

22.554

X

T. 96

TESIS

Biblioteca

TECNICAS DE ANALISIS CUALITATIVO  
EN SISTEMAS DINAMICOS  
METODOS NUMERICOS  
Y APLICACIONES EN INGENIERIA

por

ENRIQUE PONCE NUÑEZ

Ingeniero Industrial

presentada en el

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA

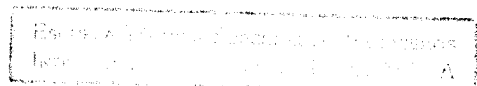
de la

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

para la obtención del

GRADO DE DOCTOR INGENIERO INDUSTRIAL

SEVILLA, MAYO DE 1987





## Agradecimientos

En primer lugar, debo agradecer al profesor Javier Aracil su constante tarea de dirección y estímulo a lo largo de todo el trabajo. Supo transmitirme su interés por las cuestiones estudiadas y facilitarme el acceso a la bibliografía. Sin su ayuda, no hubiera sido posible la realización de esta memoria.

El profesor Pérez Carreras dirigió mi formación en los primeros años desde mi adscripción al departamento de Matemáticas de la Escuela Superior de Ingenieros Industriales, y le debo mi reconocimiento a su labor. Quisiera dejar constancia también del apoyo recibido por los compañeros del departamento de Matemática Aplicada y en especial de Emilio Freire, cuyos comentarios y sugerencias me fueron siempre de gran utilidad.

El desarrollo del algoritmo de continuación de órbitas periódicas me fue sugerido por Miguel Toro y en los primeros trabajos de programación colaboró eficazmente Juan Antonio Fernández. Por último, pero no en menor medida, agradezco a María Giráldez su esmero en el mecanografiado de los originales.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Depositado en

de la  
de esta Universidad desde el día  
hasta el día

Sevilla de  
EL DIRECTOR DE

de 19

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
SECRETARIA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral  
al folio 171 número 12 del libro  
correspondiente.

Sevilla,

13 MAYO 1987

El Jefe del Negociado de Tesis,

*H. Yolanda Díaz Roldán*

# I N D I C E

CAPITULO I : INTRODUCCION Y ESQUEMA GENERAL DEL TRABAJO	1
1.1. Introducción.	1
1.2. Contenido.	6
CAPITULO II: EL METODO DE CONTINUACION	8
2.1. Descripción general	9
2.2. La parametrización respecto a la longitud de arco.	16
2.3. Aplicabilidad del metodo.	23
2.4. Diseño de un proceso de continuación en el contexto del análisis cualitativo de sistemas dinámicos.	28
2.4.1. El problema de la selección óptima del paso de continuación.	39
2.4.2. Continuación en las proximidades de puntos singulares.	45
CAPITULO III: TECNICAS DE ANALISIS EN BIFURCACIONES ESTATICAS	47
3.1. Técnicas de análisis local de los equilibrios y de sus bifurcaciones.	48
3.2. Bifurcaciones de sistemas con parámetro unidimensional	57
3.2.1. Cálculo analítico de las tangentes en un punto de ramificación múltiple	62
3.3. Bifurcaciones en presencia de dos parámetros.	67
3.3.1. Reducción local de sistemas con simetría mediante el cálculo de la variedad de centros.	68
3.3.2. Técnicas numéricas con dos parámetros.	75

3.4. Modelos de dinámica de sistemas.	78
3.4.1. Modelos de interacción de áreas urbanas.	79
3.4.2. Análisis del modelo de interacción para tres zonas.	114
3.5. Bifurcaciones en sistemas de potencia: el flujo de carga en un sistema formado por tres generadores.	162
 CAPITULO IV: METODOS NUMERICOS EN BIFURCACIONES DINAMICAS	 184
4.1. La aplicación de Poincaré en el estudio de soluciones periódicas.	192
4.2. Algoritmo de continuación de órbitas periódicas.	202
4.3. Aplicaciones.	213
4.3.1. El oscilador de Van der Pol.	213
4.3.2. Un sistema con una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas.	214
4.3.3. El tratamiento de bifurcaciones de duplicación de periodo.	221
 CAPITULO V: CONCLUSIONES	 246
 REFERENCIAS	 251

## CAPITULO I: INTRODUCCION Y ESQUEMA GENERAL DEL TRABAJO.

### 1.1. Introducción.

Las ecuaciones diferenciales constituyen una parcela de especial importancia para las matemáticas aplicadas. Una gran mayoría de los fenómenos de evolución temporal pueden ser modelados adecuadamente mediante el establecimiento, a partir de leyes conocidas, de las correspondientes ecuaciones diferenciales para, en un momento posterior, investigar sus soluciones. Es posible así explicar (o, en su caso, predecir) los comportamientos observados en la práctica.

Como en otros muchos casos, el desarrollo histórico de los acontecimientos ha estado ligado a problemas concretos de la física y de la técnica. Problemas como el de la transmisión del calor, el análisis de vibraciones mecánicas, la evolución de las principales magnitudes de circuitos eléctricos o, más modernamente, el lanzamiento de satélites artificiales, han motivado avances concretos en el estudio y resolución de ciertas ecuaciones diferenciales. Pueden considerarse como precursores, en este campo, los trabajos de Newton en su intento de explicar la estructura y movimientos de nuestro sistema solar, a mediados del siglo XVII. Desde entonces, y de forma casi ininterrumpida durante más de dos siglos, un gran número de científicos ha dedicado lo mejor de sus esfuerzos a la resolución exacta o aproximada de tales ecuaciones. Prueba de la diversidad y extensión de los trabajos realizados, es que muchas de ellas se ven indefectiblemente acom-

pañadas del nombre propio del matemático que primeramente las tipificó y resolvió (y son abundantes, quizá más en esta que en ninguna otra rama de las matemáticas, los nombres propios).

Con el paso del tiempo, se llegó a un desarrollo relativamente completo para las ecuaciones diferenciales ordinarias de carácter lineal y, salvo en contadas ocasiones, permanecieron algo inaccesibles aquellas en las que su estructura no lineal era un hecho imprescindible. Con la aparición en escena de los computadores, cada vez más veloces, la resolución numérica rellenó las lagunas de la teoría y, aunque el panorama actual de la disciplina no puede considerarse ni mucho menos cerrado, la situación es cuando menos satisfactoria.

Sin embargo, frente al uso excesivo de la simulación, en la que la preocupación fundamental es la caracterización cuantitativa de las soluciones, puede detectarse, desde finales del siglo pasado, una dirección en los trabajos que emerge con gran fuerza, y que ha venido a constituir la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Sin duda, fueron los trabajos de Henri Poincaré sobre el problema de los  $n$  cuerpos, junto con los de Alexander Lyapunov en su estudio de la estabilidad de las soluciones, quienes proporcionaron el primer impulso. Posteriormente, los matemáticos rusos Andronov y Pontriaguin desarrollaron a mediados de los años treinta el concepto de estabilidad estructural, base de la moderna teoría de bifurcaciones. Birkhoff primeramente y más tarde Smale, Thom y Arnold son, entre otros matemáticos contemporáneos, quienes han dado lugar a un conjunto elaborado de resultados teóricos para analizar el comportamiento cua-

litativo de los sistemas dinámicos. Dichos resultados necesitan, para ser aprovechados, de la elaboración de técnicas adicionales que faciliten su aplicación práctica. En nuestros días, el desarrollo de técnicas de análisis cualitativo es una tarea de especial importancia, tanto para alcanzar realmente los objetivos de la teoría y ampliar su ámbito de utilización, como para motivar e impulsar nuevos avances de la misma.

La teoría cualitativa está más interesada en las propiedades geométricas de las trayectorias de un sistema que en su cálculo efectivo y se ocupa fundamentalmente de analizar la estructura topológica de sus atractores, ya que éstos actúan como centros organizadores de la dinámica del sistema. Más que cuantificar las trayectorias individuales, lo que interesa en una gran mayoría de casos es conocer el comportamiento asintótico a largo plazo, que será en condiciones normales el susceptible de ser observado en la práctica.

De especial interés, para esta teoría, es conocer cómo puede alterarse la geometría de dichos atractores cuando determinados parámetros que intervienen en la definición del modelo sufren alguna modificación. Si la alteración es de tal grado que las respuestas del sistema son, no solo cuantitativamente diversas, sino cualitativamente distintas, se habla de que se ha producido una bifurcación: la teoría de bifurcaciones desempeña así un papel importante dentro de la teoría cualitativa. Desde otro punto de vista, al explicar cómo un cambio continuo puede dar lugar a discontinuidad en las respuestas de un sistema, queda estrechamente relacionada con la teoría de catástrofes.

Se trata pues de una disciplina en la que juega un papel fundamental una serie de ideas geométricas, que han de ser armónicamente conjuntadas con instrumentos de carácter analítico. Esta simbiosis entre la geometría y el análisis matemático es una de sus características operativas más claras, si bien las herramientas desarrolladas hasta ahora han tenido una fuerte componente analítica, difícilmente abordable por los no especialistas. Quizá sea precisamente dicho carácter interdisciplinar, a un nivel no trivial, uno de los factores causantes de que, hasta hace pocos años, los instrumentos de la teoría aparecieran como inaccesibles para el ingeniero y para el matemático aplicado en general (ya sea físico, ecólogo, economista, ...).

El interés suscitado en los últimos años por la teoría geométrica de sistemas dinámicos ha dado lugar a una auténtica explosión en las investigaciones, lo que hace que los avances sean rápidos aunque, por otra parte, queden aún muchas cuestiones por resolver. Una de las cuestiones más palpitantes es, sin duda, la correcta comprensión de los "atractores extraños", sobre todo desde que conocemos su presencia en sistemas de relativa sencillez (por ejemplo, en circuitos electrónicos con sólo tres variables de estado, como el estudiado por Freire et al. [1984], o en sistemas mecánicos muy simples, como el formado por dos péndulos interconectados, etc.). En otro orden de cosas, Ruelle y Takens [1971] han sugerido la importancia de estas soluciones aperiódicas en el estudio de los fenómenos de turbulencia.

El presente trabajo puede situarse en la dirección, antes apuntada, de aumentar las posibilidades de aplicación concreta de



los resultados teóricos, al incidir en el desarrollo de las técnicas de análisis cualitativo mediante la elección (y eventualmente el diseño, cuando ha sido posible) de algoritmos apropiados, sin menospreciar por ello las aplicaciones que se incluyen, que tienen también interés en el correspondiente ámbito. Con relación a las herramientas de carácter más analítico, hemos procurado hacer especial énfasis en aquellas que proporcionan una mayor información (tal es el caso, por ejemplo, del cálculo de la variedad de centros), mostrando como pueden ser usadas con el máximo provecho. En este sentido, la reciente disponibilidad de sistemas de cálculo simbólico hace presagiar importantes avances. Aunque sólo incidentalmente hacemos uso de las técnicas SAM (Symbolic Algebraic Manipulation), debemos insistir en que el futuro desarrollo de las técnicas de análisis pasa necesariamente por su utilización a gran escala.

Quizá convenga ya indicar que uno de los objetivos de este trabajo es subrayar de manera precisa cómo evitar lo que -creemos- ha sido, hasta el momento, una tendencia habitual, y poco rentable por la ausencia de garantías que comporta: el uso excesivo de simulación sin el concurso de útiles que la dirijan adecuadamente. Tal vez pueda achacárse nos el exceso contrario pero, aunque en la práctica convenga realizar simulaciones un tanto a ciegas en las primeras fases de análisis de un sistema, no nos detendremos en ningún momento en métodos como el de "pasadas sucesivas" (the sucesive runs method), o el análisis de sensibilidad (Ford et al. [1983], Burns [1973]) que representan, sin duda, un pragmático punto de vista. Buscamos, más bien, instrumentos que permitan conseguir una visión global del sistema en estudio.

## 1.2. Contenido.

El siguiente capítulo está dedicado al **método de continuación**. Este método, quizá no suficientemente conocido, constituye por su flexibilidad una herramienta de gran utilidad en el análisis cualitativo. Se hace énfasis en las posibilidades del método en nuestro contexto así como en otros ámbitos de la ingeniería, y se especifica un algoritmo con el que se han abordado la mayoría de los modelos analizados en esta memoria.

En el capítulo III se presentan las técnicas de análisis de equilibrios y de sus bifurcaciones. Se incluyen tanto técnicas numéricas (basadas principalmente en el método de continuación) como técnicas analíticas. Entre éstas últimas, se detalla un algoritmo para el cálculo de las tangentes en un punto de ramificación múltiple, así como la información que puede obtenerse del cálculo de la variedad de centros en un punto de bifurcación. Para este último caso, se estudian las repercusiones de la existencia de un grupo de simetrías para el sistema en estudio.

El capítulo incluye también análisis de modelos concretos, realizados con las técnicas desarrolladas. Se tratan dos modelos de dinámica de sistemas aparentemente simples, pero que poseen diagramas de bifurcaciones de gran riqueza y de indudable interés. También se analiza tanto el diagrama de equilibrios como el de bifurcaciones de una red eléctrica elemental, que da idea de las posibles aplicaciones, aún incipientes, del análisis cualitativo en ingeniería eléctrica.

La dificultad que presenta el análisis de las soluciones periódicas y aperiódicas de un sistema dinámico es, sin duda, superior al de los equilibrios, existiendo situaciones que aún no están completamente explicadas. El diseño de un algoritmo de continuación de órbitas periódicas, que se incluye en el capítulo IV, constituye un paso importante que posibilita futuras investigaciones. Una de sus características principales es que puede ser desarrollado, gracias a la utilización de la aplicación de Poincaré, en un código compacto que aprovecha totalmente el diseñado para la continuación de equilibrios. Junto a este algoritmo, en el mismo capítulo, se referencian otros métodos de interés. Enseguida se analizan varios modelos de creciente complejidad, consiguiendo confirmar de manera práctica estudios recientes sobre el comportamiento de ciertos sistemas con órbitas homoclinas.

El capítulo V se dedica a destacar las conclusiones del trabajo, así como reflejar algunas consideraciones que deben ser tenidas en cuenta para investigaciones posteriores.

## CAPITULO II : EL METODO DE CONTINUACION

Los computadores electrónicos, como herramientas de cálculo, han demostrado con profusión ser insustituibles en la construcción de procesos de convergencia. La velocidad alcanzada para llevar a cabo estos procesos ha posibilitado la aparición -siempre pensando en su posterior ejecución por el computador- de nuevos métodos, que anteriormente no podían ser operativos. Concretamente, la amplia difusión de los métodos de integración de ecuaciones diferenciales y la relativa sencillez de los programas necesarios para su aplicación han constituido un buen estímulo para intentar ampliar el ámbito de su utilización, englobando así a otros problemas que requerían métodos específicos de resolución.

Así, en las últimas dos décadas, se puede encontrar en la literatura especializada una serie de artículos sobre un método de resolución de problemas no lineales, conocido como el **método de continuación**. De hecho, en los textos de análisis numérico, recibe cada vez mayor atención, pues constituye, frente a ciertos problemas, una alternativa eficaz respecto a los enfoques tradicionales. Por su potencia y versatilidad, ha constituido una herramienta insustituible para llevar a cabo las técnicas descritas en esta memoria.

## 2.1. Descripción general

El método de continuación resulta especialmente apropiado cuando estamos interesados en resolver un problema particular para el que no contamos con algoritmos "ad hoc", o bien queremos establecer una vía alternativa a las ya conocidas. La idea del método consiste en alterar la formulación del problema original, englobándolo en otro más general (normalmente mediante la introducción de un parámetro).

Este nuevo problema puede presentar soluciones fácilmente detectables (en la mayoría de los casos, por mera inspección) que, aunque no se correspondan con el problema original, sirvan de punto de partida para un proceso de convergencia que nos lleve hasta las soluciones de interés. Desde una formulación más general y partiendo de sus soluciones triviales, el método de continuación consistirá, en general, en la construcción de una ecuación diferencial, cuya resolución por los métodos habituales nos guíe hasta un punto donde la estructura del problema general coincida con la del primitivo. Enseguida trataremos una aplicación particular del método, pero antes, y con objeto de precisar los términos, lo describiremos con toda generalidad.

Para la formulación general de un proceso de continuación, seguiremos a Richter & DeCarlo [1983]. Dados dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$ , consideremos un problema  $P$  definido mediante el par  $(F, U)$ , donde  $U$  es un conjunto contenido en  $Y$  y  $F$  es una aplicación de  $X$  en  $Y$ . Diremos que todo punto

$$x \in X \text{ con } F(x) \in U$$

es una solución del problema P. En estas condiciones, diremos que una aplicación continua

$$H: X \times [0,1] \rightarrow Y$$

es un proceso de continuación, si cumple las siguientes condiciones:

a)  $H(x,1) = F(x), \forall x \in X$

b) Existe al menos un punto  $x_0$  de  $X$ , conocido de antemano, que es solución de  $H(.,0)$ ; es decir,  $H(x_0,0) \in U$ .

c) Existe una curva continua  $S$  en  $X \times [0,1]$ , definida paramétricamente por  $(x(t),t)$ , de manera que

$$x(0) = x_0$$

y además  $x(t)$  es solución de  $H(.,t)$ ,  $\forall t \in [0,1]$ .

d) El espacio  $X \times [0,1]$  posee una estructura diferencial, de forma que la curva  $(x(t),t)$  resulta diferenciable.

A la hora de diseñar un proceso de continuación  $H$  para un determinado problema P, las dos primeras condiciones suelen ser fácilmente satisfechas; de hecho, para el mismo problema se encuentran sin dificultad diversas alternativas. Supongamos para fijar ideas que buscamos una solución al problema

$$F(x) = 0, \text{ donde } F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Aquí el problema queda definido por el par  $(F,U)$ , donde

$$U = \{0\}$$

y se concreta en la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales. Aunque son variados los métodos susceptibles de ser aplicados, nos centraremos en lo que sigue a cómo se formularía el método de continuación para este caso. Como posibles elecciones para  $H$  (que puede ser considerada como una función de homotopía), podríamos usar, entre otras, una de las dos siguientes (Ortega y Rheinboldt [1970]):

$$H(x,t) = F(x) - (1-t)F(x_0)$$

$$H(x,t) = tF(x) + (1-t)(x - x_0)$$

En el primer caso, conforme crece el valor de  $t$ , la separación entre  $H$  y  $F$  es cada vez menor (homotopía de reducción del error). En el segundo ejemplo, se usa una homotopía de regularización. En ambos casos, además, la elección de  $x_0$  puede hacerse a voluntad.

La figura 2.1 establece un esquema ilustrativo de los principales elementos que intervienen en la formulación del método de continuación para este problema particular. Para localizar el punto  $x^*$ , solución de la ecuación

$$F(x) = 0$$

aumentamos la dimensión del espacio de trabajo, introduciendo el parámetro  $t$ . Para  $t = 0$ , el problema ampliado presenta, como solución trivial, el punto  $x_0$ . Admitida la existencia de la curva

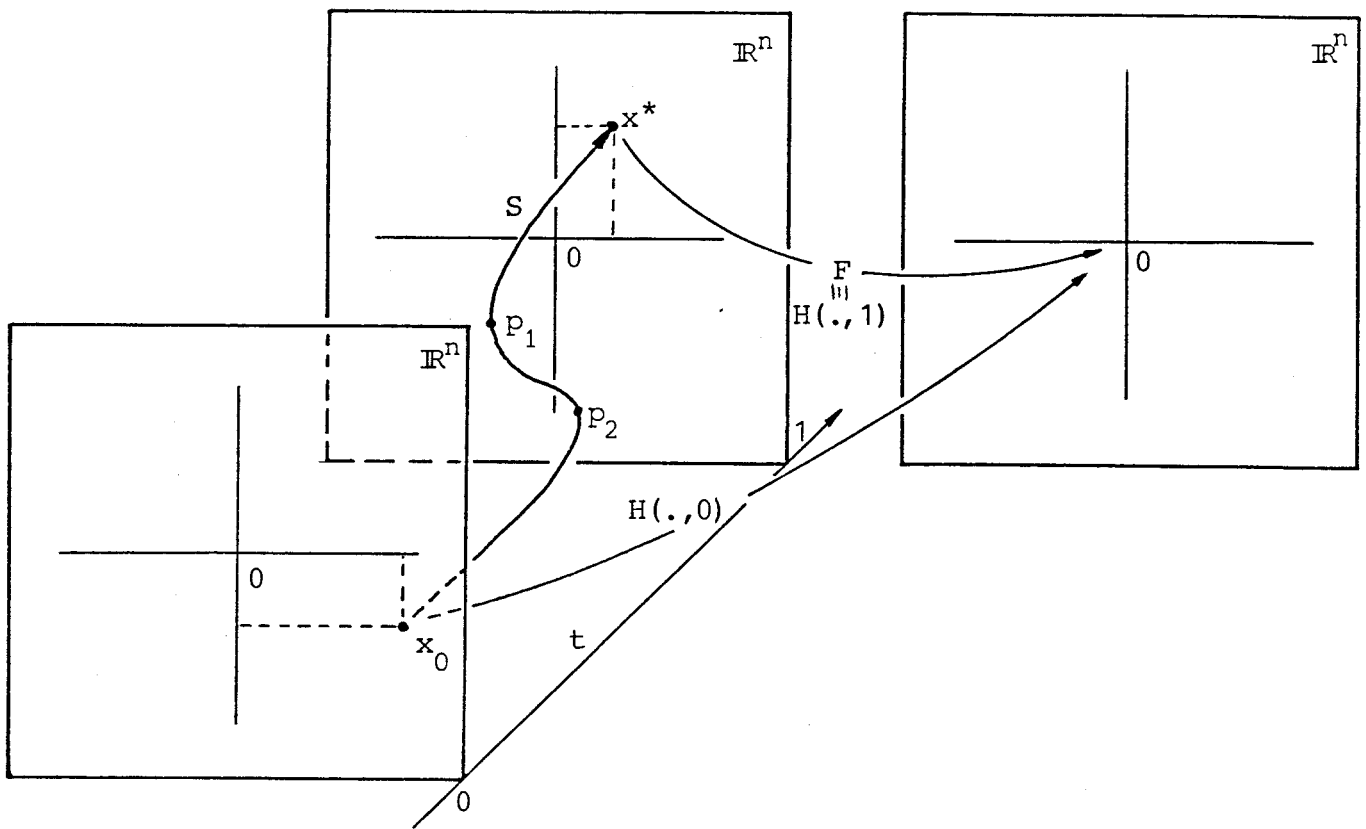


Figura 2.1. Esquema ilustrativo del método de continuación para el problema  $F(x) = 0$ .  $p_1$  y  $p_2$  son puntos límites.



S, que une los dos puntos mencionados, bastará contar con un procedimiento que nos permita recorrer la curva. Llegaremos así al punto  $x^*$ , solución del problema ampliado para  $t = 1$ , y solución -por la propia construcción de la función H- del problema original. Nos referiremos a esta figura más adelante, cuando hablemos de las dificultades numéricas que pueden surgir, al avanzar a lo largo de S, en las proximidades de puntos como los señalados ( $P_1$  y  $P_2$ ).

La clave en la construcción del proceso de continuación o función de homotopía se centra en asegurar las condiciones c) y d) anteriores. La última condición es esencial para la aplicabilidad del método, aunque puede suprimirse en ciertos casos. Las bases teóricas que justifican la existencia de la curva S recurren, para una amplia clase de problemas, a la noción de grado topológico o grado de Brouwer (ver, por ejemplo, Cronin [1964], Lloyd [1978]) que no trataremos aquí. En algún caso, sin embargo, y dependiendo específicamente de F, podrá obtenerse demostraciones más directas que aseguren el cumplimiento de las condiciones prescritas.

Una vez establecido el proceso de continuación, lo que procede, como hemos indicado, es seguir la curva S desde

$$(x_0, 0) = (x(0), 0)$$

hasta

$$(x^*, 1) = (x(1), 1)$$

donde  $x^*$  es la solución buscada al problema original. Se trata

entonces de usar un algoritmo que nos permita, partiendo de  $x_0$ , "continuar" la curva  $S$  hasta llegar a  $x^*$ . Para ello los algoritmos más utilizados pueden clasificarse en dos grandes grupos: los de tipo discreto y los que usan la idea de Davidenko [1953] (métodos continuos).

En un método de continuación discreto se particiona el intervalo  $[0,1]$  para obtener una cadena finita de problemas que responde a la siguiente formulación:

$$H(x, t_n) = 0, \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$$

Comenzando a partir de  $x(0)$ , se usa entonces un proceso iterativo local de forma que, en el  $n$ -ésimo problema a resolver, se calcula  $x(t_n)$  arrancando con  $x(t_{n-1})$ . Desde el punto de vista teórico, surge la cuestión de determinar bajo qué condiciones para  $H$  se puede asegurar la existencia de una partición de  $[0,1]$  y la de un proceso iterativo, de forma que  $x(t_k)$  caiga en el dominio de atracción correspondiente a  $x(t_{k+1})$ , para cada valor de  $k$ . Además, sería de gran interés el determinar la partición que conlleve menor esfuerzo computacional (ver Avila [1974]).

A diferencia de lo anterior, la idea de Davidenko [1953] consiste en plantear una ecuación diferencial aprovechando las dos últimas condiciones impuestas a la función de homotopía  $H$ . Siguiendo con el ejemplo planteado, si derivamos respecto de  $t$  la ecuación:

$$H(x(t), t) = 0$$

se obtiene:

$$D_x H(x(t), t) \frac{dx(t)}{dt} + D_t H(x(t), t) = 0$$

donde  $D$  denota derivación y el subíndice indica las variables respecto a las cuales se ha derivado. La ecuación anterior, junto con

$$x(0) = x_0$$

constituye un problema de valor inicial de tipo implícito, en el que queda transformado el problema original  $P$ . Basta ahora integrar hasta  $t = 1$  el anterior sistema, para llegar a la solución buscada.

Algunos autores como Wasserstrom [1973], consideran que es a este segundo grupo de algoritmos, que conducen a la reformulación del problema original como otro de valor inicial, al que debe aplicarse con mayor propiedad el apelativo de método de continuación. De hecho en la terminología anglosajona suele utilizarse en este contexto la denominación "embedding methods", haciendo referencia a la idea específica de englobar el problema en uno más general, mediante la función de homotopía. Con objeto de fijar el significado de los términos, en lo sucesivo seguiremos a Wasserstrom y, bajo el título de métodos de continuación, consideraremos aquellos que conducen a la resolución de una ecuación diferencial con condiciones iniciales conocidas. Hecha esta precisión, cabe añadir que varios autores coinciden en señalar como precursor del método de Davidenko o método de continuación a Lahaye [1934].

## 2.2. La parametrización respecto a la longitud de arco.

Volviendo de nuevo al ejemplo en cuestión, una vez elegida la función de homotopía  $H$ , queda transformado el problema original en otro que es equivalente, siempre que nuestro interés sea localizar al menos una solución del problema original. Como veremos más adelante, esta equivalencia puede ser completa para ciertas aplicaciones. Ahora, sólo falta resolver el problema de valor inicial ya reseñado:

$$x(0) = x_0$$

$$D_x H(x(t), t) \frac{dx(t)}{dt} + D_t H(x(t), t) = 0$$

Observando la última ecuación, puede concluirse que aparecerán dificultades numéricas cuando el determinante de  $D_x H$  sea próximo a cero. El tratamiento de estos casos exige técnicas adicionales. La idea más útil es realizar un cambio de parámetro de forma que la derivación respecto a ese escalar conduzca a la remoción de la singularidad. Así, si denotamos por  $s$  al nuevo parámetro y hacemos el cambio

$$t = g(x, s)$$

podemos definir una nueva función de homotopía

$$H^*(x, s) = H(x, g(x, s))$$

de forma que

$$D_x H^*(x, s) = D_x H(x, t) + D_t H(x, t) D_x g(x, s)$$

Si se elige adecuadamente la función  $g$ , puede conseguirse que en

un punto en que  $D_x H$  sea singular,  $D_x H^*$  no lo sea. Una parametrización muy útil en la que esto ocurre, para cierta clase de puntos singulares (los llamados puntos límite, como los señalados en la figura 2.1), es la que hace referencia a la longitud de arco recorrida hasta el momento sobre la curva  $S$  (Klopfenstein [1961]).

Si reescribimos la función de homotopía para el nuevo parámetro  $s$ , como

$$H(x(s), t(s)) = 0$$

y derivamos ahora respecto de  $s$ , se llegaría al sistema de ecuaciones siguiente:

$$\frac{df_i}{ds} = \sum_{j=1}^n \frac{\delta f_i}{\delta x_j} \frac{dx_j}{ds} + \frac{\delta f_i}{\delta t} \frac{dt}{ds} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde  $f_i$  indica la  $i$ -ésima componente de la función  $H$ .

Si al anterior sistema añadimos ahora la condición:

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 1$$

es claro que al parámetro  $s$  le damos el significado de longitud de arco de la curva  $S$ . Con la ayuda de esta igualdad, aún desconociendo la función  $g$  de modo explícito, es posible llegar a la nueva ecuación diferencial, como veremos a continuación. Recordemos que la imagen de la curva pertenece a

$$R^n \times [0, 1] \subset R^{n+1}$$

Si, por razones de mayor uniformidad, denotamos con  $x_{n+1}$  al parámetro  $t$ , y llamamos  $M_k$  a la matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_{k-1}} & \frac{\delta f_1}{\delta x_{k+1}} & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_{n+1}} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_2}{\delta x_{k-1}} & \frac{\delta f_2}{\delta x_{k+1}} & \dots & \frac{\delta f_2}{\delta x_{n+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_n}{\delta x_{k-1}} & \frac{\delta f_n}{\delta x_{k+1}} & \dots & \frac{\delta f_n}{\delta x_{n+1}} \end{bmatrix}$$

(nótese que falta la columna correspondiente a  $x_k$  y que las derivadas se suponen evaluadas en el punto  $x \in S$ ), es inmediato concluir que  $M_{n+1}$  se corresponde en cada punto con  $D_x H$ . Además, si en el anterior sistema de ecuaciones elegimos como incógnitas las  $n$  siguientes,

$$\frac{dx_1}{ds}, \dots, \frac{dx_{k-1}}{ds}, \frac{dx_{k+1}}{ds}, \dots, \frac{dx_{n+1}}{ds}$$

la matriz de coeficientes vendría dada por  $M_k$ . Si dicha matriz es regular, se puede resolver el sistema respecto a  $dx_k/ds$ , y obtener:

$$\frac{dx_i}{ds} = c_i \frac{dx_k}{ds}, \quad i \neq k$$

El cálculo de los coeficientes  $c_i$ , junto con la condición ya citada

$$\left\| \frac{dx}{ds} \right\|_2 = 1$$

permite establecer

$$\left(\frac{dx_k}{ds}\right)^2 = \left(1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n c_i^2\right)^{-1}$$

y obtener, por tanto, el valor del vector  $dx/ds$  (La arbitrariedad en cuanto al signo de  $dx_k/ds$  ha de eliminarse asegurando su continuidad).

Si recordamos la condición de punto límite (ver, v.g. Freire [1982]), y la aplicamos al conjunto solución de la ecuación

$$H(x,t) = 0$$

tendremos que

$$\text{rango } D_x H = n-1$$

$$\text{rango } \begin{bmatrix} D_x H \\ D_t H \end{bmatrix} = n$$

Por tanto, en esos puntos,  $M_{n+1}$  resulta singular, pero es posible encontrar un valor

$$k < n+1$$

de forma que  $M_k$  resulte regular. El teorema de la función implícita nos asegura en estas condiciones la posibilidad de "despejar" las demás variables respecto a la  $k$ -ésima  $y$ , de hecho, eso será lo que hagamos.

Es interesante subrayar que, desde un punto de vista operativo, la elección como parámetro de la longitud de arco equivale

a no asignar, a ninguna de las  $n+1$  variables, el papel de parámetro fijo de continuación: éste variará a lo largo del proceso. Ha de incorporarse, por tanto, un mecanismo para la elección más conveniente del índice  $k$  en cada momento.

Elegidos una función de homotopía  $H$ , un punto  $x_0$  (arbitrario) correspondiente a  $t = 0$ , y un método de integración, contamos con todos los elementos para la resolución, mediante la técnica anterior, del problema de valor inicial planteado. Podremos, partiendo de  $(x_0, 0)$ , llegar a la solución buscada  $x^*$  sin más que integrar hasta  $t = 1$ .

En el transcurso de la integración, los errores de truncamiento pueden perjudicar de manera acumulativa el resultado. Por ello, es habitual realizarla mediante dispositivos del tipo predictor-corrector. Debe notarse que el cálculo de las correcciones puede hacerse de forma poco laboriosa. Si, por ejemplo, usamos el método de Newton dejando invariable precisamente la coordenada  $x_k$ , la corrección del vector

$$x^+ = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1})^T$$

vendría dada por

$$\Delta x^+ = -M_k(x)^{-1} H(x)$$

cuya evaluación puede aprovechar de forma notable las operaciones realizadas en el cálculo del vector  $dx/ds$ . Basta observar que, en cada punto:



$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{k-1} \\ \cdot \\ c_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = -M_k(x)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\delta f_{k-1}}{\delta x_k} \\ \frac{\delta f_k}{\delta x_k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_k} \end{bmatrix}$$

que proviene de un sistema lineal con la misma matriz de coeficientes.

La aparición de puntos singulares más complejos de los ya tratados, puede resolverse en la mayoría de los casos con mecanismos adecuados de variación del paso de integración. En algún caso, sin embargo, puede acudirse a otras alternativas. Como primera opción está, obviamente, el cambio de función de homotopía, dada la libertad de elección con que contamos.

Otra posibilidad adicional consiste en permitir que el parámetro  $t$  tenga carácter vectorial, aumentando así la dimensión del espacio de trabajo. En este caso, se debería definir a priori -para dicho parámetro- un camino diferenciable que enlace el valor inicial (correspondiente a un problema de solución conocida) con un valor deseado para el que la función de homotopía represente el problema en estudio. La gama de planteamientos diversos

para un determinado problema es, pues, muy amplia.

Como señala Boggs [1971] (ver también Meyer [1968]), puede considerarse también un intervalo de variación del parámetro no acotado. Así, si permitimos, por ejemplo, que dicho parámetro se mueva en el rango  $[0, \infty)$ , la integración de la correspondiente ecuación diferencial debe realizarse hasta alcanzar lo que podríamos llamar el régimen permanente (haciendo jugar al parámetro el significado de variable temporal).

En el supuesto de que lo anterior sea posible, esto es, se cuente con las condiciones necesarias para que haya convergencia, podría plantearse v.g. como nueva homotopía:

$$H(x, t) = F(x) - e^{-t} F(x_0), \quad t \in [0, \infty), \quad x_0 \text{ arbitrario,}$$

que se correspondería con las llamadas de reducción del error.

Siguiendo ahora la formulación de Davidenko, si  $x(t)$  representa la curva que verifica

$$H(x(t), t) = 0, \quad \forall t \in [0, \infty) \text{ con } x(0) = x_0$$

obtendríamos, al derivar respecto de  $t$ :

$$D_x F(x(t)) \frac{dx(t)}{dt} + e^{-t} F(x_0) = 0$$

pero como por hipótesis,

$$F(x(t)) - e^{-t} F(x_0) = 0$$

se llegaría a la ecuación diferencial:

$$D_x F(x(t)) \frac{dx(t)}{dt} = - F(x(t))$$

que, si admite su expresión explícita, conduce a:

$$\frac{dx(t)}{dt} = - D_x F(x(t))^{-1} F(x(t))$$

Es interesante notar que la integración numérica de esta ecuación por el método de Euler origina el esquema

$$x(t+h) = x(t) - h D_x F(x(t))^{-1} F(x(t))$$

Si tomamos ahora  $h = 1$ , el correspondiente proceso iterativo

$$x_{n+1} = x_n - D_x F(x_n)^{-1} F(x_n)$$

coincide con el algoritmo de Newton, de forma que dicho algoritmo podría considerarse como un caso particular del método de continuación, cuando se aplica este último a la resolución de ecuaciones no lineales.

### 2.3. Aplicabilidad del método.

Con independencia de la utilización del método de continuación para la resolución de ecuaciones no lineales, problema que aparece con frecuencia en el análisis cualitativo y que será objeto de posteriores capítulos, haremos ahora un breve recorrido por otros ámbitos en los que es aplicable el método. No se trata de dar una visión exhaustiva: procuraremos, más bien, mostrar su versatilidad para ser usado en problemas de diversa índole, ilus-

trando con otros ejemplos las ideas ya expuestas.

Un problema ya clásico en análisis numérico, pero no por eso exento aún de dificultades, es la localización de las raíces de un polinomio. Con la ayuda del método de continuación, podemos ahora optar por un nuevo planteamiento del problema que puede resultar ventajoso frente a otros. Supongamos que deseamos calcular las raíces de la ecuación polinómica:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^N a_n^{(1)} z^n = 0$$

donde los coeficientes pueden ser complejos, y

$$a_N^{(1)} = 1$$

Elijamos ahora  $N$  números complejos arbitrarios,

$$z_0^{(j)}, j = 1, \dots, N$$

Si es posible, procuraremos que no estén muy alejados de las soluciones buscadas, que denotaremos por:

$$z_1^{(j)}, j = 1, \dots, N$$

Definamos ahora otra ecuación polinómica

$$f_0(z) = \prod_{j=1}^N (z - z_0^{(j)}) = \sum_{n=0}^N a_n^{(0)} z^n = 0$$

A continuación, construimos una función de homotopía para este problema, haciendo

$$H(z,t) = \sum_{n=0}^N a_n(t) z(t)^n = 0$$

con las siguientes condiciones:

$$(i) \quad a_N(t) = 1, \quad \forall t \in [0,1]$$

(ii)  $a_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$  suficientemente diferenciable con:

$$a_n(0) = a_n^{(0)} ; a_n(1) = a_n^{(1)}$$

Con objeto de plantear el correspondiente problema de valor inicial, para cada raíz  $z^{(j)}$  de la función de homotopía, derivamos respecto de  $t$  para obtener:

$$\frac{dz^{(j)}}{dt} = - \frac{\sum_{n=0}^{N-1} a_n'(t) (z^{(j)})^n}{\sum_{n=1}^N n a_n(t) (z^{(j)})^{n-1}}, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Conseguiremos así  $N$  ecuaciones diferenciales idénticas, que deben integrarse con sus correspondientes condiciones iniciales:

$$z^{(j)}(0) = z_0^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Así pues, la integración desde  $t = 0$  hasta  $t = 1$ , conduce a los valores buscados:

$$z^{(j)}(1) = z_1^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

En cuanto a la elección de las funciones  $a_n$  para  $j = 1, 2, \dots, N-1$ , podríamos adoptar, por ejemplo, la siguiente combinación convexa de los coeficientes:

$$a_n(t) = (1-t)a_n^{(0)} + ta_n^{(1)}$$

que se correspondería con una homotopía del tipo que antes llamamos de regularización.

Como hace notar Wasserstrom [1971], y ya hemos señalado más arriba, este proceso puede ser mejorado en eficacia, teniendo en cuenta que durante la integración conocemos, implícitamente, la solución exacta de la función de homotopía para cada  $t \in [0,1]$ . Por lo tanto, es posible y conveniente realizar, para unos cuantos valores prefijados de  $t$ , iteraciones correctoras de tipo Newton o similares. Este mismo autor da soluciones para algunas dificultades numéricas que pueden presentarse cuando el denominador en la expresión anterior de  $dz/dt$  se acerca a cero. En otro artículo [1973], aplica el método de continuación a problemas tan diversos como la identificación de parámetros, problemas de contorno o cálculo de autovalores de operadores diferenciales lineales.

Hace además una observación no exenta de interés: un polinomio puede ser interpretado -hablando con imprecisión- como una aplicación del vector de sus coeficientes en el vector de sus raíces. Esta aplicación no es simétrica, en el sentido de que, mientras es fácil obtener los coeficientes a partir de las raíces, lo recíproco de ningún modo es una tarea trivial. Esta asimetría es una de las características de los problemas en los que la idea de continuación puede ser útil, ya que es fácil plantear un problema con solución conocida que sirva de cauce, mediante integración, para llegar a la solución del problema original.

F.H. Branin, C.G. Broyden y L.O. Chua son citados por Chao y Saeks [1977], entre otros precursores del empleo del método de continuación en ingeniería. En ese artículo, se describen aplicaciones del método al estudio de características de entrada-salida de redes eléctricas no lineales, trazado de diagramas de Nyquist

multivariabes y otros tópicos del análisis de circuitos. Incluyen, además, otro ejemplo interesante, que da idea de las posibilidades del método de continuación: el cálculo de matrices inversas.

Supongamos que deseamos obtener la inversa de una matriz cuadrada  $N$ . Podemos construir una familia parametrizada de matrices, de forma que

$$M(t) = tN + (1-t)I, \quad t \in [0,1]$$

donde  $I$  denota la matriz identidad, de orden igual al de  $N$ . Es claro entonces que

$$M(0) = I, \quad M(1) = N$$

y que puede formularse como función de homotopía, la que aparece en el primer miembro de la siguiente ecuación:

$$M(t)M^{-1}(t) - I = 0$$

Derivando respecto al parámetro  $t$ , se llega a la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{dM^{-1}(t)}{dt} &= -M^{-1}(t) \frac{dM(t)}{dt} M^{-1}(t) = \\ &= -M^{-1}(t) (N-I) M^{-1}(t) \end{aligned}$$

Contamos así con un problema de valor inicial correctamente planteado. La eficiencia de este método de inversión matricial decae con el orden de la matriz, sobre todo si se trata de una matriz vacía (sparse). Para este caso, Saeks [1979] da un refinamiento de esta técnica combinándola con la descomposición LU.

Otros ejemplos de uso del método de continuación en el análisis de circuitos eléctricos, aparecen en Saeks [1976]. El uso combinado del método con algoritmos simpliciales, es ampliamente descrito en Allgower y Georg [1980], que recogen además una extensa bibliografía, donde pueden encontrarse otras aplicaciones recientes en ingeniería, economía, etc. En Wacker [1978], aparecen otras aplicaciones del método de continuación a problemas de optimización con restricciones no lineales, así como artículos (ver Alexander [1978]), que profundizan en el estado actual de la investigación en las bases teóricas de estas técnicas.

#### 2.4. Diseño de un proceso de continuación en el contexto del análisis cualitativo de sistemas dinámicos.

Ya hemos indicado en esencia en qué consiste el método de continuación y cómo, en la práctica, su implementación más eficiente se basa en la idea de combinar predicciones y correcciones, para evitar la acumulación de errores. Ha quedado patente, asimismo, su flexibilidad para adaptarse a problemas de muy diverso enunciado. Se comprende pues que se tratará de una herramienta de gran utilidad para la aplicación de las técnicas del análisis cualitativo.

Supongamos ahora que deseamos realizar un diagrama de los equilibrios de un sistema dinámico con un parámetro  $p$  unidimensional. El análisis cualitativo de un sistema dinámico exige normalmente la obtención de este diagrama, que proporciona una visión global de la estructura de los equilibrios frente a los di-



versos valores del parámetro (ver figura 2.2).

Sea pues el sistema dinámico:

$$\dot{x} = f(x,p) \text{ con } f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}$$

Fijemos un valor del parámetro, haciendo  $p = p_0$ . Los equilibrios correspondientes vendrían dados por las soluciones del sistema

$$f(x, p_0) = 0$$

para lo cual podríamos acudir a un método clásico de resolución de sistemas de ecuaciones —no lineales, en general—, si dispusiéramos de soluciones aproximadas que aseguraran la convergencia del método. El método de continuación podría ser de gran ayuda para el cálculo de esas soluciones aproximadas, a partir de las cuales, usando por ejemplo el método de Newton, quedaría resuelto el problema.

Para completar el análisis, repetiríamos el proceso descrito para diversos valores del parámetro, hasta llegar a una descripción satisfactoria del correspondiente diagrama de bifurcaciones.

No hay inconveniente, sin embargo, en adoptar un punto de vista diferente. Así, nada impide considerar la ecuación

$$f(x,p) = 0$$

como representante de una homotopía, donde el parámetro se mueve ahora en un rango más general que el descrito anteriormente (en los ejemplos analizados más arriba se trataba del intervalo

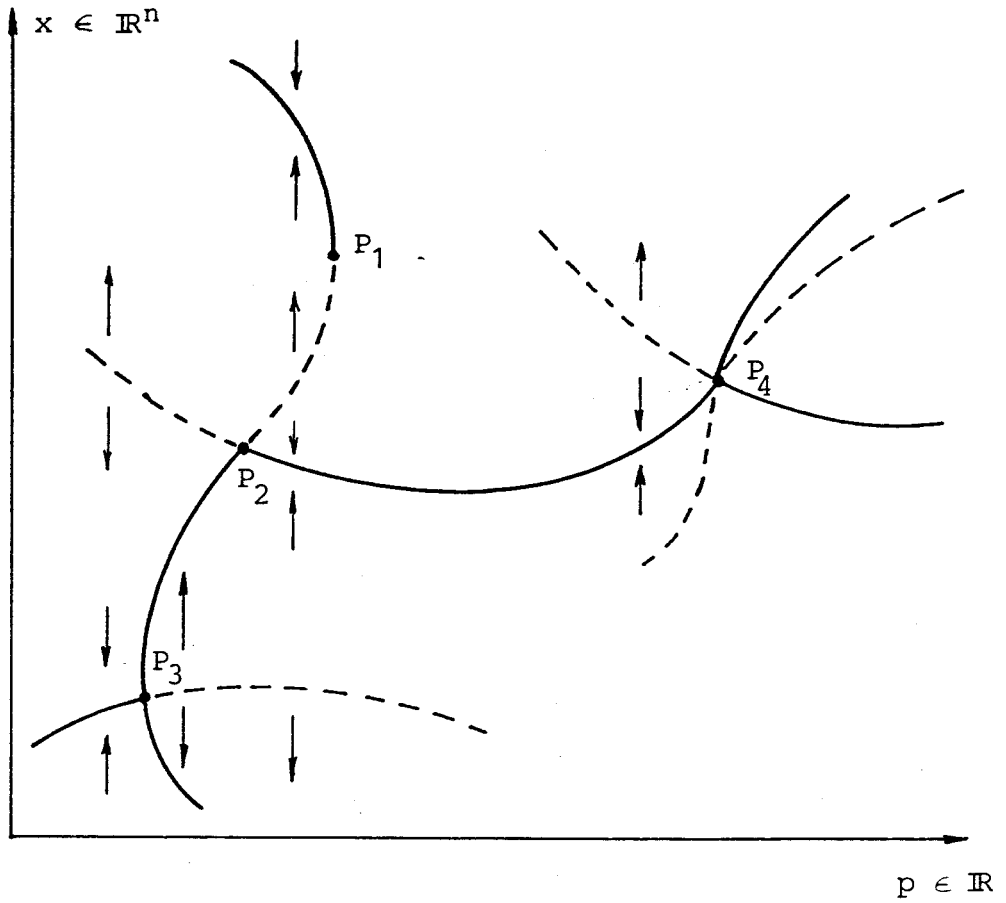


Figura 2.2. Diagrama de equilibrios de un sistema dinámico.

—— Equilibrios estables

----- Equilibrios inestables

$P_1$  Bifurcación silla - nodo

$P_2$  Bifurcación transcritical

$P_3$  Bifurcación tridente

$P_4$  Punto de ramificación múltiple

$[0,1]$ ), y aprovechar por tanto la idea de Davidenko. Bajo condiciones suficientes de derivabilidad de  $f$ , podemos escribir:

$$D_x f \frac{dx(p)}{dp} + D_p f = 0$$

donde  $D_x$  y  $D_p$ , denotan las correspondientes derivadas de la función  $f$ . Así, se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dx(p)}{dp} = (D_x f)^{-1} D_p f$$

totalmente análoga a las descritas para el método de continuación.

Es ahora patente que las técnicas de continuación encajan armoniosamente en el problema de obtener el diagrama de equilibrios de un sistema dinámico, de manera que no es necesario siquiera plantear una función de homotopía, ni introducir un parámetro adicional.

Rheinboldt [1980] se centra en este problema, y estudia la teoría de existencia de lo que llama "campo de soluciones" para la ecuación  $f(x,p) = 0$ , en el importante caso en que el parámetro tiene dimensión uno. Para ello, define primeramente una aplicación que especifica como imagen a un vector tangente de norma euclídea igual a uno. A continuación exponemos brevemente sus resultados.

Sea  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciable con continuidad dos veces. Para un punto dado  $b \in \mathbb{R}^n$ , consideremos la ecuación:

$$f(x) = b$$

donde  $b$  se supone en el recorrido de  $f$ , y  $x_{n+1}$  es la variable que juega el papel del parámetro. Dada una función diferenciable con continuidad  $x$ , definida en  $A$ , intervalo abierto de  $\mathbb{R}$  y con valores en  $\mathbb{R}^n$ , se dirá que  $x$  es una solución paramétrica de la ecuación anterior, si se verifica

$$f(x(t)) = b, \forall t \in A$$

donde

$$x : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Para excluir el caso de soluciones paramétricas constantes, diremos que una solución paramétrica es regular, si  $\forall t \in A$  se tiene  $x'(t) \neq 0$ . Dada otra solución paramétrica

$$y : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

diremos que  $x$  e  $y$  son equivalentes, si existe un difeomorfismo

$$g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$g'(t) > 0, \forall t \in B, g(B) = A \text{ de forma que } y = x \circ g$$

En otras palabras, las dos soluciones paramétricas definen entonces el mismo conjunto de soluciones de la ecuación en estudio. Podemos así identificar las correspondientes clases de equivalencia de las soluciones paramétricas con lo que llamaremos

curvas solución de la ecuación  $f(x) = b$ . Diremos que una curva solución es regular, si se corresponde con una representación paramétrica regular.

Ya que para toda solución paramétrica, se verifica

$$Df(x(t)) x'(t) = 0, \forall t \in A$$

es fácil plantear una ecuación diferencial que debe cumplir cualquier solución paramétrica. Sea

$$R(f) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \text{rango } Df(x) = n\}$$

el conjunto de puntos donde  $f$  es regular, que supondremos no vacío. Para un punto  $x \in R(f)$ , existe un vector único  $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ , que cumple:

$$a) Df(x) u = 0$$

$$b) \|u\|_2 = 1$$

$$c) \det \begin{bmatrix} Df(x) \\ u^T \end{bmatrix} > 0$$

Por tanto podemos definir así una aplicación:

$$T : R(f) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$x \rightarrow Tx = u$$

(con las tres condiciones anteriores). Claramente, las soluciones de la ecuación diferencial

$$x' = Tx$$

constituyen soluciones paramétricas (necesariamente regulares) de la ecuación  $f(x) = b$ , con  $b = f(x(t_0))$  ( $t_0$  es un punto arbitrario

del dominio de la solución).

Con estos prerrequisitos, Rheinboldt [1980] enuncia el siguiente teorema de existencia y unicidad:

"Para el problema de valor inicial

$$x' = Tx, \quad x(t_0) = x_0 \in R(f)$$

existe una solución paramétrica única, definida en un intervalo abierto que contiene a  $t_0$ , con valores en  $R(f)$ , y que es maximal respecto a la inclusión de conjuntos".

Debemos destacar cómo de nuevo, en este algoritmo, el parámetro implícitamente usado tiene la significación de longitud de arco, a causa de la condición b) anterior. Esto asegura que podrá sobrepasar sin dificultad los puntos límite.

Cara a la determinación práctica de la curva solución de la anterior ecuación diferencial, es interesante adoptar un esquema del tipo predictor-corrector. Esto significa que aprovechando la información de la porción de curva ya calculada en un determinado momento, realizaremos una extrapolación que aproxime al siguiente segmento de la curva. Hecho esto, tomaremos un punto de esta curva extrapolada como punto inicial de un proceso iterativo de corrección, diseñado para que converja a un punto de la curva solución. Con la formulación anterior, para realizar las correcciones, necesitamos añadir una ecuación más a las  $n$  representadas por

$$f(x) = b, \quad x \in R(f)$$

Contamos con cierta libertad a la hora de escoger esa ecuación adicional. Una posibilidad sería usar la ecuación

$$v^T x = a, \quad a \in R$$

de forma que se tenga que

$$\det \begin{bmatrix} Df(x) \\ v^T \end{bmatrix} \neq 0$$

para un entorno del último punto calculado, que llamaremos  $x^k$ .

Como vector  $v$  podría usarse desde luego  $Tx^k$  que cumple la condición indicada. Sin embargo, es más sencillo el corregir de forma que permanezca constante alguna de las componentes de  $x$ , lo que equivale a escoger  $v = e_i$ , siendo  $e_i$  uno de los vectores unitarios de  $R^{n+1}$ . Llegamos así, al siguiente sistema de ecuaciones para el proceso corrector:

$$h(x) = 0, \quad \text{con } h(x) = \begin{pmatrix} f(x) - b \\ e_i^T x - a \end{pmatrix}$$

donde

$$a = e_i^T x^k = x_i^k.$$

Para fijar del modo más conveniente el índice  $i$ , podemos observar que

$$Dh(x) = \begin{bmatrix} Df(x) \\ e_i^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Df(x) \\ (Tx)^T \end{bmatrix} (I + Tx(e_i - Tx)^T)$$

ya que  $Tx$  cumple por hipótesis las condiciones a) y b) anteriores. Ahora, usando la identidad:

$$\det(I + v_1 v_2^T) = 1 + v_1^T v_2, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{n+1}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \det(Dh(x)) &= \det \begin{bmatrix} Df(x) \\ (Tx)^T \end{bmatrix} \det(I + Tx(e_i - Tx)^T) = \\ &= (Tx)^T e_i \det \begin{bmatrix} Df(x) \\ (Tx)^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, para obtener eficiencia desde el punto de vista numérico, interesará elegir el índice  $i$  de forma que el número dado por

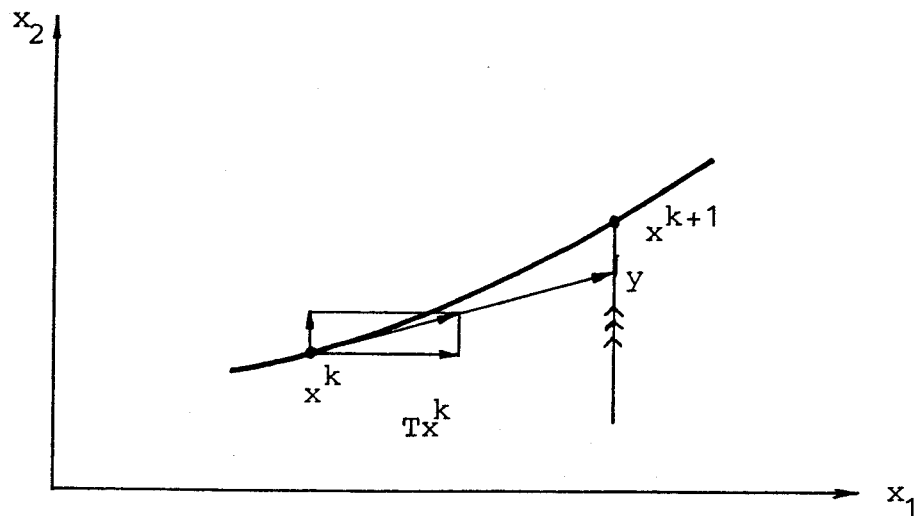
$$|(Tx)^T e_i|$$

sea máximo.

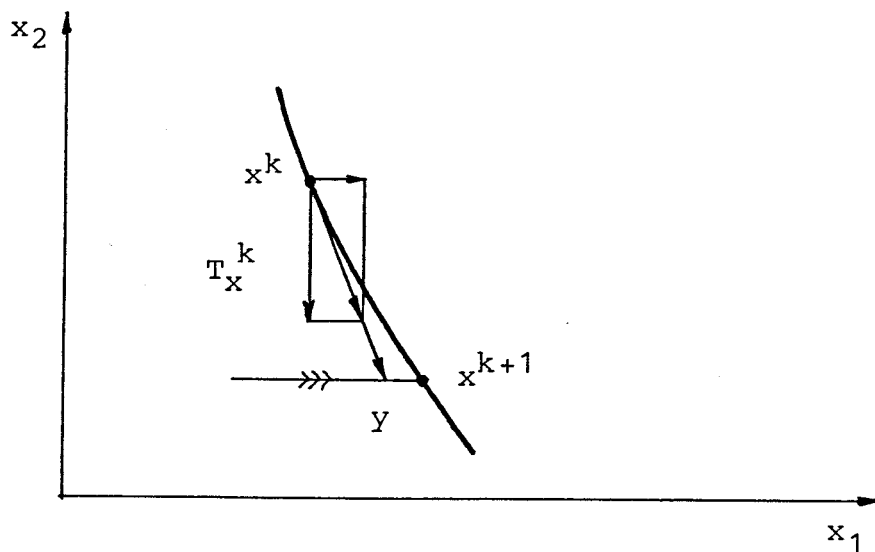
En la figura 2.3 se ilustran geoméricamente estas ideas para el caso más simple ( $n = 1$ ) y se muestran las diversas posibilidades (en este caso, dos) en cuanto a la dirección de las correcciones a efectuar, una vez realizada la predicción del punto  $y$ .

Si usamos para la corrección el método de Newton, el esquema del proceso de continuación, a partir del punto  $x^k$  sobre la cur-





a) Caso en que  $(Tx^k)^T e_1 > (Tx^k)^T e_2$



b) Caso en que  $(Tx^k)^T e_1 < (Tx^k)^T e_2$

Figura 2.3. Predicción y correcciones en el algoritmo de continuación en  $\mathbb{R}^2$ .

→→→ Dirección de las correcciones a partir de  
 $y = x^k + h_{k+1} \cdot T_x^k$

va, sería como sigue:

1) Calcular el vector tangente  $Tx^k$ , que deberá verificar las condiciones a), b) y c) anteriores.

2) Determinar el índice  $i$ , de forma que

$$|e_i^T Tx^k| = \max_{j=1, n+1} |e_j^T Tx^k|$$

3) Escoger el tamaño del paso de continuación,  $h_{k+1} > 0$ .

4) Predecir el punto siguiente  $y$ , mediante

$$y = x^k + h_{k+1} Tx^k$$

5) Con  $y$  como punto inicial, aplicar el método de Newton a la ecuación  $g(x) = 0$ , con

$$a = e_i^T y = y_i$$

6) Si la convergencia es aceptable, tomar la última iteración para definir  $x^{k+1}$ . Repetir con  $x^{k+1}$  los pasos anteriores (1 a 6), si se desean más puntos de continuación.

7) Si la convergencia no es buena, reducir  $h_{k+1}$  y volver al punto 4.

### 2.4.1. El problema de la selección óptima del paso de continuación.

Para la selección del paso óptimo de continuación, es decir, para realizar la tarea correspondiente al paso 3) del proceso que acabamos de describir, conviene basarse en la historia anterior a la obtención del punto considerado.

Si llamamos  $s$  al parámetro que representa la longitud de arco recorrida hasta el momento en la curva solución, como aproximación al segmento siguiente en la curva podríamos usar el polinomio cuadrático:

$$q_k(s) = x^k + (s-s_k)Tx^k + (s-s_k)^2w^k, \text{ con } s > s_k$$

donde

$$w^k = \frac{1}{\Delta s_k} (Tx^k - \frac{1}{\Delta s_k} (x^k - x^{k-1})), \text{ con } \Delta s_k = \left\| x^k - x^{k-1} \right\| \approx |s_k - s_{k-1}|$$

Nótese que la evaluación de  $w^k$  ha de hacerse con cuidado, para evitar los posibles errores de cancelación en la sustracción (debe usarse, por ejemplo, doble precisión).

Teniendo esto en mente, y recordando que la predicción viene dada por

$$y_k(h) = x^k + hTx^k$$

escribimos:

$$\|y_k(h_{k+1}) - x(s_k + h_{k+1})\| \approx \|y_k(h_{k+1}) - q_k(s_k + h_{k+1})\| < \mu_{k+1}$$

con lo que obtenemos la estimación

$$h_{k+1} < \sqrt{\frac{\mu_{k+1}}{\|w^k\|_2}}$$

donde  $\mu_{k+1}$  es una determinada constante de tolerancia, que identificaría una distancia de "seguridad" que, de no sobrepasarse, garantiza la convergencia del proceso corrector.

Para determinar  $\mu_{k+1}$ , podemos basarnos en el proceso corrector realizado para obtener el punto  $x^k$ . Así, llamando  $z$  a la predicción:

$$z = y_{k-1}(h_k) = x^{k-1} + h_k T x^{k-1}$$

podríamos calcular la distancia  $\delta_k$ , entre  $z$  y el propio  $x^k$  (error de predicción):

$$\delta_k = \|z - x^k\|$$

Se podría entonces tomar  $\mu_{k+1} = \delta_k$ , pero esta elección conduce a resultados muy conservadores. Es más, esto llevaría a tomar, cuando el error de predicción es pequeño, pasos de continuación también pequeños, lo que resulta poco coherente. Para evitar estas situaciones, que darían lugar a una sucesión decreciente de pasos de continuación cuando la curvatura cambia poco bruscamente, debemos alterar la elección anterior, y usar entonces:

$$\mu_{k+1} = \theta_{k+1} \delta_k$$

donde  $\theta_{k+1}$  es una cantidad relacionada directamente con la calidad de convergencia del proceso corrector.

En Den Heijer et al. [1981], se estudian dos modelos hipotéticos para la convergencia, cuando se usa el método de Newton como proceso corrector, que no detallaremos aquí. En función de esos modelos aproximados, se dan expresiones para el cálculo del factor  $\theta_{k+1}$ . Desde un punto de vista de carácter práctico, también se indica un enfoque alternativo, que constituye la solución adoptada en las aplicaciones desarrolladas en esta memoria, y que exponemos a continuación.

Definimos un factor de cambio relativo del paso de continuación  $\lambda_{k+1}$ , mediante

$$h_{k+1} = \lambda_{k+1} \Delta s_k$$

y exigiremos que el factor  $\lambda_{k+1}$  se encuentre entre dos valores prefijados:

$$\frac{1}{t} < \lambda_{k+1} < t, \text{ con } t > 1$$

Además, daremos dos cotas para el paso de continuación:

$$0 < h_{\min} < h_{k+1} < h_{\max}$$

Ya se indicó que el cálculo de  $w^k$  requiere cierto cuidado; para evitar errores usaremos las expresiones (ver figura 2.4)

$$\|w^k\|_2 = \frac{2}{\Delta s_k} \left| \text{sen } \frac{\alpha_k}{2} \right|$$

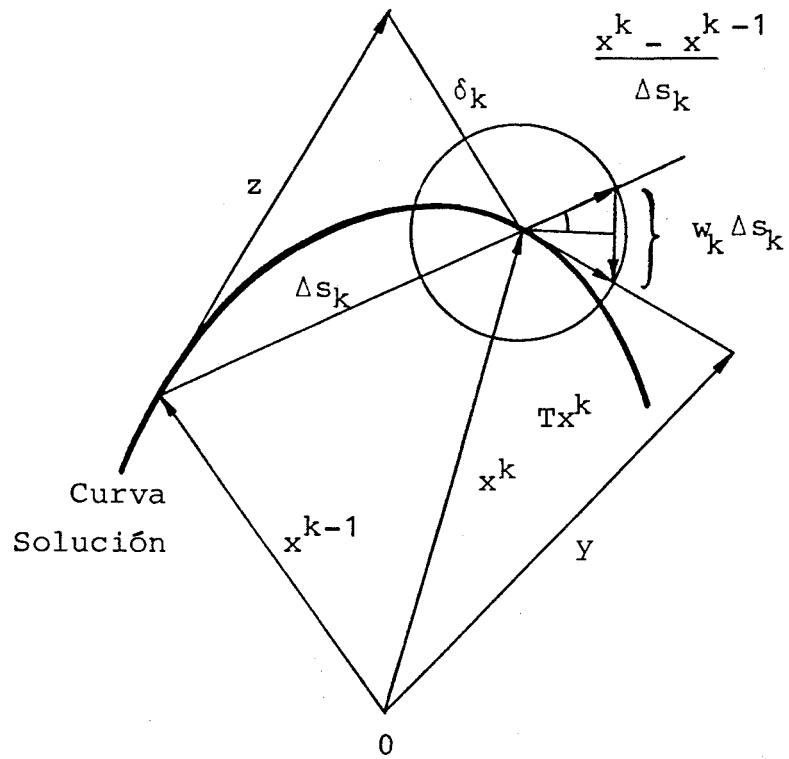


Figura 2.4

Elementos principales en el cálculo del paso de continuación, a partir del último punto calculado  $x^k$ . La circunferencia dibujada tiene radio unidad y el ángulo señalado es  $\alpha_k/2$ .

$z$ : predicción anterior con error  $\delta_k$

$y$ : predicción actual

donde

$$\alpha_k = \arcsin \left( \frac{(Tx^k)^T (x^k - x^{k-1})}{\Delta s_k} \right)$$

De todo lo anterior, deducimos:

$$\lambda_{k+1} = \sqrt{\frac{\frac{\mu_{k+1}}{\Delta s_k}}{2 \left| \sin \frac{\alpha_k}{2} \right|}}$$

Conviene adoptar una cota inferior para el ángulo  $\alpha_k$ , que llamaremos  $\alpha$ . Hecho así, observamos que el numerador del radicado anterior, que indica una tolerancia relativa del proceso corrector, debe estar comprendido entre dos cotas, que se corresponden con los valores extremos permitidos para el factor  $\lambda_{k+1}$  de cambio relativo del paso. Si usamos para dicha tolerancia relativa la notación

$$\sigma_{k+1} = \frac{\mu_{k+1}}{\Delta s_k}$$

deducimos que dichas cotas vienen dadas por:

$$\sigma_{\max} = 2t^2 \sin \frac{\alpha}{2}; \quad \sigma_{\min} = \frac{2}{t^2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{t^2}$$

Como, obviamente, queremos que

$$\sigma_{\min} < \sigma_{\max}$$

necesitamos, entonces, que la cota inferior  $\alpha$  verifique:

$$\alpha > 2 \arcsen (\sqrt{2}t^4)^{-1}$$

Definiendo ahora una función auxiliar, lineal a trozos:

$$Z(x; a, b) = \begin{cases} a & \text{si } x < a \\ x & \text{si } a \leq x \leq b \\ b & \text{si } x > b \end{cases}$$

el proceso de selección del paso puede resumirse como sigue:

a) Cálculo de  $\alpha_k$ ,  $\delta_k$ ,  $\Delta s_k$

b) Obtención de la tolerancia relativa  $\sigma$ , mediante:

$$\sigma_{k+1} = \begin{cases} \sigma_{\max} & \text{si } \left| \text{sen } \frac{\alpha_k}{2} \right| \leq \left| \text{sen } \frac{\alpha}{2} \right| \quad \text{ó } \delta_k \geq \sigma_{\max} \Delta s_k \\ \sigma_{\min} & \text{si } \left| \text{sen } \frac{\alpha_k}{2} \right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ó } \delta_k \leq \sigma_{\min} \Delta s_k \\ \frac{\delta_k}{\Delta s_k} & \text{en los demas casos.} \end{cases}$$

c) Cálculo de  $\lambda_{k+1}$ , mediante

$$\lambda_{k+1} = \sqrt{\frac{\sigma_{k+1}}{2 \text{sen}(Z(\alpha_k; \alpha, \pi/2)/2)}}$$

d) Cálculo de  $h_{k+1}$ , mediante

$$h_{k+1} = Z(\lambda_{k+1} \Delta s_k; h_{\min}, h_{\max})$$

La elección de las constantes  $\alpha$  y  $t$  dependerá del problema en cuestión, pero unos valores de  $\alpha = 0.05$ ,  $t = 3$ , suelen ir bien en la mayoría de los casos. Aunque en este algoritmo no se tienen en cuenta los cambios de comportamiento respecto a la convergencia del proceso corrector, para valores adecuados de las constantes anteriores, se observa una marcha más que aceptable del mismo, como veremos en las aplicaciones.



### 2.4.2. Continuación en las proximidades de puntos singulares.

A la hora de aplicar un proceso de continuación como el descrito, es importante contar con la posibilidad de que existan puntos solución en los que falle la condición:

$$\text{rango } Df(x) = n$$

o lo que es lo mismo, que  $x$  no pertenezca a  $R(f)$ . En este caso, no será posible, en general, seguir adelante con el proceso de continuación. De hecho, en las proximidades de tales puntos se debilita la convergencia del proceso corrector, y el cálculo del vector tangente se hace menos preciso. Además, la posible aparición de una o más ramas secundarias, hace que debamos tener especial atención a estos puntos: habrá que efectuar los correspondientes procesos de continuación sobre esas nuevas ramas si queremos obtener todas las soluciones posibles del problema en cuestión.

El caso más simple de punto de bifurcación a considerar es el de punto límite, para el que la condición anterior se satisface, por lo que no representa ningún obstáculo para el proceso de continuación. Sin embargo, desde el punto de vista del análisis cualitativo, puede ser de interés su localización. Algunos métodos, como los de Abbot [1978], aprovechan la idea de continuación para obtener estimaciones de dichos puntos; otros siguen una orientación distinta, planteando un sistema de ecuaciones ampliado, cuya solución corresponde necesariamente a puntos límite (Seydel [1979]). Para una comparación de estos y otros métodos de localización de puntos límite con diversas variantes, resulta de

interés el trabajo de Melhem y Rheinboldt [1982], donde se relacionan más de una decena de ellos, así como su efectividad, frente a un elenco de problemas concretos.

El caso de los puntos de ramificación es de mayor interés, ya que en ellos intersectan dos o más ramas solución. Aquí la cuestión importante es detectar puntos sobre las ramas secundarias. En Rheinboldt [1978], se analiza uno de tales métodos. Otra posibilidad la constituye el cálculo analítico de las tangentes a las diversas ramas, sobre lo que volveremos más adelante.

### CAPITULO III: TECNICAS DE ANALISIS EN BIFURCACIONES ESTATICAS

En este capítulo nos proponemos mostrar la utilidad y potencia de los métodos de continuación en el análisis cualitativo de sistemas dinámicos, limitándonos a los casos en que aparecen bifurcaciones de los equilibrios, así como incidir en otras técnicas -incluidas técnicas analíticas- que también resultan de interés. El análisis de las bifurcaciones dinámicas, es decir, de las relativas a órbitas periódicas y aperiódicas, será objeto de un capítulo posterior.

Consideraremos sistemas en los que aparecen parámetros, situación muy frecuente en la práctica. Nuestro interés se centra, fundamentalmente, en averiguar qué conducta debemos esperar frente a cada conjunto de valores de dichos parámetros, determinando rangos de igual comportamiento cualitativo. Trabajaremos así con ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^p$$

Un objetivo esencial del análisis es, por tanto, determinar en su totalidad el diagrama de equilibrios del sistema, lo que nos lleva a resolver ecuaciones del tipo

$$f(x,u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^p$$

donde  $p$ , la dimensión del espacio de parámetros es pequeña, normalmente uno o dos. Trabajaremos inicialmente con parámetros unidimensionales, pero dado que en las aplicaciones que analizaremos

aparece con frecuencia el caso bidimensional, extenderemos en lo posible las técnicas desarrolladas a este caso. Debemos notar que entonces es definitivo el obtener también un diagrama en el plano de parámetros que delimite las regiones de igual comportamiento, con lo que conseguiremos una visión global del sistema en estudio. Este diagrama en el plano de parámetros, no es otra cosa que la correspondiente proyección del diagrama de equilibrios, pero el pasar de uno a otro no resulta en muchos casos una tarea trivial.

### 3.1. Técnicas de análisis local de los equilibrios y de sus bifurcaciones.

Un primer objetivo a cubrir en el análisis cualitativo de sistemas dinámicos es el caracterizar el comportamiento de las soluciones próximas a un equilibrio dado. Esta tarea, relativamente simple en el caso de los sistemas lineales, necesita de útiles específicos cuando abordamos el estudio de sistemas de tipo general, que a menudo resultan ser no lineales. Es más, sería de gran interés el contar con un conjunto de condiciones que permitiera el catalogar las diversas situaciones, reduciendo, si fuera posible, a unas cuantas clases de equivalencia (hablando en sentido cualitativo) todos los casos.

Prescindiendo por ahora del parámetro, supongamos que conocemos un equilibrio  $\bar{x}$  del sistema no lineal:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

cuyo flujo asociado denotaremos por  $F_t$ . Podríamos construir, como aproximación a este sistema, otro que fuera resultado de linealizar el anterior. En concreto, si  $Df(\bar{x})$  representa la matriz jacobiana de  $f$  en  $\bar{x}$  y establecemos un sistema de coordenadas en ese punto, cabría esperar que el comportamiento del sistema (lineal):

$$\frac{dy}{dt} = Df(\bar{x}) y$$

reprodujera cualitativamente el del no lineal. La respuesta precisa se corresponde con el teorema de Hartman-Grobman:

"Si  $Df(\bar{x})$  no tiene autovalores con parte real cero, existe un homeomorfismo definido en un entorno de  $\bar{x}$ , que transforma las orbitas del flujo  $F_t$  en las del flujo lineal  $e^{tDf(\bar{x})}$ . Este homeomorfismo conserva el sentido de las órbitas, y puede ser escogido también de forma que preserve la parametrización temporal" (ver Guckenheimer & Holmes [1986]).

La importancia de este resultado hace que para los equilibrios que cumplen las hipótesis del teorema se reserve un nombre especial. Diremos que un equilibrio  $\bar{x}$  es **hiperbólico** si la correspondiente matriz  $Df(\bar{x})$  no tiene autovalores cero ni imaginarios puros. El análisis local de equilibrios hiperbólicos se reduce pues al estudio del correspondiente sistema lineal (para una descripción más detallada, cfr. Hirsch & Smale [1974], Braun [1978]).

La resolución conjunta para este ejemplo de

$$f(x,u) = 0$$

$$D_x f(x,u) = u - 3x^2 = 0$$

implica que el único punto posible de bifurcación de equilibrios es el  $(0,0)$ . Un análisis más detallado lleva a confirmar la situación, pues el único equilibrio existente para  $u < 0$  (el  $x = 0$ ), pierde su estabilidad para  $u > 0$ , y para estos valores del parámetro aparecen dos nuevos equilibrios estables ( $x = \pm \sqrt{u}$ ).

Como indica el ejemplo anterior, la aparición de bifurcaciones está íntimamente ligada a la pérdida de hiperbolicidad de los equilibrios. Ya que para equilibrios no hiperbólicos no podemos usar el resultado de Hartman-Grobman, tanto para su análisis local como para la caracterización precisa de una bifurcación, es necesario disponer de técnicas adicionales.

El teorema de la variedad de centros representa un paso importante en este sentido. Asegura, en el caso no hiperbólico, la existencia de una variedad local (**variedad de centros**), invariante al flujo del sistema, tangente al subespacio de centros de la linealización, y con su misma dimensión. Esta variedad existe conjuntamente con las correspondientes variedades invariantes estable e inestable del equilibrio en cuestión. Debemos señalar que la variedad de centros no tiene por qué ser única, y que sus condiciones de analiticidad suelen ser peores que las correspondientes a las otras variedades invariantes (Cfr. Carr [1981]). De todas formas, el análisis del comportamiento del flujo sobre dicha variedad, junto con el análisis de la estructura de las varieda-

des estable e inestable, permite adquirir una información sobre el flujo local, que será de gran valor.

Recurriendo a los términos del desarrollo de Taylor de grado superior al primero que aproximan la variedad de centros, puede plantearse un sistema reducido (en cuanto a la dimensión) que reproduzca cualitativamente la estructura del flujo sobre dicha variedad. Se consigue así un sistema de dimensión igual al subespacio  $L^C$  (subespacio de centros) de la linealización.

Para mayor simplicidad, y dado que es el caso más interesante en la práctica porque pueden aparecer nuevas soluciones estables, supongamos que la variedad inestable es vacía y que (quizás después de haber efectuado un cambio de variables) la parte lineal del sistema aparece en forma de matriz diagonal por bloques:

$$\frac{dx}{dt} = Bx + f(x,y)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$$

$$\frac{dy}{dt} = Cy + g(x,y)$$

donde  $B$  y  $C$  son matrices cuadradas de órdenes  $n$  y  $m$ , cuyos autovalores tienen, respectivamente, parte real cero y parte real negativa, y  $f$  y  $g$  son tales que se anulan junto con sus primeras derivadas parciales en el origen. Podemos entonces representar la variedad de centros como la gráfica local de una función de forma que:

$$W^C = \{(x,y) : y = h(x) \text{ con } h(0) = 0, Dh(0) = 0\}$$

ya que ha de ser tangente a  $L^C$  (subespacio de centros de la linealización). Si consideramos la proyección sobre  $L^C$  del campo vectorial en los puntos de la variedad, obtendremos una buena aproximación del flujo sobre la misma, por lo que construiremos el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = Bx + f(x, h(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

que reproduce cualitativamente el comportamiento del sistema original. Para resolver el problema del cálculo de  $h$ , se recurre a su desarrollo en serie hasta un grado prefijado y observando que

$$\frac{dy}{dt} = D_x h \frac{dx}{dt} = D_x h (Bx + f(x, h(x)))$$

se debe tener:

$$Ch(x) + g(x, h(x)) = D_x h (Bx + f(x, h(x)))$$

igualdad que mediante identificación de coeficientes del mismo grado conduce a la solución buscada.

Para el estudio de este sistema reducido puede ser útil el uso de técnicas adicionales, como su conversión a forma normal. Básicamente, esta técnica consiste en una sistematización de los cambios de variables apropiados que permiten remover del modelo los términos no lineales que no son esenciales, y conseguir así un modelo equivalente más sencillo.

Con la ayuda de las dos técnicas anteriores, pueden analizarse también las bifurcaciones de los sistemas con parámetros.



Para ello, se recurre a aumentar la dimensión del mismo, **sub-**pendiendo el sistema original y formando el modelo:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u)$$

$$\frac{du}{dt} = 0$$

para a continuación conseguir un modelo reducido que puede corresponderse con algún modelo canónico o forma normal, ya suficientemente analizados. Se pueden conseguir también condiciones precisas sobre  $f$  para asegurar qué tipo de bifurcación se presenta en un problema determinado.

Aunque, a lo largo de esta memoria, no haremos uso de estas técnicas para el análisis de bifurcaciones de órbitas periódicas, dejaremos constancia de que, tanto el cálculo de la variedad de centros como el recurso a formas normales, son también aplicables para dicho caso.

Cuando los cambios cualitativos del flujo no están esencialmente asociados a alteraciones en las estructuras de los equilibrios (o de las órbitas periódicas), o a su estabilidad, sino que intervienen otras circunstancias (generalmente, fenómenos de intersección entre variedades estables e inestables), hablaremos de **bifurcaciones globales**. Su estudio es más complejo, ya que no bastará con el análisis de los elementos críticos del sistema.

Limitándonos a bifurcaciones locales de los equilibrios (o, como veremos más adelante, de los puntos fijos de las aplicaciones de Poincaré en el caso de órbitas periódicas), uno de los objetivos del análisis cualitativo es, como ya se ha indicado, el obtener una lista completa de los distintos casos que pueden presentarse. Por desgracia esta tarea parece necesitar aún de grandes esfuerzos de investigación y sistematización.

Suele definirse la **codimensión** de una bifurcación como la mínima dimensión del espacio de parámetros que es necesaria para que el fenómeno sea persistente ante perturbaciones. Repasaremos brevemente, en lo que sigue, las bifurcaciones de codimensión uno de los equilibrios, para las que el desarrollo sí está completo.

Para describir las posibles bifurcaciones de codimensión uno de los equilibrios, consideraremos cuatro modelos sencillos dotados de un parámetro unidimensional, que ejemplifican el comportamiento a esperar en modelos más complejos. De hecho consideraremos modelos de una dimensión en el espacio de estados, salvo el último que será de dimensión dos.

Las bifurcaciones que presentan se producen en el origen del espacio de estados y para el valor  $u = 0$  del parámetro. Ya hemos indicado como el cálculo de la variedad de centros y, en su caso, el uso de formas normales, permiten asimilar modelos de superior dimensión a alguno de estos cuatro casos.

Los modelos a considerar son los siguientes:

- (I)  $\frac{dx}{dt} = u - x^2$  Bifurcación silla-nodo
- (II)  $\frac{dx}{dt} = ux - x^2$  Bifurcación transcítica
- (III)  $\frac{dx}{dt} = ux - x^3$  Bifurcación tridente  
(pitchfork)
- (IV)  $\frac{dx_1}{dt} = -x_2 + x_1 (u - (x_1^2 + x_2^2))$   
 $\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 (u - (x_1^2 + x_2^2))$  Bifurcación de Hopf

Si, como ha sido habitual, denotamos por  $f(x,u)$  los correspondientes campos vectoriales, observamos que los tres primeros modelos tienen en común que

$$\frac{df}{dx}(0,0) = 0$$

con lo que las correspondientes linealizaciones en el equilibrio  $(x_0, u_0) = (0,0)$  poseen un autovalor cero. Destacaremos, por el momento, que la bifurcación silla-nodo se caracteriza por la ausencia de equilibrios para  $u < 0$ , y la aparición de dos (uno inestable y otro estable) para  $u > 0$ , mientras que en la bifurcación transcítica dos equilibrios de estabilidad opuesta intersectan e intercambian su estabilidad. La bifurcación tridente es la correspondiente al ejemplo de la introducción de este apartado; en la bifurcación de Hopf, un equilibrio estable se vuelve inestable para  $u > 0$ , dando lugar a una órbita periódica estable de amplitud creciente con  $u$ .

Las bifurcaciones pitchfork y de Hopf descritas se conocen como **supercríticas** pues, alterando algunos signos en los modelos anteriores, se darían situaciones en cierto sentido opuestas. Ocurrirían en ese caso fenómenos de destrucción de equilibrios y de órbitas inestables, junto con la pérdida de estabilidad del equilibrio inicialmente estable, al paso por  $u = 0$ . Son las llamadas bifurcaciones **subcríticas**.

Las bifurcaciones de equilibrios no son los únicos fenómenos responsables de cambios topológicos en el flujo, como veremos más adelante. Pero los diagramas de equilibrios, que describen la evolución de los mismos frente a los parámetros, constituyen un poderoso elemento de análisis. La necesidad de métodos numéricos específicos para su cálculo quedará patente en las aplicaciones. Uno de los objetivos de esta memoria, lo constituye precisamente el mostrar cómo utilizar un método de propósito general (el método de continuación) para este tipo de problemas. Abordamos, en lo que sigue, esta cuestión.

### 3.2. Bifurcaciones de sistemas con parámetro unidimensional

Suponemos ahora que el parámetro  $u$  es un escalar, y nos enfrentamos al problema de resolver la ecuación no lineal

$$f(x,u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}$$

cuyas soluciones describen la dependencia de los diversos equilibrios del sistema respecto al parámetro. Supuesta  $f$  diferenciable con continuidad, y conocido un equilibrio  $(\bar{x}, \bar{u})$  del sistema, el

teorema de la función implícita nos asegura que, en las proximidades de dicho punto, existe una función diferenciable única  $x(u)$ , que define la rama solución que pasa por dicho punto (es decir,  $x(\bar{u}) = \bar{x}$ ), siempre que

$$\det D_x f(\bar{x}, \bar{u}) \neq 0$$

En estas condiciones, a partir del punto  $(\bar{x}, \bar{u})$  y usando un proceso de continuación como el descrito en el apartado 2.4 del capítulo anterior, podríamos ir siguiendo la rama solución hasta completar el diagrama de equilibrios. Para ello, habrá que asegurar que no existen otras ramas aisladas o separadas de la ya obtenida.

Dos problemas aparecen inmediatamente. Por un lado, hemos de ser capaces de obtener un punto inicial. Para ello, o bien contamos con soluciones triviales, reconocibles por simple inspección de las ecuaciones, o bien podríamos fijar el valor del parámetro, y plantearnos previamente el resolver la ecuación

$$f(x, \bar{u}) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Entre otros métodos numéricos, el método de continuación puede ser útil de nuevo para localizar el valor  $\bar{x}$  que necesitamos.

Una vez que hemos iniciado un proceso de continuación, a partir del punto  $(\bar{x}, \bar{u})$ , hemos de prever cómo actuar en las inmediaciones de un punto de bifurcación o, más concretamente, cuando aparece, para la matriz  $D_x f$ , un autovalor cero.

El proceso de continuación que emplearemos usa la parametrización mediante la longitud de arco. Este hecho es decisivo para estudiar qué problemas pueden aparecer cuando  $\det D_x f(x,u) = 0$ , ya que (ver apartado 2.2) un proceso de esas características no asigna al parámetro  $u$  un papel primordial. Observamos que la condición anterior puede reformularse como

$$\text{rango } D_x f < n$$

Admitamos que el rango de la matriz derivada es precisamente  $n-1$ . En estas condiciones, si ampliamos la matriz incluyendo como vector columna adicional a  $D_u f$ , puede ocurrir que la nueva matriz verifique

$$\text{rango } \left[ \begin{array}{c|c} D_x f & D_u f \end{array} \right] = n$$

o no. Si se satisface en el punto en cuestión la ecuación anterior, el punto es llamado punto límite, y será posible elegir, como ya indicamos, alguna coordenada respecto a la cual la continuación no presente ningún problema.

Ya que los puntos límite se corresponden con bifurcaciones silla-nodo de equilibrios, conviene que analicemos las hipótesis que aseguran que estamos en presencia de una bifurcación de dicho tipo para el sistema  $dx/dt = f(x,u)$  en un punto dado  $(x_0, u_0)$ , equilibrio del mismo. Son condiciones suficientes (ver v.g. Freire [1982]):

(C1) La matriz  $D_x f(x_0, u_0)$  posee un autovalor cero simple y  $n-1$  autovalores con parte real negativa.

(C2) Si  $v, w$  son autovectores izquierdo y derecho respectivamente de la matriz anterior para el autovalor nulo, se verifica

$$w^T D_{xx} f(x_0, u_0)(v, v) \neq 0$$

$$(C3) w^T D_u f(x_0, u_0) \neq 0$$

En la condición C1, el hecho de que los  $n-1$  autovalores restantes tengan parte real negativa se exige para que en la bifurcación haya involucrados equilibrios estables, por lo que no es esencial en relación al comportamiento cualitativo de la rama de equilibrios. La segunda condición hace referencia a que dicha rama presenta una tangencia cuadrática al hiperplano

$$R^n \times \{u_0\}$$

mientras que la condición C3 -junto con C1- equivale a que el rango de la matriz ampliada sea el máximo posible, es decir,  $n$ . Podemos pues afirmar, a la vista de C1 y C3, que los procesos de continuación que utilizaremos superan sin dificultades las bifurcaciones silla-nodo pues, como el proceso de continuación es adaptativo por naturaleza, al llegar a dicho punto ya estaremos trabajando con el parámetro adecuado que evita las posibles dificultades.

La condición C2 garantiza que la bifurcación es la señalada pero, de no verificarse, el punto en cuestión aún puede constituir una bifurcación silla-nodo. En cualquier caso, su consideración es irrelevante con relación al problema de continuación.

Como se ha indicado, la condición C3 es determinante a la hora de posibilitar el proceso de continuación. Para el caso de las bifurcaciones transcritical y pitchfork se mantiene C1, pero dichas bifurcaciones presentan comportamientos diversos respecto a C2 y ambas dejan insatisfecha la condición C3. En ambos casos, son necesarias condiciones adicionales que aseguren que la bifurcación no degenera en otras de mayor complejidad.

En concreto, para asegurar que en el punto de bifurcación intersectan sólo dos curvas de equilibrio, si  $x(u)$  es una rama solución que se supone conocida ( $x(u_0) = x_0$ ), y  $\lambda(u)$  es la función que proporciona el autovalor que se anula en  $(x_0, u_0)$  —es decir  $\lambda(u_0) = 0$ —, se exige (Crandall & Rabinowitz [1971]):

$$\frac{d\lambda}{du}(u_0) \neq 0$$

que es la llamada condición de Hopf (CH). La condición indica que el autovalor crítico pasa por cero con una velocidad no nula. Dejemos constancia, por el momento, que si hacemos

$$A(u) = D_x f(x(u), u)$$

entonces se comprueba que

$$\frac{d\lambda}{du}(u_0) = \frac{w^T A'(u_0) v}{w^T v}$$

donde  $A'(u_0)$  indica la derivada de  $A(u)$  respecto a  $u$  en  $u_0$ . Y ya que los autovectores derecho e izquierdo son tales que

$$w^T v \neq 0$$



(ver Ioss & Joseph [1980]), la condición de Hopf es equivalente a:

$$w^T (D_{xx}f(x_0, u_0) D_u x(u_0) + D_{xu}f(x_0, u_0))v \neq 0$$

Volvamos ahora a nuestro problema de continuación. Si desde el punto de vista conceptual, la continuación puede presentar dificultades, en la práctica basta ejercer un control sobre el paso de continuación para sobrepasar la bifurcación y seguir en la rama de soluciones original. Pero lo que es más importante es describir convenientemente la otra rama que intersecta. Una forma efectiva de hacerlo consiste en obtener información sobre el vector tangente a la rama secundaria en el punto de bifurcación, y localizar así un punto desde el cual sea posible iniciar un nuevo proceso de continuación. Esta idea es susceptible de uso aún en el caso de que la bifurcación se corresponda con un punto de bifurcación múltiple, como veremos enseguida.

### 3.2.1. Cálculo analítico de las tangentes en un punto de ramificación múltiple

Para el cálculo de las tangentes en un punto de bifurcación, nos situaremos en un contexto más general. Así, supondremos que conocemos una parametrización de una rama arbitraria que intersecta en el punto de bifurcación respecto a la longitud de arco  $s$ . Es decir contamos con una curva solución  $(x(s), u(s))$  con

$$x(s_0) = x_0, \quad u(s_0) = u_0$$

y suficientemente diferenciable. Permitiremos que la degeneración

en el punto  $(x_0, u_0)$  sea superior al caso ya analizado, es decir,

$$\dim \ker D_x f(x_0, u_0) = m \geq 1$$

y admitiremos que estamos en el caso en que se invalida una condición análoga a C3, de forma que

$$D_u f(x_0, u_0) \in \text{Rango } D_x f(x_0, u_0)$$

En estas condiciones, si suponemos que el autovalor nulo tiene igual multiplicidad algebraica que geométrica, podemos encontrar, para la matriz  $D_x f(x_0, u_0)$ ,  $m$  autovectores derechos,

$$v_1, v_2, \dots, v_m$$

y  $m$  autovectores izquierdos,

$$w_1, w_2, \dots, w_m$$

escogidos de tal manera que se verifique:

$$w_i^T v_j = \delta_{ij}; \quad i, j = 1, 2, \dots, m \text{ (delta de Kronecker)}$$

Hecha esta elección, queda determinado unívocamente un vector  $v_0$  que cumple:

$$D_x f(x_0, u_0)v_0 + D_u f(x_0, u_0) = 0$$

además de

$$w_i^T v_0 = 0 \text{ para } 1 < i < m$$

Ahora, si denotamos la derivación respecto al parámetro  $s$  con primas, dado que

$$f(x(s), u(s)) = 0$$

tendremos que, en el punto  $(x_0, u_0)$ :

$$D_x f(x_0, u_0)x'(s_0) + D_u f(x_0, u_0)u'(s_0) = 0$$

O lo que es lo mismo, el vector

$$(x'(s_0), u'(s_0))$$

está en el núcleo de la matriz ampliada

$$\left[ \begin{array}{c|c} D_x f & D_u f \end{array} \right]$$

que es un subespacio de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , tiene dimensión  $m+1$  y está generado por los vectores

$$(v_1, 0), (v_2, 0), \dots, (v_m, 0), (v_0, 1)$$

Hemos de concluir que, si tomamos

$$q_0 = u'(s_0)$$

existirán otros  $m$  escalares

$$q_1, q_2, \dots, q_m$$

para los que

$$x'(s_0) = \sum_{i=1}^m q_i v_i$$

Inmediatamente comprobamos que

$$q_i = w_i^T x'(s_0) \quad \text{para } 1 \leq i \leq m$$

Si volvemos a derivar respecto al parámetro, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& D_{xx}f(x_0, u_0)(x'(s_0), x'(s_0)) + \\
& + 2D_{xu}f(x_0, u_0)x'(s_0)u'(s_0) + \\
& + D_{uu}f(x_0, u_0)u'(s_0)^2 + D_xf(x_0, u_0)x''(s_0) \\
& + D_u f(x_0, u_0)u''(s_0) = 0
\end{aligned}$$

y se observa que los dos últimos sumandos pertenecen a la imagen del operador

$$D_x f(x_0, u_0)$$

Por tanto, el resto de la expresión también pertenece al mismo subespacio, por lo que

$$\begin{aligned}
& w_i^T (D_{xx}f(x_0, u_0)(x'(s_0), x'(s_0)) + \\
& + 2D_{xu}f(x_0, u_0)x'(s_0)u'(s_0) + \\
& + D_{uu}f(x_0, u_0)u'(s_0)^2) = 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq m
\end{aligned}$$

Si expresamos ahora  $x'(s_0)$  en función de los autovectores  $v_i$ , y usamos la notación:

$$\begin{aligned}
a_{ijk} &= w_i^T D_{xx}f(x_0, u_0)(v_j, v_k) \\
b_{ij} &= w_i^T (D_{xx}f(x_0, u_0)(v_0, v_j) + D_{xu}f(x_0, u_0)v_j) \\
c_i &= w_i^T (D_{xx}f(x_0, u_0)(v_0, v_0) + 2D_{xu}f(x_0, u_0)v_0 + \\
& \quad + D_{uu}f(x_0, u_0))
\end{aligned}$$

donde  $1 \leq j, k \leq m$ , llegamos al sistema siguiente de  $m$  ecuaciones con  $m+1$  incógnitas  $q_0, q_1, \dots, q_m$ :

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ijk} q_j q_k + 2 \sum_{j=1}^m b_{ij} q_j q_0 + c_i q_0^2 = 0$$

para  $1 \leq i \leq m$ . Toda rama solución que interseca en  $(x_0, u_0)$  debe tener por tanto como vector tangente

$$(x'(s_0), u'(s_0))$$

un vector cuyas coordenadas

$$(q_0, q_1, \dots, q_m)$$

en la base formada por los vectores ampliados

$$(v_0, 1), (v_1, 0), \dots, (v_m, 0)$$

verifiquen el sistema anterior. Nótese que las soluciones del sistema anterior, por ser homogéneo, están determinadas salvo múltiplos. Si el sistema anterior tiene  $r \geq 2$  soluciones distintas no triviales, puede asegurarse que en el punto de bifurcación interseccionan al menos  $r$  curvas solución con las correspondientes tangentes (Keller [1977]).

A partir del cálculo anterior, es fácil determinar aproximaciones a puntos en cada rama solución y completar el proceso de continuación describiendo todas las ramas secundarias. Usaremos este algoritmo más adelante en algunas de las aplicaciones desarrolladas a lo largo de esta memoria. Un enfoque alternativo a este problema lo constituye el estudio de Kubicek & Klic [1983].

Limitándonos al caso  $m = 1$ , que es el correspondiente a los puntos de bifurcación pitchfork y transcítica, el sistema anterior se reduce a una sola ecuación:

$$a_{111} q_1^2 + 2 b_{11} q_1 q_0 + c_1 q_0^2 = 0$$

Notemos que, si el par  $(q_0, q_1)$  es una solución no trivial, entonces, si se verifica

$$a_{111} q_1 + b_{11} q_0 \neq 0, \text{ con } q_0 \neq 0$$

está asegurado que el otro par solución es distinto. Esta última desigualdad puede reescribirse de forma equivalente a la condición de Hopf:

$$w^T (D_{xx} f(x_0, u_0) x'(s_0) + D_{xu} f(x_0, u_0) u'(s_0)) \neq 0$$

con lo que el desarrollo anterior proporciona un camino alternativo para su consecución.

### 3.3. Bifurcaciones en presencia de dos parámetros.

En las aplicaciones que se analizan en los apartados siguientes es frecuente la aparición de dos parámetros. Desde el punto de vista de la teoría de bifurcaciones, al contar con dos parámetros, pueden existir fenómenos de bifurcación más complejos que los comentados anteriormente. El estudio de las diversas situaciones posibles no está aún plenamente sistematizado pero, si hablamos con cierta generalidad, todas las técnicas anteriores son susceptibles de aplicación, ya que bastaría considerar uno de los parámetros fijo y hacer jugar al otro el papel de parámetro esencial. Adoptando diversos valores para el parámetro que dejamos invariable, y repitiendo convenientemente el análisis, quedarían cubiertos los casos más notables.

En el apartado anterior se ha reseñado como el método de continuación cubre prácticamente las necesidades de herramientas numéricas y cómo pueden ser necesarios otros útiles analíticos

(como por ejemplo el cálculo de las tangentes), para tratar bifurcaciones de mayor codimensión. Ahora, con dos parámetros, la aparición de bifurcaciones de codimensión dos o superior, para las que su caracterización mediante condiciones necesarias y suficientes no está completamente sistematizada, será más frecuente. Como veremos enseguida, la presencia de simetría en el sistema puede simplificar de manera notable el análisis.

### 3.3.1. Reducción local de sistemas con simetría mediante el cálculo de la variedad de centros.

En el apartado 3.1 se describe brevemente la utilidad del cálculo de la variedad de centros, como método para llegar a un sistema de menor dimensión que proporciona toda la información necesaria para caracterizar el tipo de bifurcación. Analizaremos ahora cómo aprovechar el hecho de que eventualmente el sistema en estudio posea algún tipo de simetría, lo cual es una circunstancia frecuente en las aplicaciones.

Supongamos que, posiblemente después de haber efectuado una traslación que lleve el punto de bifurcación al origen, escribimos el sistema dinámico en cuestión de la forma:

$$\frac{dz}{dt} = Az + Q(z), \quad z \in \mathbb{R}^p$$

con  $A$  matriz cuadrada de orden  $p$  y  $Q$  función que recoge la parte no lineal. Si  $G$  denota el grupo de simetrías que posee dicho sistema, para toda simetría  $S$  perteneciente a  $G$  se tiene:

$$S (Az + Q(z)) = A (Sz) + Q(Sz)$$

Es inmediato comprobar entonces que, para cada matriz  $S$  que se corresponda con una simetría del grupo  $G$ , se verifica la condición

$$S A = A S$$

que indica que su producto con la matriz  $A$  es conmutativo. Ya que el caso de interés excluye equilibrios inestables, admitiremos que la matriz  $A$ , que define la linealización del sistema, tiene  $n$  autovalores con parte real cero y  $m$  autovalores con parte real negativa, siendo  $p = n + m$ . Es usual entonces, con objeto de desacoplar en la parte lineal las direcciones estables del resto, realizar un cambio de variables, tomando como nueva base una formada por autovectores y en su caso también por autovectores generalizados. A la vista de la propiedad conmutativa anterior es inmediato probar que los autoespacios de  $A$  son invariantes bajo toda simetría  $S$  de  $G$ .

Sea  $P$  la matriz de cambio de base, que elegiremos de forma que:

$$J = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

con  $B$  matriz cuadrada de orden  $n$ , con espectro sobre el eje imaginario, y  $C$  matriz cuadrada de orden  $m$ , con espectro en el semiplano izquierdo del plano complejo. La estructura de la matriz  $J$  sugiere hacer la descomposición



$$z^* = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

donde  $z^*$  denota el vector de variables de estado en la nueva base, verificándose:

$$z = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\frac{dz^*}{dt} = Jz^* + P^{-1}Q(Pz^*)$$

La última expresión responde a la formulación de la ley de evolución del sistema en la base elegida.

Si ahora elegimos cualquier elemento  $S$  del grupo de simetrías  $G$  que admitía el sistema en su formulación inicial, y construimos la representación matricial

$$S^* = P^{-1}S P$$

es inmediato comprobar que

$$S^*(Jz^* + P^{-1}Q(Pz^*)) = J(S^*z^*) + P^{-1}Q(P(S^*z^*))$$

Basta entonces escribir las matrices representantes del grupo en la nueva base, para obtener su nueva representación matricial. De nuevo, se tiene que

$$S^*J = J S^*$$

y el hecho de que los autoespacios de  $A$  eran invariantes bajo cualquier elemento  $S$  de  $G$ , se traslada ahora a los autoespacios

de la matriz  $J$ , que resultan invariantes para las correspondientes  $S^*$ .

Es especialmente relevante a la vista de las conclusiones anteriores que, debido a la estructura de la matriz  $J$ , tengamos que todo elemento  $S^*$  responde siempre a la estructura:

$$S^* = \begin{bmatrix} S_B & 0 \\ 0 & S_C \end{bmatrix}$$

donde  $S_B$  es una matriz cuadrada de orden  $n$  y  $S_C$  es una matriz cuadrada de orden  $m$  que verifican:

$$S_B B = B S_B$$

$$S_C C = C S_C$$

ya que podemos entonces realizar para las simetrías una descomposición paralela a la efectuada en el sistema.

Resumimos los resultados anteriores concluyendo que, en la nueva base, el sistema admite la formulación:

$$\frac{dx}{dt} = Bx + f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = Cy + g(x,y)$$

(las funciones  $f$  y  $g$  recogen ahora la parte no lineal) cuya equi-  
variancia respecto a los elementos  $S^*$  comporta que:

$$S_B(Bx + f(x,y)) = B(S_B x) + f(S_B x, S_C y)$$

$$S_C(Cy + g(x,y)) = C(S_C y) + g(S_B x, S_C y)$$

donde asumimos que  $S^* = \text{diag} (S_B, S_C)$ . Estamos ahora en condiciones de demostrar, tanto para la variedad de centros como para el sistema reducido que resume el comportamiento sobre dicha variedad, las repercusiones del hecho de que el sistema original sea equivariante respecto a un grupo de simetrías.

Recordemos que la variedad de centros es una variedad invariante al flujo del sistema, y tangente al espacio de centros. Si la denotamos por

$$M \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

se puede afirmar que el origen pertenece a  $M$  y será además tangente al autoespacio de la matriz  $B$  en ese punto. Además

$$F_t(M) \subset M$$

( $F_t$  indica el flujo asociado al sistema). Localmente, por tanto, la variedad de centros se puede describir mediante la gráfica de una función  $y = h(x)$ , con

$$h(0) = 0$$

$$D_x h(0) = 0$$

que debe verificar además, dado su carácter invariante respecto al flujo local:

$$Ch(x) + g(x, h(x)) = D_x h(x) (Bx + f(x, h(x)))$$

Veamos, en primer lugar, que la variedad de centros resulta invariante respecto a las simetrías  $S^*$ , en el sentido siguiente:

$$S_C h(x) = h(S_B x)$$

Para ello, si definimos

$$h^*(x) = S_C^{-1} h(S_B x)$$

comprobamos que:

$$h^*(0) = 0$$

$$D_x h^*(0) = S_C^{-1} D_x h(0) S_B = 0$$

lo que postularía que  $h^*$  representa una variedad de centros, siempre que:

$$Ch^*(x) + g(x, h^*(x)) = D_x h^*(x) (Bx + f(x, h^*(x)))$$

Si analizamos el primer miembro de la última igualdad, obtenemos:

$$\begin{aligned} C S_C^{-1} h(S_B x) + g(x, S_C^{-1} h(S_B x)) &= \\ = S_C^{-1} Ch(S_B x) + g(S_B^{-1}(S_B x), S_C^{-1} h(S_B x)) &= \\ = S_C^{-1} Ch(S_B x) + S_C^{-1} g(S_B x, h(S_B x)) &= \\ = S_C^{-1} D_x h(S_B x) (B S_B x + f(S_B x, h(S_B x))) & \end{aligned}$$

donde hemos usado las propiedades, ya indicadas, de la descomposición de  $S^*$ , de la simetría del sistema, y de la función  $h$ . Si hacemos lo propio con el miembro derecho, resulta:

$$\begin{aligned} S_C^{-1} D_x h(S_B x) S_B (Bx + f(x, S_C^{-1} h(S_B x))) &= \\ = S_C^{-1} D_x h(S_B x) (S_B B x + S_B f(x, S_C^{-1} h(S_B x))) &= \\ = S_C^{-1} D_x h(S_B x) (B S_B x + f(S_B x, h(S_B x))) & \end{aligned}$$

con lo que queda probado que  $h^*$  define una variedad de centros y por tanto  $h^* = h$  (en el sentido de tener idénticos  $k$ -jets o polinomios aproximantes; ver Carr [1981])

Notemos que lo anterior garantiza que, para  $(x, h(x)) \in M$ , se tiene:

$$S^*(x, h(x))^T = (S_B x, S_C h(x))^T = (S_B x, h(S_B x))^T \in M$$

o equivalentemente, suprimiendo ya el asterisco que indica meramente una base específica de trabajo:

$$S M \subset M$$

con lo que queda probado que la variedad de centros hereda la simetría del sistema, al ser invariante a todos los elementos de la misma.

Es ahora una tarea sencilla comprobar que el sistema reducido

$$\frac{dx}{dt} = Bx + f(x, h(x))$$

que define la proyección del flujo de la variedad sobre el espacio de centros, también goza de propiedades simétricas. En concreto, hereda las simetrías correspondientes al primer elemento de la descomposición efectuada en el espacio  $o$ , en otras palabras, las correspondientes a la representación matricial —que denotamos  $S_B$ — del grupo de simetrías sobre el autoespacio de  $B$ . En efecto, deducimos:

$$\begin{aligned} S_B(Bx + f(x, h(x))) &= \\ &= S_B Bx + S_B f(x, h(x)) = \\ &= B S_B x + f(S_B x, S_C h(x)) = \\ &= B S_B x + f(S_B x, h(S_B x)) \end{aligned}$$

Estos resultados serán de gran utilidad para abreviar los cálculos que se necesitan para realizar el análisis local de equilibrios no hiperbólicos (ver apartados 3.4.1 y 3.4.2).

### 3.3.2. Técnicas numéricas con dos parámetros.

Desde el punto de vista de las técnicas numéricas, la presencia de dos parámetros introduce circunstancias específicas que merecen comentario. Hay que hacer notar, primeramente, que en este contexto el método de continuación puede volver a representar una ayuda inestimable a la hora de determinar el diagrama de bifurcaciones en el plano de parámetros.

Supongamos, por ejemplo, que hemos detectado (normalmente usando el método de continuación dejando fijo uno de los parámetros) que  $(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$  es un punto de bifurcación del sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u_1, u_2), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}$$

que verificará, por tratarse de un equilibrio:

$$f(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0$$

y por ser un punto de bifurcación, tendremos, en general:

$$\det D_x f(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0$$

Si  $u_2$  es el parámetro que hemos dejado fijo hasta ahora, y  $\bar{u}_1$  representa el valor del otro parámetro que hace que  $\bar{x}$  sea un punto de bifurcación, sería muy interesante el conocer como evoluciona dicha bifurcación cuando movemos el valor de  $u_2$ . Si hasta ahora,

hemos resuelto mediante el método de continuación el sistema de  $n$  ecuaciones con  $n+1$  incógnitas

$$f(x, u_1, \bar{u}_2) = 0$$

podríamos intentar resolver —de nuevo, mediante el método de continuación— el sistema

$$f(x, u_1, u_2) = 0$$

$$\det D_x f(x, u_1, u_2) = 0$$

con  $n+1$  ecuaciones, y  $n+2$  incógnitas. Dicho sistema proporcionaría una curva de puntos de bifurcación que, proyectada en el plano de parámetros, delimitaría una serie de regiones con diverso comportamiento cualitativo (distinto número de equilibrios, de equilibrios estables, etc.). Repitiendo el proceso las veces necesarias, puede completarse el diagrama de bifurcaciones.

La ecuación adicional necesaria para construir el sistema ampliado debe ser elegida con ciertas precauciones. La elección anterior es adecuada si, por ejemplo, la bifurcación que estamos siguiendo es de puntos límite, aunque existen todas las alternativas correspondientes a los diversos métodos de localización de dichos puntos (ver apartado 2.4.2).

No podemos olvidar sin embargo que, para asegurar la viabilidad del proceso, es preciso que la matriz derivada de las ecuaciones ( $n+1$  filas) respecto a las  $n+2$  incógnitas del sistema ampliado, tenga siempre rango máximo. La técnica anterior no es utilizable, por tanto, cuando se trata de obtener curvas de bifurcaciones pitchfork o transcricas, pues entonces el rango de

la derivada de  $f$  es a lo sumo  $n-1$ .

Esta dificultad puede superarse en muchos casos, como veremos en las aplicaciones analizadas en este capítulo. Para ello, habrá que recurrir a propiedades inherentes a cada sistema en particular.

En cuanto a la obtención de los diagramas de equilibrio, a no ser que la dimensión del sistema sea la mínima ( $n = 1$ ), no será posible el representar de manera global la dependencia de dichas soluciones respecto a los parámetros. Pero si nos limitamos a una sola variable de estado, el estudio de su dependencia paramétrica equivaldrá a la representación de una superficie en  $R^3$ , que es ya una tarea susceptible de realizar. Para ello, en muchos casos convendrá el acudir a los sistemas de representación habituales (axonométrico, cónico, etc.), utilizando un número apropiado de secciones de dicha superficie.

Una idea útil para el cálculo de las secciones, similar a la indicada anteriormente, es formular, para su resolución por el método de continuación un sistema ampliado de la forma:

$$f(x, u_1, u_2) = 0$$

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 - k_3 = 0$$

donde los valores de las constantes  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$ , se escogerán para cada sección según convenga a la mejor visualización de la superficie. Un estudio de este tipo se realiza, por ejemplo, en el apartado 3.5 de este capítulo.



### 3.4. Modelos de dinámica de sistemas.

Provistos de las técnicas anteriores, dedicaremos el resto de este capítulo al análisis de modelos concretos. Quedará patente la eficacia de los métodos reseñados, a la vez que incidiremos en ámbitos específicos de la ingeniería.

La dinámica de sistemas constituye una metodología para la construcción de modelos matemáticos, desarrollada principalmente por Jay W. Forrester y su grupo en el M.I.T. durante los años sesenta. Dotada de útiles propios de relativa simplicidad, como los diagramas causales y los diagramas de Forrester, ha alcanzado gran difusión en nuestros días, tras haber mostrado su versatilidad en el estudio de sistemas de muy diverso ámbito: desde los primitivos modelos de desarrollo industrial (Forrester [1961]) o de áreas urbanas (Alfeld & Graham [1976]), ha sido empleada en modelos que intentan analizar la evolución global de la humanidad (Forrester [1971], Meadows et al. [1974]), y de los sistemas socioeconómicos, su espectro de aplicaciones se ha diversificado a la biología, medicina, etc.

El proceso de modelado, bajo esta metodología, consta de fases bien definidas y, una vez terminado dicho proceso, ha sido usual el recurso generalizado a la simulación, como medio básico para determinar las posibles alternativas en la elección de los parámetros. Es precisamente en este punto donde se ha hecho notar con insistencia la necesidad de técnicas de análisis adecuadas para la validación de los modelos (Aracil [1980]). El concepto de estabilidad estructural, íntimamente relacionado con la teoría de

bifurcaciones, debe ser muy tenido en cuenta en dicho análisis (Aracil [1981]).

### 3.4.1. Modelos de interacción de áreas urbanas.

El modelo BSNSS3 es un modelo de dinámica de sistemas especialmente simple, que representa la evolución empresarial en una determinada área urbana. Es descrito en detalle por Alfeld y Graham [1976] y su comportamiento cualitativo fue analizado por Aracil [1981]. La ecuación del modelo es:

$$\frac{dy}{dt} = y(nT(ky) - m) = yM(y), \text{ con } y > 0$$

donde:

y representa el número de empresas,

n la tasa media de construcción de nuevas empresas,

m la tasa media de demolición de empresas,

k la fracción de la superficie total requerida por cada empresa y

t el tiempo.

Además, T es una función no lineal (un multiplicador en el lenguaje de la dinámica de sistemas) que viene descrita por la siguiente tabla:

ky:	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
T(ky):	1	1.15	1.3	1.4	1.45	1.4	1.3	0.9	0.5	0.25	0

Dado que las técnicas a emplear exigen buenas condiciones de di-

ferenciabilidad, es preciso realizar, para dicha función, una interpolación que posea dichas características. La interpolación lineal, usual en las simulaciones de la dinámica de sistemas, no es suficiente para nuestros requerimientos, mientras que la interpolación polinómica (ver figura 3.1) introduce comportamientos no deseados.

Recientemente, se han propuesto varias funciones que resuelven satisfactoriamente este problema para los multiplicadores más frecuentes en los modelos (Saeed & Irdadmirdis [1984]), pero el multiplicador del BSNSS3 no entra en los casos analizados.

Además, no queremos renunciar a que la función interpolante pase por los puntos tabulados. Por todo ello, usaremos como en anteriores ocasiones (Aracil et al. [1981]) una interpolación basada en **splines** cúbicos naturales, que proporciona la gráfica de la figura 3.1.

En el análisis citado, se tomó

$$u_2 = \frac{m}{n}$$

de forma que

$$M(y) = n(T(ky) - u_2)$$

y se hizo jugar a  $u_2$  el papel del parámetro fundamental. El diagrama de equilibrios correspondiente es el de la figura 3.2, donde quedan delimitadas tres zonas de comportamiento diverso, debido a la presencia de dos puntos de bifurcación. El punto  $(y, u_2) =$

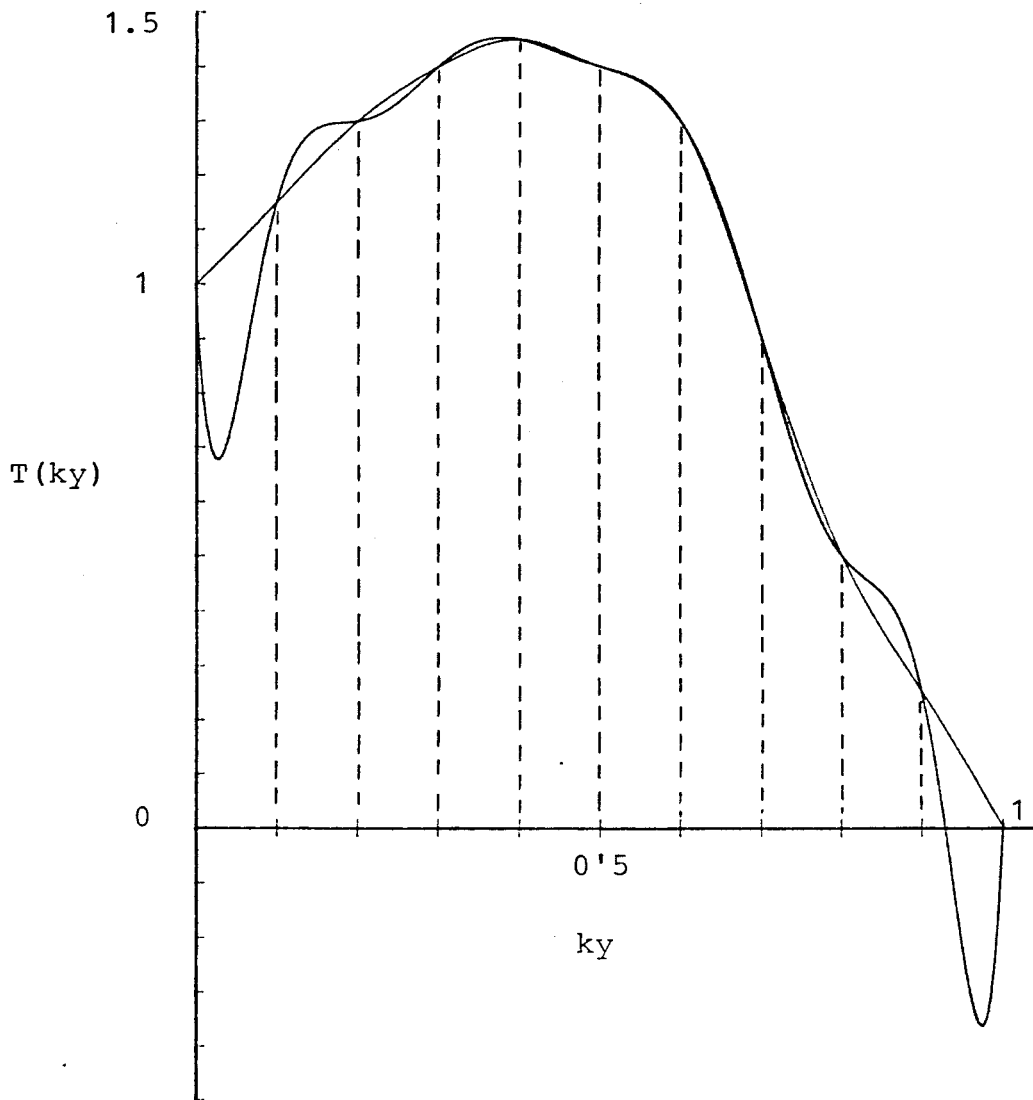


Figura 3.1. La tabla T del modelo BSNSS3.  
La interpolación polinómica presenta oscilaciones que hacen preferible la interpolación por splines.

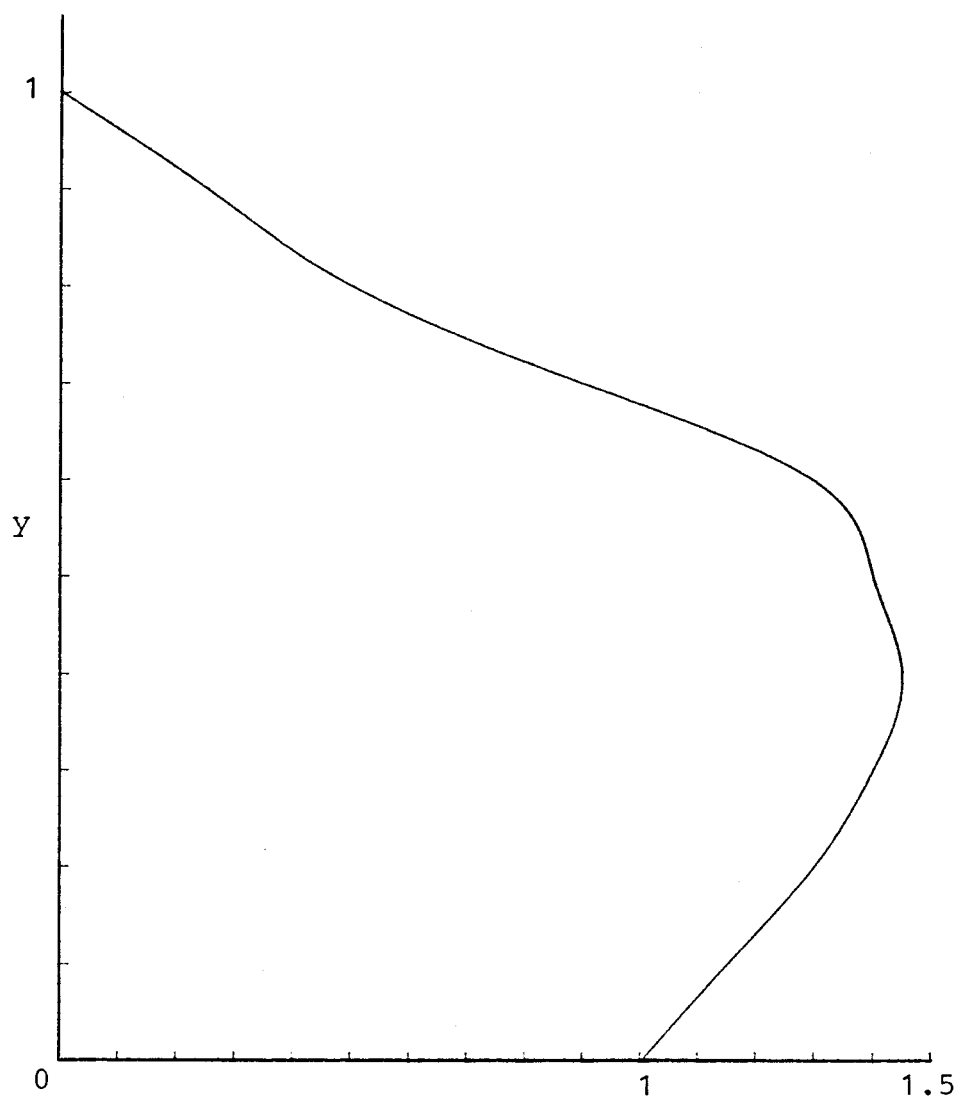


Figura 3.2. Diagrama de equilibrios del modelo BSNS3 cuando actúa como parámetro  $u_2$ .

(0,1) es una bifurcación transcítica, mientras que el (0.4,1.45) es una bifurcación silla-nodo.

Supongamos ahora que consideramos dos áreas urbanas próximas, y que usamos el modelo BSNSS3 para describir la evolución de cada una. Consideraremos además, por ser el caso más simple, que los parámetros de ambos modelos son iguales. Para adoptar una situación más realista, deberíamos prever la posibilidad de interacción entre las dos áreas, por lo que enriqueceremos el sistema, inicialmente desacoplado, permitiéndolo que exista un fenómeno de transporte (en el sentido más amplio del término) entre ambas zonas.

Si en una primera aproximación, describimos dicho fenómeno mediante un mecanismo de difusión lineal, podremos plantear el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 M(y_1) + u(y_2 - y_1)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_2 M(y_2) + u(y_1 - y_2)$$

donde  $u$  es el coeficiente de difusión y los subíndices hacen relación a cada zona. Si  $u > 0$ , la situación correspondería a una difusión pasiva, como es usual en los fenómenos físicos, mientras que si  $u < 0$ , entonces se trataría de una difusión activa. No detallaremos aquí las posibles interpretaciones que podrían darse en el último caso, pero señalaremos que tal comportamiento es propio de algunos biosistemas.

Para simplificar la notación en lo sucesivo, hacemos el cambio de variables:

$$x_1 = ky_1$$

$$x_2 = ky_2$$

y escribimos

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(M(x_1) - u) + ux_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2(M(x_2) - u) + ux_1$$

donde ahora  $M(\cdot) = nT(\cdot) - m$ , y  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ .

Supondremos por ahora que los parámetros propios del modelo BSNSS3 se mantienen en sus valores nominales, es decir,

$$k = 0.0002$$

$$n = 0.07$$

$$m = 0.36$$

y que  $u$  es el parámetro que juega un papel primordial.

Por inspección de las ecuaciones, es fácil concluir que el sistema posee una función potencial, con lo que no podemos esperar que aparezcan bifurcaciones dinámicas y nuestra investigación se centrará en las bifurcaciones de los equilibrios. Observamos también que si  $\bar{x}$  es una solución de la ecuación  $M(x)=0$ , entonces la recta

$$x_1 = x_2 = \bar{x}$$

está integrada por puntos de equilibrio independientemente del valor de  $u$ . Del mismo modo la recta

$$x_1 = x_2 = 0$$

es otra línea de equilibrios de carácter trivial. Ambas líneas expresan la posibilidad de que el sistema se comporte como si no hubiera interacción entre ambas zonas, ya que el coeficiente de difusión se muestra irrelevante.

Nos interesa localizar las posibles bifurcaciones sobre ambas rectas, que necesariamente han de constituir puntos de ramificación. Para ello, usando la notación habitual, tendremos:

$$D_x f(x_1, x_2, u) = \begin{bmatrix} M(x_1) + x_1 M'(x_1) - u & u \\ u & M(x_2) + x_2 M'(x_2) - u \end{bmatrix}$$

con

$$M'(x_i) = \frac{dM(x_i)}{dx_i}$$

para  $i = 1, 2$ . Como condición necesaria para las bifurcaciones que buscamos, debe anularse el jacobiano  $J$  y notemos que en las líneas anteriores se obtiene:

$$J(\bar{x}, \bar{x}, u) = (\bar{x}M'(\bar{x}) - u)^2 - u^2$$

$$J(0, 0, u) = (M(0) - u)^2 - u^2$$

Los puntos de bifurcación posibles son, por tanto:



$$(\bar{x}, \bar{x}, u_c) \text{ con } u_c = \frac{1}{2} \bar{x}M'(\bar{x}) \neq 0$$

$$(0, 0, u_c) \text{ con } u_c = \frac{1}{2} M(0)$$

Para las dos líneas indicadas, es sencillo seguir la marcha de los autovalores de la matriz de linealización, y se obtiene:

$$\begin{aligned} \lambda_1(u) &= \bar{x}M'(\bar{x}) - 2u \\ \lambda_2(u) &= \bar{x}M'(\bar{x}) \end{aligned} \quad \text{para la recta } (\bar{x}, \bar{x}, u)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1(u) &= M(0) - 2u \\ \lambda_2(u) &= M(0) \end{aligned} \quad \text{para la recta } (0, 0, u)$$

Si admitimos que

$$\bar{x}M'(\bar{x}) \neq 0$$

$$M(0) \neq 0$$

(más adelante se indica la posibilidad de los casos excluidos), es obvio que el rango de la matriz en ambos casos se mantiene igual a uno. Por otra parte, en ambos posibles puntos de bifurcación se verifica que

$$D_u f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo que la condición

$$D_u f \in \text{rango } D_x f$$

se cumple trivialmente. Para asegurar que estamos en puntos de bifurcación simple faltaría comprobar la condición de Hopf.

Como  $\lambda_1(u)$  representa el autovalor que se anula en el punto de bifurcación y en ambos casos

$$\frac{d\lambda_1}{du}(u_c) = -2 \neq 0$$

la condición queda satisfecha. Se trata pues de puntos en los que intersectan dos ramas de equilibrios.

Hasta ahora, por tratarse de equilibrios homogéneos, no hemos tenido que recurrir al uso de método de continuación para describir su lugar geométrico. Sin embargo como hemos detectado ramas secundarias y estamos interesados en su determinación, procederemos a realizar los cálculos indicados en el apartado 3.2.1, para obtener las tangentes en los puntos de bifurcación.

Trabajaremos en paralelo para ambos puntos, dado que la matriz  $D_x f$  toma la forma

$$\begin{bmatrix} u_c & u_c \\ u_c & u_c \end{bmatrix}$$

en las dos situaciones. Estamos en el caso  $m = 1$ , y obtenemos:

$$v_1 = w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{111} = c_1 = 0, \quad b_{11} = -2$$

que nos lleva a la ecuación

$$4 q_0 q_1 = 0$$

con las soluciones  $(0,1)$  y  $(1,0)$  para el par  $(q_0, q_1)$ . El par  $(1,0)$  proporciona el vector tangente  $(0,0,1)$  que se corresponde con la dirección de las rectas. Como condición equivalente a la de Hopf, comprobamos que

$$a_{111}q_1 + b_{11}q_0 = -2 \neq 0$$

El par  $(0,1)$  conduce al vector

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

que determina la dirección de la tangente a las ramas secundarias, que usaremos para iniciar la continuación. Como por la dirección de las tangentes, la rama secundaria que interseca con la línea  $(0,0,u)$  conduce a equilibrios fuera del rango permitido, de ahora en adelante nos centraremos en la bifurcación de la línea  $(\bar{x}, \bar{x}, u)$ .

Recordemos que en  $M$  podemos introducir el parámetro  $u_2$ , de forma que si por  $u_1$  denotamos a  $u$ , el problema pasa a contar con dos parámetros. Con este nuevo planteamiento en mente, para cada valor posible de  $\bar{x} \in [0,1]$ , podríamos determinar de forma explícita el valor de  $u_2$  que corresponde a  $M(\bar{x}) = 0$  :

$$u_{2c} = T(\bar{x})$$

y a continuación determinar el valor de  $u_1$  que conduce al punto de bifurcación, mediante

$$u_{1c} = \frac{1}{2} \bar{x} M'(\bar{x})$$

Así, sobre el plano  $u_1, u_2$  de parámetros podríamos dibujar una curva que indicaría la situación del punto de bifurcación en cada caso. Además la condición

$$\bar{x}M'(\bar{x}) \neq 0$$

falla cuando, con  $\bar{x} \neq 0$ , se tiene

$$M'(\bar{x}) = nT'(\bar{x}) = 0$$

lo cual ocurre si  $\bar{x} = 0.4$ , que a su vez exige que  $u_2 = 1.45$  (el valor máximo de  $u_2$  para el que hay equilibrios).

En el punto  $Q_1 = (u_{1c}, u_{2c}) = (0, 1.45)$ , tenemos que los dos autovalores son cero, con lo que la bifurcación asociada posee una mayor degeneración. Notamos además que, para ese valor de  $u_2$ , se tiene:

$$D_{\bar{x}}f(\bar{x}, \bar{x}, u_1, u_2) = \begin{bmatrix} -u_1 & u_1 \\ u_1 & -u_1 \end{bmatrix}$$

cuyo determinante se anula obviamente. Pero como tenemos que

$$D_{u_2}f(\bar{x}, \bar{x}, u_1, u_2) = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{x} \end{bmatrix}$$

ya no pertenece al rango de la matriz, con relación a  $u_2$ , esos puntos constituirían bifurcaciones silla-nodo. Por tanto, la línea  $u_2 = 1.45$  representa una recta de bifurcaciones silla-nodo, que en el punto de contacto ( $Q_1$ ) con la curva de puntos de ramificación simple origina una bifurcación de codimensión dos.

La situación anterior es similar a la correspondiente para la línea de puntos de bifurcación de los equilibrios  $(0,0,u_1)$ , que no consideramos por las razones ya apuntadas. Si falla la condición  $M(0) \neq 0$ , o lo que es equivalente, si  $u_2 = 1$ , se obtiene una recta de puntos en los que el jacobiano posee la misma estructura anterior. Pero ahora

$$D_{u_2} f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sobre esos puntos, con lo que dicho vector está trivialmente incluido en el rango de la matriz jacobiana. Esta recta indica ahora respecto a  $u_2$  una línea de bifurcaciones transcriticals, que se corresponde con el nacimiento o desaparición de un equilibrio homogéneo. Para  $Q_2 = (u_1, u_2) = (0,1)$  se tiene pues otra bifurcación de codimensión dos.

Si tenemos en cuenta el diagrama de equilibrios del modelo BSNSS3 comentado más arriba, las dos líneas indicadas ( $u_2 = 1.45$  y  $u_2 = 1$ ) reflejan las bifurcaciones inherentes a cada zona por separado, indiferentes a la entrada en juego del fenómeno de difusión.

Así llegamos al diagrama de bifurcaciones en el plano  $u_1, u_2$  de la figura 3.3.

Con idea de caracterizar el tipo de punto de ramificación que aparece sobre los puntos de la línea correspondiente, observemos que la última componente del vector tangente a la rama secundaria vale cero, por lo que se tratará de bifurcaciones pit-

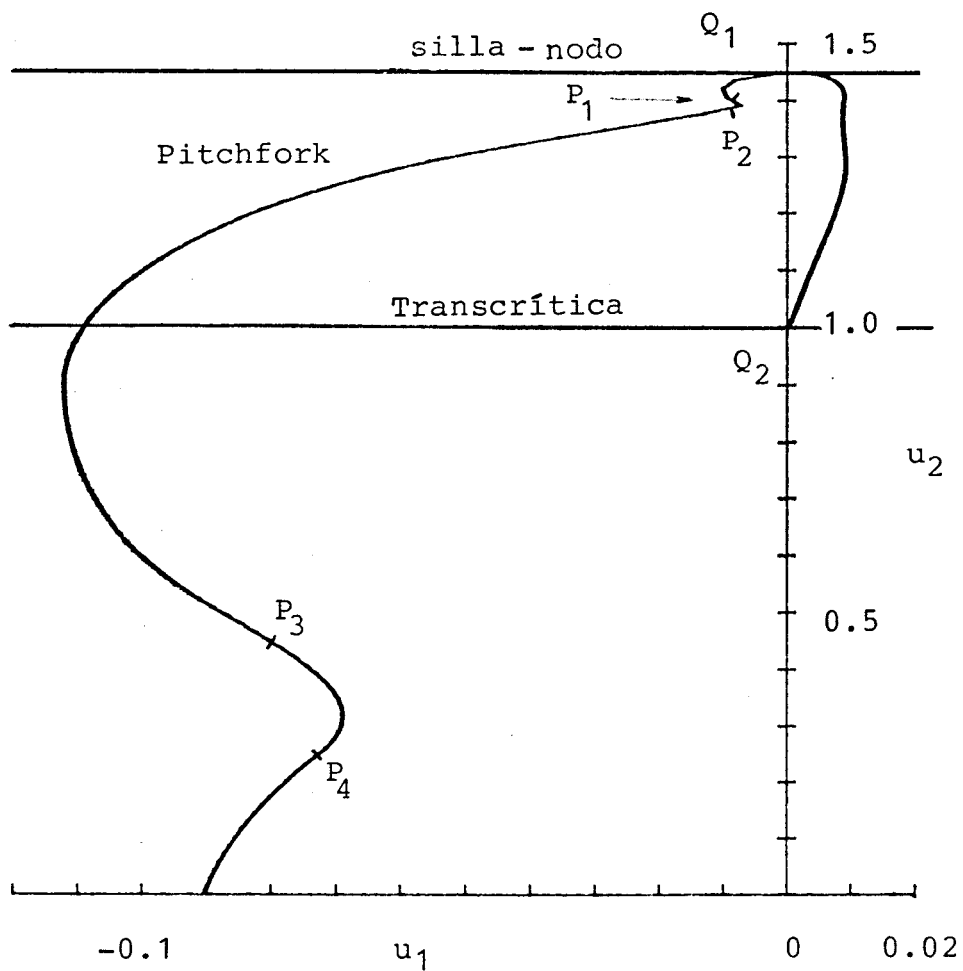


Figura 3.3. Diagrama de bifurcaciones del modelo de interacción entre dos zonas. No se incluyen las bifurcaciones secundarias.

pitchfork . Necesitamos información adicional para poder analizar si se trata del caso subcrítico o supercrítico. A tal fin, conviene estudiar para  $u_{2c}$  (supuesto ahora fijo) los desarrollos:

$$x_2(x_1) = \bar{x} + x_2'(\bar{x})(x_1 - \bar{x}) + \frac{1}{2} x_2''(\bar{x})(x_1 - \bar{x})^2 + \dots$$

$$u_1(x_1) = u_{1c} + u_1'(\bar{x})(x_1 - \bar{x}) + \frac{1}{2} u_1''(\bar{x})(x_1 - \bar{x})^2 + \dots$$

y determinar el signo de  $u_1''(\bar{x})$ . Derivando sucesivamente respecto de  $x_1$  las ecuaciones del modelo, y particularizando para el punto  $(\bar{x}, \bar{x}, u_{1c}, u_{2c})$ , se obtiene:

$$x_2'(\bar{x}) = -1$$

$$u_1'(\bar{x}) = 0$$

$$x_2''(\bar{x}) = -2 \left( \frac{2}{\bar{x}} + \frac{T''(\bar{x})}{T'(\bar{x})} \right)$$

$$u_1''(\bar{x}) = n(12T''(\bar{x}) + 4\bar{x}T'''(\bar{x}) - 3\bar{x}T'(\bar{x})x_2''(\bar{x})^2)/24$$

Con la ayuda de esta última ecuación, fué posible en Aracil et al. [1985] discernir el caso subcrítico del supercrítico, pero como puede observarse en los diagramas de equilibrios que se obtienen para diversos valores de  $u_2$  (ver figura 3.4), no se pudo detectar las bifurcaciones que presentan las ramas secundarias ni completar el diagrama de bifurcaciones.

El cambio de signo de  $u_1''(\bar{x})$  a lo largo de la curva de puntos pitchfork origina un cambio cualitativo que fuerza a que la codimensión de la bifurcación en los puntos con

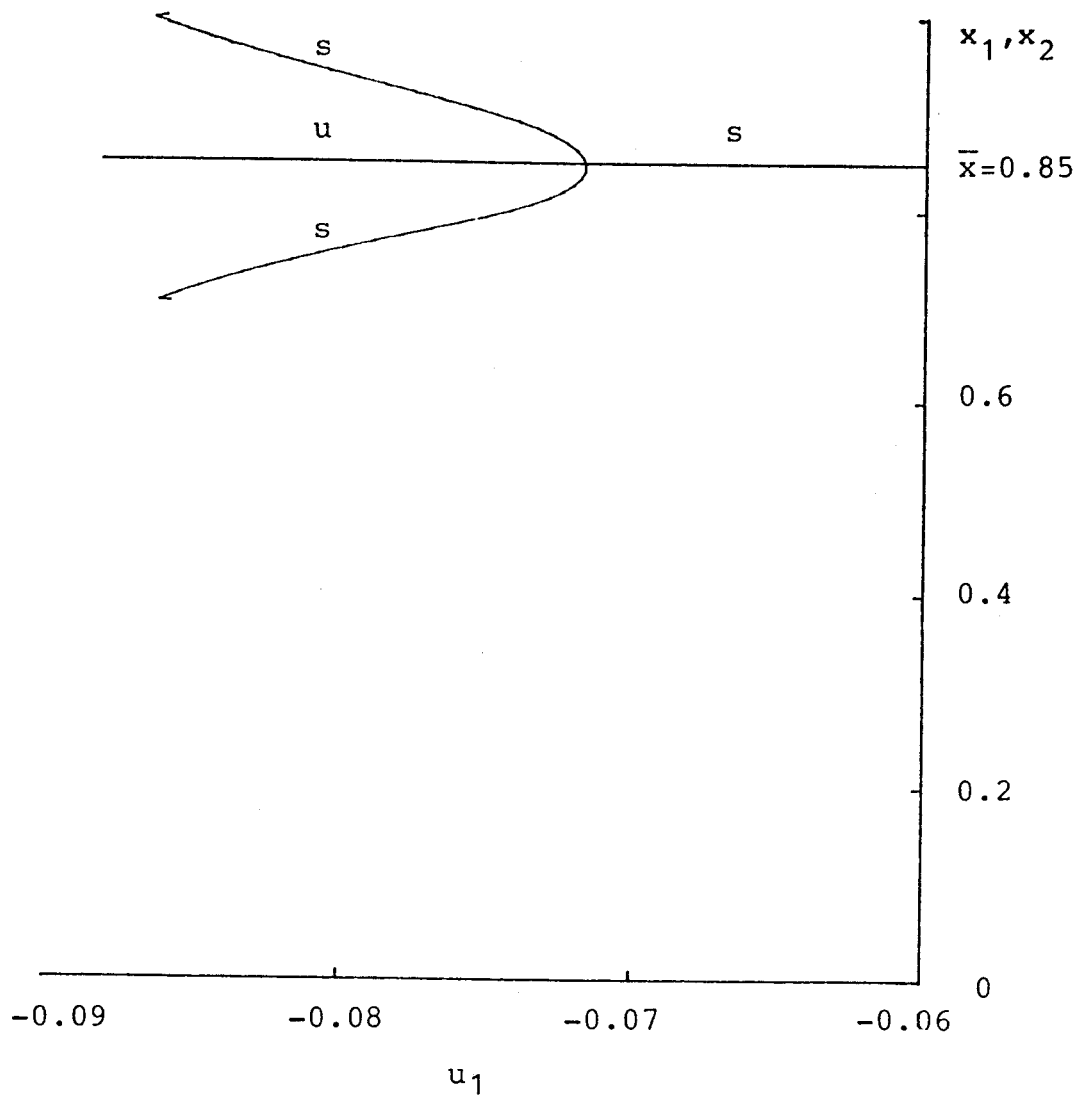


Figura 3.4. a) Diagrama de equilibrios para  $u_2 = 0.375$ . (s) denota equilibrios estables y (u) inestables.



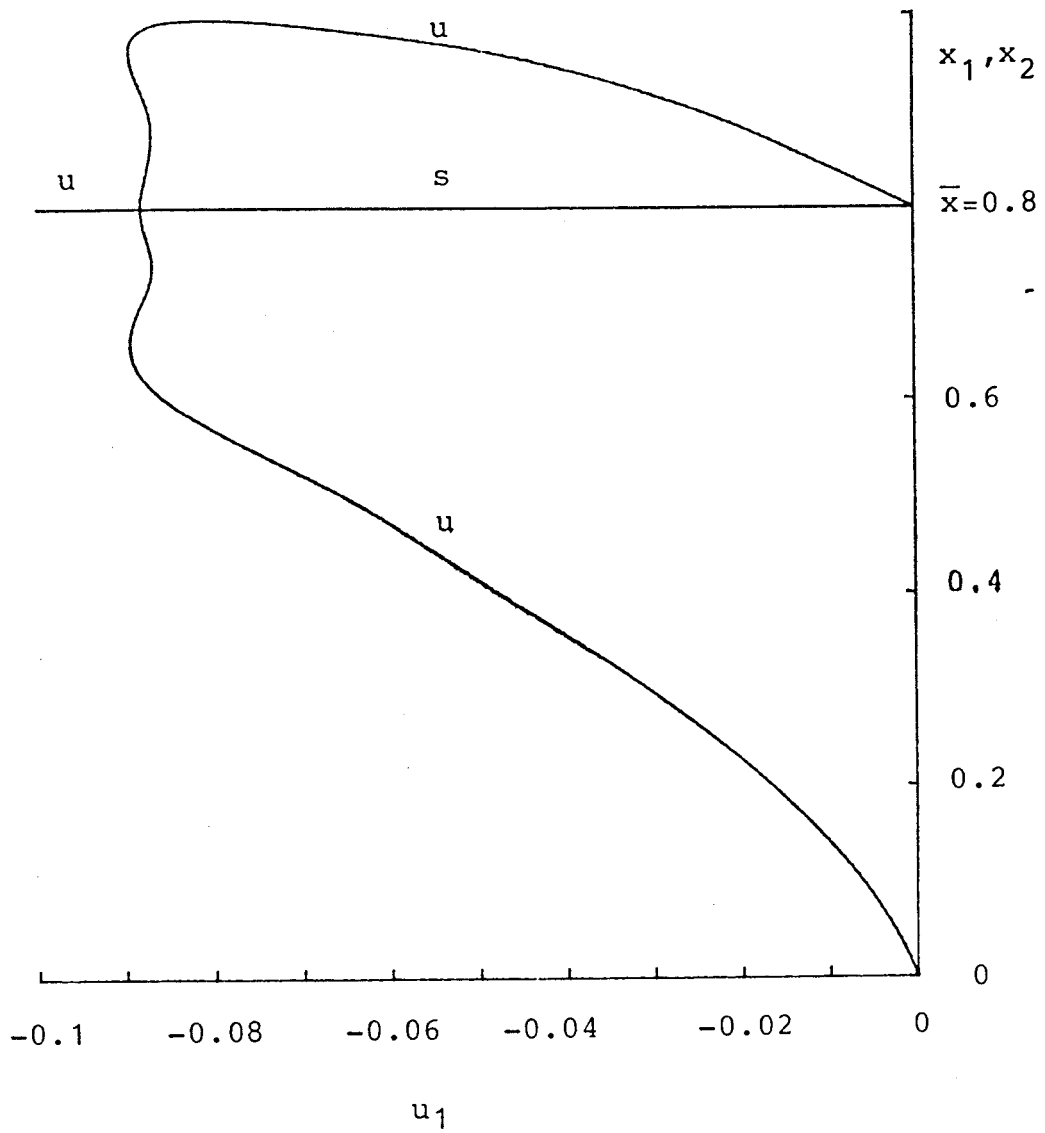


Figura 3.4. b) Diagrama de equilibrios para  $u_2 = 0.5$   
Se observan algunas bifurcaciones secundarias (silla-nodo)

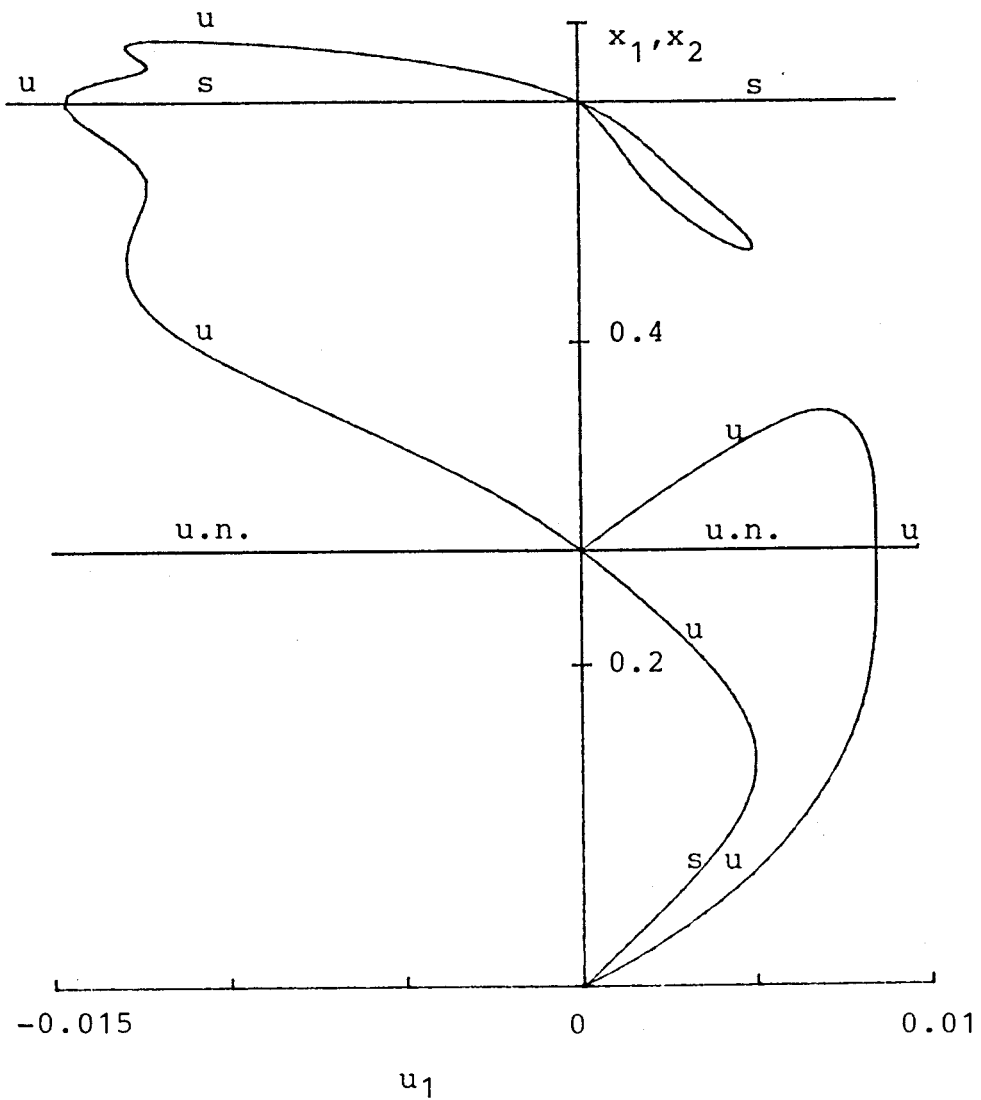


Figura 3.4. c) Diagrama de equilibrios para  $u_2 = 1.375$ . Aparecen ya un buen número de bifurcaciones secundarias. Con (u.n) se indican los nodos inestables.

$$u_1'(\bar{x}) = 0$$

sea superior. Esta circunstancia se produce en los puntos  $Q_1, Q_2$  ya señalados y en otros cuatro puntos, que en la figura 3.2 se indican como  $P_1$  a  $P_4$ . Mostramos a continuación como el recurso a las técnicas del apartado 3.3 resuelve definitivamente el problema.

Para ello, seguiremos dos vías distintas y complementarias. Primeramente adoptaremos un punto de vista analítico, y en un momento posterior usaremos técnicas numéricas que explicitarán los resultados y confirmarán las predicciones de las técnicas analíticas. Iniciaremos el estudio analítico, recurriendo a la información que proporciona el teorema de la variedad de centros.

Nos interesa que el sistema adopte la estructura indicada en el enunciado de dicho teorema, que no significa otra cosa que desacoplar, en cuanto a la parte lineal, las dos variables y efectuar una traslación para conseguir que el equilibrio no hiperbólico esté situado en el origen.

La traslación se corresponde con las sustituciones:

$$x_1 \longleftrightarrow x_1 + \bar{x}$$

$$x_2 \longleftrightarrow x_2 + \bar{x}$$

$$u_1 \longleftrightarrow u_1 + u_{1c}$$

mientras que para desacoplar la parte lineal o lo que es lo mismo conseguir que la matriz correspondiente esté en forma diagonal haremos el cambio de base:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

donde  $y_1, y_2$  son las nuevas variables. Con estas transformaciones se llega al sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= (y_1 + y_2 + \bar{x}) M(y_1 + y_2 + \bar{x})/2 - \\ &\quad - (y_2 - y_1 + \bar{x}) M(y_2 - y_1 + \bar{x})/2 - 2(u_1 + u_{1c}) y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dt} &= (y_1 + y_2 + \bar{x}) M(y_1 + y_2 + \bar{x})/2 + \\ &\quad + (y_2 - y_1 + \bar{x}) M(y_2 - y_1 + \bar{x})/2 \end{aligned}$$

Para evitar la profusión de subíndices, usaremos de ahora en adelante  $x$  e  $y$  para indicar las variables y  $u$  para el parámetro fundamental.

Haremos además el desarrollo de Taylor de la función  $M$  en el punto  $\bar{x}$ , para hacer explícita la parte no lineal, que sólo llega hasta los términos de tercer grado debido a la interpolación usada para la tabla. Con estas consideraciones, si escribimos:

$$\begin{aligned} a_0 &= \bar{x}M'(\bar{x}) = 2u_{1c} \\ a_1 &= M'(\bar{x}) + \bar{x}M''(\bar{x})/2 \\ a_2 &= M''(\bar{x})/2 + \bar{x}M'''(\bar{x})/6 \\ a_3 &= M'''(\bar{x})/6 \end{aligned}$$

obtenemos la siguiente expresión del sistema, apta ya para aplicar las técnicas que se relacionan con el teorema de la variedad de centros:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2u & 0 \\ 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 3xy^2 + x^3 \\ 3x^2y + y^3 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 4xy^3 + 4x^3y \\ x^4 + 6x^2y^2 + y^4 \end{bmatrix}, \text{ con } \frac{du}{dt} = 0$$

Recordemos ahora que el sistema original poseía simetría respecto al intercambio de las dos variables. El grupo de simetría correspondiente admite la representación matricial  $(S_1, S_2)$  con

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A la luz de las consideraciones efectuadas en el apartado 3.3.1, y dado que hemos efectuado un cambio de base mediante la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

la nueva formulación del sistema debe mantener la simetría respecto a la representación matricial:

$$(S_1^*, S_2^*) \text{ con } S_1^* = S_1, \quad S_2^* = P^{-1}S_2P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es decir, el cambio de signo de la variable  $x$  debe alterar el signo de la primera ecuación y dejar inalterada la segunda. Esto equivale a que, respecto a  $x$ , la primera ecuación sólo posea términos de grado impar, y la segunda sólo términos de grado par,

como realmente sucede.

La simetría original nos proporciona además una información de gran valor al asegurarnos que la variedad de centros debe responder a una estructura determinada. Esto es vital a la hora de realizar los cálculos necesarios para su consecución, ya que evita arrastrar en las operaciones una serie de términos que a priori podemos saber que son nulos. Si no dispusiéramos de esta simplificación, dichos términos darían lugar a otros nuevos que alargarían de forma progresiva las expresiones.

Ya que la variedad de centros ha de ser del tipo

$$y = h(x,u)$$

y recordando que ha de ser invariante frente a la simetría, podemos asegurar que solo contendrá términos en grado par en  $x$ . Dado que por definición,  $h(0,0) = 0$ ,  $D_x h(0,0) = 0$ , se debe tener

$$h(x,u) = b_1 x^2 + b_2 u^2 + b_3 x^2 u + b_4 u^3 + \dots$$

Para el cálculo del sistema reducido, basta calcular los coeficientes  $b_i$  y proyectar el flujo de la variedad de centros sobre el plano  $x,u$ , obteniendo:

$$\frac{dx}{dt} = -2ux + 2a_1 x h(x,u) + a_2 x^3 + 3a_2 x h(x,u)^2 + \dots$$

sistema de dimensión uno que captura la información necesaria para clasificar la bifurcación en los puntos de codimensión superior a uno.

Para el cálculo de la variedad de centros, identificaremos las dos expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= D_x h(x,u) \frac{dx}{dt} = \\ &= (2b_1x + 2b_3ux + \dots) (-2ux + 2a_1x(b_1x^2 + \dots) + \\ &+ a_2x^3 + 3a_2x(b_1^2x^4 + \dots) + 4a_3x^3(b_1x^2 + \dots) + \\ &+ 4a_3x(b_1^3x^6 + \dots) + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= a_0(b_1x^2 + \dots) + a_1x^2 + a_1(b_1^2x^4 + \dots) + \\ &+ 3a_2x^2(b_1x^2 + \dots) + a_2(b_1^3x^6 + \dots) + \\ &+ a_3x^4 + 6a_3x^2(b_1^2x^4 + \dots) + a_3(b_1^4x^8 + \dots) + \dots \end{aligned}$$

igualando los coeficientes de los términos de igual grado en x,u.

Se obtiene:

$$b_1 = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$b_2 = 0$$

$$b_3 = -4 \frac{b_1}{a_0} = 4 \frac{a_1}{a_0^2}$$

$$b_4 = 0$$

de forma que, introducidas estas expresiones en la definición de la variedad, estamos en condiciones de proyectar el flujo sobre ella y concluir que en dicha superficie:

$$\frac{dx}{dt} = -2ux + \left(a_2 - \frac{2a_1^2}{a_0}\right) x^3 + 8 \frac{a_1}{a_0} x^3 u + \dots, \quad \text{con } \frac{du}{dt} = 0$$

Notemos primeramente que los valores de los coeficientes  $a_1$  anteriores dependen implícitamente del segundo parámetro  $u_2$  y que, por la traslación efectuada, los equilibrios no hiperbólicos del sistema original se presentan para  $u = 0$ , con lo que el signo del coeficiente de  $x^3$  juega un papel fundamental. Cuando este coeficiente se anule para algún valor de  $u_2$ , estaremos en presencia de una bifurcación de codimensión dos.

Otra observación de interés es verificar que dicho coeficiente es precisamente el valor de  $u_1'(\bar{x})$  que se obtuvo en el análisis anterior del modelo ya citado. El uso de esta técnica se mostrará muy superior, como veremos.

La ecuación anterior presenta una simetría que es heredada de la simetría original y que ha sido estudiada en Golubitsky & Schaeffer [1985] (ver sobre todo, el capítulo VI), si bien los trabajos de Takens [1973] y Golubitsky & Langford [1981], relativos a degeneraciones de la bifurcación de Hopf son trasladables fácilmente también a nuestro caso. Básicamente, debe estudiarse el número de equilibrios y su carácter en las proximidades de la bifurcación para lo cual no se necesita otra cosa que analizar cualitativamente los ceros del segundo miembro. Esto es un simple ejercicio siempre que previamente se hayan detectado las formas normales correspondientes a bifurcaciones de codimensión dos.



En nuestro caso, para caracterizar definitivamente el fenómeno en las proximidades de los valores que hacen nulo el coeficiente de tercer grado, se hace preciso el aproximar hasta términos superiores a los ya obtenidos la variedad de centros. Así conseguiremos que el sistema reducido posea también términos superiores. Usaremos entonces para la función  $h$  una expresión que contenga todos los términos no nulos hasta grado seis, lo que supone una aproximación de mayor grado para la variedad de centros.

El hecho de que hayamos obtenido anteriormente  $b_2 = b_4 = 0$ , hace sospechar que los términos que no contienen potencias en  $x$  deben ser cero, y un simple razonamiento así lo confirma. Basta expresar la condición que debe cumplir la variedad de centros para  $x = 0$ , pues en ese caso, debido a la simetría presente,

$$\frac{dx}{dt}(0, u) = 0$$

y se llega entonces a

$$\frac{dy}{dt}(0, u) = D_x h(0, u) \frac{dx}{dt}(0, u) = 0$$

Pero si

$$h(0, u) = b_2 u^2 + b_4 u^3 + \dots$$

entonces

$$0 = \frac{dy}{dt}(0, u) = a_0(b_2 u^2 + \dots) + a_1(b_2 u^2 + \dots)^2 + a_2(b_2 u^2 + \dots)^3 + a_3(b_2 u^2 + \dots)^4$$

y ha de concluirse la afirmación que se conjeturaba.

Tomamos, pues:

$$h(x,u) = b_1x^2 + b_3x^2u + b_5x^4 + b_6x^2u^2 + b_7x^4u + \\ + b_8x^2u^3 + b_9x^6 + b_{10}x^4u^2 + b_{11}x^2u^4 + \dots$$

expresión de la que ya hemos excluido los términos que sólo contienen al parámetro  $u$ .

Ya hemos indicado como obtener los coeficientes. El procedimiento es rutinario pero conduce a desarrollos muy prolijos que pueden inducir al tedio. Además, difícilmente se disiparía la duda ante posibles errores. En este tipo de tareas resultan muy útiles los sistemas de manipulación algebraica de símbolos, que permiten mecanizar los cálculos con garantía. En las dos páginas siguientes, se muestran los resultados obtenidos con un breve programa escrito en REDUCE (Hearn [1985]). El programa realiza básicamente dos tareas: primeramente se define formalmente la expresión de la variedad de centros y se construye la diferencia de las dos expresiones a identificar, dada la invarianza de la variedad frente al flujo del sistema. Dicha expresión debe ser idénticamente nula, por lo que en un segundo paso y comenzando por los términos de menor grado, se despejan los valores de los coeficientes  $b_i$  que conducen a la anulación del resultado. Pueden consultarse al final del listado los valores de los nuevos coeficientes obtenidos.

Aprovechamos esta circunstancia para indicar la importancia de contar con este tipo de herramientas en el análisis cualitati-

REDUCE 3.2, 15-Apr-85 ...

1:

```

%          CALCULO DE LA VARIEDAD DE CENTROS
%
% El siguiente segmento se encarga de despejar
% la variable X2 de la expresi3n X1:
%
PROCEDURE DES(X1,X2);
  BEGIN SOLVE(NUM(X1),X2);
  RETURN SOLN(1,1)
  END;
%
% El siguiente segmento indica si la expresi3n
% X1 depende o no de la variable X2
%
PROCEDURE DEP(X1,X2);
  IF NUM(X2) = X2
  AND LTERM(NUM(X1),X2) NEQ 0
  THEN 1;
%
% A continuaci3n, se define formalmente la
% variedad de centros:
%
OFF SOLVEWRITE $
%
Y:= B1*X^2 + B3*X^2*U + B5*X^4 + B6*X^2*U^2
   + B7*X^4*U + B8*X^2*U^3 + B9*X^6
   + B10*X^4*U^2 + B11*X^2*U^4 $
%
LET X^8=0 $
%
% Se definen las ecuaciones del sistema reducido:
%
XP:= -2*U*X + A1*2*X*Y + A2*(3*X*Y^2 + X^3) + A3*(4*X*Y^3 + 4*X^3*Y) $
%
YP:= A0*Y + A1*(X^2+Y^2) + A2*(3*X^2*Y + Y^3) + A3*(X^4 + 6*X^2*Y^2 + Y^4) $
%
% La expresi3n DIF que se construye debe ser nula:
%
DIF:=DF(Y,X)*XP-YP $
%
% La condici3n de anulaci3n de DIF
% permite despejar los coeficientes B1 a B11
%
ARRAY H(1),H1(1);
N:= COEFF(DIF,X,H)$
FOR J:=2 STEP 2 UNTIL N DO
  BEGIN K:= COEFF(NUM(H(J)),U,H1);
  TOPE:=MIN(K,6);
  FOR L:=0:TOPE DO BEGIN
    IF DEP(H1(L),B1) NEQ 0 THEN B1:=DES(H1(L),B1) $
    IF DEP(H1(L),B3) NEQ 0 THEN B3:=DES(H1(L),B3) $
    IF DEP(H1(L),B5) NEQ 0 THEN B5:=DES(H1(L),B5) $
    IF DEP(H1(L),B6) NEQ 0 THEN B6:=DES(H1(L),B6) $
    IF DEP(H1(L),B7) NEQ 0 THEN B7:=DES(H1(L),B7) $
  
```

```

IF DEP(H1(L),B8) NEQ 0 THEN B8:=DES(H1(L),B8) $
IF DEP(H1(L),B9) NEQ 0 THEN B9:=DES(H1(L),B9) $
IF DEP(H1(L),B10) NEQ 0 THEN B10:=DES(H1(L),B10) $
IF DEP(H1(L),B11) NEQ 0 THEN B11:=DES(H1(L),B11) $
END$
END$
%
% Se muestran ahora los resultados:
%
B1;
(- A1)/A0
B3;
(4*A1)/A02
B5;
(3*A13 + A1*A2*A02 - A3*A03)/A0
B6;
(- 16*A1)/A03
B7;
(4*(- 12*A13 - 3*A1*A2*A02 + 2*A3*A04))/A0
B8;
(64*A1)/A04
B9;
(- 30*A15 - 12*A13*A2*A02 + 12*A12*A3*A02 + A1*A22*A02
- A2*A3*A03)/A05
B10;
(16*(33*A13 + 7*A1*A2*A02 - 4*A3*A05))/A0
B11;
(- 256*A1)/A05
;
END;
2: BYE;

```

vo, ya que los sistemas de manipulación algebraica de símbolos permiten la automatización de muchos procesos analíticos (ver Pavelle [1986]), como en el presente caso.

El sistema reducido que conseguimos incluye ahora hasta los términos de grado 7 en  $x$  y en  $u$ . Si llamamos  $A_0$  al coeficiente de primer grado en  $x$ ,  $A_1$  al coeficiente de  $x^3$ ,  $A_2$  al de  $x^5$  y  $A_3$  al de  $x^7$ , podemos escribir de forma abreviada:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A_0x + A_1x^3 + A_2x^5 + A_3x^7 = \\ &= x (A_0 + A_1x^2 + A_2x^4 + A_3x^6)\end{aligned}$$

Para investigar ahora el diagrama local de bifurcaciones, bastaría averiguar para qué valores de los parámetros presentes se altera el número de soluciones de equilibrio del sistema reducido, o lo que es equivalente, haciendo  $r = x^2$ , el número de soluciones de la cúbica:

$$A_3r^3 + A_2r^2 + A_1r + A_0 = 0$$

añadiendo siempre el caso  $A_0 = 0$ , que corresponde a  $r = 0$ .

Dicha circunstancia (cambio en el número de soluciones) ocurre cuando aparece una raíz múltiple no negativa, es decir, cuando:

$$\begin{aligned}A_3r^3 + A_2r^2 + A_1r + A_0 &= 0 \\ 3A_3r^2 + 2A_2r + A_1 &= 0\end{aligned}\quad \text{con } r \geq 0$$

Este sistema resulta equivalente al:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 2A_3r^3 + A_2r^2 \\
 A_1 &= -3A_3r^2 - 2A_2r
 \end{aligned}
 \quad \text{con } r \geq 0$$

que es ya explícito en  $A_0, A_1$  en función de los valores de  $A_2, A_3$ .

Supongamos, para abreviar, que  $A_3 > 0$ . En función del signo de  $A_2$  se obtendrían los diagramas de bifurcaciones en el plano  $A_0, A_1$  de la figura 3.5.

Para  $A_2 > 0$ , observamos que a los puntos del eje  $A_1$ , que corresponden a la aparición de tres equilibrios (bifurcaciones pitchfork), se le suma una curva, localmente la mitad de una parábola, que se corresponde con bifurcaciones silla-nodo. El caso  $A_2 = 0$  es cualitativamente similar mientras que en el  $A_2 < 0$ , la curva correspondiente a las bifurcaciones silla-nodo presenta un punto de cúspide para  $r = -A_2/3A_3$ .

Con la ayuda de estos diagramas queda perfectamente explicado el hecho de que en las proximidades de los valores de los parámetros que hacen  $A_0 = A_1 = 0$ , aparezcan nuevas bifurcaciones silla-nodo. Es el momento de recordar que  $A_0$  se corresponde esencialmente con el primer parámetro  $u_1$ , mientras que  $A_1$  viene determinado por el parámetro  $u_2$ . Pero es más, podremos predecir, estudiando los signos de  $A_2$  y  $A_3$ , qué estructura local presentan las bifurcaciones secundarias.

Volviendo al diagrama parcial de bifurcaciones que se presentaba en la figura 3.3, recordemos que  $A_0 = -2u = 0$  para la línea de bifurcaciones pitchfork y que  $A_1 = 0$  en los puntos señala-

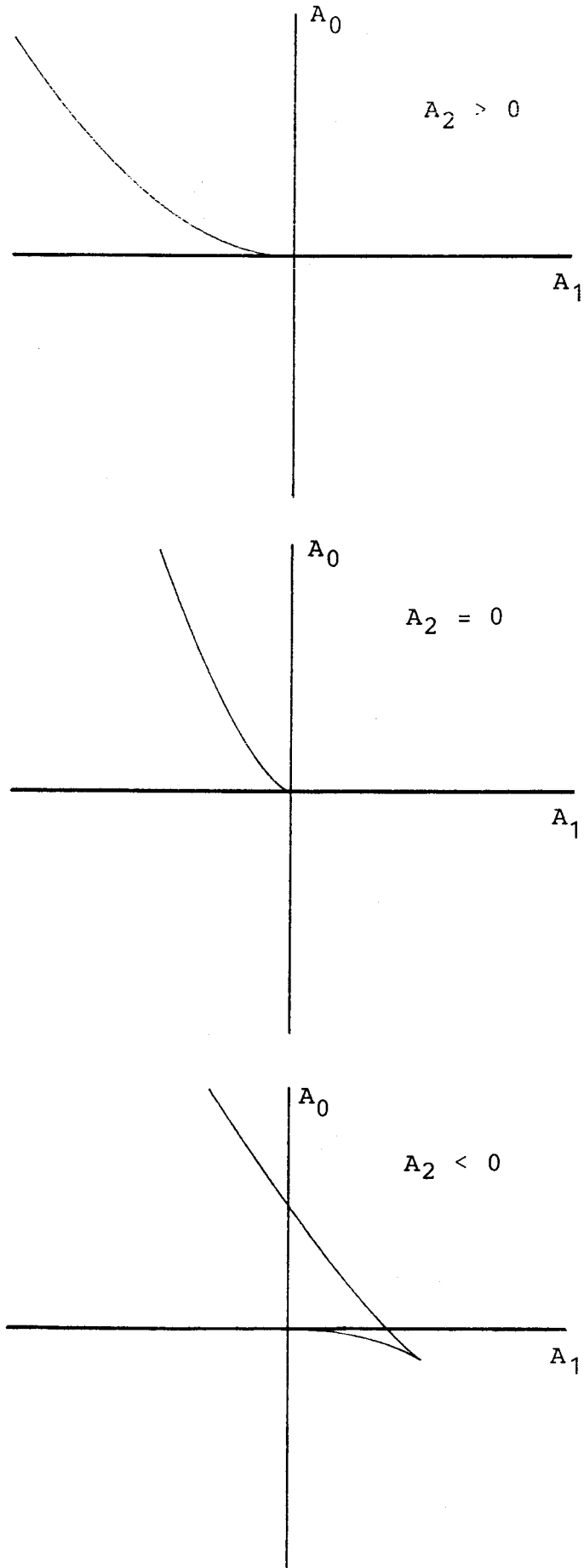


Figura 3.5. Diagrama local de bifurcaciones en los puntos de codimensión dos para  $A_3 > 0$ . Se muestran las diversas posibilidades en función del signo de  $A_2$ .

dos con  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$ . Si realizamos en esos puntos los cálculos necesarios para determinar  $A_2$  y  $A_3$ , obtenemos la siguiente tabla:

Punto	$A_2$	$A_3$
$P_1$	-3.1754E3	1.7223E6
$P_2$	-5.1165E3	3.8736E6
$P_3$	-1.6642E2	6.4399E3
$P_4$	-2.2209E2	1.5693E4

Deducimos por tanto, a la vista de los signos de dichos coeficientes, que en los cuatro casos estamos en la situación en que deben aparecer puntos de cúspide en la rama secundaria de bifurcaciones silla-nodo. Además, estudiando el cambio de signo de  $A_1$ , y recordando que  $A_0 = -2u$ , podemos situar convenientemente los ejes  $A_0, A_1$  en cada uno de los puntos y definir localmente y de modo cualitativo el diagrama de bifurcaciones correspondiente.

El sistema reducido puede utilizarse también para predecir la estabilidad de las ramas que bifurcan. Junto con el análisis local, recurriendo a los primeros términos del sistema, es muy útil extender las conclusiones alcanzadas mediante la aplicación del principio de intercambio de la estabilidad. No debe olvidarse la consideración de un segundo autovalor ( $a_0$ ), que responde a la existencia de otra variedad invariante (estable o inestable, según el signo de  $a_0$ ).



Pasando ya al uso de técnicas numéricas, con objeto de determinar completamente el diagrama de bifurcaciones, parece apropiado incluir en dicho diagrama las curvas que corresponden a los valores de los parámetros que hacen que las variables abandonen el rango significativo del modelo, que recordemos era el intervalo  $[0,1]$ . Esto es aún más importante si, como en nuestro caso, las funciones que definen las ecuaciones (recuérdese la estructura de la tabla T) solo tienen sentido en dicho rango.

Usaremos para ello una vez más el método de continuación. Dada la simetría del problema, si usamos la notación inicial, bastaría obtener las curvas correspondientes a equilibrios en los que  $x_1 = 0$  ó  $x_1 = 1$ .

El caso  $x_1 = 0$ , con  $x_2 \neq 0$ , lleva trivialmente a la condición  $u = 0$ , o lo que es lo mismo al eje  $u_2$  en el diagrama de bifurcaciones. Para el otro caso, basta resolver por continuación el sistema:

$$x_1(M(x_1) - u_1) + u_1x_2 = 0$$

$$x_2(M(x_2) - u_2) + u_1x_1 = 0$$

$$x_1 - 1 = 0$$

y llevar los valores de  $u_1, u_2$  al plano correspondiente. Se obtiene así una curva adicional que al igual que el eje  $u_2$  pone de manifiesto que al atravesarla en el plano de parámetros cambia el número de soluciones al producirse una entrada o salida de alguna de ellas en el rango significativo del modelo. Notemos además que dicha curva tiene solo interés para soluciones de equilibrios que corresponden a valores distintos para  $x_1$  y  $x_2$  (equilibrios hete-

rogéneos).

Nos proponemos por último el utilizar técnicas numéricas para el cálculo de las bifurcaciones que llamaremos secundarias (en este caso se tratan de bifurcaciones silla-nodo) cuya presencia está garantizada por los diagramas de equilibrio obtenidos para varios valores de  $u_2$  (ver figura 3.4) y por el estudio realizado con ayuda de la variedad de centros. En concreto queremos determinar en el plano de parámetros las curvas correspondientes a dichas bifurcaciones y para ello usaremos de nuevo del proceso de continuación. Como se indicó en el apartado 3.2.2, podemos ampliar el sistema de ecuaciones que define los equilibrios con una ecuación adicional que especifique una condición necesaria de bifurcación, como puede ser la anulación del determinante jacobiano.

Haciéndolo así se obtienen las curvas correspondientes que completan definitivamente el diagrama de bifurcaciones, que se presenta en la figura 3.6. Se observa un total acuerdo con los resultados del estudio realizado mediante la técnica de la variedad de centros, salvo en el punto  $P_4$  en el que la curva de bifurcaciones silla-nodo no llega a presentar el punto de cúspide al interceptar a la curva de desaparición de equilibrios heterogéneos.

Debe observarse como también ocurre lo mismo para la curva correspondiente a  $P_3$  pero después de sobrepasar el punto de cúspide. Las líneas de bifurcaciones secundarias correspondientes a  $P_1$  y  $P_2$ , una vez sobrepasadas dichas cúspides se confunden en una

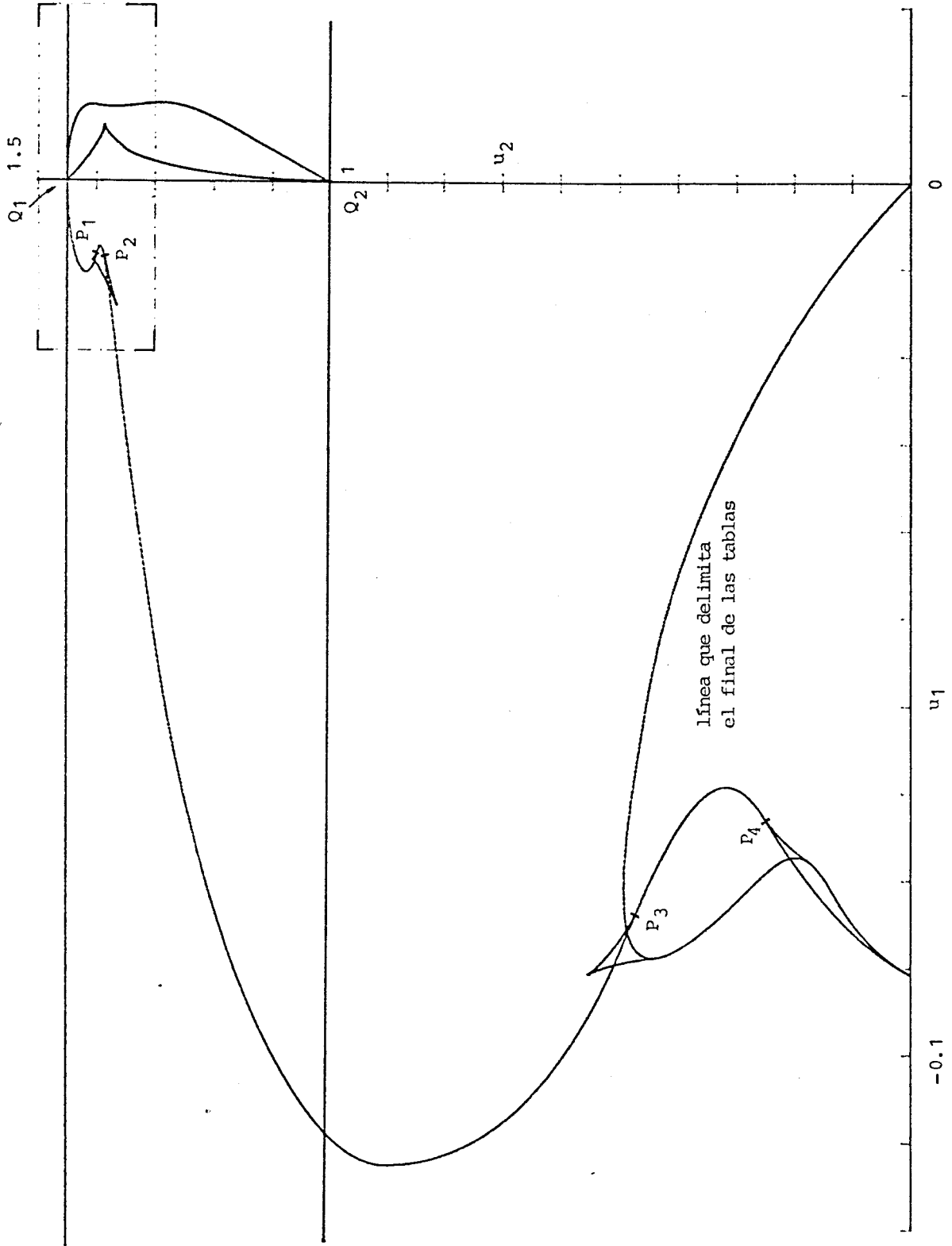


Figura 3.6.a) Diagrama de bifurcaciones del modelo de dos zonas.

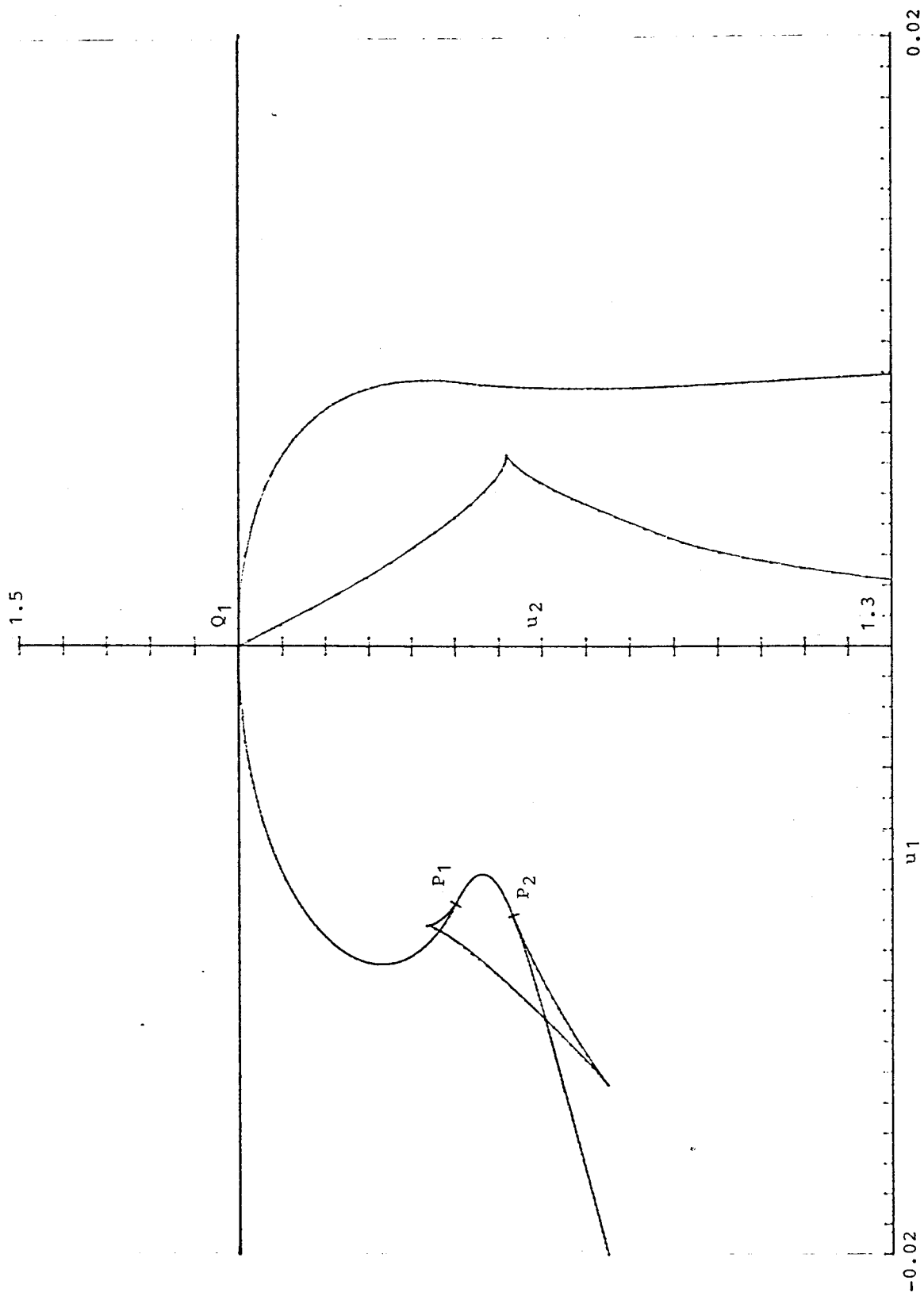


Figura 3.6.b) Ampliación de la zona enmarcada.

sole. Nótese además que cada línea de bifurcaciones silla-nodo, debido a la simetría inherente, refleja el hecho de la aparición de dos puntos simétricos de pliegue de equilibrios. Esta observación también es válida para las líneas que indican los extremos del rango admisible para las variables.

Los puntos  $Q_1$  y  $Q_2$  son -como se reflejó más arriba- otros puntos de bifurcación de codimensión mayor que la unidad, pues en ellos entran en contacto dos curvas de bifurcaciones de codimensión uno. La total degeneración que presenta la matriz de linealización en dichos puntos hace que no se gane en simplificación con el uso de las técnicas derivadas de la variedad de centros. No incluiremos un estudio analítico de tales puntos por ser una situación más atípica que la de los casos analizados; por otra parte el uso de las técnicas numéricas permite detectar cómo hay una tercera línea de bifurcaciones (silla-nodo) que pasa por ellos (ver figura 3.6) y que presenta a su vez un punto cuspidal.

#### **3.4.2. Análisis del modelo de interacción para tres zonas.**

Si se considera un número superior de áreas, dotándolas del mecanismo de difusión, se tiene un mayor grado de complejidad. Abordamos ahora el estudio para el caso de tres zonas interconectadas, siguiendo la estructura de los modelos anulares de Turing (ver Rosen [1972]). Consideramos pues la agrupación de tres modelos BSNS3, de manera que:

$$\frac{dx}{dt} = x_1 M(x_1) + u(x_1 + x_2 - 2x_3)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 M(x_2) + u(x_2 + x_1 - 2x_3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3 M(x_3) + u(x_3 + x_1 - 2x_2)$$

con  $x_1, x_2, x_3 \in [0,1]$

Repetiremos ahora todo el proceso anterior, partiendo del equilibrio homogéneo

$$x_1 = x_2 = x_3 = \bar{x}, \text{ con } M(\bar{x}) = 0$$

pues, de nuevo, las bifurcaciones de la solución nula conducen a equilibrios fuera del rango significativo del modelo.

Vemos ahora que la matriz

$$D_x f(x_1, x_2, x_3, u)$$

resulta ser:

$$\begin{bmatrix} c_1 - 2u & u & u \\ u & c_2 - 2u & u \\ u & u & c_3 - 2u \end{bmatrix}$$

donde

$$c_i = M(x_i) + x_i M'(x_i), \quad i = 1, 2, 3$$

Para el equilibrio homogéneo, se tiene:

$$J(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, u) = \bar{x}M'(\bar{x})(\bar{x}M'(\bar{x}) - 3u)^2$$

Este jacobiano se anula pues, para

$$\bar{x} = 0 \text{ ó } M'(\bar{x}) = 0$$

(casos que se corresponden con las rectas de bifurcaciones transcíticas y de silla-nodo idénticas al caso de dos zonas) y para

$$u_c = \frac{1}{3} \bar{x}M'(\bar{x})$$

que origina un autovalor cero doble. En el plano de parámetros  $u_1, u_2$ , los puntos correspondientes a esta condición originan una línea que, salvo un factor de escala con relación a  $u_1$ , es totalmente similar a la de puntos pitchfork en el caso de las dos zonas. Pero ahora la degeneración es mayor.

Podemos, como antes, recurrir al algoritmo para el cálculo de las diversas tangentes en dichos puntos. La matriz  $D_x f$  toma la forma

$$\begin{bmatrix} u_c & u_c & u_c \\ u_c & u_c & u_c \\ u_c & u_c & u_c \end{bmatrix}$$

y con la notación del apartado 3.2.1,  $m = 2$  y se obtiene:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad w_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad w_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

El hecho de que  $D_u f$  sea el vector nulo, fuerza a que el vector

que llamábamos  $v_0$  también lo sea. Si hacemos

$$d = 2M'(\bar{x}) + \bar{x}M''(\bar{x})$$

los cálculos conducen a:

$$a_{111} = a_{222} = -\frac{d}{3}$$

$$a_{211} = a_{122} = \frac{2}{3}d$$

$$a_{112} = a_{212} = a_{121} = a_{221} = \frac{d}{3}$$

$$b_{11} = b_{22} = -3$$

$$b_{12} = b_{21} = 0$$

$$c_1 = c_2 = 0$$

y llegamos entonces al sistema en  $q_0, q_1, q_2$ , siguiente:

$$-dq_1^2 + 2dq_1q_2 + 2dq_2^2 - 18q_0q_1 = 0$$

$$2dq_1^2 + 2dq_1q_2 - dq_2^2 - 18q_0q_1 = 0$$

Si  $d = 0$ , el sistema se reduce a la ecuación  $q_0q_1 = 0$ , que no basta para determinar unívocamente la dirección de las tangentes.

Para  $d \neq 0$ , se obtienen como soluciones no triviales, para

$$(q_0, q_1, q_2)$$

las ternas:

$$(1, 0, 0)$$

$$(1, 6/d, 6/d)$$

$$(1, 6/d, -12/d)$$

$$(1, -12/d, 6/d)$$



que originan como dirección de las tangentes, incluyendo en la última componente la correspondiente al parámetro, los vectores:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad T_2 = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} 12 \\ -6 \\ -6 \\ d \end{bmatrix} \quad T_3 = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \\ -6 \\ d \end{bmatrix} \quad T_4 = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 12 \\ d \end{bmatrix}$$

Esto nos dice que, en los puntos de bifurcación con  $d \neq 0$ , intersectan en el punto

$$(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, u_c)^T$$

de la recta de equilibrios homogéneos, otras tres ramas solución. Hemos de sospechar además que, cuando  $d = 0$ , estamos en una bifurcación de mayor degeneración. Acudiremos ahora a la técnica de la variedad de centros, que proporciona una información muy superior.

El sistema reducido al que ahora podremos llegar será de dimensión dos, ya que el autovalor cero es doble. Además volvemos a estar en presencia de un grupo de simetrías para el que el modelo resulta equivariante. En concreto, se trata del grupo denominado  $D_3$  o grupo de transformaciones invariantes del triángulo equilátero. Este grupo de simetrías, que coincide con el grupo de permutaciones de tres elementos, responde en la formulación actual a la representación matricial:

$$D_3 = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$$

con

$$S_0 = I \quad S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dejaremos constancia, además, de que en este grupo existen los siguientes subgrupos:

$$\langle S_0, S_3 \rangle$$

$$\langle S_0, S_4 \rangle$$

$$\langle S_0, S_5 \rangle$$

$$\langle S_0, S_1, S_2 \rangle$$

y que un conjunto de generadores, para el grupo es:

$$\langle S_i, S_j \rangle, \text{ con } i = 1 \text{ ó } 2 \text{ (giros)}$$

$$j = 3, 4 \text{ ó } 5 \text{ (reflexiones)}$$

Efectuaremos ahora un cambio de variables, de forma que la nueva base esté constituida por autovectores de la matriz  $D_x f$  en el punto de bifurcación. Notemos que el núcleo de dicha matriz es un subespacio de dimensión dos, por lo que tenemos cierta libertad para elegir los autovectores correspondientes al autovalor nulo. Recordemos, además, que tanto dicho subespacio como el generado por el tercer autovector son invariantes para el grupo de simetría. La representación matricial actual es, por tanto, reducible.

Para conseguir que en la nueva base la representación matricial del grupo tenga un significado geométrico más claro, tomaremos una base ortonormal. El primer vector básico, uno de los generadores del núcleo, será escogido de manera que sea invariante respecto a uno de los subgrupos que denotan reflexiones; el segundo, que completa el conjunto generador del núcleo, viene ya impuesto por la elección anterior.

Así, elegimos como matriz de cambio de base a:

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

y desarrollaremos la función M como en el caso anterior usando los mismos coeficientes  $a_i$ . Efectuaremos además la traslación de las variables y del parámetro al origen, de forma que si  $x, y, z$  denotan las nuevas variables y  $u$  es ahora el valor trasladado del parámetro, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3u & 0 & 0 \\ 0 & -3u & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} -x^2/\sqrt{6} + y^2/\sqrt{6} + 2xz/\sqrt{3} \\ 2xy/\sqrt{6} + 2yz/\sqrt{3} \\ x^2/\sqrt{3} + y^2/\sqrt{3} + z^2/\sqrt{3} \end{bmatrix} +$$

$$+ a_2 \begin{bmatrix} x^3/2 + xy^2/2 + xz^2 - x^2z/\sqrt{2} + y^2z/\sqrt{2} \\ y^3/2 + yz^2 + x^2y/2 + \sqrt{2}xyz \\ -x^3/3\sqrt{2} + xy^2/\sqrt{2} + z^3/3 + x^2z + y^2z \end{bmatrix} +$$

$$+a_3 \begin{bmatrix} (-5x^4/6 + x^2y^2 + y^4/2 + 8xz^3/3\sqrt{2} + 2z^2(y^2 - x^2) + 4xz(x^2 + y^2)/\sqrt{2})/\sqrt{6} \\ (2y(x^3 + 3xy^2)/3\sqrt{3} + 8yz^3/3\sqrt{6} + 4xyz^2/\sqrt{3} + 4yz(x^2 + y^2)/\sqrt{6})/\sqrt{2} \\ (x^4/2 + x^2y^2 + y^4/2 + z^4/3 + 2z^2(x^2 + y^2) - 4z(x^3 - 3xy^2)/3\sqrt{2})/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Sabemos que esta formulación debe ser equivariante respecto a la nueva representación matricial del grupo, que es:

$$S_0^* = I \quad S_1^* = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_2^* = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_3^* = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_4^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_5^* = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pero ahora, aparte de  $S_0^*$ , sólo es fácilmente verificable la covarianza del sistema respecto a  $S_4^*$ , que se traduce en que en la segunda ecuación todos los términos son de grado impar en la variable  $y$ .

A pesar de ello, en la nueva base, reconocemos que todo el peso del grupo de simetrías recae sobre las dos primeras variables. Dicho con mayor precisión, la proyección del espacio en el generado por los dos primeros vectores de la base, proporcionaría ahora una representación irreducible (ver Kostrikin [1982]). Para abreviar los cálculos de la variedad de centros y del consiguiente sistema reducido, resulta útil entonces (Sattinger [1979]) usar en el plano  $(x,y)$  unas nuevas coordenadas complejas mediante la definición:

$$w = x + iy$$

$$\bar{w} = x - iy$$

Si tenemos en cuenta que  $S_2^*$  y  $S_4^*$  son generadores del grupo y calculamos su representación en la base  $(w, \bar{w})$ , se obtiene respectivamente:

$$\begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de forma que la representación del sistema en las variables  $w, \bar{w}, z$  es:

$$\frac{dw}{dt} = F_1(w, \bar{w}, z)$$

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = F_2(w, \bar{w}, z)$$

$$\frac{dz}{dt} = F_3(w, \bar{w}, z)$$

Se debe tener:

$$e^{\frac{2\pi i}{3}} F_1(w, \bar{w}, z) = F_1\left(e^{\frac{2\pi i}{3}} w, e^{-\frac{2\pi i}{3}} \bar{w}, z\right)$$

$$e^{-\frac{2\pi i}{3}} F_2(w, \bar{w}, z) = F_2\left(e^{\frac{2\pi i}{3}} w, e^{-\frac{2\pi i}{3}} \bar{w}, z\right)$$

$$F_3(w, \bar{w}, z) = F_3\left(e^{\frac{2\pi i}{3}} w, e^{-\frac{2\pi i}{3}} \bar{w}, z\right)$$

y además

$$F_2(w, \bar{w}, z) = F_1(\bar{w}, w, z)$$

$$F_1(w, \bar{w}, z) = F_2(\bar{w}, w, z)$$

$$F_3(w, \bar{w}, z) = F_3(\bar{w}, w, z)$$

Deducimos inmediatamente de

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = \frac{d\bar{w}}{dt}$$

que

$$F_1 = \bar{F}_2$$

por lo que bastará trabajar con  $F_1$  y  $F_3$  para contar con toda la información del modelo. Además, si desarrollamos  $F_1$  de la forma:

$$F_1(w, \bar{w}, z) = \sum_{r,s} A_{rs}(z) w^r \bar{w}^s$$

como

$$\bar{F}_1(w, \bar{w}, z) = F_2(w, \bar{w}, z) = F_1(\bar{w}, w, z)$$

hemos de concluir que los coeficientes  $A_{rs}$  son funciones reales de  $z$ .

El desarrollo similar para  $F_3$  también posee la misma propiedad, dado que debe proporcionar siempre valores reales, y tenemos:

$$\bar{F}_3(w, \bar{w}, z) = F_3(w, \bar{w}, z) = F_3(\bar{w}, w, z)$$

lo que impone, además, que si

$$F_3(w, \bar{w}, z) = \sum_{r,s} B_{rs}(z) w^r \bar{w}^s$$

entonces

$$B_{rs} = B_{sr}$$

Notamos además que, usando para  $F_3$  la otra relación impuesta por la simetría, debe verificarse:

$$\sum_{r,s} B_{rs}(z) w^r \bar{w}^s = \sum_{r,s} B_{rs}(z) e^{\frac{2\pi i}{3}(r-s)} w^r \bar{w}^s$$

que fuerza a que

$$B_{rs}(z) = 0$$

a no ser que

$$r - s = 3n, \text{ para algún } n \text{ entero.}$$

Estos resultados condicionan fuertemente la estructura de  $F_3$ . De hecho, si seguimos un desarrollo similar al de Sattinger [1983], puede concluirse que  $F_3$  debe ser un polinomio en  $p$ ,  $q$  y  $z$  donde

$$p = w\bar{w}$$

$$q = w^3 + \bar{w}^3$$

Basta observar que, por lo anterior, con  $s$  y  $n$  enteros no negativos:

$$\begin{aligned} F_3(w, \bar{w}, z) &= \sum_{s,n} B_{sn}(z) (w^s \bar{w}^{-s+3n} + w^{s+3n} \bar{w}^{-s}) = \\ &= \sum_{s,n} B_{sn}(z) (w\bar{w})^s (w^{3n} + \bar{w}^{3n}) \end{aligned}$$

y que por inducción

$$w^{3n} + \bar{w}^{3n}$$

es siempre expresable como un polinomio en  $p$  y  $q$ . La condición análoga a la aplicada a  $F_3$ , conduce para  $F_1$  a:

$$e^{\frac{2\pi i}{3}} \sum_{r,s} A_{rs}(z) w^r \bar{w}^s = \sum_{r,s} A_{rs}(z) e^{\frac{2\pi i}{3} (r-s)} w^r \bar{w}^s$$

que impone a su vez que

$$A_{rs}(z) = 0$$

salvo que exista un entero  $n$  con

$$1 - r + s = 3n$$

De todos los sumandos del desarrollo de  $F_1$ , los de menor grado posible corresponden entonces a los pares  $(1,0)$  y  $(0,2)$  para  $(r,s)$ , de forma que todos los términos entrarán en alguna de las dos categorías:

$$(r, r + 3n - 1), \text{ para } n \geq 1$$

$$(s + 3n + 1, s), \text{ para } n \geq 0$$

Esto permite una descomposición de los términos de  $F_1$  en factores de la forma

$$(w\bar{w}), \bar{w}^{3n-1} \text{ y } w^{3n+1}$$

Razonando por inducción, se comprueba que la estructura de  $F_1$  debe responder a un factor  $w$  y a otro  $\bar{w}^2$ , que operan sobre polinomios en  $p$ ,  $q$  y  $z$ . Concluimos que el modelo tiene que responder



a la formulación:

$$\frac{dw}{dt} = wQ_1(p, q, z) + \bar{w}^2 Q_2(p, q, z)$$

$$\frac{dz}{dt} = Q_3(p, q, z)$$

donde  $Q_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , indica un polinomio en las variables incluidas entre paréntesis. Esta representación no sólo ayuda a abreviar sensiblemente las expresiones del modelo sino que, por los resultados del apartado 3.3.1, simplificará de forma análoga las ecuaciones de la variedad de centros y del modelo reducido.

La variedad de centros, descrita por

$$z = h(w, \bar{w})$$

admitirá, por su carácter invariante respecto de la simetría presente, un desarrollo en  $p$  y  $q$ , y la ecuación reducida será expresable ahora como  $w$  por un desarrollo en  $p$  y  $q$ , más  $\bar{w}^2$  por un desarrollo en las mismas variables.

Comprobamos en efecto que se tiene:

$$\begin{aligned} \sqrt{6} \frac{dw}{dt} = & w(-3\sqrt{6}u + 2\sqrt{2}a_1z + \sqrt{6}a_2(z^2 + p/2) + \\ & + a_3(4\sqrt{2}z^3/3 + 2\sqrt{2}zp - q/6)) + \\ & + \bar{w}^2(-a_1 - \sqrt{3}a_2z - a_3(2z^2 + p/2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{6} \frac{dz}{dt} = & \sqrt{6}a_0z + \sqrt{2}a_1(z^2 + p) + a_2(\sqrt{6}z^3/3 + \sqrt{6}zp - \sqrt{3}q/6) + \\ & + a_3(\sqrt{2}z^4/3 + 2\sqrt{2}z^2p - 2zq/3 + \sqrt{2}p^2/2) \end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones de calcular la ecuación de la varie-

dad de centros. Si nos limitamos a los términos inferiores de quinto orden, deberemos ensayar:

$$z = b_1 p + b_2 q + b_3 p^2 + \dots$$

Permitiremos, usando una vía alternativa a la efectuada en el caso de dos zonas, que los coeficientes  $b_i$  constituyan desarrollos en el parámetro  $u$ , pero no incluiremos un término  $b_0$  que proporcionaría sumandos con potencias exclusivamente en  $u$  ya que de nuevo puede asegurarse que dichos términos son todos nulos.

Teniendo presente que

$$\begin{aligned} p' &= w\bar{F}_1 + \bar{w}F_1 \\ q' &= 3(w^2\bar{F}_1 + \bar{w}^2F_1) \end{aligned}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} z' &= b_1 p' + b_2 q' + 2 b_3 p p' = \\ &= (2b_1 p + 3b_2 q + 4b_3 p^2) Q_1(p, q, z) + \\ &+ (b_1 q + 6b_2 p^2 + 2b_3 p q) Q_2(p, q, z) \end{aligned}$$

expresión que debe coincidir con

$$z' = Q_3(p, q, z)$$

cuando sustituimos  $z$  por su desarrollo en  $p$  y  $q$ . Igualando los términos en  $p$ , se concluye:

$$-6\sqrt{6} b_1 u = \sqrt{6} a_0 b_1 + \sqrt{2} a_1$$

Para los términos en  $q$ , debe verificarse:

$$-9\sqrt{6} b_2 u - a_1 b_1 = \sqrt{6} a_0 b_2 - \sqrt{3} a_2 / 6$$

y para los términos en  $p^2$ :

$$\begin{aligned} & -12\sqrt{6} b_3 u + 4\sqrt{2} b_1^2 a_1 + \sqrt{6} b_1 a_2 - 6 b_2 a_1 = \\ & = \sqrt{6} b_3 a_0 + \sqrt{2} b_1^2 a_1 + \sqrt{6} b_1 a_2 + \sqrt{2} a_3 / 2 \end{aligned}$$

Las tres últimas ecuaciones permiten obtener las expresiones de  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$  :

$$\begin{aligned} b_1 &= - \frac{\sqrt{3} a_1}{3(a_0 + 6u)} \\ b_2 &= \frac{\sqrt{2}(a_2 - 2\sqrt{3} b_1 a_1)}{12(a_0 + 9u)} \\ b_3 &= - \frac{\sqrt{3}(a_3 - 6b_1^2 a_1 + 6\sqrt{2} b_2 a_1)}{6(a_0 + 12u)} \end{aligned}$$

que conducen a desarrollos en  $u$  que, particularizados para  $u = 0$ , dan lugar a:

$$\begin{aligned} b_1 &= - \frac{\sqrt{3} a_1}{3a_0} \\ b_2 &= \frac{\sqrt{2}(a_0 a_2 + 2a_1^2)}{12a_0^2} \\ b_3 &= - \frac{\sqrt{3}(a_0 a_3 + a_1 a_2)}{6a_0^2} \end{aligned}$$

Podemos llegar pues a la expresión del sistema reducido hasta quinto orden, que es la siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= w(-3\sqrt{6}u + 2\sqrt{2}a_1(b_1 p + b_2 q + b_3 p^2) + \\ & \quad + \sqrt{6}a_2(b_1^2 p^2 + p/2) + a_3(2\sqrt{2}b_1 p^2 - q/6))/\sqrt{6} + \\ & \quad + \bar{w}^2(-a_1 - \sqrt{3}a_2(b_1 p + b_2 q) - a_3 p/2)/\sqrt{6} \end{aligned}$$

que, para mayor brevedad, escribiremos como:

$$\dot{w} = w (A_0 + A_2 p + A_4 q + A_6 p^2) + \bar{w}^2 (A_1 + A_3 p + A_5 q)$$

donde los nuevos coeficientes vienen dados por:

$$A_0 = -3u$$

$$A_1 = -a_1/\sqrt{6}$$

$$A_2 = 2a_1 b_1/\sqrt{3} + a_2/2$$

$$A_3 = -a_2 b_1/\sqrt{2} - a_3/(2\sqrt{6})$$

$$A_4 = 2a_1 b_2/\sqrt{3} - a_3/(6\sqrt{6})$$

$$A_5 = -a_2 b_2/\sqrt{2}$$

$$A_6 = 2a_1 b_3/\sqrt{3} + a_2 b_1^2 + 2a_3 b_1/\sqrt{3}$$

Con la ayuda del sistema reducido anterior, nos planteamos ahora el estudio de los posibles diagramas locales de bifurcaciones, de manera que sea posible predecir qué situaciones pueden presentarse. Dispondremos así de una guía inestimable para el uso posterior de las técnicas numéricas, con las que nos propondremos localizar las bifurcaciones que están realmente presentes en cada caso. De otro modo, es decir, con el uso exclusivo de herramientas numéricas, sería difícil tener las debidas garantías de haber completado el análisis.

Iniciamos el estudio de los diagramas locales de bifurcaciones usando -en primera aproximación- sólo los términos inferiores a tercer orden; es decir, consideraremos el sistema:

$$\dot{w} = A_0 w + A_1 \bar{w}^2$$

Este sistema (aparte de la solución nula, que se corresponde con

la rama de equilibrios homogéneos) presenta como soluciones de equilibrio, supuesto  $A_1 \neq 0$ , aquellas que verifican:

$$\frac{\bar{w}^3}{|w|^2} = -\frac{A_0}{A_1}$$

Ya que el segundo miembro es un número real, si suponemos que

$$A_1 > 0$$

y escribimos:

$$w = |w| e^{i\theta}$$

El argumento  $\theta$  debe cumplir:

$$-3\theta = (2k + 1)\pi, \text{ si } A_0 > 0$$

$$-3\theta = 2k\pi, \text{ si } A_0 < 0$$

siendo  $k$  entero. Por tanto, las coordenadas  $x$  e  $y$  de los equilibrios deben responder localmente a los diagramas de la figura 3.7.

Puede estudiarse además la estabilidad de las diversas ramas, para lo cual se debe tener en cuenta el signo del tercer autovalor, que queda excluido en el sistema reducido y que viene determinado por  $a_0$ . Tenemos pues que, en condiciones normales ( $A_1 \neq 0$ ), la bifurcación de la rama homogénea da lugar a otras tres ramas que guardan una simetría entre sí.

Así, para  $u_2 = 0.5$  se obtiene mediante el algoritmo de continuación el diagrama de equilibrios de la figura 3.8. Están representadas las tres variables en ordenadas y se observa que las

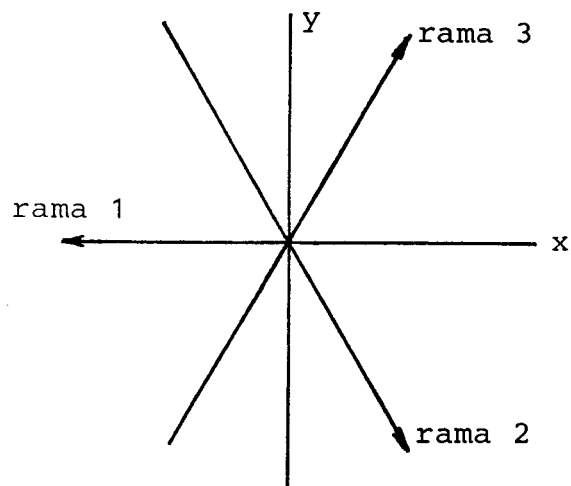
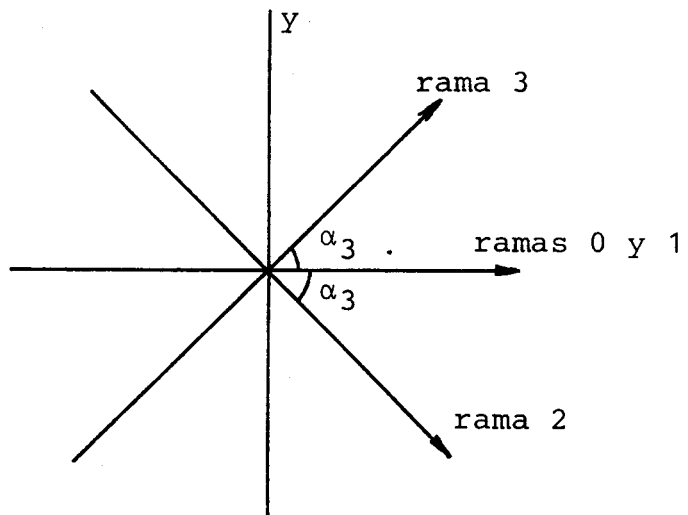
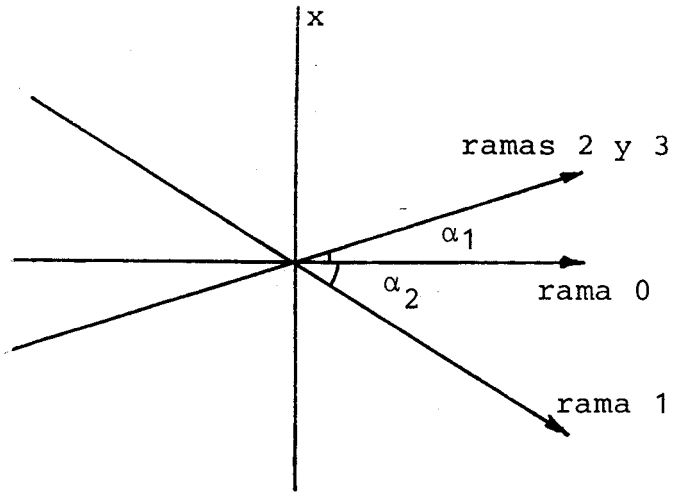


Figura 3.7. Análisis en primera aproximación de las ramas secundarias. La rama 0 representa los equilibrios homogéneos.

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{A_0}{2A_1} \quad , \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{A_0}{A_1} \quad , \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{A_2}{A_1}$$

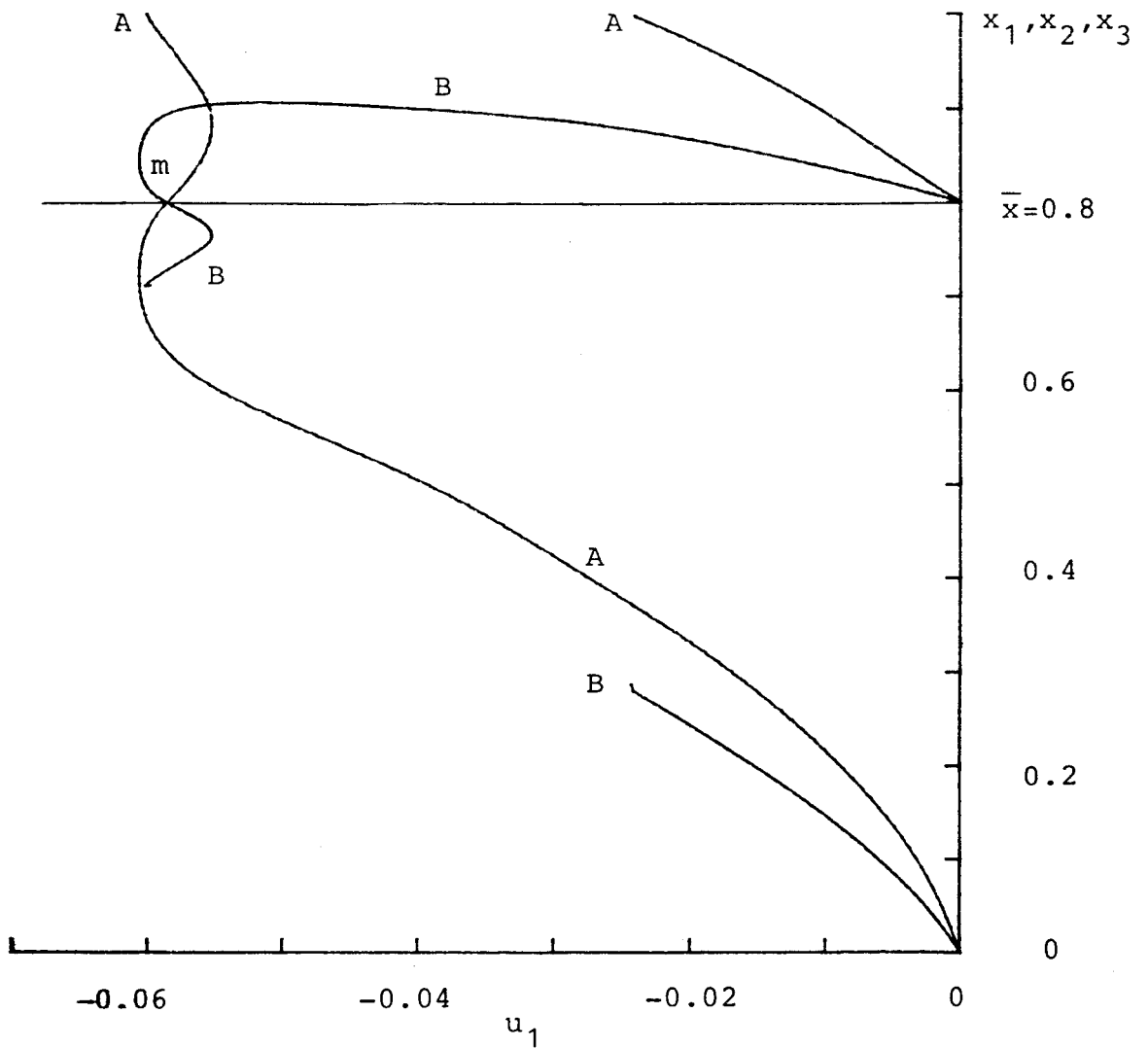


Figura 3.8. Diagrama de equilibrios del modelo de tres zonas para  $u_2 = 0.5$ . Dos de las ramas secundarias se proyectan sobre la curva B, y la tercera lo hace sobre la curva A. (m) indica el punto de ramificación.

tres ramas que bifurcan en el punto  $m$  se proyectan sobre dos curvas que vienen rotuladas con A y B. Las tres ramas se comportan de tal manera que, si  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) recorre la curva A al mover  $u_2$ , las otras dos variables son iguales y recorren la curva B. La pérdida de homogeneidad conduce a equilibrios que llamaremos, por esta razón, semihomogéneos. Estos nuevos equilibrios poseen aún cierta simetría, al ser cada rama invariante a un subgrupo de reflexiones. Las tres ramas están relacionadas mediante el subgrupo correspondiente a los giros y el conjunto de soluciones, considerado en su totalidad, sigue lógicamente respetando la equivarianza respecto al grupo. Se observa además la existencia de bifurcaciones secundarias (pliegues), que necesitan justificación.

El estudio anterior no resulta válido cuando

$$A_1 = 0$$

pues, entonces, el sistema reducido presenta degeneración al paso por cero del coeficiente  $A_0$ . Hay que recurrir a términos superiores a los considerados en dicho caso, y es importante subrayar que la condición anterior es equivalente a:

$$d = 0$$

es decir, al caso en que el algoritmo de cálculo de las tangentes en el punto de bifurcación no era efectivo. Esta situación se corresponde con los puntos

$$P_{-1}, P_1, P_2, P_3 \text{ y } P_4$$

de la figura 3.9, donde se representa el diagrama de bifurcaciones (con los datos de que disponemos hasta el momento), que es



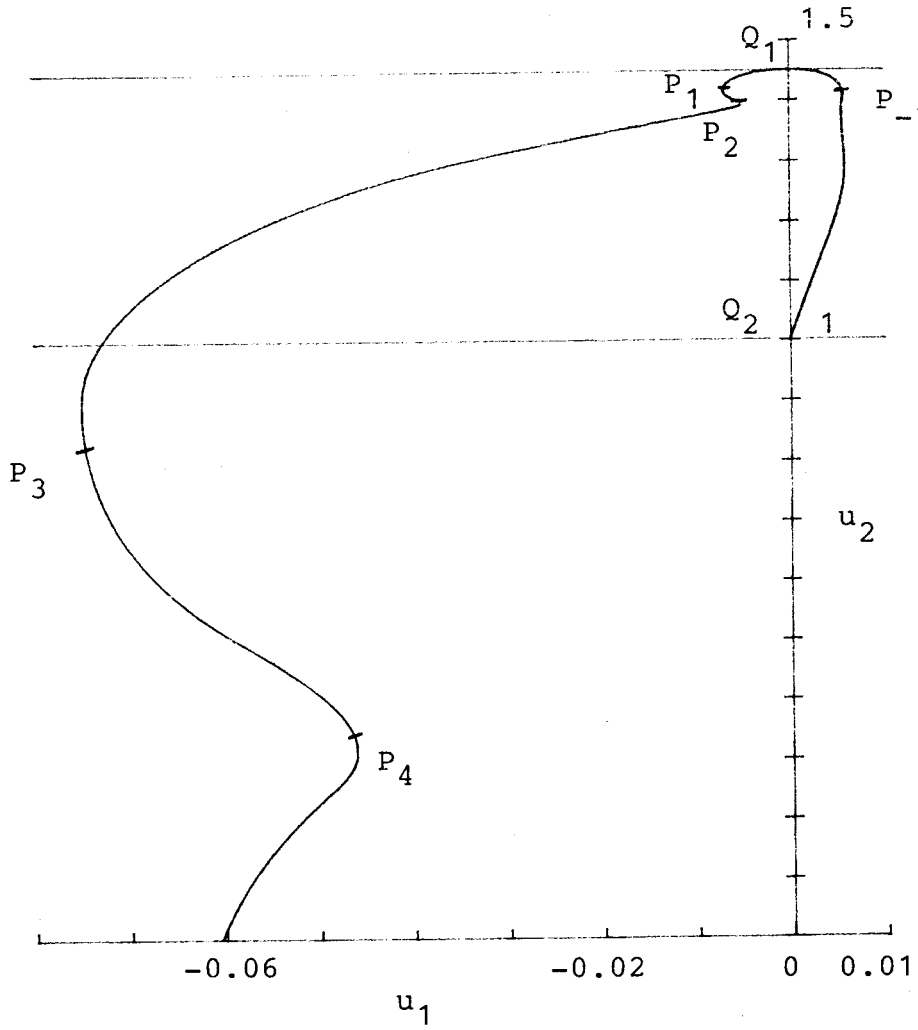


Figura 3.9. Diagrama de bifurcaciones del modelo de tres zonas. No se incluyen las bifurcaciones secundarias.

muy similar al de la figura 3.3, correspondiente al caso de dos zonas ya analizado. Análogamente, los puntos  $Q_1$  y  $Q_2$  son otros puntos en los que la codimensión de la bifurcación es superior y en los que, como antes, la degeneración de la matriz imposibilita conseguir reducción alguna con el cálculo de la variedad de centros.

Limitaremos nuestro estudio a los puntos  $P_i$  señalados. Dado que la inclusión de los términos de tercer orden no resuelve la degeneración en el sistema reducido, tomaremos también los términos de un orden superior. Estudiamos pues el sistema:

$$\dot{w} = w(A_0 + A_2p + A_4q) + \bar{w}^2(A_1 + A_3p)$$

que, bajo las condiciones

$$A_2 \neq 0$$

$$A_3 \neq 0$$

$$A_4 \neq 0$$

proporciona toda la información necesaria para conocer la estructura local de la bifurcación de codimensión dos correspondiente al caso  $A_0 = A_1 = 0$  (ver Golubitsky & Schaeffer [1982] y Sattinger [1983]). No será pues necesario recurrir a términos de orden superior.

Los equilibrios del sistema anterior pueden clasificarse en dos grupos, según verifiquen o no la condición:

$$A_1 + A_3p = 0$$

Si no se cumple esta igualdad, procedemos como anteriormente, es decir. hacemos:

$$w = re^{i\theta}, \text{ con } r = |w|$$

y escribimos:

$$re^{-3i\theta} = \frac{\bar{w}^3}{|w|^2} = - \frac{A_0 + A_2 p + A_4 q}{A_1 + A_3 p}$$

Limitaremos nuestro estudio a una de las ramas solución, dado que las otras dos pueden obtenerse mediante giros; en particular nos centraremos en la rama en la que

$$\theta = 0 \text{ ó } \pi$$

Para englobar las dos posibilidades, tomaremos

$$\theta = 0$$

y permitiremos que  $r$  tome valores negativos. Después de algunas operaciones, llegamos a:

$$(A_3 + 2A_4) r^3 + A_2 r^2 + A_1 r + A_0 = 0$$

Si hacemos ahora

$$\alpha = A_3 + 2A_4$$

La condición anterior permite representar el comportamiento de los equilibrios respecto al parámetro  $A_0$ , en un plano con ejes  $A_0$  y  $r$ . La rama de equilibrios corta al eje  $r$  en

$$r = 0$$

$$r = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4\alpha A_1}}{2\alpha}$$

y presenta pliegues, respecto a  $A_0$ , en los puntos con

$$\frac{dA_0}{dr} = -3\alpha r^2 - 2A_2 r - A_1 = 0$$

es decir, para

$$r = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 3\alpha A_1}}{3\alpha}$$

Supongamos que  $A_2 < 0$ , y hagamos:

$$A_1^* = \frac{A_2^2}{4\alpha}$$

$$A_1^{**} = \frac{A_2^2}{3\alpha}$$

Si, a efectos de la representación, suponemos que  $\alpha > 0$ , obtenemos los diagramas de la figura 3.10, que ya dan cuenta de la aparición de pliegues en las ramas de equilibrios semihomogéneos (para  $A_1 > A_1^{**}$  no existen ya bifurcaciones secundarias). En el plano de parámetros  $A_0, A_1$  la situación es similar —por ahora— al caso de dos zonas, pues con las suposiciones efectuadas (el hecho principal es que  $\alpha$  y  $A_2$  tengan signos opuestos), se obtendría un diagrama local de bifurcaciones como el de la figura 3.11. Al eje  $A_1$ , que está constituido por bifurcaciones transcriticals, se le suma una curva de bifurcaciones silla-nodo que presenta un punto de cúspide. Todas las bifurcaciones se presentan simultáneamente

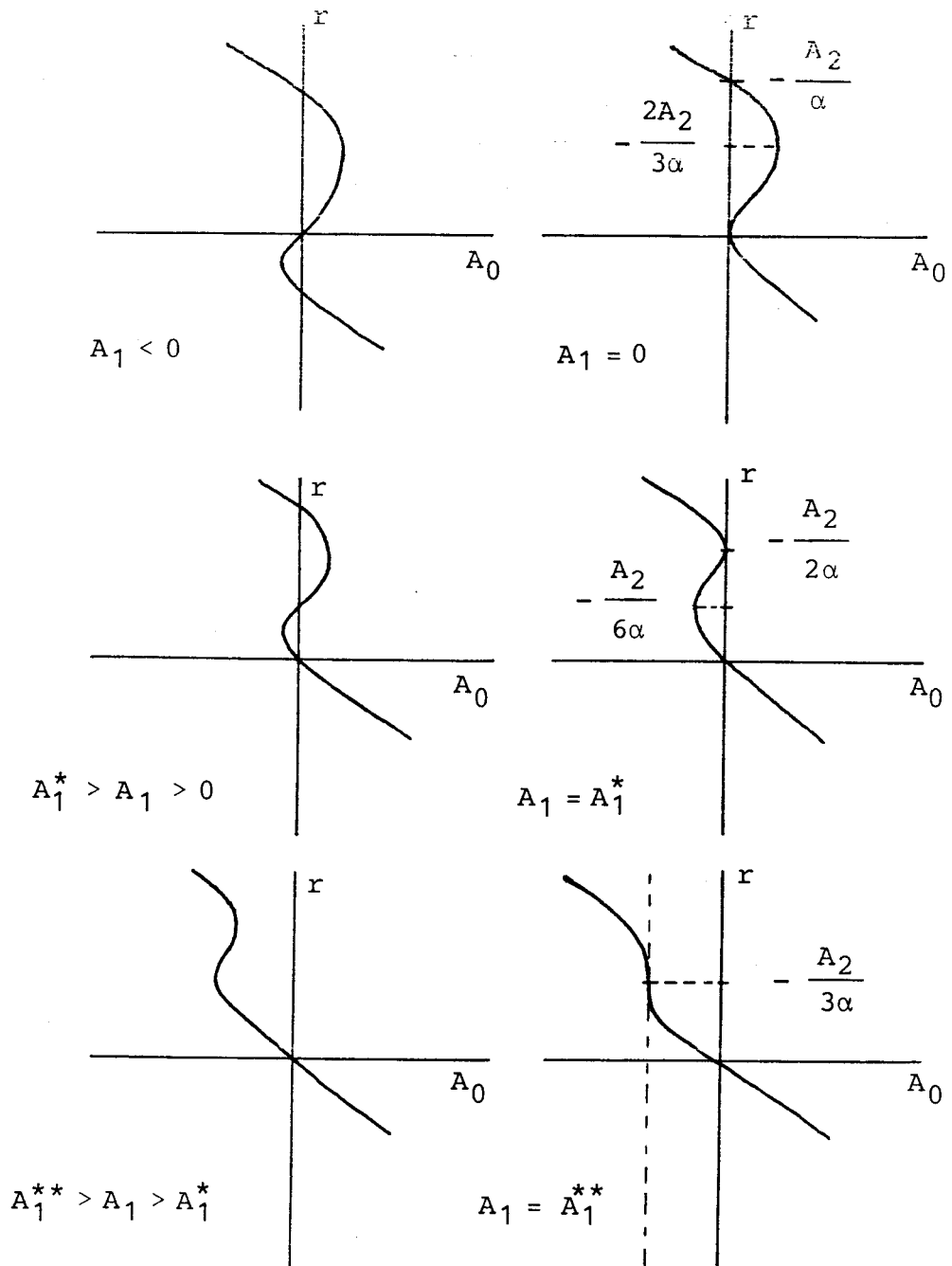


Figura 3.10. Comportamiento local, respecto a  $A_0$ , según los valores de  $A_1$ . Se representa sólo una de las tres ramas secundarias.

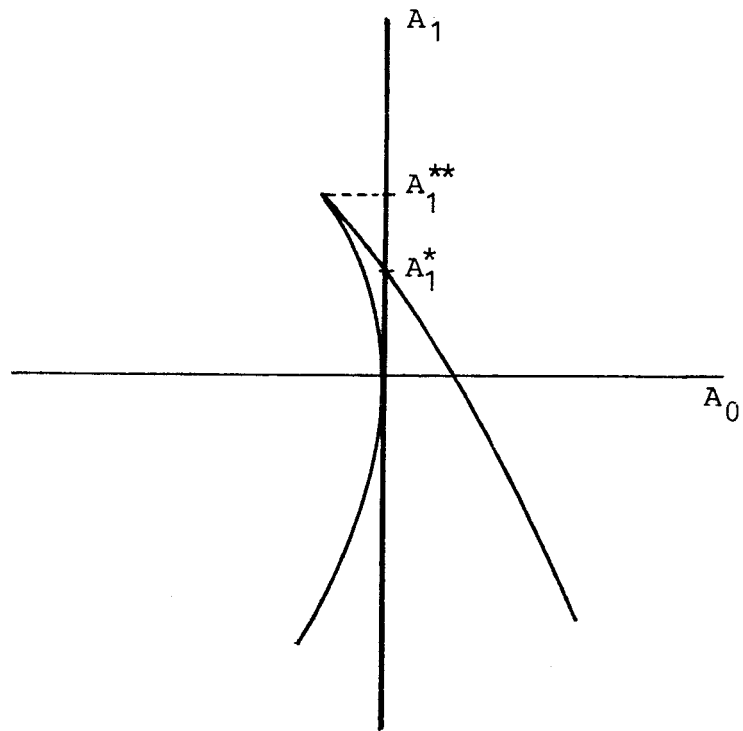


Figura 3.11. Diagrama local de bifurcaciones (con los datos disponibles hasta el momento) en los puntos de codimensión dos.

para las tres ramas semihomogéneas.

Pero queda otro grupo de soluciones; aquellos equilibrios para los que:

$$A_1 + A_3 p = 0$$

$$A_0 + A_2 p + A_4 q = 0$$

Usando de nuevo la forma modulo-argumental de las soluciones, y teniendo en cuenta que

$$p = r^2$$

$$q = 2r^3 \cos 3\theta$$

y que por la fórmula de Moivre,

$$\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$$

tenemos:

$$r = \left( -\frac{A_1}{A_3} \right)^{1/2}$$

que, al sustituir en la otra ecuación y tomar

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

lleva a que

$$A_0 + A_2 r^2 - 6A_4 r^2 x + 8A_4 x^3 = 0$$

donde

$$-r \leq x \leq r$$

Podemos representar gráficamente la rama de equilibrios en un plano de ejes  $A_0, x$  y se obtiene así la figura 3.12, donde se han supuesto los signos de los diversos coeficientes de manera que:

$$A_1 A_3 < 0, A_2 < 0, A_4 > 0$$

Puede observarse además que, en los puntos correspondientes a

$$x = \pm r$$

$$x = \pm \frac{r}{2}$$

el argumento  $\theta$  toma valores que se corresponden con los de algunas de las ramas obtenidas anteriormente, de manera que en dichos puntos se tienen bifurcaciones pitchfork que conectan los dos grupos de soluciones. En lo sucesivo, denominaremos a este segundo conjunto de soluciones como equilibrios heterogéneos o asimétricos.

En la figura 3.13 se describe finalmente el comportamiento de las soluciones en el plano  $A_0, x$  y en el plano  $x, y$ . En este segundo caso se indica, sobre las tres ramas simétricas, como varían los equilibrios para valores crecientes de  $A_0$ . En el plano  $A_0, x$  se representan las tres ramas semihomogéneas, y nótese que las dos ramas que no se corresponden con  $\theta = 0$ , se proyectan ambas sobre la línea definida por:

$$A_0 - 2A_1 x + 4A_2 x^2 - 8\alpha x^3 = 0$$

que puede obtenerse a partir de la otra rama, sin más que hacer el cambio



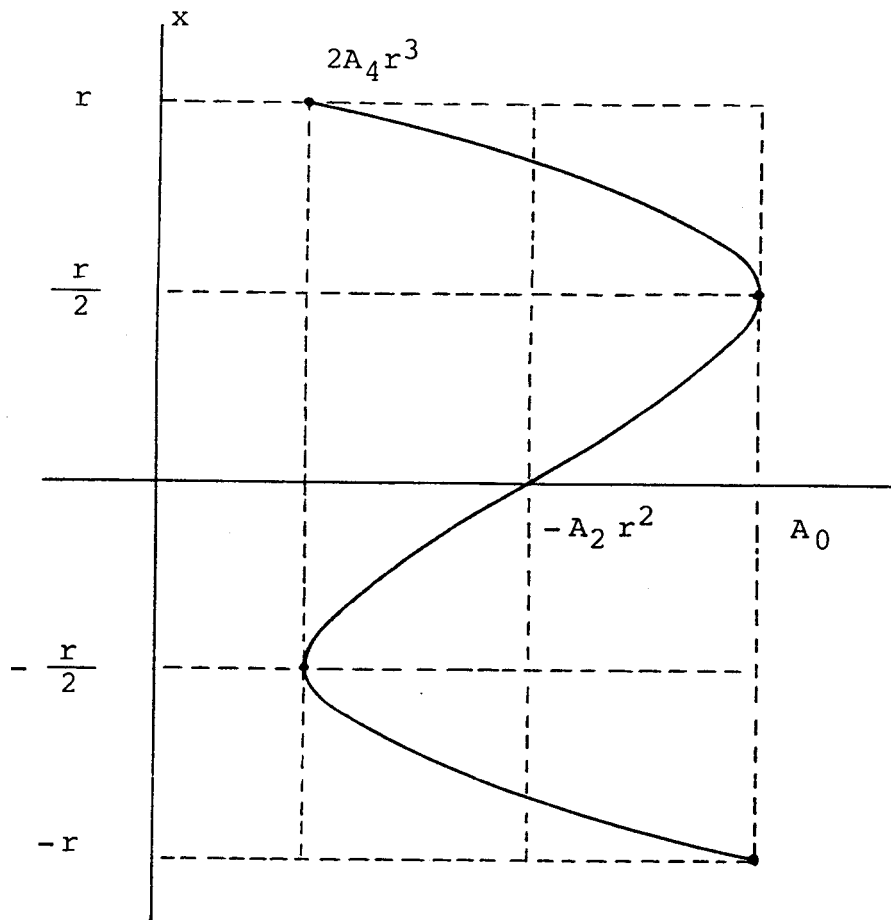


Figura 3.12. Estructura cualitativa de la rama de equilibrios heterogéneos. En los puntos señalados, esta rama conecta con las de equilibrios semihomogéneos.

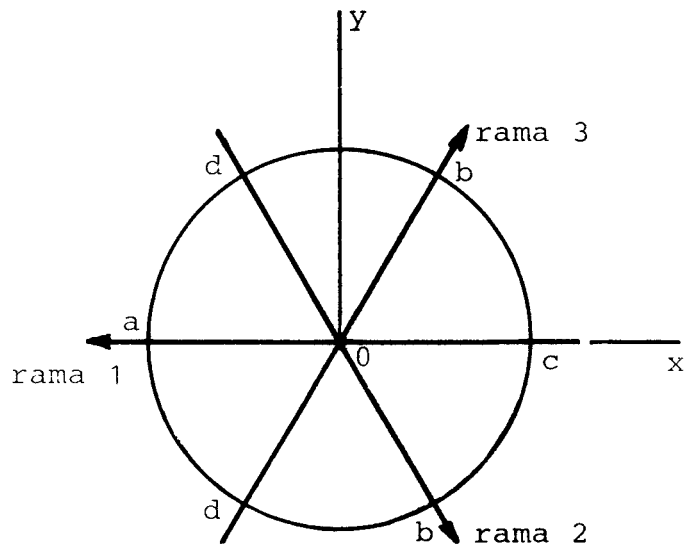
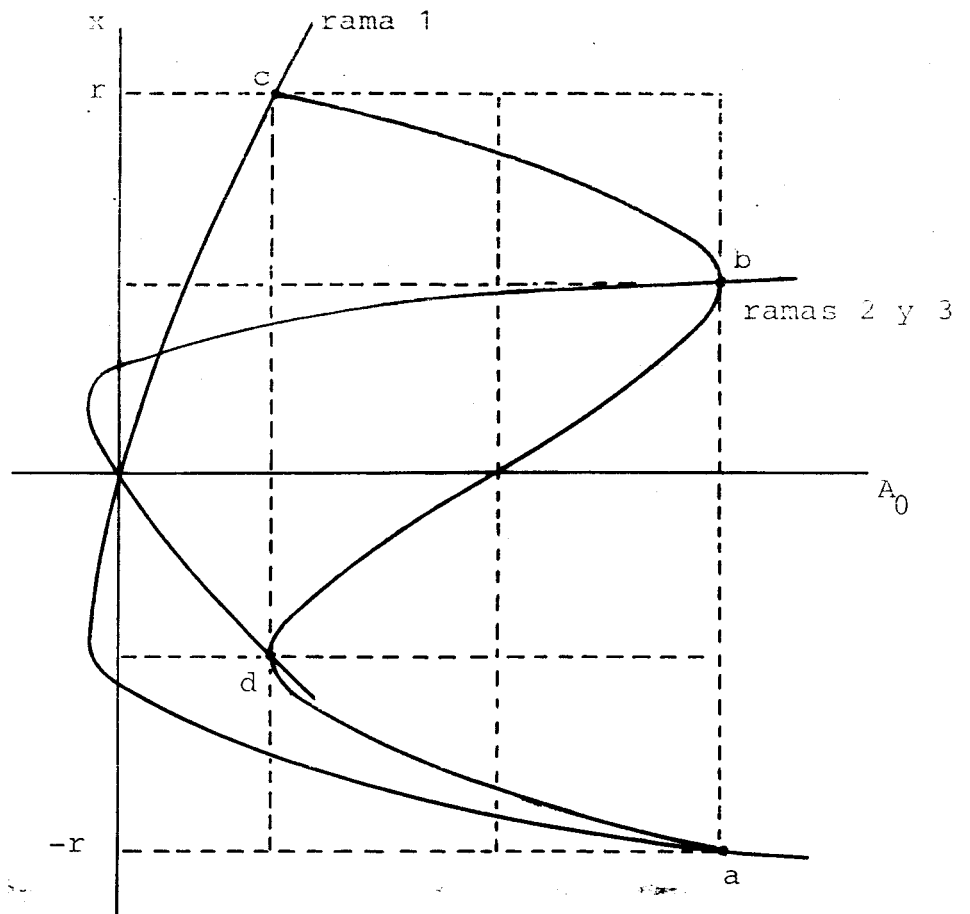


Figura 3.13. Estructura local de las ramas de equilibrios en las proximidades del punto de ramificación.

$$x \leftrightarrow -\frac{x}{2}$$

Volviendo al diagrama local de bifurcaciones en el plano  $A_0, A_1$ , de la figura 3.11, hemos de añadir en dicha representación las líneas que corresponden a los puntos de bifurcación pitchfork, que conectan las ramas simétricas con las asimétricas.

De todo lo anterior, puede deducirse que dichas líneas vienen definidas por:

$$A_0 = -A_2 \left(-\frac{A_1}{A_3}\right) \pm 2A_4 \left(-\frac{A_1}{A_3}\right)^{3/2}$$

es decir, forman dos curvas que se unen en el origen formando un punto de cúspide con pendiente  $A_2/A_3$ . Dado el carácter local del análisis, dicho punto de cúspide puede no aparecer, como veremos posteriormente. Completamos así el diagrama local de bifurcaciones en las proximidades de los puntos  $P_1$ , en los que

$$A_0 = A_1 = 0$$

obteniendo la figura 3.14. Debemos precisar que el diagrama dibujado corresponde al caso en que

$$A_2 < 0, A_3, A_4 > 0$$

pero, para otra distribución de signos, es sencillo obtener las diversas posibilidades, ya que los elementos que intervienen son los mismos y sólo se altera su posición relativa.

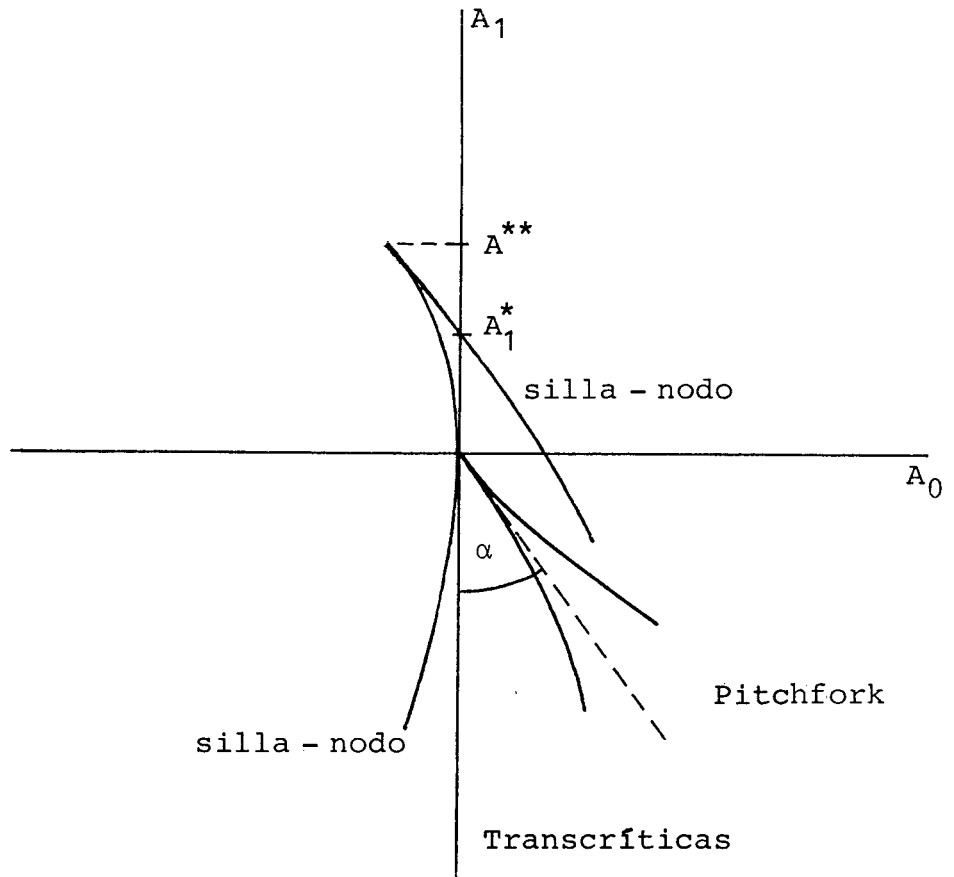


Figura 3.14. Diagrama local de bifurcaciones en los \_ \_ puntos de codimensión dos.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_2}{A_3}$$

Antes de pasar al cálculo mediante técnicas numéricas del diagrama de bifurcaciones y de los diagramas de equilibrios, completaremos el estudio analítico aprovechando toda la información que, en lo relativo a la estabilidad de los equilibrios, proporciona el sistema reducido.

La matriz jacobiana viene dada por

$$J = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} \frac{\delta H}{\delta x} & \operatorname{Re} \frac{\delta H}{\delta y} \\ \operatorname{Im} \frac{\delta H}{\delta x} & \operatorname{Im} \frac{\delta H}{\delta y} \end{bmatrix}$$

donde

$$H(w) = w(A_0 + A_2p + A_4q) + \bar{w}^2(A_1 + A_3p)$$

de forma que

$$\operatorname{traza} J = \operatorname{Re} \left( \frac{\delta H}{\delta x} - i \frac{\delta H}{\delta y} \right)$$

$$\det J = - \operatorname{Im} \left( \frac{\delta H}{\delta x} \frac{\delta \bar{H}}{\delta y} \right)$$

Después de algunas manipulaciones algo laboriosas, se obtiene para las ramas simétricas la expresión:

$$\operatorname{traza} J = 2A_0 + 4A_2p + (A_3 + 5A_4)q$$

que, para las ramas asimétricas, se simplifica a:

$$\operatorname{traza} J = 2A_2p + (A_3 + 3A_4)q$$

Los cálculos para el determinante de las ramas simétricas son algo prolijos, mientras que para las asimétricas conducen a que:

$$\det J = -12A_3A_4(p^3 - q^2)$$

Si tenemos en cuenta que sobre la rama simétrica que se corresponde con  $\theta = 0$ , se tiene:

$$A_0 = -A_1x - A_2x^2 - A_3x^3$$

para dicha rama, se verifica:

$$\text{traza } J = -2A_1x + 2A_2x^2 + 6A_3x^3$$

con lo que la traza cambia de signo, además de en el origen, en los puntos en que

$$3A_3x^2 + A_2x - A_1 = 0$$

Con todos estos elementos, es posible caracterizar todas las posibles situaciones, como se muestra en la figura 3.15.

Pasaremos a continuación a emplear técnicas numéricas con objeto de obtener el diagrama global de bifurcaciones y contrastar los resultados obtenidos hasta el momento.

Para obtener las líneas de bifurcaciones silla-nodo y pitchfork que predice el análisis local realizado, necesitamos contar con una condición auxiliar que, añadida al sistema de ecuaciones que proporciona los equilibrios, defina un problema a resolver por el método de continuación. Para tal fin podríamos tomar la condición de anulación del jacobiano de la matriz de linealización, que engloba a ambas bifurcaciones, pero dicha elec-

COEFICIENTES	$A_1 < 0, A_3 > 0$	$A_1 > 0, A_3 < 0$
$A_2 < 0$ $A_4 > 0$		
$A_2 < 0$ $A_4 < 0$		
$A_2 > 0$ $A_4 > 0$		
$A_2 > 0$ $A_4 < 0$		

Figura 3.15. Estructura local y estabilidad de las ramas de equilibrios en las proximidades del punto de ramificación múltiple. Se indica el diagrama local de bifurcaciones asociado a cada caso.

(s) equilibrios estables  
(u) nodos inestables

(+) puntos de silla con traza positiva  
(-) puntos de silla con traza negativa

ción presenta varios inconvenientes.

Una primera objeción consiste en que la expresión del determinante es algo compleja: la necesidad adicional de calcular las derivadas de dicha expresión hace la tarea algo engorrosa. Lo que sin duda es más importante es que dicha expresión, junto con las condiciones de equilibrio, forma un sistema de ecuaciones que, en el caso de tratar de seguir las bifurcaciones pitchfork, es siempre singular. Además, las bifurcaciones transcíticas de la rama homogénea son soluciones también de dicho sistema. Como en muchos casos las tres líneas de bifurcaciones están próximas, se presentan problemas en cuanto a la convergencia, con posibilidad de saltos de una línea a otra y, por tanto, ausencia de garantías en la continuación. Por todo ello, buscaremos una vía alternativa.

Si observamos que las líneas de bifurcaciones que buscamos se presentan ambas en las ramas semihomogéneas, podemos suponer por ejemplo que

$$x_1 \neq x_2 = x_3$$

y reformular las ecuaciones que determinan los equilibrios como:

$$x_1(nT(x_1) - u_2) + 2u_1(x_2 - x_1) = 0$$

$$x_2(nT(x_2) - u_2) + u_1(x_1 - x_2) = 0$$

sin usar, por tanto, una tercera ecuación para  $x_3$ . Conocido un par  $(x_1, x_2)$  solución del sistema anterior, quedan determinados unívocamente los valores de  $u_1$  y  $u_2$ , mediante:



$$u_1 = \frac{nx_1x_2(T(x_2) - T(x_1))}{(2x_1 + x_2)(x_2 - x_1)}$$

$$u_2 = \frac{2x_1T(x_1) + x_2T(x_2)}{2x_1 + x_2}$$

La expresión del determinante jacobiano del sistema original, con la condición de equilibrio semihomogéneo antes utilizada, se simplifica a:

$$3(2c_1 + c_2)u_1^2 - 2(c_1^2 + 2c_1c_2)u_1 + c_1^2c_2$$

donde se debe recordar que

$$c_i = M(x_i) + x_iM'(x_i), \quad i = 1, 2$$

Los ceros del determinante resultan ser para

$$u_1 = \frac{c_1}{3}$$

$$u_1 = \frac{c_1c_2}{2c_1 + c_2}$$

que se corresponden con las bifurcaciones pitchfork y silla-nodo, respectivamente. Si igualamos para cada caso las dos expresiones que se corresponden con  $u_1$ , podemos obtener -sustituyendo si es preciso el valor de  $u_2$ - una relación entre  $x_1$  y  $x_2$  que se corresponda con la bifurcación seleccionada. Después de algunas operaciones obtenemos, para las bifurcaciones pitchfork, la condición:

$$\frac{T(x_2) - T(x_1)}{x_2 - x_1} = T'(x_1) \frac{x_1}{x_2}$$

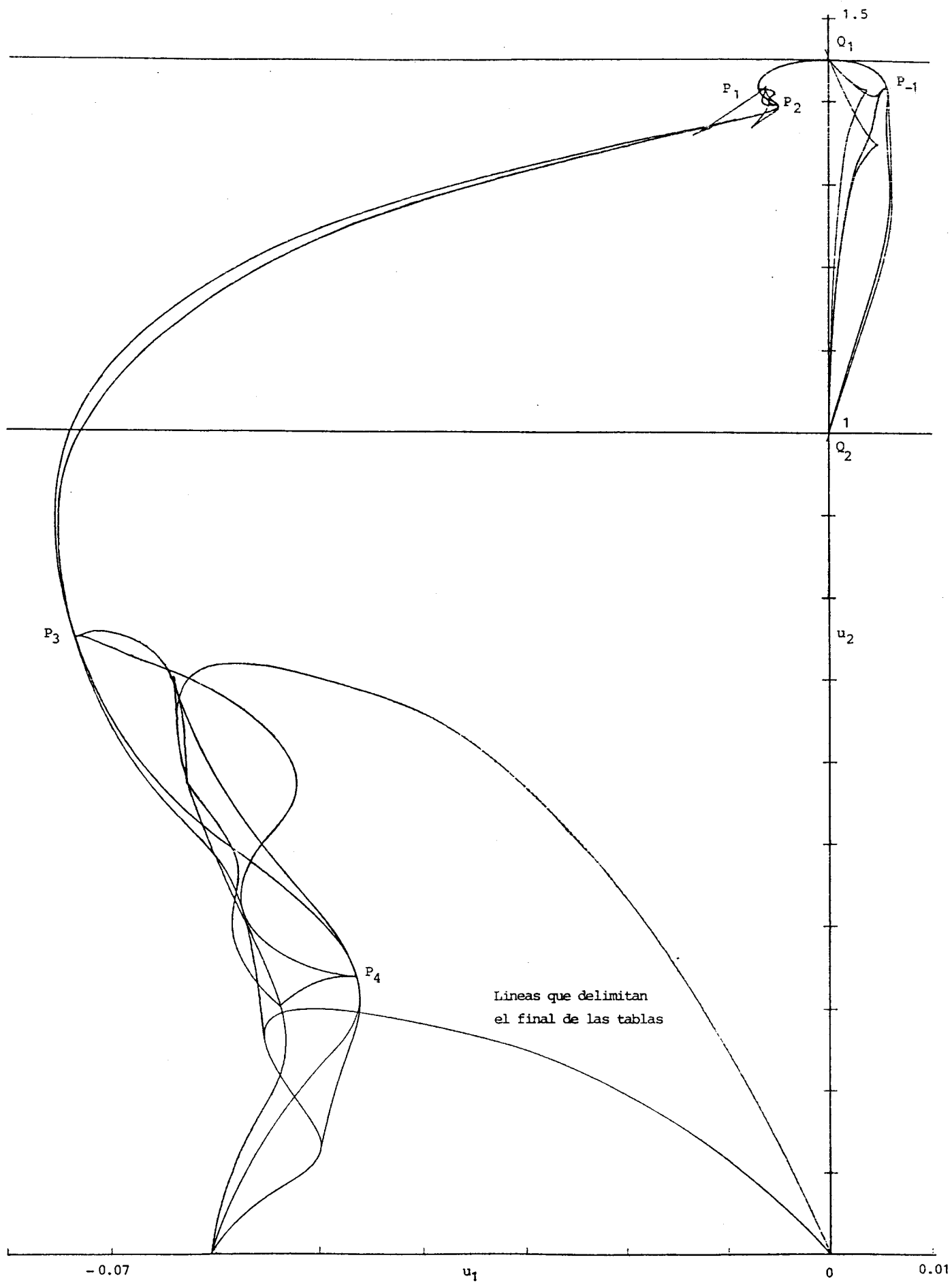


Figura 3.16. Diagrama de bifurcaciones del modelo de tres zonas.

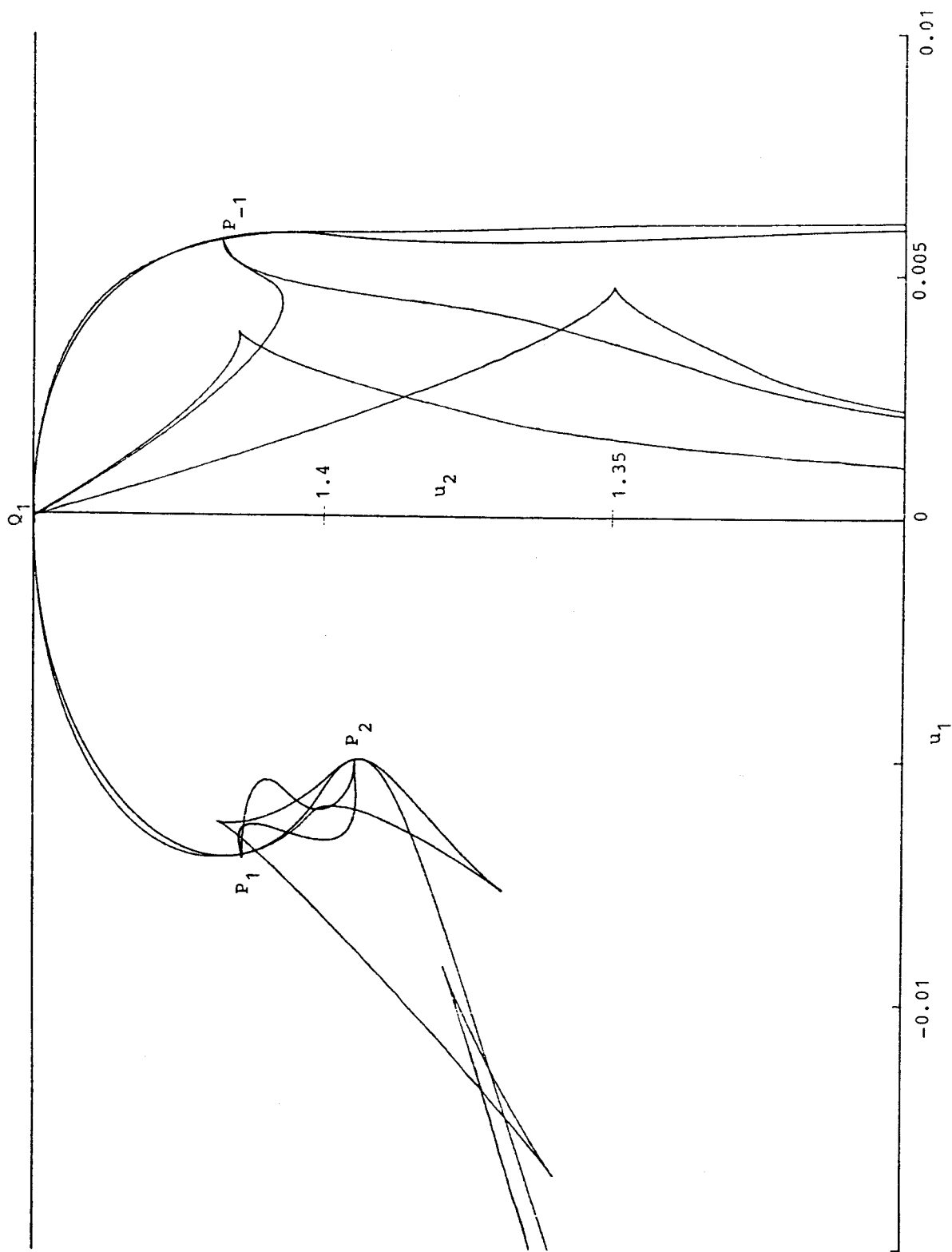


Figura 3.16.b. Ampliación de una zona del diagrama de bifurcaciones.

mientras que estamos en una bifurcación silla-nodo, siempre que.

$$\frac{T(x_2) - T(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{2x_1^2x_2 + x_1x_2^2}{2x_1^3T'(x_1) + x_2^3T'(x_2)} T'(x_1) T'(x_2)$$

Cada una de las dos condiciones anteriores representa una ecuación con dos variables que es fácil resolver por continuación. Es inmediato además el paso de dichas soluciones al plano de parámetros  $u_1$ ,  $u_2$ , como ya se ha indicado. Con este planteamiento, evitamos las dificultades que surgían si incluíamos en el sistema original la condición de anulación del determinante.

Para completar el diagrama de bifurcaciones, consideraremos, como en el caso de las dos zonas, las curvas en el plano de parámetros que dan lugar a valores fuera del rango permitido para las variables. Además del eje  $u_2$ , aparecen ahora tres curvas adicionales. Dos de ellas corresponden a equilibrios semihomogéneos, según sean una o dos las variables que superan el valor máximo para el que está definida la tabla. La tercera curva especifica el mismo fenómeno para los equilibrios heterogéneos. El diagrama completo se muestra en la figura 3.16.

Para facilitar la interpretación de dicho diagrama, se incluyen en las figuras 3.17.a, b, c, d y e los diagramas de los equilibrios para otros valores representativos de  $u_2$  (cfr. también figura 3.8), obtenidos mediante el algoritmo de continuación. Observamos una total concordancia con las previsiones del análisis anterior, salvo en algunos extremos que pasamos a comentar.

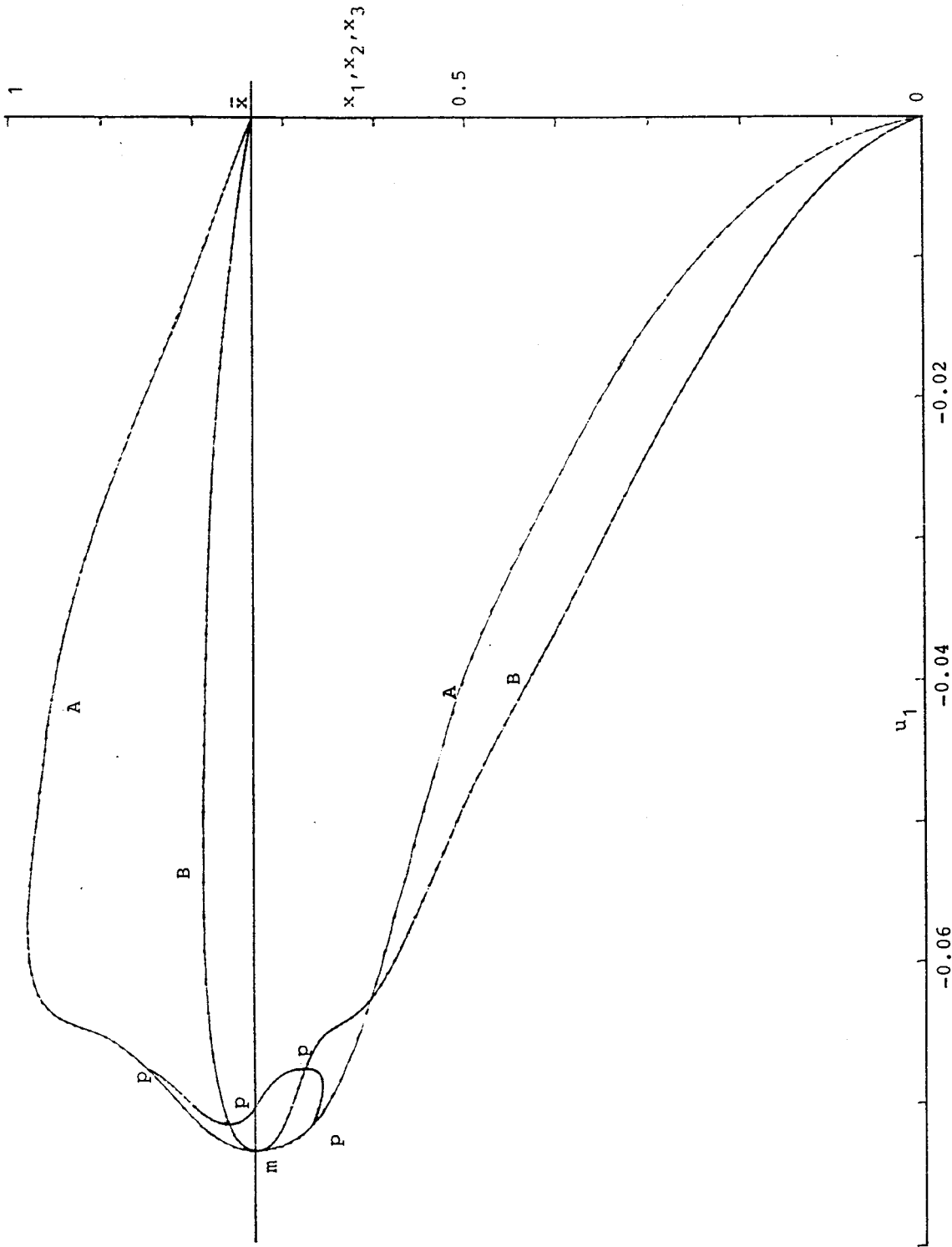


Figura 3.17.a) Diagrama de equilibrios para  $u_2 = 0.75$

(p) indica bifurcaciones pitchfork.

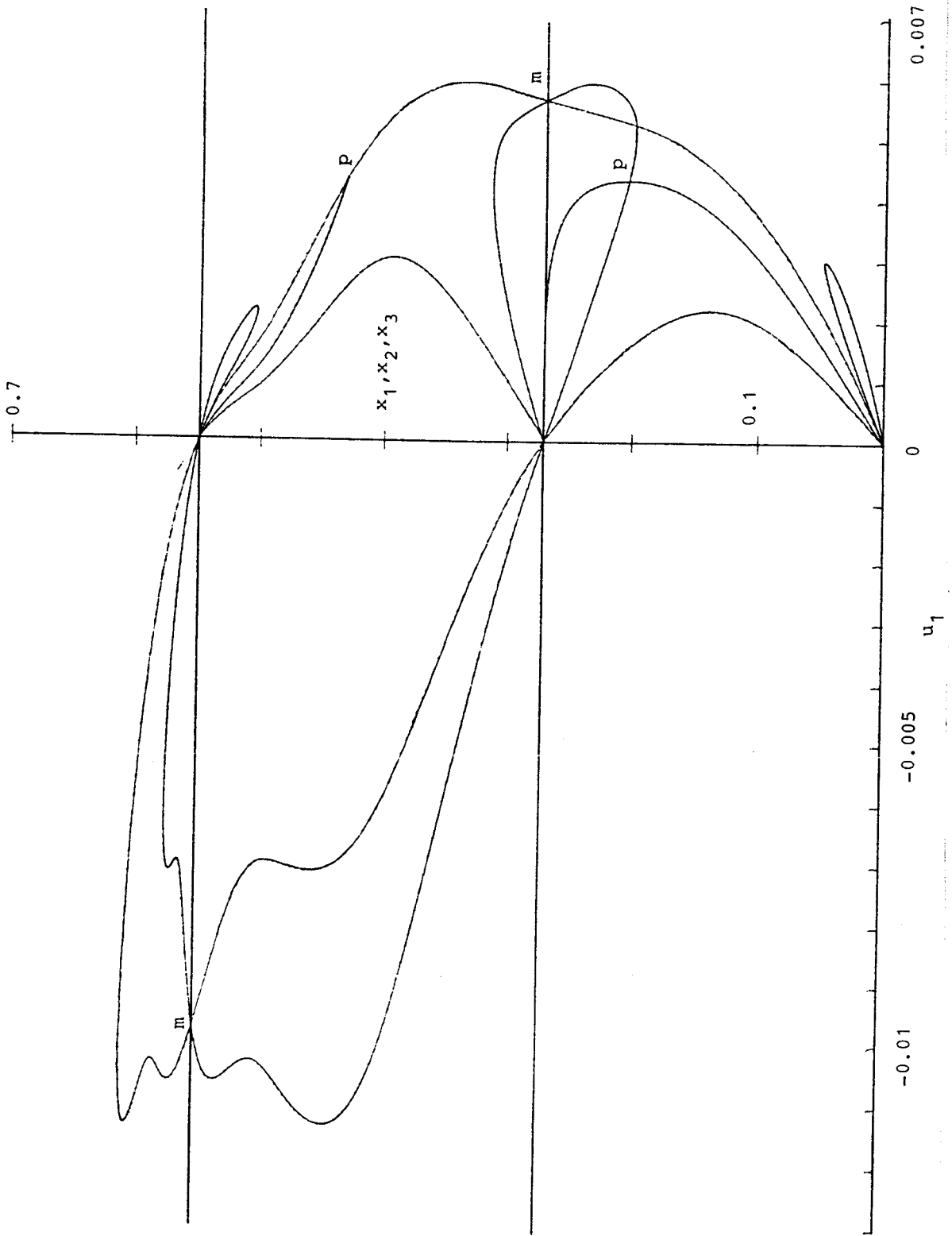


Figura 3.17.b) Diagrama de equilibrios para  $u_2 = 1.375$

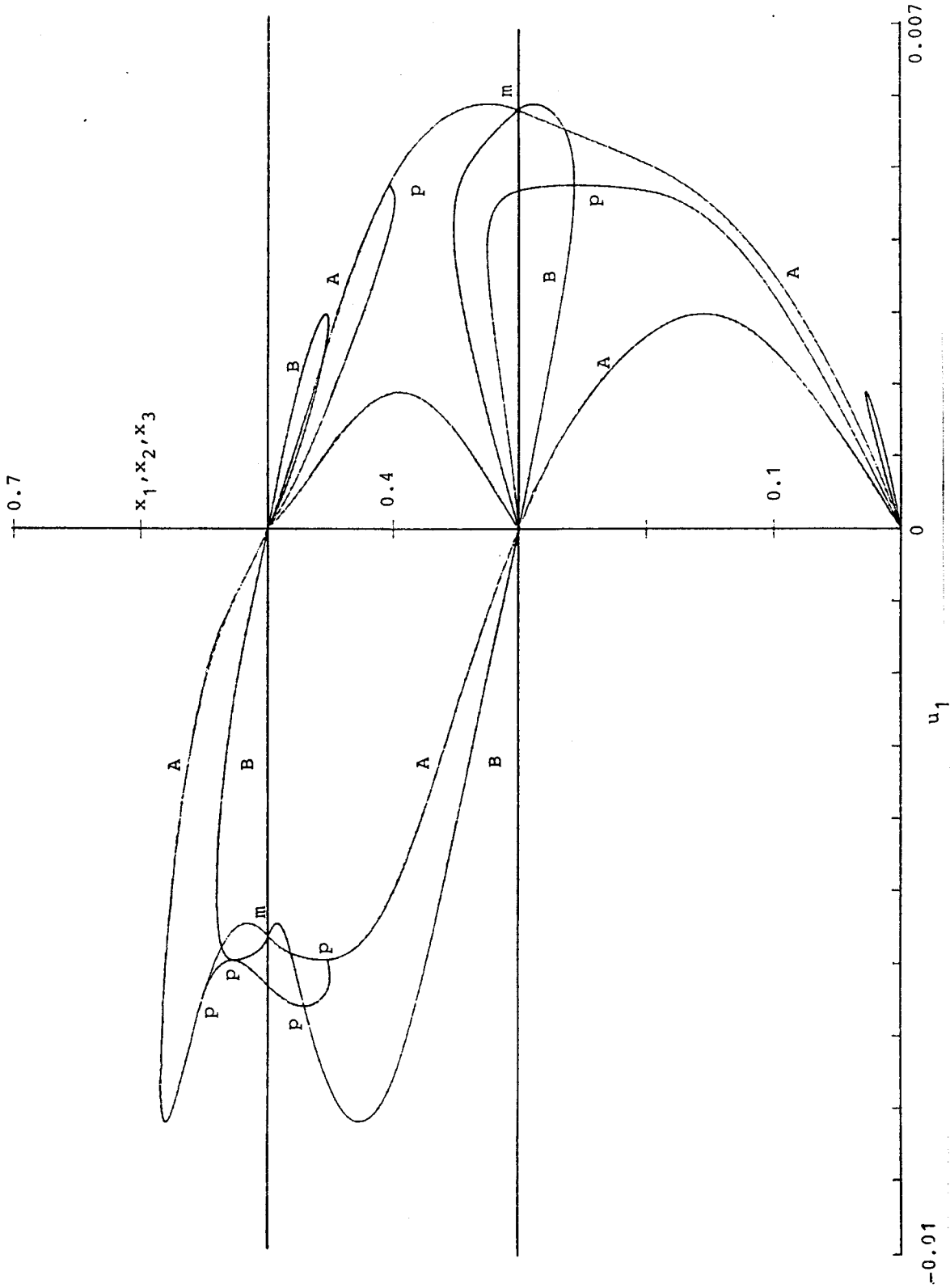


Figura 3.17.c) Diagrama de equilibrios para  $u_2 = 1.4$

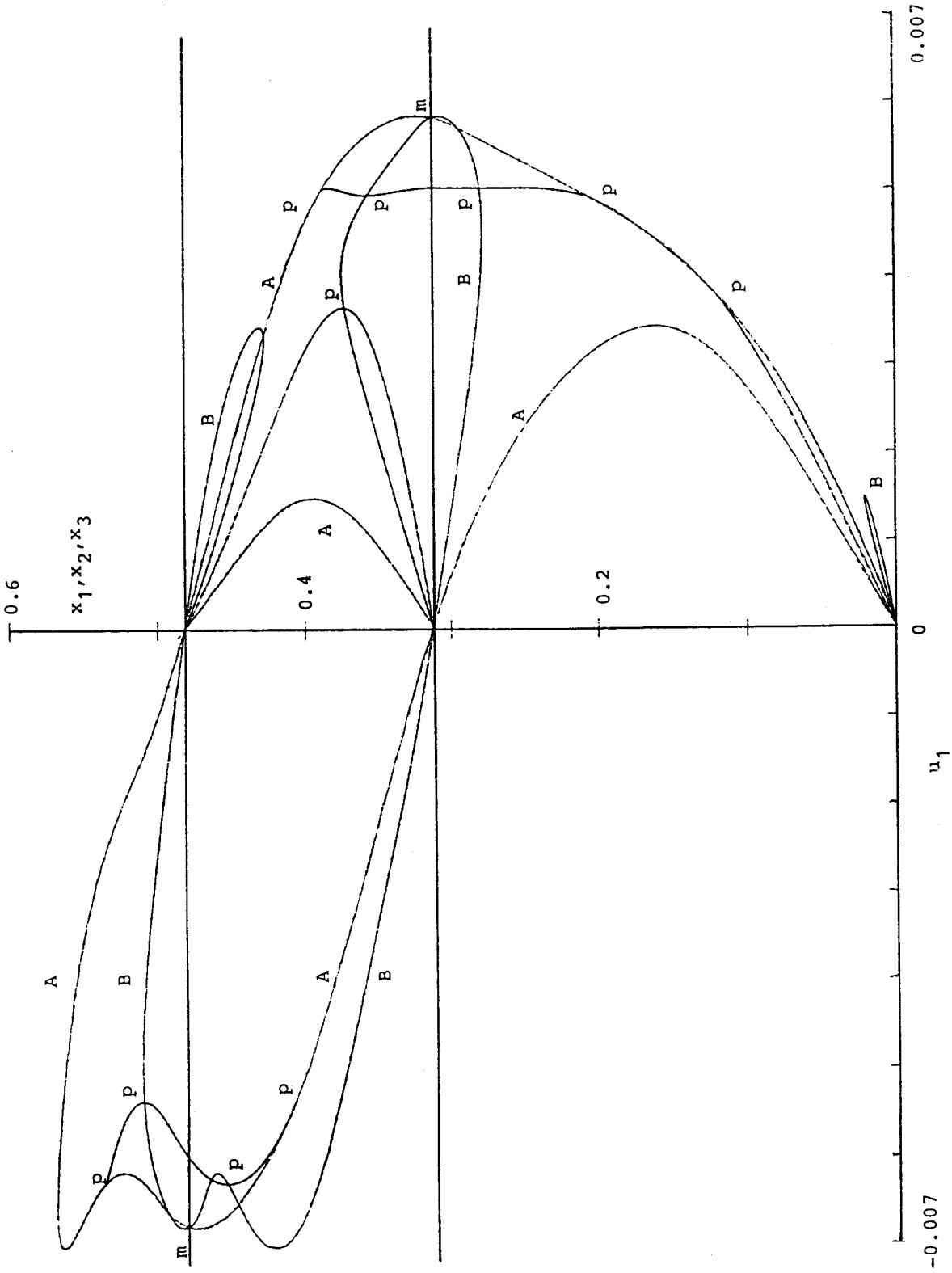


Figura 3.17.d) Diagrama de equilibrios para  $u_2 = 1.41$



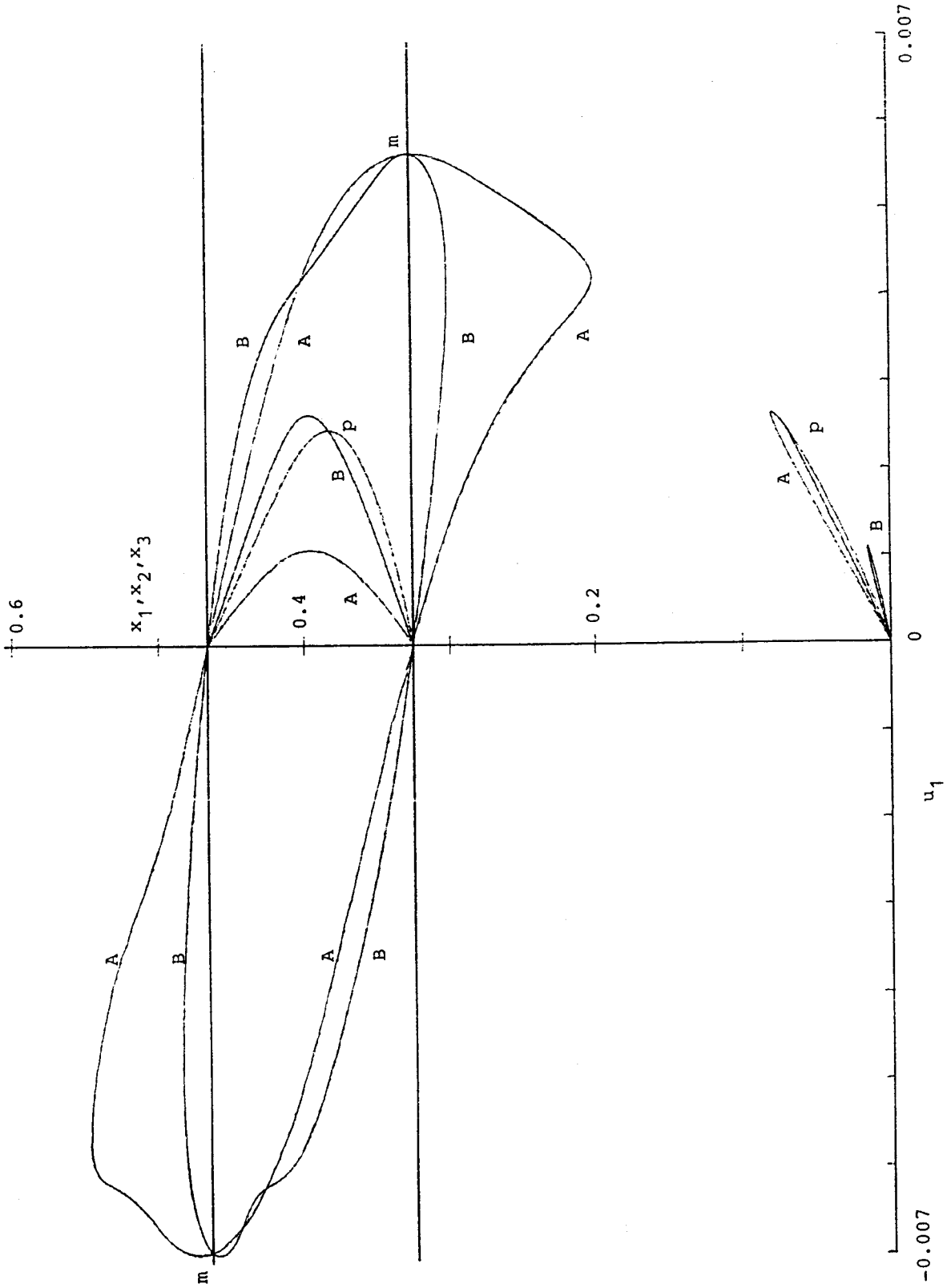


Figura 3.17.e) Diagrama de equilibrios para  $u_2 = 1.42$

En los puntos de bifurcación de codimensión dos, se tiene que

$$a_1 = b_1 = 0$$

mientras que el resto de los parámetros que definen el sistema reducido resultan ser los de la tabla siguiente.

Punto	$a_0$	$a_2$	$a_3$	$b_2$	$b_3$
$P_{-1}$	0.2447	-10.6943	-25.8809	-5.1485	30.4692
$P_1$	-0.2971	21.8092	43.0767	-8.6508	41.5685
$P_2$	-0.2134	-48.6363	-96.4260	26.8588	-132.1035
$P_3$	-3.1451	24.8463	25.9166	-0.9310	2.3784
$P_4$	-1.9890	-37.1647	-46.2838	2.2019	-6.7294

Los coeficientes  $A_0$  y  $A_1$  del sistema reducido son nulos en dichos puntos, y se obtiene por tanto, para los demás, la siguiente tabla de signos:

Punto	$A_2$	$A_3$	$A_4$
$P_{-1}$	-	+	+
$P_1$	+	-	-
$P_2$	-	+	+
$P_3$	+	-	-
$P_4$	-	+	+

La falta de concordancia entre los resultados numéricos y las predicciones analíticas se reduce esencialmente a que, para  $P_{-1}$  y  $P_3$ , no observamos el punto de cúspide en la línea de bifurcaciones silla-nodo correspondiente, mientras que, en la proximidades

de  $P_2$ , aparece un par de puntos extra de dicho tipo, formando una cola de milano (swallowtail). Si para  $P_3$  el fenómeno puede explicarse, debido a que la línea intercepta a una de las curvas de salida de rango de las variables (tal y como en el caso de dos zonas), para  $P_{-1}$  tal razón no resulta válida.

Hemos de tener en cuenta para  $P_{-1}$ , su proximidad al punto  $Q_1$  que junto con  $Q_2$  constituye una bifurcación muy degenerada. No incluiremos un estudio de tales puntos por la razones ya apuntadas, pero podemos conjeturar que la bifurcación que se produce en  $Q_1$  entra en conflicto con la de  $P_{-1}$ . Notemos que en  $Q_1$  entran en contacto tangencial dos líneas de bifurcaciones silla-nodo y una de ramificación múltiple, más otras dos de silla-nodo y una de pitchfork, de forma no tangencial.

Algo similar podemos decir, en base a la proximidad de  $P_1$  y  $P_2$ , con relación a la aparición de la "swallowtail". Todo parece indicar que podemos estar analizando una sección transversal de una bifurcación de codimensión superior. Esta leve disparidad entre resultados locales y globales, no quita relieve a la valiosa información que se obtiene con las técnicas de análisis local utilizadas. Sin embargo, se ha de tener la precaución de no dar al análisis local más peso del debido. Un ejemplo claro de esto lo constituye la presencia o no del punto de cúspide de las líneas de bifurcaciones silla-nodo, que es de carácter global y no puede garantizarse plenamente con estudios locales.

Terminaremos este apartado con algunas observaciones generales relativas a los dos modelos de interacción analizados. La es-

estructura de los mismos permite construir una función potencial y por tanto ser analizados de forma alternativa mediante técnicas de la llamada teoría de catástrofes (cfr. Poston y Stewart [1978], Thompson [1982]). Para una introducción breve ver, v.g., Golubitsky [1978]). Hemos preferido, por su generalidad, el uso de las técnicas derivadas de la variedad de centros.

En cualquier caso, se trata de herramientas de carácter local cuyas predicciones son válidas en entornos de los puntos considerados. Stewart [1981] se hace eco de la controversia suscitada en torno a la validez de los resultados locales o, más precisamente, si serán o no observables en la práctica dichos resultados. Se trata de una cuestión algo filosófica —dice él—; el hecho de que, para un matemático, "local" signifique "dentro de un entorno arbitrariamente pequeño", no implica que un resultado local sea invisible. Más bien significa que el fenómeno se cumple en "algún" entorno, cuyo tamaño es irrelevante para el matemático. De hecho, puede encontrarse —como hemos visto en los dos últimos apartados —que el tamaño de dicho entorno puede ser bastante grande.

Otra cuestión de interés que debemos señalar es que los modelos analizados entran dentro de lo que Prigogine denomina "estructuras disipativas", que explican como puede perderse homogeneidad (desorden) y formarse estructuras ordenadas (en nuestro caso, debido a la aparición de equilibrios estables no homogéneos). Para el caso de dos zonas aparece claramente esa situación y, al considerar tres, hemos encontrado también equilibrios semi-homogéneos estables. Los equilibrios heterogéneos han resultado

siempre inestables. pero podría conseguirse su estabilidad con ligeras variaciones en la definición del modelo. La formación de estructuras disipativas ha venido aquí caracterizada por sucesivas pérdidas de simetría en las soluciones.

Así, en el último modelo y partiendo de la solución homogénea, invariante respecto a todo el grupo, hemos llegado a tres ramas semihomogéneas, tantas como subgrupos de reflexiones para los que resultan invariantes. Las tres ramas están relacionadas mediante el subgrupo de giros y, en el siguiente paso, cada una de ellas bifurca en dos nuevas ramas, que ya son heterogéneas, pero que se relacionan entre sí mediante reflexiones. La estructura de subgrupos del grupo original de simetrías, para el que el sistema resulta equivariante, está fuertemente ligada a las bifurcaciones que pueden presentarse. Esta relación, que conjeturamos, entre la simetría de los sistemas y su estructura de bifurcaciones merece sin duda ser objeto de mayor investigación (ver Sattinger [1983]).

### **3.5. Bifurcaciones en sistemas de potencia: el flujo de carga en un sistema formado por tres generadores.**

El análisis del comportamiento dinámico de grandes redes de distribución de energía es una de las tareas no enteramente resueltas de la ingeniería eléctrica. En la actualidad se sigue desarrollando un gran esfuerzo de investigación para disponer de útiles que suministren una ayuda en situaciones de emergencia y permitan decidir las acciones de control preventivo que deben to-

marse sobre la red.

Los estudios sobre comportamiento de una red de distribución se pueden clasificar en dos grandes grupos: a) problemas estáticos, ligados esencialmente con el reparto de carga; y b) estudios dinámicos, relativos a la estabilidad de la red tras la producción de un fallo (u otra modificación en ella). Estos dos tipos de problemas, cuya formulación es bien conocida, presentan, sin embargo, dificultades con vistas a su aplicación práctica, especialmente cuando el tamaño de la red es importante.

Desde la introducción de los computadores se ha hecho un gran esfuerzo en el estudio de soluciones numéricas para estos problemas. Aunque se han logrado considerables avances, el uso exclusivo de métodos numéricos no permite adquirir una perspectiva global respecto a los modos de comportamiento que puede tener el sistema. Para superar este tipo de limitaciones se requiere el empleo de métodos cualitativos.

En este apartado, mostramos cómo inciden las técnicas anteriores en el problema que presenta una red elemental formada por tres máquinas conectadas entre sí. Nuestro objetivo será el obtener los diagramas de equilibrios y de bifurcaciones de dicho sistema. Aún en este sencillo caso, la complejidad de situaciones a las que se puede llegar hace que el problema sea sumamente interesante y que en la actualidad constituya objeto de investigación.

Debemos señalar que la aplicación de técnicas cualitativas al estudio de redes eléctricas es muy reciente (Araposthatis et al. [1981,1983], Baillieul y Byrnes [1982], Kopell y Washburn [1982]). Los primeros estudios de este estilo fueron los relativos a la unicidad de las soluciones del reparto de cargas (Korsak [1972], Tavora y Smith [1972]).

Considérese un sistema eléctrico constituido por tres generadores síncronos interconectados, como indica la figura 3.18. Para abordar el estudio en régimen permanente de este sistema se plantean las correspondientes ecuaciones en términos de balance de potencias. Es usual para ello el hacer algunas simplificaciones.

La primera consiste en suponer despreciables las variaciones de la magnitud de la tensión en bornas de cada generador, tomando entonces como únicas variables intrínsecas al problema los ángulos de fase de esas tensiones. Por otra parte -lo que es, sin duda, menos realista- se admite que las líneas de transmisión que integran la red son sin pérdidas, es decir, las impedancias de línea son puramente reactivas. Así, las cargas resistivas aparecen concentradas en torno a cada generador.

Bajo estas asunciones, denominando  $P_i$  a la potencia activa neta inyectada en el nudo  $i$ , las ecuaciones en régimen permanente toman la forma (Anderson y Fouad [1977]):

$$P_i = \sum_{j=1}^3 V_i V_j Y_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j), \quad i=1,2,3 \quad (*)$$

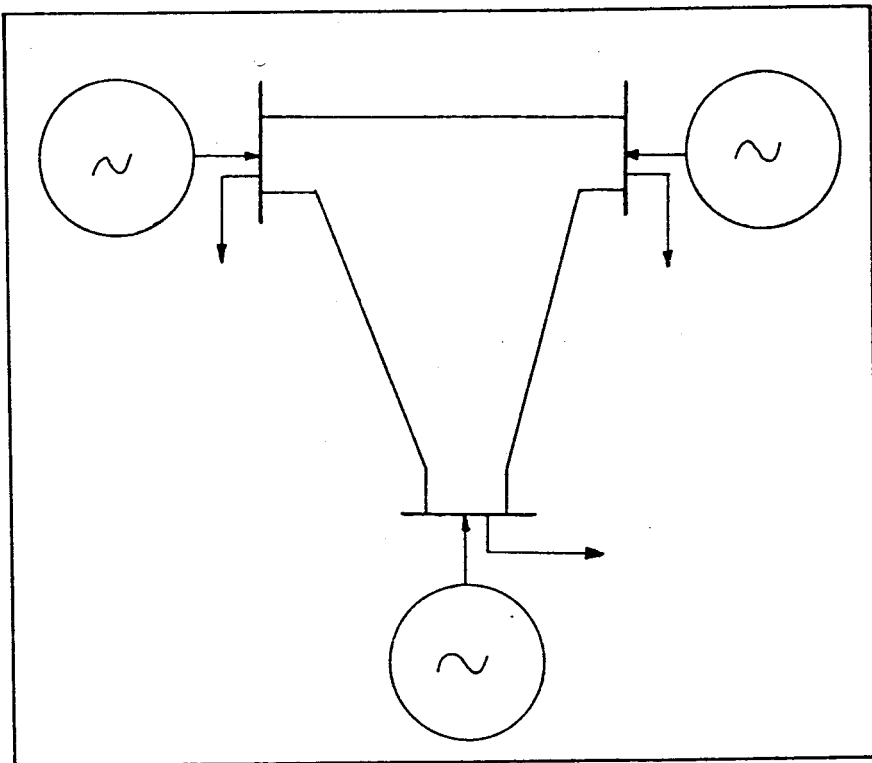


Figura 3.18 Diagrama unifilar del sistema en estudio.



donde  $V_i > 0$  representa la magnitud de la tensión en el nudo correspondiente,  $\theta_i$  su ángulo de fase y

$$Y_{ij} = Y_{ji} > 0$$

es la admitancia de la línea que une los nudos  $i$  y  $j$ .

Razonablemente, los valores de  $Y_{ij}$  pueden considerarse fijos, por lo que haremos

$$\alpha_{ij} = V_i V_j Y_{ij}, \text{ con } \alpha_{ii} = 0$$

Observando las ecuaciones, es inmediato deducir que si para

$$(P_1, P_2, P_3)$$

la terna

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

es una solución, también lo será

$$(\theta_1 + \theta_0, \theta_2 + \theta_0, \theta_3 + \theta_0)$$

sea cual fuere el valor de  $\theta_0$ . Además el sistema anterior es redundante en el sentido de que

$$\sum_{i=1}^3 P_i = 0$$

y, por tanto, se puede prescindir de la ecuación que define  $P_3$ . Tomando  $\theta_3$  como referencia de ángulos (es decir, haciendo  $\theta_3 = 0$ ), se llega al siguiente sistema reducido:

$$P_1 = \alpha_{13} \text{sen}\theta_1 + \alpha_{12} \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$P_2 = \alpha_{23} \text{sen}\theta_2 + \alpha_{12} \text{sen}(\theta_2 - \theta_1)$$

Es importante señalar que el sistema (\*) que conduce al anterior sistema reducido, tiene como soluciones precisamente aquellos valores que son los de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna la dinámica de la red (las llamadas ecuaciones "swing" o de oscilación). Es por eso por lo que cobran especial relevancia aquellas soluciones de (\*) que representan equilibrios estables para el problema dinámico asociado. En dicho problema es usual el despreciar el efecto del amortiguamiento de cada máquina, dado que resulta poco significativo en el intervalo de tiempo que es de interés en el análisis del régimen transitorio después de un fallo.

Si se hace así, el sistema dinámico resulta ser conservativo y posee por tanto una función potencial. Los puntos estables se corresponden entonces con los mínimos de dicha función, y la estabilidad queda determinada por el Hessiano de la misma. Dada la correspondencia entre el sistema (\*) y la derivada de la función potencial, para discernir el carácter de estabilidad de una solución

$$\theta = (\theta_1, \theta_2)$$

de dicho sistema, que escribiremos abreviadamente como

$$P = f(\theta)$$

basta asegurar que

$$\frac{df}{d\theta} \theta = (\theta_1, \theta_2) > 0$$

condición con la que se indica que la matriz asociada a la derivada de  $f$  en  $\theta$  es definida positiva.

A pesar de aparente sencillez del sistema (\*), hasta la fecha no se le ha encontrado una solución expresable mediante funciones elementales, a causa de su fuerte carácter no lineal. Esta circunstancia hace además que la solución no sea única para un rango importante de valores de  $P$ . De hecho, hasta época muy reciente (Tavora et al. [1972]) no aparece un primer estudio parcial de dichas soluciones.

Veamos cómo las técnicas de análisis cualitativo y de bifurcaciones suponen en este problema una ayuda de especial interés. Se analizará con cierto detalle la elección

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 1$$

dejando como parámetros libres a  $P_1, P_2$ . Esta elección de valores, que puede parecer arbitraria, no lo es desde el punto de vista del análisis cualitativo, dada la naturaleza de este tipo de análisis.

La periodicidad de  $f$  hace que sólo nos interese por aquellos valores tales que

$$\theta = (\theta_1, \theta_2) \in [-\pi, \pi]$$

Como primer objetivo podemos considerar la determinación del dia-

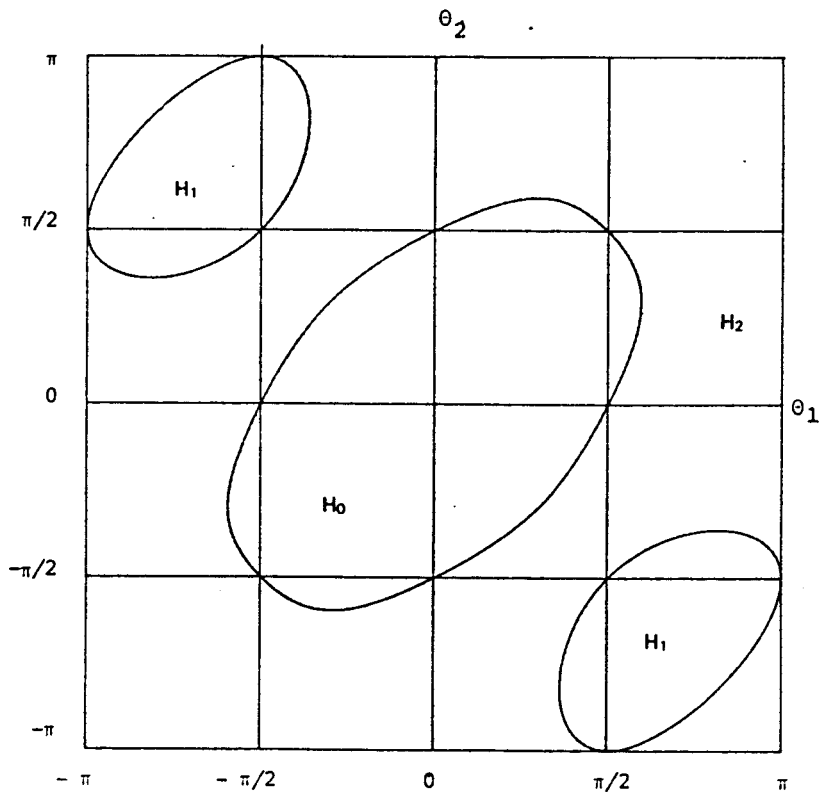


Figura 3.19. Curvas de puntos de bifurcación en el plano  $\theta_1 - \theta_2$ . La región  $H_0$  corresponde a equilibrios estables.

grama de bifurcaciones. La condición necesaria de bifurcación lleva ahora a que

$$\cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos(\theta_1 - \theta_2)(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) = 0$$

Para obtener las soluciones de la ecuación anterior, recurrimos de nuevo al algoritmo de continuación, que permite recorrer las curvas de soluciones en el plano  $\theta_1, \theta_2$ . Se obtiene así la figura 3.19. Esta figura delimita una serie de regiones donde el carácter de la matriz derivada de  $f$  es diverso.

Así, en  $H_0$  la matriz es definida positiva, por lo que se trata de la región de equilibrios estables. En las regiones  $H_1$  el determinante vuelve a ser positivo pero la matriz resulta ahora definida negativa: los puntos correspondientes son máximos de la función potencial, y por tanto inestables. Para el resto de equilibrios, los situados en  $H_2$ , el carácter indefinido de la matriz fuerza de nuevo a la inestabilidad, si bien la estructura cualitativa de las trayectorias es algo distinta.

A partir de la figura anterior, es fácil obtener el lugar geométrico de los puntos de bifurcación, que no es otra cosa que la proyección de los puntos singulares de la figura anterior sobre el plano de parámetros.

Basta para ello deducir los valores de  $P_1$  y  $P_2$  para dichos puntos mediante el sistema (\*), con lo que se consigue la figura 3.20.

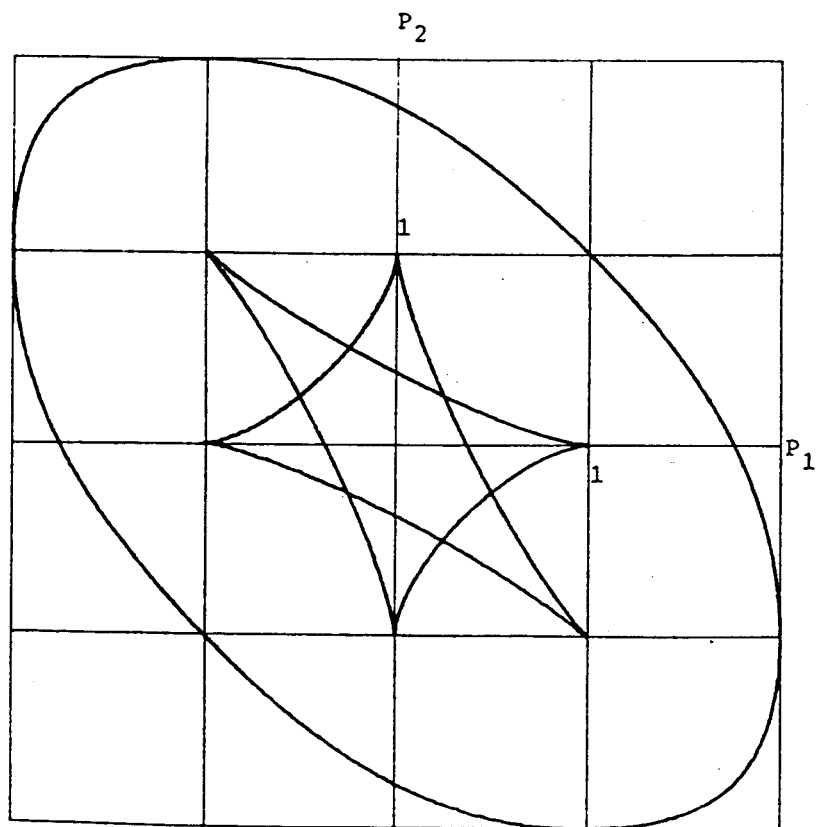


Figura 3.20. Diagrama de bifurcaciones. Se  $\_$  representan los valores de  $(P_1, P_2)$  que se  $\_$  corresponden con los puntos de la figura 3.19. En la región hexágona central hay seis solu-- ciones distintas para un mismo valor de los  $\_$  parámetros.

Dicho diagrama es esencialmente el obtenido por Tavora y Smith [1972]. Como corresponde al conjunto de puntos de bifurcación, quedan definidas unas zonas con distinto número de soluciones para el sistema. De hecho, como veremos enseguida, para pequeñas inyecciones de potencia se tienen hasta seis equilibrios distintos.

Supóngase, por ejemplo, que se considera el caso en que

$$P_2 = 0$$

Esto equivale a situarse sobre el eje horizontal del plano de parámetros. Si se trazan, mediante el algoritmo de continuación, las soluciones del sistema (\*) para este caso, se obtienen las curvas descritas en la figura 3.21, donde aparecen reflejadas las diversas zonas en cuanto a número de equilibrios se refiere.

La dimensión del problema permite el intentar obtener las superficies de equilibrios al menos separadamente para cada variable ( $\theta_1$  ó  $\theta_2$ ). Para ello situando en un plano horizontal los parámetros  $P_1$  y  $P_2$ , y en el vertical la variable angular elegida, es posible obtener una representación en  $R^3$ . En realidad los equilibrios se mueven en una hipersuperficie de  $R^4$ , como es obvio, pero mediante la descomposición indicada podemos conseguir su visualización mediante dos superficies en  $R^3$ . Quedará patente así cuantos equilibrios corresponden a cada región de parámetros, si bien los diversos valores posibles de las dos variables deberán combinarse adecuadamente. Las ecuaciones del sistema (\*) son invariantes respecto al cambio

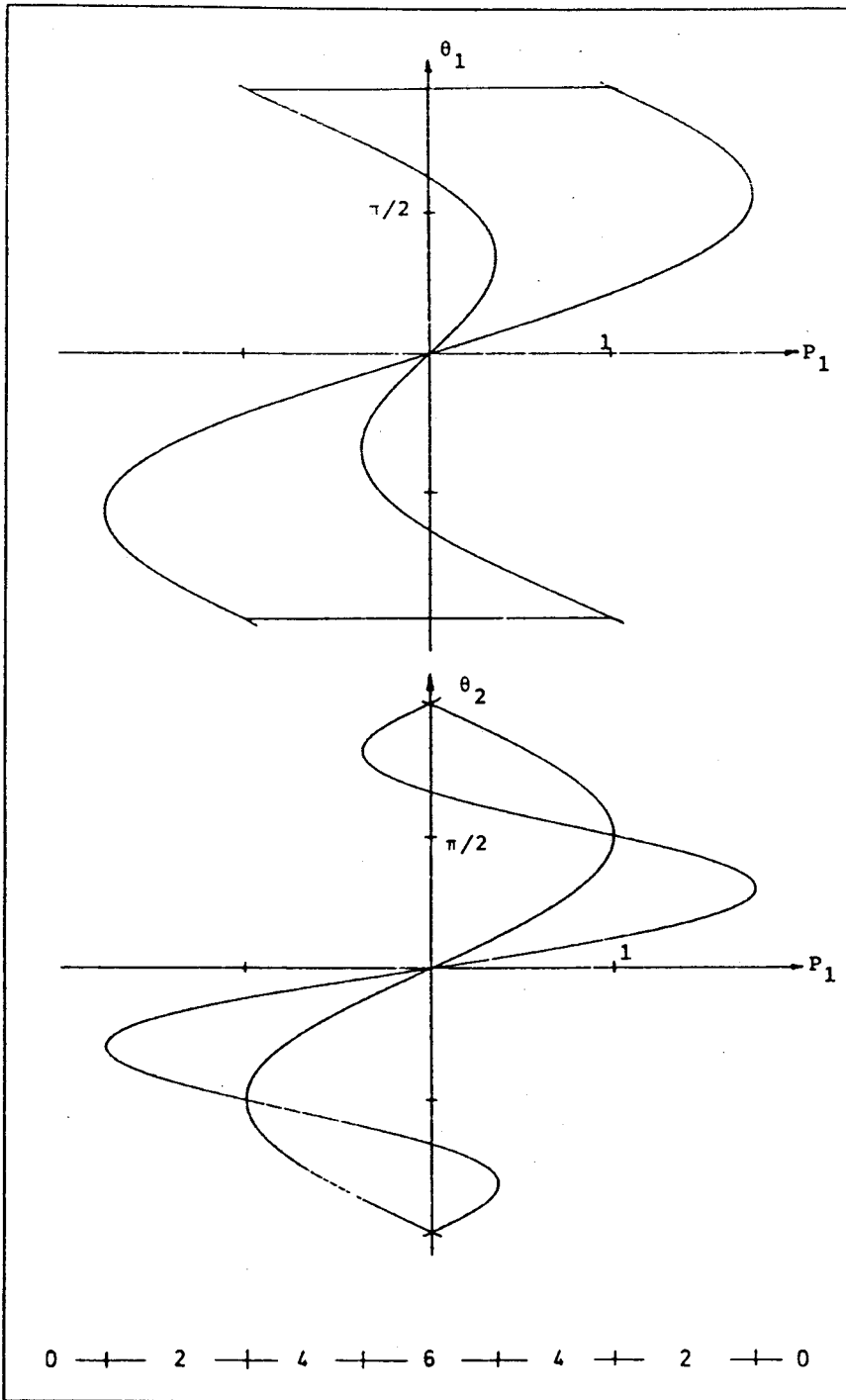


Figura 3.21. Diagrama de equilibrios para  $P_2 = 0$ . Se indica en la parte inferior el número de equilibrios según los valores de  $P_1$ . Se observan cuatro puntos de bifurcación silla-nodo y dos bifurcaciones pitchfork. El origen no es un punto de bifurcación pues cuando intersectan las curvas para  $\theta_1$  lo hacen con valores de  $\theta_2$  diversos y viceversa. El cambio en el número de equilibrios denota el paso por un punto de bifurcación.



$$\theta_1 \leftrightarrow \theta_2$$

$$P_1 \leftrightarrow P_2$$

por lo que basta describir la figura correspondiente a  $\theta_1$ : la superficie relativa a  $\theta_2$  será la simétrica respecto al plano

$$P_1 = P_2$$

Un primer paso en la dirección indicada, puede consistir en obtener el contorno aparente de la superficie para  $\theta_1$ , cuando se proyecta siguiendo la dirección del eje  $P_2$  sobre el plano  $P_1, \theta_1$ . Una forma de obtener dicho contorno es reescribir el sistema en la forma

$$P_1 - \text{sen}\theta_1 - \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

$$P_2 - \text{sen}\theta_2 - \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

e imponer la condición que impide la aplicación del teorema de la función implícita para despejar las variables  $\theta_2, P_2$ . Esto lleva a que

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta_1 - \theta_2) & 0 \\ -\cos(\theta_2 - \theta_1) - \cos\theta_2 & 1 \end{vmatrix} = \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

Por tanto, para los puntos del contorno indicado se tiene

$$\theta_1 - \theta_2 = \pi/2 + n\pi, \quad n \text{ entero}$$

condición que sustituida en el sistema conduce a

$$P_1 = (-1)^n + \text{sen}\theta_1$$

$$P_2 = (-1)^{n+1} (1 + \cos\theta_1)$$

Haciendo lo propio para el contorno cuando se proyecta en la dirección de  $P_1$  llegamos a que la matriz derivada respecto a  $\theta_2, P_1$  debe ser singular:

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta_1 - \theta_2) & 1 \\ -\cos(\theta_2 - \theta_1) - \cos\theta_2 & 0 \end{vmatrix} = \cos\theta_2 + \cos(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

Esta condición puede escribirse como

$$2\cos(\theta_2 - \theta_1/2) \cos\theta_1/2 = 0$$

que da lugar a

$$\theta_1 = (2n + 1)\pi$$

ó

$$\theta_2 = \theta_1/2 + \pi/2 + n\pi$$

Los puntos correspondientes a la primera solución cumplen

$$P_1 = \text{sen}\theta_2$$

y se proyectan todos en el punto

$$(P_2, \theta_1) = (0, (2n + 1)\pi)$$

La segunda solución de este caso proporciona puntos para los que

$$P_1 = \text{sen}\theta_1 - (-1)^n \cos(\theta_1/2)$$

y se proyectan sobre la línea

$$P_2 = 2(-1)^n \cos(\theta_1/2)$$

de forma que la superficie en cuestión presenta los dos contornos

de la figura 3.22. Con idea de mejorar la visualización pueden ahora construirse dos perspectivas que representen los puntos situados en la zona anterior a dichos contornos. Para ello resulta útil cortar la superficie por un sistema de planos (hemos elegido los planos  $P_1 + P_2 = \text{cte.}$ ) y representar dichas secciones en perspectiva cónica. El resultado se muestra en la figura 3.23, que no deja de ser sorprendente.

Las perspectivas representadas están limitadas, en el eje vertical, al intervalo  $[-\pi, \pi]$  repitiéndose indefinidamente hacia arriba y hacia abajo dada la periodicidad del sistema (\*). La línea superior en la que degenera la superficie (con  $P_2 = 0$ ) debe identificarse con la línea inferior, pues las soluciones para  $\theta_1$  difieren en  $2\pi$ . En cualquier solución sobre esta recta se tiene

$$P_1 = -P_3$$

con lo que sólo dos máquinas están "trabajando" y lo hacen en sentido inverso.

Para  $\theta_1 = 0$ , se da otro estrangulamiento de la superficie que degenera en la recta de ecuación

$$P_2 + 2P_1 = 0$$

En estos puntos, por tanto,

$$P_1 = P_3$$

con lo que dos máquinas trabajan igual.

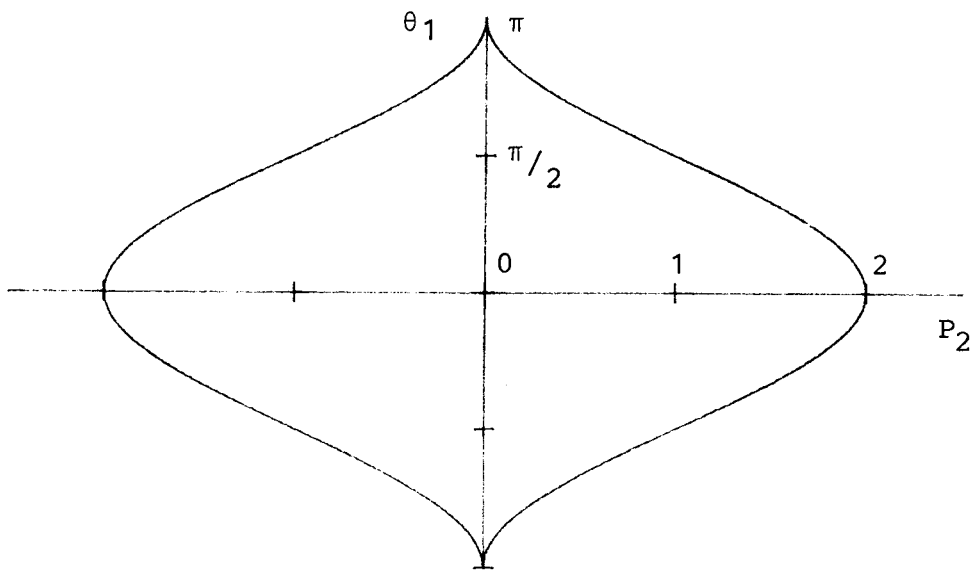
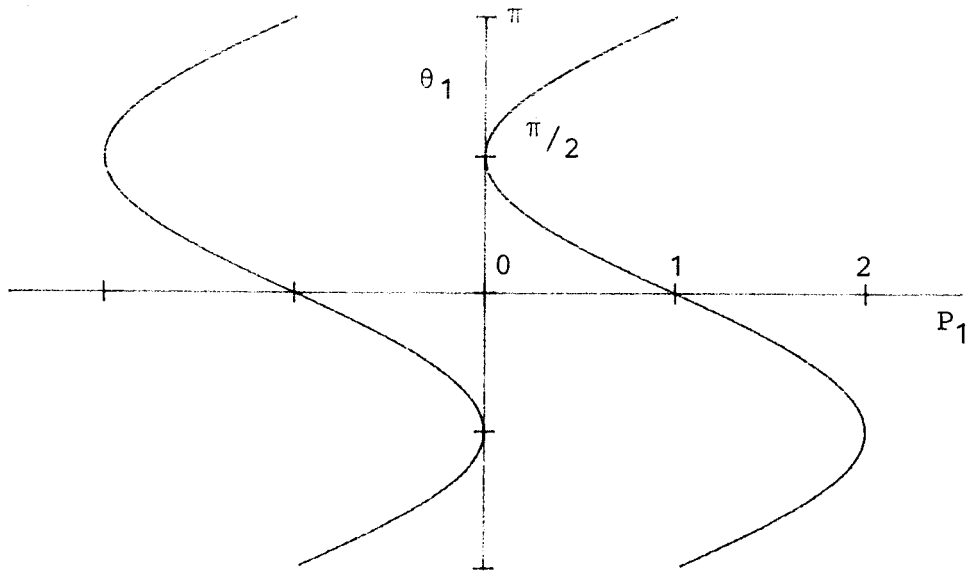


Figura 3.22. Contornos aparentes de la superficie de equilibrios para  $\theta_1$ .

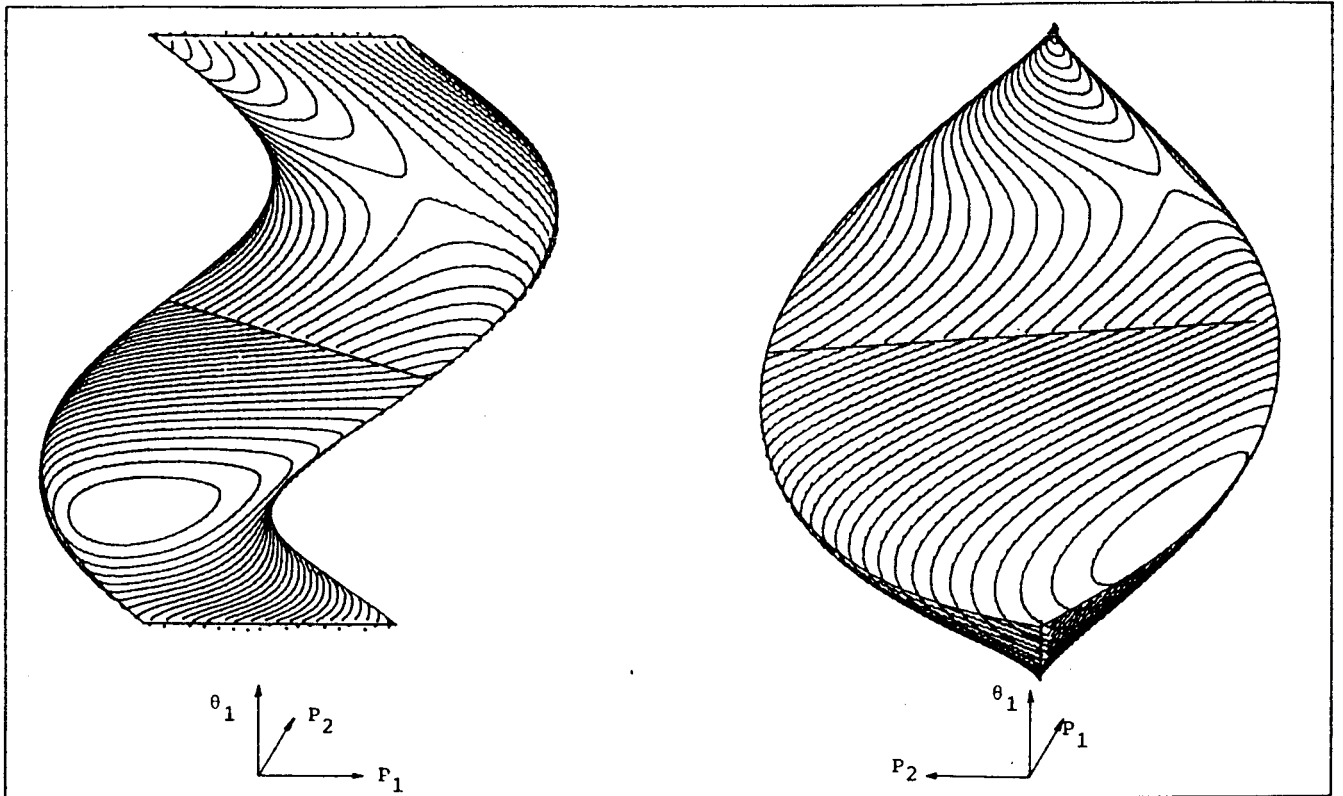


Figura 3.23. Representación en sistema cónico de dos vistas de la superficie de equilibrios para  $\theta_1$ . Se han dibujado las intersecciones que sobre ella produce el sistema de planos  $P_1 + P_2 = \text{constante}$ . La superficie, dibujada para  $\theta_1 \in ]-\pi, \pi[$ , se repetiría indefinidamente en dirección vertical. Así, la línea superior y la inferior representan las mismas soluciones ya que los valores de  $\theta_1$  difieren en  $2\pi$ . Aparece otro estrangulamiento para  $\theta_1 = 0$  correspondiente a los equilibrios en los que  $P_2 + 2P_1 = 0$ .

Debe observarse que estas líneas no suponen puntos de bifurcación, ya que las dos hojas de la superficie que intersectan no se corresponden con idénticos valores de  $\theta_2$  (variable no representada). No debe olvidarse que se trata de una proyección de una superficie en  $R^4$  sobre  $R^3$  y que la superficie real no admite representación en nuestro espacio tridimensional.

La correspondiente superficie para  $\theta_2$ , dada la invarianza de las ecuaciones frente al cambio

$$\theta_1 \leftrightarrow \theta_2$$

$$P_1 \leftrightarrow P_2$$

sería la simétrica respecto al plano

$$P_1 = P_2$$

Puede resumirse así el análisis anterior con la figura 3.24. Se representa la superficie anterior y sus tres proyecciones, habiéndose dibujado sobre ella las curvas de los puntos de bifurcación que se corresponden con los pliegues de la misma. Eliminando en el plano horizontal las proyecciones de las rectas mencionadas anteriormente, se obtiene de nuevo, como es lógico, la fig. 3.20. La curva en forma elipsoidal encierra en su interior los puntos estables que se corresponden con el conjunto  $H_0$  de la fig. 3.19. Puede comprobarse ahora que en presencia de varias soluciones sólo una de ellas especifica un equilibrio estable, siendo seis el número máximo de soluciones posibles para una determinada sollicitación de potencias.

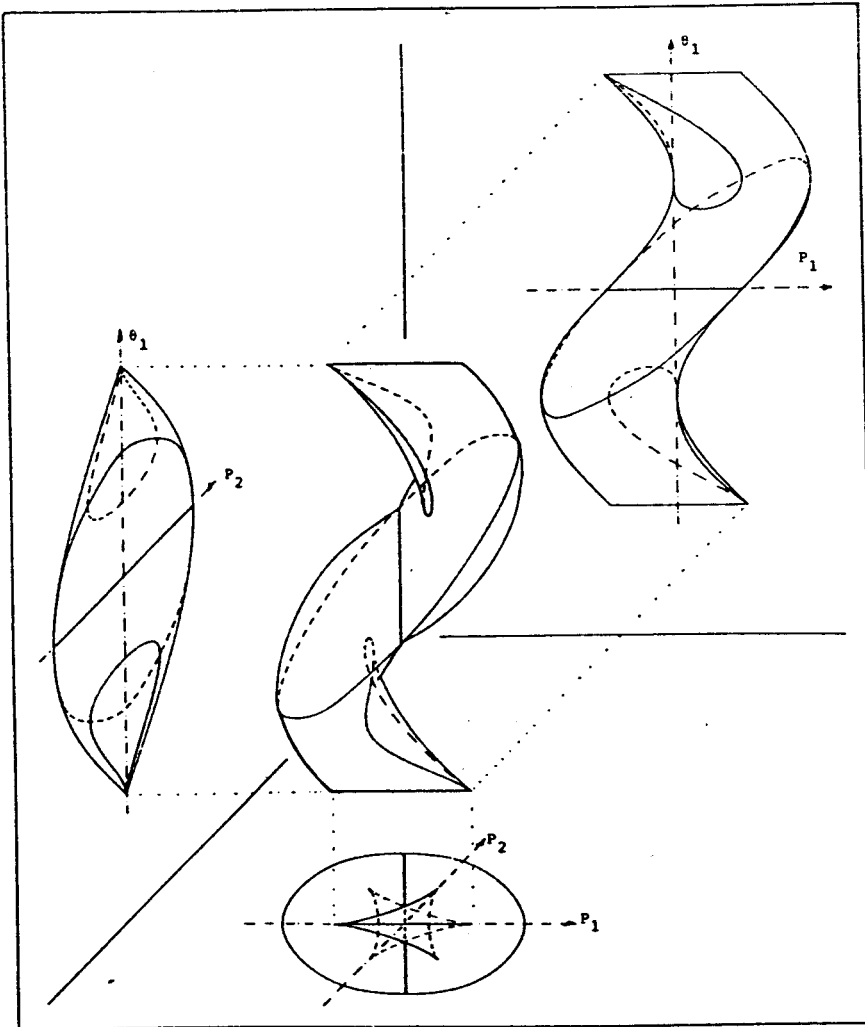


Figura 3.24. Superficie de equilibrios para  $\theta_1$  y sus tres proyecciones. Se han dibujado sobre la superficie las curvas de puntos singulares de las figuras 3.19 y 3.20. La proyección horizontal es esencialmente la figura 3.20 (diagrama de bifurcaciones).

La complejidad encontrada en el análisis anterior aumenta lógicamente cuando en vez de considerar tres máquinas se plantea el estudio de una red con un número mayor de máquinas interconectadas. Los resultados conocidos hasta el momento dejan abiertas un buen número de cuestiones de singular importancia en la práctica. Lo que sí puede afirmarse es que no deben hacerse generalizaciones a partir del análisis de modelos de pequeña dimensión.

Araposthatis et al. ([1981],[1983]), analizan un ejemplo debido a Korsak [1972] en el que aparecen, para idéntico valor de los parámetros, dos soluciones estables y demuestran que en ese caso la región de estabilidad es no conexa. Prueban además, con otro ejemplo, que pueden aparecer vectores de demanda de potencias que sólo se satisfacen ante equilibrios de carácter inestable; esta posible situación tendría graves repercusiones en la práctica.

En cuanto el número de soluciones o equilibrios que pueden coexistir en una red, es significativa la fórmula encontrada por Baillieul y Byrnes [1982] que establece una cota superior. Su método de análisis parte de un planteamiento algebraico equivalente a las ecuaciones trascendentes dadas en (\*), mediante las sustituciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} x_i &= \text{sen}(\theta_1 - \theta_i) \\ y_i &= \text{cos}(\theta_1 - \theta_i) \end{aligned} \quad i = 2, \dots, n$$

Así para una red de  $n$  generadores el sistema equivalente al planteado anteriormente toma la forma:



$$\sum_{j=2}^n \alpha_{1j} x_j = P_1$$

$$\sum_{j=2}^n \alpha_{ij} (x_j y_i - x_i y_j) - \alpha_{1i} x_i = P_i, \quad i = 2, \dots, n-1$$

$$x_i^2 + y_i^2 = 1, \quad i = 2, \dots, n$$

Usando ahora técnicas de geometría algebraica y de la teoría de intersección en espacios proyectivos de variable compleja, demuestran que el número máximo de soluciones complejas  $N_{\max}$  de un sistema del tipo anterior viene dado por:

$$N_{\max} = \binom{2n-2}{n-1}$$

que, para valores elevados de  $n$ , se aproxima a  $2^{2n}$ .

Si bien el número de equilibrios reales puede en algún caso ser sensiblemente menor, en ningún caso es inferior -como también demuestran- a

$$N_{\min} = 2^{n-1}$$

El cuadro da idea del rápido crecimiento de dichos números con la dimensión  $n$  del problema.

$n$	2	3	4	5	6	7	8
$N_{\max}$	2	6	20	70	252	924	3432
$N_{\min}$	2	4	8	16	32	64	128

Por último, cabe añadir algunas conjeturas que constituyen una orientación para investigaciones futuras. Se ha indicado cómo la

región de estabilidad puede ser no conexa, desglosándose en un cierto número de componentes. Suele denominarse componente principal a aquella que incluye el origen. Una conjetura reciente relativa a la no convexidad en general de la componente principal ha sido ya demostrada. Por el momento parece plausible asegurar que el número de componentes de la región de estabilidad coincide con el número máximo de soluciones estables simultáneas, y que, restringiendo la función  $f(\theta)$  -que da el reparto de cargas- a cada componente, resulta ser una función inyectiva.

#### CAPITULO IV : METODOS NUMERICOS EN BIFURCACIONES DINAMICAS

En los capítulos anteriores se ha analizado el problema de la localización de equilibrios y de las bifurcaciones que pueden presentar, destacando las herramientas analíticas de interés así como los métodos numéricos cuyo uso resulta necesario. Entre estos últimos, el método de continuación ha demostrado ser especialmente relevante. El comportamiento de los equilibrios o soluciones constantes de un sistema dinámico puede ser así correctamente caracterizado.

Sin embargo, existen otras soluciones cuyo comportamiento es importante a la hora de realizar el análisis cualitativo de un sistema y son las órbitas periódicas. Estas soluciones ya no son constantes o estáticas sino que representan estados dinámicos que se repiten con una periodicidad concreta. La caracterización de estas soluciones dinámicas y de sus bifurcaciones es pues otra parcela de importancia en el contexto del análisis cualitativo, y a esta cuestión dedicaremos el presente capítulo.

Queda no obstante un tercer grupo de soluciones cuya descripción es necesaria y que constituye el objeto actual de un gran esfuerzo de investigación. Se trata de soluciones que, siendo dinámicas, no presentan periodicidad alguna y a la vez tienen un carácter atractivo, por lo que de hecho son observables en la práctica en determinados sistemas. Son los llamados atractores extraños o caóticos cuya comprensión es aún bastante imperfecta. De todas formas, una de las "rutas" propuestas para la transición al "caos" la constituye la aparición de sucesivas bifurcaciones

de órbitas periódicas, por lo que las técnicas descritas en este capítulo tienen interés también en el análisis de estos atractores.

Para estudiar el comportamiento de las soluciones próximas a una órbita periódica, puede adoptarse un punto de vista similar al seguido para el análisis local de equilibrios, indicado en el apartado 3.1. Supongamos que, para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

conocemos una solución periódica  $\bar{x}(t)$  de periodo  $T > 0$ , es decir:

$$\bar{x}(t) = \bar{x}(t + T), \forall t \in \mathbb{R}$$

Entonces, podemos linealizar la ecuación diferencial a lo largo de dicha órbita, y construir un nuevo sistema lineal de coeficientes periódicos mediante:

$$\frac{dy}{dt} = Df(\bar{x}(t)) y$$

donde  $Df(\bar{x}(t))$  será una matriz cuadrada  $T$ -periódica de orden  $n$ . Puede probarse entonces, siguiendo la teoría de Floquet (ver Hartman [1973]), que toda matriz fundamental de soluciones  $X(t)$  de este sistema linealizado admite la representación:

$$X(t) = Z(t) e^{tR}, \text{ con } Z(t) = Z(t + T) \text{ (periódica)}$$

donde  $X$ ,  $Z$  y  $R$  son matrices cuadradas de orden  $n$ , siendo  $R$  constante.

Puede conseguirse además, mediante un cambio lineal de variables, que

$$X(0) = Z(0) = I \quad (I \text{ matriz identidad})$$

con lo que

$$X(T) = Z(T) e^{TR} = Z(0) e^{TR} = e^{TR}$$

de forma que el comportamiento de las soluciones en las proximidades de la órbita de  $\bar{x}(t)$  viene determinado, en primera aproximación, por los autovalores de la matriz constante  $e^{TR}$ .

Estos autovalores reciben el nombre de **multiplicadores característicos** o multiplicadores de Floquet, mientras que los de la matriz  $R$  (relacionados directamente con los anteriores) son llamados **exponentes característicos** de la órbita periódica.

Ahora, la situación de los multiplicadores respecto al disco unidad del plano complejo define la estabilidad de la órbita. La periodicidad de la solución, en torno a la cual se ha linealizado, impone el que uno de los multiplicadores sea la unidad; son los restantes  $n-1$  multiplicadores los utilizados para el análisis de la estabilidad.

Si los  $n-1$  multiplicadores decisivos tienen módulo distinto de la unidad, la órbita es llamada **hiperbólica**, y la linealización anterior describe cualitativamente el comportamiento local de las soluciones (de manera análoga al teorema de Hartman-Grobman para equilibrios). La órbita será estable si todos los multiplicadores tienen módulo menor que la unidad.

Cuando alguno de los  $n-1$  multiplicadores anteriores tiene módulo uno, se pierde la hiperbolicidad y se necesita un análisis más cuidadoso de la situación. Si consideramos sistemas con parámetros, al igual que en el caso de los equilibrios, la pérdida de hiperbolicidad de una solución periódica puede conducir a una bifurcación. Limitándonos a las bifurcaciones de codimensión uno, comentaremos brevemente los tres casos más relevantes: aparición de un multiplicador 1, de un multiplicador  $-1$  o de un par conjugado de multiplicadores característicos de modulo 1.

El caso en que un multiplicador vale 1, es totalmente análogo al de autovalor cero de los equilibrios. Puede dar lugar por tanto a bifurcaciones silla-nodo, transcritical o pitchfork de órbitas periódicas.

Cuando aparece un multiplicador  $-1$ , se produce una situación que no tiene similar en las bifurcaciones de equilibrios. La bifurcación asociada es llamada "flip", de duplicación de periodo o subarmónica. Si suponemos que la órbita original era estable, al producirse esta bifurcación pasa a ser inestable, y aparece una nueva órbita estable de período aproximadamente el doble del original.

El cruce de un par conjugado de multiplicadores por la frontera del disco unidad es característico de la llamada bifurcación de Hopf secundaria. El abanico de posibles comportamientos de las nuevas órbitas es amplio, pero la situación más típica es la aparición, sobre una sección transversal al flujo, de una curva cerrada invariante al mismo, de forma que todo ocurre como si las

nuevas órbitas se desarrollasen sobre la superficie de un toro.

El análisis local de las soluciones periódicas y de sus bifurcaciones puede realizarse también, como veremos más abajo, construyendo la llamada aplicación de Poincaré. El estudio de dicha aplicación constituye un camino equivalente al comentado y responde a ideas geométricas de fácil comprensión. Dedicaremos una especial atención a dichas ideas en los próximos apartados.

En lo que sigue, consideraremos sistemas dinámicos del tipo

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \text{ con } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \quad .$$

y con suficientes condiciones de diferenciabilidad para  $f$ . El problema a abordar consiste en describir el comportamiento de las posibles soluciones periódicas del sistema con relación a los valores del parámetro  $u$ , que supondremos unidimensional. Además, es importante localizar las posibles bifurcaciones de dichas soluciones periódicas, describiendo convenientemente las posibles ramas secundarias. A este respecto, es importante contar con un algoritmo capaz de calcular los multiplicadores característicos de la órbita en cuestión.

Debemos señalar que este análisis debe hacerse en conjunción con el correspondiente a las bifurcaciones estáticas del capítulo anterior, puesto que la aparición de soluciones dinámicas ocurrirá, en general, cuando un equilibrio sufre un cambio en su estabilidad debido a una bifurcación de Hopf, por lo que la localiza-

ción de este tipo de bifurcaciones será la primera tarea a tener en cuenta.

Recordemos que una bifurcación de este tipo se corresponde con el paso de un par de autovalores conjugados de la matriz de linealización del sistema por el eje imaginario. En algunos casos sencillos puede recurrirse al estudio analítico de los autovalores de dicha matriz y realizar posteriormente —una vez detectada la bifurcación— la caracterización de la misma. Para ello, puede seguirse, por ejemplo, el procedimiento indicado por Hassard et al. [1981], con el cómputo de determinados coeficientes que proporcionan aproximaciones al periodo y al radio de la órbita, en función del parámetro del sistema. Sin embargo, los cálculos a realizar son laboriosos, aún para pequeña dimensión.

Ya hemos indicado que el uso de sistemas de manipulación algebraica de símbolos constituye, hoy en día, una herramienta valiosa a la hora de realizar cálculos prolijos, que en su mayoría pueden sistematizarse. De hecho, en esta memoria ya hemos utilizado uno de dichos sistemas (REDUCE) como ayuda en el cálculo de la variedad de centros de una de las aplicaciones anteriores. El recurso a estas técnicas cuando se trata de localizar y caracterizar la bifurcación de Hopf es, en la actualidad, objeto de investigación por nuestra parte.

Como una alternativa numérica para la localización de una bifurcación de Hopf, el método propuesto por el grupo de Kubicek (Kubicek [1980], Kubicek & Marek [1983]) resulta especialmente apropiado por su simplicidad. Básicamente, si  $x(u)$  representa la



rama de equilibrios en la que se produce tal bifurcación, podemos recurrir a la construcción del polinomio característico de la matriz de linealización:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n$$

donde los coeficientes  $a_i$  serán funciones de  $x$  y del parámetro  $u$ .

Si para

$$x^*, u^*$$

se produce la bifurcación de Hopf, el polinomio anterior debe presentar para dichos valores las soluciones

$$\lambda_{1,2} = \pm iw^*, \text{ con } w^* > 0$$

Si usamos una descomposición similar a la utilizada en el método de Lin-Bairstow y escribimos

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + w)(\lambda^{n-2} + b_1 \lambda^{n-3} + \dots + b_{n-3} \lambda + b_{n-2}) + R\lambda + S$$

se tendrá que, para

$$x = x^*$$

$$u = u^*$$

$$w = w^*$$

deben ser nulos los coeficientes  $R$  y  $S$ . Dado que es fácil calcular por recurrencia tanto los coeficientes  $b_i$  como  $R$  y  $S$ , a partir de los  $a_i$ , la resolución del sistema siguiente,

$$f(x, u) = 0$$

$$R(x, u, w) = 0$$

$$S(x, u, w) = 0$$

con  $n + 2$  ecuaciones y  $n + 2$  incógnitas, proporciona pues un camino válido y asequible para la localización de una bifurcación de Hopf.

Una vez detectada la bifurcación, en general aparecerá un rango de valores del parámetro  $u$  para el que seguirá existiendo una solución periódica. Supongamos que estamos en dichas condiciones. Entonces existirá una solución  $x(t)$  de forma que

$$x(t + T) = x(t), \text{ para un cierto } T > 0.$$

donde  $T$  es el valor del periodo de la misma. Cara a la continuación de órbitas periódicas (es decir, al análisis de la evolución de dicha órbita frente a variaciones del parámetro) puede adoptarse el siguiente enfoque. Haciendo un cambio de escala en la variable temporal  $t$  por  $Tt$ , que normaliza el periodo al valor unidad, el sistema queda:

$$\frac{dx}{dt} = T \cdot f(x, u)$$

que junto con la condición:

$$x(0) = x(1)$$

constituye un problema de contorno, con condiciones de contorno no separadas, donde el valor del periodo original aparece en forma explícita como un nuevo parámetro. Este punto de vista es el adoptado por Langford [1977], Doedel [1981] y Holodniok & Kubicek [1984], entre otros. La necesidad de incorporar algoritmos de resolución de problemas de contorno puede complicar este análisis, si bien el uso de métodos de tiro simple ("simple shooting")

cuando es posible (Kubicek & Marek [1983]) resta importancia a esta objeción.

A la hora de diseñar algoritmos específicos para el análisis de las soluciones periódicas, un objetivo importante a cubrir es que los métodos empleados sean susceptibles de acoplarse con facilidad a los algoritmos propios del análisis de los equilibrios, formando así un código más compacto. Necesitamos un elemento que permita enlazar ambos análisis y aprovechar la eficacia ya mostrada del método de continuación en la resolución de ecuaciones no lineales. Para ello, recurriremos a la aplicación de Poincaré y, acto seguido, mostraremos su utilidad en la construcción de un algoritmo de continuación de órbitas periódicas, así como varias aplicaciones de dicho algoritmo.

#### **4.1. La aplicación de Poincaré en el estudio de soluciones periódicas.**

Como primer paso para desarrollar un algoritmo de continuación, necesitamos formular correctamente el problema en cuestión, o lo que es lo mismo, definir el par  $(F,U)$  correspondiente (ver introducción al Capítulo II). Si queremos aprovechar en lo posible el algoritmo de continuación usado para los equilibrios, deberíamos conseguir (por analogía) establecer una correspondencia entre las soluciones periódicas del sistema y los ceros de una aplicación no lineal. Bastaría aplicar entonces el algoritmo de continuación a la función así definida, para cubrir el objetivo propuesto. Para construir tal función utilizaremos como punto de

partida la llamada aplicación de Poincaré.

Para establecer la mencionada correspondencia, consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

donde

$$f : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es diferenciable con continuidad en el abierto  $V$ .

Supongamos que  $F(y,t)$  es el flujo solución tal que:

$$F(y,0) = y, \forall y \in V$$

donde

$$F: V \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Sea ahora  $g(t)$  una solución periódica, o más precisamente, supongamos que

$$\begin{aligned} \exists x_0 \in V \text{ tal que } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \rightarrow g(t) = F(x_0, t) \end{aligned}$$

cumpliendo además:

$$\exists T > 0 : g(t) = g(t + T), \forall t \in \mathbb{R}$$

Sea  $S$  un hiperplano de  $\mathbb{R}^n$ , con  $x_0 \in S$  y transversal a la órbita de  $g(t)$  en  $x_0$ . En estas condiciones (Cfr. Hartman [1973]), podemos afirmar que existe  $U$ , entorno de  $x_0$  en  $S$ , y una función  $\tau$  di-

ferenciabile con continuidad tal que

$$\begin{aligned} \tau : U &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ y &\rightarrow \tau(y) \end{aligned}$$

cumpliendo además

$$i) F(y, \tau(y)) \in S, \forall y \in U$$

$$ii) \tau(x_0) = T$$

Dicho de otra forma, la función  $\tau$  proporciona para los puntos de  $U$  el tiempo que invierte la correspondiente órbita en volver a cortar al hiperplano  $S$  en un entorno de  $x_0$ .

Podemos definir entonces la aplicación de Poincaré ( $P$ ), que es la que, a cada punto de  $U$ , le hace corresponder el punto de retorno a  $S$ , es decir:

$$\begin{aligned} P : U &\rightarrow S \\ y &\rightarrow P(y) = F(y, \tau(y)) \end{aligned}$$

El problema de encontrar el punto  $x_0$ , que corresponde a la órbita cerrada, es equivalente así a determinar los puntos fijos de la aplicación  $P$ , o bien, los ceros de la función  $(P - I)$ , siendo  $I$  la aplicación identidad (ver figura 4.1). Queda así establecida la correspondencia buscada entre soluciones periódicas y ceros de una función, como necesitábamos. La idea anterior permite construir un algoritmo para localizar las soluciones periódicas de un sistema (Curry [1979]).

Si queremos usar v.g. el método de Newton, para localizar los ceros de la función  $(P - I)$ , nos interesará el disponer de la

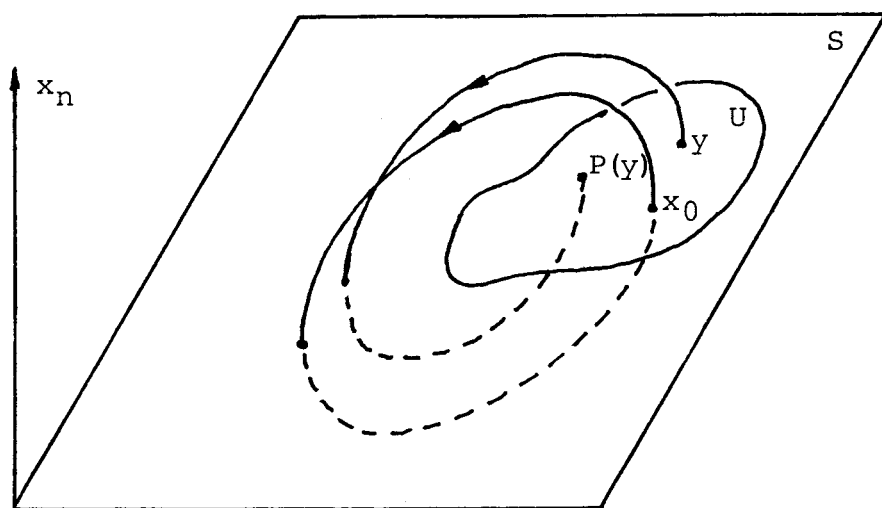


Fig 4.1. La aplicación de Poincaré

derivada de dicha función  $y$ , obviamente, bastará obtener la derivada de  $P$ .

Ya que la aplicación de Poincaré define un sistema dinámico discreto, y dado que su derivada en un equilibrio (punto fijo) es precisamente la matriz de linealización de dicho sistema, el conocimiento de dicha derivada nos proporciona además una valiosa información. En concreto, la situación de sus autovalores respecto al disco unidad del plano complejo nos permite caracterizar la estabilidad de la correspondiente órbita periódica.

Supondremos para mayor simplicidad que el hiperplano  $S$  es paralelo a uno de los coordenados  $y$ , sin pérdida de generalidad, tomaremos:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = a, a \in \mathbb{R}\}$$

y descompondremos la aplicación  $P$  de la siguiente forma:

$$P = E \circ F \circ G \circ H$$

$$\begin{array}{ccccccc} U \subset \mathbb{R}^{n-1} & \xrightarrow{H} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{G} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{E} & S \subset \mathbb{R}^{n-1} \\ y & \longrightarrow & y & \longrightarrow & (y, \tau(y)) & \longrightarrow & F(y, \tau(y)) & \longrightarrow & F(y, \tau(y)) \end{array}$$

donde  $H$  y  $E$  representan la inclusión y proyección canónicas, respectivamente.

Aplicando sucesivamente la regla de la cadena, tendremos:

$$\begin{aligned}
 DP &= DE \cdot DF \cdot DG \cdot DH = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_x F & D_t F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_n \\ D\tau \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ 0_{n-1} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_x F & D_t F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ 0_{n-1} \\ D\tau \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde las derivadas son evaluadas en las correspondientes imágenes del punto considerado e  $I_k$ ,  $0_k$  representan, respectivamente, la matriz identidad de orden  $k$  y el vector nulo de orden  $k$  (fila ó columna).

Un sencillo cálculo muestra que, si representamos por  $a_{ij}$  al elemento correspondiente a la fila  $i$  y columna  $j$  de la matriz de  $DP$ , se tiene:

$$a_{ij} = D_j F_i + D_t F_i D_j \tau, \text{ con } i, j = 1, 2, \dots, n-1$$

Si llamamos  $P^*$  a  $F \circ G \circ H$ , es claro que

$$DP^* = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$$

con  $i$  variando ahora desde 1 hasta  $n$ , y verificando también la igualdad anterior. Pero, para  $y \in U$ , se tendrá que

$$P^*(y) \in S$$

y por tanto la última fila de  $DP^*$ , en esos puntos, será cero. Esto nos dice que

$$a_{nj} = D_j F_n(y, \tau(y)) + D_t F_n(y, \tau(y)) D_j \tau(y) = 0$$

y, teniendo en cuenta que



$$D_t F_n(y, \tau(y)) = f_n(F(y, \tau(y)))$$

obtenemos:

$$D_j \tau(y) = - \frac{D_j F_n(y, \tau(y))}{f_n(F(y, \tau(y)))} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n-1$$

expresión que proporciona las derivadas de la función  $\tau$ . Notemos que la transversalidad de  $S$  y la órbita de  $g(t)$  en  $x_0$  nos asegura que el denominador anterior no se anula.

De esta forma, tenemos que

$$DP(y) = [a_{ij}] \quad \text{con}$$

$$a_{ij} = D_j F_i(y, \tau(y)) - \frac{f_i(F(y, \tau(y)))}{f_n(F(y, \tau(y)))} D_j F_n(y, \tau(y)) \quad (*)$$

para  $i, j = 1, 2, \dots, n-1$

y sólo nos quedará el evaluar  $D_j F_i(y, \tau(y))$ , para  $j$  de 1 a  $n-1$ , y para  $i$  de 1 a  $n$ .

Mediante un método de integración numérica, dado  $y \in S$ , supuesto  $y \in U$ , podríamos obtener  $F(y, t)$  para cada  $t$ , hasta encontrar

$$P(y) = F(y, \tau(y))$$

Nos planteamos ahora la posibilidad de obtener, mediante algún algoritmo, el valor de

$$D_x F(y, t)$$

para cada  $t$ , llegando así hasta

$$D_x F(y, \tau(y))$$

Escribamos

$$A(t) = D_x F(y, t)$$

supuesto fijado el punto  $y$ . Supondremos que podemos intercambiar el orden de derivación (lo que equivale a exigir que  $F$  sea suficientemente diferenciable con continuidad) y escribimos:

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} D_x F(y, t) = D_x \left( \frac{d}{dt} F(y, t) \right) = D_x (f(F(y, t))) = \\ &= J_f(F(y, t)) D_x F(y, t) = J_f(F(y, t)) A(t) \end{aligned}$$

donde  $J_f(\cdot)$  denota la matriz jacobiana de  $f$ , evaluada en el punto indicado, y hemos usado una vez más el hecho de que  $F$  representa el flujo del sistema dinámico. Si hacemos

$$B(t) = J_f(F(y, t))$$

como

$$A(0) = D_x F(y, 0) = I$$

basta entonces integrar numéricamente el sistema:

$$A'(t) = B(t) A(t)$$

$$A(0) = I$$

hasta llegar a  $A(\tau(y))$ . Hacemos la observación que este sistema, que se corresponde con la llamada ecuación variacional, debe ser integrado conjuntamente con la órbita que describe el punto " $y$ "

para poder evaluar correctamente la matriz  $B(t)$ . Además, debe disponerse un dispositivo que detecte el cruce de la órbita por el hiperplano  $S$ , precisamente al completar una vuelta. Necesitaremos usar un algoritmo de interpolación a tal efecto.

Notemos también que, una vez situados en  $x_0$ , punto fijo de la aplicación de Poincaré, para obtener  $DP(x_0)$  a partir de la correspondiente matriz  $A(T)$ , se han de efectuar unas operaciones sobre los elementos de esta última -ver la expresión anterior señalada con (\*)- que tienen una interpretación geométrica clara. Para aclarar este extremo, notemos que para todo punto  $x$  de la órbita  $g(t)$  se tiene

$$F(x, T) = x$$

con lo que podemos escribir

$$F(g(t), T) = g(t)$$

y, derivando respecto de  $t$ , resulta, teniendo en cuenta que  $g$  es una solución:

$$D_x F(g(t), T) g'(t) = g'(t) = f(g(t))$$

En particular, para  $t = 0$ , obtenemos:

$$D_x F(x_0, T) f(x_0) = f(x_0) = A(T) f(x_0)$$

Observemos que, por la construcción efectuada, la matriz  $A(t)$  es una matriz fundamental de soluciones para la linealización del flujo a lo largo de la órbita periódica. Por tanto, y de acuerdo con la teoría de Floquet (ver v.g. Hartman [1973]) la matriz  $A(T)$  posee un autovalor  $1$  con autovector  $f(x_0)$ , siendo los restantes

$n-1$  autovalores los multiplicadores característicos, que caracterizan la estabilidad de la órbita periódica.

En efecto, si hicieramos un cambio lineal de variables, de forma que el vector  $f(x_0)$  en la nueva base tuviera como representación el vector  $e_n$ , deberíamos concluir que la matriz  $A(T)$  en dicha base posee como último vector columna al propio  $e_n$ . Bastaría entonces eliminar la última fila y columna de  $A$  para obtener una submatriz cuadrada de orden  $n-1$ , que caracteriza la estabilidad de la órbita cerrada. Evidentemente la matriz

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & f_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & f_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & f_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f_n \end{bmatrix}$$

sirve para dicho propósito, como matriz de cambio de base. Su inversa resulta ser

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -f_1/f_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -f_2/f_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -f_{n-1}/f_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/f_n \end{bmatrix}$$

Con este cambio de base,  $A(T)$  debe sustituirse por

$$N^{-1}A(T)N = N^{-1}A(T) \left[ \begin{array}{c|c} I_{n-1} & f \\ \hline 0_{n-1} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} N^{-1}A(T) & I_{n-1} \\ \hline & 0_{n-1} \end{array} \right] N^{-1}f$$

Claramente,  $N^{-1}f = e_n$  -como ya se dijo-, y observamos además que

la última columna de  $A$  es irrelevante. Pero el hecho importante a destacar es que la submatriz de orden  $n-1$  que caracteriza la estabilidad con el cambio de base efectuado es, a la vista de la expresión (\*), precisamente la derivada de la aplicación de Poincaré. Otra observación de interés es indicar que la condición

$$A(T) f(x_0) = f(x_0)$$

puede ser usada como medida del error cometido en la integración de la ecuación variacional.

#### 4.2. Algoritmo de continuación de órbitas periódicas.

Hasta el momento, hemos desarrollado en detalle como formular un algoritmo para localizar órbitas periódicas mediante la aplicación de Poincaré. Extendemos ahora el mismo proceso para el caso que nos interesa, es decir, en presencia de un parámetro  $u$ , con objeto de diseñar un algoritmo de continuación. Como un precedente en esta dirección, debemos citar a Sparrow [1982] que, en su exhaustivo estudio del atractor de Lorenz, describe las ideas básicas a tener en cuenta en este tipo de algoritmos. Sin embargo, el nivel de detalle de sus consideraciones indica que su trabajo tuvo que desarrollarse sin contar con un algoritmo de continuación propiamente dicho. En las aplicaciones que siguen a este apartado, mostramos algunos resultados alcanzados con este algoritmo y sus posibilidades futuras como herramienta de investigación.

Consideramos así el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u)$$

donde ahora

$$f : V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es suficientemente diferenciable con continuidad en el abierto  $V$ .

Sea  $F(y,u,t)$  el flujo solución del sistema de forma que

$$F(y,u,0) = y. \quad \forall (y,u) \in V$$

Admitamos, para este sistema, la existencia de una familia en  $u$  de soluciones periódicas  $g(t,u)$ , con periodo  $T(u)$ ; es decir, si

$$x = g(0,u)$$

se tiene que

$$g(t,u) = F(x,u,t) \text{ con } g(t,u) = g(t+T(u),u), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sea

$$x_0 = g(0,u_0)$$

con  $g(t,u_0)$  órbita hiperbólica. Si  $S_0$  es un hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  que es transversal en  $x_0$  a  $g(t,u_0)$ , estamos en condiciones de afirmar:

Existe un entorno  $U \times L$  de  $(x_0, u_0)$  en  $S_0 \times R$  y una función única  $\tau : U \times L \rightarrow R^+$  diferenciable con continuidad que cumple:

- i)  $F(y, u, \tau(y, u)) \in S_0, \forall (y, u) \in U \times L$
- ii)  $\tau(x_0, u_0) = T(u_0)$

La función  $\tau$  proporciona pues, para los puntos de  $U$ , el tiempo que invierte la correspondiente órbita en volver al hiperplano  $S_0$  en las proximidades de  $x_0$ , dependiendo además del valor del parámetro. Para esos puntos queda definida entonces una aplicación de Poincaré ampliada  $P(y, u)$ , sin más que asociarles como imagen el punto de retorno a  $S_0$ . Es decir:

$$P : U \times L \rightarrow S_0$$

$$(y, u) \rightarrow P(y, u) = F(y, u, \tau(y, u))$$

De nuevo, obtener el conjunto de soluciones periódicas es equivalente a resolver la ecuación

$$P(y, u) - y = 0$$

Hagamos

$$Q(y, u) = P(y, u) - y$$

Al igual que cuando necesitamos realizar un análisis de la dinámica de los equilibrios, nos interesa ahora el aplicar técnicas de continuación para resolver

$$Q(y, u) = 0$$

Repetimos ahora el proceso del apartado anterior para el cálculo de la derivada de  $P$ , incluyendo en  $DP$  tanto a  $D_y P$  como a  $D_u P$ .

Supondremos, como antes, que estamos trabajando con el hiperplano

$$S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = a, a \in \mathbb{R}, \text{ prefijado}\}$$

como sección transversal. Con una notación análoga a la anterior, la aplicación  $P$  puede ser descompuesta del siguiente modo:

$$P = E \circ F \circ G \circ H$$

$$\begin{array}{ccccccc} U \times L & \xrightarrow{H} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} & \xrightarrow{G} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^n \xrightarrow{E} S_0 \\ (y,u) & \longrightarrow & (y,u) & \longrightarrow & (y,u, \tau(y,u)) & \longrightarrow & F(y,u, \tau(y,u)) \end{array}$$

Aplicando de nuevo de forma reiterada la regla de la cadena, obtenemos derivando respecto de  $(y,u)$ :

$$DP = \left[ \begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0_{n-1} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} D_x F & D_u F \\ \hline D_x \tau & D_u \tau \end{array} \right] D_t F \left[ \begin{array}{c} I_{n+1} \\ \hline D_x \tau \quad D_u \tau \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0_{n-1} \\ \hline 0_{n-1} & 0 \\ \hline 0_{n-1} & 1 \end{array} \right]$$

Si utilizamos la notación:

$$DP = \left[ \begin{array}{c|c} D_j P_i & D_u P_i \end{array} \right] \quad \text{con } i, j = 1, 2, \dots, n-1$$

Se obtiene para  $i=1, \dots, n-1$  :

$$D_u P_i = D_u F_i + D_t F_i D_u \tau$$

$$D_j P_i = D_j F_i + D_t F_i D_j \tau \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n-1$$

La descomposición efectuada de la aplicación de Poincaré ampliada permite definir una nueva aplicación  $P^* = F \circ G \circ H$ , cuya derivada  $DP^*$  respecto a  $(x,u)$  tendría asociada la matriz que resulta de multiplicar las tres últimas matrices cuyo producto es  $DP$ . Además, la última fila de nuevo debe estar constituida por ceros ya



que

$$P^*(y, u) \in S_0$$

Esto nos permite deducir, una vez más:

$$D_j \tau(y, u) = - \frac{D_j F_n(y, u, \tau(y, u))}{f_n(F(y, u, \tau(y, u)), u)} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n-1$$

$$D_u \tau(y, u) = - \frac{D_u F_n(y, u, \tau(y, u))}{f_n(F(y, u, \tau(y, u)), u)}$$

donde hemos tenido en cuenta que  $F$  es solución del sistema definido por  $f$  y, en consecuencia,

$$\frac{d}{dt} F(y, u, \tau(y, u)) = f(F(y, u, \tau(y, u)), u)$$

Este mismo hecho conduce pues, a escribir en forma sucinta:

$$D_j P_i = D_j F_i - \frac{f_i}{f_n} D_j F_n \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n-1$$

$$D_u P_i = D_u F_i - \frac{f_i}{f_n} D_u F_n$$

donde las funciones y sus derivadas son evaluadas en el punto de retorno. La hipótesis de transversalidad sirve de nuevo para asegurar que el denominador en las fórmulas anteriores es distinto de cero.

En consecuencia, el problema del cálculo de las derivadas de  $P$  queda reducido a la evaluación de las derivadas de  $F$  en el punto de retorno y al conocimiento de dicho punto. Para conseguir

dicho propósito, exigiendo condiciones suficientes a  $F$ , podemos intercambiar el orden de derivación, y resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (D_{(x,u)} F(y,u,t)) &= D_{(x,u)} \left( \frac{d}{dt} F(y,u,t) \right) = \\ &= D_{(x,u)} (f(F(y,u,t), u)) = \\ &= \left[ D_x f(F, u) \cdot D_x F(y, u, t) \quad \Bigg| \quad D_x f(F, u) \cdot D_u F(y, u, t) + D_u f(F, u) \right] \end{aligned}$$

Hagamos

$$\begin{aligned} A(t) &= D_{(x,u)} F(y, u, t) \\ B(t) &= D_x f(F, u) \\ C(t) &= \left[ 0_{n \times n} \quad \Bigg| \quad D_u f(F, u) \right] \end{aligned}$$

Puesto que

$$F(y, u, 0) = y$$

se tendrá que

$$A(0) = \left[ I_n \quad \Bigg| \quad 0_n \right]$$

y bastará integrar el sistema

$$A'(t) = B(t)A(t) + C(t)$$

hasta llegar al punto de retorno a  $S_0$ . Es preciso, como antes, el hacerlo conjuntamente con la integración de la órbita correspondiente, y también son válidas las observaciones del apartado anterior: podemos prescindir —en la integración de  $A(t)$ — de la columna correspondiente a la última variable del vector, así como tener en cuenta el hecho de que  $D_x F$  debe tener a  $f$  como autovec-

tor con autovalor  $\lambda$  para construir una medida del error global cometido.

En cuanto a minimizar los errores del algoritmo, podemos destacar varias ideas a tener en cuenta. Un primer criterio a considerar es el intercambio del sentido de integración en función de la estabilidad de la órbita. Si, para cierto valor del parámetro, la órbita resulta ser fuertemente inestable, al integrar en sentido decreciente del tiempo, el carácter de la órbita será —hablando con imprecisión— el opuesto en cuanto a la estabilidad, y se conseguirá así, por la propia fisonomía del problema, el reducir errores. Esto equivale a trabajar con la inversa de la aplicación de Poincaré y con su derivada, en lugar de usar la propia aplicación de Poincaré.

Es interesante también elegir de la manera más eficiente la sección transversal a la órbita. Esta tarea requiere un conocimiento previo del comportamiento cualitativo del flujo solución en cada caso. Aunque no hay dificultad en permitir que la sección no tenga que ser paralela a uno de los planos coordenados, el hacerlo complica algo el algoritmo (sobre todo, en la evaluación de las derivadas de la función  $T$ ), sin que repercuta de manera beneficiosa en la marcha del método. Más útil resulta —usando siempre secciones paralelas a algún plano coordenado— el disponer un esquema adaptativo de cambio de sección, para conseguir dentro de lo posible el mayor grado de transversalidad. Para ello, una idea simple y eficaz es elegir la sección paralela al plano coordenado  $x_i = 0$ , donde  $i$  es tal que:

$$|f_1| > |f_j|, \quad j = 1, \dots, n$$

En la figura 4.2 se muestra esta idea para el caso sencillo de dos variables, en donde se supone que para  $u_0$  y  $x_0 = (x_{01}, x_{02})$  se ha utilizado hasta el momento el hiperplano

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_{02}\}$$

pero dado que

$$|f_1| > |f_2|$$

conviene utilizar, para proseguir la continuación, la recta

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_{01}\}$$

que mejora la transversalidad con la órbita  $g(t)$ .

Con estas ideas, hemos desarrollado un programa con el que se han analizado varios sistemas y cuyos resultados se exponen a continuación. Hacemos notar que permite seguir la evolución de las órbitas periódicas con independencia de su carácter en cuanto a la estabilidad. El conocimiento preciso de la derivada de la aplicación de Poincaré y de sus autovalores permite discernir dicho carácter, así como detectar la aparición de bifurcaciones, cuando alguno de dichos autovalores cruce la frontera del círculo unidad del plano complejo.

Para la integración conjunta de la órbita y de la ecuación variacional, conviene usar métodos dotados de selección automática del paso de integración para una tolerancia del error prefijada. A este respecto, son útiles los códigos RKF (ver, por ejem-

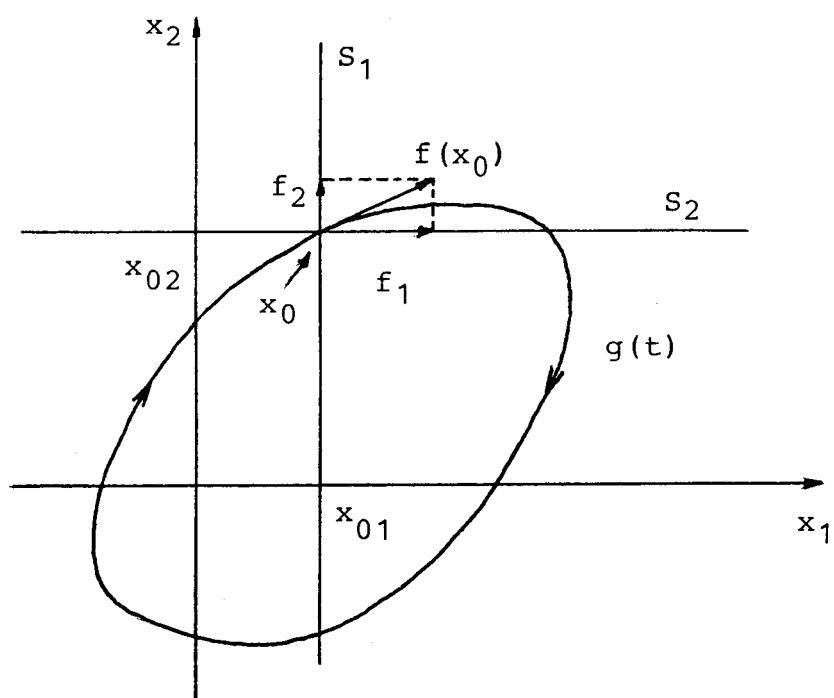


Figura 4.2. En la situación de la figura, la transversalidad mejora al pasar de  $S_2$  a  $S_1$

pio, Shampine & Allen [1973], Forsythe et al. [1977]).

Para la determinación del punto de retorno a la sección y de la derivada de la aplicación de Poincaré, será necesario en general realizar una interpolación, una vez detectado el cruce de la sección. Frente a la interpolación lineal simple, el algoritmo de Neville (ver v.g. Stoer & Bulirsch [1980]) permite a un costo computacional pequeño mejorar la precisión. En concreto, se ha usado interpolación parabólica.

Este algoritmo de continuación admite una extensión clara al interesante caso de sistemas con dos parámetros. Al igual que en el caso de los problemas abordados en el capítulo anterior, la incorporación de ecuaciones auxiliares representando una condición de bifurcación permitiría dibujar sobre el plano de parámetros curvas de bifurcación. Conseguiríamos así delimitar las diversas regiones de comportamiento cualitativo similar. Si para el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u_1, u_2), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}$$

estamos interesados en detectar, en el plano de parámetros, las curvas correspondientes a una bifurcación de duplicación de periodo, bastaría resolver por continuación el problema:

$$\begin{aligned} P(y, u_1, u_2) - y &= 0 \\ \det (D_y P(y, u_1, u_2) - aI) &= 0 \end{aligned}$$

donde  $P$  representa la correspondiente aplicación de Poincaré -para determinada sección transversal al flujo- y  $a = -1$ .

Si tomamos  $a = 1$ , este mismo esquema puede adoptarse para obtener las curvas de bifurcaciones silla-nodo. El cálculo de  $P$  y de  $D_y P$  puede hacerse igual que anteriormente, pero ahora, para poder corregir con el método de Newton, se necesitarán además las derivadas respecto al nuevo parámetro de la aplicación de Poincaré y las de la ecuación auxiliar.

El hecho de contar ahora con dos parámetros no altera esencialmente el algoritmo de cálculo de las derivadas de  $P$ , pero la evaluación de las derivadas de la condición de bifurcación implica el conocimiento de sus derivadas segundas. Esta última observación sugiere el uso de derivación numérica, evitando así el problema de formular otra ecuación diferencial que fuera satisfecha por las variacionales de segundo orden. La integración de dicha ecuación supondría una complejidad superior en los cálculos que puede ser poco rentable frente a la simplicidad de la derivación numérica, aún a costa de perder precisión.

En esta dirección, es interesante el trabajo de Kawakami [1984], que aborda el caso más simple de sistemas dinámicos no autónomos cuya ley de evolución es periódica en la variable temporal. Dejamos para posteriores trabajos el desarrollo de estas ideas, así como la incorporación, al campo de las soluciones periódicas, de los métodos analíticos utilizados en esta memoria en el análisis cualitativo de equilibrios.

### 4.3. Aplicaciones.

Para la descripción de otras peculiaridades del algoritmo, así como dar cuenta de las posibles dificultades numéricas en su utilización, creemos interesante mostrar los resultados del mismo frente a varios problemas concretos. Comenzaremos por casos sencillos, para llegar por último a estudiar situaciones que aún siguen siendo objeto de trabajo de investigación por nuestra parte.

#### 4.3.1. El oscilador de Van der Pol.

El ejemplo más sencillo de sistema no lineal con soluciones periódicas es, sin duda, el oscilador de Van der Pol, cuyas ecuaciones describen la dinámica de un circuito oscilador RLC en el que el elemento resistivo está diseñado mediante un dispositivo activo no lineal. Las ecuaciones del sistema pueden escribirse:

$$\dot{x} = -y - f(x)$$

$$\dot{y} = x$$

donde

$$f(x) = -u x + x^3$$

(ver Hassard et al. [1981]), siendo  $u$  el parámetro. El origen constituye el único equilibrio para cualquier valor del parámetro, y la matriz de linealización en dicho punto es

$$\begin{bmatrix} u & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



con autovalores

$$(u \pm \sqrt{u^2 - 4})/2$$

Para  $u < -2$  los autovalores son ambos reales y negativos, aproximándose entre sí conforme  $u$  crece. Para  $u = -2$ , resultan ambos iguales a  $-1$ , desplegándose en un par complejo conjugado para  $-2 < u < 2$ . Cuando  $u = 2$ , los dos autovalores valen  $1$ , siendo reales y positivos para  $u > 2$ . El paso por cero del parámetro  $u$  se corresponde con el cruce de los dos autovalores por el eje imaginario, con velocidad no nula (bifurcación de Hopf), de forma que, para  $u > 0$ , el origen se vuelve inestable y aparece una órbita periódica estable de amplitud creciente con  $u$ .

Eligiendo inicialmente como sección la recta  $y = 0$ , y representando la coordenada  $x$  de corte de la órbita frente al parámetro  $u$ , se obtiene la figura 4.3, fruto del algoritmo de continuación. El algoritmo permite seguir la evolución del único multiplicador característico de la órbita conforme crece la amplitud, observándose como éste decrece asintóticamente hacia cero.

#### 4.3.2. Un sistema con una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas.

Es posible detectar con la ayuda del algoritmo de continuación la aparición de las bifurcaciones que pueden presentar las soluciones periódicas.

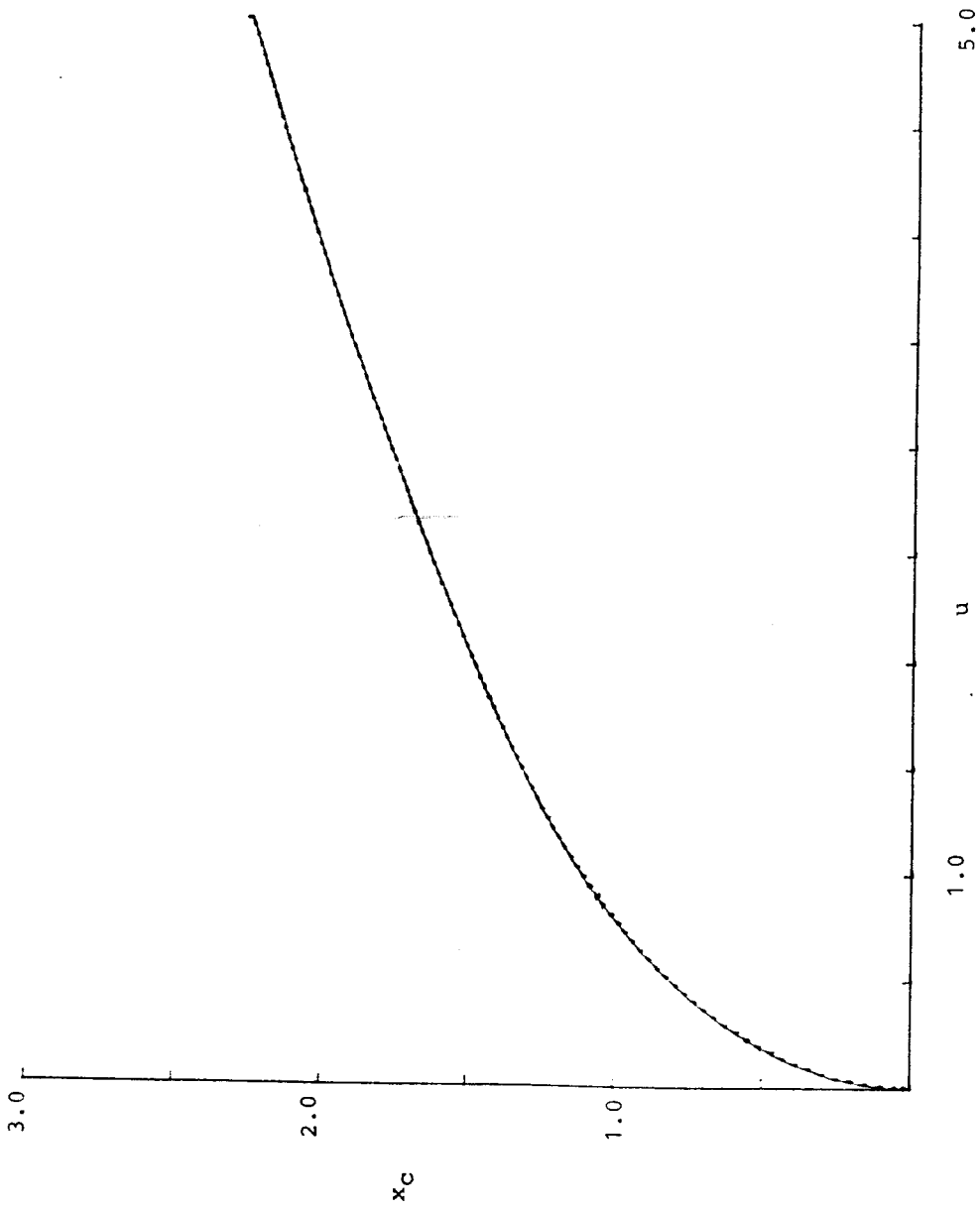


Figura 4.3. Oscilador de Van der Pol. Evolución de la coordenada de corte (amplitud) con el parámetro.

Guckenheiner y Holmes [1983] estudian un modelo debido a Takens que, además de la bifurcación de Hopf necesaria para la aparición de soluciones periódicas, presenta otras bifurcaciones adicionales. Es interesante dejar constancia de los resultados obtenidos con el algoritmo de continuación, puesto que da idea de sus posibilidades y además refleja las dificultades lógicas, por otra parte— que pueden presentarse cuando, como ocurre en este caso, la aplicación de Poincaré tiene lagunas en su dominio de definición.

El sistema, de dimensión dos, responde a la formulación:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = x + u y - x^3 - x^2 y$$

presentando un equilibrio inestable en el origen (punto de silla), con una variedad estable y otra inestable, y dos equilibrios en los puntos (1,0) y (-1,0).

Los dos últimos equilibrios tienen como matriz de linealización la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & u-1 \end{bmatrix}$$

con autovalores dados por

$$\frac{u - 1 \pm \sqrt{u^2 - 2u - 7}}{2}$$

de forma que, para  $u = 1$ , sufren una bifurcación de Hopf, como es fácil comprobar. La bifurcación es subcrítica, de manera que, para valores inferiores de  $u$ , existe un par de órbitas periódicas inestables, que seguiremos con el algoritmo de continuación. Dada la simetría de la situación, seguiremos sólo una de dichas órbitas, tomando como sección de Poincaré la recta  $x = 1$ .

El análisis que se realiza en la referencia anterior prueba que, para un valor del parámetro próximo a 0.8, se produce una bifurcación global al conectarse las variedades estables e inestables del origen, dando lugar a un par de órbitas homoclinas. Para valores superiores del parámetro, el par de órbitas homoclinas degenera en una órbita periódica que engloba los tres equilibrios.

En la figura 4.4 se muestran los resultados del algoritmo de continuación para este modelo. Se muestra la evolución respecto al parámetro  $u$  de la coordenada  $y$  de corte sobre la sección, del periodo y del multiplicador característico. Se comprueba una zona donde la convergencia es débil, debido a la proximidad a la órbita homoclina. Se aprecia como crece el periodo de la órbita en dicha zona. Para valores inferiores del parámetro se observa un paso del multiplicador característico de la órbita por el valor unidad, produciéndose una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas.

Se comprueba que para el rango de valores analizado se tiene también la coexistencia de una órbita estable englobando los tres equilibrios que desaparece junto con la inestable para valores

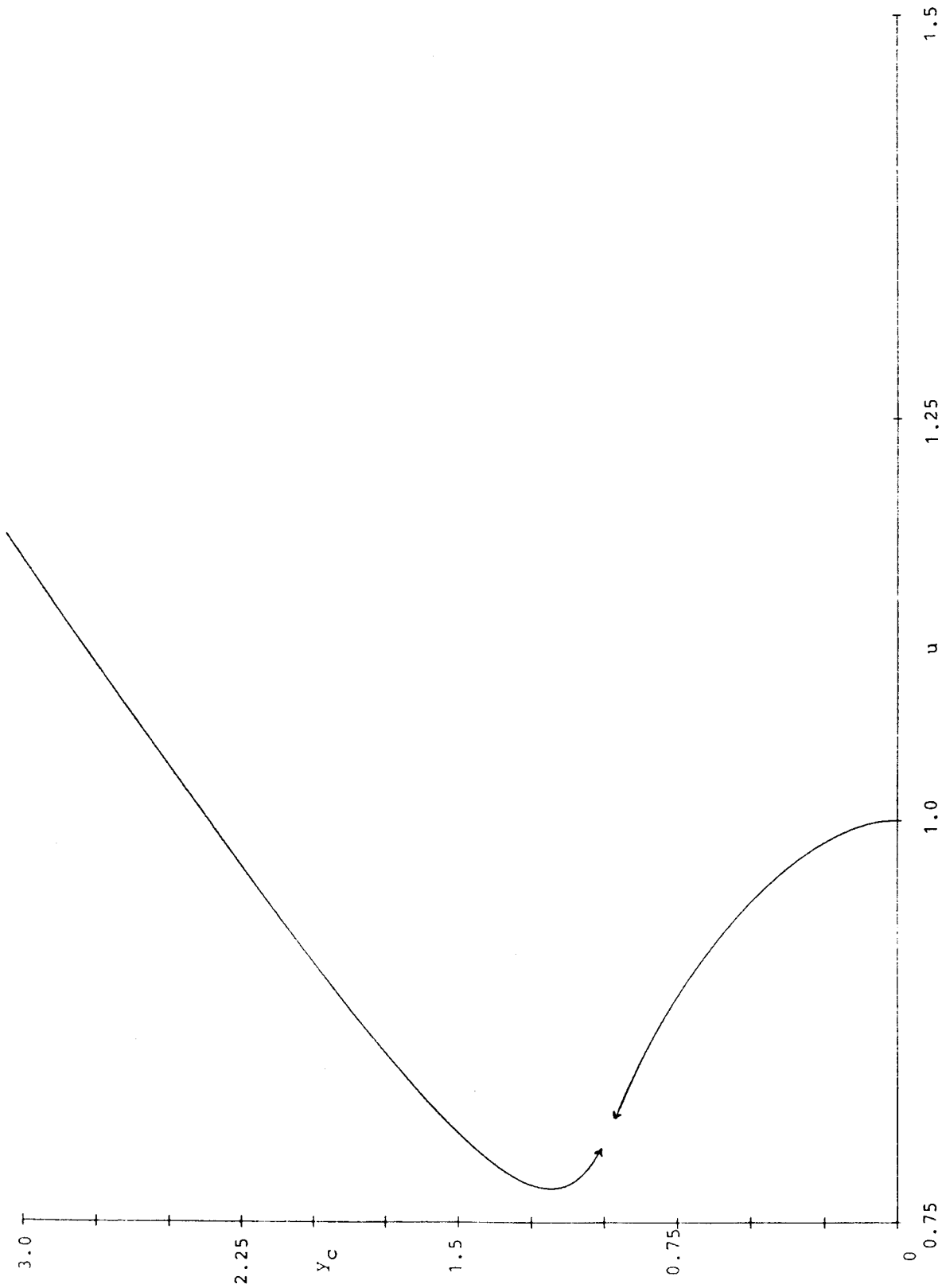


Figura 4.4.a) Evolución de la coordenada de corte frente al parámetro  $u$ .

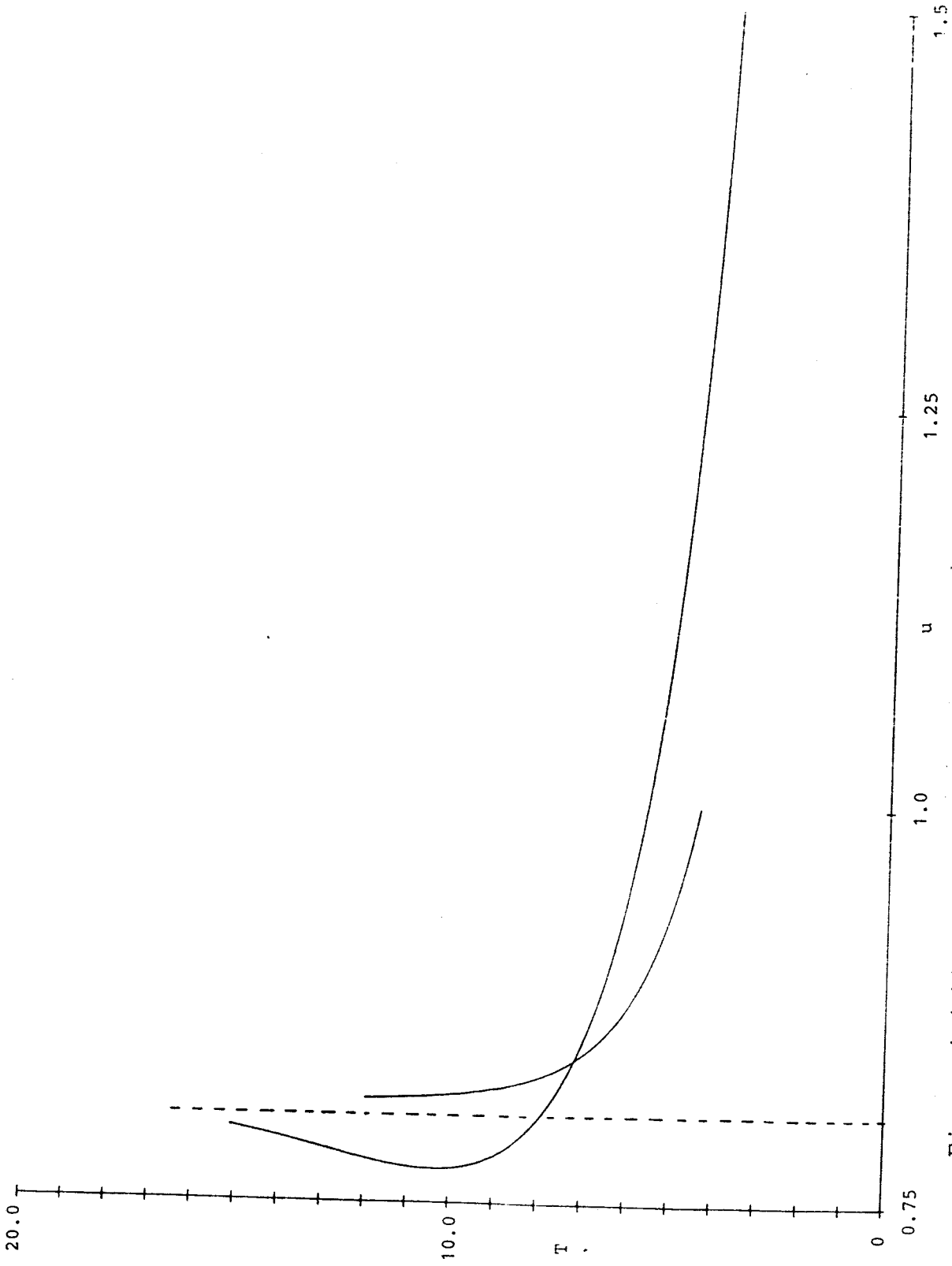


Figura 4.4.b) Evolución del periodo de la órbita frente al parámetro  $u$ .

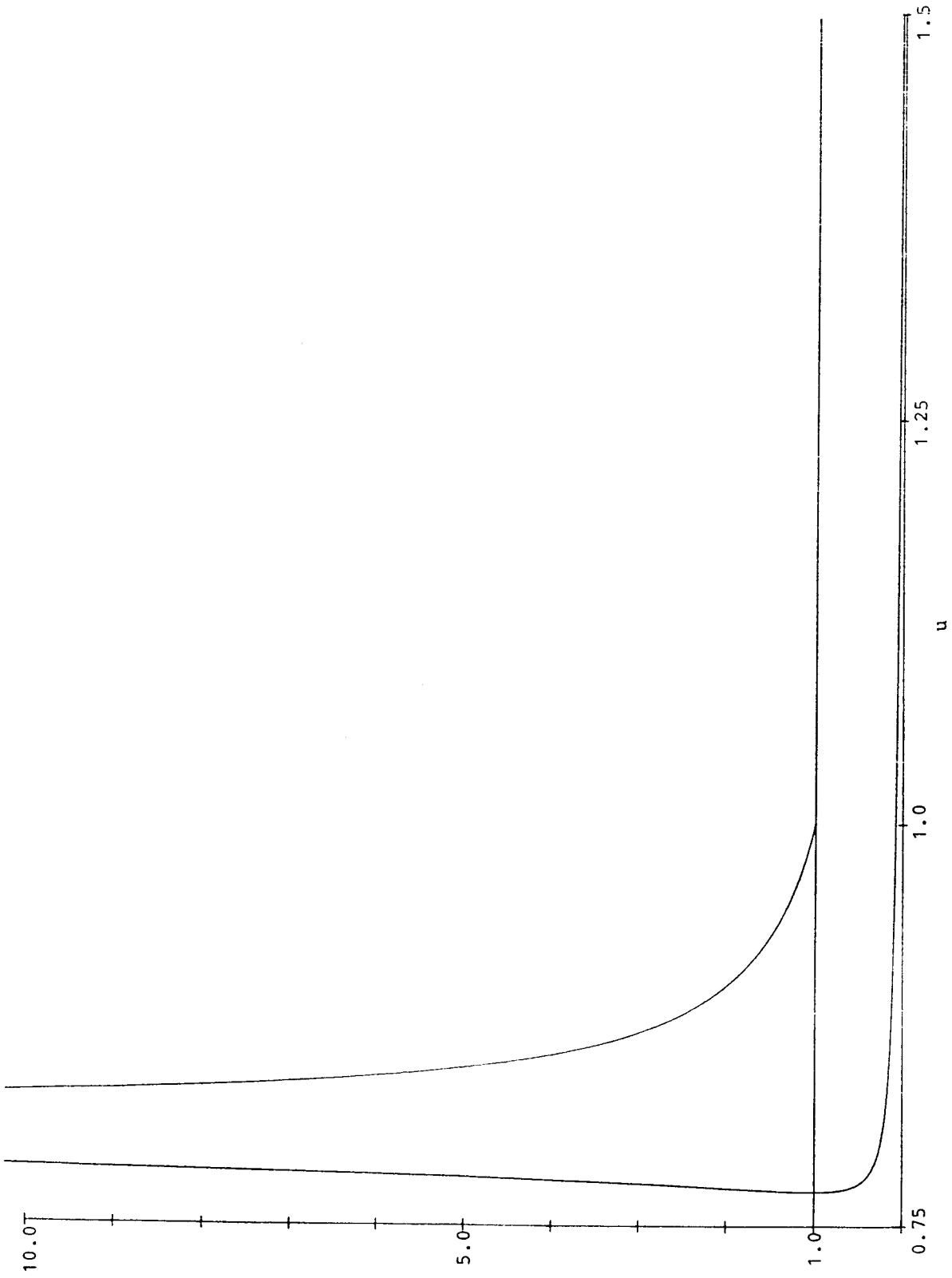


Figura 4.4.c) Evolución del multiplicador característico.

del parámetro inferiores al de la bifurcación silla-nodo.

La aparición de una órbita homoclina conlleva a que la aplicación de Poincaré no esté definida en el punto de trabajo y origina lógicamente inestabilidades en la convergencia del algoritmo. De todas formas el crecimiento del periodo permite detectar estos fenómenos.

Es importante señalar como el algoritmo sobrepasa sin dificultad la bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas que, en el diagrama representado en ejes  $u$ ,  $y_c$ , tiene una analogía clara con el diagrama de una bifurcación silla-nodo de equilibrios (punto límite).

#### 4.3.3. El tratamiento de bifurcaciones de duplicación de periodo.

Cuando uno de los multiplicadores de una órbita periódica cruza la frontera del círculo unidad por el punto  $-1$ , la órbita original pierde su estabilidad dando lugar a una órbita estable de periodo aproximadamente el doble del periodo original. El fenómeno es conocido con el nombre de bifurcación flip o bifurcación de duplicación del periodo.

Se ha observado cómo en algunos sistemas que llegan a presentar soluciones aperiódicas, puede describirse el paso a este tipo de soluciones, también llamadas atractores extraños, a partir de una solución periódica mediante una sucesión de bifurcaciones de duplicación de periodo. Si la órbita estable de periodo



doble sufre una nueva bifurcación flip, estaremos en presencia de una órbita estable de periodo cuádruple, que puede a su vez ser objeto de una bifurcación del mismo tipo. La repetición del fenómeno conduce a órbitas estables de periodo cada vez mayor, coexistiendo con un buen número de soluciones periódicas inestables cuyos periodos son divisores de la anterior.

Al igual que sucede en sistemas dinámicos discretos, como el ya muy estudiado (ver, por ejemplo, May [1976])

$$x_{n+1} = u x_n (1 - x_n)$$

los valores del parámetro  $u$  para los que se presentan las sucesivas bifurcaciones de duplicación de periodo pueden presentar un punto de acumulación. Es posible entonces que exista un rango de valores del parámetro para el que el sistema exhiba una solución aperiódica estable, que presenta además gran sensibilidad a las condiciones iniciales. Feigenbaum [1980] ha propuesto una caracterización universal de este tipo de comportamiento, determinando unas constantes típicas del mismo.

Desde nuestro punto de vista, estaríamos interesados en detectar las bifurcaciones de duplicación de período, así como seguir la evolución de la nueva órbita surgida de dicha bifurcación. Dado que conocemos la derivada de la aplicación de Poincaré, podemos, mediante un algoritmo apropiado (v.g. el algoritmo HQR de Wilkinson & Reinch [1971]), calcular los multiplicadores característicos de la órbita en cada momento y realizar un test para detectar la bifurcación mencionada, u otras que se pudieran presentar.

Para seguir la evolución de la nueva órbita bastaría iterar la aplicación de Poincaré y construir un nuevo problema que fuera equivalente a la determinación de los puntos fijos de la nueva aplicación. El diseño del algoritmo permite así fácilmente el proseguir las nuevas órbitas de periodo doble (o múltiple en general) y además, dispondremos en cada momento de sus multiplicadores característicos, lo que nos previene ante posibles nuevas bifurcaciones. Veámoslo con un ejemplo.

Coullet et al. [1979] proponen el estudio de una serie de modelos relacionados con el atractor de Lorenz, que presentan una cascada de bifurcaciones flip como la comentada más arriba. Tomaremos el modelo más simple, y lo analizaremos con la ayuda del algoritmo de continuación de órbitas periódicas. Sea pues el sistema:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = z$$

$$\dot{z} = u x(1-x) - y - bz$$

donde  $u$  es el parámetro principal y  $b$  un parámetro auxiliar, que supondremos ambos mayores que cero. Un sencillo análisis muestra que los equilibrios se reducen al origen y al punto  $(1,0,0)$ .

La matriz de linealización de este último equilibrio es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -u & -1 & -b \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico es precisamente

$$\lambda^3 + b \lambda^2 + \lambda + u = 0$$

Puede ahora comprobarse que, para  $u = b$ , se cumplen todas las condiciones para asegurar la existencia de una bifurcación de Hopf. En efecto, para dicho valor, si hacemos  $\lambda = wi$  ( $i$  es aquí la unidad imaginaria), se observa que la ecuación

$$-w^3 i - bw^2 + wi + b = 0$$

conduce al sistema

$$w - w^3 = 0$$

$$b - bw^2 = 0$$

que presenta las soluciones  $w = 1$  y  $w = -1$ . Por tanto, para  $u = b$ , un par de autovalores complejos conjugados se sitúa sobre el eje imaginario. Además si usamos para el autovalor con parte imaginaria positiva la notación:

$$\alpha(u) + i w(u)$$

y derivamos respecto de  $u$  el polinomio característico igualado a cero, que define implícitamente a los autovalores, se obtiene:

$$(3\lambda + 2b\lambda + 1) \frac{d\lambda}{du} + 1 = 0$$

ecuación que, particularizada para  $\alpha = 0$ ,  $w = 1$ , conduce a:

$$\frac{d\alpha}{du} + i \frac{dw}{du} = \frac{1 + bi}{2(1 + b^2)}$$

Así pues, podemos asegurar que estamos frente a una bifurcación de Hopf, ya que

$$\frac{d\alpha}{du}|_{u=b} = \frac{1}{2(1 + b^2)} \neq 0$$

Puede comprobarse que la bifurcación es supercrítica, con lo que podemos iniciar el proceso de continuación para valores de  $u$  algo superiores a  $b$ . Utilizando como plano de corte el  $y = 0$ , si representamos la coordenada  $z$  del punto de corte frente al parámetro  $u$ , se obtiene la figura 4.5. Dicha figura se corresponde con el caso en que  $b = 0.1$ , parcialmente estudiado por Couillet et al [1979].

Se observa como, para valores crecientes de  $u$ , la amplitud de la órbita, claramente creciente al principio, aumenta después más lentamente. Posteriormente, para  $u = u_1$ , que es un valor próximo a 0.4720, la órbita pierde su estabilidad, debido a que un multiplicador característico sale del círculo unidad del plano complejo por el punto  $-1$ . Esto se corresponde con una bifurcación de duplicación de período de forma que para  $u > u_1$  debe aparecer un órbita estable de período doble (ver figura 4.6.a).

En efecto, si en el algoritmo de continuación usamos  $P^2$  en lugar de  $P$  (donde  $P^2$  representa la iterada segunda de  $P$  o equivalentemente, consideramos que el punto de retorno al hiperplano es el correspondiente a una segunda vuelta de la trayectoria), podemos seguir la nueva órbita, como se ve en la figura 4.5. Los multiplicadores de la órbita de período doble a partir de su nacimiento sufren una evolución muy similar a la experimentada para

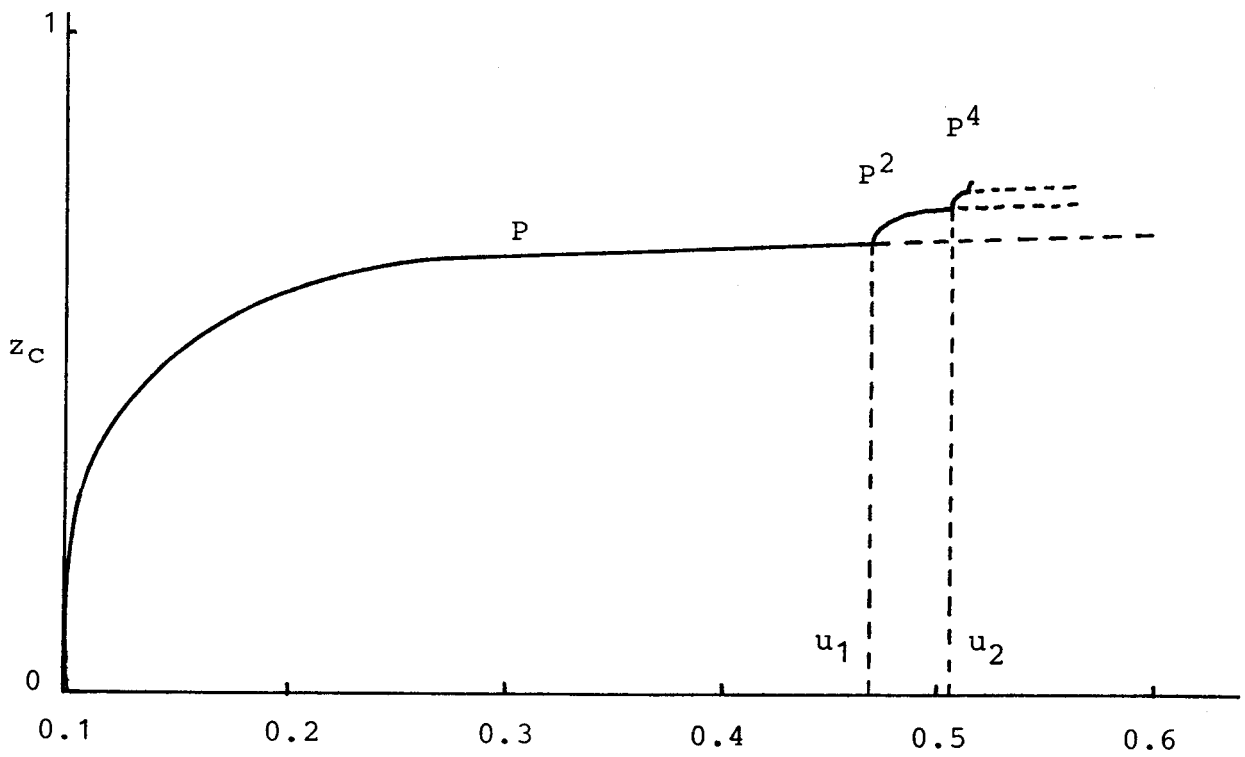


Figura 4.5. Modelo de Couillet et al. [1979].  
Evolución de la coordenada  $z$  de corte con el parámetro  
(  $b = 0.1$  )

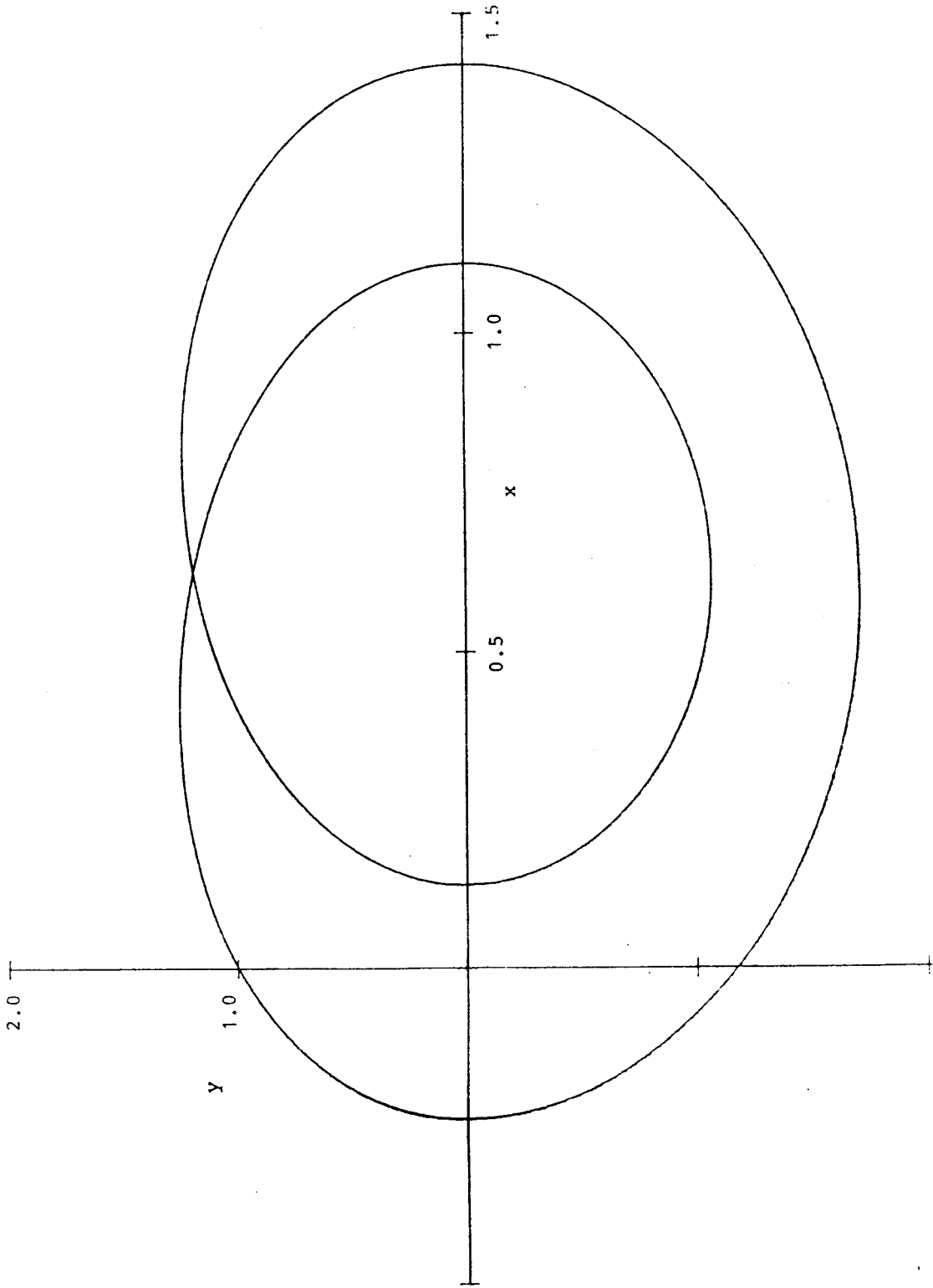


Figura 4.6.a. Modelo de Couillet et al. [1979] Orbits estable de periodo doble ( $b = 0.1$ ,  $u = 0.5$ )

los multiplicadores de la órbita original tal como se representa en la figura 4.7. Así, los dos multiplicadores que son inicialmente reales y positivos, uno próximo a cero y el otro próximo a uno dentro del círculo unidad, se van desplazando sobre el eje real hasta coincidir en un valor común, desplegándose a continuación en un par complejo conjugado. Este par complejo conjugado se mueve hacia la izquierda hasta cruzar por el eje imaginario y volver a confundirse en el semieje real negativo. Acto seguido, si seguimos moviendo el parámetro  $u$ , se separan sobre el eje real hasta que, finalmente, uno de ellos pasa por  $-1$ , produciéndose la bifurcación de duplicación de período.

Se tiene por tanto, para  $u = u_2$ , que es un valor próximo a 0.504, una nueva bifurcación flip, que conduce a la pérdida de estabilidad de la órbita de período doble y al nacimiento de una órbita estable de período cuádruple (ver figura 4.6.b).

El proceso se repite una vez más. Para  $u = 0.509$ , se detecta una órbita estable de período aproximadamente ocho veces el de la órbita original (ver figura 4.6.c). Se observa, además, como el rango de variación del parámetro, para que aparezca una nueva bifurcación, disminuye progresivamente. Couillet et al. [1979] conjeturan que los sucesivos valores de bifurcación del parámetro forman una sucesión convergente, y aseguran que, para valores superiores al límite, existen órbitas aperiódicas.

De hecho, para valores del parámetro algo superiores, se obtienen órbitas que, después de rodear un número de veces al equilibrio  $(1,0,0)$ , no llegan a presentar -al menos aparentemente- un

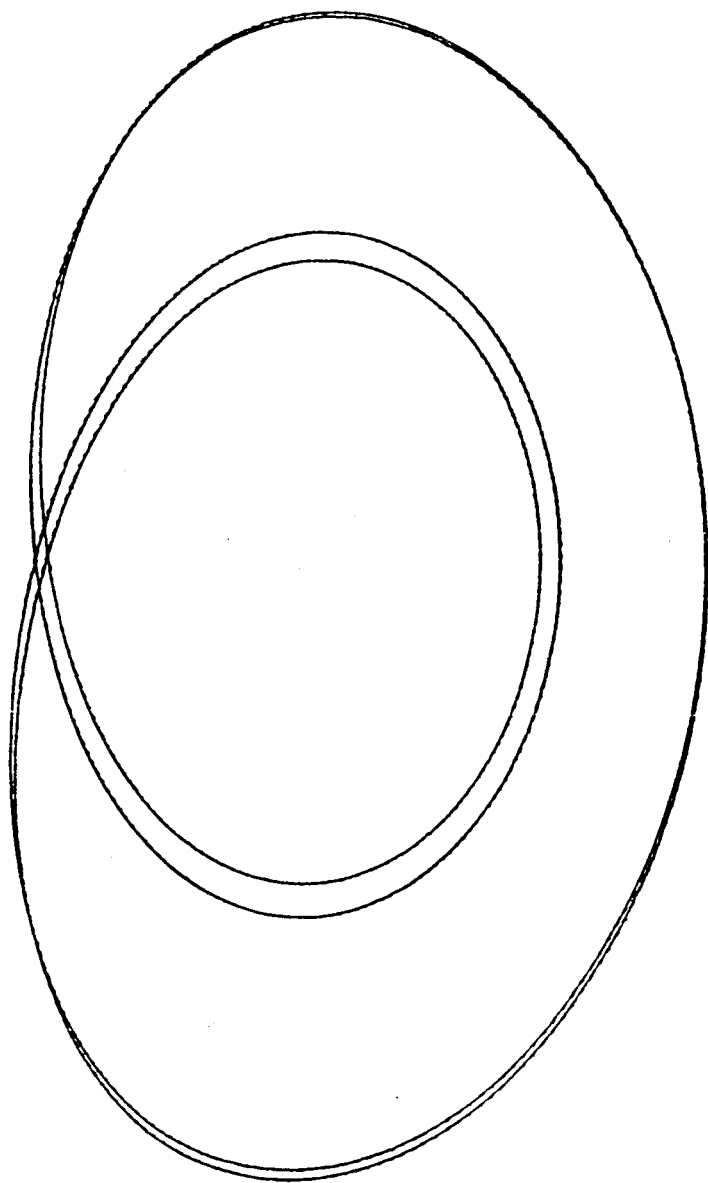


Figura 4.6. b. Orbita estable de periodo cuádruple ( $b = 0.1$ ,  $u = 0.505$ )



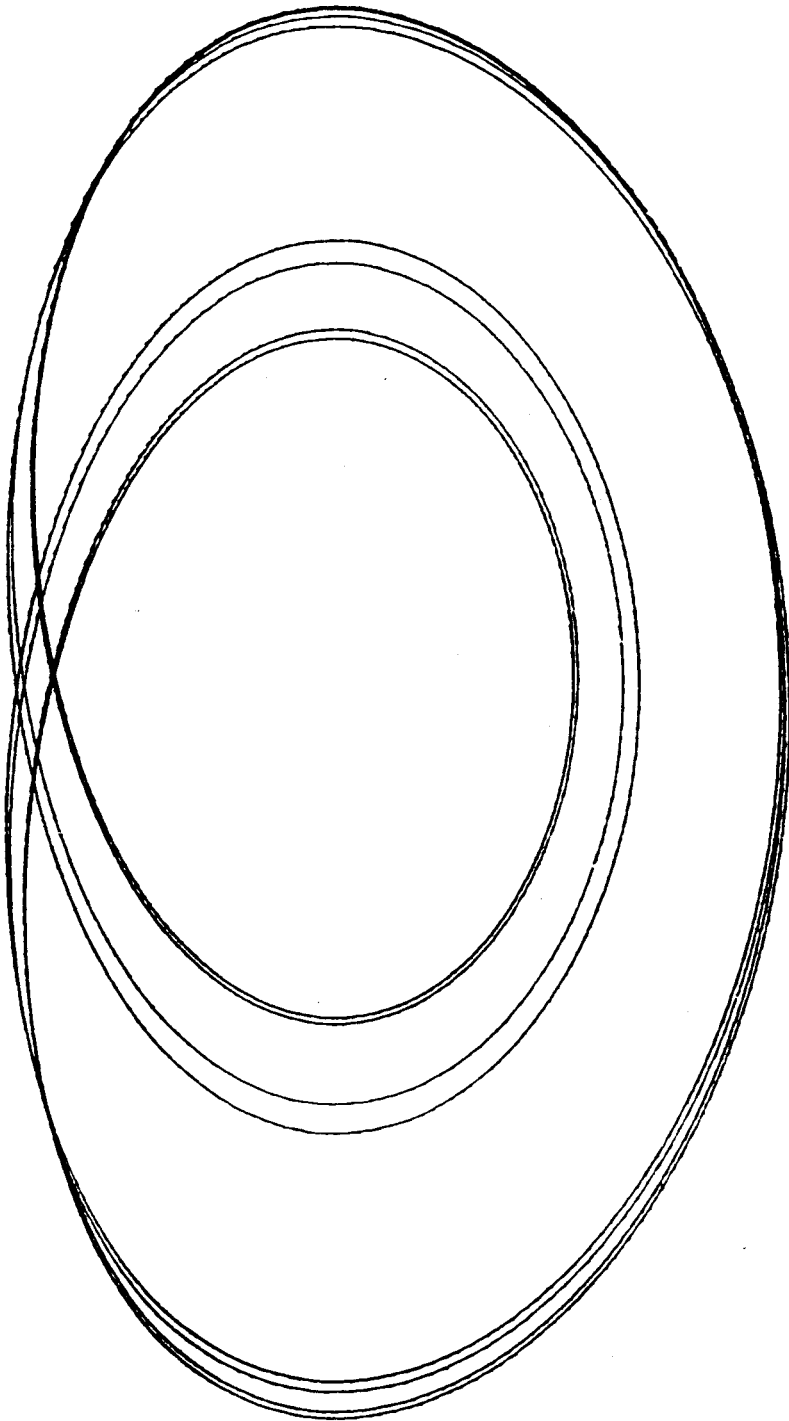


Figura 4.6.c. Orbita estable de periodo 8 veces (aprox.) el original -  
( $b = 0.1$  ,  $u = 0.5099$ )

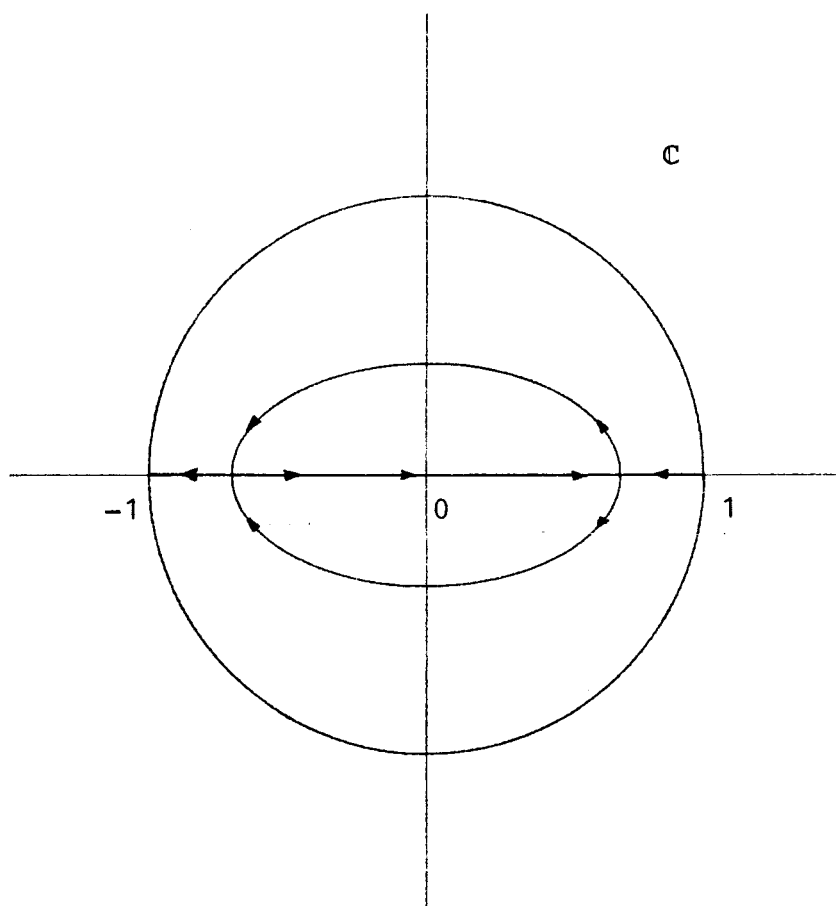


Figura 4.7. Evolución típica de los multiplicadores característicos, desde el nacimiento de una órbita estable hasta una bifurcación de duplicación de periodo.

comportamiento periódico. En la figura 4.8 se presenta una simulación para  $b = 0.5$ ,  $u = 1$ , que se asemeja a uno de los atractores aperiódicos descritos por Rossler [1980]. Hacemos notar que para el valor  $b = 0.1$ , que es el que hemos venido utilizando, no hemos conseguido reproducir tal comportamiento -en contra de las afirmaciones de Couillet et al. [1979]- debido a que, después de un cierto número de vueltas, la órbita acaba escapando al infinito. Podemos, a pesar de todo, estar en presencia de una órbita aperiódica si bien, o no resulta estable, o tiene una región de atracción muy pequeña.

La situación anterior ha sido estudiada más ampliamente por Glendinning & Sparrow [1984], relacionándola con la aparición de órbitas homoclinas de un cierto tipo. En la referencia citada, se estudia el comportamiento de las soluciones de un modelo típico de dimensión tres con un parámetro  $\mu$ , cuando presenta un equilibrio del tipo silla-foco. El equilibrio en cuestión posee una variedad inestable que para un valor del parámetro (digamos  $\mu = 0$ ) se confunde con la variedad estable del propio equilibrio, configurando así una órbita homoclina. En la figura 4.9 se describe el comportamiento de la variedad inestable para valores inferiores, iguales o superiores al correspondiente a la aparición de la órbita homoclina.

La aparición de órbitas homoclinas es una bifurcación global, que puede ser responsable de complicados fenómenos. En el trabajo ya citado de Glendinning & Sparrow [1984], se describe cómo para valores del parámetro próximos al crítico, pueden aparecer una infinidad de órbitas periódicas y se pone de relieve la

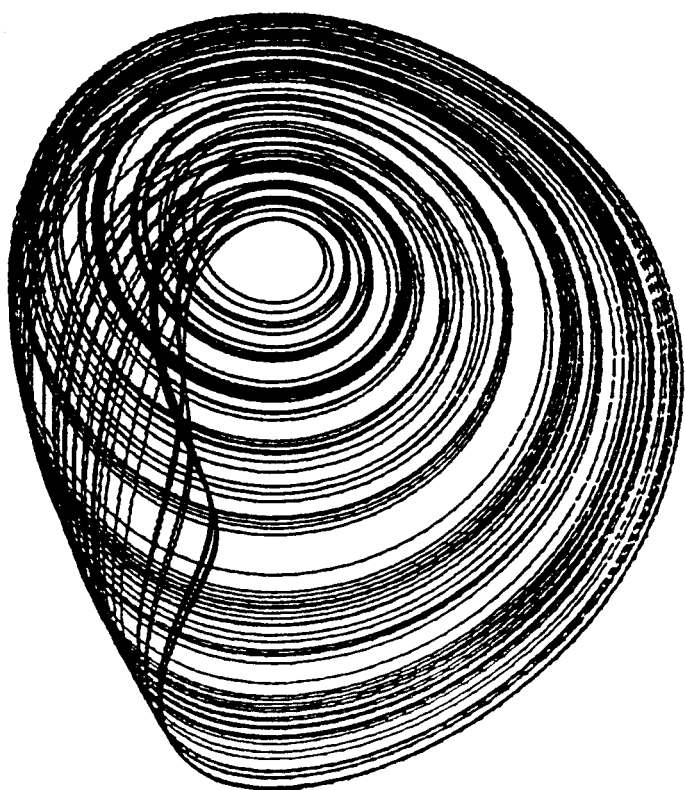


Figura 4.8. Modelo de Couillet et al. | 1979 |  
Orbita obtenida para  $b = 0.5$  ,  $u = 1.0$

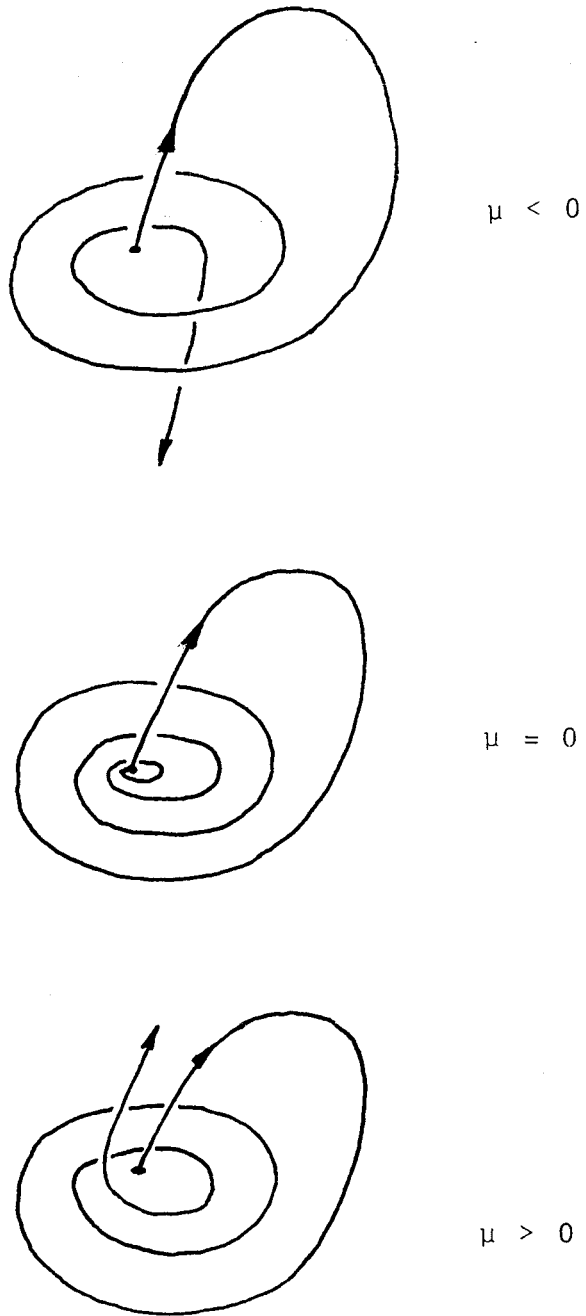


Figura 4.9. Comportamiento de la variedad inestable del equilibrio silla-foco.

necesidad de contar con algoritmos que permitan seguir la evolución de dichas soluciones, como medio para profundizar en la comprensión de dichos fenómenos.

En el análisis citado, se comprueba como, para el equilibrio que forma parte de la órbita homoclina, juega un papel fundamental la relación entre la parte real del par de autovalores complejos conjugados y el otro autovalor, que es real. Esta relación, que llamaremos  $\delta$ , determina el carácter repulsivo o atractivo de la órbita homoclina. Concretando lo anterior en nuestro caso, tenemos que al origen, que en el rango estudiado es un equilibrio del tipo silla-foco, le corresponde como polinomio característico de la matriz de linealización, el siguiente:

$$\lambda^3 + b \lambda^2 + \lambda - u = 0$$

de forma que para  $u > 0$ ,  $b > 0$  el origen es inestable con autovalores:

$$\lambda_1 > 0$$

$$\lambda_2 \pm iw \text{ con } \lambda_2 < 0$$

Tenemos, pues, que

$$\delta = - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

y es fácil deducir que

$$\delta = 1 \Leftrightarrow u = b + 2b^3$$

Con lo que en el plano de parámetros  $u, b$  se obtienen las dos regiones de la figura 4.10. Se comprueba además que hemos trabajado

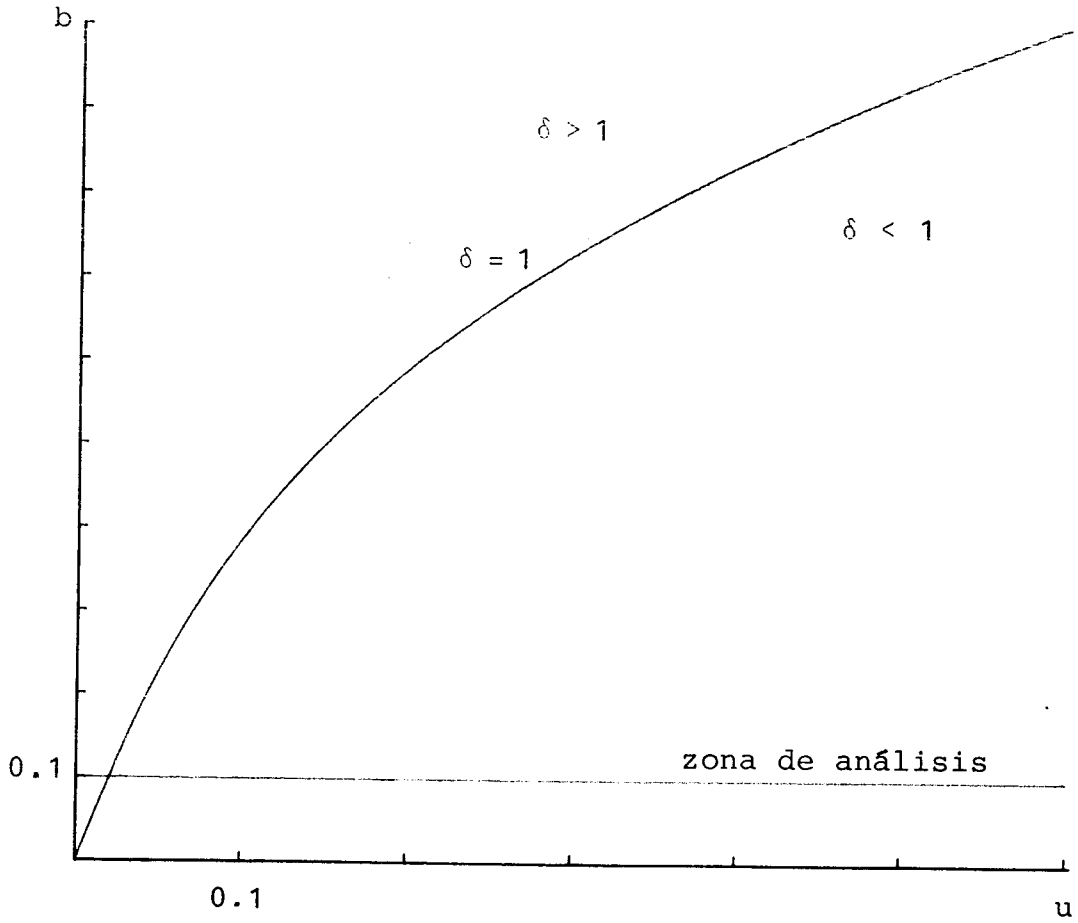


Figura 4.10. Regiones en el plano de parámetros  $u, b$ . La zona del análisis corresponde a  $\delta < 1$  (órbita homoclí*na* repulsiva)

siempre en la zona correspondiente a

$$\delta < 1$$

(órbita homoclina repulsiva) para la cual, Glendinning & Sparrow [1984] obtienen la figura 4.11, que representa la evolución del período de la órbita principal en función del parámetro  $\mu$ . En dicha figura se supone, para  $\mu = 0$ , la existencia de una órbita homoclina. Notemos que en cada pliegue de la figura anterior se produce una bifurcación silla-nodo de la órbita principal y que, para los tramos intermedios a dichos pliegues, puede aparecer un número par de bifurcaciones de duplicación de periodo.

Guiados por dicha figura, ya que estamos en condiciones análogas, proseguiremos nuestro análisis de la órbita principal. Y en efecto, se obtiene la figura 4.12, en la que detectamos los dos primeros pliegues que se corresponden con la figura anterior. Para un valor de  $u$  entre 1.1 y 1.8, estaremos en la situación correspondiente a  $\mu = 0$  en la figura 4.11. Hacemos notar que no pudo extenderse la continuación para valores superiores del periodo, debido al carácter (ya comentado) del sistema en estudio, que presenta órbitas que escapan al infinito.

En la misma figura 4.12, hemos representado otra curva que se corresponde con la evolución del período de la órbita de período doble (utilizando, para que la representación sea comparable, la mitad de su período). Se observa un comportamiento similar a la órbita principal, lo que conjetura que para un valor de  $u$  próximo a 1.1 debe aparecer otra órbita homoclina, que podríamos llamar doble, coexistiendo con una infinidad de soluciones



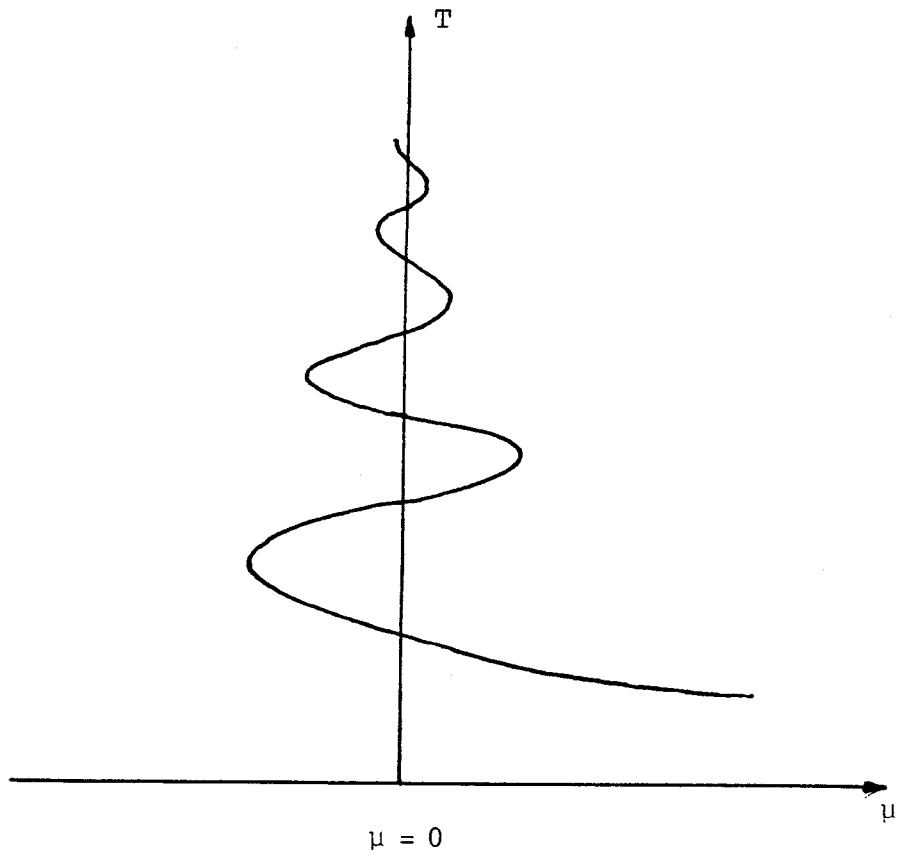


Figura 4.11. Evolución del periodo de la órbita principal en las proximidades de la la órbita homoclina (tomado de Glendinning y Sparrow [1984] )

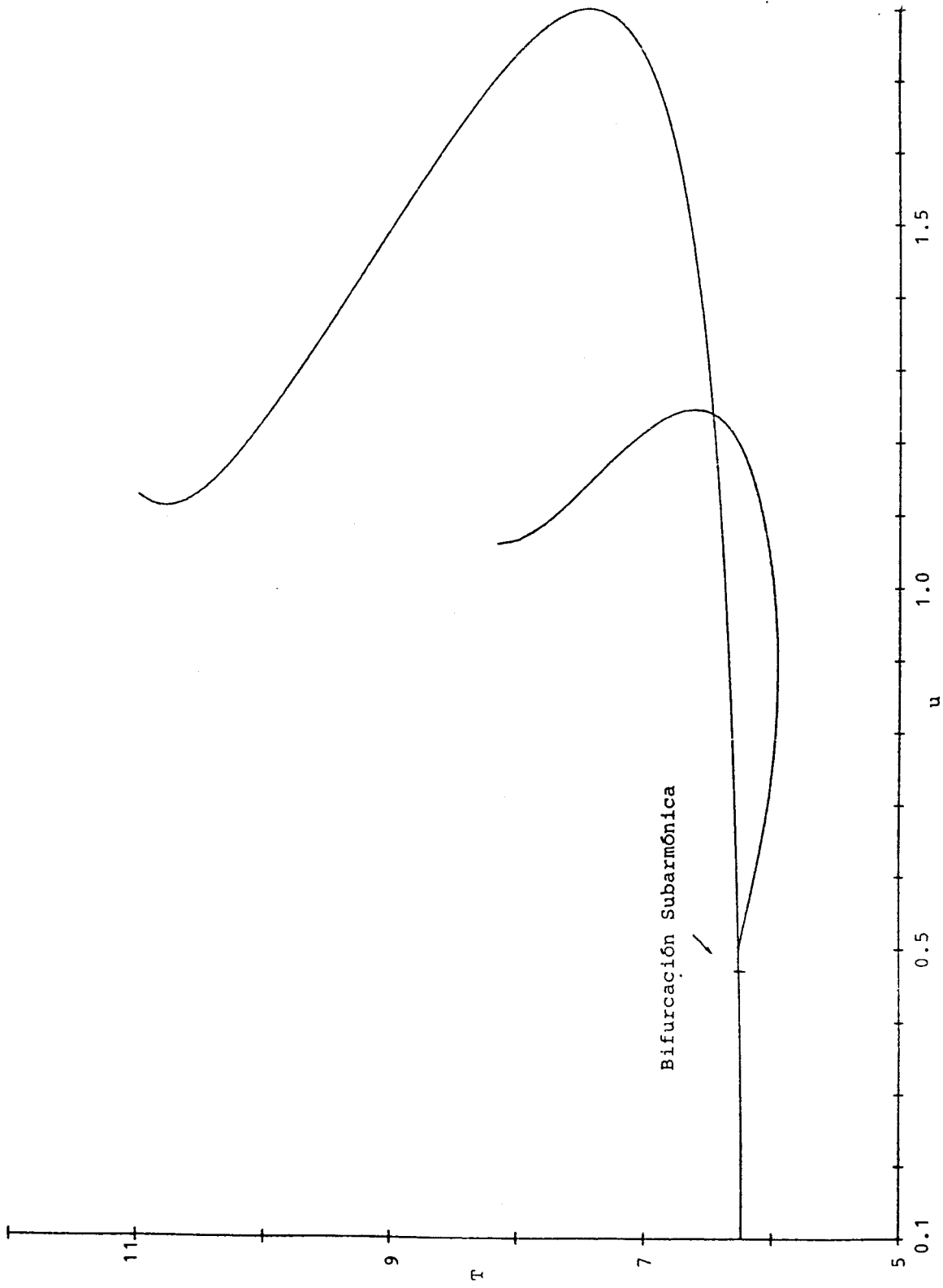


Figura 4.12. Evolución del periodo de la órbita principal y de la órbita que bifurca para  $u = u_1$

periódicas con dos lazos.

Este modelo necesita un estudio más exhaustivo ya que, a pesar de su sencillez, presenta gran riqueza de comportamientos en sus soluciones, como ha quedado patente. Representa además una muestra de los problemas aún abiertos para el análisis cualitativo, como es el caracterizar correctamente la aparición de soluciones aperiódicas.

No queremos terminar sin dejar constancia de un fenómeno presente en el sistema anterior y que no viene predicho por el estudio, repetidamente citado, de Glendinning & Sparrow [1984] (ver también Gaspard et al. [1984]). Guiados por el trabajo de Li y Yorke [1975] y usando el algoritmo de continuación de órbitas periódicas descrito en este capítulo, investigamos si el sistema presenta soluciones periódicas de período aproximadamente el triple de la órbita principal. Como se refleja en la referencia anterior, la presencia de estas soluciones para sistemas discretos garantiza la aparición de soluciones aperiódicas.

Usando pues la iterada tercera de la aplicación de Poincaré ( $P^3$ ) y partiendo de un punto escogido arbitrariamente, el algoritmo de continuación mostró rápidamente convergencia y en seguida fue posible seguir la evolución de dicha órbita. El resultado se muestra en la figura 4.13 donde, representando un tercio del período de dicha órbita, se dibuja también la evolución de la órbita principal.

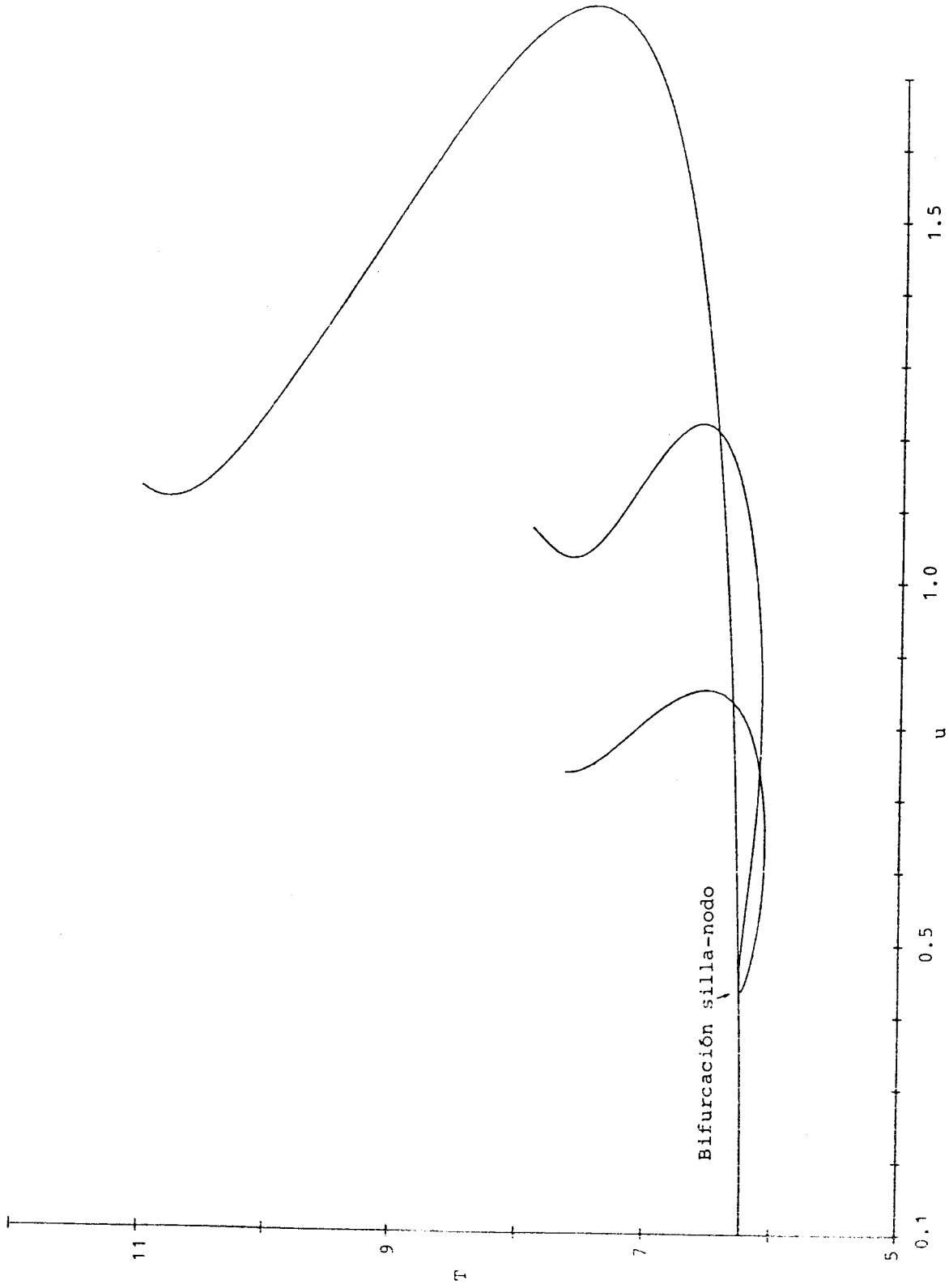


Figura 4.13. Para un valor inferior a  $u_1$ , se produce una bifurcación silla-nodo de órbitas de periodo triple. Se representa el tercio de su periodo junto con el de la órbita principal.

Se observa como, para un valor del parámetro inferior al de la primera bifurcación de duplicación de periodo, se produce una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas, de periodo aproximadamente el triple del de la órbita principal, que da lugar a una órbita estable y a otra inestable. La órbita estable sufre ahora una bifurcación de duplicación de periodo, lo que asegura que aparecen órbitas de periodo séxtuplo (aproximadamente) de la original. No hemos seguido estas órbitas periódicas, pero conjeturamos que el fenómeno será totalmente similar al comentado más arriba.

Además, la continuación de las dos ramas de soluciones periódicas triples, hasta donde fue posible parece predecir que existen dos valores del parámetro para los que existen órbitas homoclinas de tres lazos coexistiendo con una infinidad de soluciones periódicas de tres lazos.

En la figura 4.14 se presenta la evolución de la norma del punto de corte de la órbita anterior con el hiperplano utilizado como sección transversal y se muestra una zona apreciable donde la órbita es estable. En dicha zona, se obtiene fácilmente por simulación una representación de dicha órbita que se muestra en la figura 4.15. El hecho de que coexistan dos órbitas estables, una de periodo aproximadamente el triple al de la órbita principal, es un fenómeno interesante que -creemos- no ha sido aún reflejado en la literatura.

El fenómeno reseñado da idea de las posibilidades que abre el algoritmo de continuación, máxime si, como es habitual en los

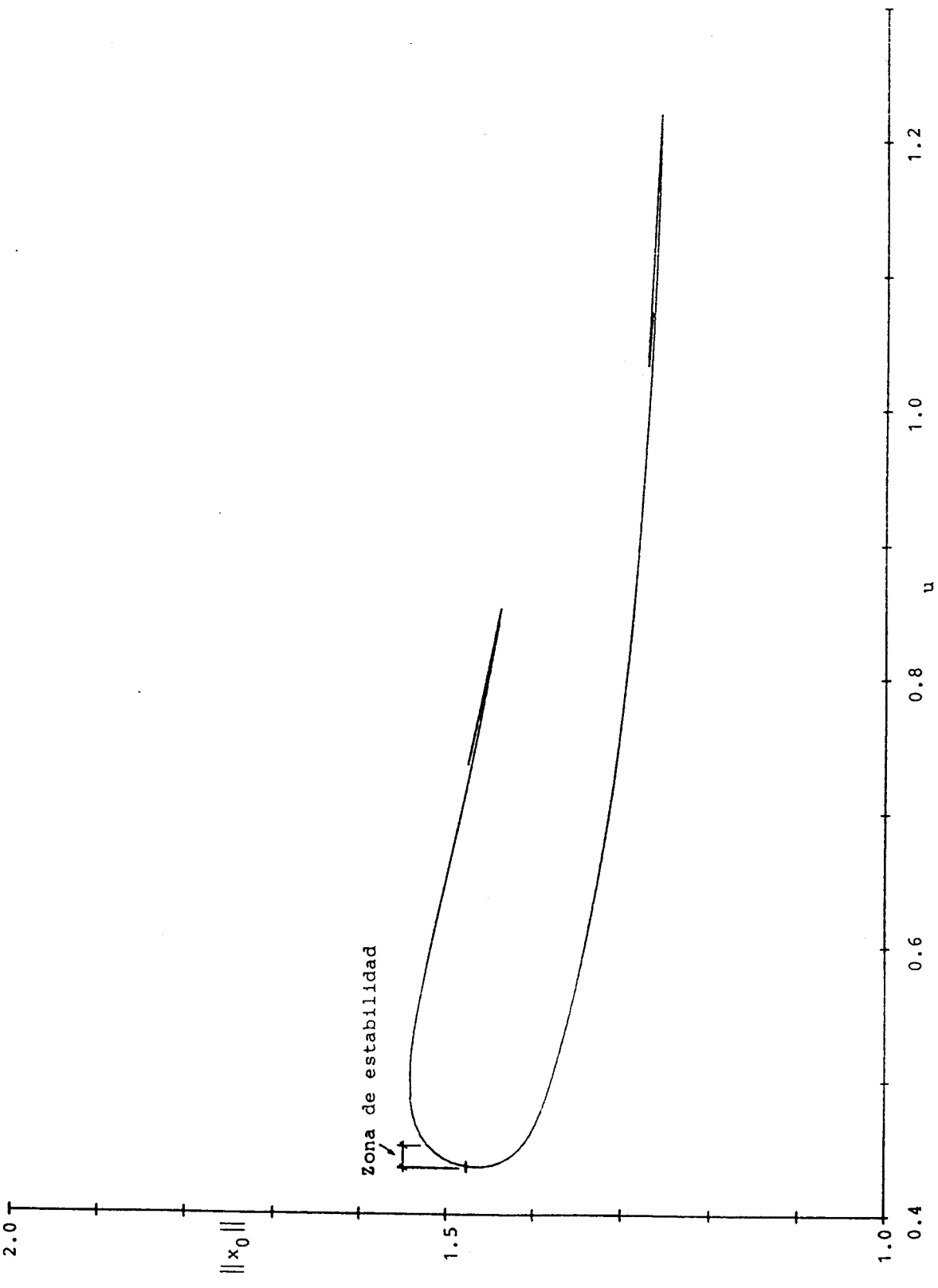


Figura 4.14. Evolución de la norma del punto fijo de  $P^3$  frente al parámetro.

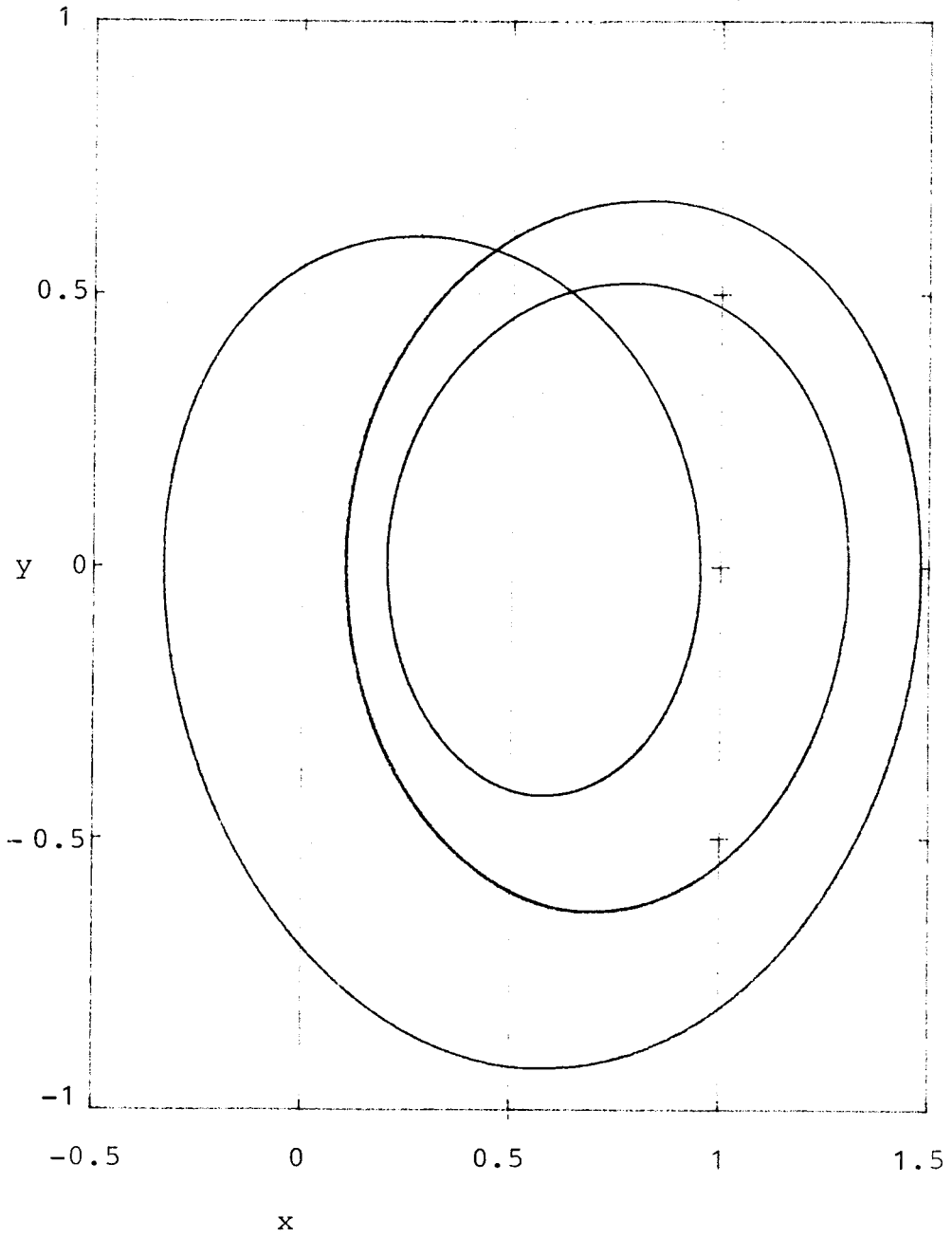


Figura 4.15 Representación en ejes  $x, y$  de una       
órbita estable de periodo triple ( $u = 0.4364$ ,  $b = 0.1$ )

sistemas físicos, no se da la circunstancia -que ha imposibilitado el avanzar más en el análisis anterior- de que el sistema presente soluciones no acotadas. Otro buen candidato para posteriores investigaciones es el circuito electrónico ya estudiado por Freire et al. [1984], que aún presenta facetas que pueden ser objeto de profundización.



## CAPITULO V: CONCLUSIONES

Procederemos, por último, a destacar los principales resultados alcanzados en esta memoria, respetando en lo posible el orden de los temas tratados.

Se ha realizado primeramente una labor de revisión de la bibliografía relativa al método de continuación, mostrando sus características principales así como la diversidad de aplicaciones conocidas hasta el momento, poniendo énfasis en como ampliar su campo de utilización. Se ha detallado los principales elementos a tener en cuenta en el desarrollo informático del método y se ha puesto a punto un conjunto de rutinas que lo llevan a cabo. Ha quedado patente cómo de forma natural es una herramienta de gran utilidad en el contexto del análisis cualitativo, y se han señalado las dificultades prácticas que pueden encontrarse a la hora de su uso, precisamente en las proximidades de puntos de bifurcación. Hemos destacado las características del empleo de la parametrización mediante la longitud de arco, resaltando las ventajas que ofrece.

Para el análisis de las bifurcaciones de equilibrios, se ha dado cuenta de como proceder en presencia de uno o dos parámetros. Hemos justificado con cierto detalle un algoritmo de cálculo de las tangentes en los puntos de ramificación múltiple, que es de gran ayuda para iniciar la continuación de las posibles ramas secundarias. Dicho algoritmo es de carácter analítico y su uso requiere la obtención de expresiones difícilmente manejables mediante técnicas numéricas, por lo que se cuenta con un ejemplo

más que sugiere la importancia de combinar adecuadamente en el futuro las modernas técnicas de manipulación algebraica de símbolos con las técnicas tradicionales.

Los diagramas de equilibrios y de sus bifurcaciones son —como se ha reflejado en el trabajo— unas piezas clave en el análisis de sistemas dinámicos. En el caso de contar con dos parámetros, ha sido manifiesta la utilidad del diagrama de bifurcaciones, consiguiendo delimitar en el plano de parámetros las diversas regiones dentro de las cuales el comportamiento cualitativo del sistema es similar. Para tal fin, se han extendido en lo posible, mediante la incorporación de condiciones auxiliares de bifurcación, la utilización del algoritmo de continuación.

Entre las técnicas de análisis local, se ha dado especial relieve al cálculo de la variedad de centros, con lo que se puede obtener un sistema reducido que captura toda la información necesaria para caracterizar las posibles bifurcaciones, la estructura de las diversas soluciones y su estabilidad. Se han justificado las consecuencias que en ello comporta la equivarianza de los sistemas frente a grupos de simetrías, de forma que en muchos casos es posible tipificar las bifurcaciones del sistema original sin necesidad de llevar a cabo los cálculos necesarios para su reducción. Por lo que alcanzamos a conocer, estos resultados se encuentran en conexión con las investigaciones de mayor actualidad sobre el tema.

Se han analizado en detalle dos modelos de dinámica de sistemas de especial importancia, al reproducir el comportamiento de

las estructuras disipativas de Prigogine y explicar, por tanto, como pueden conseguirse estructuras espaciales ordenadas partiendo de una situación de homogeneidad. En el primero de ellos, se ha incorporado al análisis el uso de técnicas de cálculo simbólico, cuya disponibilidad es muy reciente. En ambos casos, los diagramas de bifurcaciones obtenidos, mediante el empleo de las técnicas anteriores, son de gran riqueza, al exhibir diversos puntos de codimensión superior a la unidad. El análisis efectuado pone de manifiesto la íntima conexión entre las posibles bifurcaciones de los sistemas con simetría y la estructura de subgrupos del grupo de simetría presente; la caracterización precisa de dicha conexión constituye una línea de trabajo para investigaciones futuras.

El análisis de sistemas eléctricos de potencia, en lo relativo a la determinación de las acciones de control a ejercer sobre la red después de la producción de fallos o modificaciones de la misma, presenta aún serias dificultades. La incorporación, en los últimos años, de las técnicas de análisis cualitativo a este campo de la ingeniería puede ser de gran ayuda en la superación de estas dificultades, al proporcionar bases firmes en las que apoyar la toma de decisiones, fundamentada a veces en criterios heurísticos. Aunque todavía se está lejos de poder ofrecer resultados de utilidad práctica al ingeniero especialista, se estudia un modelo de una red elemental, que da idea de la complejidad del problema y puede acortar distancias entre la teoría cualitativa y su aplicación al mantenimiento de redes eléctricas.

La localización de soluciones periódicas, su correcta caracterización y la evolución de dichas soluciones frente a modificaciones de los parámetros, son otros de los problemas abordados en este trabajo. Se trata de una tarea de mayor dificultad que el correspondiente análisis para equilibrios y, por eso mismo, la ausencia de herramientas disponibles para tal fin es de índole más grave. Hemos diseñado un algoritmo de continuación de órbitas periódicas que puede paliar de forma notable la necesidad de útiles de análisis. El algoritmo permite caracterizar la estabilidad de la órbita al disponer en todo momento de sus multiplicadores característicos, con lo que se consigue además la detección de las posibles bifurcaciones. El recurso a la aplicación de Poincaré permite analizar asimismo, mediante las correspondientes iteradas de dicha aplicación, las posibles soluciones subarmónicas y sus bifurcaciones, con lo que podemos adentrarnos en las proximidades de soluciones aperiódicas o atractores extraños.

El algoritmo anterior ha permitido el análisis de varios modelos. En particular, ha confirmado de manera práctica algunos resultados recientes sobre el comportamiento de los sistemas cerca de soluciones homoclinas correspondientes a equilibrios del tipo silla-foco y, para uno de estos sistemas, ha detectado la presencia de subarmónicos de frecuencia un tercio de la oscilación fundamental. Para un rango apreciable de valores del parámetro, tanto dichos subarmónicos como la órbita principal resultan estables.

Se ha indicado también cómo extender dicho algoritmo para abordar los problemas con dos parámetros, en los que la determi-

nación de las curvas de bifurcación juega un marcado papel. Si, por las lógicas limitaciones de este trabajo, no se ha desarrollado dicha extensión, se cuenta ya con todos los elementos para llevarla a cabo en un futuro inmediato. Las ideas en juego permiten aventurar que, con ciertas modificaciones, es posible también el desarrollo de un algoritmo de continuación de órbitas homoclinas.

Añadimos, para terminar, algunas sugerencias para investigaciones futuras que pueden concluirse de este trabajo. Se han indicado ya qué elementos de los tratados son susceptibles de ulteriores perfeccionamientos, pero queda sin duda el abordar la tarea de ensamblar, de manera precisa, todos ellos, y conseguir la elaboración de un software de análisis cualitativo que facilite la difusión, entre no especialistas, de estas técnicas. Hemos mencionado también cómo, en determinadas tareas, es preciso la conjunción de técnicas numéricas y analíticas y cómo, para ello, puede ser beneficioso el empleo del cálculo simbólico. Por citar un ejemplo más, el estudio de bifurcaciones en presencia de simetría parece otro campo en el que el uso de las técnicas SAM sería prometedor. Aún teniendo en cuenta sus limitaciones, que hacen referencia a la imposibilidad de obtener mediante funciones elementales la solución a determinados problemas, pensamos que tanto el desarrollo futuro de la teoría como el avance en sus aplicaciones pasa por la explotación al máximo de las posibilidades de las técnicas de cálculo simbólico.

## REFERENCIAS

- **Abbott, J.P.** [1978]

An efficient algorithm for the determination of certain bifurcation points.

Journal of Comp. and Applied Math., vol. 4, no.1, pp. 19-27

- **Alexander, J.C.** [1978]

The topological theory of an embedding method.

En Wacker [1978], pp 37-68

- **Alfeld, L. & Graham A.** [1976]

Introduction to Urban Dynamics

Wright-Allen Press, Cambridge, Mass.

- **Allgower, E. & Georg, K.** [1980]

Simplicial and Continuation methods for approximating fixed points and solutions to systems of equations.

SIAM Review, vol 22, no 1, pp 28-85

- **Anderson, P. M. y Fouad, A. A.** [1977]

Power systems control and stability.

Iowa State University Press.

- **Aracil, J.** [1980]

Further results on structural stability of Urban Dynamics models.  
Proc. of 6th Int. Conf. Syst. Dyn., North-Holland.

- **Aracil, J.** [1981]

Structural stability of low-order system dynamics models.  
Int. J. of Systems Sciences, vol 12, no 4, pp 423-441

- **Aracil, J., Freire, E. y Ponce, E.** [1981]

Análisis de bifurcaciones en dinámica de sistemas.  
Actas IV Cedyá, Sevilla pp 87-101

- **Aracil, J., Ponce, E. y Freire, E.** [1985]

Order through fluctuations and system dynamics models.  
Environment and Planning B: Planning and Design, vol 12, pp  
103-112

- **Araposthatis, A., Sastry, S. & Varaiya, P.** [1981]

Analysis of power-flow equation.  
Electrical power & Energy systems, vol 3, pp 115-126

- **Araposthatis, A. & Varaiya, P.** [1983]

Behavior of three-node power networks.  
Electrical power & Energy systems, vol 5, pp 22-30

- Avila, J. H. [1974]

The feasibility of continuation methods for nonlinear equations.  
SIAM J. Numer. Anal., vol 11, no 1.

- Baillieul, J. & Byrnes, C.I. [1982]

Geometric critical point analysis of lossless power systems models.

IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol 29, no. 11, pp 724-737

- Baillieul, J. & Byrnes, C.I. [1983]

The singularity theory of the load flow equations for a 3-node electrical power system.

Systems & Control letters, vol. 2, pp 330-340

- Boggs, P. T. [1971]

The solution of nonlinear systems of equations by A-stable integration techniques.

SIAM J. Numer. Anal., vol 8, no 4, pp 767-785

- Braun, M. [1978]

Differential equations and their applications.

Appl. Math. Sci. 15, Springer, New York.

- Burns, J. R. [1973]

Applications of control theory to system dynamics models of social systems.

Purdue University, Ph. D.



- Carr, J. [1981]

Applications of Center Manifold Theory.

Springer, New York.

- Chao, K. S. & Saeks, R. [1977]

Continuation Method in circuit analysis.

Proceedings of the IEEE, vol 65, no 8, pp 1187-1194

- Couillet, P., Tresser, C. y Arnéodo, A. [1979]

Transition to stochasticity for a class of forced oscillators.

Physics Letters, vol 72A, pp. 268-270

- Crandall, M. y Rabinowitz, P. [1971]

Bifurcation from simple eigenvalues.

J. Funct. Anal., vol 8, pp. 321-340

- Cronin, J. [1964]

Fixed points and topological degree in nonlinear analysis.

Math. Surveys, no 11, AMS, Providence, RI.

- Curry, J. [1979]

An algorithm for finding closed orbits.

Proc. Int. Conf. on the Global Theory of Dynamical Systems.

Lec. Notes Math. no 819 Springer, New York.

- **Davidenko, D. F.** [1953]

On a new method of numerically integrating a system of nonlinear equations.

Dokl. Akad. Nauk SSSR, 88, pp 601-604

- **Den Heijer, C. & Rheinboldt, W. C.** [1981]

On steplength algorithms for a class of continuation methods.

SIAM J. Numer. Anal., vol 18, no 5, pp 925-948

- **Doedel, E.** [1981]

AUTO: A program for the automatic bifurcation analysis of autonomous systems.

Congressus Numerantium, vol 30, pp 265-284

- **Feigenbaum, M.** [1980]

Universal behavior in nonlinear systems.

Los Alamos Science, Summer pp 4-27

- **Ford, A., Amlin, J. y Backus, G.** [1983]

A practical approach to sensitivity testing of system dynamics models.

Proc. of the Int. Sys. Dyn. Conf., Chestnut Hills, Mass.

- **Forrester J.W.** [1961]

Industrial Dynamics.

M.I.T. Press. Cambridge.

- **Forrester J.W.** [1969]

Urban Dynamics.

M.I.T. Press. Cambridge.

- **Forrester J.W.** [1971]

World Dynamics.

Wright-Allen Press, Cambridge.

- **Forsythe, G., Malcolm, M. & Moler, C.** [1977]

Computer Methods for Mathematical Computations.

Prentice-Hall.

- **Freire, E.** [1982]

Analisis cualitativo y de bifurcaciones en Sistemas Dinamicos.

Tesis doctoral, Univ. de Sevilla.

- **Freire, E., G-Franquelo, L. y Aracil, J.** [1984]

Periodicity and Chaos in an autonomous electronic circuit.

IEEE Trans. on CAS, vol 31, no 3, pp 237-247.

- **Gaspard, P., Kapral, R. y Nicolis, G.** [1984]

Bifurcation phenomena near homoclinic systems: a two-parameter analysis.

J. of Stat. Physics, vol 35, pp. 697-727

- Glendinning, P. & Sparrow, C. [1984]

Local and global behavior near homoclinic orbits.

J. of Stat. Physics, vol 35. pp 645-696

- Golubitsky, M. [1978]

An introduction to catastrophe theory and its applications.

SIAM Review, vol 20, no 2, pp 352-387.

- Golubitsky, M. y Langford, W.F. [1981]

Classification and unfoldings of degenerate Hopf bifurcations.

Journal of diff. equations, vol 41, pp 375-415

- Golubitsky, M. y Schaeffer, D. G. [1982]

Bifurcations with  $O(3)$  symmetry including applications to the Bénard Problem.

Comm. Pure & Appl. Math., vol 35, pp 81-111

- Golubitsky, M. y Schaeffer, D. G. [1985]

Singularities and groups on bifurcation theory.

Springer, New York.

- Guckenheimer, J. y Holmes, P. [1983, 1986]

Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields.

Springer, New York.

- **Hartman, P.** [1973]  
Ordinary differential equations.  
Wiley, New York.
  
- **Hassard, B. D., Kazarinoff, N. D. y Wan, Y-H.** [1981]  
Theory and applications of Hopf Bifurcation.  
London Math. Soc. Lec. Not. Ser. 41  
Cambridge University Press
  
- **Hearn, A.C.** [1985]  
REDUCE user's manual, version 3.2.  
Rand Publication CP78 (Rev. 4/85).  
Santa Monica, California.
  
- **Hirsch, M. y Smale, S.** [1974]  
Differential equations, dynamical systems and linear algebra.  
Academic Press, New York.
  
- **Holodniok, M. y Kubicek, M.** [1984]  
DERPER - An Algorithm for the continuation of periodic solutions  
in ordinary differential equations.  
J. of Comp. Phys. vol 55, no 2, pp 254-267.
  
- **Iooss, G. & Joseph, D. D.** [1980]  
Elementary stability and bifurcation theory.  
Springer, New York.

- **Kawakami, H.** [1984]

Bifurcation of periodic responses in forced dynamic nonlinear circuits: Computation of bifurcation values of the system parameters.

IEEE Trans. CAS, vol 31, pp 248-260.

- **Keller, H. B.** [1977]

Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems.

En Applications of bifurcation theory, pp 1-26, Academic Press, New York.

- **Klopfenstein, R. W.** [1961]

Zeros of monlinear functions.

J. of ACM, vol 8, pp 366-373

- **Kopell, N. y Washburn, R. B.** [1982]

Chaotic motions in the two-degree-of-freedom swing equations.

IEEE Trans. on CAS, vol 29, no 11, pp. 738-746

- **Korsak, A. J.** [1972]

On the question of uniqueness of stable load flow solutions.

IEEE Trans. on PAS, vol 91, pp. 1033-1100

- **Kostrikin, A. I.** [1982]

Introduction to Algebra.

Universitext Series. Springer, New York.

- **Kubicek, M.** [1976]

Algorithm 502: Dependence of Solution of nonlinear systems on a parameter.

ACM Trans. on Math. Software, vol 2, no 1, pp 98-107

- **Kubicek, M.** [1980]

Algorithm for evaluation of complex bifurcation points in ordinary differential equations.

SIAM J. Appl. Math., vol 38, no 1.

- **Kubicek, M. & Klic, A.** [1983]

Direction of branches bifurcating at a bifurcation point.

Determination of starting points for a continuation algorithm.

Appl. Math. and Comp., vol 13, pp 125-142

- **Kubicek, M. y Marek, M.** [1983]

Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative Structures.

Springer, New York.

- **Lahaye, E.** [1934]

Une methode de resolution d'une categorie d'equations transcendentes.

C. R. Acad. Sci., Paris, vol 198, pp 1840-1842

- **Li, T-Y. y Yorke, J.** [1975]

Period three implies chaos.

Amer. Math. Monthly. no 82, pp 985-992

- **Langford, W. F.** [1977]

Numerical solution of bifurcation problems for ordinary differential equations.

Numer. Math., vol 28, pp 171-190

- **Lloyd, N. G.** [1978]

Degree Theory.

Cambridge University Press, London.

- **May, R.** [1976]

Simple mathematical models with very complicated dynamics.

Nature 261, pp 459-467

- **Meadows, D. L. et al.** [1974]

Dynamics of growth in a finite world.

Wright-Allen Press, Cambridge, Mass.

- **Melhem, R. G. & Rheinboldt, W. C.** [1982]

A comparison of methods for determining turning points of nonlinear equations.

Computing, no 29, pp 201-226



- Meyer, G. H. [1968]

On solving nonlinear equations with a one-parameter imbedding.

SIAM J. Numer. Anal., vol 5, no 4, pp 739-752

- Ortega, J. M. & Rheinboldt, W. C. [1970]

Iterative solutions of nonlinear equations in several variables.

Academic Press, New York.

- Pavelle, R. (ed.) [1986]

Applications of Computer Algebra.

Kluwer Academic Publishers, Boston.

- Poston, T. y Stewart, I. [1978]

Catastrophe Theory an its Applications.

Pitman, London.

- Rheinboldt, W. C. [1978]

Numerical methods for a class of finite dimensional bifurcation problems.

SIAM J. Numer. Anal., vol 15, no 1, pp 1-11

- Rheinboldt, W. C. [1980]

Solutions fields of nonlinear equations and Continuation methods.

SIAM J. Numer. Anal., vol 17, pp 221-237

- **Richter, S. L. & DeCarlo, R. A.** [1983]

Continuation Methods: Theory and Applications.

IEEE Trans. on Automatic Control, vol AC-28, no. 6.

- **Rosen, R.** [1972]

Foundations of Mathematical Biology (vol II).

Academic Press, New York.

- **Rossler, O. E.** [1979]

Continuous Chaos: Four prototype equations.

En Biff. Theory and Appl. in scientific Disciplines.

Gurel, O. y Rossler O. E. (Eds.)

Annals of the New York Academy of Sciences, vol 316, pp 376-392

- **Ruelle, D. y Takens, F.** [1971]

On the nature of turbulence.

Comm. Math, Phys., vol 20, pp 167-192

- **Saeed, K. & Irdamidris, A. A.**[1984]

Continuous non-linear functions for use in system dynamics modelling.

Dynamica, vol 10, Part I, pp 16-23.

- **Saeks, R.** [1979]

A continuation algorithm for sparse matrix inversion.

Proc. of the IEEE, vol 67, no 4, pp 682-683

- **Saeks, R. & Chao, K. S.** [1976]

Continuation approach to large-change sensitivity analysis.  
Electronic Circuits and Systems, vol 1, no 1, pp 11-16

- **Sattinger, D. H.** [1979]

Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory.

Lec. Notes in Math. no 762.

Springer, New York

- **Sattinger, D. H.** [1983]

Branching in the Presence of Symmetry.

CBMS-NSF series, no 40.

SIAM, Philadelphia.

- **Seydel, R.** [1979]

Numerical computation of branch points in nonlinear equations.

Numer. Math. 33, pp 339-352

- **Shampine, L. F. y Allen, R. C.** [1973]

Numerical Computing: an introduction.

W. B. Saunders Company, Philadelphia.

- **Sparrow, C.** [1982]

The Lorenz equations: bifurcations, chaos and strange attractors.

Appl. Math. Sci. no 41.

Springer, New York.

- **Stewart, I.** [1981]  
Applications of catastrophe theory to the physical sciences.  
Physica 2D, pp 245-305
  
- **Stoer, J. y Bulirsch R.** [1980]  
Introduction to numerical analysis.  
Springer, New York
  
- **Takens, F.** [1973]  
Unfoldings of certain singularities of vectorfields: Generalized  
Hopf bifurcations.  
Journal of Diff. Equations, 14, pp 476-493
  
- **Tavora, C. J. y Smith, O. J. M.** [1972]  
Equilibrium analysis of power systems.  
IEEE Trans. on PAS, vol 91, pp 1131-1137
  
- **Thompson, J. M. T.** [1982]  
Instabilities and catastrophes in science and engineering.  
John Wiley & Sons.
  
- **Wacker, H.** [1978]  
Continuation Methods.  
Academic Press, New York.

- **Wasserstrom, E.** [1971]

Root finding of polynomials as an initial value problem.

J. Computational Phys., vol 8, pp 304-308

- **Wasserstrom, E.** [1973]

Numerical solutions by the continuation method.

SIAM Review, vol 15, no 1.

- **Wilkinson, J. H. y Reinsch, C.** [1971]

Handbook for Automatic Computation II. Linear Algebra.

Springer, Berlin.