrightarrow{m} F_1(R \tilde{U}R'), \\
 \hat{h}': F_1 \hat{R}' \xrightarrow{s'} F_1(\hat{R}' + R^*) \xrightarrow{t'_1} F_2\partial R' \xrightarrow{u_{R'}} F_1 R' \xrightarrow{m'} F_1(R \tilde{U}R').
 \end{array}$$

2. NOTATIONS. Soit $k: A \rightarrow X$ un \mathcal{C} -morphisme.

On désignera par $\mathcal{Z}/(X, k, A)$ l'ensemble dont les éléments sont les $(R, f; \partial R, \partial f)$, où $R \in \mathcal{R}$, $f: F_1 R \rightarrow X$ et $\partial f: F_2\partial R \rightarrow A$ sont des \mathcal{C} -morphisms et l'on a $k \cdot \partial f = f \cdot u_R$.

On notera $\mathcal{R}/(X, k, A)$ l'ensemble formé par les éléments $(R, f; R_0, f_0, R_1)$, où $\{R, R_0, R_1\} \subset \mathcal{R}$, $f: F_1 R \rightarrow X$ et $f_0: F_1 R_0 \rightarrow A$ sont des \mathcal{C} -morphisms, $F_2\partial R_0 = F_2\partial R_1$, et il existe le pushout

$$(1) \quad \begin{array}{ccc}
 F_2\partial R_0 & \xrightarrow{u_{R_1}} & F_1 R_1 \\
 \downarrow u_{R_0} & & \downarrow t_1 \\
 F_1 R_0 & \xrightarrow{t_0} & F_2\partial R
 \end{array}$$

et le diagramme ci-dessous est commutatif

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} F_1 R_0 & \xrightarrow{t_0} & F_2 \partial R & \xrightarrow{u_R} & F_1 R \\ f_0 \downarrow & & & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{k} & & & X \end{array}$$

3. THEOREME. Si $M = (R, Z, \partial, F, u, C)$ est une catégorie de modèles pour une théorie de prébordisme relative et si $k: A \rightarrow X$ est un C -morphisme. les ensembles $R/(X, k, A)$ et $Z/(X, k, A)$ admettent une structure naturelle de monoïde homologique qui sera notée par $M/(X, k, A)$.

DEMONSTRATION. (1) L'application définie par

$$\vartheta(R, f; \partial R, \partial f) = (\vartheta R, f; \partial \vartheta R, \partial f)$$

est involutive. Etant donné $(R, f; \partial R, \partial f)$ et $(R', f'; \partial R', \partial f')$ on définit

$$(R, f; \partial R, \partial f) + (R', f'; \partial R', \partial f') = (R + R', f \cup f'; \partial R + \partial R', \partial f \cup \partial f').$$

De ces définitions on déduit que $Z/(X, k, A)$ est un monoïde involutif.

(2) Etant donné $(R, f; R_0, f_0, R_1) \in R/(X, k, A)$, soit f_1 le composé

$$F_1 R_1 \xrightarrow{t_1} F_2 \partial R \xrightarrow{u_R} F_1 R \xrightarrow{f} X.$$

D'après la commutativité des diagrammes (1) et (2), on peut prendre

$$\partial(R, f; R_0, f_0, R_1) = (R_1, f_1; \partial R_1, f_0 \cup u_{R_0}).$$

Montrons que les axiomes 3a) à 3d) de 1.1 sont satisfaits.

3a) Etant donné $(R, f; R_0, f_0, R_1)$ et $(R', f'; R'_0, f'_0, R'_1)$, on définit

$$(R, f; R_0, f_0, R_1) \tilde{+} (R', f'; R'_0, f'_0, R'_1) = (R + R', f \cup f'; R_0 + R'_0, f_0 \cup f'_0, R_1 + R'_1).$$

3b) Pour chaque $(R, f; R_0, f_0, R_1)$ on a évidemment

$$\tilde{\vartheta}(R, f; R_0, f_0, R_1) = (\vartheta R, f; \vartheta R_0, f_0, \vartheta R_1) \in R/(X, k, A)$$

et

$$\partial \tilde{\vartheta}(R, f; R_0, f_0, R_1) = \vartheta \partial(R, f; R_0, f_0, R_1).$$

3c) Soit $(R, f; \partial R, \partial f) \in Z/(X, k, A)$. D'après 3.1.6 iii), il existe un pushout

$$\begin{array}{ccc}
 F_2\partial R + F_2\vartheta\partial R & \xrightarrow{v_0 \cup v_1} & F_1(\partial R \tilde{\times} I) \\
 u_R + u_R \downarrow & & \downarrow I_1 \\
 F_1R + F_1\vartheta R & \xrightarrow{I_0} & F_2\partial(R \tilde{\times} I)
 \end{array}$$

et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 F_1(\partial R \tilde{\times} I) & \xrightarrow{I_1} & F_2\partial(R \tilde{\times} I) & \xrightarrow{u_{R \tilde{\times} I}} & F_1(R \tilde{\times} I) \\
 (\partial f) \sim \downarrow & & \searrow^{u_{R \tilde{\times} I}} & & \downarrow \tilde{f} \\
 A & \xrightarrow{k} & & & X
 \end{array}$$

On a donc $(R \tilde{\times} I, \tilde{f}; \partial R \tilde{\times} I, \tilde{f}_0, R + \vartheta R) \in \mathcal{R}(X, k, A)$.

3d) Soit $(R, f; R_0, f_0, R_1)$ et $(R', f'; R'_0, f'_0, R'_1)$ tels que

$$\begin{aligned}
 \partial(R, f; R_0, f_0, R_1) &= (R_1, f_1; \partial R_1, f_0 \cdot u_{R_0}) \\
 &= (\hat{R}, \hat{f}; \partial \hat{R}, \partial \hat{f}) + (R^*, f^*; \partial R^*, \partial f^*), \\
 \partial(R', f'; R'_0, f'_0, R'_1) &= (R'_1, f'_1; \partial R'_1, f'_0 \cdot u_{R'_0}) \\
 &= (\hat{R}', \hat{f}'; \partial \hat{R}', \partial \hat{f}') + \vartheta(R^*, f^*; \partial R^*, \partial f^*),
 \end{aligned}$$

f_1 et f'_1 étant les composés

$$\begin{array}{ccccc}
 F_1 R_1 & \xrightarrow{t_1} & F_2 \partial R & \xrightarrow{u_R} & F_2 R & \xrightarrow{f} & X, \\
 F_1 R'_1 & \xrightarrow{t'_1} & F_2 \partial R' & \xrightarrow{u_{R'}} & F_2 R' & \xrightarrow{f'} & X.
 \end{array}$$

D'autre part, on déduit de l'hypothèse les égalités

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \hat{R} + R^*, \quad f_1 = \hat{f} \cup f^*, \quad f_0 \cdot u_{R_0} = \partial \hat{f} \cup \partial f^*, \\
 R'_1 &= \hat{R}' + \vartheta R^*, \quad f'_1 = \hat{f}' \cup f^*, \quad f'_0 \cdot u_{R'_0} = \partial \hat{f}' \cup \partial f^*.
 \end{aligned}$$

De plus, il existe des pushouts:

$$\begin{array}{ccc}
 F_2\partial R_0 & \xrightarrow{u_{R_1}} & F_1 R_1 \\
 u_{R_0} \downarrow & & \downarrow t_1 \\
 F_1 R_0 & \xrightarrow{t_0} & F_2\partial R
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 F_2\partial R'_0 & \xrightarrow{u_{R'_1}} & F_1 R'_1 \\
 u_{R'_0} \downarrow & & \downarrow t'_1 \\
 F_1 R'_0 & \xrightarrow{t'_0} & F_2\partial R'
 \end{array}$$

et les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
 F_1 R_0 \xrightarrow{t_0} F_2 \partial R \xrightarrow{u_R} F_1 R & & F_1 R'_0 \xrightarrow{t'_0} F_2 \partial R' \xrightarrow{u_{R'}} F_1 R' \\
 \downarrow f_0 & & \downarrow f'_0 \\
 A & \xrightarrow{k} & X
 \end{array}$$

Alors, il existe $R\tilde{U}R'$ et $R_0\tilde{U}R'_0$ vérifiant l'axiome 3d). La commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 F_1 R^* & \xrightarrow{j_1} & F_2(\hat{R}+R^*) & \xrightarrow{t_1} & F_2 \partial R & \xrightarrow{u_R} & F_1 R \\
 \downarrow j'_1 & & \searrow f^* & & \searrow f_1 = \hat{f} \cup f^* & & \searrow f \\
 F_1(\hat{R}' + \partial R^*) & & & & & & \\
 \downarrow t'_1 & & \searrow f'_1 = \hat{f}' \cup f^* & & & & \\
 F_2 \partial R' & & & & & & \\
 \downarrow u_{R'} & & & & & & \\
 F_1 R' & & & & & & \\
 & & \nearrow f' & & \nearrow f & & \\
 & & X & & & &
 \end{array}$$

entraîne l'existence de $f \cup f' : F_1(R\tilde{U}R') \rightarrow X$. De façon analogue on obtient $f_0 \cup f'_0 : F_1(R_0\tilde{U}R'_0) \rightarrow A$.

Puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 F_1(R_0\tilde{U}R'_0) & \xrightarrow{r} & F_2\partial(R\tilde{U}R') \xrightarrow{u_{R\tilde{U}R'}} F_1(R\tilde{U}R') \\
 \downarrow f_0 \cup f'_0 & & \searrow g_0 \cup g'_0 \\
 A & \xrightarrow{k} & X \\
 & & \downarrow f \cup f'
 \end{array}$$

est commutatif, on peut considérer

$$(R\tilde{U}R', f \cup f' : R_0\tilde{U}R'_0, f_0 \cup f'_0, \hat{R} + \hat{R}') \in \mathbf{R}/(X, k, A).$$

Etant donné une catégorie \mathbf{C} , on désignera par $F\mathbf{C}$ la catégorie dont les objets sont les morphismes de \mathbf{C} et dont les morphismes sont

$$(g, g') : (A \xrightarrow{k} X) \longrightarrow (A' \xrightarrow{k'} X')$$

g_1 et g_2 étant des \mathbf{C} -morphisms tels que $k' \cdot g_1 = g_2 \cdot k$.

4. PROPOSITION. *Chaque morphisme*

$$(g_1, g_2): (A \longrightarrow X) \longrightarrow (A' \longrightarrow X')$$

induit un morphisme $(g_1, g_2)_: \mathbf{M}/(X, k, A) \longrightarrow \mathbf{M}/(X', k', A')$.*

DEMONSTRATION. Etant donné $(R, f; \partial R, \partial f) \in \mathbf{Z}/(X, k, A)$, il suffit de considérer

$$(g_1, g_2)_*(R, f; \partial R, \partial f) = (R, g_2 \cdot f; \partial R, g_1 \cdot \partial f).$$

5. COROLLAIRE. *Toute catégorie de modèles \mathbf{M} pour une théorie de prébordisme relatif sur \mathbf{C} définit un foncteur covariant entre \mathbf{C} et la catégorie des groupes abéliens. Les groupes*

$$\Omega^{\mathbf{M}/(X, k, A)} = \Omega^{\mathbf{M}}(X, k, A).$$

seront appelés groupes de \mathbf{M} -bordisme de (X, k, A) .

4. PRÉBORDISME.

1. DEFINITION. *Une catégorie de modèles pour une théorie de prébordisme sur \mathbf{C} est la donnée de $\mathbf{M} = (\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \partial, F, u, \mathbf{C})$, où:*

(1) \mathbf{C} est une catégorie admissible avec objet vide \emptyset ; c'est-à-dire \emptyset est un objet initial de \mathbf{C} , pour chaque $X \neq \emptyset$ l'ensemble des \mathbf{C} -morphisms $\mathbf{C}(X, \emptyset)$ est vide, et si $X + Y = X$, alors $Y = \emptyset$.

(2) \mathbf{M} est une catégorie de modèles pour une théorie de prébordisme absolu et pour une théorie de prébordisme relatif (remarquons qu'une catégorie de prébordisme relatif ne vérifie pas en général les axiomes 2.1.7 et 2.1.8).

(3) \mathbf{R} et \mathbf{Z} sont des monoïdes involutifs.

(4) \mathbf{Z} est un sous-monoïde involutif de \mathbf{R} , et l'on a:

i) $\mathbf{Z} = \{R \in \mathbf{R}; \partial R = \emptyset\}$;

ii) $F_1 \mathbf{Z} = F_2 \mathbf{Z}$.

(5) Si $F_2 \partial R = F_1 \mathbf{Z} + F_1 \mathbf{Z}'$ avec $\mathbf{Z}, \mathbf{Z}' \in \mathbf{Z}$, alors $\partial R = \vartheta_1 \mathbf{Z} + \vartheta_2 \mathbf{Z}'$, avec $\vartheta_1 \mathbf{Z} \in \{\mathbf{Z}, \vartheta \mathbf{Z}\}$ et $\vartheta_2 \mathbf{Z}' \in \{\mathbf{Z}', \vartheta \mathbf{Z}'\}$.

2. THEOREME. *Dans les conditions de la définition antérieure, on a:*

a) *Il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{M}/(\mathbf{X}, k, \mathbf{A}) & \\
 \Delta \swarrow & & \nwarrow j \\
 \mathbf{M}/\mathbf{A} & \xrightarrow{k_{\#}} & \mathbf{M}/\mathbf{X}
 \end{array}$$

où $k_{\#}$ est le morphisme induit par k .

b) Si l'on passe aux groupes d'homologie on obtient le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 & \Omega^{\mathbf{M}}(\mathbf{X}, k, \mathbf{A}) & \\
 \Delta_* \swarrow & & \nwarrow j_* \\
 \Omega^{\mathbf{M}}(\mathbf{A}) & \xrightarrow{k_*} & \Omega^{\mathbf{M}}(\mathbf{X})
 \end{array}$$

DEMONSTRATION. a) Soit $j: \mathbf{Z}/\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Z}/(\mathbf{X}, k, \mathbf{A})$ l'application définie par $j(\mathbf{Z}, g) = (\mathbf{Z}, g; \emptyset, \emptyset)$. Définissons alors $\Delta(\mathbf{R}, f; \partial\mathbf{R}, \partial f) = (\partial\mathbf{R}, \partial f)$. D'après 1.5, Δ est un morphisme de monoïdes homologiques et il est clair que (1) est commutatif.

b) (1) $j_* k_* = 0$: Soit $[\mathbf{Z}, g] \in \Omega^{\mathbf{M}}(\mathbf{A})$; alors,

$$j_* k_* [\mathbf{Z}, g] = [\mathbf{Z}, k \cdot g; \emptyset, \emptyset].$$

Puisque $F_1(\mathbf{Z} \tilde{\times} \mathbf{I})$ est un pseudocylindre sur $F_2 \mathbf{Z}$, il existe

$$(k \cdot g) \sim: F_1(\mathbf{Z} \tilde{\times} \mathbf{I}) \rightarrow \mathbf{X} \text{ tel que } (k \cdot g) \sim \cdot v_0 = k \cdot g = (k \cdot g) \sim \cdot v_1.$$

Alors, $(\mathbf{Z} \tilde{\times} \mathbf{I}, (k \cdot g) \sim; \vartheta \mathbf{Z}, g, \mathbf{Z}) \in \mathbf{R}/(\mathbf{X}, \mathbf{A}, g)$ et l'on a

$$\partial(\mathbf{Z} \tilde{\times} \mathbf{I}, (k \cdot g) \sim; \vartheta \mathbf{Z}, g, \mathbf{Z}) = (\mathbf{Z}, k \cdot g; \emptyset, \emptyset).$$

(2) $\Delta_* j_* = 0$: Soit $[\mathbf{Z}, f] \in \Omega^{\mathbf{M}}(\mathbf{X})$; alors

$$\Delta_* j_* [\mathbf{Z}, f] = \Delta_* [\mathbf{Z}, f; \emptyset, \emptyset] = [\emptyset, \emptyset] = 0.$$

(3) $k_* \Delta_* = 0$: Soit $[\mathbf{R}, f; \partial\mathbf{R}, \partial f] \in \Omega^{\mathbf{M}}(\mathbf{X}, k, \mathbf{A})$; on a:

$$k_* \Delta_* [\mathbf{R}, f; \partial\mathbf{R}, \partial f] = k_* [\partial\mathbf{R}, \partial f] = [\partial\mathbf{R}, k \cdot \partial f] = 0.$$

(4) $\text{Ker} \Delta_* \subset \text{Im} j_*$: Soit $[\mathbf{R}, f; \partial\mathbf{R}, \partial f] \in \Omega^{\mathbf{M}}(\mathbf{X}, k, \mathbf{A})$ tel que

$$\Delta_* [\mathbf{R}, f; \partial\mathbf{R}, \partial f] = [\partial\mathbf{R}, \partial f] = 0.$$

Alors il existe $(\mathbf{R}_0, g_0) \in \mathbf{R}/\mathbf{A}$ tel que

$$\partial(\mathbf{R}_0, g_0) = (\partial\mathbf{R}_0, g_0 \cdot u_{\mathbf{R}_0}) = (\partial\mathbf{R}, \partial f).$$

D'après 2.1.8 il existe $\mathbf{R}' = \mathbf{R}_0 \tilde{\cup} \vartheta \mathbf{R} \in \mathbf{R}$ et $(\mathbf{R}', k \cdot g_0 \cup f) \in \mathbf{Z}/\mathbf{X}$. Montrons que $j_* [\mathbf{R}', k \cdot g_0 \cup f] = [\mathbf{R}, f; \partial\mathbf{R}, \partial f]$. D'après 3.1.6, il existe $\mathbf{R}' \tilde{\times} \mathbf{I} \in \mathbf{R}$, car $F_1(\mathbf{R}' \tilde{\times} \mathbf{I})$ est un pseudocylindre sur $F_2 \mathbf{R}'$. Si l'on considère le relèvement $(k \cdot g_0 \cup f) \sim: F_1(\mathbf{R}' \tilde{\times} \mathbf{I}) \rightarrow \mathbf{X}$, il n'est pas dif-

ficile de vérifier que

$$(R' \tilde{\times} I, (k \cdot g_0 \cup f) \sim : R_0, g_0, \vartheta R + R') \in \mathbf{R}/(X, k, A).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \partial(R' \tilde{\times} I, (k \cdot g_0 \cup f) \sim : R_0, g_0, \vartheta R + R') = \\ (\vartheta R + R', (k \cdot g_0 \cup f) \sim_1 : \partial \vartheta R, \partial(k \cdot g_0 \cup f) \sim_1). \end{aligned}$$

Puisque

$$(k \cdot g_0 \cup f) \sim_1 = f \cup (k \cdot g_0 \cup f) \text{ et } \partial(k \cdot g_0 \cup f) \sim_1 = g_0 \cdot u_R = \partial f,$$

on obtient le résultat.

(5) $\text{Ker } j_* \subset \text{Im } k_*$: Soit $[Z, g] \in \Omega^M(X)$ tel que

$$j_*[Z, g] = [Z, g; \emptyset, \emptyset] = 0.$$

Alors il existe $(R, f; R_0, f_0, R_1) \in \mathbf{R}/(X, k, A)$ tel que $(R_1, f_1) = (Z, g)$. Comme $(R_0, f_0) \in \mathbf{Z}/A$ et $F_2 \partial R = F_1 R_0 + F_1 R_1$, il vient donc

$$\partial R = \vartheta_1 R_0 + \vartheta_2 R_1, \text{ avec } \vartheta_1 R_0 \in \{R_0, \vartheta R_0\} \text{ et } \vartheta_2 R_1 \in \{R_1, \vartheta R_1\}.$$

En particulier, il existe $R' \in \mathbf{R}$ tel que $F_1 R' = F_1 R$ et $\partial R' = R'_0 + R_1$ avec $R'_0 \in \{R_0, \vartheta R_0\}$. De plus, pour $(R', f) \in \mathbf{R}/X$ on a $\partial(R', f) = (R'_0, k \cdot f_0) + (Z, g)$, d'où l'on déduit $k_*[\vartheta R'_0, f'_0] = [Z, g]$.

(6) $\text{Ker } k_* \subset \text{Im } \delta_*$: Soit

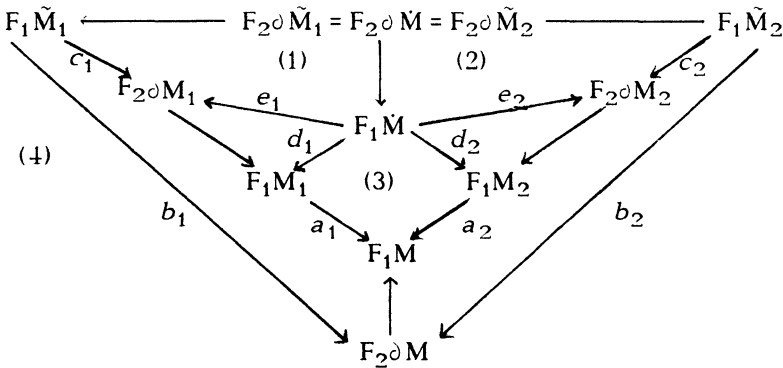
$$[Z, g] \in \Omega^M(A) \text{ tel que } k_*[Z, g] = [Z, k \cdot g] = 0.$$

Il existe $(R, f) \in \mathbf{R}/X$ tel que $\partial(R, f) = (R, f \cdot u_R) = (Z, k \cdot g)$. D'où

$$(R, f; Z, g) \in \mathbf{Z}/(X, k, A) \text{ et } \Delta_*[R, f; Z, g] = [Z, g].$$

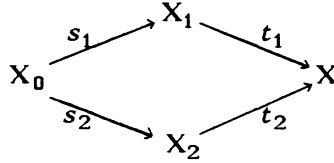
5. EXCISION.

1. DEFINITIONS. Soit $\mathbf{M} = (\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \partial, F, u, \mathbf{C})$ une catégorie de modèles pour une théorie de prébordisme sur \mathbf{C} . Un *découpage* de $\mathbf{M} \in \mathbf{R}$ est un diagramme



tel que (1). (2). (3) et (4) sont des pushouts, (4) étant le diagramme extérieur.

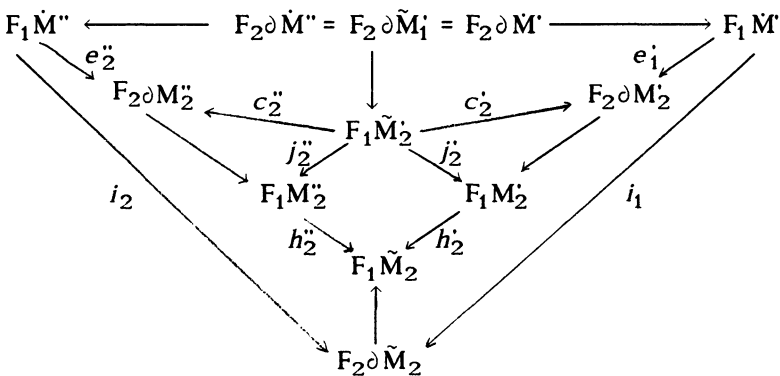
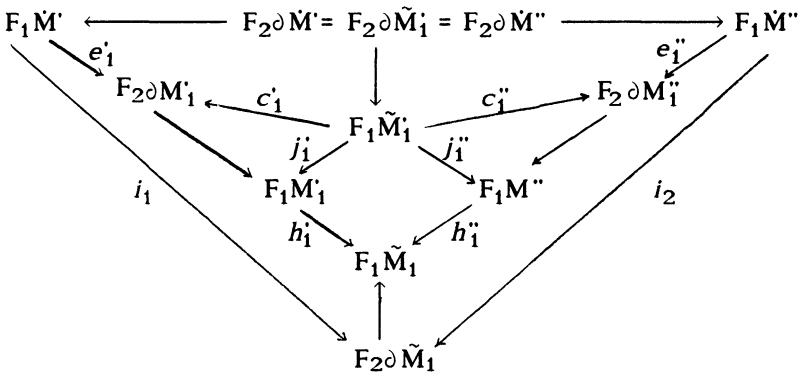
Une triade excisive est un diagramme dans \mathcal{C}



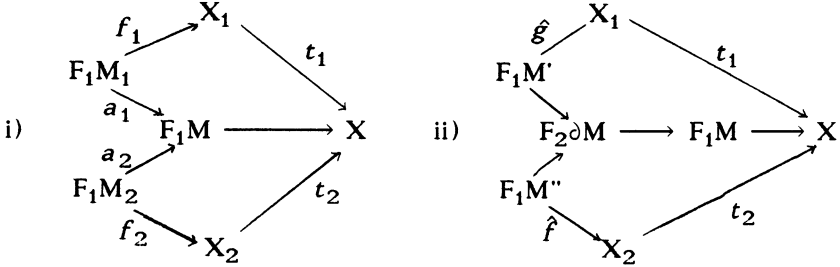
qui est en même temps un pushout et un pullback, t_1 et t_2 étant des monomorphismes, de sorte que pour chaque $(R, f: R_0, f_0, R_1) \in \mathcal{R}/(X, t_1, X_1)$ les conditions suivantes soient satisfaites:

(1) $R = M$, $R_0 = M'$ et $R_1 = M''$ admettent des découpages compatibles, c'est-à-dire, $F_1 \tilde{M}'_1 = F_1 \tilde{M}''_1$ et $F_1 \tilde{M}'_2 = F_1 \tilde{M}''_2$ (en particulier, on a $F_2 \partial \tilde{M}' = F_2 \partial \tilde{M}''$ et $F_2 \partial M' = F_2 \partial M''$).

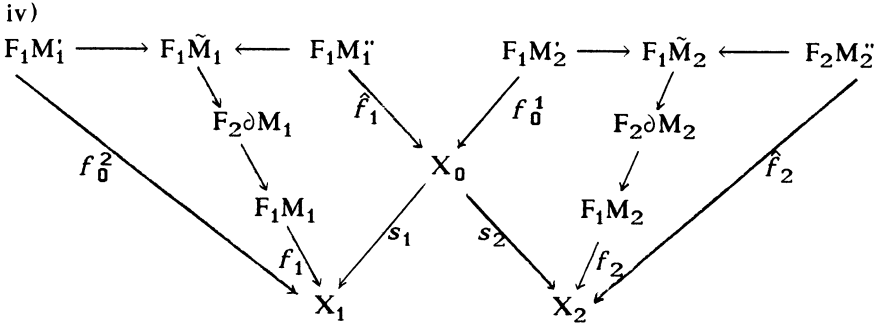
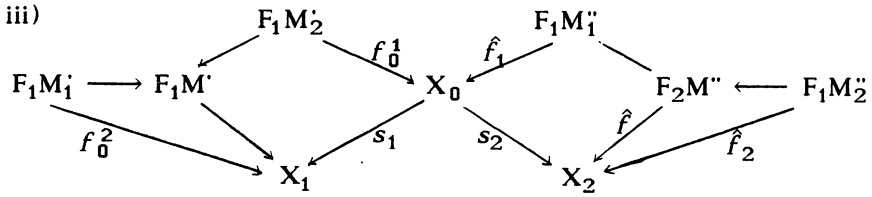
(2) Il existe les découpages de \tilde{M}_1 et \tilde{M}_2 indiqués dans les diagrammes suivants:



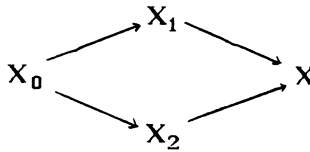
(3) Les diagrammes ci-dessous sont commutatifs:



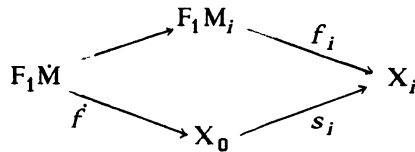
(Remarquons que $\hat{g} = f_0$ puisque t est un monomorphisme.)



Remarquons que, puisque le diagramme



est un pullback, il existe un morphisme $\hat{f}: F_1M \rightarrow X_0$ tel que



soit un diagramme commutatif ($i=1,2$).

2. THEOREME. Soit \mathbf{M} une catégorie pour une théorie de pré-bordisme sur \mathbf{C} . Pour chaque triade excisive $(X: X_2, X_1, X_0)$ le morphisme $\Psi: \Omega^{\mathbf{M}}(X_2, s_2, X_0) \rightarrow \Omega^{\mathbf{M}}(X, t_1, X_1)$ défini par

$$\Psi[R.f: \partial R, \partial f] = [R.t_2 \cdot f; \partial R.s_1, \partial f]$$

est un isomorphisme.

DEMONSTRATION. Il est immédiat de vérifier que Ψ est bien défini et que c'est un morphisme.

(1) Montrons que Ψ est surjectif: Etant donné $(R.f: \partial R, \partial f) \in \mathbf{Z}/(X, t_1, X_1)$, on voit que l'on peut considérer $(R.f: \partial R, \partial f) \in \mathbf{R}/(X, t_1, X_1)$. Alors il existe des découpages de $R=M$ et $\partial R=M'$ satisfaisant aux conditions de la définition précédente. Il est facile de voir que $F_2 \partial M_2 = F_1 M_2 \cup F_1 M$, et qu'il existe $f_0^1 \cup \hat{f}: F_2 \partial M_2 \rightarrow X_0$.

Remarquons que $(M_2.f_2: \partial M_2, f_0^1 \cup \hat{f}) \in \mathbf{Z}/(X_2, s_2, X_0)$, et il faut démontrer que

$$\begin{aligned} \Psi[M_2.f_2: \partial M_2, f_0^1 \cup \hat{f}] &= [M_2.t_2 \cdot f_2; \partial M_2, s_1 \cdot (f_0^1 \cup \hat{f})] \\ &= [M.f; \partial M, \partial f] = [R.f; \partial R, \partial f]. \end{aligned}$$

Pour cela, il faut trouver $(\hat{R}, \hat{f}: \hat{R}_0, \hat{f}_0, \hat{R}_1) \in \mathbf{R}/(X, t_1, X_1)$ tel que $\partial(\hat{R}, \hat{f}: \hat{R}_0, \hat{f}_0, \hat{R}_1) = [M_2 + \vartheta R, t_2 \cdot f_2 \cup f; \partial(M_2 + \vartheta R), (s_1 \cdot f_0^1 \cup s_1 \cdot \hat{f}) \cup \partial f]$

D'après 3.1.6, il existe $M \tilde{\times} I$ et $(\partial M \tilde{\times} I)$ avec les propriétés indiquées là. Soit alors $\hat{R} = M \tilde{\times} I$ et $\hat{R}_1 = M_2 + \vartheta M$. Etant donné

$$R = \vartheta(\partial M \tilde{\times} I), R_0 = \vartheta \tilde{M}_2, R_1 = \partial M + \vartheta \tilde{M}_1, R' = M_1, R'_0 = \tilde{M}, R'_1 = \tilde{M}_1,$$

la condition 3.1.7 entraîne l'existence de $P = \vartheta(\partial M \tilde{\times} I) \tilde{\cup} M$ et de $P' = \tilde{M} \tilde{\cup} \vartheta M_2$ tels que $\partial P' = \emptyset$ et $F_2 \partial P = F_2 P'$. On définit donc $\hat{R}_0 = P$.

Par ailleurs, soit $\hat{f} = \tilde{f} \cdot \tilde{f}: F_1(M \tilde{\times} I) \rightarrow X$ étant le relèvement de f . Puisque t_1 est un monomorphisme, il est facile de voir qu'il existe $f_1 \cup (\partial f) \tilde{\cdot}: F_1 P \rightarrow X_1$. Donc l'on peut prendre $\hat{f}_0 = f_1 \cup (\partial f) \tilde{\cdot}$. On vérifie sans peine que $(M \tilde{\times} I, \tilde{f}: P, f_1 \cup (\partial f) \tilde{\cdot}, M_2 + \vartheta M)$ est l'élément cherché.

(2) Ψ est injective: Soit $(\hat{R}, \hat{f}: \partial \hat{R}, \partial \hat{f}) \in \mathbf{Z}/(X_2, s_2, X_0)$ tel que

$$\Psi[\hat{R}, \hat{f}: \partial \hat{R}, \partial \hat{f}] = [\hat{R}.t_2 \cdot \hat{f}; \partial \hat{R}.s_1, \partial \hat{f}] = 0.$$

Alors il existe $(R.f; R_0, f_0, R_1) \in \mathbf{R}/(X, t_1, X_1)$ avec

$$\partial(R.f; R_0, f_0, R_1) = (R_1.f_1; \partial R_1, f_0 \cdot u_R) = (\hat{R}, t_2 \cdot \hat{f}; \partial \hat{R}, s_1 \cdot \partial \hat{f}).$$

Considérons les découpages de $R=M$, $R_0=M'$ et $R_1=M''$. En tenant compte du fait que t_2 est un monomorphisme, on montre

qu'il existe $\hat{f}: F_1 M'' \rightarrow X_2$. On a $(M_2, f_2; \hat{M}, \hat{f}, \tilde{M}_2) \in \mathbf{R}/(X_2, s_2, X_0)$ et $\partial(M_2, f_2; M, f_2, \tilde{M}_2) = (\tilde{M}_2, f_2 \cdot u_{M_2} \cdot c_2; \partial \tilde{M}_2, \hat{f} \cdot u_M)$.

Il suffit de vérifier que

$$\Psi[\hat{R}, \hat{f}; \partial \hat{R}, \partial \hat{f}] = [\tilde{M}_2, f_2 \cdot u_{M_2} \cdot c_2; \partial \tilde{M}_2, \hat{f} \cdot u_M].$$

Pour cela, il faut trouver $(R', f': R'_0, f'_0, R'_1)$ dont l'image par ∂ soit

$$(\tilde{M}_2 + \vartheta M'', f_2 \cdot u_{M_2} \cdot c_2 \cup \hat{f}: \partial(\tilde{M}_2 + \vartheta M''), \hat{f} \cdot u_{M \cup \partial \hat{f}}).$$

(a) Définition de R', R'_0, R'_1, f' et f'_0 : D'après 3.1.7, il existe $S = M'' \tilde{\cup} \vartheta M_2$ et $S' = \tilde{M}'_1 \tilde{\cup} \vartheta M'$ tels que $\partial S' = \emptyset$ et $\partial S = S'$. Soit $R' = S \tilde{\times} I$. Il est facile de vérifier que les conditions pour appliquer 3.1.7 sont satisfaites, et on obtient Q' et Q'' de sorte que

$$Q' = (S' \tilde{\times} I) \tilde{\cup} M_2, \quad Q'' = \vartheta \tilde{M}'_1 \tilde{\cup} M_2, \quad \partial Q'' = \partial S' = \emptyset.$$

Donc il existe

$$Q = Q' \tilde{\cup} M'_1 = (S \tilde{\times} I) \tilde{\cup} (M'_1 + M_2) \text{ tel que } F_2 \partial Q = F_2 \partial \tilde{M}_1 + F_1 Q''$$

et l'on peut définir $R'_0 = Q$ et $R'_1 = \tilde{M}_2 + \vartheta M''$.

D'autre part, et puisque s_1 est un monomorphisme, il existe $s_2 \cdot f'_0 \cup \hat{f}: F_1 S \rightarrow X_2$, et l'on peut considérer son relèvement f' . Des considérations analogues permettent d'obtenir une application

$$\alpha: F_1 S' = F_1 \tilde{M}'_1 \tilde{\cup} F_1 M' \longrightarrow X_0$$

et on voit aisément que $f'_0 \cup \alpha: F_1 Q' \rightarrow X_0$ est bien définie.

Comme s_2 est un monomorphisme, il existe $\beta: F_1 Q \rightarrow X_0$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & F_1 Q' & \\ & \downarrow & \searrow f'_0 \cup \alpha \\ F_1 M'_1 & \longrightarrow & F_1 Q \\ & \searrow \hat{f}_1 & \downarrow \beta \\ & & X_0 \end{array}$$

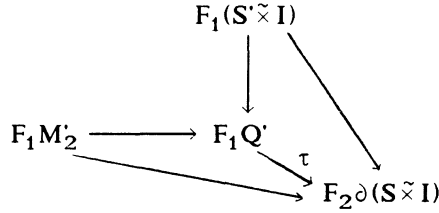
est commutatif. On définit alors $f'_0 = \beta$.

(b) Pour démontrer que $(S \tilde{\times} I, f': Q, \beta, \tilde{M}_2 + \vartheta M'') \in \mathbf{R}/(X_2, s_2, X_0)$, on utilise essentiellement qu'il existe un pushout

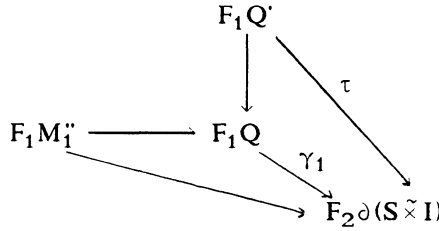
$$\begin{array}{ccc} F_2 Q & \xrightarrow{u} & F_1(M_2 + \vartheta M'') \\ u_Q \downarrow & & \downarrow \gamma_2 \\ F_1 Q & \xrightarrow{\gamma_1} & F_2 \partial(S \tilde{\times} I) \end{array}$$

On va donner une esquisse de la construction de ce carré:

b-1) Définition de γ_1 : Les définitions de S et S' et l'axiome 3.1.5 permettent d'obtenir un \mathbf{C} -morphisme $\tau: F_1 Q' \rightarrow F_2 \partial(S \tilde{\times} I)$ tel que le diagramme



est commutatif. A l'aide des propriétés des découpages et du diagramme ci-dessus, on obtient $\gamma_1: F_1 Q \rightarrow F_2 \partial(S \tilde{\times} I)$ tel que le diagramme suivant est commutatif:



b-2) Définition de γ_2 : En utilisant le découpage de M'' et la définition de S , il est immédiat de prouver l'existence de $\omega_1: F_1 \tilde{M}_2 \rightarrow F_2 \partial(S \tilde{\times} I)$. Si ω_2 est le composé

$$F_1 \vartheta M'' \longrightarrow F_1 \vartheta S \longrightarrow F_1(S + \vartheta S) \longrightarrow F_2 \partial(S \tilde{\times} I),$$

on prend $\gamma_2 = \omega_1 \circ \omega_2$.

(c) Il reste à montrer que

$$\begin{aligned}
 & \partial(S \tilde{\times} I, f': Q, \beta, \tilde{M}_2 + \vartheta M'') \\
 &= (\tilde{M}_2 + \vartheta M'', f_2 \cdot u_{M_2} \cdot c_2 \cup \hat{f}: \partial(\tilde{M}_2 + \vartheta M''), \hat{f} \cdot u_{\tilde{M}} \cup \partial \hat{f}).
 \end{aligned}$$

Pour cela, il suffit de remarquer que $f_2 \cdot u_{M_2} \cdot c_2 \cup \hat{f}$ coïncide avec le composé

$$F_1(\tilde{M}_2 + \vartheta M'') \xrightarrow{\gamma_2} F_1 \partial(S \tilde{\times} I) \longrightarrow F_1(S \tilde{\times} I) \xrightarrow{f'} X_2$$

et que $\hat{f} \cdot u_{\tilde{M}} \cup \partial \hat{f} = \beta \cdot u_Q$.

3. REMARQUE. Sous les conditions indiquées dans 5.1, on a essayé d'abstraire dans la catégorie base, c'est-à-dire dans les images par le foncteur d'oubli, les propriétés des décompositions déterminées dans une variété par les voisinages réguliers. Si l'on prend pour catégorie base celle des espaces topologiques, on

peut considérer la notion usuelle de triade excisive, ce qui permet d'axiomatiser d'une façon plus simple et directe la décomposition induite par un voisinage régulier relatif.

Notons enfin que la théorie de Quintero [12] peut être incluse dans notre axiomatique si l'on considère une version plus faible de l'axiome 5.1: dans chaque classe d'homologie il existe un modèle qui admet un découpage.

6. BORDISME HOMOTOPIQUE.

1. DEFINITIONS. Un *foncteur cylindre* dans une catégorie \mathbf{C} est la donnée de $\mathbf{I} = (\mathbf{I}, L, u_0, u_1)$, où:

1) $\mathbf{I}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ est un foncteur covariant. On usera la notation

$$\mathbf{I}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \times \mathbf{I} \text{ et } \mathbf{I}(f) = f \times \mathbf{I}.$$

2) $L: \mathbf{I} \rightarrow \text{id}_{\mathbf{C}}$ et $u_0, u_1: \text{id}_{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{I}$ sont des transformations naturelles telles que l'on ait $L \cdot u_0 = L \cdot u_1 = \text{id}$.

Une *catégorie homotopique* est la donnée de $(\mathbf{C}, \mathbf{I}, \varphi, \alpha, \beta)$, où:

- (i) \mathbf{I} est un foncteur cylindre défini dans la catégorie \mathbf{C} .
- (ii) φ est une équivalence naturelle avec $\varphi \cdot u_0 = u_1$ et $\varphi \cdot u_1 = u_0$.
- (iii) $\alpha, \beta: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}$ sont des transformations naturelles de sorte que $\alpha \cdot u_1 = u_1$, $\beta \cdot u_0 = u_0$ et pour chaque $\mathbf{X} \in \mathbf{O}(\mathbf{C})$ le diagramme ci-dessous est un pushout

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbf{X} \times \mathbf{I} \\
 & \nearrow^{u_0} & \searrow^{\alpha} \\
 \mathbf{X} & & \mathbf{X} \times \mathbf{I} \\
 & \searrow_{u_1} & \nearrow_{\beta} \\
 & & \mathbf{X} \times \mathbf{I}
 \end{array}$$

Si \mathbf{C} est une catégorie homotopique, on voit aisément qu'il en va de même pour la catégorie des flèches \mathbf{FC} .

Etant donné une catégorie homotopique \mathbf{C} , on dira que deux \mathbf{C} -morphisms $f, g: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ sont homotopes s'il existe un \mathbf{C} -morphisme $\mathbf{H}: \mathbf{X} \times \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Y}$ tel que l'on ait $\mathbf{H} \cdot u_0 = f$ et $\mathbf{H} \cdot u_1 = g$. Il est évident que la relation définie est d'équivalence.

Une catégorie de *préborderisme absolu homotopique* est la donnée de $\mathbf{M} = (\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \partial, \mathbf{F}, u, \mathbf{C})$, où:

\mathbf{M} satisfait aux conditions de la Définition 2.1, mais avec (7') au lieu de (7):

(7') Pour chaque $\mathbf{Z} \in \mathbf{Z}$ il existe $\mathbf{Z} \tilde{\times} \mathbf{I} \in \mathbf{R}$ tel que

$$\partial(Z \tilde{\times} I) = Z, F_1(Z \tilde{\times} I) = F_2Z \times I \text{ et } u_{Z \tilde{\times} I} = u_0 \cup u_1.$$

Il est facile de voir que, si $f, g: X \rightarrow Y$ sont des \mathbf{C} -morphisme homotopiques, alors $f_* = g_*: \Omega^M(X) \rightarrow \Omega^M(Y)$.

Avec les modifications évidentes, on peut donner la notion de catégorie de prébordisme relatif homotopique, et l'on obtient un résultat analogue.

2. REMARQUE. Nous omettons l'axiomatique pour un bordisme gradué, car les conditions qu'il faut imposer sont évidentes à partir des axiomes présentés dans les paragraphes précédents.

Lorsqu'on a défini le bordisme homotopique, on a demandé que pour chaque cycle $Z \in \mathbf{Z}$ le cylindre $F_2(Z) \times I$ doit posséder une \mathbf{M} -structure. Mais pour tenir compte de l'exemple donné dans [11], il suffit de remplacer (7') par:

(7'') Soit $Z \in \mathbf{Z}$ et soit $f_1, f_2: F_2Z \rightarrow X$ deux \mathbf{C} -morphisme homotopiques. Alors, (Z, f_1) et (Z, f_2) sont homologues.

Cependant, on a considéré que la modification (7'') ainsi que celle qui a été signalée dans 5.3 n'étaient pas essentielles car les exemples indiqués donnent lieu à des théories canoniquement isomorphes à des théories dont les modèles satisfont aux axiomes présentés dans ce travail.

7. REMARQUES FINALES.

On peut trouver dans la littérature (de façon à peu près explicite) les propriétés qui permettent de prouver que les théories de bordisme usuelles vérifient l'axiomatique présentée, si l'on considère la catégorie admissible définie dans 1.3, qui sera notée TOP. Plus exactement, si l'on prend pour \mathbf{R} et \mathbf{Z} l'une des classes de modèles indiqués dans l'exemple 1.2.c) (sauf les variétés topologiques), et pour $F: \mathbf{R} \rightarrow \text{TOP}$ la fonction naturelle d'oubli, on vérifie aisément que $(\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \partial, F, u, \text{TOP})$ est une catégorie de prébordisme relatif homotopique pour les modèles usuels de la Topologie polyédrale et différentielle, qui donne lieu aux théories d'homologie respectives (on peut trouver d'autres exemples liés à ces catégories dans le livre de Stong [16]). Dans tous ces cas, pour obtenir le découpage des modèles on peut utiliser les notions de voisinage régulier et de voisinage tubulaire.

D'autre part, il est possible d'obtenir de nouveaux exemples de catégories de prébordisme relatif homotopique (sur la

catégorie des CW-complexes) si l'on considère des modèles munis d'une notion adéquate de fibré et de transversalité sur les CW-complexes (par exemple, les H-modèles décrits dans [9]). La théorie d'homologie associée s'étend sur TOP en utilisant les CW-substituts.

Dans les exemples précédents, les différentes catégories de prébordisme relatif ont été définies sur la même catégorie base. Néanmoins, si l'on varie la catégorie base on obtient d'autres exemples qui satisfont à l'axiomatique exposée, et qui sont intéressants par leurs applications et par les renseignements qu'ils fournissent. Parmi eux citons le bordisme propre et le bordisme multivalent.

a) Bordisme propre: On prend pour catégorie base la catégorie admissible associée aux espaces topologiques et applications propres. Si l'on prend pour modèles les pseudovariétés (compactes ou non), il en résulte une interprétation géométrique de l'homologie de deuxième espèce sur les espaces localement compacts [7]. Actuellement on est en train d'étudier d'autres théories de bordisme sur la catégorie propre, qui sont liées à certains groupes d'homotopie propre (voir [3]).

b) Bordisme multivalent: On prend pour catégorie base les espaces topologiques et fonctions multivalentes dans le sens de [17]. Pour un développement détaillé de cette théorie, voir [14].

REFERENCES.

1. E. AKIN, Stiefel-Whitney homology classes and bordism, *Trans. A.M.S.* 205 (1975), 341-359.
2. S. BUONCRISTINO, C. ROURKE & B. SANDERSON, *A geometric approach to Homology Theory*. Lecture Notes Ser. 18, Cambridge Univ. Press, 1976.
3. Z. CERIN, On various relative proper homotopy groups, *Tsukuba J. Math.* 4-2 (1980), 177-202.
4. P.E. CONNER & E.E. FLOYD, *Differentiable periodic maps*, *Ergeb. Ser.* 33, Springer 1964.
5. E. DOMINGUEZ, Grupos de pseudobordismo, *Rev. Acad. Cienc. Zaragoza* 30 (1975), 5-16.
6. E. DOMINGUEZ, Axiomas para una teoria de bordismo singular, *Rev. Acad. Cienc. Madrid* 70 (1976), 575-582.
7. E. DOMINGUEZ, Bordisme infini, *Seminar on Foliations*, Jagiellonian University, Krakow (1983), 28-34.
8. H. HERRLICH & G.E. STRECKER, *Category Theory*, Allyn & Bacon 1973.

9. I. MADSEN & J. MILGRAM, *The classifying spaces for surgery and cobordism of manifolds*, Princeton Univ. Press 1979.
10. C. McCrory, Geometric homology operations, *Studies in Algebraic Topology* 5, Acad. Press (1979), 119-141.
11. A. QUINTERO. Un ejemplo de teoría de bordismo equivalente al PL-bordismo. *Rev. Acad. Cienc. Zaragoza* 38 (1983), 15-20.
12. A. QUINTERO. Un ejemplo de teoría de bordismo sin push-outs. *Actas X Jorn. Hispano-Lusas de Matemáticas*, Sec. Topol., Murcia (1985), 106-111.
13. A. QUINTERO, Algunos resultados sobre el bordismo de las variedades de homología. *Rev. Real Acad. Cienc. Madrid* 81 (1987), 73-85.
14. J. SANCHE. Bordismo multivaluado (En préparation).
15. L. SIEBENMANN. Topological manifolds, *Proc. I.C.M.* vol. 2, Gauthiers-Villars (1971), 133-163.
16. R. STONG. *Notes on cobordism theory*, Princeton Univ. Press 1968.
17. W. STROTHER. Continuous multivaluated functions. *Bol. Soc. Sao Paulo* 10 (1958), 87-110.
18. M. TAKAHASHI. The ordinary Z_2 -homology and singular bordism theories. *J. Math. Soc. Japan* 30 (1978), 433-446.

R. AYALA, A. QUINTERO
 Depto. Geometría y Topología
 Facultad de Matemáticas
 C/ Tarfia s/n
 41012 SEVILLA. ESPAGNE

E. DOMINGUEZ
 Depto. de Matemáticas
 Facultad de Ciencias
 Ciudad Universitaria
 50009 ZARAGOZA ESPAGNE