

TESIS DOCTORAL

CRECIMIENTO DE MICROGRIETAS  
POR FATIGA: UNA APROXIMACION  
MICROESTRUCTURAL

AUTOR

ALFREDO NAVARRO ROBLES

OCTUBRE 1986

PRESENTADA EN LA E.T.S.I.I. DE LA UNIVERSIDAD  
DE SEVILLA PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE  
DOCTOR INGENIERO INDUSTRIAL

Quiero expresar mi gratitud a mis compañeros del Departamento, Javier García-Lomas Jung y José Martínez García, porque creen en la amistad y porque sin su ayuda esta Tesis hubiera sido literalmente imposible.

Y al profesor Jaime Domínguez Abascal, director de la tesis, por el ambiente de suma libertad del que supo rodear la realización de este trabajo.

## INDICE

I. INTRODUCCION	
Introducción.....	2
Caracterización Mediante Mecánica de la Fractura del Crecimiento de Grietas.....	10
Crecimiento de Grietas Pequeñas.....	17
Referencias.....	37
Figuras Capítulo I.....	45
II. ANALISIS DIMENSIONAL DEL RITMO DE CRECIMIENTO Y SIMILITUD GEOMETRICA DE GRIETAS	
Análisis Dimensional del Ritmo de Crecimiento de Grieta.....	52
Similitud Física en el Crecimiento de Grieta.....	57
Referencias.....	60
Figuras Capítulo II.....	62
III. SOLUCION COMPACTA PARA LA REPRESENTACION DE LA GRIETA MEDIANTE LA TEORIA DE DISLOCACIONES	
Introducción.....	67
Formulación.....	70
Número de Dislocaciones y Desplazamiento Plástico....	76
Concentración de Tensiones en Frente de la Zona Plástica.....	77
Referencias.....	79
Apéndice.....	80
Figuras Capítulo III.....	83

IV. MODELO UNIFICADO DE CRECIMIENTO PARA GRIETAS PEQUEÑAS Y GRANDES	
Introducción.....	87
Modelo.....	87
Condiciones Límites para Propagación de Grietas.	
Límite de Fatiga. Umbral de Crecimiento para Grietas Grandes.....	94
Ritmo de Crecimiento de Grietas.....	100
Discusión.....	112
Referencias.....	117
Apéndice.....	120
Figuras Capítulo IV.....	124
 V. APLICACION A RESULTADOS EXPERIMENTALES	
Introducción.....	134
Aplicación a Datos Experimentales.....	134
Método para el Cálculo de $f$ .....	138
Cálculo de la Vida a Fatiga.....	139
Discusión.....	142
Referencias.....	146
Apéndice 1.....	147
Apéndice 2.....	149
Figuras Capítulo V.....	165
 VI. CONCLUSIONES Y DESARROLLO FUTURO	
Conclusiones y Desarrollo Futuro.....	174

## CAPITULO I. INTRODUCCION

## INTRODUCCION.

Cuando un componente mecánico o una estructura está sometida a cargas variables con el tiempo, puede llegar a la fractura aunque no se haya detectado ningún daño durante los ciclos de carga. Esto puede ocurrir, incluso siendo el valor máximo de la carga tan pequeño que de su aplicación como carga estática no resulte ningún daño apreciable (cargas por debajo del límite elástico).

Este tipo de fallo es el responsable de entre un 50% y 90% de las fracturas en estructuras metálicas. Se conoce desde aproximadamente 1840 como fallo por "fatiga".

Empieza a aparecer a principios del siglo XIX con el advenimiento de maquinaria y vehículos de transporte en los que las cargas dinámicas comienzan a tener importancia. La incidencia de estos fallos en campos como la industria minera y de ferrocarriles llevó a que empezaran a realizarse estudios sobre el tema.

Los primeros ensayos aplicando carga cíclica a componentes datan de 1829, en que W. Albert [1], un ingeniero de minas alemán, sometió cadenas de elevadores de material a cargas y descargas sucesivas.

Durante este período se intentaba explicar este tipo de fallo aduciendo que el metal sufría un proceso de cristalización

debido a la acción de las cargas repetidas. Este proceso llevaba aparejada una subsecuente fragilización que era, en última instancia, responsable del fallo por fatiga.

Asimismo, ya desde entonces se puso de manifiesto que la existencia de entallas en componentes, tales como cambios bruscos de sección o agujeros, eran perjudiciales de cara a la duración ante fatiga.

Entre 1850 y 1870 Wöhler [2] construyó la primera máquina de ensayos de flexión rotativa y realizó gran cantidad de ensayos sobre ejes de ruedas de ferrocarril. Presentó resultados que mostraban que la resistencia a fatiga dependía del número de ciclos de carga, en lugar del tiempo de aplicación de ésta. Y que era tan importante el rango de variación de las tensiones como la tensión máxima alcanzada. Estableció asimismo que las aleaciones de hierro parecían tener un límite de tensión, por debajo del cual no se producía la rotura, por muy grande que fuera el número de ciclos. Introdujo la curva S-N y el concepto de límite de fatiga.

Posteriormente, Gerber y Goodman y Soderberg [3-6] consideraron en sus investigaciones el efecto de las tensiones medias, introduciendo las conocidas reglas que llevan sus nombres para la obtención de la resistencia a fatiga cuando la tensión media es distinta de cero.

A finales del siglo pasado y principios de éste la aparición de fallos por fatiga proliferó enormemente con el desarrollo de las turbinas de vapor, motores de combustión interna y los principios de la industria aeronáutica.

Empezó a aplicarse el microscopio para el estudio del mecanismo de la fatiga, poniéndose de manifiesto que la iniciación de grietas está precedida por la localización de la deformación plástica en planos de deslizamiento favorablemente orientados en los granos superficiales con respecto a la tensión aplicada (Bandas de Deslizamiento Persistentes).

Durante la primera mitad del siglo se obtuvieron gran cantidad de datos experimentales relacionando la resistencia a fatiga con factores tales como la geometría y tamaño de la pieza, condiciones ambientales (ambientes corrosivos, etc.), acabado superficial, estructura metalográfica, etc., y que son la base de lo que en la actualidad pueden denominarse Métodos Clásicos de diseño a fatiga.

Empezaron a aplicarse análisis de tensiones residuales, lo que permitió introducir métodos de mejora de la resistencia a fatiga, tales como el proceso de granallado que produce tensiones residuales de compresión en la superficie, aumentando sensiblemente la vida a fatiga.



En la década de los 50 comienzan a introducirse máquinas de ensayo electrohidráulicas que han permitido la generación de datos de fatiga para cargas más complicadas y la determinación del comportamiento tensión-deformación de los metales sometidos a carga cíclica, lo cual supuso un avance fundamental en el campo de la fatiga.

Asimismo, los estudios sobre el carácter estadístico de la fatiga, entre los que cabe destacar los realizados por Weibull [7-8], y el desarrollo de los criterios de daño acumulado para el estudio de la fatiga ante carga irregular, entre los que destaca el criterio de acumulación lineal de Palmgren-Miner [9-10], han sido también de gran importancia.

A principio de los años 60, Manson y Coffin [11-12], presentaron la relación entre la amplitud de deformación plástica y el número de ciclos que se utiliza en el modelo de la curva  $\epsilon$ -N del material.

Diversos autores, entre los que hay que señalar a Neuber [13] y Stowell [14], han propuesto ciertos métodos para el cálculo de las deformaciones plásticas en piezas entalladas. Estos métodos, aproximados, pero simples de aplicar, han sido empleados posteriormente para cálculos en fatiga y constituyen junto con la curva  $\epsilon$ -N la base del Método de las Deformaciones Locales [15].

Durante años se ha considerado que el proceso global de rotura por fatiga constaba de dos fases: una primera de nucleación de grieta y otra posterior de propagación de la misma [16]. Para los cálculos del período de nucleación se ha venido empleando el Método de Deformaciones Locales o los Métodos Clásicos, dependiendo de si se esperaban o no deformaciones plásticas importantes. Para el período de propagación se utiliza la Mecánica de la Fractura Elástica o Elastoplástica dependiendo del tamaño de grieta considerado, condiciones de carga, etc.

Sin embargo, aunque estos términos de nucleación y propagación, se han usado extensivamente en la literatura, las áreas a que se refieren dentro de la vida de la grieta varían ampliamente dependiendo de la definición del final del período de nucleación. Frecuentemente se ha tomado como criterio de definición, el considerar que la grieta permanece en la fase de nucleación hasta que alcanza un tamaño suficientemente grande como para ser detectable con las técnicas usuales de inspección (longitudes del orden del milímetro típicamente). Sin embargo, esta demarcación es arbitraria y carece totalmente de base física.

La tendencia actual es considerar que el término nucleación describe estrictamente el período en el que ninguna grieta, por pequeña que sea, ha sido iniciada y propagación se aplica al crecimiento de grietas desde longitud cero hasta el fallo final.

Se ha reconocido [17], que el problema de crecimiento de microgrietas corresponde a lo que tradicionalmente se venía llamando Fase de Nucleación en los cálculos de vida a Fatiga. En este contexto, el término microgrietas (short-cracks) significa grietas que son pequeñas, o del mismo orden, que los parámetros microestructurales característicos del material (v.g. el tamaño de grano del metal) y que el tamaño de la zona plástica que la grieta genera. Por el contrario, se designan como grietas grandes, o simplemente, grietas, aquellas cuya longitud es mucho mayor que la zona plástica o el tamaño medio de grano (long-cracks). Ejemplos típicos de las últimas son las producidas en soldaduras defectuosas en estructuras metálicas. El defecto inicial es considerado como una grieta de un cierto tamaño y la atención se centra en el período de propagación.

Por el contrario, en piezas con buenos acabados superficiales y libres de defectos iniciales, como pueden ser, en general, componentes de máquinas, se encuentran pequeñas grietas superficiales cuyo comportamiento no puede ser descrito satisfactoriamente extrapolando al rango de longitudes muy pequeñas los datos de crecimiento obtenidos para grietas mayores. En general y como se describe más adelante, se observa que las grietas pequeñas crecen a unos ritmos mayores que los predichos mediante dicha extrapolación. De hecho, el nombre de microgrieta (short-cracks problem) está asociado históricamente con la incapacidad de las técnicas derivadas de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal

para describir adecuadamente el crecimiento de las citadas grietas pequeñas.

Ambos tipos de grietas (short-cracks y long-cracks) muestran un comportamiento muy diferente, debido posiblemente a la fuerte influencia de la microestructura sobre las primeras. Estas grietas empiezan creciendo a un ritmo relativamente elevado pero sufren una deceleración pronunciada al aproximarse a barreras de deslizamiento como son, por ejemplo, bordes de grano. Algunas de estas grietas cesan de crecer. Otras sólo sufren una demora temporal, reiniciando su crecimiento y acelerándose una vez que el deslizamiento plástico se ha producido detrás de la barrera. En general, a partir de cierto punto el crecimiento de estas grietas puede ser descrito mediante la Mecánica de Fractura, i.e., se alcanza una convergencia entre el período de microgrieta y el de grieta grande.

En los cálculos de vida a fatiga actualmente se tiende a considerar que el período de nucleación o no existe o tiene una duración muy corta y se supone, por tanto, que las grietas empiezan a crecer desde el primer ciclo de carga a partir de inclusiones, marcas de extrusión-intrusión, puntos triples de intersección de bordes de grano, etc.. Fruto de esta nueva filosofía es, por ejemplo, el cambio de concepción sobre el límite de fatiga. Este venía siendo considerado como la tensión por debajo de la cual no aparecían grietas por fatiga en el material. Sin embargo,

hoy en día el concepto de límite de fatiga se asocia más bien con el nivel de tensión por debajo del cual las grietas son incapaces de propagarse [18].

Por tanto, todo el proceso de fatiga se considera actualmente que es un proceso de propagación de grietas, pero se distingue el período correspondiente a microgrieta y a grieta propiamente dicha. La transición entre un período y otro no es una transición brusca, sino que las primeras, al crecer, se transforman en las segundas, aunque, sin embargo, las diferentes características de crecimiento en uno y otro período demandan diferentes técnicas para su descripción [19, 20].

Debido al comportamiento de deceleración que exhiben las microgrietas, una gran parte de la vida del componente puede discurrir en este período, por lo cual un mayor conocimiento de esta fase, tanto desde el punto de vista metalúrgico como mecánico, es de la mayor importancia.

El objeto general de esta tesis es la formulación de un nuevo modelo de crecimiento que sea capaz de recoger la influencia de la microestructura del metal en la fase de microgrieta y la subsecuente conexión con el período de grieta grande. El parámetro microestructural relevante considerado en principio es el tamaño grano, o la distancia media entre las barreras de deslizamiento plástico significativas en el material particular.

Las bases teóricas de los modelos considerados en el estudio son la representación mediante la teoría de dislocaciones de una grieta y de las zonas plásticas desarrolladas en sus vértices [21, 22] (que serán presentadas en un capítulo posterior), así como el análisis del tipo Hall-Petch [23, 24] para la transmisión del deslizamiento entre granos del metal.

Paso obligado hacia la consecución de este objetivo es el análisis detallado de los distintos elementos que caracterizan los dos períodos de crecimiento, así como las técnicas y modelos propuestos en la literatura para su descripción.

#### CARACTERIZACION MEDIANTE MECANICA DE LA FRACTURA DEL CRECIMIENTO DE GRIETAS.

La aproximación mediante la Mecánica de la Fractura (Elástica Lineal) al estudio del ritmo de crecimiento de grieta empieza con la descripción de los campos locales de tensión-deformación en los alrededores del vértice de la grieta. Estos son campos singulares que presentan en el pico mismo de la grieta un infinito cuya forma funcional puede ser caracterizada mediante un factor escalar que depende de la carga aplicada y de la geometría del cuerpo y que recibe el nombre de Factor de Intensidad de Tensiones. Por ejemplo, para una grieta en un medio elástico sometido a tracción perpendicular al plano de la grieta, el campo de tensiones en las proximidades del pico es [25, 26]

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} K_I \cdot f_{ij}(\theta) + O(r^{1/2}) + \dots \quad (1)$$

donde

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} K_I \cdot f_{ij}(\theta) \quad (2)$$

$K_I$  es el factor de intensidad de tensiones el modo I, Y se suele expresar en la forma

$$K_I = Y \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \quad (3)$$

donde  $Y$  depende de la carga y geometría del problema;  $r, \theta$  son coordenadas polares con origen en el vértice de la grieta.  $f_{ij}$  son funciones adimensionales de  $\theta$ .

Existen expresiones similares para una grieta cargada a cortante en deformación plana (Modo II) o antiplana (Modo III).

Con tal que pueda considerarse que este campo asintótico domina la vecindad del pico de la grieta, sobre una región grande comparada con la microestructura, el factor  $K$  caracteriza de una manera única y autónoma el campo local de tensión. Y, de acuerdo con el análisis original de Paris y Erdogan [27] puesto que el factor de intensidad de tensiones proporciona una descripción completa de la forma del campo de tensiones alrededor del vértice, debe controlar también el ritmo de crecimiento. Esto se expresa en la ecuación conocida como ley de Paris

$$\frac{da}{dN} = c \cdot \Delta K^m \quad (4)$$

donde  $c$  y  $m$  son constantes.  $\Delta K$  es la diferencia entre el máximo

y mínimo ( $K_{max}$  y  $K_{min}$ ) factor de intensidad de tensiones en cada ciclo de carga.

Es importante notar que para la aplicación de (4) todos los detalles de la microestructura deben haber sido substituídos por un medio continuo y homogéneo tal que cada pequeña porción del mismo tenga idénticas propiedades físicas, que deben ser las mismas que las del material como un todo. En casos donde el comportamiento de grieta está influenciado por variaciones microestructurales (v.g. grietas pequeñas) no se puede esperar que la ley de Paris sea un buen modelo para describir el crecimiento.

La Figura 1 muestra un gráfico típico del ritmo de crecimiento de una grieta grande en función de  $\Delta K$ . Pueden distinguirse en él tres regiones. La parte central (Región B), es la parte lineal que puede ser descrita adecuadamente mediante la ley de Paris. La vida de muchas estructuras de ingeniería puede considerarse en esta región, una vez que se ha tenido en cuenta una cierta longitud mínima de grieta normalmente relacionada con las técnicas de inspección empleadas o dada por alguna norma legal que sea de aplicación en el cálculo del componente de que se trate.

La región C presenta un gradiente muy elevado; el crecimiento en esta zona es complicado porque la zona plástica



alcanza dimensiones comparables al tamaño del espécimen y los valores de  $K_{max}$  se aproximan a la tenacidad a fractura del material apareciendo componentes de fractura estática (ductile tearing) en la propagación de la grieta.

En la región A los niveles de tensión aplicada son invariablemente muy bajos y el crecimiento de la grieta en cada ciclo es del orden del espaciado atómico ( $10^{-10}$  m/ciclo). Se ha observado que el crecimiento de una grieta grande en esta región es intermitente [28] y está influenciado por la microestructura del material [29].

En la Figura 1, el punto X marca el valor umbral del factor de intensidad de tensiones  $\Delta K_{th}$  que puede ser definido como el mayor factor de intensidad de tensiones para el que no se puede detectar ningún crecimiento de grieta grande.

Una de las principales limitaciones del uso de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal, esto es, de la adopción de  $K$  como una descripción válida del campo de tensiones en las proximidades del vértice de la grieta, es que debe prevalecer un estado de zona plástica pequeña en el vértice. Como se citó anteriormente, las tensiones tienden a infinito en el pico de la grieta. Sin embargo, en un material real, las tensiones están limitadas por la producción local de deformación plástica que relaja el infinito en la tensión, apareciendo la denominada zona

plástica en la región adyacente al vértice. Una estimación del tamaño de esta zona en una grieta cargada estáticamente puede obtenerse mediante (2) limitando la tensión al valor del límite elástico  $\bar{\sigma}_y$

$$r_y \approx \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K}{\bar{\sigma}_y} \right)^2 \quad (5)$$

Con tal que este tamaño de la zona plástica sea pequeño comparado con la extensión del campo K (i.e. despreciando términos de orden superior al de K en (1)), que es a su vez pequeño comparado con las dimensiones globales del cuerpo (incluyendo la longitud de grieta), la zona plástica puede considerarse meramente como una pequeña perturbación del campo elástico lineal, por lo que puede asumirse que el campo K domina la región alrededor del vértice de la grieta. Esta situación se conoce como plastificación a pequeña escala (small scale yielding).

De acuerdo con lo anterior, la correlación del ritmo de crecimiento de grieta por fatiga con el factor de intensidad de tensiones será una aproximación válida únicamente cuando prevalezcan condiciones de plastificación a pequeña escala.

En el caso en que la zona plástica es de un tamaño comparable al propio de la grieta, el uso del factor de intensidad de tensiones no es apropiado. La forma del campo local de tensiones ha sido calculada para estos casos usando la teoría de la plasticidad.

Para un material con un endurecimiento del tipo potencial  $\sigma = A \epsilon_p^n$ , la forma del campo viene dada por la singularidad de Hutchinson-Rice-Rosengren (HRR) [30, 31]

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}(r, \theta) = \left( E J / \sigma_y^2 r \right)^{n/(n+1)} \sigma_y \cdot f_{ij}(\theta, n) \quad (6)$$

$E$  es el módulo de Young y  $f_{ij}$  funciones adimensionales. La amplitud del campo viene determinada por la denominada integral  $J$  [32] y de forma análoga a  $K$ , caracteriza de forma única el campo de tensiones en las proximidades del vértice en el régimen elasto-plástico (siempre que haya un cierto grado de endurecimiento). En el caso de plastificación a pequeña escala,  $J$  coincide con el ritmo de liberación de energía de deformación (strain energy release rate) y se relaciona por tanto directamente con  $K$

$$J = K^2 / E \quad (7)$$

A pesar de dificultades en el significado de  $J$  cuando se aplica a la descripción de una grieta creciendo por fatiga (caso no-estacionario), Dowling [33, 34] propuso una correlación similar a la ley de Paris para el crecimiento de grieta en el régimen elasto-plástico

$$\frac{da}{dN} = c \cdot \Delta J^m \quad (8)$$

Una aproximación alternativa es usar el concepto de desplazamiento de apertura en el pico de la grieta (CTOD, crack tip opening displacement), puesto que este parámetro también

puede considerarse como una medida de la intensidad del campo elasto-plástico.

En situaciones en donde la plasticidad es más extensiva (gross yielding conditions), con cargas aplicadas por encima del límite elástico, se han desarrollado algunas leyes de crecimiento que incorporaron directamente parámetros como el rango de tensión aplicada en el modelo de Tomkins [35]

$$\frac{da}{dN} = c \cdot \Delta \sigma^m \cdot a \quad (9)$$

Puesto que la deformación plástica es un parámetro más representativo del régimen considerado, Solomon [36] o Ibrahim [37] usaron ecuaciones del tipo

$$\frac{da}{dN} = c \cdot \Delta \epsilon_p^m \cdot a \quad (10)$$

Como característica importante común a las expresiones derivadas de la Mecánica de la Fractura, ya sea Elástica Lineal o Elasto-Plástica o a las expresiones propuestas para fatiga por encima del límite elástico, es que todas predicen un ritmo de propagación que se incrementa con la longitud de grieta y por esta razón son, como se verá, inapropiados para describir el comportamiento de las grietas pequeñas.

### CRECIMIENTO DE GRIETAS PEQUEÑAS.

Se ha realizado mucho trabajo experimental con la nucleación y subsecuente crecimiento de grietas pequeñas superficiales en aleaciones de aluminio de las series 7000 y 2000, aceros de alta resistencia y aceros de contenido medio en carbono [38-43]. La mayoría de estos trabajos muestran un patrón característico de nucleación de grieta en inclusiones o con partículas de una fase secundaria más dura que la matriz del metal, bien por fractura de la partícula misma o por despegue entre la partícula y la matriz, siendo este proceso de nucleación seguido por crecimiento de grieta en modo I o II.

Se sabe que este crecimiento subsecuente está influenciado por la presencia de obstáculos microestructurales que pueden modificar la plasticidad asociada con la propagación de grietas (v.g. bordes de grano). En particular se ha descrito ampliamente [44-48] que unos altos ritmos de crecimiento inicial (mayores que los predichos mediante la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal), y una posterior deceleración con una posible parada temporal o permanente son características típicas del crecimiento de grietas pequeñas.

Más precisamente, se ha observado que el crecimiento de grietas en esta etapa sigue un patrón intermitente de deceleraciones y aceleraciones sucesivas, con los mínimos en el ritmo de crecimiento correspondiendo a valores de la longitud de grieta

igual a entre uno y tres diámetros de grano. Este patrón intermitente de crecimiento desaparece al hacerse mayor la grieta resultando un ritmo de crecimiento que se incrementa gradualmente, hasta que se produce la unión con la curva de crecimiento típica de las grietas grandes o grietas propiamente dichas [49-55].

En estas etapas iniciales de crecimiento no hay similitud cuando se representa el ritmo de crecimiento de grieta  $da/dN$  en función del Factor de Intensidad de Tensiones  $K$  obteniéndose diferentes valores de  $da/dN$  para diferentes grietas con el mismo  $K$ . En particular y muy significativamente se encuentra que las grietas pequeñas son capaces de crecer a valores del factor de intensidad de tensiones por debajo del umbral. Sin embargo, en el período de crecimiento de grieta grande, la similitud física prevalece y, siempre que se cumplan las hipótesis de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal, los resultados se agrupan en una sola curva (ley de Paris).

También se ha descrito en las etapas iniciales de crecimiento tamaños de la zona plástica que no se ajustan a las predicciones basadas en la teoría continua de la Mecánica Elástica Lineal de la Fractura [56, 57].

Morris [58] y Lankford [44] han presentado evidencias, aunque indirectas, de que la zona plástica está confinada por los bordes de grano. Morris [58] también ha encontrado que la

distancia entre el pico de la grieta y el borde de grano es un parámetro importante influenciando el ritmo de crecimiento.

Como resumen de la evidencia experimental descrita, dos puntos denotan claramente la inhabilidad de las herramientas básicas en los estudios de crecimiento de grietas grandes i.e. la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal y la ley de Paris o sus modificaciones para describir el crecimiento de grietas pequeñas:

1. La M.F.E.L. predice ritmos de crecimiento que aumentan con la longitud de grieta y por tanto no puede modelizar las situaciones de deceleración en que el ritmo de crecimiento disminuye cuando la longitud de la grieta crece, y, menos aún, un comportamiento oscilante.
2. Las grietas pequeñas crecen por debajo del valor umbral del factor de intensidad de tensiones.

En este sentido, Smith [59] ha propuesto un modelo muy simple para estimar las limitaciones en cuanto al rango de tensión aplicada y la longitud de grieta para que la correlación entre el factor de intensidad de tensiones y el ritmo de crecimiento sea efectiva. Smith razona que el mínimo tamaño de zona plástica posible en el vértice de la grieta corresponde al tamaño de un subgrano, esto es, del orden de  $0.5 \mu m$ ; y que para que la hipótesis de medio continuo sea aceptable, la longitud de grieta que permitiría

la aplicación de M.F.E.L. (50 es el factor comúnmente aceptado entre longitud de grieta y zona plástica en los ensayos de tenacidad a fractura [60]).

Una aproximación alternativa es la presentada por Taylor y Knott [46, 49], que definieron tres longitudes críticas  $l_0$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  en el conocido gráfico de Kitagawa [61]. Este tipo de gráfico se construye utilizando una serie de probetas, cada una de las cuales contiene una grieta previamente iniciada. La longitud de esta grieta inicial es distinta en cada probeta. Se estudia la mínima tensión que es necesario aplicar para hacer crecer cada grieta y se representa esta tensión en el eje de ordenadas contra la longitud de cada grieta en el eje de abscisas (Fig. 2) - (En coordenadas logarítmicas).

Los resultados con probetas conteniendo grietas grandes se ajustan a una línea recta de pendiente  $-1/2$ , correspondiendo al factor de intensidad de tensiones umbral. Sin embargo los ensayos con grietas pequeñas se apartan de esa línea, tendiendo hacia la horizontal que representa el límite de fatiga poniendo de manifiesto que existe crecimiento de grietas pequeñas por debajo del umbral de intensidad de tensiones.

Las tres longitudes de Taylor y Knott tratan de acotar la región de esas desviaciones.  $l_1$  representa la máxima longitud de grieta que puede haber presente sin que haya ninguna reducción



en el límite de fatiga. Para grietas menores que  $l_2$ , la aproximación basada en el factor de intensidad de tensiones no se puede usar para estimar el umbral de crecimiento.  $l_0$  es la intersección de las dos asíntotas representando el límite de fatiga y el valor umbral del factor de intensidad de tensiones.

Usando diversos estudios de crecimiento de grieta, Taylor relacionó estas longitudes con el tamaño de grano del metal  $D$ , encontrando que las correlaciones  $l_2 = 10D$  y  $l_0 = D$  concordaban bien con los datos analizados; la falta de datos en la región de longitudes más cortas impidió la formulación de una correlación para  $l_1$ .

El trabajo de Taylor y Knott apoya también, por tanto, el razonamiento de que la grieta debe ser mucho mayor que las dimensiones microestructurales para que la aplicación de la Mecánica de la Fractura, basada en la mecánica de medios continuos, sea adecuada.

Los dos trabajos citados, de Smith y de Taylor y Knott, establecen limitaciones a la longitud de grieta pero nada clarifican sobre el crecimiento anómalo de las grietas pequeñas. Se han propuesto una diversidad de modelos para describir este comportamiento anómalo, pero en general las explicaciones presentadas se basan o bien en las diferencias que aparecen en el fenómeno del cierre de grieta entre grietas grandes y grietas pequeñas

o en modelizaciones más o menos afortunadas de la interacción entre la grieta y la microestructura o en combinaciones de ambos efectos.

El cierre de grieta (crack closure) consiste en la interferencia y contacto físico entre las dos caras de la grieta (Fig. 3). Puesto que la grieta no puede propagarse mientras se produce este contacto (mientras está "cerrada"), el efecto del cierre es reducir el rango de tensión aplicado  $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$  a un rango efectivo menor  $\Delta\sigma_{\text{ef}} = \sigma_{\max} - \sigma_{\text{ci}}$  ( $\sigma_{\text{ci}} \geq \sigma_{\min}$ ).

En general se consideran tres tipos de cierre [62]. Cierre inducido por la plasticidad residual debida al movimiento, con el crecimiento, de la zona plástica del pico de la grieta (plasticity induced closure): debido a la expansión residual que la zona plástica deja tras de sí en grietas cargadas en modo I se produce contacto entre las caras incluso cuando la tensión neta aplicada es de tracción.

El segundo tipo es el contacto producido por los depósitos o residuos de corrosión (oxide induced closure).

Finalmente y teniendo en cuenta que las superficies de la grieta suelen tener diversas facetas y ser rugosas está el cierre por rugosidad en grietas cargadas a cortante (modos II y III).

En general se considera que el cierre por plasticidad sólo tiene importancia en grietas bajo condiciones de tensión plana y por tanto no tiene un papel dominante en el crecimiento de grietas pequeñas en las que por su propia naturaleza prevalecen condiciones de deformación plana.

En cuanto a los dos restantes mecanismos, su magnitud depende de la extensión de las zonas en posible contacto y por tanto es de esperar que el efecto del cierre en grietas pequeñas sea menor que en las grandes. Diversos autores han comprobado experimentalmente esta tendencia [52,57,58]. Más concretamente James y Morris [63] midiendo la apertura residual de la grieta a carga cero (que es una medida indirecta del cierre) concluyeron que el cierre por rugosidad se incrementaba con la longitud de grieta aproximándose asintóticamente a un valor constante característico de las grietas grandes. Esto explicaría el mayor ritmo de crecimiento de las grietas pequeñas con respecto a las grandes y el patrón de deceleración en la zona en que el efecto de freno del cierre superaba al de la propia longitud de grieta creciente. Sin embargo, no podría explicar las oscilaciones observadas en el ritmo de crecimiento. En el citado trabajo [63] se estudió el crecimiento de grietas de entre 50 y 500  $\mu\text{m}$  en una aleación de titanio donde el tamaño de grano se encontraba entre 4 y 12  $\mu\text{m}$  para las diferentes fases. Se trataba por tanto de grietas bastante mayores que el tamaño de grano.

Por otra parte, en grietas de longitud comparable al tamaño de grano [58] se encontró que la tensión de cierre dependía de la localización de los vértices de la grieta con respecto al borde de grano: la tensión de cierre era mayor cuanto más alejada se encontraba la grieta del borde. Esto es un resultado contradictorio puesto que conduciría a una aceleración de la grieta al acercarse al borde de grano, en contra del comportamiento normalmente observado. Sin embargo, para juzgar esta observación debe tenerse en cuenta que las medidas del cierre de grieta son extremadamente difíciles y que muchas veces no se obtiene concordancia en las medidas realizadas con métodos diferentes. Por ejemplo, Frandson et al. [64] obtuvieron diferentes estimaciones de la tensión de cierre utilizando un método basado en emisión acústica y otro basado en medidas de flexibilidad (compliance) del espécimen. La aplicación de los argumentos de cierre de grieta es complicada de por sí en la región de grieta grande, donde se usa una mecánica continua, con que imagine en la zona de crecimiento microestructural. En general los modelos que incorporan el cierre de grieta utilizan una ecuación del tipo de Paris pero utilizan el rango efectivo del factor de intensidad de tensión calculado con el rango efectivo de tensión,  $\Delta K_{ef} = (\sigma_{max} - \sigma_{ci})\sqrt{\pi a}$  donde la tensión de cierre se determina con expresiones derivadas ad hoc, como por ejemplo, en los trabajos de Zurek et al. [51] y Tanaka et al. [65]. Aunque estos modelos han producido resultados satisfactorios con los datos experimentales de los propios autores, es cuestionable su generalidad debido a lo particular de la expres-

sión para  $\sigma_{ci}$  y al hecho de que se utiliza un parámetro continuo como es el factor de intensidad de tensiones en una región donde la influencia de la microestructura es predominante, por lo que el uso de dicho parámetro, incluso con factores de corrección es extremadamente dudoso.

El papel de la microestructura se ha cuantificado de diversas formas. Chang et al. [66] y luego Zurek et al. [51] utilizaron la idea de que la propagación de grieta requería la superación de un cierto nivel crítico de energía de deformación, resultando en un más o menos prolongado periodo de incubación cuando la grieta alcanzaba el borde de grano. Estos modelos explican el retardo de la grieta cuando ésta alcanza el borde de grano pero no pueden explicar el rápido crecimiento inicial de la grieta antes de alcanzar el borde.

Lankford y Chan [67] presentaron un modelo para el crecimiento de grieta pequeña que empleaba la ecuación de Paris modificada para tener en cuenta en el proceso de expansión de la zona plástica, la diferente orientación en los sistemas de deslizamiento entre granos adyacentes del metal. Aunque el uso del factor de intensidad de tensiones no está justificado como se mencionó más arriba, este modelo considera por primera vez la dificultad relativa en la transmisión de la deformación plástica como posible característica diferencial entre grietas pequeñas y grandes e incorpora la variación en el tamaño de la zona plástica

como una variable importante. La ecuación de crecimiento propuesta fue

$$\frac{da}{dN} = c k^n \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\tau_B}{\tau_A} \right) \left( \frac{D-2x}{D} \right)^m \right] \quad (11)$$

donde  $x$  es la distancia del vértice de la grieta al siguiente grano,  $\tau_A$  y  $\tau_B$  representan las tensiones cortantes proyectadas en los granos A y B respectivamente y  $D$  es el tamaño de grano, con  $m$  y  $n$  constantes. Para una grieta creciendo desde el grano A al B, si el cociente  $\tau_B/\tau_A$  es mayor que uno, sería relativamente fácil iniciar el deslizamiento en el grano B. Sin embargo, para  $\tau_B=0$  la ecuación anterior predice la parada de la grieta en el borde de grano.

En una línea similar se encuentra el modelo de la deflexión o desviación de grieta desarrollado por Suresh [68]. Cuando el vértice de la grieta alcanza el borde de grano, tiende a reorientarse y a seguir la dirección más favorable de avance. El grado de desviación que sufre depende de la orientación relativa de los sistemas de deslizamiento en los dos cristales. Cuando la grieta se desvía o se inclina respecto a la carga aplicada experimenta desplazamientos tanto de tracción como de cortante en el pico, aunque la carga aplicada sea sólo de tracción, por ejemplo. Si la grieta está inclinada inicialmente en ángulo  $\theta_0$  con respecto al modo I de crecimiento y se desvía adicionalmente en ángulo  $\theta_1$  en el borde de grano (Fig. 4), los factores de

intensidad de tensión a tracción (modo I)  $K_1$ , y a cortante (modo II en el caso considerado)  $K_2$  después de cruzar el borde, son aproximadamente

$$\frac{K_1}{K_I} = \cos^2 \theta_0 \cdot \cos^3(\theta_1/2) + 3 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin(\theta_1/2) \cos^2(\theta_1/2) \quad (12)$$

y

$$\frac{K_2}{K_I} = \cos^2 \theta_0 \sin(\theta_1/2) \cos^2(\theta_1/2) - \sin \theta_0 \cos \theta_0 \cos(\theta_1/2) [1 - 3 \sin^2(\theta_1/2)] \quad (13)$$

donde  $K_I$  el valor nominal en modo I de una grieta recta de longitud equivalente a la considerada.

Para una grieta emanando de la superficie con un ángulo de  $45^\circ$  y desviada en el borde de grano con  $\theta_1 = 90^\circ$  las ecuaciones (12) y (13) dan  $K_1 \simeq 0.7 K_I$  y  $K_2 \simeq 0.35 K_I$ . Calculando el factor de intensidad de tensiones equivalente mediante el criterio del ritmo de liberación de energía (strain energy release rate for coplanar growth [69]),  $K_{eq} = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$ , se obtiene  $\Delta K_{eq} \simeq 0.78 \Delta K_I$ . Por tanto la deflexión de la grieta en el borde de grano puede producir una reducción importante en el factor de intensidad efectivo que se traduciría en una reducción del ritmo de crecimiento via ley de Paris. Si la deflexión fuera suficientemente grande, el factor de intensidad equivalente podría descender por debajo del valor umbral, prediciéndose por consiguiente la parada de la grieta y convirtiéndose ésta en una grieta no propagante.

Además de producir una reducción en el rango efectivo del factor de intensidad de tensiones, la deflexión de la grieta puede jugar un papel importante en el mecanismo de cierre de grieta: la presencia de una superficie en diente de sierra y de una componente de desplazamiento en modo II después de las deflexiones pueden resultar en contacto prematuro entre las dos caras llevando a cierre inducido por rugosidad.

Este modelo proporciona una interesante explicación del papel de la microestructura en el crecimiento de grietas pequeñas, pero, de nuevo, usa el factor de intensidad de tensiones a un nivel donde la deformación plástica no es continua y además las predicciones numéricas basadas en este modelo estarán sujetas a una gran incertidumbre debido a las complejas geometrías que a ese nivel puede desarrollar cada grieta, por lo que sería necesario disponer de planteamientos estadísticos sobre las ecuaciones del modelo para poder hacer cálculos fiables de ritmo de crecimiento.

En una aproximación diferente, reconociendo el carácter localizado de la deformación plástica, de los Rios et al. [70], utilizaron explícitamente el hecho de que la deformación plástica está asociada a nivel microscópico con la formación de bandas de deslizamiento y consideraron el ritmo de crecimiento de la grieta como proporcional a la intensidad (número de dislocaciones de las bandas de deslizamiento que constituyen las zonas plásticas en los vértices de la grieta y que se extienden desde dichos



vértices hasta el borde del grano en que la grieta está creciendo.

El número de dislocaciones que se apilan en una banda de deslizamiento lineal de longitud  $L$  bajo una tensión aplicada  $\bar{\sigma}$  viene dado por

$$n = \frac{L\bar{\sigma}}{A} \quad (14)$$

donde  $A$  es  $Gb/\pi$  para dislocaciones de tornillo y  $Gb/\pi(1-\nu)$  para dislocaciones de borde ( $G$  es el módulo cortante y  $\nu$  el módulo de Poisson).

Si la grieta crece en un grano de tamaño  $D$  y tiene una longitud  $a$  el ritmo de crecimiento vendría dado por

$$\frac{da}{dN} = \frac{f\bar{\sigma}(D-a)}{G} \quad (15)$$

Este modelo reproduce el comportamiento de deceleración de las grietas pequeñas. Sin embargo, no es realista asimilar las zonas plásticas en los vértices a apilamientos simples de dislocaciones ya que no se tiene en cuenta para nada la propia grieta, su efecto de concentración de tensiones.

Existen modelos de dislocaciones que permiten describir adecuadamente tanto la grieta, como las zonas plásticas y considerar su interacción con barreras de deslizamiento como son los bordes

de grano. Estos modelos serán descritos detalladamente en un capítulo posterior ya que constituyen, como se mencionó al principio de este capítulo, la base del modelo propuesto en esta tesis. Basta mencionar aquí, a los efectos de esta Introducción, que el denominado Modelo de las Bandas de Deslizamiento Bloqueadas desarrollado por Taira, Tanaka y Nakai [22] para el estudio de umbrales de crecimiento, ha sido aplicado por Eastabrook [71], con la misma filosofía que de los Rios et al. [70], al estudio del ritmo inicial de crecimiento de grietas en la etapa I (modo II) de crecimiento. Este estudio predice la deceleración de una grieta que crece en un grano cuando se acerca al borde. También predice que cuando la longitud de la grieta tiende a cero el ritmo de crecimiento tiende a un valor finito y que por tanto no se puede esperar la aplicación de la Mecánica de la Fractura, que predice  $da/dN \rightarrow 0$  cuando  $\Delta K \rightarrow 0$ , en el rango de longitudes de grieta muy pequeñas.

Los modelos descritos hasta ahora reflejan más o menos satisfactoriamente el crecimiento de la grieta en el primer grano. Sin embargo, ninguno de los mismos estudia la transición entre grieta pequeña y grande, ninguno da una explicación global del proceso de crecimiento que permita ver la transformación lógica de un periodo a otro.

En este sentido, en una reciente revisión de numerosos trabajos experimentales sobre crecimiento de grietas pequeñas

en materiales tan variados como aceros, aleaciones de aluminio, de níquel y de titanio, Lankford [44] ha establecido que las grietas pequeñas crecen más rápidamente que las grandes cuando la zona plástica es menor que el elemento microestructural característico (tamaño de grano) y que la convergencia entre grieta pequeña y grande se produce cuando el tamaño de la zona plástica es igual al tamaño de grano.

Un primer intento de considerar los dos periodos en un sólo modelo fue hecho por de los Rios et al. [72]. La zona plástica fue considerada de nuevo como un apilamiento simple de dislocaciones contra el borde de grano. La energía asociada con este tipo de distribución viene dada por

$$U = \frac{1}{2} \int_{r_0}^R \frac{G(nb)^2}{r} dr = \frac{G(nb)^2}{2} \ln \frac{R}{r_0} \quad (16)$$

b es vector de Burguers de las dislocaciones,  $r_0$  fue tomado como el radio intrínseco de la primera dislocación y R como la longitud de la banda de deslizamiento.

Cuando la grieta crece, R decrece. Los autores citados igualaron el cambio de energía del sistema al cambiar la longitud de grieta a, con el cambio de energía de la banda de deslizamiento al cambiar R y siguiendo la aproximación de Griffith escribieron

$$\frac{dU}{dR} = \frac{G(nb)^2}{2R} = \frac{\tau^2}{G} \pi a \quad (17)$$

de donde la intensidad de la banda de deslizamiento es

$$nb = (2\pi aR)^{1/2} \tau/G$$

y por tanto el ritmo de crecimiento

$$\frac{da}{dN} = f (2\pi aR)^{1/2} \tau/G \quad (18)$$

El valor de R (longitud efectiva de la banda) depende de la distancia a la barrera de deslizamiento que representa el borde de grano y de la resistencia de esta barrera, que está determinada a su vez, por el cociente entre las tensiones cortantes proyectadas en los dos granos vecinos, y fue definida, siguiendo los argumentos de Chan y Lankford [67], como

$$R = D \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\tau_B}{\tau_A} \right) \left( \frac{D-X}{D} \right)^m \right] \quad (19)$$

El factor X, la distancia desde el pico de la grieta hasta la barrera, adopta valores en el intervalo  $0 < X < D$ , produciendo por tanto el modelo un ritmo de propagación decreciente (Fig. 5). Una vez que X alcanzaba el límite inferior ( $X=0$ ), se consideró por parte de los autores que permanecía igual a cero para el nivel particular de tensión aplicado, lo cual producía a partir de entonces un ritmo creciente (línea recta en coordenadas logarítmicas para la representación  $da/dN$  vs a).

Aunque este modelo hace una representación del proceso muy adecuada desde el punto de vista físico, la implementación matemática no es satisfactoria. En particular, a partir de que  $X$  se considere constante (porción recta de la representación gráfica)  $R$  es también constante, con lo cual deja de tener sentido la derivada en (17) que es la base de todo el modelo.

Hobson [19,20], ha considerado dos ecuaciones de crecimiento, una para el periodo de grieta corta y otra para el periodo de grieta grande. La unión entre ambos periodos la resuelve definiendo una zona de transición en que ambas ecuaciones se superponen.

Basándose en argumentos dimensionales, la ecuación para el crecimiento de grietas pequeñas propuesto por Hobson es del tipo

$$\frac{da}{dN} = C \cdot a^\alpha \cdot (D-a)^{1-\alpha} \quad (20)$$

donde  $C$  y  $\alpha$  son constantes.

Para el crecimiento de grietas grandes se postula una ecuación del tipo ley de Paris pero modificada para considerar el valor umbral del factor de intensidad de tensiones

$$\frac{da}{dN} = C \cdot (\Delta K^m - \Delta K_{th}^m) \quad (21)$$

A continuación Hobson considera los rangos de longitud de grieta en que cada ecuación es válida, definiendo tres zonas.

(1) La Zona de Grieta Pequeña.

Esta es la región donde la grieta crece dada la longitud inicial (la rugosidad superficial, el tamaño de inclusión, etc.) hasta la longitud  $a_{th}$  correspondiente, para el nivel de tensión aplicado, al factor de intensidad de tensiones umbral,

$$\Delta K_{th} = Y \cdot \Delta \sigma \sqrt{\pi a_{th}} \quad (22)$$

En esta zona se aplica la ecuación (20).

(2) La Zona Interactiva.

Hobson argumenta que en esta zona coexisten las características de grieta pequeña y grande y propone que la ecuación de crecimiento en esta zona es simplemente la adición de las dos ecuaciones (20) y (21). Esta zona se extiende desde  $a_{th}$  hasta el primer borde de grano, en que la ecuación de grieta pequeña se desvanece.

(3) La Zona de Grieta Grande.

Es la región final de aceleración de la grieta desde el primer borde de grano hasta el fallo del espécimen en que se aplica la ecuación (21). Cuando la tensión aplicada es baja, el modelo descrito predice el crecimiento de grieta hasta el tamaño  $D$  y su posterior detención. En efecto, cuando  $a_{th} > D$ , la zona de transición desaparece y no hay conexión entre los periodos de grieta pequeña y grande.

Este modelo proporciona una herramienta útil desde el punto de vista de cálculo, pero no ofrece ninguna explicación sobre los procesos físicos involucrados en el crecimiento de grietas pequeñas, limitándose a introducir el término  $D-a$  para reproducir el comportamiento de deceleración. En cuanto a la zona de transición, la propuesta de sumar las dos ecuaciones no tiene una fácil justificación física, puesto que el crecimiento de grieta está asociado con la deformación física irreversible que se produce en el vértice y nada hace pensar que este proceso pueda ser lineal, permitiendo la simple adición de los mecanismos participantes.

En el modelo desarrollado en el presente trabajo (Cap. IV) el crecimiento de la grieta es analizado en términos de los sucesivos bloqueos de la zona plástica en los bordes de grano y la subsecuente iniciación del deslizamiento plástico en el siguiente

grano. El carácter discontinuo del proceso de deslizamiento (saltos de deslizamiento) juega un papel fundamental en el modelo. El factor que gobierna la transmisión del deslizamiento es la concentración de tensiones en frente de la zona plástica que, para una tensión aplicada constante, depende solamente de un parámetro  $n = a/c$  que define la posición de la grieta con respecto al borde de grano. El carácter discreto del deslizamiento plástico tiene una influencia muy grande en el periodo de grieta pequeña y por tanto no puede ser despreciado en el análisis del crecimiento en este periodo. Esta fase se caracteriza por grandes variaciones en el parámetro  $n$ . En el periodo de grieta grande, los saltos de deslizamiento no influyen la descripción global del crecimiento y el parámetro  $n$  es casi constante. Haciendo el ritmo de crecimiento proporcional al número de dislocaciones en la zona plástica se puede explicar el comportamiento oscilante, de deceleraciones y aceleraciones de las grietas pequeñas y la existencia de grietas que no se propagan. Para las grietas grandes, se obtiene una relación lineal en coordenadas logarítmicas entre el desplazamiento plástico y el factor de intensidad de tensión, en concordancia con la ley de Paris. Las razones por las que las grietas pequeñas crecen a ritmos mayores que los predichos, mediante extrapolación de los datos de crecimiento de grietas grandes aparecen de forma explícita en el análisis.



REFERENCIAS

- |1| Albert, W.A.J. (1938) Arch. Miner. Geognosie Berg. Huttenkunde  
10, 215.
- |2| Wohler, A. (1871) "Test to Determine the Forces Acting on  
Railway Carriage Axles and the Capacity of Resistance of  
the Axles" Engineering 11, 199.
- |3| Gerber W. (1874) "Bestimmung der Zulossigen Spannungen in  
Eisen Constructionen" Z. Bayer Arch. Ing. Ver. 6.
- |4| Goodman, J. (1930) "Mechanics Applied to Engineering" Vol.  
1, 9ª Edición.
- |5| Soderberg, C.R. (1930) "Factor of Safety and Working Stress"  
Trans. ASTM, 52 (2).
- |6| Soderberg, C.R. (1935) "Working Stresses" Trans. ASTM 57,  
A 106.
- |7| Weibull W. (1961) "Fatigue Testing and Analysis of Results".  
Pergamon Press. Londres.
- |8| Weibull W. (1951) "A Statistical Distribution Function of Wide  
Applicability". Journal of Applied Mechanich. Septiembre.
- |9| Palmgren A. (1924) "Durability of Ball Bearing". ZDVDI. Vol.  
68. No. 14.
- |10| Miner M.A. (1945) "Cumulative Damage in Fatigue". J. of  
Appl. Mech. Septiembre.
- |11| Manson, S.S. (1965) "Fatigue: A Complex Subject-Some Simple  
Approximations". Expt. Mechanics, 5 (7), 193.

- [12] Manson, S.S. (1966) "Thermal Stress and Low Cycle Fatigue". McGraw-Hill, New York.
- [13] Neuber, H. "Theory of Stress Concentration for Shear Strained Prismatical Bodies with Arbitrary Non-Linear Stress-Strain Law". J. of Appl. Mech. Vol. 28. Pág. 544. 1961.
- [14] Stowell E.Z. (1950) "Stress and Strain Concentration at a Circular Hole in an Infinite Plate". NACA Tech. Note 2073. Washington.
- [15] Dowling N.E. (1979) "Notched Member Fatigue Life Predictions Combining Crack Initiation and Propagation". Fatigue of Eng. Mater. and Struct. 2 (2).
- [16] Miller, K.J. y Zachariah, K.P. (1977). Cumulative Damage Laws for Fatigue Crack Initiation and Stage I Propagation. Journal of Strain Analysis, Vol. 12, Nº 4.
- [17] Miller, K.J. (1982) The Short Crack Problem. Fat. Eng. Mat. and Struct., S., Nº 3, 223.
- [18] Miller K.J. (1984). Initiation and Growth Rates of Short Fatigue Cracks. Fundamentals of Deformation and Fracture. Eshelby Memorial Symposium. Sheffield, U.K., April 1984. Ed. B.A. Bilby K.J. Miller, J.R. Willis.
- [19] Hobson, P.D. (1982). The Formulation of a Crack Growth Equation for Short Cracks. Fat. Eng. Mat. and Struct. 5, 323.
- [20] Hobson, P.D. (1985) "The Growth of Short Fatigue Cracks in a Medium Carbon Steel" Ph.D. Thesis, University of Sheffield, U.K.

- [21] Bilby, B.A., Cottrell, A.H., F.R.S. y Swinden, K.H. (1963).  
The Spread of Plastic Yield from a Notch. Proc. Roy. Soc.  
(London) A 272, 304.
- [22] Taira, S., Tanaka, K. y Nakai, J. (1978). A model of Crack-Tip  
Band Blocked by Grain Boundary. Mech. Res. Comm. 5, 375.
- [23] Petch, N.J. (1953). The cleavage strength of Polycrystals.  
J. Iron Steel Inst., 174, 25.
- [24] Hall, E.O. (1951). The Deformation and Ageing of Mild Steel:  
III. Discussion of Results. Proc. Phys. Soc. London B64, 747.
- [25] Williams, M.L. (1957) "On the Stress Distribution at the Base  
of a Stationary Crack". Trans. ASME J. Appl. Mech., 24 (1)  
109.
- [26] Irwin, G.R. (1958), Fracture Handbuch der Physik, IV, 551.  
Springer-Verlag, Heidelberg.
- [27] Paris, P.C. y Endorgan, F. "A Critical Analysis of Crack  
Propagation Law". J. Basic Eng. Vol. 85. No. 4. 1963.
- [28] Stanzl, S. y Tschegg, E. (1980) "Fatigue Crack Growth and  
Threshold Measured at Very High Frequencies (20 KHz)". Met.  
Sci. 14, 137.
- [29] Hornbogen, E. y Gatz, K.Z. (1976) "Microstructure and Fatigue  
Crack Growth in a  $\gamma$ -Fe-Ni-Al Alloy" Acta. Met. 24, 581.
- [30] Hutchinson, J.W. (1968) "Singular Behaviour at the End of  
a Tensile Crack in Hardening Material". J. Mech. Phys. Solids,  
16, 13.
- [31] Rice, J.R. y Rosengren, G.F. (1968) "Plane Strain Deformation  
near a Crack Tip in a Power-Law Hardening Material" J. Mech.  
Phys. Solids, 16, 1.

- |32| Rice, J.R. (1968) "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks". J. Appl. Mech. 35, 379.
- |33| Dowling, N.E. (1976) in "Cracks and Fracture", STP 601, 19, Philadelphia, ASTM.
- |34| Dowling, N.E. y Begley, J.A. (1976) in "Mechanics of Crack Growth" STP 590, 82, Philadelphia, ASTM.
- |35| Tomkins, B. (1975) "Fatigue Failure". International Conference on Mechanics and Physics of Fracture, Cambridge.
- |36| Solomon, H.D. (1972) "Low Cycle Fatigue Crack Propagation in 1018 Steel" J. Mater. 7, 299.
- |37| Ibrahim, M.F.E. y Miller, K.J. (1980) "Determination of Fatigue Crack Initiation Life" Fatigue Engng. Mater. Struct. 2, 351.
- |38| Morris W.L. (1978) "The Effect of Intermetallics Composition and Microstructure on Fatigue Crack Initiation in Al 2219-T851" Met. Trans. A., 9A, 1345.
- |39| Lankford, J. (1982) "The Growth of Small Fatigue Cracks in 7075 T6 Aluminium" Fatigue Engng. Mater. Struct., 5, 233.
- |40| Lankford, J. (1983) "The Effect of Environment on the Growth of Small Fatigue Cracks". Fatigue Engng. Mater. Struct., 6(1), 15.
- |41| Lankford, J. (1977) "Initiation and Early Growth of Fatigue Cracks in High Strength Steel". Eng. Fract. Mech., 9, 617.

- [42] Perez Carbonell, E. y Brown, M.W. (1986) "A Study of Short Crack Growth in Torsional Low Cycle Fatigue for a Medium Carbon Steel". *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 9(1), 15.
- [43] Pearson, S. (1975) "Initiation of Fatigue Cracks in Commercial Aluminium Alloys and the Subsequent Propagation of Very Short Cracks" *Eng. Fract. Mech.*, 7, 235.
- [44] Lankford, J. (1985) "The Influence of Microstructure on the Growth of Small Fatigue Cracks". *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 8(2), 161.
- [45] Brown, C.W. and Taylor, D. (1984) "The Effects of Texture and Grain Size on the Short Fatigue Crack Growth Rates in Ti-6Al-4V" *Fatigue Crack Growth Threshold Concepts* (ed. Davidson D. and Suresh, S.) pp. 433-446, TMS AIME, Warrendale Pennsylvania.
- [46] Taylor, D. and Knott, J.F. (1981) "Fatigue Crack Propagation Behaviour of Short Cracks; The Effect of Microstructure" *Fatigue Engng. Mater. Struct.*, 4, 147.
- [47] Brown, C.W. and Hicks, M.A. (1983) "A Study of Short Fatigue Crack Growth Behaviour in Titanium Alloy IMI 685" *Fatigue Engng. Mater. Struct.*, 6, 67-46.
- [48] Tanaka, K., Hojo, M. and Nakai, Y. (1983) "Fatigue Crack Initiation and Early Propagation in 3% Silicon Iron" *Fatigue Mechanisms: Advances in Quantitative Measurement of Physical Damage*, ASTM STP 811, pp. 207.

- [49] Taylor, D. (1982) Euromech Colloquium on Short Fatigue Cracks, Fatigue Engng. Mater. Struct., 5(4), 305.
- [50] Yoder, G.R., Cooley, L.A. and Crooker, T.W. (1982) "On Microstructural Control of Near-Threshold Fatigue Crack Growth in 7000-Series Aluminium Alloys" Sci. Metall. 16, 595.
- [51] Zurek, A.K., James, M.R. and Morris, M.L. (1983) "The Effect of Grain Size on Fatigue Growth of Short Crack" Meta. Trans. 14A, 1697.
- [52] James, M.R., Morris, W.L., Zurek, A.K. (1983) "On the Transition from Near-Threshold to Intermediate Growth Rates in Fatigue" Fatigue Engng., Mater. Struct., 6(3), 293.
- [53] Bolingbroke, R.K. and King, J.E. (1986) "A Comparison of Long and Short Fatigue Crack Growth in a High Strength Aluminium Alloy" 2nd Symposium on the Behaviour of Short Fatigue Cracks, University of Sheffield, 25-28 September 1985. European Group on Fracture Publication No. 1. A ser publicado por Mechanical Engineering Publications, Instn. Mech. Engrs., London 1986.
- [54] Blom, A.F., Hedlund, A., Zhao, W., Fathulla, A., Weiss, B. and Stickler, R. (1986) "Short Fatigue Crack Growth Behaviour in Al 2024 and Al 7475". idem [53].
- [55] Tokaji, K., Ogawa, T., Harada, Y. and Ando, Z. (1986) "Limitations of Linear Elastic Fracture Mechanics in Respect of Small Fatigue Cracks and Microstructure" Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., 9(1), 1.

- [56] Lankford, J. and Davidson, D. (1978) "Fatigue Crack Tip Plastic Zone Sizes in Alluminium Alloys" *Int. J. Fract.*, 14, R87.
- [57] Morris, W.L. (1979) "Microcrack Closure Phenomena for Al 2219-T851" *Met. Trans. A*, 10A, 5.
- [58] Morris, W.L. (1980) "Noncontinuum Crack Tip Deformation Behaviour of Surface Microcracks" *Met. Trans. A*, 11A, 1117.
- [59] Smith, R.A. (1977) "On the Short Crack Limitations of Fracture Mechanics" *Int. J. of Frac.*, 13, 717.
- [60] Brown, W.F. y Srawley, J.E. (1966) in *Plane Strain Crack Toughness Testing of High Strength Metallic Materials*, STP 410, 1, Philadelphia, ASTM.
- [61] Kitagawa, H. y Takahashi (1976) "Applicability of Fracture Mechanics to Very Small Cracks or the Crack in the Early Stage" *Proceedings of the Second International Conference on Mechanical Behaviour of Material*, ASM, 627.
- [62] Suresh, S. y Ritchie, R.O. (1984) "Propagation of Short Fatigue Cracks" *Int. Metals Reviews*, 29(6), 45.
- [63] James, M.R. y Morris, W.L. (1983) "Effect of Fracture Surface Roughness on Growth of Short Fatigue Cracks" *Metall. Trans.* 14A, 153.
- [64] Frandsen, J.D. Inman. R.V. y Buck, O. (1975) "A Comparison of Acoustic and Strain Gauge Technique for Crack Closure" *Int. J. Fract.*, 11, 345.

- [65] Tanaka, K. y Nakai, Y. (1983) "Propagation and Non-Propagation of Short Fatigue Cracks at a Sharp Notch". *Fatigue Engng. Mater. Struct.*, 6, 315.
- [66] Chang, R., Morris, W.L. y Buck, O. (1979) "Fatigue Crack Nucleation at Intermetallic Particles in Alloy-A Dislocation Pile-up Model" *Scripta Metall.*, 13, 191.
- [67] Chan, K.S. y Lankford, J. (1983) "A Crack Tip Model for the Growth of Small Fatigue Cracks" *Scripta. Metall.*, 17, 529.
- [68] Suresh, S. (1983) "Crack Deflection: Implications for the Growth of long and Short Fatigue Cracks" *Metall. Trans.*, 14A, 2375.
- [69] Paris, P.C. y Sih, G.C. (1965) *Stress Analysis of Cracks*, STP 381, 30, Philadelphia, ASTM.
- [70] De los Rios, E.R., Tang, Z. and Miller, K.J. (1984) "Short Crack Fatigue Behaviour in a Medium Carbon Steel" *Fatigue Engng. Mater. Struct.*, 7(2), 97.
- [71] Eastabrook, J.N. (1984) "A Dislocation Model for the Rate of Initial Growth of Stage I Fatigue Cracks" *Int. J. of Fracture*, 24, R43.
- [72] De los Rios, E.R., Mohamed, H.J. and Miller, K.J. (1985) "A Micro-Mechanics Analysis for Short Fatigue Crack Growth" *Fatigue Engng. Mater. Struct.*, 8(1), 49.



CAPITULO I - FIGURAS

- Figura 1. Curva Típica de Crecimiento de Grieta Grande.
- Figura 2. Longitudes Críticas de Grietas Definidas por Taylor y Knott [46,49].
- Figura 3. Mecanismos de Cierre de Grieta.
- Figura 4. Deflexión de la Grieta en el Borde de Grano.
- Figura 5. Curva de Crecimiento de Acuerdo al Modelo de de los Ríos-Mohamed-Miller [72].

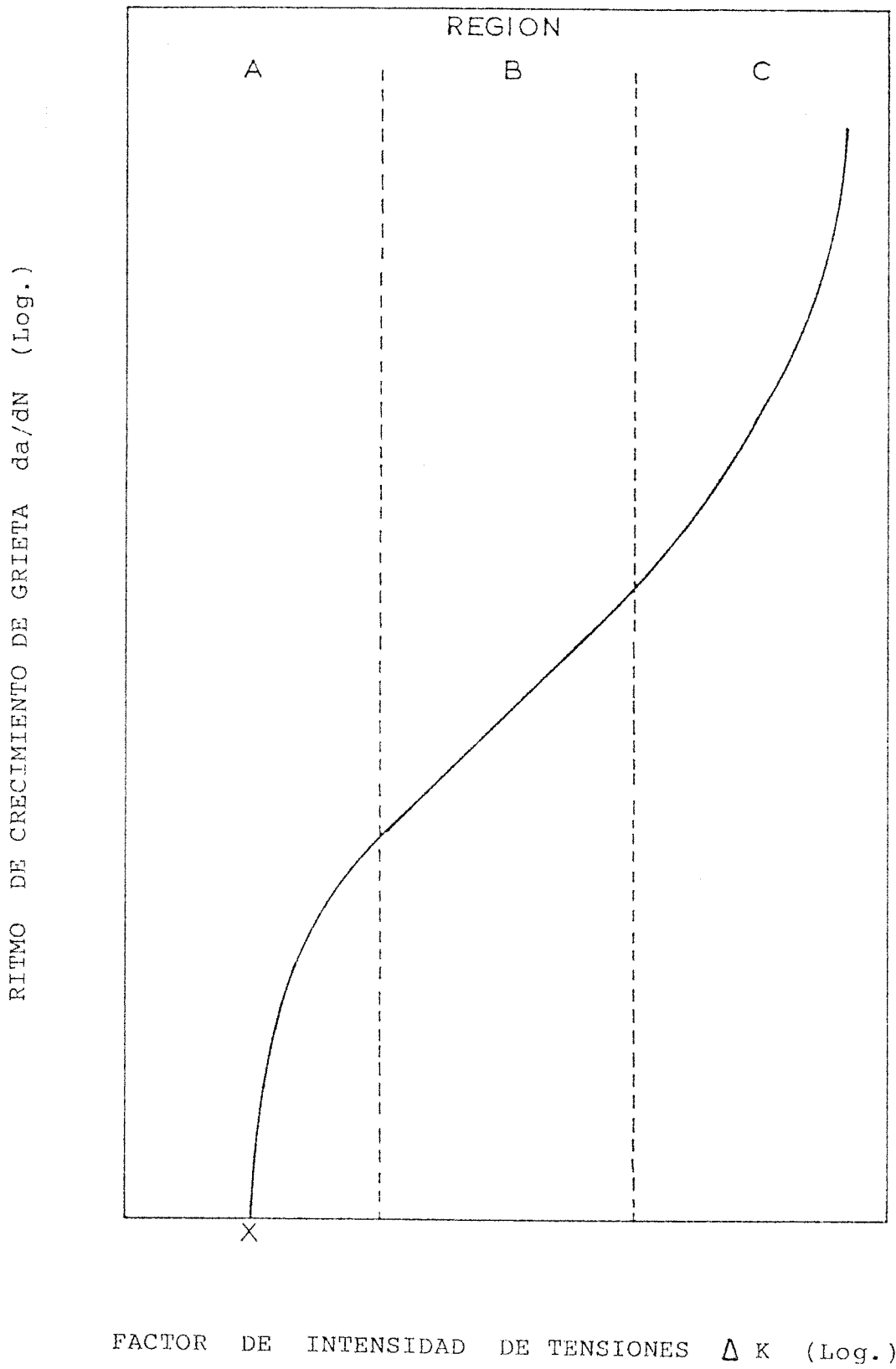


Figura 1. Curva Típica de Crecimiento de Grieta Grande.

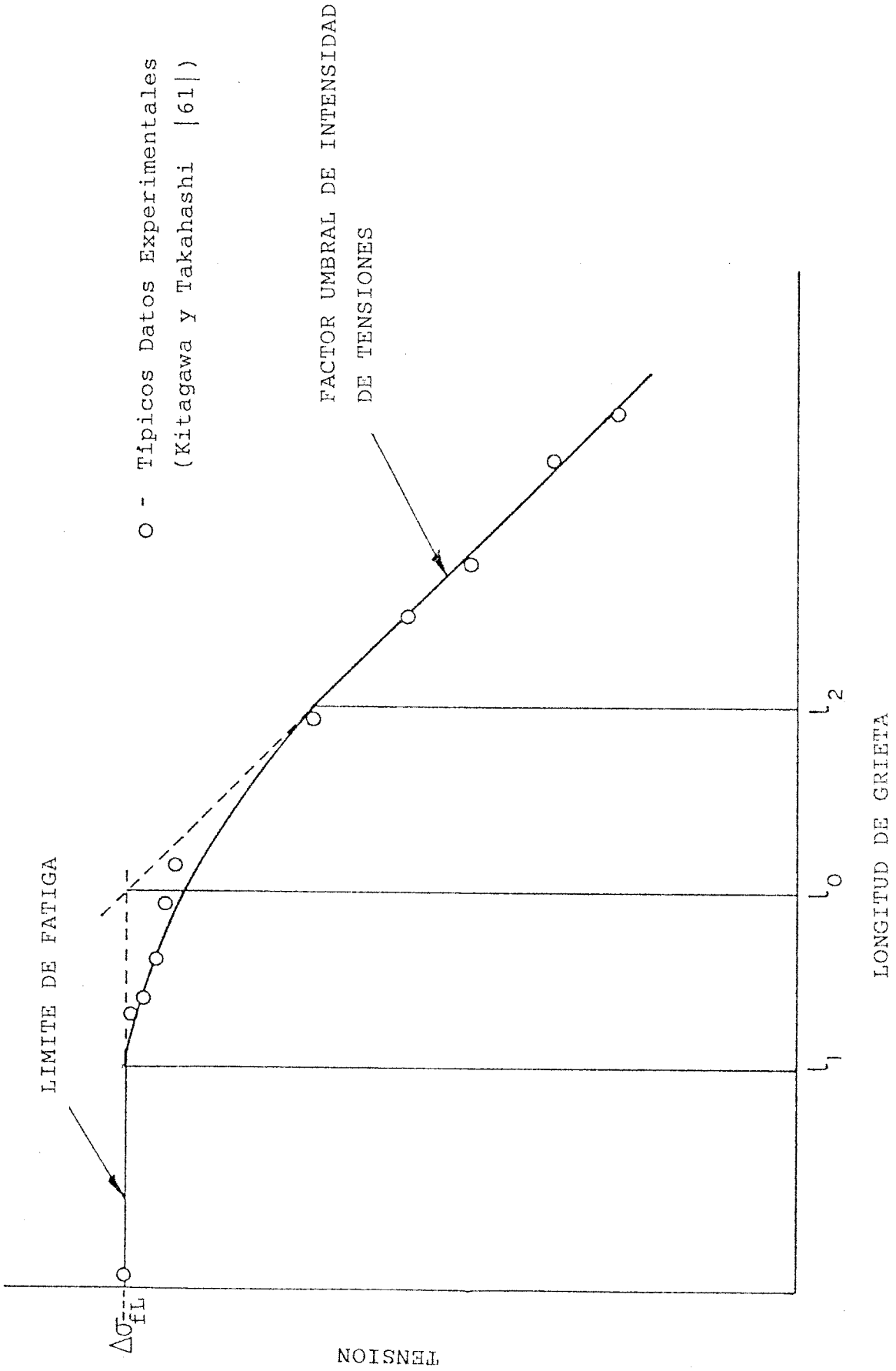
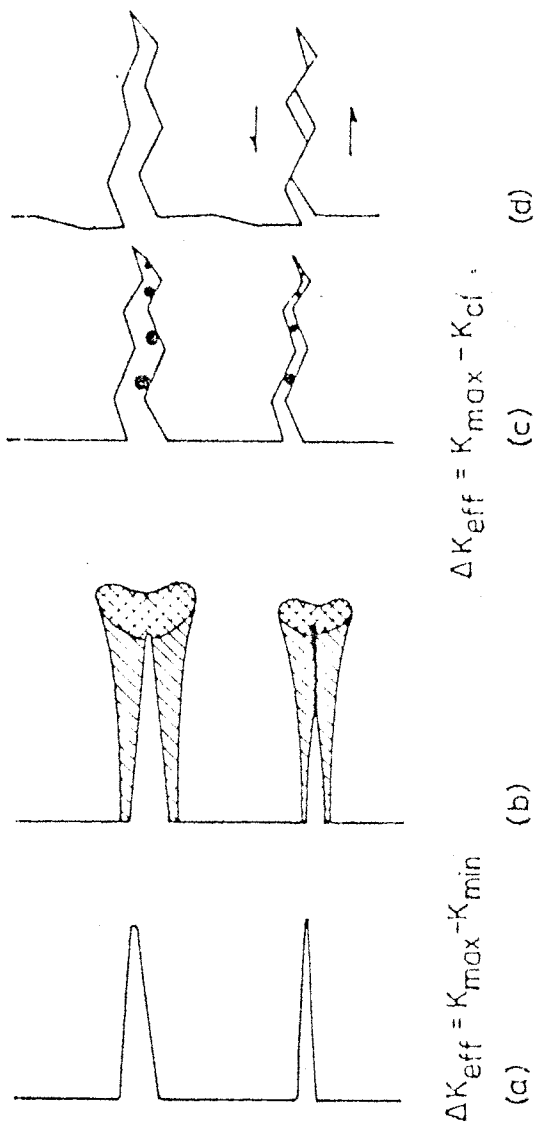


Figura 2. Longitudes Críticas de Grietas Definidas por Taylor y Knott [46,49].



- (a) Grieta sin Cierre
- (b) Cierre Inducido por Plasticidad
- (c) Cierre Inducido por Corrosión
- (d) Cierre Inducido por Rugosidad

Figura 3. Mecanismos de Cierre de Grieta.

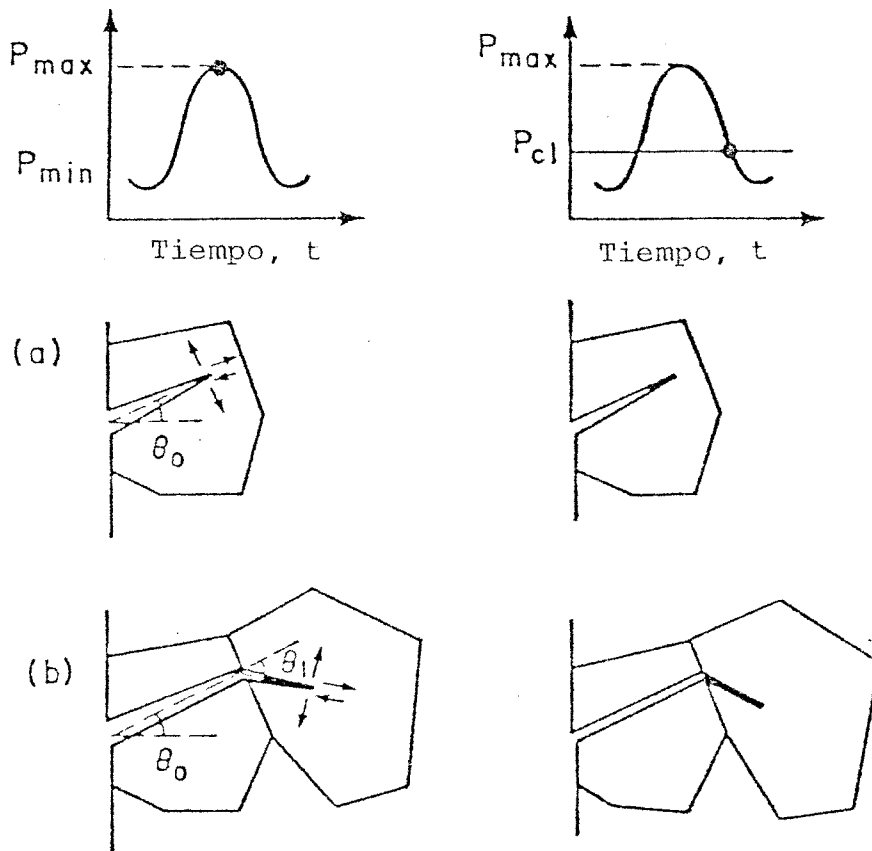


Figura 4. Deflexión de la Grieta en el Borde de Grano.

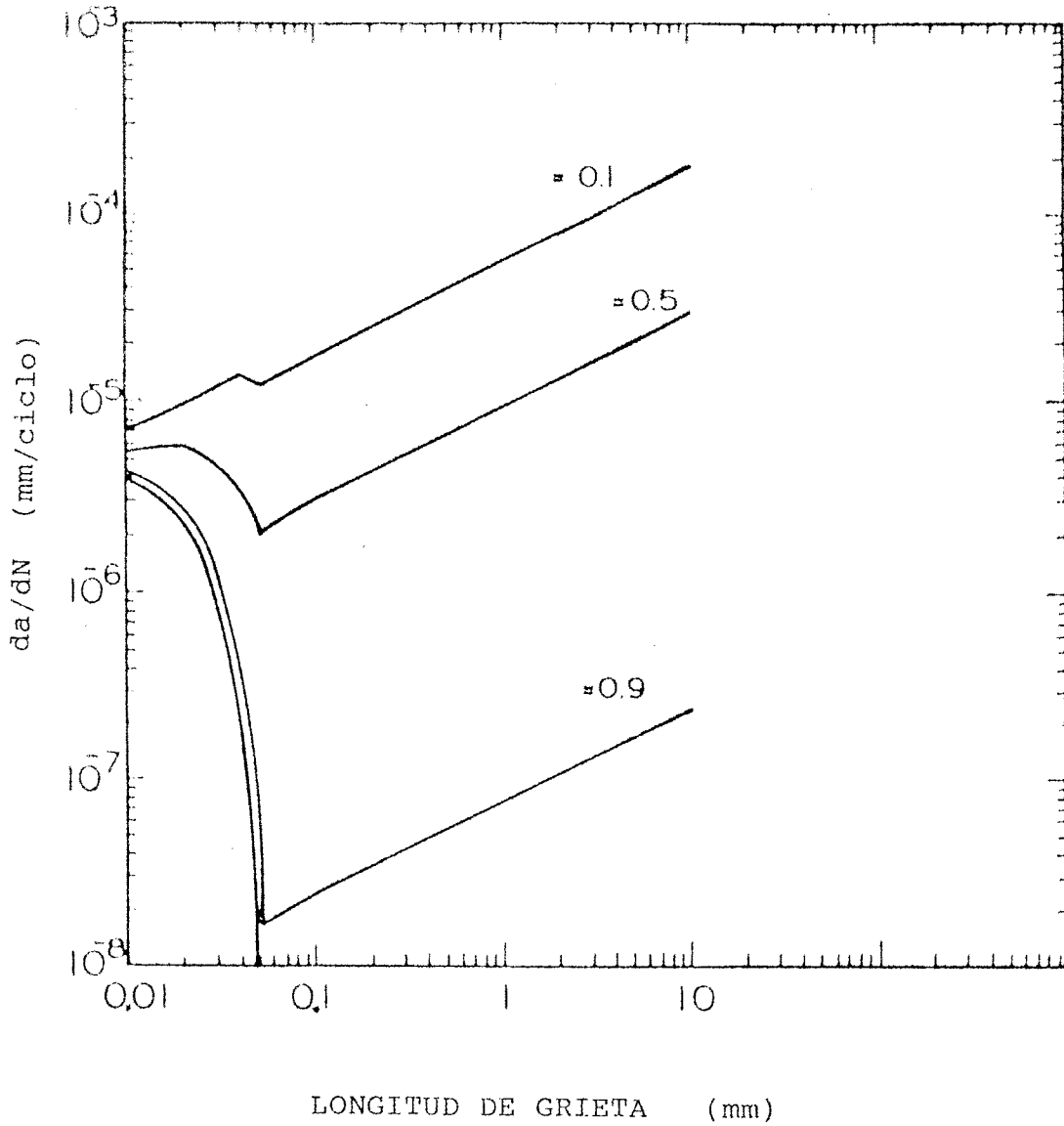


Figura 5. Curva de Crecimiento de Acuerdo al Modelo de de los Ríos-Mohamed-Miller [72].

CAPITULO II. ANALISIS DIMENSIONAL DEL RITMO DE  
CRECIMIENTO Y SIMILITUD GEOMETRICA  
DE GRIETAS

ANÁLISIS DIMENSIONAL DEL RITMO DE CRECIMIENTO DE GRIETA.

En un reciente trabajo Wagner [1] ha aplicado las técnicas de Análisis Dimensional al problema de la fractura de materiales. La configuración considerada fue la de un medio elástico infinito, homogéneo e isótropo con una grieta de longitud  $2a$ , y sometido a una tensión uniforme  $\sigma$ , perpendicular al plano de la grieta.

Las variables relevantes al problema considerado fueron la tensión aplicada  $\sigma$ , el módulo de Young  $E$ , la dimensión de la grieta  $a$  y la energía superficial  $\gamma$ .

Un criterio de fallo del tipo

$$f(a, E, \gamma, \sigma) = 0 \quad (1)$$

se transforma mediante el método de Buckingham en

$$F(\pi_1, \pi_2) = 0 \quad (2)$$

donde

$$\pi_1 = \sigma \cdot a / \gamma \quad (3)$$

$$\pi_2 = E \cdot a / \gamma \quad (4)$$

La expresión (2) se reduce al bien conocido criterio de Griffith cuando se elige la combinación  $\pi_1 \cdot \pi_2^{-1/2}$ .

El propósito del presente capítulo es extender el análisis de Wagner al estudio del ritmo de crecimiento de grieta  $da/dN$ .



Como en este caso la deformación plástica debe ser considerada, el parámetro energético  $\chi$  debe incorporar también el trabajo plástico. Además, una nueva dimensión característica  $c$  representando la extensión de la zona plástica debe ser introducida también (ver Fig. 1).

Puesto que la fatiga es producida por carga variable, el rango de variación entre máximo y mínimo de la carga (llamado en adelante rango de tensión) es un parámetro más representativo. Además, como el fenómeno de plasticidad es asociado a nivel microscópico con el deslizamiento por cortante entre dos partes de cristal, el rango de tensión cortante  $\Delta\tau$  y el módulo de elasticidad transversal  $G$  son magnitudes más adecuadas.

Para considerar en el análisis la microestructura del material el diámetro de grano  $D$  y el vector de Burgers  $b$ , se introducen también en el conjunto de parámetros.

La tensión de fricción  $\tau_0$  es la tensión que se opone al movimiento de las dislocaciones y por tanto debe ser restada de la tensión aplicada en la zona plástica. Sin embargo su valor suele ser pequeño comparado con la tensión aplicada ( $\Delta\tau/\Delta\tau_0 \gg 1$ ) y por tanto no se considera en el análisis.

La tensión de fluencia o límite elástico no se considera tampoco puesto que se relaciona con las dimensiones  $a$  y  $c$  a través -

de la conocida relación de Dugdale [2].

En principio, la expresión definiendo  $da/dN$ , que tiene dimensiones de longitud, se compondrá de los dos parámetros  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  definidos por Wagner, dos adicionales parámetros adimensionales que son las dos nuevas longitudes características y un parámetro libre con dimensiones de longitud.

Desde el punto de vista micromecánico, el crecimiento de grieta en cada ciclo debe ser proporcional al desplazamiento plástico en el pico de la grieta, que es a su vez igual al número de dislocaciones en la zona plástica multiplicado por el vector de Burguers. Por tanto, el vector de Burguers es una elección adecuada como longitud libre en la expresión para  $da/dN$ .

De acuerdo con esto, una expresión tentativa para  $da/dN$  es la siguiente

$$\frac{da}{dN} = C \left( \frac{a \cdot \Delta \bar{\sigma}}{\gamma} \right)^\alpha \cdot \left( \frac{a \cdot G}{\gamma} \right)^\beta \cdot \left( \frac{a}{D} \right)^\epsilon \cdot \left( \frac{c}{D} \right)^\eta \cdot b \quad (5)$$

donde  $C, \alpha, \beta, \epsilon, \eta$  son constantes.

Cuando la microestructura no influencia el proceso de crecimiento (i.e en la zona de grieta larga o grieta propiamente dicha), el término  $D$  debe desaparecer. Por tanto, sigue que

$$\epsilon = -\eta \quad (6)$$

y en consecuencia

$$\frac{da}{dN} = C \cdot b \cdot \left( \frac{a \cdot \Delta \bar{\sigma}}{\gamma} \right)^\alpha \cdot \left( \frac{G \cdot a}{\gamma} \right)^\beta \cdot \left( \frac{a}{c} \right)^\epsilon \quad (7)$$

Si, siguiendo a Wagner, se usa la combinación  $\Pi_1 \cdot \Pi_2^{-1/2}$ , se obtiene

$$\alpha = m \quad (8)$$

$$\beta = \frac{-1}{2} m \quad (9)$$

con la cual

$$\frac{da}{dN} = C \cdot b \cdot \left( \frac{1}{G \gamma \pi} \right)^{\frac{1}{2} m} \cdot (\Delta \sigma \cdot \sqrt{\pi a})^m \cdot \left( \frac{a}{c} \right)^{\epsilon} \quad (10)$$

Reconociendo el término de orden  $m$  como equivalente al Factor de Intensidad de Tensiones, la relación (10) toma una forma similar a la ley de Paris.

Además, para los valores de tensión en que la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal se considera aplicable [3]  $\Delta \sigma / \Delta \sigma_y < 0.3$ , la relación de Dugdale [2]

$$n = \frac{a}{c} = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_y}\right) \quad (11)$$

da valores de  $n=a/c$  entre 0.9 y 1., y, por tanto, despreciando esta variación en (10) se obtiene la ley de Paris

$$\frac{da}{dN} = B \cdot \Delta K^m \quad (12)$$

Sin embargo, cuando la deformación plástica es mayor, el término  $n=a/c$  debe ser tenido en cuenta y entonces el parámetro  $\Delta K$  no describe por sí solo la similitud física. Las ecuaciones (10) y (11) predicen para diferentes rangos de tensión aplicada diferentes curvas de  $da/dN$  vs  $\Delta K$ , que serán líneas rectas paralelas en coordenadas Log-log. Comportamientos de este tipo han sido descritos en la literatura. De hecho, un examen de los datos de Martin y Sinclair [4] presentados por Paris y Erdogan

en su ya clásico artículo [5] sugiere fuertemente esta posibilidad. Estos datos han sido dibujados aquí de nuevo en la Fig. 2. Debe notarse que datos pertenecientes a tres diferentes niveles de tensión aplicada pueden agruparse en tres diferentes, aunque muy próximas, líneas.

De forma similar, la variación con la tensión aplicada de la pendiente en la relación lineal entre el logaritmo de la longitud de grieta y el número de ciclos en el trabajo de Frost y Dugdale [6] concuerda con esta descripción.

Más recientemente, la descripción esquemática del comportamiento de grietas pequeñas y grietas propiamente dichas presentada por Miller et al [7] y Brown [8] basada en las ecuaciones de crecimiento obtenidas experimentalmente por Hobson [9,10] para un acero de 0.4% de contenido en carbono, también refuerza la idea expresada aquí.

Es interesante señalar que esta tendencia ha sido también observada por Solomon en un acero 1018 sometido a fatiga por encima del límite elástico [11]. Aunque la interpretación en este caso es más complicada, conviene recordar la sugerencia adelantada por Tomkins [12] quien sustituye en la ecuación [11] el límite elástico  $\sigma_y$  por la resistencia o tracción  $\sigma_u$ , argumentando que el material en la vecindad del pico de la grieta debe estar sometido a una tensión real de ese orden.

Otro caso de interés es el de grietas pequeñas. En particular cuando se describe el crecimiento de una grieta confinada en un solo grano del metal en términos del modelo de las Bandas de Deslizamiento Bloqueadas [13,14] por ejemplo, la zona plástica se considera bloqueada por el borde de grano. Consecuentemente, la longitud  $c$  es igual a  $D/2$  mientras que la longitud de grieta  $a$  varía entre 0 y  $D/2$ . Resulta obvio que en este caso la variación del factor  $n=a/c$  no puede despreciarse en la ecuación (10) y, por tanto, no se debe esperar que la ley de Paris pueda aplicarse para describir el crecimiento de grietas pequeñas [3].

#### SIMILITUD FISICA EN EL CRECIMIENTO DE GRIETA.

Para concluir este capítulo, considérese, finalmente, la idea de que la relación de Dugdale (11) describe el crecimiento auto-similar de una grieta, reflejando la falta de cualquier influencia microestructural, o, en otras palabras, la hipótesis de un medio homogéneo y continuo.

La palabra continuo en este contexto es importante y significa que no hay ninguna característica microestructural distinguible que pueda usarse para definir la unidad de longitud. La unidad de longitud tendría que definirse, por tanto, mediante la longitud de la misma grieta o mediante la longitud  $c$  que incluye la zona plástica, ya que éstas son los únicos hechos geométricos tangibles.

Seleccionando  $c$ , la descripción geométrica se reduce a identificar la longitud de grieta con  $n=a/c$  y, por tanto, existe

similitud mecánica entre dos cuerpos infinitos conteniendo una grieta cada uno cuando la "longitud" de estas grietas es en ambos casos igual a  $n$ .

Siguiendo con estas ideas, dos grietas tendrán el mismo ritmo de crecimiento cuando doblen o tripliquen sus longitudes en el mismo número de ciclos. Esto quiere decir que la comparación debe hacerse en base a la cantidad

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{da}{dN} \quad (13)$$

Usando el modelo de las Bandas de Deslizamiento Bloqueadas, la relación entre el desplazamiento plástico  $\phi$  y la longitud de grieta, en el caso  $\Delta\tau/\Delta\tau_0 \gg 1$ , puede escribirse (como se verá en los próximos capítulos)

$$\frac{\phi}{a} = \frac{1}{\pi A} \cdot b \cdot \frac{\sqrt{1-n^2}}{n} \cdot \Delta\tau \quad (14)$$

donde  $A$  es una constante que incluye el módulo cortante  $G$  y el módulo de Poisson  $\nu$ .

De acuerdo con esta expresión, dos grietas sometidas a la misma carga tendrán la misma "velocidad de crecimiento" cuando sean de la misma longitud  $n$ .

Haciendo uso del modelo de Bilby, Cotrell y Swinden [15] que lleva a la misma relación (11) que el modelo de Dugdale (i.e,  $n$ =constante bajo tensión aplicada constante), Lardner [16] ha demostrado que existe una relación lineal en coordenadas logarítmicas, entre el desplazamiento plástico y el factor de intensidad de tensiones y esta es la base de la ley de Paris.

De la misma forma se demostrará en un capítulo posterior, que cuando  $n$  se considera constante, una relación similar entre  $\phi$  y  $\Delta K$  se obtiene en el modelo de las Bandas de Deslizamiento Bloqueadas.

En conclusión, el crecimiento de una grieta (grieta larga) bajo un rango constante de tensión aplicada puede verse como un proceso en el que la similitud geométrica se conserva y la relación de Dugdale puede interpretarse como la expresión de esa similitud.

REFERENCIAS.

- [1] Wagner, H. D. (1984) "On the use of Dimensional Analysis in Material Failure". Int. J. of Fracture, 25, R83.
- [2] Dugdale, D.S. (1960) "Yielding of Steel Sheets Containing Slits". J. Mech. Phy. Solids, 8, 100.
- [3] Miller, K. J. (1984) "Initiation and Growth Rates of Short Fatigue Cracks!" Fundamentals of Deformation and Fracture, Eshelby Memorial Symposium, Sheffield, Abril 1984, pp 477-500.
- [4] Martin, D. E. y Sinclair, G. M. (1958) "Crack Propagation under Repeated Loading". Proceedings of the Third U.S. National Congress of Applied Mechanics, Junio 1958, pp. 595-604.
- [5] Paris, P. y Erdogan, F. (1963) "A Critical Analysis of Crack Propagation Laws". Trans.of ASME, Journal of Basic Engineering, 85, 528.
- [6] Frost, N.E. y Dugdale, D.S. (1958) "The Propagation of Fatigue Cracks in Sheet Specimens". J. Mech. Phy. Solids, 6(2), 92.
- [7] Miller, K.J., Mohamed, H.J., Brown, M.W. and de los Rios, E.R., (1986) "Barriers to Short Fatigue Crack Propagation at Low Stress Amplitudes in a Banded Ferrite -Pearlite Structure", Short Crack Meeting, Santa Bárbara, Enero 1986. A ser publicado por TMS-AIME.
- [8] Brown, M.W. (1986) "Interfaces Between Short, Long and Non Propagating Cracks". European Group on Fracture, publication nº 1. A ser publicado por Mechanical Engineering Publications. Inst, Mech. Engrs., London 1986.



- [9] Hobson, P.D. (1985) "The Growth of Short Fatigue Cracks in a Medium Carbon Steel". Ph. D. Tesis, Universidad de Sheffield, Gran Bretaña.
- [10] Hobson, P.D., Brown, M.W. y de los Rios, E.R. (1986) "Two Phases of Short Crack Growth in a Medium Carbon Steel", *idem* 8.
- [11] Solomon, H.D. (1972) "Low Cycle Fatigue Crack Propagation in 1018 Steel". *Journal of Materials, J.M.L.S.A.*, 7(3), 299.
- [12] Tomkins, B. (1968) "Fatigue Crack Propagation. An Analysis". *Phil. Mag.* 13, 1041.
- [13] Taira, S., Tanaka, K. y Nakai, J. (1978) "A Model of Crack Tip Band Blocked by Grain Boundary". *Mech. Res. Comm.*, 5, 375.
- [14] Eastabrook, J.N. (1984) "A Dislocation Model for the Rate of Initial Growth of Stage I Fatigue Cracks". *Int. J. of Fracture*, 24, R43.
- [15] Bilby, B.A., Cottrell, A.H. y Swinden, K.H. (1963) "The Spread of Plastic Yield from a Notch". *Proc. Roy. Soc. (London)* A272, 304.
- [16] Lardner, R.W. (1968) "A Dislocation Model for Fatigue Crack Growth in Metals". *Phil. Mag.*, 17, 71.

CAPITULO II - FIGURAS

- Figura 1. Grieta en un Medio Infinito.
- Figura 2. Datos de Crecimiento de Martin y Sinclair  
|4| en un Aluminio 245-T3
- a)  $da/dN$  vs.  $K$ .
- b)  $\ln da/dN$  vs.  $K$ .

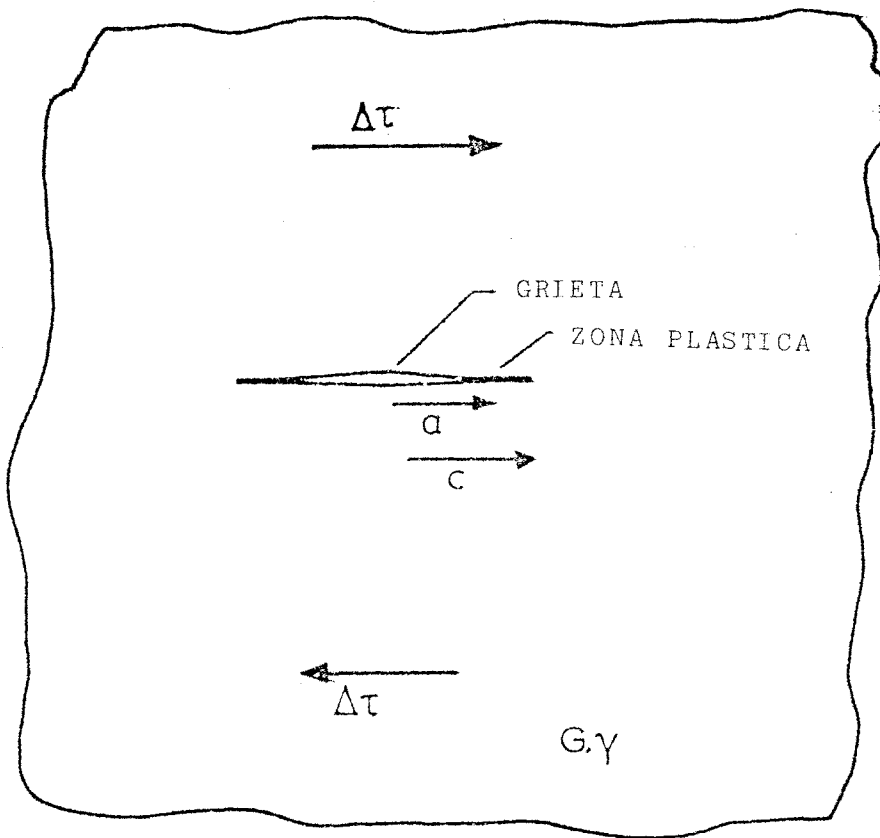


Figura 1. Grieta en un Medio Infinito.

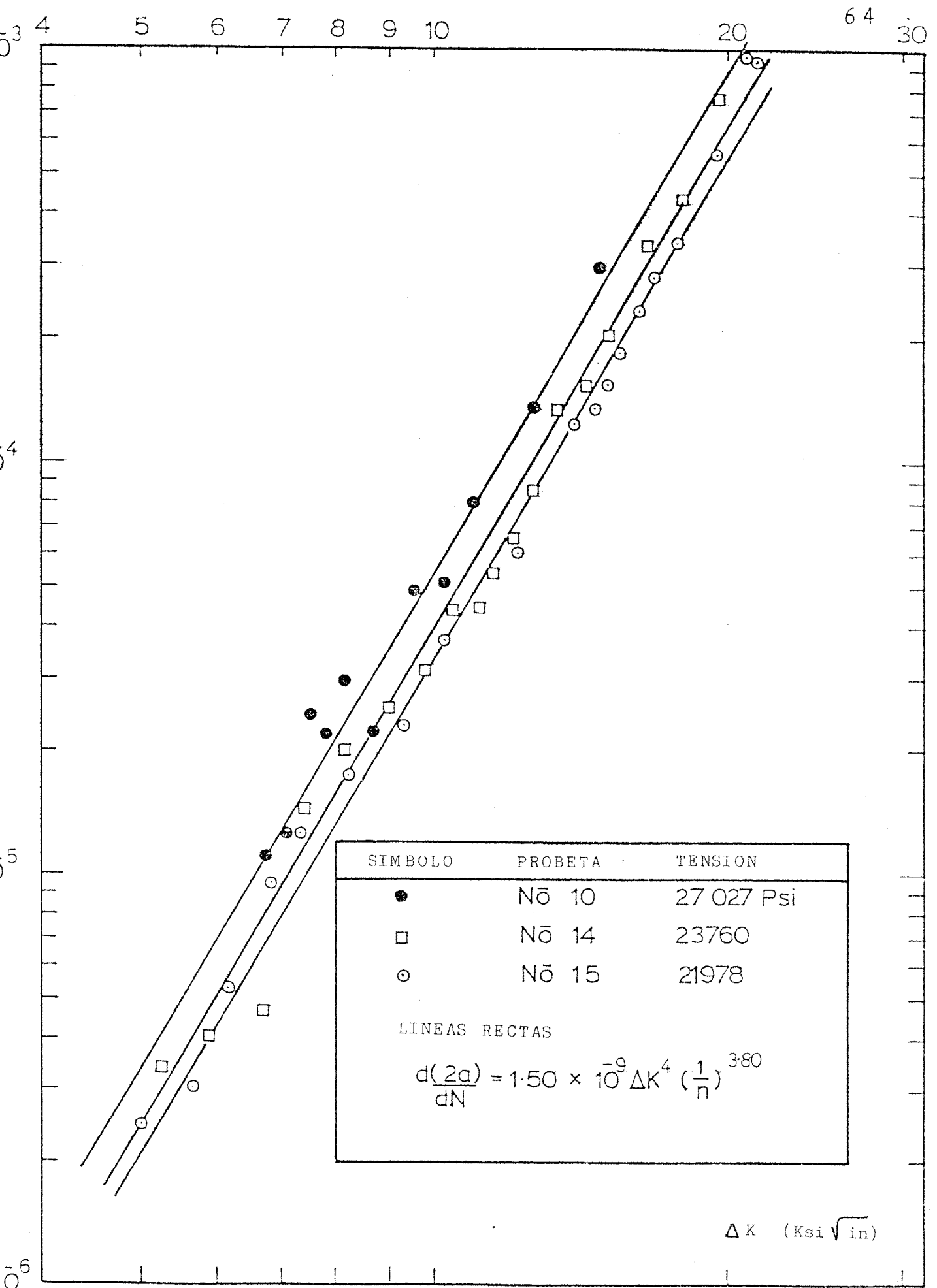


Figura 2. Datos de Crecimiento de Martin y Sinclair

[4] en un Aluminio 245-T3

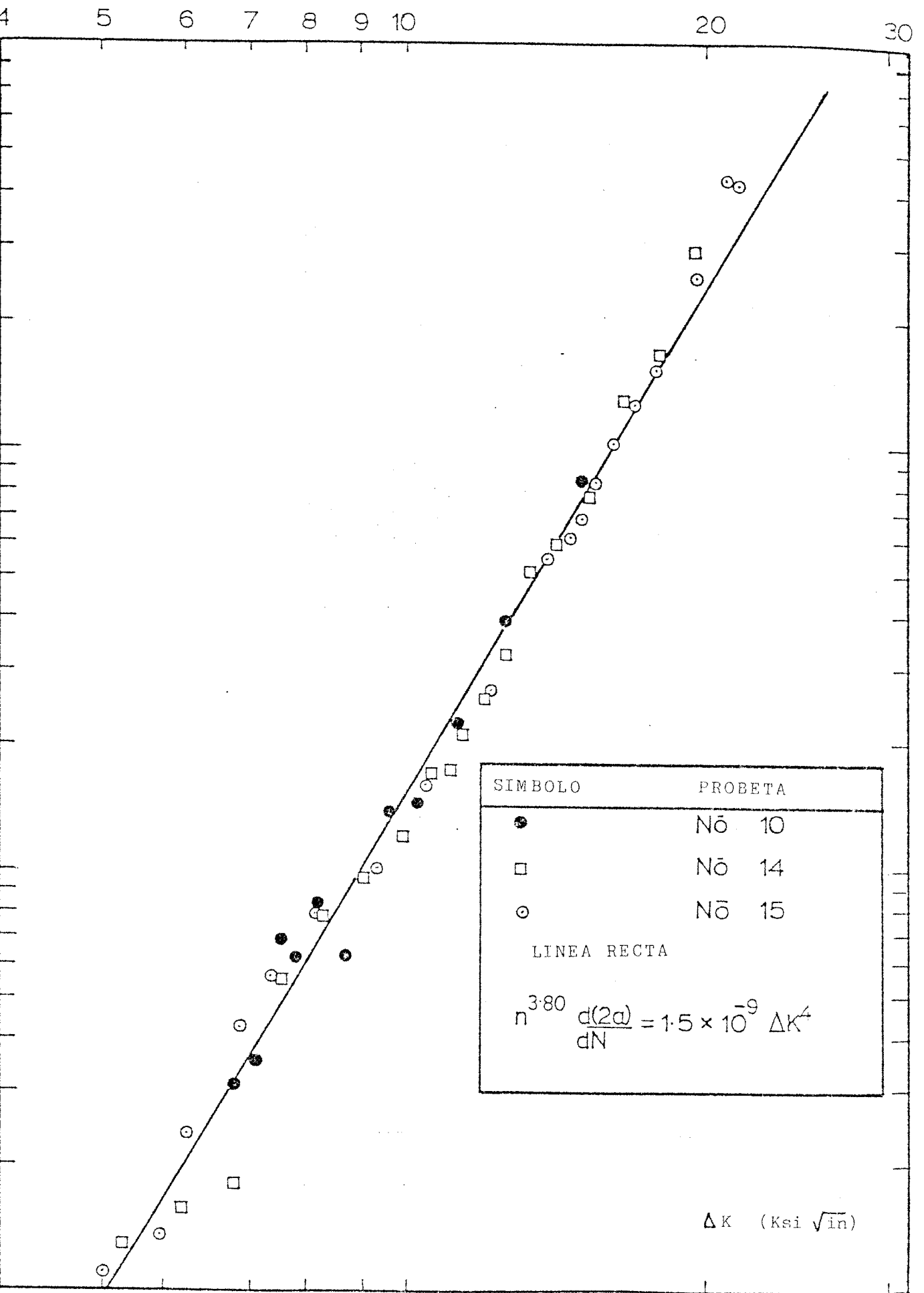


Figura 2. Datos de Crecimiento de Martin y Sinclair

[4] en un Aluminio 245-T3

CAPITULO III. SOLUCION COMPACTA PARA LA REPRESENTACION  
DE LA GRIETA MEDIANTE LA TEORIA DE DISLO  
CACIONES

## INTRODUCCION.

El estudio de la propagación de grietas pequeñas ha atraído recientemente mucho interés en la representación de la grieta mediante distribuciones de dislocaciones, como una herramienta apropiada para modelizar la interacción entre grietas pequeñas y factores microestructurales tales como bordes de grano [1-5] (Fig. 1).

Las ecuaciones que determinan la distribución de dislocaciones son del mismo tipo, independientemente de si se consideran dislocaciones de tornillo bajo una tensión aplicada  $\overline{\sigma}_{yz} = \tau$  (deformación antiplana) o dislocaciones de borde bajo una tensión  $\overline{\sigma}_{xy} = \tau$  (deformación plana). En ambos casos la distribución es anti-simétrica con respecto a  $x$ , pero en el último caso, la superficie  $x=0$  está libre de tracciones y, por lo tanto, la misma solución para  $x > 0$  representa el estado de un cuerpo semi-infinito con la superficie libre en  $x=0$  [6].

En ambos casos, los vectores Burgers de las dislocaciones son paralelos al plano de la grieta.

Una grieta abierta en modo I por una tensión normal  $\overline{\sigma}_{xx} = \sigma$  puede representarse mediante la misma ecuación considerando una distribución de dislocaciones de borde con los vectores de Burgers perpendiculares, en vez de paralelos, al plano de la grieta [6,7].

En la Fig. 1, las dislocaciones detrás de  $\pm a$  representan la zona plástica producida en el pico de la grieta. La resistencia al movimiento de las dislocaciones en esta zona es  $\overline{\sigma}_f$ . De forma similar en la zona entre  $\pm a$ , la resistencia es  $\sigma_1$  y  $\sigma_1=0$  en el caso de una grieta en la que no se produce rozamiento entre las dos caras.

Cuando se considera una distribución de dislocaciones infinitesimales, la ecuación de equilibrio del sistema es una ecuación integral singular del tipo de Cauchy cuya función incógnita es precisamente la función de distribución de dislocaciones [6-8,1].

En general, esta ecuación integral tiene dos soluciones diferentes dependiendo de que la solución se considere acotada o no en la frontera del dominio de definición [8,9].

Cuando  $\overline{\sigma} > \sigma_f$  las dislocaciones tenderían a alejarse hacia infinito, pero la presencia de barreras de deslizamiento, como son los bordes de grano, impiden ese alejamiento, bloqueando la primera dislocación del conjunto o dislocación guía. Este tipo de barreras se representan mediante funciones delta de Dirac: un campo de tensión repulsiva que crece súbitamente desde cero hasta infinito y que deja fija la dislocación guía. Este procedimiento lleva a la consideración de una función de distribución no acotada (infinita) en las posiciones de las barreras [8].



Sin embargo, cuando  $\bar{\sigma} < \sigma_f$ , i.e. cuando la tensión aplicada es menor que la tensión de fricción que se opone al movimiento de las dislocaciones, las dislocaciones en la zona plástica, en vez de alejarse hacia el infinito, se apilan hacia atrás, contra el grupo de dislocaciones que representa la grieta. En este caso la función de distribución es acotada en las fronteras del dominio. Así mismo, la tensión es también finita en todo el plano de deslizamiento. Esta solución (denominada en adelante solución acotada) constituye el modelo conocido como modelo de Bilby-Cottrell-Swinden [6].

En el tratamiento original, el plano de deslizamiento de las dislocaciones se consideraba análogo a las líneas definidas en la teoría macroscópica de la plasticidad, en lugar de planos cristalográficos, y la tensión de fricción  $\sigma_f > \bar{\sigma}$  se igualó al límite elástico inferior, particularmente en el caso en que una delgada zona plástica se extendiera cubriendo un cierto número de granos.

Taira y colegas [1,2] han señalado que cuando el tamaño de grieta es del orden del tamaño de grano, la zona plástica puede considerarse como una banda de deslizamiento cristalográfica y, por tanto, interaccionando con barreras de deslizamiento tales como bordes de grano, cambios de fase, etc.. Estos autores fueron los primeros en desarrollar la solución no acotada y la emplearon en el estudio del umbral de crecimiento de grietas pequeñas [2].

En este capítulo se desarrolla una formulación compacta que engloba ambas soluciones. Esto se hace para el caso general de una grieta cuyas zonas plásticas se extienden sobre un número arbitrario de zonas con diferentes tensiones de fricción. Se obtienen las expresiones para la densidad de dislocaciones, el desplazamiento plástico y la distribución de tensiones en el plano de la grieta. El patrón para estas expresiones corresponde a un término representando la solución acotada más otro término que engloba la singularidad multiplicado por la condición de existencia de la solución acotada.

#### FORMULACION.

Considérese una grieta sometida a una tensión  $\bar{\sigma}$  extendiéndose sobre  $2k-1$  ( $k > 0$ ) zonas diferentes con  $2k-1$  tensiones de fricción  $\sigma_j$  diferentes. (Para la notación, ver Fig. 2).

La ecuación integral que define el equilibrio de cada dislocación es [6,8]

$$\int_{x-k}^{x_k} \frac{f(x)}{x-x_0} dx = \frac{P(x_0)}{A} \quad (1)$$

donde

$$A = \frac{Gb}{2\pi} \quad \text{para dislocaciones de tornillo}$$

$$A = \frac{Gb}{2\pi(1-\nu)} \quad \text{para dislocaciones de borde}$$

$G$  es el módulo cortante,  $b$  es el vector de Burguers y  $\nu$  el módulo de Poisson.

$f(x)$  es la función de distribución y por tanto  $f(x) dx$  da el número de dislocaciones existentes entre  $x-dx/2$  y  $x+dx/2$ .

$P(x_0)$  es la tensión resultante tendente a mover las dislocaciones a largo del eje  $X$  y viene dada por

$$P(x_0) = P_j(x_0) = \tau - \sigma_j \quad (2)$$

siempre que

$$\begin{aligned} x_{j-1} < x_0 < x_j & , j > 1 \\ x_{-1} < x_0 < x_1 & , |j| = 1 \\ x_j < x_0 < x_{j+1} & , j < -1 \end{aligned}$$

Nótese que no se requiere simetría a priori, aunque la relación  $P_{-1} = P_1$  se cumple siempre. La ecuación (1) es una ecuación integral singular que, como se ha mencionado en la introducción, admite dos soluciones diferentes dependiendo de que la solución se considere acotada (Bilby - Cottrell - Swinden) o no acotada (Taira-Tanaka-Nakai) en los puntos finales del dominio de definición. Sin embargo, el siguiente análisis revela que para el caso particular en que  $P_j(x)$  sea constante en cada intervalo, ambas soluciones pueden expresarse en una sola.

La solución acotada en  $x_{-k}$ ,  $x_k$  puede escribirse

[8,9]

$$f(x_0) = \frac{-1}{\pi^2 A} \sqrt{(x_0 - x_k)(x_0 - x_{-k})} \int_{x_{-k}}^{x_k} \frac{P(x)}{(x - x_0) \sqrt{(x - x_k)(x - x_{-k})}} dx \quad (3)$$

y esta solución existe si y sólo si se satisface la siguiente condición

$$\int_{x_{-k}}^{x_k} \frac{P(x)}{\sqrt{(x - x_{-k})(x - x_k)}} dx = 0 \quad (4)$$

Por otro lado, la solución no acotada puede expresarse:

$$f(x_0) = \frac{-1}{\pi^2 A} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x_0 - x_{-k})(x_0 - x_k)}} \int_{x_{-k}}^{x_k} \frac{\sqrt{(x - x_k)(x - x_{-k})}}{x - x_0} \cdot P(x) \cdot dx + \frac{Q \cdot i}{\sqrt{(x_0 - x_k)(x_0 - x_{-k})}} \quad (5)$$

donde  $i = \sqrt{-1}$  y  $Q$  es una constante arbitraria.

Ambas ecuaciones se pueden simplificar eligiendo un nuevo origen de coordenadas  $(x_{-k} + x_k)/2$  y realizando la traslación

$$z = x - (x_{-k} + x_k)/2 \quad (6)$$

que da  $z_k = -z_{-k}$  y por tanto

$$f(z_0) = \frac{-1}{\pi^2 A} \sqrt{z_k^2 - z_0^2} \int_{-z_k}^{z_k} \frac{P(z)}{(z - z_0) \sqrt{z_k^2 - z^2}} \cdot dz \quad (7)$$

es la solución acotada con

$$\int_{-z_k}^{z_k} \frac{P(z)}{\sqrt{z_k^2 - z^2}} dz = 0 \quad (8)$$

como condición de existencia. Y la solución no acotada

$$f(z_0) = \frac{-1}{\pi^2 A} \cdot \frac{1}{\sqrt{z_k^2 - z_0^2}} \int_{-z_k}^{z_k} \frac{P(z) \cdot \sqrt{z_k^2 - z^2}}{(z - z_0)} dz + \frac{Q}{\sqrt{z_k^2 - z_0^2}} \quad (9)$$

Definiendo una coordenada adimensional  $\xi$  para

describir la geometría del problema

$$\xi = \frac{z}{z_k} \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (10)$$

y en particular, llamando

$$n_j \quad , \quad j = -k, -(k-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, (k-1), k$$

los correspondientes valores para

$$z_j \quad , \quad j = -k, -(k-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, (k-1), k$$

donde  $n_0 = (n_{-1} + n_1)/2$  y  $n_k = 1$ ,  $n_{-k} = -1$ ,

las ecuaciones anteriores pueden simplificarse a

$$f(\xi_0) = \frac{-1}{\pi^2 A} \sqrt{1 - \xi_0^2} \int_{-1}^1 \frac{P(\xi)}{(\xi - \xi_0) \sqrt{1 - \xi^2}} d\xi =$$

$$= \frac{-1}{\pi^2 A} \sqrt{1 - \xi_0^2} \sum_{j=1}^k \left[ P_j \int_{n_{j-1}}^{n_j} \frac{1}{(\xi - \xi_0) \sqrt{1 - \xi^2}} d\xi - P_{-j} \int_{n_{-(j-1)}}^{n_{-j}} \frac{1}{(\xi - \xi_0) \sqrt{1 - \xi^2}} d\xi \right] \quad (11)$$

con la condición

$$\int_{-1}^1 \frac{P(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi = \sum_{j=1}^k \left[ P_j \int_{n_{j-1}}^{n_j} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi - P_{-j} \int_{n_{-(j-1)}}^{n_{-j}} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi \right] = 0 \quad (12)$$

y

$$\begin{aligned}
 f(\xi_0) &= \frac{-1}{\pi^2 A} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi_0^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-\xi_0} P(\xi) d\xi + \frac{Q}{z_k \sqrt{1-\xi_0^2}} = \\
 &= \frac{-1}{\pi^2 A} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi_0^2}} \sum_{j=1}^K \left[ P_j \int_{n_{j-1}}^{n_j} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-\xi_0} d\xi - P_j \int_{n_{-(j-1)}}^{n_j} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-\xi_0} d\xi \right] + \frac{Q}{z_k \sqrt{1-\xi_0^2}}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Puede comprobarse que las integrales en la solución no acotada pueden descomponerse de la siguiente forma:

$$\int \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-\xi_0} d\xi = \sqrt{1-\xi^2} + (1-\xi_0^2) \int \frac{d\xi}{(\xi-\xi_0)\sqrt{1-\xi^2}} - \xi_0 \int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{14}$$

con lo cual la citada solución puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
 f(\xi_0) &= \frac{-1}{\pi^2 A} \sqrt{1-\xi_0} \sum_{j=1}^K \left[ P_j \int_{n_{j-1}}^{n_j} \frac{d\xi}{(\xi-\xi_0)\sqrt{1-\xi^2}} - P_j \int_{n_{-(j-1)}}^{n_j} \frac{d\xi}{(\xi-\xi_0)\sqrt{1-\xi^2}} \right] - \\
 &- \frac{1}{\pi^2 A} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi_0^2}} \sum_{j=1}^K \left[ P_j (\sqrt{1-n_j^2} - \sqrt{1-n_{j-1}^2}) - P_j (\sqrt{1-n_j^2} - \sqrt{1-n_{-(j-1)}^2}) \right] + \frac{Q}{z_k \sqrt{1-\xi_0^2}} + \\
 &+ \frac{1}{\pi^2 A} \cdot \frac{\xi_0}{\sqrt{1-\xi_0^2}} \sum_{j=1}^K \left[ P_j \int_{n_{j-1}}^{n_j} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} - P_j \int_{n_{-(j-1)}}^{n_j} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right]
 \end{aligned} \tag{15}$$

Esta última expresión puede compararse con la expresión para solución acotada. El primer término arriba es, justamente, la solución acotada. Y el último, representa la condición de existencia.

Ahora bien, la solución no acotada debe reducirse la acotada una vez que se elimine la singularidad. Y esto fija la condición para calcular la constante  $Q$ . Puesto que el último término de (15) cuando se iguala a cero, da la condición de

existencia, se debe cumplir la siguiente ecuación para la determinación de  $Q$

$$Q = \frac{z_k}{\pi^2 A} \sum_{j=1}^k \left[ P_j (\sqrt{1-n_j^2} - \sqrt{1-n_{j-1}^2}) - P_{-j} (\sqrt{1-n_j^2} - \sqrt{1-n_{-(j-1)}^2}) \right] \quad (16)$$

Por tanto, la expresión compacta que engloba las dos soluciones acotada y no acotada en los puntos frontera del dominio es

$$f(\xi_0) = \frac{-1}{\pi^2 A} \sqrt{1-\xi_0^2} \sum_{j=1}^k \left[ P_j \int_{n_{j-1}}^{n_j} \frac{d\xi}{(\xi-\xi_0)\sqrt{1-\xi^2}} - P_{-j} \int_{n_{-(j-1)}}^{n_{-j}} \frac{d\xi}{(\xi-\xi_0)\sqrt{1-\xi^2}} \right] + \frac{1}{\pi^2 A} \cdot \frac{\xi_0}{\sqrt{1-\xi_0^2}} \sum_{j=1}^k \left[ P_j \int_{n_{j-1}}^{n_j} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} - P_{-j} \int_{n_{-(j-1)}}^{n_{-j}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right] \quad (17)$$

de donde la solución acotada y la condición de existencia se obtienen igualando a cero el último término.

Las integrales en (17) se calculan fácilmente en términos de integrales standard. Substituyendo su expresión y reorganizando términos convenientemente, la función de distribución puede escribirse finalmente

$$f(\xi_0) = \frac{1}{\pi^2 A} \sum_{j=0}^{k-1} \left[ (P_j - P_{j+1}) \cdot \cosh^{-1} \left| \frac{1-n_j \xi_0}{n_j - \xi_0} \right| - (P_{-j} - P_{-(j+1)}) \cdot \cosh^{-1} \left| \frac{1-n_j \xi_0}{n_{-j} - \xi_0} \right| \right] + \frac{1}{\pi^2 A} \cdot \frac{\xi_0}{\sqrt{1-\xi_0^2}} \sum_{j=0}^k \left[ (P_j - P_{j+1}) \cdot \sinh^{-1} n_j - (P_{-j} - P_{-(j+1)}) \cdot \sinh^{-1} n_{-j} \right] \quad (18)$$

donde  $P_0 = P_{k+1} = P_{-(k+1)} = 0$

En el caso de que la configuración sea simétrica,  $P_{-j} = P_j$ ,  $n_{-j} = -n_j$  y (18) se reduce a

$$f(\xi_0) = \frac{1}{\pi^2 A} \sum_{j=0}^{k-1} (P_j - P_{j+1}) \left[ \cosh^{-1} \left| \frac{1 - h_j \xi_0}{h_j - \xi_0} \right| - \cosh^{-1} \left| \frac{1 + h_j \xi_0}{h_j + \xi_0} \right| \right] +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2 A} \cdot \frac{\xi_0}{\sqrt{1 - \xi_0^2}} \sum_{j=0}^k (P_j - P_{j+1}) \cdot \sin^{-1} h_j \quad (19)$$

NUMERO DE DISLOCACIONES Y DESPLAZAMIENTO PLASTICO.

De la función de distribución, el número de dislocaciones entre dos puntos arbitrarios  $x_a$ ,  $x_b$  viene dado por

$$N(\xi_a, \xi_b) = \int_{\xi_a}^{\xi_b} f(\xi) \cdot d\xi \quad (20)$$

(Se asume en (20) que  $f(\xi)$  no cambia de signo entre  $\xi_a$  y  $\xi_b$ . En caso contrario, el intervalo debe dividirse en zonas de dislocaciones positivas y negativas).

Substituyendo (18) en (20) e integrando queda

$$N(\xi_a, \xi_b) = \frac{z_k}{\pi^2 A} \sum_{j=0}^{k-1} \left\{ (P_j - P_{j+1}) \left[ (\xi_b - h_j) \cdot \cosh^{-1} \left| \frac{1 - h_j \xi_b}{h_j - \xi_b} \right| - \right. \right.$$

$$\left. - (\xi_a - h_j) \cdot \cosh^{-1} \left| \frac{1 - h_j \xi_a}{h_j - \xi_a} \right| + \sqrt{1 - h_j^2} \cdot (\sin^{-1} \xi_b - \sin^{-1} \xi_a) \right] -$$

$$\left. - (P_j - P_{(j+1)}) \left[ (\xi_b - h_j) \cdot \cosh^{-1} \left| \frac{1 - h_j \xi_b}{h_j - \xi_b} \right| - (\xi_a - h_j) \cdot \cosh^{-1} \left| \frac{1 - h_j \xi_a}{h_j - \xi_a} \right| + \sqrt{1 - h_j^2} (\sin^{-1} \xi_b - \sin^{-1} \xi_a) \right] \right\} -$$

$$- \frac{z_k}{\pi^2 A} (\sqrt{1 - \xi_b^2} - \sqrt{1 - \xi_a^2}) \sum_{j=0}^k \left[ (P_j - P_{j+1}) \cdot \sin^{-1} h_j - (P_{(j+1)} - P_j) \cdot \sin^{-1} h_j \right] \quad (21)$$

que en el caso de simetría se reduce a

$$N(\xi_a, \xi_b) = \frac{z_k}{\pi^2 A} \sum_{j=0}^{k-1} \left\{ (P_j - P_{j+1}) \left[ (\xi_b - h_j) \cdot \cosh^{-1} \left| \frac{1 - h_j \xi_b}{h_j - \xi_b} \right| - (\xi_b + h_j) \cdot \cosh^{-1} \left| \frac{1 + h_j \xi_b}{h_j + \xi_b} \right| \right] - \right.$$

$$\left. - (P_j - P_{j+1}) \left[ (\xi_a - h_j) \cdot \cosh^{-1} \left| \frac{1 - h_j \xi_a}{h_j - \xi_a} \right| - (\xi_a + h_j) \cdot \cosh^{-1} \left| \frac{1 + h_j \xi_a}{h_j + \xi_a} \right| \right] \right\} -$$

$$- \frac{z_k}{\pi^2 A} (\sqrt{1 - \xi_b^2} - \sqrt{1 - \xi_a^2}) \sum_{j=0}^k (P_j - P_{j+1}) \cdot \sin^{-1} h_j \quad (22)$$



El desplazamiento relativo de uno de los labios de la grieta con respecto al otro entre los puntos  $\xi_a$  y  $\xi_b$  viene dado simplemente por

$$\phi(\xi_a, \xi_b) = b \cdot N(\xi_a, \xi_b) \quad (23)$$

En particular el desplazamiento de apertura de grieta en el pico (Crack Tip Opening, CTOD, en la literatura inglesa, para grietas abiertas en modo I o Crack Tip Sliding Displacement, CTSD, para grietas en modo II y III) se obtiene cuando  $\xi_b=1$  y  $\xi_a = n_1$ .

$$\text{CTSD} = b \cdot N(n_1, 1) \quad (24)$$

#### CONCENTRACION DE TENSIONES EN FRENTE DE LA ZONA PLASTICA.

La presencia de la grieta originaría en un material ideal perfectamente elástico una concentración de tensiones infinita. En un material real este infinito se relaja por la producción de deformación plástica, quedando, no obstante, una concentración finita de tensiones en frente de la zona plástica.

La tensión adicional en un punto  $|\xi_0| > 1$  en el plano de deslizamiento, situado a una cierta distancia del final de la zona plástica, tal que  $\xi_0 = (z_k + r_0)/z_k$  viene dada [8] por

$$S(\xi_0) - \bar{\sigma} = A + \int_{-1}^1 \frac{f(\xi)}{\xi_0 - \xi} d\xi \quad ; |\xi_0| > 1 \quad (25)$$

Substituyendo (18) y la expresión para las integrales resultantes (ver Apéndice), se obtiene

$$\begin{aligned}
S(\xi_0) - \zeta &= \frac{-1}{\pi} \sum_{j=0}^{k-1} \left[ (P_j - P_{j+1}) \cdot \operatorname{siñ}' \left( \frac{1 - \eta_j \xi_0}{\eta_j - \xi_0} \right) - (P_j - P_{(j+1)}) \cdot \operatorname{siñ}' \left( \frac{1 - \eta_j \xi_0}{\eta_j - \xi_0} \right) \right] + \\
&+ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{|\xi_0|}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} \sum_{j=0}^{k-1} \left[ (P_j - P_{j+1}) \cdot \operatorname{siñ}' \eta_j - (P_j - P_{(j+1)}) \cdot \operatorname{siñ}' \eta_j \right] - \frac{1}{2} (P_k + P_{-k})
\end{aligned} \tag{26}$$

Es fácil comprobar que

$$\begin{aligned}
\lim_{|\xi_0| \rightarrow \infty} S(\xi_0) &= \zeta
\end{aligned} \tag{27}$$

Y también que, en la solución acotada (igualando a cero la condición de existencia en el segundo término de (26)), se obtiene fácilmente

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\xi_0 \rightarrow 1 \\ |\xi_0| > 1}} S(\xi_0) &= \sigma_k
\end{aligned} \tag{28}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\xi_0 \rightarrow -1 \\ |\xi_0| > 1}} S(\xi_0) &= \sigma_{-k}
\end{aligned} \tag{29}$$

como se podía anticipar intuitivamente.

Finalmente, en condiciones de simetría

$$\begin{aligned}
S(\xi_0) - \zeta &= \frac{-1}{\pi} \sum_{j=0}^{k-1} (P_j - P_{j+1}) \left[ \operatorname{siñ}' \left( \frac{1 - \eta_j \xi_0}{\eta_j - \xi_0} \right) - \operatorname{siñ}' \left( \frac{1 + \eta_j \xi_0}{\eta_j + \xi_0} \right) \right] + \\
&+ \frac{2}{\pi} \frac{|\xi_0|}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} \sum_{j=0}^k (P_j - P_{j+1}) \cdot \operatorname{siñ}' \eta_j - P_k
\end{aligned} \tag{30}$$

REFERENCIAS.

- |1| Taira, S., Tanaka, K. and Nakai, Y. (1978) "A Model of Crack Tip Band Blocked by Grain Boundary", Mech. Res. Comm., 5, 375.
- |2| Tanaka, K., Nakai, Y. and Yamashita, M. (1981) "Fatigue Growth Threshold of Small Cracks", Int. J. of Fracture, 17, No 5, 519.
- |3| Lardner, R. W. (1968) "A Dislocation Model for Fatigue Crack Growth in Metals", Phil. Mag. 17, 71.
- |4| Eastabrook, J. N. (1984) "A Dislocation Model for the Initial Growth of Stage I Fatigue Cracks", Int. J. of Fracture, 24, R43.
- |5| Navarro, A. and de los Ríos, E. R., (1986) "A Model for Short Fatigue Crack Propagation with an Interpretation of the Short-Long Crack Transition". (\*)
- |6| Bilby, B. A., Cottrell, A. H. and Swinden, K. H., (1963) "The Spread of Plastic Yield from a Notch", Proc. Roy. Soc., (London) A272, 304.
- |7| Navarro, A. and de los Ríos, E. R., (1986) "An Alternative Modelling of the Blocking of Dislocations in Grain Boundaries".(\*\*)
- |8| Head, A. K. and Louat, N., (1955) "The Distribution of Dislocations in Linear Arrays", Aust. J. Physics, 8. 1.
- |9| Muskhelishvili, N. T., (1946) "Singular Integral Equations", Traducido por J. M. Radok (1953), Groningen-Holland, P. Noordhoff, N. V..

(\*) Remitido para Publicación a Fatigue Engng. Mater. Struct..

(\*\*) Remitido para Publicación a Phil. Mag..

APENDICE.

En el cálculo de la concentración de tensiones en frente de la zona plástica aparecen integrales del tipo

$$I(\xi_0, \eta_j) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\xi_0 - \xi} \cosh^{-1} \left| \frac{1 - \eta_j \xi}{\eta_j - \xi} \right| d\xi \quad ; \quad |\xi_0| > 1 \quad (A1)$$

Para evaluar esta integral se han seguido diversos pasos. En primer lugar se ha tenido en cuenta que

$$I(\xi_0, \eta_j) = -I(-\xi_0, -\eta_j) \quad (A2)$$

lo cual permite realizar solamente el cálculo para el caso  $\xi_0 > 1$  y luego realizando la transformación anterior obtener la solución para  $\xi_0 < -1$ .

Diferenciando con respecto a  $\xi_0$  e integrando por partes posteriormente, es posible escribir

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0} I(\xi_0, \eta_j) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \eta_j^2}}{(\xi_0 - \xi) \sqrt{1 - \xi^2} (\eta_j - \xi)} d\xi \quad (A3)$$

Introduciendo el cambio de variable  $\xi = \cos z$ , la expresión anterior se transforma en

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0} I(\xi_0, \eta_j) = \int_0^\pi \frac{\sqrt{1 - \eta_j^2}}{(\xi_0 - \cos z)(\eta_j - \cos z)} dz \quad (A4)$$

que puede, a su vez, descomponerse en

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0} I(\xi_0, \eta_j) = \frac{\sqrt{1 - \eta_j^2}}{\eta_j - \xi_0} \left[ \int_0^\pi \frac{dz}{\xi_0 - \cos z} - \int_0^\pi \frac{dz}{\eta_j - \cos z} \right] \quad (A5)$$

las integrales en el lado derecho de (A5) se pueden calcular mediante primitivas standard siendo su valor

$$\int_0^{\pi} \frac{dz}{\xi_0 - \cos z} = \frac{\pi}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} \quad (\text{A6})$$

y

$$\int_0^{\pi} \frac{dz}{\eta_j - \cos z} = 0 \quad (\text{A7})$$

con lo cual se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0} I(\xi_0, \eta_j) = \frac{\pi}{\eta_j - \xi_0} \cdot \frac{\sqrt{1 - \eta_j^2}}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} \quad (\text{A8})$$

que integrada con respecto a  $\xi_0$  da

$$I(\xi_0, \eta_j) = -\pi \sin^{-1} \left( \frac{1 - \eta_j \xi_0}{\eta_j - \xi_0} \right) + \hat{\Phi}(\eta_j) \quad , \quad \xi_0 > 1 \quad (\text{A9})$$

La función  $\hat{\Phi}(\eta_j)$  se calcula con la condición

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow +\infty} I(\xi_0, \eta_j) = 0 \quad (\text{A10})$$

que lleva a

$$\hat{\Phi}(\eta_j) = \pi \cdot \sin^{-1} \eta_j \quad (\text{A11})$$

y por tanto, finalmente, la expresión para  $I(\xi_0, \eta_j)$  es para  $\xi_0 > 1$

$$I(\xi_0, \eta_j) = -\pi \sin^{-1} \left( \frac{1 - \eta_j \xi_0}{\eta_j - \xi_0} \right) + \pi \sin^{-1} \eta_j \quad (\text{A12})$$

pero teniendo en cuenta (A2), esta misma expresión es válida para  $\xi_0 < -1$ .

Una expresión alternativa para la integral de (A8) es

$$I(\xi_0, \eta_j) = 2\pi \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \eta_j}{1 + \eta_j}} + \Psi(\eta_j) \quad (\text{A13})$$

que, calculando nuevamente  $\Psi_{(n_j)}$  con la condición (A10) queda

$$I(\xi_0, \eta_j) = 2\pi \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\xi_0+1}{\xi_0-1}} \cdot \sqrt{\frac{1-\eta_j}{1+\eta_j}} - \pi \cdot \cos^{-1} \eta_j \quad (\text{A14})$$

CAPITULO III - FIGURAS

Figura 1. Representación de la Grieta Simple.

Figura 2. Modelo Multizonas.

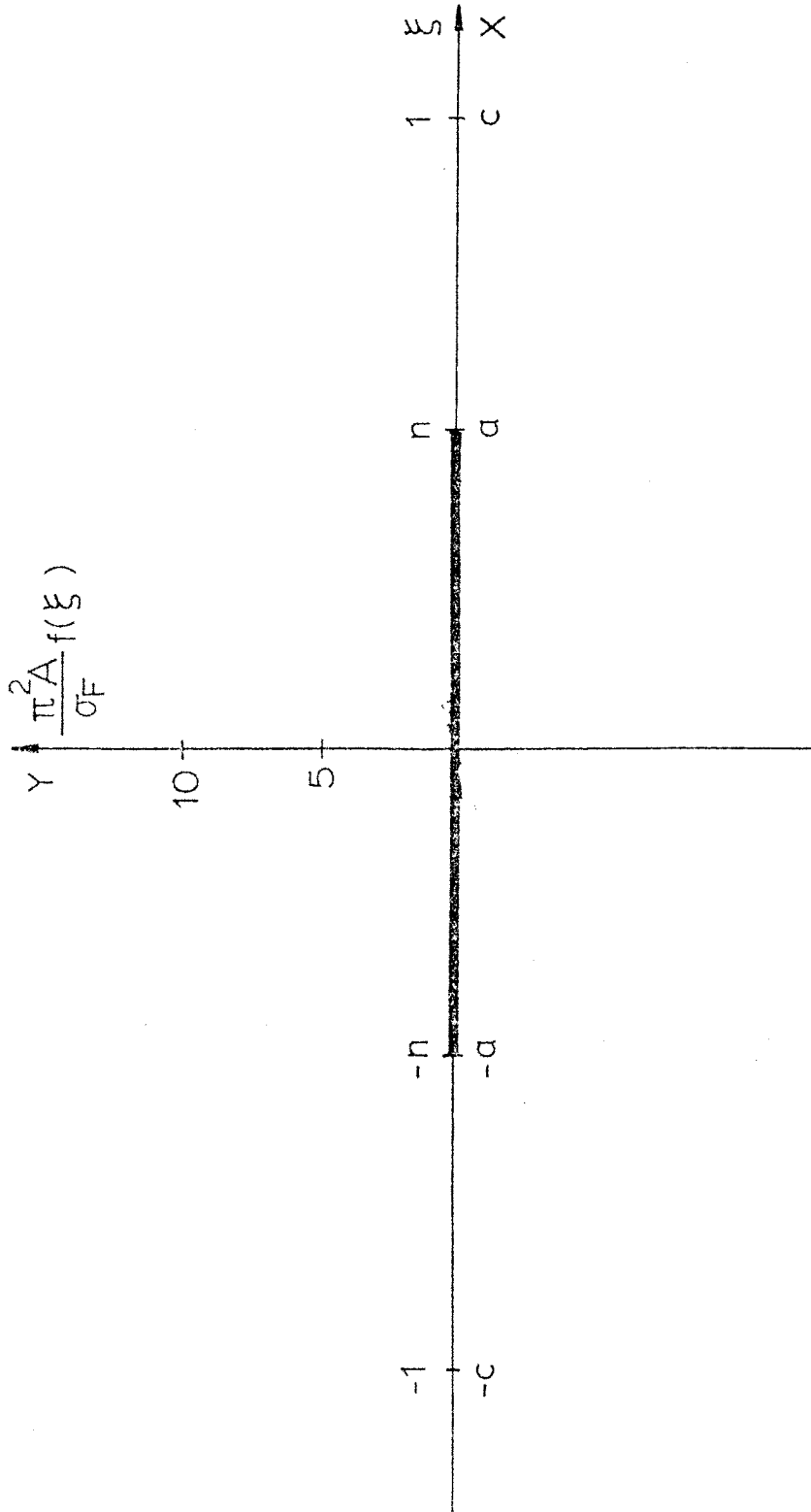


Figura 1. Representación de la Grieta Simple.



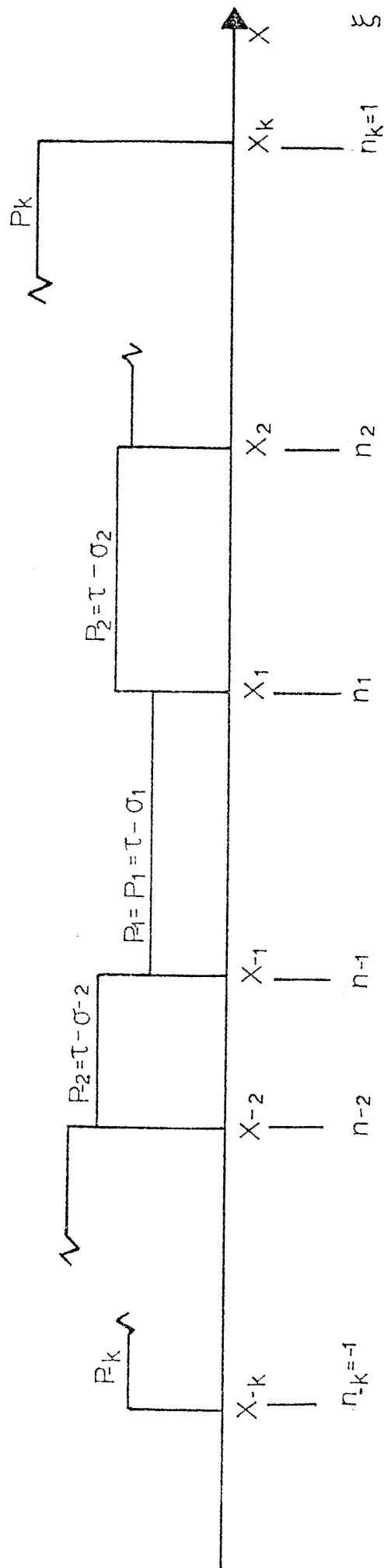


Figura 2. Modelo Multizonas.

CAPITULO IV. MODELO UNIFICADO DE CRECIMIENTO  
PARA GRIETAS PEQUEÑAS Y GRANDES

## INTRODUCCION.

Para desarrollar un modelo de crecimiento que incorpore factores relacionados a la evidencia experimental descrita en el capítulo introductorio, se considerará que la deformación plástica asociada con el daño por fatiga se distribuye en bandas de deslizamiento rectilíneas extendiéndose a través de los granos.

Los bordes de grano se considerarán como barreras de deslizamiento cuya resistencia vendrá determinada por la facilidad para promover deformación plástica en forma de una nueva banda de deslizamiento en el siguiente grano, por activación de fuentes de dislocaciones como consecuencia de la concentración de tensiones debida a la grieta.

La herramienta básica en la construcción del modelo será la representación de la grieta mediante la teoría de dislocaciones recogida en el capítulo precedente, como medio eficaz para tratar el ritmo de crecimiento y la fundamental interacción entre la grieta y las barreras de deslizamiento.

## MODELO.

Particularizando las expresiones obtenidas en el capítulo anterior al caso simple de una grieta simétrica y sin fricción con zonas plásticas iguales en cada vértice (Fig. 1), la distribución de dislocaciones que representa esta configuración es:

$$f(\xi) = \frac{\sigma_f}{\pi^2 A} \left[ \cosh^{-1} \left| \frac{1-h\xi}{h-\xi} \right| - \cosh^{-1} \left| \frac{1+h\xi}{h+\xi} \right| \right] + \frac{\sigma_f}{\pi^2 A} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[ 2 \cdot \sin^{-1} h + \pi \left( \frac{\tau}{\sigma_f} - 1 \right) \right] \quad (1)$$

donde  $\xi = n = a/c$  representa el pico de la grieta y  $\xi = 1$  el final de la zona plástica.

En esta expresión, la singularidad aparece en el término  $\xi / \sqrt{1-\xi^2}$  del segundo miembro. Por tanto la condición de existencia de la solución acotada se obtiene igualando a cero el coeficiente que multiplica a este término. El resultado es:

$$h = \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{\tau}{\sigma_f} \right) \quad (2)$$

Esta relación fue obtenida en primer lugar por Bilby et al [1] y la solución correspondiente es el conocido modelo de grieta Bilby-Cottrell-Swinden (BCS).

La tensión  $\sigma_f$  en el modelo será identificada con la tensión de fricción  $\tau_0$  del material, que es la fricción que se opone al movimiento de una dislocación simple en el plano de deslizamiento. Para materiales que no han sufrido una deformación excesiva esta tensión de fricción es pequeña comparada con los valores normales de tensión aplicada ( $\sigma/\tau_0 \gg 1$ , entre 5 y 20).

Por tanto, y de acuerdo con los comentarios hechos en el capítulo anterior, la zona plástica se encontrará bloqueada en el borde de grano. Cuando la deformación plástica se transmita al grano vecino por activación de una fuente de dislocaciones,

la tensión de fricción en este segundo grano será de nuevo  $\bar{\sigma}_0$ , aunque multiplicada por un cierto coeficiente que considera la diferente orientación del grano, pero será de todas formas menor que la tensión aplicada. La zona plástica se extenderá hasta cubrir completamente el nuevo grano. La situación será similar en los granos siguientes y por tanto la frontera de la zona elasto-plástica coincidirá en cada instante con un borde de grano; esto introduce en el modelo un carácter discreto (de saltos) en relación al desplazamiento plástico. Este carácter discreto del desplazamiento plástico juega un papel primordial para explicar las diferencias de crecimiento entre grietas pequeñas y grietas grandes como se verá posteriormente.

Es importante recalcar el hecho de que se está considerando  $\bar{\sigma} > \bar{\sigma}_0$  y que por tanto se usa la solución no acotada, con la zona plástica bloqueada, para la representación de la grieta.

La tensión actuando sobre una fuente situada a una distancia  $r_0 \ll D$  de la zona plástica es aproximadamente (ver Apéndice)

$$\frac{S(\xi_0)}{\bar{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi_0 - 1}} \cdot \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\bar{\sigma}_0}{\bar{\sigma}} \cdot \cos^{-1} \eta \right] + \frac{\bar{\sigma}_0}{\bar{\sigma}} \quad (3)$$

donde  $\xi_0 = \frac{r_0 + c}{c} - 1$  y  $c = D/2$ .  $\sigma_f$  ha sido substituída por  $\bar{\sigma}_0$ .

Esta distancia  $r_0$  entre el final de la banda de deslizamiento y la fuente ha sido interpretada de diversas formas. Stroh [2], identificó  $r_0$  con la longitud típica de las fuentes de Frank-Read en el material, de forma que hubiera suficiente espacio entre el borde de grano y la fuente como para operar ésta. En el trabajo de Codd y Petch [3],  $r_0$  fue considerada simplemente como la distancia estadística media entre la banda de deslizamiento y la fuente más cercana en el grano vecino. Por su parte, Armstrong et al. [4] sugirieron que  $r_0$  podía representar el radio de curvatura del borde final de la banda de deslizamiento. Esta interpretación se basa en que deslizamiento plástico tiene lugar en varios planos paralelos y no en uno sólo. Por tanto la máxima concentración de tensiones aparecerá a una distancia aproximadamente igual al radio de curvatura del borde final de la banda [5].

La ecuación (3) se ha representado en las Figuras 2a y b para diferentes valores de  $\tau/\tau_0$  y  $n$ . Estas figuras muestran la similaridad del perfil de tensiones cuando la grieta se describe de una forma adimensional. La concentración de tensiones se incrementa monótonamente con la razón  $n$ , aunque la distribución se hace más y más insensitiva a  $n$  conforme el cociente  $\tau/\tau_0$  se incrementa. Las implicaciones de esta observación se discutirán más tarde.

La activación de una fuente requiere una tensión crítica  $\tau_c$ , bien para lograr la emisión de lazos completos de dislocaciones

en las fuentes de Frank-Read o para liberar las dislocaciones de los bloqueos debidos a impurezas. El plano de deslizamiento de la fuente no coincidirá en general con el plano de cortante máximo por lo cual el valor medio de tensión necesario para activar la fuente vendría dado por [6]

$$S(\xi_0) = \frac{1}{2} m^* \cdot \tau_c \quad (4)$$

donde  $m^*$  es un factor de orientación del tipo de Sachs. Manteniendo constante la tensión aplicada  $\tau$ , la tensión crítica se alcanzará una vez que el pico de la grieta se aproxime lo suficiente al borde grano, i.e., una vez que se alcance un valor crítico del parámetro  $n$

$$n = n_c \quad (5)$$

Es muy importante considerar el posible rango de variación esperado en la ecuación (4) puesto que representa la resistencia efectiva de las barreras de deslizamiento.

Un cierto número de factores, incluyendo el bloqueo de dislocaciones por impurezas, generación de fuentes sin este bloqueo durante la deformación, incremento en la densidad de dislocaciones, endurecimiento por deformación, desarrollo de obstáculos dentro de los granos y variación de la anchura de las bandas de deslizamiento, afectan al valor de los parámetros  $r_0$  y  $\tau_c$  [4]. Como sólo es posible establecer su influencia cualitativamente y puesto que la influencia de algunos de los factores se opone a las de otros, parece conveniente tomar  $r_0$  y  $\tau_c$  como constantes para los propósitos del presente estudio.

Por otra parte, se puede realizar fácilmente un estudio de la influencia de la orientación relativa entre los granos, representada en el parámetro de orientación  $m^*$ .

En (4) el valor de  $m^*$  es aproximadamente 2.2 para metales con estructura centrada en las caras y se obtiene simplemente promediando los valores individuales para una colección de cristales orientados aleatoriamente; y varía entre 2 y 3.7. Sin embargo, cuando se considera la transferencia de deslizamiento entre los dos primeros granos se espera que sólo un sistema de deslizamiento sea operativo y por tanto todo el rango de posible variación de  $m^*$  debe ser tenido en cuenta, en vez de un valor promediado. Esta condición media sería más apropiada en una etapa posterior cuando la zona plástica se extienda a través de varios granos. Sin embargo en este caso puede ser necesario deslizamiento en más de un sistema para mantener la continuidad del material y por tanto el uso de un valor medio del tipo de Taylor ( $m^* = 3.1$  para metales c.c.) sería más adecuado [4, 7].

De acuerdo con esto se pueden esperar variaciones de grano a grano en la condición crítica (4) de entre un 40% y un 100%, pero parece bastante irreal esperar incrementos en la resistencia de las barreras mayores de un 100% del valor medio en la ecuación (4).

Considerando el crecimiento de la grieta en los granos



sucesivamente y recordando que la frontera entre la zona plástica y elástica coincide siempre con un borde de grano, puede escribirse

$$c = i \quad D/2 \quad i = 1, 3, 5, \dots \quad (6)$$

donde el índice  $i$  se refiere a cada deslizamiento sucesivo.

Sin embargo, como  $r_0$  se ha tomado como constante, la coordenada adimensional  $\xi_0$ , que representa la posición de la fuente de dislocaciones, se hace más y más próxima a uno con cada nuevo incremento del límite de la zona plástica. Aunque las variaciones en  $\xi_0$  serán muy pequeñas (menores del 1%, ya que los valores de  $r_0$  (c 0.1-1  $\mu\text{m}$ ) son pequeños comparados con el tamaño de grano (10-100  $\mu\text{m}$ ) [8], la elevada pendiente de  $S(\xi_0)$  en las proximidades de uno debido al término  $1/\sqrt{\xi_0-1}$  produce unos incrementos muy grandes en la tensión. La posición relativa de la fuente en cada nuevo borde puede escribirse como

$$\xi_0^i = \frac{i D/2 + r_0}{i D/2} = 1 + \frac{1}{i} (\xi_0^1 - 1) \quad i=1,3,5,\dots \quad (7)$$

(el superíndice se refiere a cada escalón).

La tensión  $S(\xi_0^i)$  operando una fuente en cada escalón de deslizamiento, para el mismo valor del parámetro  $n$ , viene dada aproximadamente a través de (3) como

$$\frac{S(\xi_0^i)}{S(\xi_0^1)} = \frac{\sqrt{\xi_0^1 - 1}}{\sqrt{\xi_0^i - 1}} = \sqrt{i} \quad i=1,3,5,\dots \quad (8)$$

Esto da incrementos de tensión de 73%, 123% y 164% para el segundo, tercero y cuarto borde de grano con relación

al primero. Estos valores serán probablemente menores en una situación real donde el tamaño de grano  $D$  no es constante sino que está distribuido estadísticamente y las distribuciones del tamaño de grano que se encuentran en la práctica (v.g. Log-normal para metales con granos equiaxiales) suelen dar más probabilidad a tamaño de granos menores lo que llevaría a menos amplificación en  $S(\xi_0^i)$ .

De todas formas, una comparación entre estos incrementos y las variaciones esperadas en la resistencia de las barreras discutidas previamente, lleva a la conclusión de que los bordes de grano constituirán barreras efectivas en los primeros dos o tres granos (para una tensión aplicada constante). Por tanto, después de este punto, el efecto de la micro-estructura no puede atribuirse principalmente al bloqueo temporal efectivo de la zona plástica en los bordes de grano, sino más bien a la influencia ejercida por los saltos discretos de la frontera elastoplástica sobre la descripción global del crecimiento.

CONDICIONES LIMITES PARA PROPAGACION DE GRIETAS. LIMITE DE FATIGA. UMBRAL DE CRECIMIENTO PARA GRIETAS GRANDES.

La tensión máxima en un punto  $\xi_0$  en frente de la zona plástica se obtiene cuando  $n=1$ ,

$$S(\xi_0) = \frac{\xi_0}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} \cdot \sigma \quad (9)$$

como  $n=1$ , esto significa que

$$\xi_0 = 1 + \frac{r_0}{a_i} \quad (10)$$

y entonces

$$S(\xi_0) \approx \frac{\bar{\sigma} \sqrt{a_i}}{\sqrt{2 r_0}} \quad (11)$$

igualando a  $\frac{1}{2} m^* \bar{\sigma}_c$  la tensión aplicada  $\bar{\sigma}_{Li}$  mínima requerida para la propagación del deslizamiento se puede expresar mediante

$$\bar{\sigma}_{Li} \sqrt{a_i} = \frac{1}{2} m^* \bar{\sigma}_c \sqrt{2 r_0} \quad (12)$$

o, substituyendo  $a_i = i D/2$   $i=1,3,5,\dots$

$$\bar{\sigma}_{Li} \sqrt{i D/2} = \frac{1}{2} m^* \bar{\sigma}_c \sqrt{2 r_0} \quad (13)$$

En particular para  $i=1$ , se obtiene el Límite de Fatiga

$$\bar{\sigma}_{fL} \sqrt{D/2} = \frac{1}{2} m^* \bar{\sigma}_c \sqrt{2 r_0} \quad (14)$$

Entonces, basándose en la aproximación descrita aquí, el Límite de Fatiga se interpreta como la tensión aplicada por debajo de la cual una grieta creciendo dentro de un grano es incapaz de iniciar deslizamiento plástico en el siguiente grano y es, por tanto, incapaz de propagarse. Esto está en concordancia con un trabajo experimental reciente en la acumulación de daño por debajo del límite de fatiga [9, 10].

De las dos últimas ecuaciones se sigue que

$$\bar{\sigma}_{Li} = \frac{\bar{\sigma}_{fL}}{\sqrt{i}} \quad i=1,3,5,\dots \quad (15)$$

Esta expresión se representa en la Figura 3 y es un gráfico del tipo de Kitagawa en el que el carácter discontinuo o discreto del deslizamiento plástico es tenido en cuenta.

En el período de grieta grande, en que  $a_i$  puede considerarse que varía de forma continua, la ecuación (12) puede escribirse

$$\sigma_L \sqrt{\pi a} = \frac{1}{2} m^* \sigma_c \sqrt{2 r_0 \pi} \quad (16)$$

Sin embargo, (ver Apéndice), cuando  $n=1$  el factor de intensidad de tensiones que describe la singularidad debida al bloqueo de la banda de deslizamiento es precisamente

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (17)$$

Consecuentemente, el lado derecho de la ecuación (16) puede interpretarse como el valor umbral del factor de intensidad de tensiones  $K_{th}$  (el subíndice th viene dado de la palabra inglesa threshold, que significa umbral). Por lo tanto, para las grietas grandes la condición límite para la no propagación es que el factor de intensidad de tensión esté por debajo del valor umbral

$$K \ll K_{th} \quad (18)$$

A su vez, el límite de fatiga puede escribirse como

$$\sigma_{fL} = \frac{K_{th}}{\sqrt{\pi D/2}} \quad (19)$$

Aunque el máximo de  $S(\xi_0)$  se obtiene rigurosamente cuando  $n=1$ , para los valores normales de  $\sigma/\sigma_0$  de entre 5 y 20, la concentración de tensiones es relativamente insensitiva al valor de  $n$  como se ilustra en la Fig. 2 (Se verá más tarde, sin embargo,

que el desplazamiento plástico, al contrario que la distribución de tensión, es muy sensible al valor de  $n$ ). Esta insensibilidad de la distribución de tensión con respecto a  $n$  significa que se debe esperar una dispersión grande en los mínimos relativos de la curva de crecimiento en el período de grieta pequeña, que es caracterizado por grandes variaciones en  $n$ . En un gráfico como el de la Figura 3, el punto límite que describe la transmisión del deslizamiento estará situado en algún lugar de la parte horizontal de los característicos peldaños de esta figura y esto explica las desviaciones de las pseudo-ideales líneas rectas límite, que aparecen durante el crecimiento en los primeros granos.

Tomando esta variación en consideración en el análisis de la tensión límite para propagación,  $\xi_0$  debe escribirse para  $\tau/\tau_0 \gg 1$

$$\xi_0 = 1 + \frac{r_0}{a_i + \Delta} \quad (20)$$

donde el tamaño de zona plástica  $\Delta$  variará entre 0 y  $D$  ( $D/2$  en el primer grano). Nótese que  $\Delta$  debe ser menor que  $D$  ya que es la condición límite para sobrepasar la primera barrera lo que se está analizando.

El caso  $\Delta = 0$  da la condición de  $n=1$  considerada previamente.

El otro límite  $\Delta = D/2$  corresponde al primer grano con  $n=0$  y  $a=0$ . Aunque no es realista obtener el límite de fatiga

fijando  $a=0$  [9], debido a que  $\tau_{fL} \gg \tau_0$ , el valor predicho es muy similar al caso  $a=D/2$ . De hecho, la concentración de tensiones con  $n=0$  es (ver Apéndice)

$$S(\xi_0) = \frac{\xi_0}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} (\tau - \tau_0) + \tau_0 \quad (21)$$

y entonces

$$S(\xi_0) \simeq \frac{(\tau - \tau_0)\sqrt{D/2}}{\sqrt{2r_0}} + \tau_0 \quad (22)$$

por lo cual, en tanto en cuanto  $\tau/\tau_0 \gg 1$ , esta ecuación lleva al mismo resultado aproximadamente que la ecuación (14) obtenida fijando  $a=D/2$ .

Puede obtenerse una idea de la diferencia entre ambas aproximaciones considerando el significado físico de las dos soluciones, cuando  $n=1$  y  $n=0$ . En ambos casos el modelo de dislocaciones representa una fuente en  $\xi=0$ , emitiendo un número igual de dislocaciones positivas y negativas que se mueven en direcciones opuestas hasta que las dislocaciones guía quedan bloqueadas en barreras situadas en  $\xi=\pm 1$ . Sin embargo, en el primer caso ( $n=1$ ), la tensión operando la fuente es la tensión aplicada  $\tau$ , mientras que en el segundo caso ( $n=0$ ), la tensión aplicada se ve reducida por la tensión de fricción, dando  $\tau - \tau_0$  (y un campo constante de tensión igual a  $\tau_0$  se añade fuera de la grieta). El crecimiento de la grieta puede verse, por tanto, como un proceso de extensión de la zona de resistencia cero al movimiento de las dislocaciones.

Para grietas grandes,  $a \gg D$ , y la ecuación (11) se

obtiene incluso cuando  $\Delta = D$ .

Para el rango intermedio de grietas pequeñas, una sugerencia ecléctica sería usar  $\Delta = D/2$  y por tanto  $a_i = (i-1)D/2$ ,  $i=1,3,5,\dots$  que da

$$\sigma_{Li} \sqrt{\pi(a_i + D/2)} = K_{th} \quad (23)$$

y los puntos marcados X en la Figura 3.

Este resultado puede compararse con la aproximación de El Haddad et al. [11, 12] relacionada a la definición de una "longitud intrínseca" de grieta y factor corregido de intensidad de tensiones definidas como

$$a_0 = \frac{K_{th}^2}{\pi \sigma_{fL}^2} \quad (24)$$

y

$$K = \sigma \sqrt{\pi(a + a_0)} \quad (25)$$

Substituyendo (19) en (24) da

$$a_0 = D/2 \quad (26)$$

Las ideas propuestas aquí proporcionan una justificación física a las definiciones de El Haddad et al., siendo la clave la consideración de la naturaleza discreta del proceso de extensión de la deformación plástica.

RITMO DE CRECIMIENTO DE GRIETA.

El ritmo de crecimiento de grieta se considera proporcional al desplazamiento relativo entre las dos superficies de grieta como consecuencia de la deformación en la zona plástica, que es a su vez igual al número de dislocaciones que conforman la zona plástica multiplicado por el vector de Burguers [13-16].

El desplazamiento plástico  $\phi$  puede expresarse como (ver Apéndice)

$$\phi = \frac{2b}{\pi^2 A} \tau_0 c \left[ n \cdot L_n \left( \frac{1}{n} \right) + \sqrt{1-n^2} \left( \operatorname{si} \tilde{n}^i n + \frac{\pi}{2} \left( \frac{\tau}{\tau_0} - 1 \right) \right) \right] \quad (27)$$

Cuando  $n$  se aproxima a 1,  $\phi$  disminuye. El ritmo de crecimiento, por tanto, mostrará una deceleración cada vez que el pico de la grieta se aproxime a un borde de grano y se haría cero (grieta no-propagante) si en algún momento  $n$  alcanza el valor 1. Si la grieta no alcanza el borde de grano antes de que el deslizamiento tenga lugar en el grano siguiente, el ritmo de crecimiento mostrará un mínimo relativo cuando  $n$  alcance el valor crítico  $n_c$ . En este punto la zona plástica se extiende hasta cubrir un nuevo grano,  $c$  se incrementa y lo mismo hace el ritmo de crecimiento (ecuación (27)). El parámetro  $n$  también cambia, disminuyendo a un nuevo valor  $n_s$  que puede calcularse introduciendo la nueva longitud de la zona plástica como

$$n_s = n_c \cdot \frac{i}{i+2} \quad (28)$$



recordando que  $c = iD/2$  es la extensión de la zona plástica antes de que se transmita el deslizamiento y  $c = (i+2)D/2$  después.

Alguna hipótesis adicional es necesaria para calcular el valor de  $n_c$  en cada momento. Se señaló anteriormente que la máxima resistencia esperada de los bordes de grano sería siempre sobrepasada después de que la grieta se hubiera extendido sobre dos o tres granos. Desde el punto de vista macroscópico esto significa que la zona plástica no se verá bloqueada, pero con todo, los bordes de grano todavía proporcionan en el nivel microscópico la resistencia que evita que las dislocaciones se alejen hasta el infinito, i.e., existirá una zona plástica finita moviéndose en frente de la grieta cuando esta crezca. Esta situación concuerda con la descripción proporcionada por la condición de existencia de la solución acotada de Bilby et al.. Por tanto, la hipótesis que se introduce aquí es que una relación del tipo (2) determina el valor crítico del parámetro  $n$  en cada incremento de deslizamiento. Sin embargo, una grieta de una cierta longitud no se propagará a menos que la tensión aplicada sea mayor que  $\tau_{Li}$  dada por la ecuación (15); el valor de  $n=1$  se alcanzaría para una tensión aplicada menor que  $\tau_{Li}$ . Siguiendo este argumento, la relación (2) cuando se aplica para el cálculo de  $n_c$  debe modificarse de la siguiente manera

$$n_c = \cos \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{\tau - \tau_{Li}}{\sigma_{comp}} \right) \right] \quad (29)$$

donde  $\sigma_{\text{comp}}$  es una tensión de comparación apropiada ( $\sigma_{\text{comp}} > \tau$ ).

Para grietas grandes,  $\tau_{Li} \rightarrow 0$  y (29) se reduce a la forma de Bilby et al.

$$\eta_{\infty} = \cos\left(\frac{\pi \tau}{2 \sigma_{\text{comp}}}\right) \quad (30)$$

Cuando las ecuaciones (15) y (29) se introducen en (27), el desplazamiento plástico (ritmo de crecimiento de grieta) toma la forma recogida en la Fig. 4.

En vista de que las grietas pequeñas no se comportan de acuerdo a la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal y que por tanto el factor de intensidad de tensiones no describe la similitud del sistema, es muy interesante expresar el desplazamiento plástico en términos del factor de intensidad de tensiones y analizar las condiciones de similaridad, i.e., las condiciones en que  $\phi$  es una función monoevaluada de  $K$ .

En la solución usada aquí, el factor de intensidad de tensiones describe la singularidad del campo de tensiones debido al bloqueo de las dislocaciones en el borde de grano y, por tanto, su valor está asociado con la extensión de la zona plástica. La expresión exacta para  $K$  aparece recogida en el Apéndice, pero en el caso  $\tau_0/\tau \ll 1$  se reduce a

$$K = \tau \sqrt{\pi c} = \tau \sqrt{\pi iD/2} \quad (31)$$

y a su vez, el desplazamiento plástico en función de  $K$  es aproximadamente

$$\phi = \frac{1}{\pi^2 A} b \frac{\sqrt{1-n^2}}{\sigma} K^2 \quad (32)$$

Esta ecuación tiene dos parámetros independientes,  $n$  y  $K$ ; no existirá similitud para  $K$  a menos que las variaciones en  $n$  sean lo suficientemente pequeñas como para que  $\phi$  no se vea influenciada por ellas. Para grietas grandes, el rango de variación del parámetro  $n$  es muy pequeño, i.e.,  $n_c \approx n_s$  (ecuación (28)) y por tanto se sigue que en este período el ritmo de crecimiento puede describirse con buena aproximación mediante la ecuación (32), fijando  $n=n_c$ , y usando (29). Entonces, en vista de que

$$\sqrt{1-n_c} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^{-1} n_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} \left( \frac{\sigma - \sigma_{Li}}{\sigma_{comp}} \right) \quad (33)$$

la ecuación (32) puede escribirse como

$$\phi = \frac{b\sqrt{1+n}}{2\pi A} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sigma_{comp}} \left( K - \sigma_{Li} \sqrt{\pi i D/2} \right) K \quad (34)$$

Finalmente, con  $\sqrt{1+n} \approx 2$  y usando (15) y (19),

$$\phi = \frac{b}{2\pi A \sigma_{comp}} \left( 1 - \frac{K_{th}}{K} \right) K^2 \quad (35)$$

Cuando  $K > K_{th}$ , esta ecuación se reduce a una forma similar a la ecuación presentada por Lardner [14]; pero debe notarse que, aunque se obtienen ecuaciones similares, las hipótesis usadas en los tratamientos respectivos son muy distintas. En particular, la expresión obtenida aquí deriva del término correspondiente a la componente no acotada la función de distribución de dislocaciones

(mirar Apéndice), mientras que la solución usada por Lardner es la acotada.

Con el fin de representar las magnitudes de una manera adimensional, la ecuación (35) puede escribirse como

$$\bar{\phi} = \frac{2\pi A \sigma_{comp}}{b K_{th}^2} \cdot \phi = \left(1 - \frac{k_{th}}{K}\right) \left(\frac{K}{K_{th}}\right)^2 \quad (36)$$

y usando la misma normalización la ecuación (32)

$$\bar{\phi} = \left(\frac{2}{\pi}\right) \left(\frac{\sigma_{comp}}{\bar{\sigma}}\right) \sqrt{1-n^2} \left(\frac{K}{K_{th}}\right)^2 \quad (37)$$

La ecuación (36) se representa gráficamente en la Fig. 5.

Si se considera en el material descargado una grieta que se extiende a través de  $m$  medios granos, cuando se aplique la carga en el vértice de la grieta se producirá una deformación plástica que se extenderá hasta el más próximo borde de grano, donde las dislocaciones quedarán bloqueadas. El valor de  $n$  en este punto será

$$n = \frac{a}{a + \eta D} \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (38)$$

El mínimo valor de  $n$ , que producirá el máximo desplazamiento plástico en esta situación es

$$n = \frac{a}{a + D} \quad (39)$$

donde  $a=mD/2$  y por tanto  $c=(m+2)D/2$ .

Sin embargo, el valor crítico de  $n$  al cual se transmitirá el deslizamiento es

$$n_c = \cos \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_L(m+2)}{\sigma_{comp}} \right) \right] \quad (40)$$

Dos casos son, por tanto, posibles: si  $n > n_c$ , la transmisión del deslizamiento se produciría inmediatamente y la zona plástica cubriría el número adicional de granos necesario de forma que el nuevo valor de  $n$  fuera menor que el nuevo  $n_c$ . Por el contrario, si  $n < n_c$ , cuando la grieta sea sometida a carga cíclica, mostrará una deceleración hasta que  $n=n_c$ , en que el deslizamiento se iniciará en el siguiente grano.

La condición bajo la cual esta última situación puede darse, y que limitará la región en que se observará comportamiento de grieta pequeña, puede expresarse como

$$\frac{m}{m+2} \leq \cos \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_L(m+2)}{\sigma_{comp}} \right) \right] \quad (41)$$

Tomando el arco coseno en ambos lados de la desigualdad, usando la aproximación

$$\cos^{-1} \left( \frac{m}{m+2} \right) \simeq \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{m}{m+2}} \quad (42)$$

substituyendo  $\overline{\sigma}_{L(m+2)}$  por medio de la ecuación (15)

$$\overline{\sigma}_{L(m+2)} = \frac{\overline{\sigma}_{fL}}{\sqrt{m+2}} \quad (43)$$

y multiplicando ambos lados por  $D/2$ , la condición puede expresarse como

$$K \leq \left( \frac{4}{\pi} \frac{\sigma_{comp}}{\overline{\sigma}_{fL}} + 1 \right) K_{th} \quad (44)$$

El punto de transición puede, por tanto, escribirse

$$\frac{K_t}{K_{th}} = \frac{4}{\pi} \frac{\sigma_{comp}}{\overline{\sigma}_{fL}} + 1 \quad (45)$$

Este análisis puede extenderse para considerar el máximo ritmo de crecimiento inicial alcanzable por una grieta.

Para un valor general,  $c = i \cdot D/2$  y un cierto nivel  $K/K_{th}$ , el máximo nivel permisible de tensión es

$$\frac{\overline{\sigma}}{\overline{\sigma}_{fL}} = \left( \frac{K}{K_{th}} \right) \frac{1}{\sqrt{i}} \quad (46)$$

y el mínimo valor de  $n$

$$n = \frac{i-2}{i} \quad (47)$$

Ambos, mínimo valor de  $n$  y máxima tensión aplicada dan el máximo ritmo de crecimiento para el particular nivel  $K/K_{th}$ .  
Substituyendo (46) y (47) en (37),

$$\bar{\phi} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sigma_{comp}}{\sigma_{fL}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{i}} \cdot \frac{K}{K_{th}} \quad (48)$$

La ecuación (47) no se puede aplicar a una grieta creciendo en el primer grano. En este caso particular  $c=D/2$ , el máximo valor de  $\sigma/\sigma_{fL}$  es  $K/K_{th}$  y el mínimo  $n$  es cero. Por tanto

$$\bar{\phi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sigma_{comp}}{\sigma_{fL}} \cdot \frac{K}{K_{th}} \quad (49)$$

La ecuación (48) para cada valor de  $i$  y la ecuación (49) representan líneas rectas en un gráfico logarítmico de  $\bar{\phi}$  vs.  $K/K_{th}$  (Fig. 5). En particular, la ecuación (48) cuando  $i$  se hace grande, da, en el límite

$$\bar{\phi} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sigma_{comp}}{\sigma_{fL}} \cdot \frac{K}{K_{th}} \quad (50)$$

y la intersección de esta línea con el lugar geométrico de los mínimos, ecuación (36), es el punto de transición definido previamente en la ecuación (45).

Por tanto, la descripción del crecimiento de una grieta en un gráfico similar al de la Fig. 5 es como sigue: si para la combinación particular de carga aplicada y longitud de grieta, el nivel  $K/K_{th}$  cae a la izquierda del punto  $K=K_{th}$ , la grieta

se propagará dentro de un grano; el vértice alcanzará el borde de grano incapaz de iniciar el deslizamiento en el siguiente grano y por tanto su crecimiento se parará, convirtiéndose en no propagante. Este proceso estará representado por una línea vertical en la abscisa correspondiente al valor inicial  $K/K_{th}$ .

Si este nivel inicial cae entre  $K_{th}$  y  $K_t$ , el crecimiento inicial puede ser descrito otra vez por una línea vertical, pero al tocar la línea de los mínimos, el deslizamiento sería iniciado en el siguiente grano (i.e. la zona plástica cubriría otro grano) y por tanto tendría lugar un incremento repentino a un nuevo  $K/K_{th}$ . Este proceso se repetiría hasta que el valor de  $K$  fuera mayor que  $K_t$ ; para entonces, en cada nuevo incremento de deslizamiento el valor de  $n$  estaría lo suficientemente próximo al valor crítico como para que el crecimiento de la grieta pudiera describirse por una sola línea, representada por la ecuación (36), que es, en esencia, la Ley de Paris.

La familiar representación de  $da/dN$  con respecto al parámetro

$$\bar{k} = \tau \sqrt{\pi a} \quad (51)$$

puede derivarse fácilmente de las ecuaciones presentadas hasta ahora. Sin embargo, se debe enfatizar que este parámetro en la aproximación desarrollada aquí no es rigurosamente un factor de intensidad de tensiones, puesto que la tensión está acotada en el pico de la grieta. Se usa aquí solamente como un parámetro



conveniente para representar  $\bar{\phi}$ .

La expresión del desplazamiento plástico normalizada en función de  $\bar{K}$  es

$$\bar{\phi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sigma_{comp}}{\bar{\sigma}} \cdot \frac{\sqrt{1-h^2}}{h} \cdot \left( \frac{\bar{K}}{K_{th}} \right)^2 \quad (52)$$

Por tanto, la ecuación para la línea inferior en la Fig. 5, es

$$\bar{\phi} = \left( 1 - \frac{K_{th}}{\bar{K}} \sqrt{n_c} \right) \cdot \left( \frac{\bar{K}}{K_{th}} \right)^2 \cdot \frac{1}{n_c} \quad (53)$$

donde  $n_c$  puede calcularse para cada valor de  $\bar{\sigma}/\bar{\sigma}_{fL}$  y cada nivel  $K/K_{th}$  mediante la expresión

$$n_c = \cos \left[ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{comp}} \left( 1 - \frac{K_{th}}{\bar{K}} \sqrt{n_c} \right) \right] \quad (54)$$

Esta ecuación se resuelve fácilmente en tres o cuatro iteraciones tomando  $n_c=1$  como siembra inicial.

También para cada valor de  $\bar{\sigma}/\bar{\sigma}_{fL}$  la línea de máximo ritmo de crecimiento inicial substituyendo en la ecuación (52) el valor de  $n$  calculado con la condición de que la zona plástica cubra un grano completo.

$$n = \frac{a}{a+D} \quad (55)$$

pero como

$$\frac{\bar{K}}{K_{th}} = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_{fL}} \cdot \sqrt{\frac{a}{D/2}} \quad (56)$$

se tiene

$$n = \frac{1}{1 + 2 \left( \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_{fL}} \right)^2 \left( \frac{K_{th}}{\bar{K}} \right)^2} \quad (57)$$

El correspondiente valor del punto de transición es

$$\frac{\bar{K}_t}{K_{th}} = \left( \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\bar{\sigma}_{comp}}{\bar{\sigma}_{fL}} + 1 \right) \cdot \sqrt{\cos \left[ \frac{2\pi (\bar{\sigma}/\bar{\sigma}_{comp})}{4 + \pi (\bar{\sigma}_{fL}/\bar{\sigma}_{comp})} \right]} \quad (58)$$

El lugar geométrico de los máximos se obtiene substituyendo en la expresión para el desplazamiento plástico el valor de  $n$  resultante justamente cuando el deslizamiento ha sido transmitido en cada nuevo grano,

$$n_s = \frac{a}{c + D} = \frac{a}{a/n_c + D} \quad (59)$$

que puede ser reescrito en términos de  $\bar{\sigma}/\bar{\sigma}_{fL}$  y  $K/K_{th}$  como

$$n_s = n_c \frac{1}{1 + 2n_c \left( \bar{\sigma}/\bar{\sigma}_{fL} \right)^2 \left( K_{th}/\bar{K} \right)^2} \quad (60)$$

donde, para  $K > K_{th}$ ,  $n_c$  se calcula de acuerdo a la ecuación (54) y para  $K \leq K_{th}$  se fija  $n_c = 1$ .

Cuando  $K/K_{th} \gg 1$ ,  $n_c \approx n_s \approx n_\infty$ , los lugares geométricos de máximo y mínimo se juntan, lo que significa que la influencia

de la microestructura es entonces despreciable y que la caracterización del crecimiento de grieta mediante una sola ecuación, expresando la similitud física del proceso, es apropiada. La forma aproximada de esta ecuación es

$$\bar{\phi} = \left( \frac{k}{k_{th}} \right)^2 \cdot \frac{1}{h} \quad (61)$$

La forma de esta ecuación y los argumentos expresados concuerdan con las ideas expuestas previamente en el capítulo referente al análisis dimensional del ritmo de crecimiento.

La Figura 6 muestra el ritmo de crecimiento de una grieta desde su etapa inicial ilustrando el típico patrón de deceleraciones y aceleraciones. Los lugares geométricos de mínimos, máximos y máximo ritmo de crecimiento inicial se han dibujado también en la misma figura.

La localización exacta de cada mínimo depende de la distribución de grano y de las condiciones particulares de orientación, etc., requeridas para iniciar y mantener el deslizamiento en cada grano. Consecuentemente, lo importante desde el punto de vista ingenieril son los límites de la curva de velocidad de crecimiento que se pueden obtener de un gráfico como el de la Fig. 6 y que se representan en la Fig. 7.

Los dos límites inferiores, i.e., la curva para el crecimiento en el primer grano y el lugar geométrico de los mínimos en los siguientes granos, pueden considerarse como similares a las dos ecuaciones propuestas por Hobson [17, 19] para describir los períodos de grieta pequeña y grande. En particular, el lugar de los mínimos es la conocida curva de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal, y por tanto, en el modelo desarrollado en este trabajo, se explica por qué las grietas pequeñas muestran ritmos de crecimiento mayores que los predichos de acuerdo a la M.F.E.L..

#### DISCUSION.

Es bien conocido que el crecimiento de grietas pequeñas y el crecimiento de grietas grandes en las proximidades del umbral es de una naturaleza cristalográfica. La cristalografía y la microestructura del material juegan, por tanto, un papel muy importante en el mecanismo y la cinética del crecimiento de grieta. En el modelo desarrollado en esta tesis se ha intentado incorporar en la forma más completa posible los factores microestructurales que controlan la extensión e intensidad de la deformación plástica asociada con el crecimiento de grieta.

Se ha hecho, sin embargo, muchas simplificaciones en el desarrollo del modelo; por ejemplo, no se ha considerado la intrínseca naturaleza tridimensional de la grieta. Se ha considerado que las líneas de dislocación y los granos son paralelos e

infinitos en la dirección z. De todas maneras, a pesar de su carácter simplificado, la descripción global del comportamiento de las grietas proporcionada por el modelo, concuerda con la evidencia experimental.

La primera hipótesis relevante del modelo es la existencia de bandas rectilíneas de deslizamiento extendiéndose a través de cada grano. Esta hipótesis está íntimamente relacionada a la particular morfología del deslizamiento plástico en cada material, la cual depende de un cierto número de factores metalúrgicos y mecánicos tales como el contenido de aleación, el tratamiento térmico y mecánico, la energía de falla de apilamiento (stacking fault energy).

Por ejemplo, se ha descrito un patrón de deslizamiento distinto en aleaciones de aluminio endurecidas por precipitación en las condiciones de subenvejecimiento (underaged) y sobre-envejecimiento (overaged) [20]. Las diferencias aparecen como consecuencia de la distinta naturaleza de la interacción entre las dislocaciones y los precipitados. Se cree que en la condición de subenvejecimiento, las líneas de dislocación cortan a través de las partículas de precipitado, produciendo un ablandamiento local de la banda de deslizamiento, que lleva a la concentración de la deformación en un número pequeño de bandas de deslizamiento muy intensas. Por el contrario, en la condición de sobre-envejecimiento las líneas de dislocaciones tienen que rodear las partículas, promoviéndose

deslizamiento cruzado (cross-slip) y apareciendo, por tanto, una distribución de deformación más homogénea que se manifiesta por la activación de un gran número de bandas de deslizamiento muy finas.

En materiales con baja energía de falla de apilamiento, por ejemplo acero inoxidable 3/6 ensayado a temperatura ambiente, conjuntos planos de dislocaciones y bandas de deslizamiento extendiéndose rectas a través de los granos, han sido observadas [21]. Por el contrario, los materiales con alta energía de falla de apilamiento son más propensos a la producción de deslizamiento cruzado y por tanto a la formación de estructuras de dislocaciones más complejas [22].

Parece, por tanto, que la hipótesis de estructuras planas de dislocación es no sólo una simplificación matemática, sino una descripción adecuada de morfologías de deslizamientos reales.

Otra hipótesis importante en el modelo es el uso de una relación del tipo de la ecuación (29) para evaluar  $n_c$ . Debe notarse que en el análisis no aparece ninguna razón por la que  $\sigma_{comp}$  tenga que ser igual al límite elástico  $\sigma_y$ . El hecho de que  $\sigma_y$  pueda representar una definición estadística (macroscópica) de la resistencia de un material policristalino a la propagación de deformación plástica, hace que sea una elección inteligente para  $\sigma_{comp}$ , pero el único requerimiento necesario en el análisis

es que  $\sigma_{\text{comp}}$  debe ser mayor que la tensión aplicada de forma que la ecuación (30) tenga sentido.

Esta idea puede ser muy útil en el análisis de experimentos en fatiga a bajo número de ciclos. Si la ecuación (30) se interpreta en el sentido tradicional como definiendo la extensión de la zona plástica,  $\sigma_{\text{comp}}$  debe igualarse a  $\sigma_y$ . Sin embargo, como ha sido bien argumentado por Brown et al. [23], cuando se intenta correlacionar ritmos de crecimiento de grieta con el tamaño de la zona plástica, es inevitable que se predigan tamaños infinitos de zona plástica cuando la carga se acerca al límite elástico. Sin embargo, en ensayos de fatiga con carga por encima del límite elástico (fatiga a bajo número de ciclos), se obtienen ritmos de crecimiento de grieta finitos.

Este problema no aparece si la ecuación (30) se entiende a la luz de la sugerencia ofrecida en este trabajo de que el crecimiento de una grieta grande, i.e., libre de influencia microestructural, puede interpretarse como un proceso en el que la similitud geométrica se preserva y que la expresión de esta similitud es precisamente  $n=\text{constante}$ , para amplitud de carga constante. Esta interpretación concuerda con los resultados experimentales de Frost y Dugdale [24] concernientes a la relación entre el tamaño de la zona plástica y la longitud de la grieta. Consecuentemente, la única restricción para  $\sigma_{\text{comp}}$  es  $\sigma_{\text{comp}} > \sigma$ .

Esta visión apoya la idea de Lardner [14] y Tomking [25], quienes, como se mencionó en el capítulo de análisis dimensional, usaron  $\sigma_u$ , la resistencia a tracción, en lugar de  $\sigma_y$ , asumiendo que era una mejor estimación de la tensión cíclica experimentada por el material en el pico de la grieta.



REFERENCIAS.

- [1] Bilby, B. A., Cottrell, A. H. and Swinden, K. H., (1963) "The Spread of Plastic Yield from a Notch" Proc. Roy. Soc. (London), A272, 304.
- [2] Stroh, A. N. (1955) "Brittle Fracture and Yielding" Phil. Mag. 46(21), 968.
- [3] Codd, I. and Petch, N. J. (1960) "Dislocation-Locking by Carbon, Nitrogen and Boron in  $\alpha$ -Iron" Phil. Mag., 5, 30.
- [4] Armstrong, R., Codd, I., Douthwaite, R. M. and Petch, N.J. (1962) "The Plastic Deformation of Polycrystalline Aggregates" Phil. Mag.:, 7, 45.
- [5] Armstrong, R. (1968) "Theory of the Tensile Ductile Brittle Behaviour of Polycrystalline HCP Materials, with Application to Beryllium" Acta Met., 16, 347.
- [6] Armstrong, R. (1983) "The Yield and Flow Stress Dependence on Polycrystal Grain Size" in Yield, Flow and Fracture of Polycrystals pp. 1-31, ed. T. N. Baker, Applied Science Publishers.
- [7] Kocks, V.F. (1958) "Polyslip in Polycrystals" Acta. Met., 6,85.
- [8] Navarro, A. and de los Rios, E.R. (1986) "A Model for Short Fatigue Crack Propagation with an Interpretation of the Short-Long Crack Transition" Remitido para publicación, Fat. Eng. Mater. Struct.
- [9] Miller, K. J. (1982) "The Short Crack Problem" Fat. Engng. Mater. Struct., 5(3), 223.
- [10] Miller, K. J., Mohamed, H. J. and de los Rios, E. R. (1985) "Accumulation of Damage Below the Fatigue Limit" idem (20).

- [11] El Haddad, M. H., Topper, T. H. and Smith K. N. (1979)  
"Prediction of Non-Propagating Cracks" Eng. Fract. Mech., 11, 573.
- [12] El Haddad, M. H., Smith, K. N. and Topper, T. H. (1979)  
"Fatigue Crack Propagation of Short Cracks" J. Eng. Mater. Tech.,  
Trans ASME, 101, 42.
- [13] Eastabrook, J. N. (1984) "A Dislocation Model for the Rate  
of Initial Growth of Stage I Fatigue Cracks" Int. J. of Fracture,  
24, R43.
- [14] Lardner, R. W., (1968) "A Dislocation Model for Fatigue  
Crack Growth in Metals" Phil. Mag., 17, 71.
- [15] De los Rios, E. R., Tang, Z. and Miller, K. J. (1984) "Short  
Crack Fatigue Behaviour in a Medium Carbon Steel" Fatigue  
Engng. Mater. Struct., 7(2), 97.
- [16] De los Rios, E. R., Mohamed, H. J. and Miller, K. J. (1985)  
"A Micro-Mechanics Analysis for Short Fatigue Crack Growth"  
Fatigue Engng. Mater. Struct., 8(1), 49.
- [17] Hobson, P. D. (1982) "The Formulation of a Crack Growth  
Equation for Short Cracks" Fatigue Engng. Mater. Struct.,  
5, 323.
- [18] Hobson, P. D. (1985) "The Growth of Short Fatigue Cracks  
in a Medium Carbon Steel" Ph. D. Tesis, University of Sheffield, U.K.
- [19] Hobson, P. D., Brown, M. W. and de los Rios (1986) "Two  
Phases of Short Crack Growth in a Medium Carbon Steel" idem [27].
- [20] Bolingbroke, R. K. and King, J. E. (1986) "A Comparison  
of Long and Short Fatigue Crack Growth in a High Strength  
Aluminium Alloy" 2nd. Symposium on the Behaviour of Short

Fatigue Cracks, University of Sheffield, 25-28 September 1985. European Group on Fracture Publication No. 1. Remitido para Publicación a Mechanical Engineering Publications, Instn. Mech. Engrs., London, 1986.

- [21] Gao Hua. de los Rios, E. R. and Miller, K. J. (1983) "Mixed-Mode Fracture Mechanisms near the Fatigue Threshold of AISI 316 Stainless Steel" *Fatigue Engng. Mater. Struct.*, 6, 137.
- [22] Tetelman, A. S. and McEvily, A. J. Jr. (1967) "Fracture of Structural Materials" John Wiley and Sons, New York.
- [23] Brown, M. W. and Miller, K. J. (1985) "Mode I Fatigue Crack Growth under Biaxial Stress at Room and Elevated Temperature" *Multiaxial Fatigue*, ASTM STP 853, ed. K. J. Miller and M. W. Brown, ASTM Philadelphia, 1985, pp 135-152.
- [24] Frost, N. E. and Dugdale, D. S. (1957) "The Propagation of Fatigue Cracks in Sheet Specimens" *J. Mech. Phys. Solids*, 6, 92.
- [25] Tomkins, B. (1968) "Fatigue Crack Propagation - An Analysis" *Phil. Mag.*, 18, 1041.

APENDICE.

Particularizando la expresión del capítulo precedente al caso simétrico con  $k=2$ , la Función de distribución de dislocaciones es

$$f(\xi) = \frac{\sigma_f}{\pi^2 A} \left[ \cosh^{-1} \left| \frac{1-h\xi}{n-\xi} \right| - \cosh^{-1} \left| \frac{1+h\xi}{n+\xi} \right| \right] + \frac{\sigma_f}{\pi^2 A} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[ 2 \cdot \sinh^{-1} h + \pi \left( \frac{\tau}{\sigma_f} - 1 \right) \right] \quad (A1)$$

Igualando a cero el segundo término del lado izquierdo de (A1), la condición de existencia para la solución acotada es

$$h = \cos \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tau}{\sigma_f} \right) \quad (A2)$$

La tensión  $S(\xi_0)$  en un punto  $\xi_0 > 1$  en el plano de deslizamiento es

$$\frac{S(\xi_0)}{\tau} = 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sigma_f}{\tau} \left[ \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\xi_0+1}{\xi_0-1}} \cdot \sqrt{\frac{1-h}{1+h}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\xi_0+1}{\xi_0-1}} \cdot \sqrt{\frac{1+h}{1-h}} + \sinh^{-1} h \right] + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sigma_f}{\tau} \cdot \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\xi_0^2-1}} - 1 \right) \cdot \left[ \sinh^{-1} h + \frac{\pi}{2} \left( \frac{\tau}{\sigma_f} - 1 \right) \right] \quad (A3)$$

Tomando límites

$$\lim_{h \rightarrow 1} S(\xi_0) = \frac{\xi_0}{\sqrt{\xi_0^2-1}} \cdot \tau \quad (A4)$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0} S(\xi_0) = \frac{\xi_0}{\sqrt{\xi_0^2-1}} (\tau - \sigma_f) + \sigma_f \quad (A5)$$

En la proximidad de  $\xi_0=1$ , la expresión (A3) puede

simplificarse a

$$\frac{S(\xi_0)}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi_0 - 1}} \cdot \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sigma_f}{\sigma} \cdot \cos^{-1} n \right] + \frac{\sigma_0}{\sigma} \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \arctg \frac{-n}{\sqrt{1-n^2}} \cdot \sqrt{2(\xi_0 - 1)} \right] \quad (A6)$$

El último término varía entre 1 y 0 cuando  $n$  varía entre 0 y 1, por lo que una aproximación superior es

$$\frac{S(\xi_0)}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi_0 - 1}} \cdot \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sigma_f}{\sigma} \cdot \cos^{-1} n \right] + \frac{\sigma_0}{\sigma} \quad (A7)$$

La singularidad del campo de tensiones al final de la zona plástica debido al bloqueo de las dislocaciones puede caracterizarse por un Factor de Intensidad de Tensiones

$$K = \lim_{\xi_0 \rightarrow 1} \sqrt{2\pi c} \cdot \sqrt{\xi_0 - 1} \cdot S(\xi_0) = \sigma \cdot \sqrt{\pi c} \cdot \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sigma_f}{\sigma} \cdot \cos^{-1} n \right] \quad (A8)$$

Nótese que, cuando  $\cos^{-1} n$  varía entre 0 y  $\pi/2$ , el segundo término varía entre 0 y  $\sigma_f/\sigma$ . Por lo tanto, para  $\sigma_f = \sigma_0 \ll \sigma$ , el factor de intensidad de tensiones es aproximadamente

$$K = \sigma \cdot \sqrt{\pi c} \quad (A9)$$

El desplazamiento plástico es igual al número de dislocaciones entre  $\xi = n$  y  $\xi = 1$  multiplicado por el vector de Burgers,

resultando

$$\phi = \frac{2b}{\pi^2 A} \cdot \sigma_f \cdot c \cdot \left[ n \cdot \ln \frac{1}{n} + \sqrt{1-n^2} \left( \sin^{-1} n + \frac{\pi}{2} \left( \frac{\tau}{\sigma_f} - 1 \right) \right) \right] \quad (\text{A10})$$

El límite de esta expresión cuando  $n=1$  (i.e. cuando el vértice de la grieta coincide con el borde de grano) es cero

$$\lim_{n \rightarrow 1} \phi = 0 \quad (\text{A11})$$

y también puede verse que

$$\lim_{n \rightarrow 0} \phi = \frac{cb}{\pi A} (\tau - \sigma_f) \quad (\text{A12})$$

Introduciendo (A8) en (A10) se obtiene el desplazamiento plástico en términos de factor de intensidad de tensiones como

$$\phi = \frac{b}{\pi^2 A} \sqrt{c} \left[ \sigma_f \cdot \sqrt{c} \cdot 2 \cdot n \cdot \ln \frac{1}{n} + \sqrt{1-n^2} \cdot k \cdot \sqrt{\pi} \right] \quad (\text{A13})$$

De los dos términos del lado derecho el primero deriva de la parte acotada y el segundo de la no-acotada. Cuando  $\sigma_f = \tau_0 \ll \tau$ , el primer término puede despreciarse frente al segundo, y por tanto la ecuación (A13) puede escribirse aproximadamente como

$$\phi = \frac{b}{\pi^2 A} \cdot \sqrt{1-n^2} \cdot \sqrt{\pi c} \cdot k \quad (\text{A14})$$

y de acuerdo con (A9) sigue finalmente que

$$\phi = \frac{b}{\pi^2 A} \cdot \frac{\sqrt{1-n^2}}{\zeta} \cdot k^2 \quad (\text{A15})$$

CAPITULO IV - FIGURAS

- Figura 1. Distribución de Dislocaciones Representando la Grieta y Zonas Plásticas.
- Figura 2. Concentración de Tensiones en frente de la Zona Plástica.
- Figura 3. Condiciones Límite de Tensión para la Propagación de Grieta.
- Figura 4. Variación del Desplazamiento Plástico en el Crecimiento de Grieta. ( $\tau_{fL}/\sigma_{comp}=0.5$ ,  $\tau/\tau_{fL}=1.2$ ,  $\tau_0/\tau_{fL}=0.1$ )
- Figura 5. Desplazamiento Plástico v.s. Factor de Intensidad de Tensiones. ( $\tau_{fL}/\sigma_{com}=0.5$ )
- Figura 6. Desplazamiento Plástico v.s. Parámetro  $\bar{K} = \tau\sqrt{\pi a}$   
 ( $\tau/\tau_{fL}=1.2$ ,  $\tau_{fL}/\sigma_{comp}=0.5$ )
- Figura 7. Límites de la Curva  $da/dN$  v.s.  $\bar{K} = \tau\sqrt{\pi a}$  para Dos Valores Diferentes del Cociente  $\tau/\tau_{fL}$  ( $\tau_{fL}/\sigma_{comp}=0.5$ )



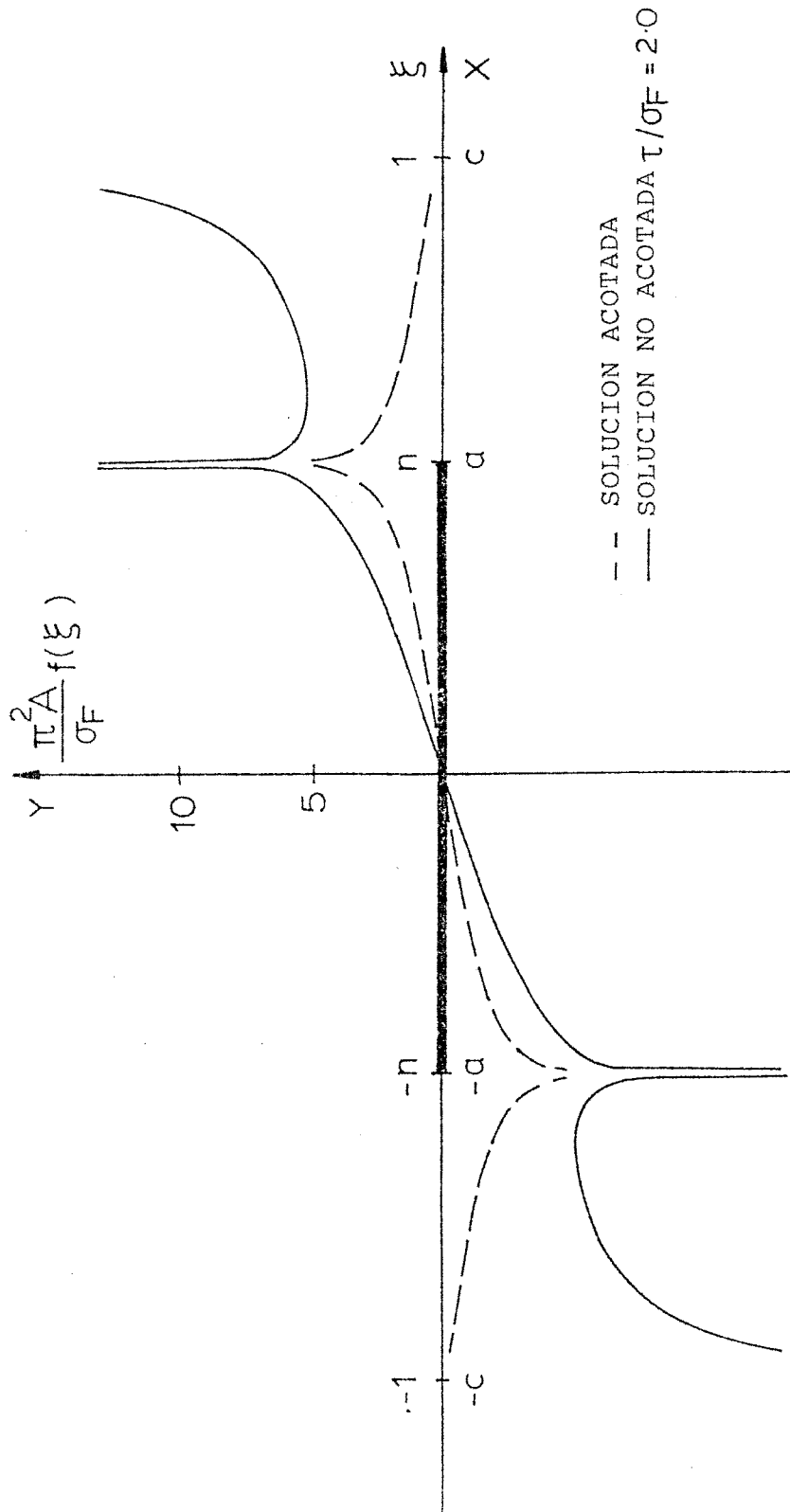


Figura 1. Distribución de Dislocaciones Representando la Grieta y Zonas Plásticas.

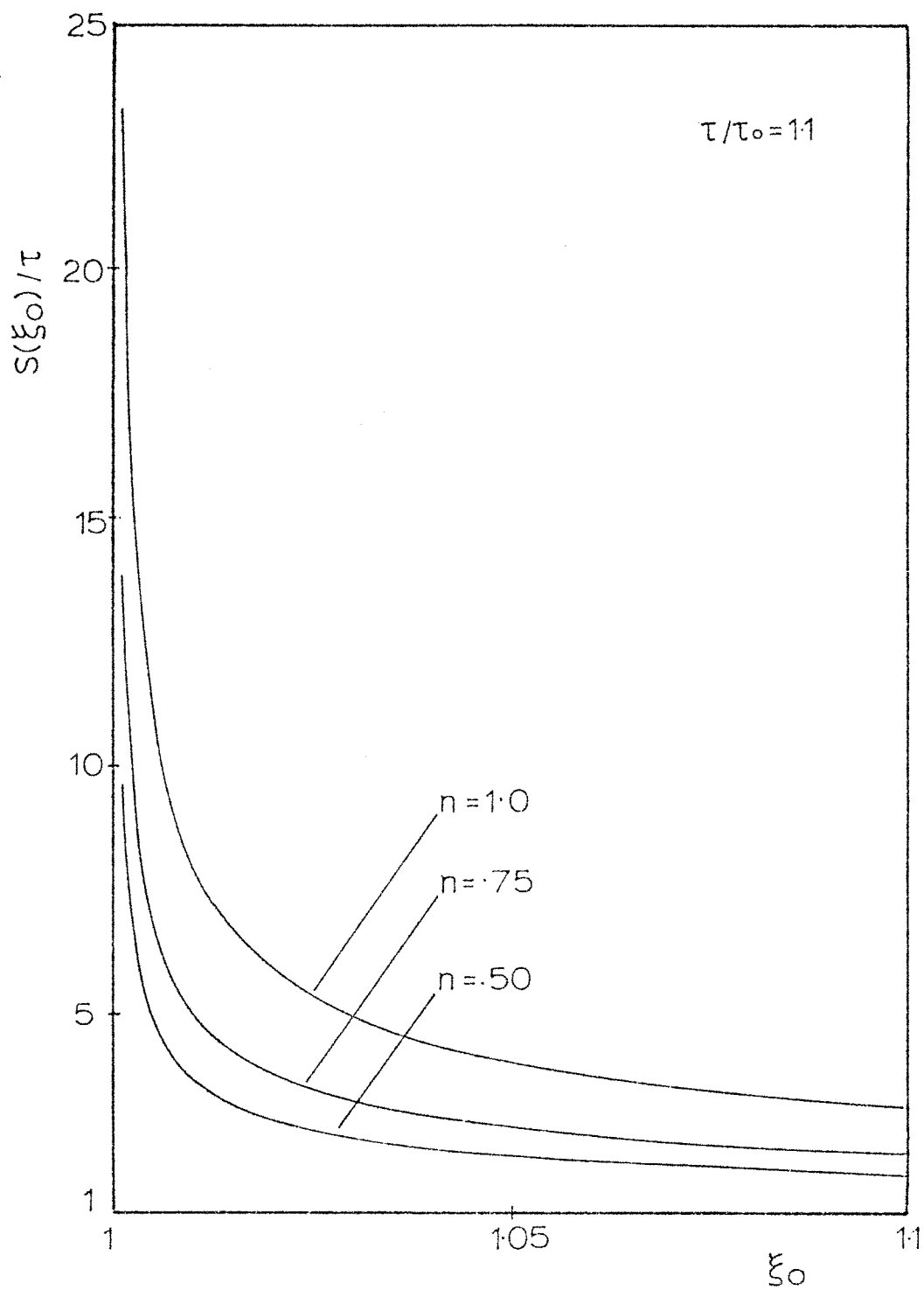


Figura 2.a Concentración de Tensiones en frente de la Zona Plástica.

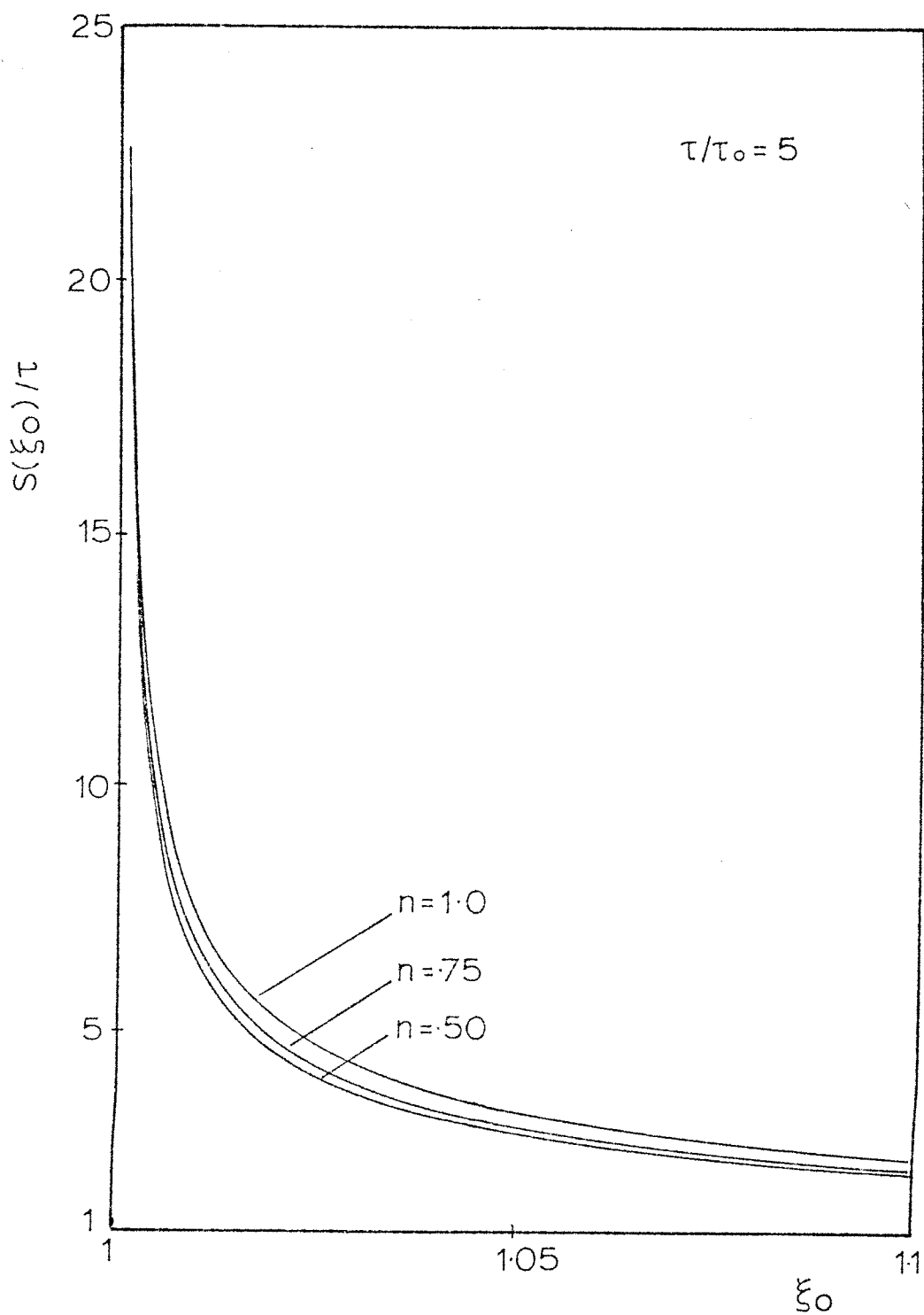


Figura 2.b Concentración de Tensiones en frente de la Zona Plástica.

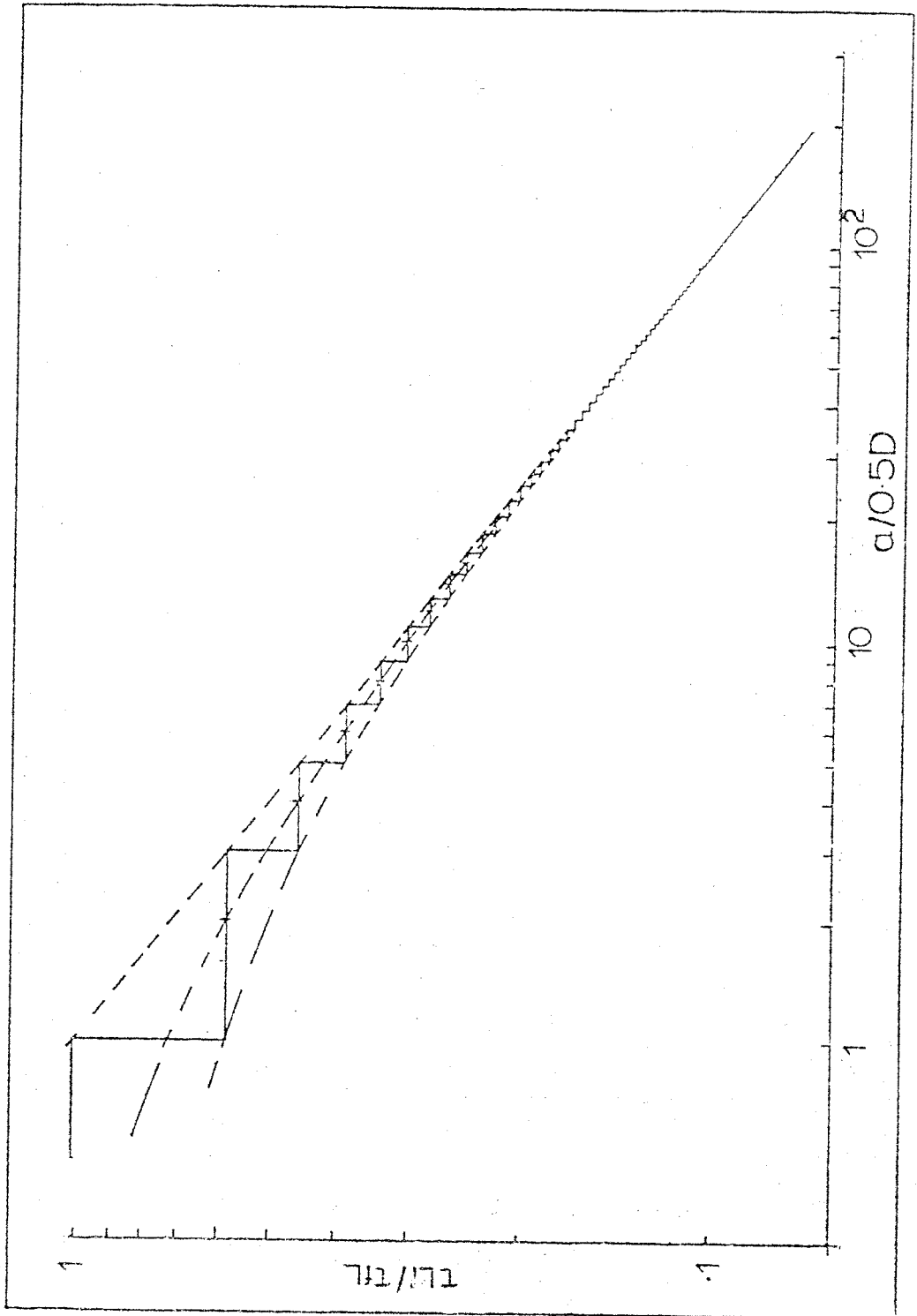


Figura 3. Condiciones Límite de Tensión para la Propagación de Grieta.

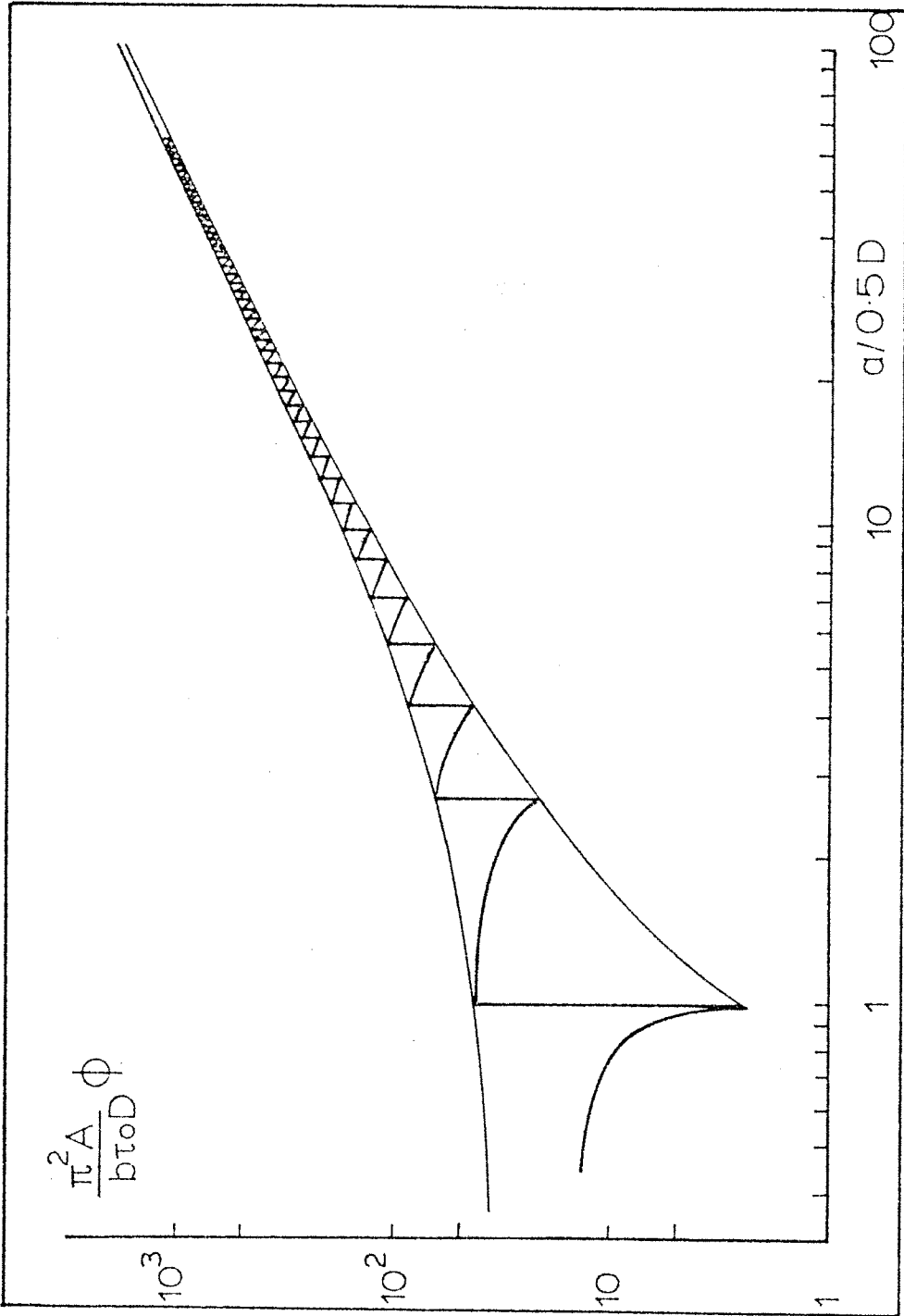


Figura 4. Variación del Desplazamiento Plástico en el Crecimiento de Grieta. ( $\zeta_{fL} / \sigma_{comp} = 0.5$ ,  $\zeta / \zeta_{fL} = 1.2$ ,  $\zeta_0 / \zeta_{fL} = 0.1$ )

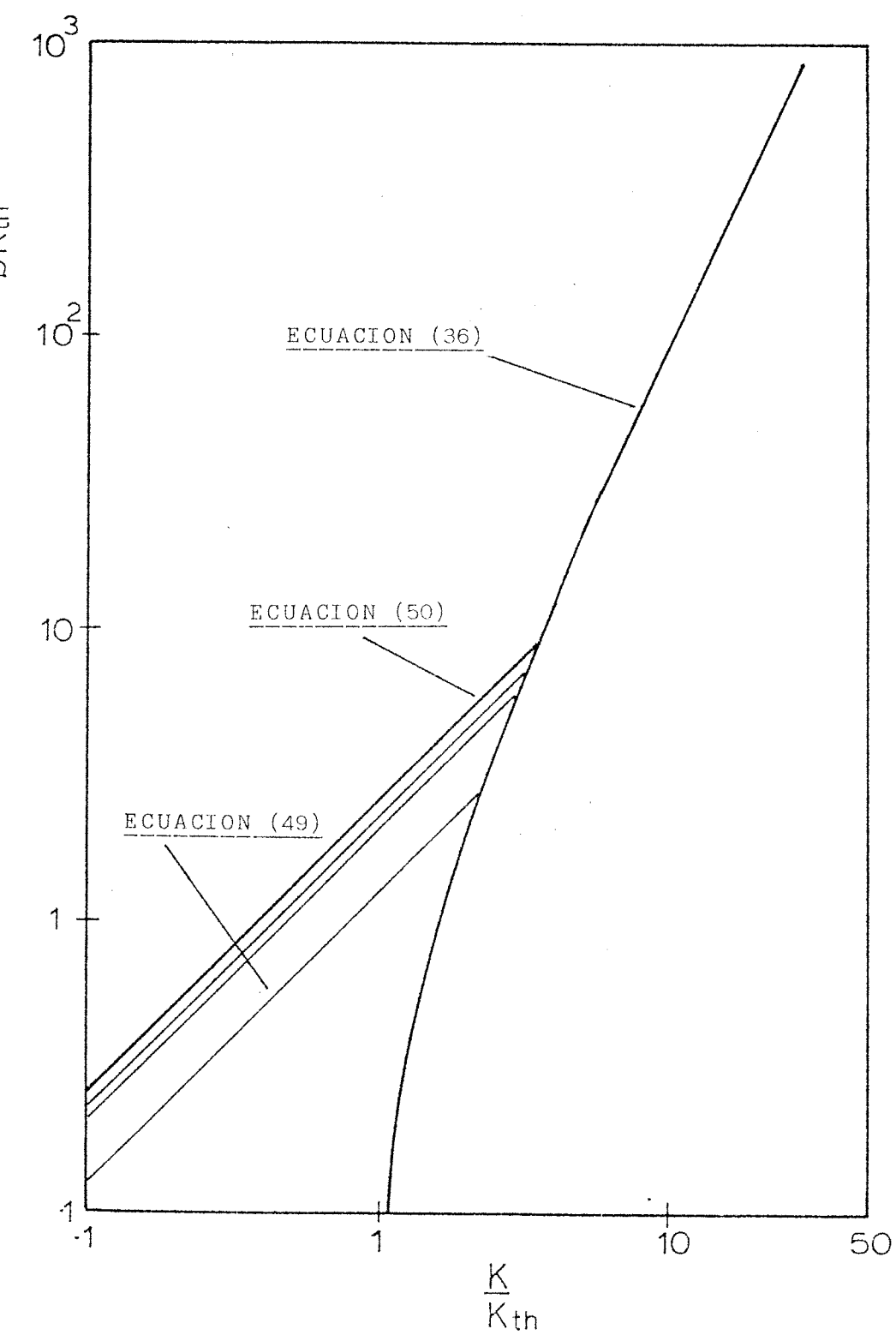


Figura 5. Desplazamiento Plástico v.s. Factor de Intensidad.

de Tensiones ( $Z_0 / \sigma = 0.5$ )

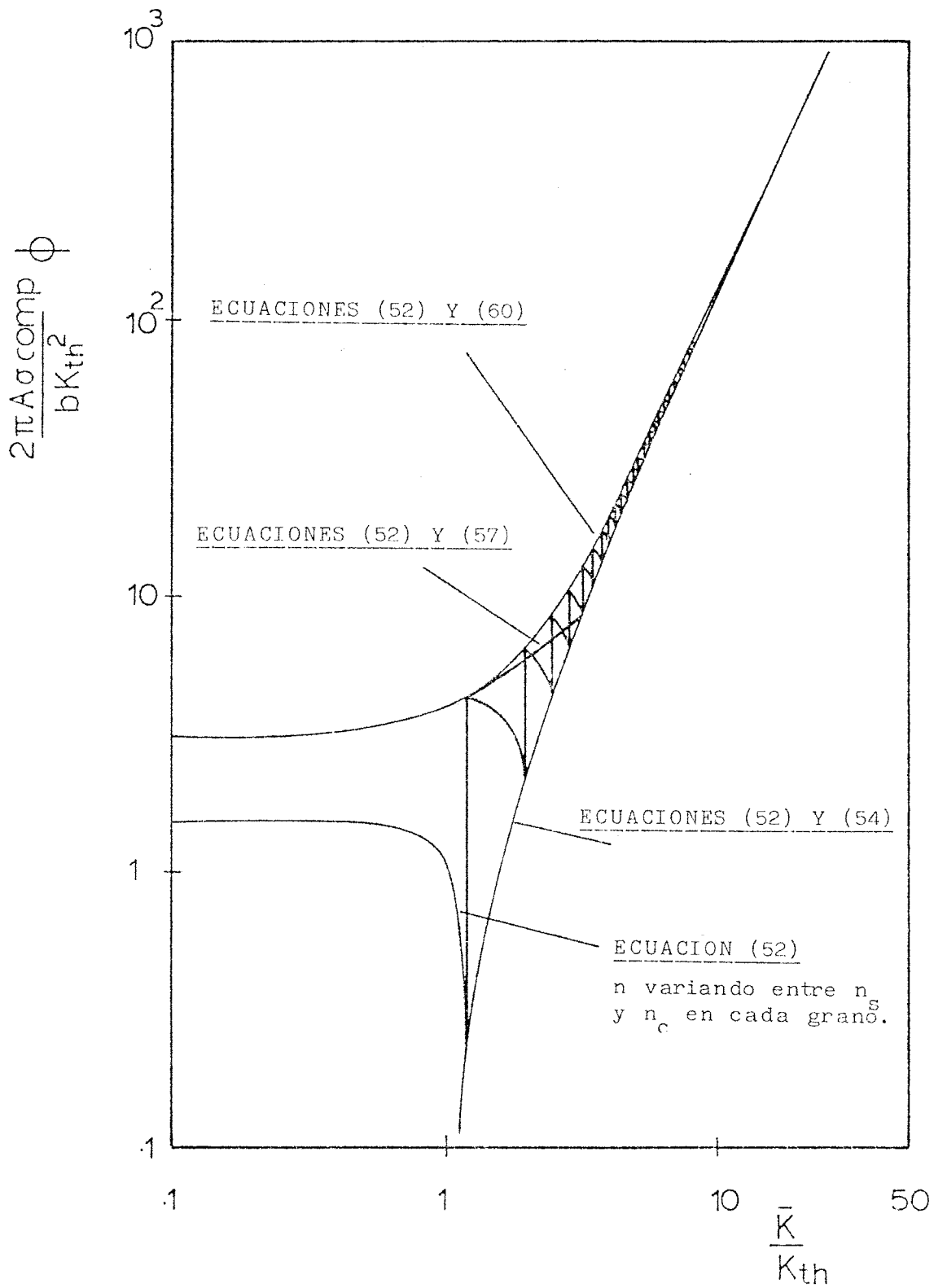


Figura 6. Desplazamiento Plástico v.s. Parámetro  $\bar{K} = \tau \sqrt{\pi a}$   
 ( $\tau/\tau_{fL} = 1.2$ ,  $\tau_{fL}/\sigma_{\text{comp}} = 0.5$ )

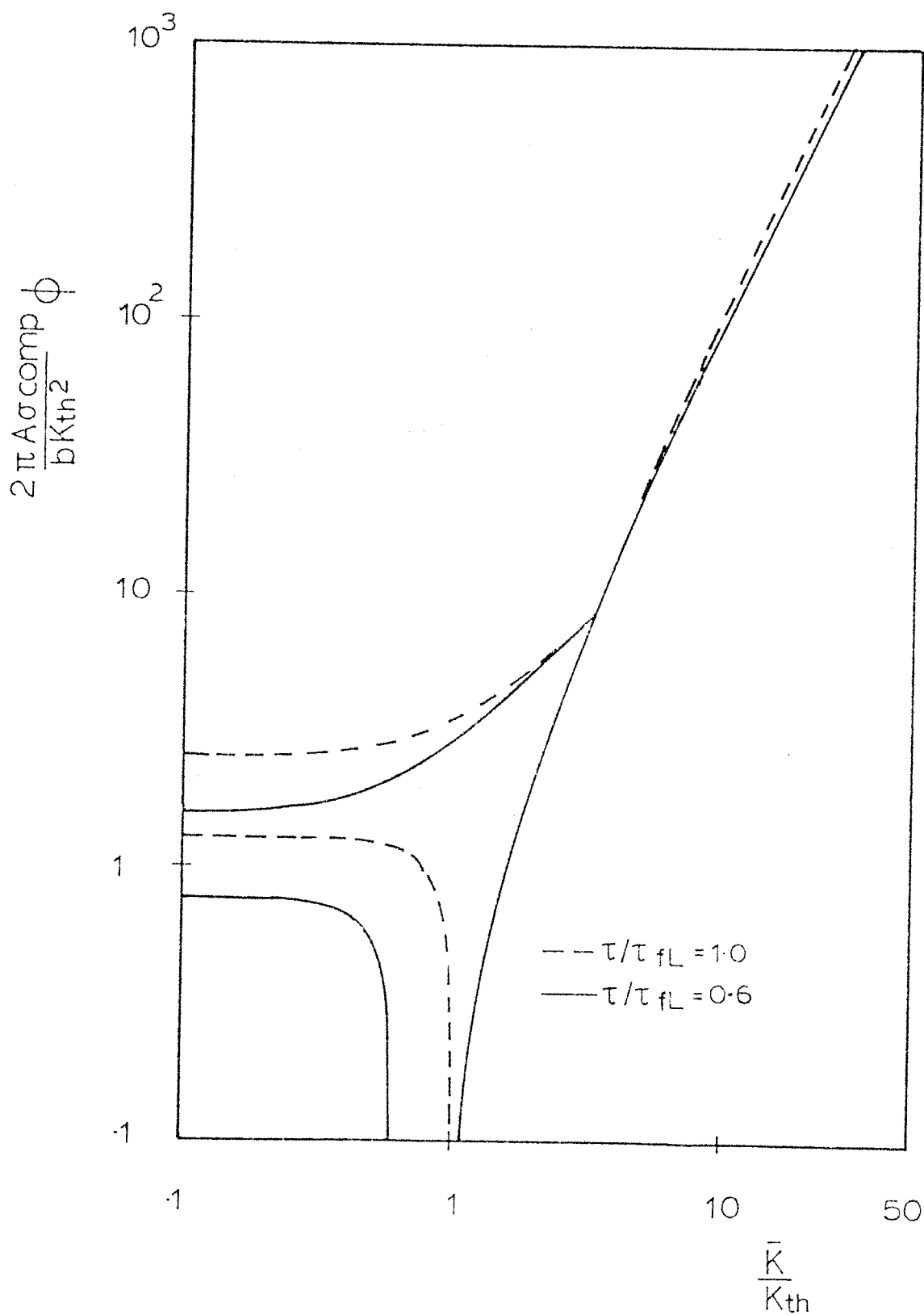


Figura 7. Límites de la Curva  $da/dN$  v.s.  $\bar{K} = \bar{\sigma}\sqrt{\pi a}$  para Dos Valores Diferentes del Cociente  $\tau/\tau_{fL}$  ( $\tau_{fL}/\sigma_{comp} = 0.5$ )



## CAPITULO V. APLICACION A RESULTADOS EXPERIMENTALES

## INTRODUCCION.

En el modelo desarrollado en el capítulo anterior se asume que el ritmo de crecimiento de grieta es proporcional al desplazamiento plástico en el vértice de la grieta, o en otras palabras, al número de dislocaciones activas en la zona plástica. Esto puede expresarse como

$$\frac{da}{dN} = f \cdot \phi \quad (1)$$

El factor  $f$  ha sido interpretado [1] como la fracción de dislocaciones en la banda de deslizamiento que participan en el proceso de extensión de la grieta, y por tanto se espera que dependa del nivel de tensión aplicada.

La aplicación del modelo a datos experimentales de crecimiento de grieta se reduce a la determinación de este factor  $f$ . Además, el conocimiento de la ley de variación de  $f$  con la tensión aplicada, permitirá la predicción de la curva S-N mediante una integración apropiada de la ecuación (1), como se verá más tarde.

## APLICACION A DATOS EXPERIMENTALES.

En los Apéndices de este capítulo se recogen los datos experimentales de crecimiento de grieta obtenidos por Hobson [2,3], cubriendo los períodos de grieta pequeña y grieta grande para un acero de 0,4% de contenido en carbono. Estos datos se han usado para comparar las predicciones basadas en el modelo.

El límite elástico y la resistencia a tracción del material eran 392 y 683 MPa respectivamente. Presentaba una típica estructura normalizada con la fase de ferrita, en forma de placas alargadas, segregada en los bordes de los antiguos granos de austenita. Las placas de ferrita tenían un espesor medio de  $8 \mu\text{m}$  y una longitud media de  $97 \mu\text{m}$ , mientras que el tamaño de los granos primitivos de austenita era  $71 \mu\text{m}$ . El módulo de Young era  $E=203 \text{ GPa}$  y el módulo cortante  $G=78 \text{ GPa}$ .

Los ensayos fueron realizados en tensión-compresión, con una razón entre mínimo y máximo de  $R=-1$ .

Los ensayos para determinar el valor umbral del factor de intensidad de tensiones arrojaron un valor de  $K_{\text{th}} = 3.0 \text{ MPa m}^{\frac{1}{2}}$ . Los resultados de la curva tensión-número de ciclos se recogen en el Apéndice 1 (ver Fig. 1). Los datos del ritmo de crecimiento de grieta se determinaron a través de medidas de la longitud de grieta tomadas en réplicas de acetato de la superficie de la probeta obtenidas a intervalos regulares. Los niveles de tensión elegidos por Hobson para la obtención de estos datos fueron 998.4, 815.9 y 638.5 MPa. (Apéndice 2).

La mayoría de las grietas se iniciaron en placas de ferrita orientadas a ángulos de entre  $45^\circ$  y la normal al eje de tensiones y mostraban un ritmo rápido de crecimiento inicial seguido por un período de retardo cuando el vértice de la grieta se aproximaba al final de la banda de ferrita. Posteriormente

la grieta se propagaba a través a la siguiente placa de ferrita, lo que normalmente involucraba un cambio de dirección y en muchos casos el tener que cruzar a través de las colonias de perlita. El crecimiento de la grieta mostraba subsecuentes retardos en los finales de las siguientes dos o tres placas de ferrita, pero no tan pronunciados como el primero, conformando un ritmo medio de propagación creciente. Después de esta región de crecimiento cristalográfica, la grieta se propagaba hasta el fallo creciendo en la dirección perpendicular al eje de tensión.

El límite de fatiga puede estimarse mediante la ecuación (19) del capítulo anterior

$$\sigma_{fL} = \frac{K_{th}}{\sqrt{\pi D/2}} \quad (2)$$

y usando para D la dimensión característica de las bandas de ferrita,  $97 \mu\text{m}$ , esto da un valor de 243 MPa.

El valor de  $f$  para cada nivel de tensión puede determinarse correlacionando para una longitud de grieta dada, el valor experimental  $da/dN$  con el valor calculado del desplazamiento plástico  $\phi$ . Esto requiere, a su vez, el cálculo del valor de  $n$ . El rango de posibles valores de  $n$  es muy amplio en el período de grieta pequeña, y su cálculo requeriría conocer en cada instante la longitud de grieta y el valor de  $c$  y no se dispone de esta última información para el crecimiento después del primer grano (ver Apéndice 2). Sin embargo, como se discutió en el capítulo

anterior (ecuación 28), el rango de  $n$  se estrecha cuando la longitud de grieta crece ( $n_s \rightarrow n_c$  cuando  $i$  es grande). Por tanto para minimizar la incertidumbre en el valor de  $n$  usado para calcular  $\phi$  solamente se han considerado pares  $(a, da/dN)$  en la región de grieta grande y el valor de  $n$  se ha aproximado mediante  $n_c$  o  $n_s$ . Los datos debieran seleccionarse idealmente de la región de longitud de grieta mayor de dos o tres veces la longitud de transición definida en la ecuación (45) del capítulo que describe el modelo y reproducida aquí como

$$\frac{K_t}{K_{th}} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sigma_{comp}}{\sigma_{fL}} + 1 \quad (3)$$

Puesto que la tensión de comparación  $\sigma_{comp}$  debe ser mayor que cualquier tensión aplicada, se iguala a la resistencia a tracción,  $\sigma_{comp} = 683$  MPa. Por tanto, substituyendo en (3), se obtiene un nivel de transición  $K_t/K_{th} = 4.578$ . Introduciendo este valor en la ecuación (54) Cap. IV, las longitudes de transición  $a_l^t$  para cada uno de los tres niveles de tensión considerado, 638.5 MPa, 815.9 MPa y 998.4 MPa son  $990 \mu m$ ,  $536 \mu m$  y  $301 \mu m$ , respectivamente.

Entre los datos presentados por Hobson no hay muchos puntos en la región de longitud de grieta mayor de dos o tres veces  $a_l^t$ . De hecho, en el nivel más bajo, no hay ningún punto en el que la longitud de grieta sea mayor que  $990 \mu m$ . En vista de esto, el procedimiento seguido ha sido usar los datos para los cuales  $a_l > a_l^t$ , para los dos niveles superiores y  $a_l > 400 \mu m$

para el más bajo, siendo este límite el mismo usado por Hobson [3] para ajustar su ecuación del ritmo de crecimiento de grieta grande. El valor de  $n$  usado en todos los cálculos fue  $n_s$ .

#### METODO PARA EL CALCULO DE $f$ .

Los cálculos se han realizado de acuerdo al siguiente procedimiento: para cada longitud superficial de grieta  $a_L$  el valor del parámetro  $\bar{K}$  se obtuvo mediante

$$\bar{K} = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (4)$$

(Nótese (Apéndice 2) que la longitud superficial de grieta considerada mide la distancia de pico a pico de la grieta y por lo tanto  $a = a_L / 2$ . Y nótese también que  $\sigma = \Delta\sigma / 2$  ya que  $R=-1$ ). El valor de  $n_c$  se calculó mediante (ecuación (54) Cap. IV)

$$n_c = \cos \left[ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_{comp}} \left( 1 - \frac{k_{th}}{\bar{K}} \sqrt{n_c} \right) \right] \quad (5)$$

resuelta iterativamente. Y el valor de  $n_s$ , ((60) Cap. IV)

$$n_s = \frac{n_c}{1 + 2 n_c (\sigma / \sigma_{FL})^2 (k_{th} / \bar{K})^2} \quad (6)$$

Y con estos datos el valor de  $\phi$  se calcula de acuerdo a ((32) Cap. IV)

$$\phi = \frac{2(1-\nu)}{G} \cdot \frac{\sqrt{1-n^2}}{n} \cdot \sigma \cdot a \quad (7)$$

donde se ha substituído el valor  $A = 6b/2\pi(1-\nu)$ , ya que en la etapa considerada la grieta crece en modo I y debe modelarse, por tanto, mediante una distribución de dislocaciones de borde.

Finalmente, para el conjunto de pares  $(\phi, da/dN)$  en cada nivel de tensión, se realizó un ajuste por mínimos cuadrados a la ecuación (1) para determinar el valor de  $f$ . Estos valores de  $f$  se correlacionaron con el valor del rango de tensión aplicada correspondiente y se obtuvo la relación

$$f = 2.539 \cdot 10^{-14} \cdot \Delta\sigma^{4.335} \quad (8)$$

que se representa en la Figura 2.

Con los valores de  $f$  obtenidos mediante (8) las curvas límite superior e inferior, calculadas usando  $n_s$  y  $n_c$  respectivamente, se han determinado para cada nivel de tensión y se representan en las Figuras 3a-3c, juntamente con las ecuaciones de crecimiento de grieta grande derivadas por Hobson. Las curvas de máximo y mínimo determinadas mediante el trabajo desarrollado en esta tesis proporcionan unos límites razonables a los resultados experimentales.

#### CALCULO DE LA VIDA A FATIGA.

En los ensayos de fatiga realizados por Hobson, éste observó que las grietas aparecían muy al principio en cada experimento, por lo cual el período de nucleación puede considerarse

despreciable. Consecuentemente, el número de ciclos requerido para propagar una grieta hasta un cierto tamaño, puede calcularse mediante la integración de las ecuaciones (1) y (7). Además, conociendo la longitud típica de las grietas en el momento del fallo (aproximadamente  $a_{\ell}^f = 4000 \mu m$  en el caso considerado) se puede realizar la predicción de la curva S-N.

Introduciendo (7) en (1) y substituyendo  $c=a/n$ , el ritmo de crecimiento se expresa

$$\frac{da}{dN} = \frac{f(1-\nu)\Delta\sigma}{G} \sqrt{1-n^2} \cdot c \quad (9)$$

Mientras la zona plástica está bloqueada en un valor particular  $c$ ,  $n$  varía entre  $n_s$  y  $n_c$ , en este período por tanto, sigue que

$$\frac{da}{dN} = c \frac{dn}{dN} \quad (10)$$

Introduciendo (10) en (9) el término  $c$  se cancela, dando

$$\frac{dn}{\sqrt{1-n^2}} = \frac{f(1-\nu)\Delta\sigma}{G} \cdot dN \quad (11)$$

Integrando el primer término entre  $n_s$  y  $n_c$ , el número de ciclos  $\Delta N_i$  invertidos mientras la zona plástica está bloqueada en un valor  $c = i D/2$  ( $i=1,3,5,\dots$ ) se obtiene mediante

$$\Delta N_i = \frac{G}{f(1-\nu)\Delta\sigma} \left[ \sinh^{-1} n_c^i - \sinh^{-1} n_s^i \right] \quad (12)$$



Para determinar el número de ciclos necesario para hacer crecer la grieta hasta una longitud  $a = a_l^f / 2$ , a una tensión aplicada  $\sigma = \Delta\sigma / 2$ , se calcula primero el valor correspondiente de  $n_c$  mediante (5). Entonces, se obtiene  $c = a/n_c$  y  $m$  se calcula como el número impar que mejor satisface  $c = m D/2$ . El número requerido de ciclos es

$$N = \sum_{i=1}^m \Delta N_i \quad i = 1, 3, 5, \dots \quad (13)$$

donde los valores de  $n_c^i$  y  $n_s^i$  necesarios (12) se calculan con las ecuaciones (5) y (6) respectivamente ( $n_s$  es igual a cero en el primer grano).

Estos cálculos se han llevado a cabo para diferentes niveles de tensión y usando  $a_l^f = 4000 \mu m$  para determinar la vida a fatiga. Los valores de  $f$  se obtienen mediante la relación (8). Los resultados se muestran en la tabla 1, que muestra que las vidas predichas concuerdan muy bien con los resultados obtenidos por Hobson. Como se mencionó en el capítulo introductorio, este autor propuso un método para calcular la vida fatiga en el que ésta era dividida en tres zonas: una zona microestructural, una zona interactiva y una zona en que se aplicaba la mecánica de la fractura continua. Y también derivó expresiones para el ritmo de crecimiento en cada una de estas tres zonas, que integrados convenientemente daban predicciones razonables de la vida a fatiga.

En la Figura 4 se puede apreciar la precisión de las predicciones realizadas con el método propuesto en esta tesis y comparar con las obtenidas por Hobson.

#### DISCUSION.

Aunque Hobson no determinó directamente el límite de fatiga, el valor calculado aquí de  $\sigma_{fL} = 243$  MPa parece una buena estimación en función del gráfico del número de ciclos de vida versus rango de tensión aplicada (Fig. 1). Sin embargo, dos ensayos realizados por debajo de este valor estimado del límite de fatiga, a amplitudes de tensión de 229.8 MPa y 225.1 MPa, - resultaron en fallo a 352754 y 583000 ciclos respectivamente (Apéndice 1).

Esto no debe sorprender, teniendo en cuenta el grado de dispersión que aparece normalmente en las determinaciones del tamaño de grano. De hecho, el mismo Hobson determinó un valor medio  $D = 116 \mu\text{m}$  para la integración de su ecuación de crecimiento de grietas pequeñas [3], lo que daría una estimación de 222 MPa para  $\sigma_{fL}$ . De todas maneras aquí se ha preferido usar el primer valor (obtenido a través de un estudio metalográfico) en vez del segundo, en cuya determinación aparecen consideraciones de crecimiento de grietas pequeñas.

Considerando una grieta de longitud inicial cero, el número de ciclos invertidos por la grieta en el primer grano

puede calcularse fácilmente substituyendo (ecuación (29) Cap.IV)

$$n_c = \cos \left[ \frac{\pi}{2} \cdot \left( \frac{\sigma - \sigma_{LL}}{\sigma_{comp}} \right) \right] \quad (14)$$

en (12), resultando

$$\Delta N_1 = \frac{\pi G}{2 f (1-\nu) \Delta \sigma} \left[ 1 - \frac{\Delta \sigma / 2 - \sigma_{fL}}{\sigma_{comp}} \right] \quad (15)$$

Para los tres niveles de tensión considerados, 638.5 MPa, 815.9 MPa y 998.4 MPa, esto da valores de 25%, 28% y 31% de las correspondientes vidas a fatiga predichas, respectivamente. Estos valores concuerdan con los valores medios observados en los experimentos, 36%, 26% y 29% para cada nivel de tensión. Sin embargo estos valores contrastan con los calculados integrando las ecuaciones de Hobson en la zona microestructural e interactiva, para cubrir el crecimiento en el primer grano y que son: 6.45%, 1.6% y 0.81%, respectivamente.

Este aparente desacuerdo puede explicarse si se tiene en cuenta que al derivar su ecuación de crecimiento para grietas pequeñas y debido a la gran dispersión de los datos en este período, Hobson empleó un procedimiento estadístico basado en un intervalo de confianza del 95% para recoger el crecimiento de las grietas más rápidas. Por tanto, los cálculos basados en esa aproximación deben proporcionar valores más cercanos a los mínimos observados. Y este es realmente el caso, ya que los mínimos observados son 8.8%, 1.7% y 1.8% para los niveles 638.5 MPa,

815.9 MPa y 998.4 MPa respectivamente.

El modelo desarrollado en esta tesis, por el contrario, describe más bien el comportamiento medio y sus predicciones deben de estar, por tanto, más cercanas a los valores medios observados.

Se debe hacer finalmente una observación sobre el procedimiento de predecir la vida a fatiga de los especímenes sin entalla normalmente empleados en los ensayos de vida a fatiga mediante la integración de ecuaciones de crecimiento.

En los experimentos de Hobson considerados aquí, se observó un incremento en el ritmo de crecimiento cuando dos grietas se unían, lo cual ocurría cuando las grietas eran ya muy largas hacia el final del ensayo. La fractura final era frecuentemente el resultado de la unión de dos o más grietas y de su propagación extremadamente rápida hasta el fallo.

Pero éste no tiene por qué ser siempre el caso. Considérese, por ejemplo, dos pequeñas grietas iniciadas en la superficie y asúmase que tienen la forma familiar de semicírculo. Después de que estas dos grietas se han unido en la superficie, la grieta compuesta mostrará probablemente una deceleración en el crecimiento superficial como consecuencia de la pérdida de similitud en la forma de la grieta (Fig. 5).

Rango Tensión MPa	f %	Vida Predicha (Ciclos)	Vida Experimental (Ciclos)
998.4	25.51	1383	1254
815.9	10.63	5423	6214
700.0	5.47	14543	12643
638.5	3.67	26049	35778
550.0	1.92	65415	73508

Tabla 1. Cálculo de Vida a Fatiga.

REFERENCIAS.

- |1| de los Ríos, E. R., Tang, Z. y Miller, K. J. (1984) "Short Crack Fatigue Behaviour in a Medium Carbon Steel" Fatigue Engng. Mater. Struct., 7(2), 97.
- |2| Hobson, P.D. (1985) "The Growth of Short Fatigue Cracks in a Medium Carbon Steel" Ph. D. Tesis, University of Sheffield, U.K.
- |3| Hobson, P. D., Brown, M. W. y de los Rios, E. R. (1986) "Two Phases of Short Crack Growth in a Medium Carbon Steel", 2nd. Symposium on the Behaviour of Short Fatigue Cracks, University of Sheffield, 25-28 sept., 1985. European Group on Fracture Publication No. 1. A ser publicado por Mech. Eng. Publications, Instn. Mech. Engrs., London, 1986.

APENDICE 1.

Hobson condujo como fase inicial de su programa experimental una serie de ensayos para obtener datos de vida a fatiga en forma de la conocida curva S-N.

Los ensayos se realizaron en tensión--compresión simétrica ( $R=-1$ ), a frecuencias variando entre 0.06 Hz y 1 Hz y utilizando una forma de onda triangular.

Se realizaron dos tipos de ensayos con control: de carga y con control de deformación.

Para los ensayos con control de carga el fallo se definió como el instante en que el espécimen se dividía en dos partes. (Cuando la grieta se propaga a través del espécimen, la tensión aumenta como consecuencia de la reducción de área portante, por lo que en las proximidades del fallo la propagación es muy rápida).

En los ensayos con control de deformación la carga disminuye al crecer la grieta, y por tanto se define el fallo cuando la capacidad de la probeta para soportar carga se reduce en un cierto porcentaje, normalmente entre 1% y 5%. En el trabajo de Hobson el porcentaje fijado fue el 5%.

En la table 1 se recogen los resultados experimentales.

Test Nº	Carga $\Delta P$ (KN)	Tensión $\Delta \sigma$ (MPa)	Vida $N_f$	Control
2BA	57.5	1,128.3	589	Deform.
2CA	50.3	1,101.9	890	"
2FC	43.0	900.4	1,621	"
2DC	41.9	866.0	2,201	"
1CC	38.5	795.8	2,878	"
2HC	37.4	783.1	4,913	"
1BC	36.6	737.3	8,802	"
2AA	33.7	714.3	18,277	"
1EC	25.7	553.5	51,313	"
1DC	24.0	477.3	90,983	"
2CC	24.1	501.4	120,531	"
2DA	26.8	527.1	151,608	"
2GC	23.4	486.8	159,138	"
2AC	22.0	459.6	352,754	"
1AC	22.2	450.3	583,000	"
1CB	50.2	998.4	1,186	carga
1BB	50.2	998.4	1,192	"
1FB	50.2	998.4	1,385	"
1AB	40.6	815.9	5,246	"
1EB	40.5	815.9	5,889	"
2CB	40.6	815.9	6,694	"
2DB	40.5	815.9	7,028	"
1FC	32.2	657.9	16,085	"
2EA	31.9	638.5	26,467	"
2GA	32.3	638.5	29,324	"
1EA	31.9	638.5	30,767	"
1DA	31.1	638.5	31,911	"
1AA	32.1	638.5	34,301	"
2EB	32.2	638.5	39,391	"
1FA	32.3	643.2	46,107	"
2FA	31.7	638.5	47,959	"

Tabla 1. Resultados de Vida a Fatiga.



APENDICE 2.

Los datos de crecimiento de grieta de los tres conjuntos de ensayos realizados por Hobson a los tres rangos de tensión de 638.5 MPa, 815.9 MPa y 998.4 MPa se recogen en este Apéndice.

Para cada tabla, la columna 4 representa las diversas etapas (número de ciclos) a las cuales se interrumpió temporalmente cada ensayo para tomar réplicas de la superficie de la probeta.

La longitud superficial de la grieta, que es la distancia medida en línea recta entre los dos vértices de la misma, aparece en la columna 5.

El ritmo de crecimiento de grieta (columna 10) fue calculado mediante la regla de la secante para cada dos pares adyacentes (a, N), de acuerdo a la norma ASTM-Standard E647-83 "Constant Load Amplitude Fatigue Crack Growth Rates above  $10^{-8}$  m/cycle" (1983), Apéndice X1. Esto es, dividiendo el incremento en la longitud de grieta  $\Delta a$  (columna 8) entre el incremento en el número de ciclos  $\Delta N$  (columna 9) y asociándolo con la media aritmética  $a_{\ell}$  de las longitudes de la grieta en los dos par-es (a, N) consideradas (columna 11).

El término D necesario para calcular los valores que aparecen en la columna 6 de las tablas, está asociado con la longitud de la placa de ferrita en que la grieta empieza a crecer.

En la práctica, no todos los especímenes usados por Hobson fueron atacados químicamente para revelar la microestructura, por lo que el término  $D$  no se midió directamente en todos los casos. En vez de esto el procedimiento seguido para la determinación de  $D$  fue el siguiente.

Primeramente, los valores  $da_l/dN$  fueron representados en una escala lineal con respecto a  $a$  para cada grieta. (La elección de una escala lineal se debe a que la ecuación propuesta por Hobson para el crecimiento de grietas pequeñas es una ecuación lineal en  $D-a$ ). Seguidamente se ajustó por mínimos cuadrados una línea recta a aquellos puntos que conformaban un patrón de deceleración en  $da_l/dN$ . La intersección de esa línea de regresión con la abscisa daba el valor de  $D$  para cada grieta.

El número de ciclos gastados hasta conseguir el cero en la columna 6 es el número de ciclos invertido por la grieta en el crecimiento en el primer grano.

Test No.	Vida a Fatiga (Ciclos)	Grieta No.	Fase de Replicación (Ciclos)	Longitud de Grieta, a (μm)	Da <sub>1</sub> μm	Porcentaje de Vida	Da (μm)	ΔN (Ciclos)	Δa/ΔN (μm/Ciclos)	a <sub>1</sub> (μm)
1CB	1186	1	480	157	126.31	40.6	157	480	0.327	78.5
			700	178	37.31	59.0	21	220	0.0955	167.5
			950	232	-	80.1	54	250	0.216	205
		2	81	92	51.05	6.8	92	81	1.14	46
			161	94	4.05	13.6	2	80	0.025	93
			321	98	1.05	22.1	4	160	0.025	96
			482	100	-	40.6	2	161	0.0124	99
			700	107	-	59.0	7	218	0.0321	103.5
		3	950	127	-	80.1	20	250	0.080	117
			482	61	42.76	40.6	61	482	0.127	30.5
			700	67	9.26	59.0	6	218	0.0275	64
		4	950	117	-	80.1	50	250	0.20	92
			81	25	78.95	6.8	25	81	0.309	12.5
			161	54	51.95	13.6	29	80	0.363	39.5
		5	321	71	28.95	27.1	17	160	0.106	62.5
			482	79	16.45	40.6	8	161	0.0497	75
			700	190	-	59.0	111	218	0.509	134.5
		6	950	244	-	80.1	54	250	0.216	217
			161	141	-	13.6	141	161	0.876	70.5
			321	223	-	27.1	82	160	0.513	182
		6	482	354	-	40.6	131	161	0.814	288.5
			700	552	-	59.0	198	213	0.908	453
			950	1,346	-	80.1	794	250	3.18	949
		6	482	137	81.18	40.6	137	482	0.284	68.5
			700	144	9.18	59.0	7	218	0.0321	140.5
			950	208	-	80.1	64	250	0.256	176

Δσ = 998.4 MPa

Test No.	Vida a Fatiga (Ciclos)	Grieta No.	Fase de Replicación (Ciclos)	Longitud de Grieta, a ( $\mu\text{m}$ )	$D_{a1}$ $\mu\text{m}$	Porcentaje de Vida	$\Delta a$ ( $\mu\text{m}$ )	$\Delta N$ (Ciclos)	$\Delta a/\Delta N$ ( $\mu\text{m}/\text{Ciclos}$ )	$a_1$ ( $\mu\text{m}$ )
7	482		114	70.63	40.6	114	482	0.237	57	
	700		114	-	59.0	-	218	-	-	
	950		126	7.63	80.1	12	250	0.0256	120	
8	482		134	-	40.6	134	482	0.278	67	
	700		186	-	59.0	52	218	0.239	160	
	950		269	-	80.1	83	250	0.332	227.5	
9	11		45	23.19	0.9	45	11	4.09	22.5	
	21		45	-	1.8	0	10	-	45	
	41		46	0.19	3.5	1	20	0.0333	45.5	
	81		50	-	6.8	4	40	0.1	48	
	161		54	-	13.6	4	80	0.050	52	
	321		91	-	27.1	37	160	0.231	72.5	
	482		96	-	40.6	5	161	0.0311	93.5	
700		156	-	59.0	60	218	0.275	126		
950		222	-	80.1	66	250	0.264	189		
1BB	11		88	44.56	0.9	88	11	8.0	44	
	21		89	0.06	1.8	1	10	0.10	88.5	
	41		91	-	3.4	2	20	0.10	90	
	81		91	-	6.8	0	40	-	91	
	161	1,192	96	-	13.5	5	80	0.0417	93.5	
	321		113	-	26.9	17	160	0.106	104.5	
	540		125	-	45.3	12	219	0.0548	119	
	790		135	-	66.3	10	250	0.040	130	
	1040		168	-	87.3	33	250	0.132	151.5	

 $\Delta\sigma = 998.4 \text{ MPa}$

Test No.	Vida a Fatiga (Ciclos)	Grieta No.	Fase de Replicación (Ciclos)	Longitud de Grieta, a (µm)	Da <sub>1</sub> µm	Porcentaje de Vida	Δa (µm)	ΔN (Ciclos)	Δa/ΔN (µm/Ciclos)	a <sub>1</sub> (µm)	
2	6		68	47.96	0.5	68	6	11.3		34	
	21		74	10.96	1.8	6	15	0.40		71	
	41		80	4.96	3.4	6	20	0.30		77	
	161		86	-	13.5	6	120	0.050		83	
	321		93	-	26.9	7	160	0.0438		89.5	
	540		119	-	45.3	26	219	0.119		106	
	790		174	-	66.3	55	250	0.22		146.5	
	1040		316	-	87.3	142	250	0.568		245	
	3	21		98	51.09	1.8	98	21	4.67		49
		41		100	1.09	3.4	2	20	0.10		99
81			110	-	6.8	10	40	0.25		105	
161			125	-	13.5	15	80	0.188		117.5	
321			151	-	26.9	26	160	0.163		138	
540			184	-	45.3	33	219	0.151		167.5	
790			252	-	66.3	68	250	0.272		218	
1040			416	-	87.3	164	250	0.656		334	
4		6		88	67.22	0.5	88	6	14.7		44
		11		93	20.72	0.9	5	5	1.00		90.5
	21		116	6.72	1.8	23	10	2.300		104.5	
	41		118	-	3.4	2	20	0.10		117	
	81		124	-	6.8	6	40	0.15		121	
	161		139	-	13.5	15	80	1.880		131.5	
	321		158	-	26.9	19	160	0.119		148.5	
	540		177	-	45.3	19	219	0.0868		167.5	
	790		211	-	66.3	34	250	0.136		194	
	1040		488	-	87.3	277	250	1.11		349.5	

Δσ = 998.4 MPa

Test No.	Vida a Fatiga (Ciclos)	Grieta No.	Fase de Replificación (Ciclos)	Longitud de Grieta, a ( $\mu\text{m}$ )	Da <sub>1</sub> ( $\mu\text{m}$ )	Porcentaje de Vida	$\Delta a$ ( $\mu\text{m}$ )	$\Delta N$ (Ciclos)	$\Delta a/\Delta N$ ( $\mu\text{m}/\text{Ciclos}$ )	a <sub>1</sub> ( $\mu\text{m}$ )
	41			108	64.21	3.4	108	41	2.63	52
	81			115	4.71	6.8	7	40	0.175	115.5
	161			117	0.21	13.5	2	80	0.025	116
5	321			117	-	26.9	0	160	-	117
	540			135	-	45.3	18	219	0.0475	126
	790			135	-	66.3	0	250	-	135
	1040			204	-	87.3	69	250	0.138	169.5
	6			82	51.33	0.5	82	6	13.7	41
	11			91	6.03	0.9	9	5	1.8	86.5
	21			92	1.03	1.8	1	10	0.10	91.5
6	41			101	-	3.4	9	20	0.45	96.5
	81			103	-	6.8	2	40	0.050	102
	161			122	-	13.5	19	80	0.238	112.5
	321			126	-	26.9	4	160	0.025	124
	540			140	-	45.3	14	219	0.0639	133
	790			142	-	66.3	2	250	0.0080	141
	1040			211	-	87.3	69	250	0.276	176.5
	81			128	189.79	6.8	128	81	1.58	64
	161			213	83.29	13.5	85	80	1.06	170.5
7	321			231	31.79	26.9	18	160	0.113	222
	540			249	13.79	45.3	18	219	0.0822	240
	790			281	-	66.3	32	250	0.128	265
	1040			406	-	87.3	125	250	0.25	343.5

 $\Delta\sigma = 998.4 \text{ MPa}$

Test NO.	Vida a Fatiga (Ciclos)	Grieta No.	Fase de Replicación (Ciclos)	Longitud de Grieta, a (μm)	Da <sub>1</sub> μm	Porcentaje de Vida	Δa (μm)	ΔN (Ciclos)	Δa/ΔN (μm/Ciclos)	a <sub>1</sub> (μm)
8	321		221	-	26.9	221	321	0.688	110.5	
	540		333	-	45.3	112	219	0.511	406	
	790		591	-	66.3	258	250	1.03	462	
	1040		2343	-	87.3	1752	250	7.01	1467	
9	161		124	138.31	13.5	124	161	0.770	62	
	321		171	52.81	26.9	47	160	0.294	147.5	
	540		444	-	45.3	273	219	1.25	307.5	
	790		795	-	66.3	351	250	1.40	619.5	
	1040		1226	-	87.3	431	250	1.73	1010.5	

$$\Delta\sigma = 998.4 \text{ MPa}$$

Test No.	Vida a Fatiga (Ciclos)	Grieta No.	Fase de Replicación (Ciclos)	Longitud de Grieta, a ( $\mu\text{m}$ )	$D_{a1}$ $\mu\text{m}$	Porcentaje de Vida	$\Delta a$ ( $\mu\text{m}$ )	$\Delta N$ (Ciclos)	$\Delta a/\Delta N$ ( $\mu\text{m}/\text{Ciclos}$ )	$a_1$ ( $\mu\text{m}$ )
1EB	5,889	1	10	122	75.29	0.2	122	10	12.0	61
			50	135	7.79	0.9	13	40	0.325	128.5
			100	138	-	1.7	3	50	0.060	136.5
			500	143	-	8.5	5	400	0.0125	140.5
			1000	204	-	17.0	61	500	0.122	173.5
			1500	224	-	25.5	20	500	0.040	214
			2000	317	-	34.0	93	500	0.186	270.5
			2500	397	-	42.5	80	500	0.16	357
			3000	607	-	50.9	210	500	0.42	502
			3500	693	-	59.4	86	500	0.172	650
			4000	978	-	67.9	285	500	0.57	835.5
			4500	1280	-	76.4	302	500	0.604	1129
5072	1720	-	86.1	440	572	0.769	1500			
5720	2571	-	97.1	851	648	1.31	2145.5			
2	3000	2	154	84.60	50.9	154	3000	0.0513	77	
			3500	156	6.60	59.4	2	500	0.0040	155
			4000	215	-	67.9	59	500	0.118	185.5
			4500	241	-	76.4	26	500	0.052	228
			5072	280	-	86.1	39	572	0.0682	260.5
			5720	318	-	97.1	38	648	0.0586	299

 $\Delta \sigma = 815.9 \text{ MPa}$



Test No.	Vida a Fatiga (Ciclos)	Grieta No.	Fase de Replificación (Ciclos)	Longitud de Grieta, a ( $\mu\text{m}$ )	$D_{a1}$ ( $\mu\text{m}$ )	Porcentaje de Vida	$\Delta a$ ( $\mu\text{m}$ )	$\Delta N$ (Ciclos)	$\Delta a/\Delta N$ ( $\mu\text{m}/\text{Ciclos}$ )	$a_1$ ( $\mu\text{m}$ )
2DB	7028	1	100	99	57.90	1.4	99	100	0.99	49.5
			500	112	1.90	7.1	13	400	0.0325	105.5
			1000	162	-	14.2	50	500	0.10	137
			1500	165	-	21.3	3	500	0.0060	163.5
			2000	167	-	28.5	2	500	0.0040	166
			2503	167	-	35.6	0	503	-	-
			3000	167	-	42.7	0	497	-	-
			3500	167	-	49.8	0	500	-	-
			4000	169	-	56.9	2	500	0.0040	168
			4500	191	-	64.0	22	500	0.044	180
			5000	254	-	71.1	63	500	0.126	222.5
			5501	272	-	78.3	18	501	0.0359	263
			6000	334	-	85.4	62	499	0.124	303
			6500	357	-	92.5	23	500	0.046	345.5
						1500	33	202.80	21.3	33
2000	77	164.30				28.5	44	500	0.088	55
2503	89	136.30				35.6	12	503	0.0239	83
3000	102	123.80				42.7	13	497	0.0262	95.5
3500	109	113.80				49.8	7	500	0.014	105.5
4000	142	-				56.9	33	500	0.066	125.5
4500	231	-				64.0	89	500	0.178	186.5
5000	242	-				71.1	11	500	0.022	236.5
5501	251	-				78.3	9	501	0.0180	246.5
6000	263	-				85.4	12	499	0.0240	257
6500	272	-	92.5	9	500	0.0180	267.5			

 $\Delta\sigma = 815.9 \text{ MPa}$

Test No.	Vida a Fatiga (Ciclos)	Grieta No.	Fase de Replicación (Ciclos)	Longitud de Grietas, a ( $\mu\text{m}$ )	$D_{a1}$ $\mu\text{m}$	Porcentaje de Vida	$\Delta a$ ( $\mu\text{m}$ )	$\Delta N$ (Ciclos)	$\Delta a/\Delta N$ ( $\mu\text{m}/\text{Ciclos}$ )	$a_1$ ( $\mu\text{m}$ )
1AB	5,246	1	50	44	171.87	1.0	44	50	0.88	22
			100	63	140.37	1.9	19	50	0.38	53.5
			500	194	65.37	9.5	131	400	0.328	128.5
			1000	194	-	19.1	0	500	-	194
			1500	196	-	28.6	2	500	0.002	195
			2000	206	-	38.1	10	500	0.02	201
			2500	215	-	47.7	9	500	0.018	210.5
			3000	226	-	57.2	11	500	0.022	220.5
			3500	245	-	66.7	19	500	0.038	235.5
			4002	269	-	76.3	24	502	0.0478	257
4500	305	-	85.8	36	498	0.0723	287			
5000	345	-	95.3	40	500	0.08	325			
		2	100	113	98.95	1.9	113	100	1.13	56.5
			500	136	30.95	9.5	23	400	0.0575	124.5
			1000	168	3.45	19.1	32	500	0.064	152
			1500	168	-	28.6	0	500	-	168
			2000	169	-	38.1	1	500	0.001	168.5
			2500	177	-	47.7	8	500	0.016	173
			3000	177	-	57.2	0	500	-	177
			3500	194	-	66.7	17	500	0.017	185.5
			4002	236	-	76.3	42	502	0.0837	215
			4500	250	-	85.8	14	498	0.0281	243
5000	252	-	95.3	2	500	0.040	251			

 $\Delta \sigma = 815.9 \text{ MPa}$

Test NO.	Vida a Fatiga (Ciclos)	Grieta No.	Fase de Replicación (Ciclos)	Longitud de Grieta, a ( $\mu\text{m}$ )	$D_{a1}$ $\mu\text{m}$	Porcentaje de Vida	$\Delta a$ ( $\mu\text{m}$ )	$\Delta N$ (Ciclos)	$\Delta a/\Delta N$ ( $\mu\text{m}/\text{Ciclos}$ )	$a_1$ ( $\mu\text{m}$ )
3	500			113	62.95	9.5	113	500	0.226	56.5
	1500			119	3.45	28.6	6	1000	0.006	116
	2000			121	-	38.1	2	500	0.004	120
	2500			126	-	47.7	5	500	0.010	123.5
	3000			161	-	57.2	35	500	0.070	143.5
	3500			161	-	66.7	0	500	-	161
	4002			174	-	76.3	13	502	0.013	167.5
	4500			194	-	85.8	20	498	0.0402	184
	50			44	105.93	1.0	44	50	0.88	22
	500			126	42.93	9.5	82	450	0.182	85
4	1000			134	-	19.1	8	500	0.016	130
	1500			135	-	28.6	1	500	0.002	134.5
	2000			151	-	38.1	16	500	0.032	143
	2500			151	-	47.7	0	500	-	151
	3000			179	-	57.2	28	500	0.028	165
	3500			224	-	66.7	45	500	0.090	201.5
	4002			277	-	76.3	53	502	0.106	250.5
	4500			305	-	85.8	28	498	0.0562	291
	5000			366	-	95.3	61	500	0.122	335.5
	5	2000			254	-	38.1	254	2000	0.127
2500				286	-	47.7	32	500	0.064	270
3000				404	-	57.2	118	500	0.236	345
3500				664	-	66.7	260	500	0.52	534
4002				790	-	76.3	126	502	0.251	727
4500				1059	-	85.8	269	498	0.540	924.5
5000				1219	-	95.3	160	500	0.320	1139

 $\Delta \sigma = 815.9 \text{ MPa}$

Test No.	Vida a Fatiga (Ciclos)	Grieta No.	Fase de Replicación (Ciclos)	Longitud de Grieta, a ( $\mu\text{m}$ )	$D_{a1}$ ( $\mu\text{m}$ )	Porcentaje de Vida	$\Delta a$ ( $\mu\text{m}$ )	$\Delta N$ (Ciclos)	$\Delta a/\Delta N$ ( $\mu\text{m}/\text{Ciclos}$ )	$a_1$ ( $\mu\text{m}$ )
2GA	29324	1	1000	52	59.07	3.3	52	1,000	0.052	26
			3000	79	19.57	10.2	27	2,000	0.0135	65.5
			6166	86	2.57	21.0	7	3,166	0.00221	82.5
			10140	88	-	34.6	2	3,974	0.000503	87
			15047	130	-	51.3	42	4,907	0.00856	109
			20873	294	-	71.2	164	5,826	0.0281	212
			28640	572	-	97.7	278	7,767	0.0358	433
			1000	19	27.85	2.9	19	1,000	0.019	9.5
			3000	33	11.35	8.8	14	2,000	0.007	26
			6016	38	1.85	17.5	5	3,016	0.00166	35.5
1AA	34301	1	10000	63	-	29.2	25	3,984	0.00628	50.5
			15713	106	-	45.8	43	5,713	0.00753	84.5
			22000	116	-	64.1	10	6,287	0.00159	111
			30010	121	-	87.5	5	8,010	0.000624	118.5
			1000	44	33.09	2.9	44	1,000	0.044	22
			3000	53	6.59	8.8	9	2,000	0.0045	48.5
			6016	59	-	17.5	6	3,016	0.00199	56
			10000	83	-	29.2	24	3,984	0.00602	71
			15713	97	-	45.8	14	5,713	0.00245	90
			22000	140	-	64.1	43	6,287	0.00684	118.5
30010	256	-	87.5	116	8,010	0.0145	198			
1EA	30767	1	6000	35	133.61	19.5	35	6,000	0.00583	17.5
			10000	56	105.61	32.5	21	4,000	0.00525	45.5
			15000	74	86.11	48.8	18	5,000	0.0036	65
			21000	142	-	68.3	68	6,000	0.0113	108
			28000	275	-	91.0	133	7,000	0.019	208.5

 $\Delta \sigma = 638.5 \text{ MPa}$

Test No.	Vida a Fatiga (Ciclos)	Grieta No.	Fase de Replicación (Ciclos)	Longitud de Grieta, a (µm)	Da <sub>1</sub> µm	Porcentaje de Vida	Δa (µm)	ΔN (Ciclos)	Δa/ΔN (µm/Ciclos)	a <sub>1</sub> (µm)
			3000	70	79.04	9.8	70	3000	0.0233	35
			6000	102	28.04	19.5	32	3000	0.0107	86
		2	10000	107	9.54	32.5	5	4000	0.00125	104.5
			15000	162	-	48.8	55	5000	0.011	134.5
			21000	229	-	68.3	67	6000	0.0112	195.5
			28000	488	-	91.0	259	7000	0.037	358.5
			10000	28	-	32.5	28	10000	0.0028	14
		3	15000	53	-	48.8	25	5000	0.005	40.5
			21000	82	-	68.3	29	6000	0.00483	67.5
			28000	127	-	91.0	45	7000	0.00643	104.5
			6000	37	42.12	19.5	37	6000	0.00617	18.5
			10000	46	19.12	32.5	9	4000	0.00225	41.5
		4	15000	55	10.12	48.8	9	5000	0.00180	50.0
			21000	80	-	68.2	25	6000	0.00417	67.5
			28000	121	-	91.0	41	7000	0.00586	100.5
			6000	25	72.66	19.5	25	6000	0.00417	12.5
			10000	42	51.66	32.5	17	4000	0.00425	33.5
		5	15000	51	38.66	48.8	9	5000	0.0018	46.5
			21000	64	-	68.2	13	6000	0.00217	57.5
			28000	488	-	91.0	424	7000	0.0606	276
			10009	55	-	25.4	55	10009	0.0055	27.5
			14446	76	-	36.7	21	4437	0.00473	65.5
			19500	115	-	49.5	39	5054	0.00762	95.5
		1	24500	207	-	62.2	92	5000	0.0185	161
			29622	261	-	75.2	54	5122	0.0102	234
			34500	347	-	87.6	86	4878	0.0177	304
			37743	1049	-	95.8	702	3243	0.216	698
2EB	39391									

Δσ = 638.5 MPa

Test No.	Vida a Fatiga (Ciclos)	Grieta No.	Fase de Replicación (Ciclos)	Longitud de Grieta, a (μm)	Da <sub>1</sub> μm	Porcentaje de Vida	Δa (μm)	ΔN (Ciclos)	Δa/ΔN (μm/Ciclos)	a <sub>1</sub> (μm)
	6000		29	54.36	15.2	29	6000	0.00483	14.5	
	10009		40	34.36	25.4	11	4009	0.00274	34.5	
	14446		50	23.86	36.7	10	4437	0.00225	45	
2	19500		94	-	49.5	44	5054	0.00871	72	
	24500		120	-	62.2	26	5000	0.00520	107	
	29622		144	-	75.2	24	5122	0.00469	132	
	34500		296	-	87.6	152	4878	0.0312	220	
3	19500		61	-	49.5	61	19500	0.00313	30.5	
	24500		129	-	62.2	68	5000	0.0136	95	
	29622		195	-	75.2	66	5122	0.0129	162	
	34500		297	-	86.7	102	4878	0.0209	246	
4	6000		37	70.56	15.2	37	6000	0.00617	18.5	
	10009		52	44.56	25.4	15	4009	0.00374	44.5	
	14446		66	30.06	36.7	14	4437	0.00316	59	
	19500		73	19.56	49.5	7	5054	0.00139	69.5	
	24500		150	-	62.2	77	5000	0.0154	111.5	
	29622		162	-	75.2	12	5122	0.00234	156	
	34500		217	-	87.6	55	4878	0.0113	189.5	
	37743		283	-	95.8	66	3243	0.0204	250	
5	19500		69	-	49.5	69	19500	0.00354	34.5	
	24500		85	-	62.2	16	5000	0.00320	77	
	29622		109	-	75.2	24	5122	0.00469	97	
	34500		114	-	87.6	5	4878	0.00103	111.5	
	37743		143	-	95.8	29	3243	0.00894	128.5	

 $\Delta \sigma = 638.5 \text{ MPa}$

Test No.	Vida a Fatiga (Ciclos)	Grieta No.	Fase de Replicación (Ciclos)	Longitud de Grietas, a (μm)	Da <sub>1</sub> μm	Porcentaje de Vida	Δa (μm)	ΔN (Ciclos)	Δa/ΔN (μm/Ciclos)	a <sub>1</sub> (μm)
	6000			122	114.30	15.2	122	6000	0.0203	61
	10009			150	39.30	25.4	28	4009	0.00698	136
	14446			203	-	36.7	53	4437	0.0142	176.5
6	19500			276	-	49.5	73	5054	0.0144	239.5
	24500			324	-	62.2	48	5000	0.0096	300
	29622			545	-	75.2	221	5122	0.0431	434.5
	34500			731	-	87.6	186	4878	0.0381	638
	37743		1,184		-	95.8	453	3243	0.140	957.5
	19000			56	-	49.5	56	19500	0.00287	28
7	24500			75	-	62.2	19	5000	0.0038	65.5
	29622			122	-	75.2	47	5122	0.00918	98.5
	34500			146	-	87.6	24	4878	0.00492	134
	10009			92	59.78	25.4	92	10009	0.00919	46
	14446			99	10.28	36.7	7	4437	0.00158	95.5
	19500			110	-	49.5	11	5054	0.00218	104.5
8	24500			230	-	62.2	20	5000	0.00400	170
	29622			253	-	75.2	23	5122	0.00449	241.5
	34500			566	-	87.6	313	4878	0.0642	409.5
	37743			837	-	95.8	271	3243	0.0836	701.5
	6000			21	-	15.2	21	6000	0.00350	10.5
	10009			48	-	25.4	27	4009	0.00673	34.5
9	14446			73	-	36.7	25	4437	0.00563	60.5
	19500			102	-	49.5	29	5054	0.00574	87.5
	24500			148	-	62.2	46	5000	0.00920	125
	29622			239	-	75.2	91	5122	0.0178	193.5

$$\Delta \sigma = 638.5 \text{ MPa}$$

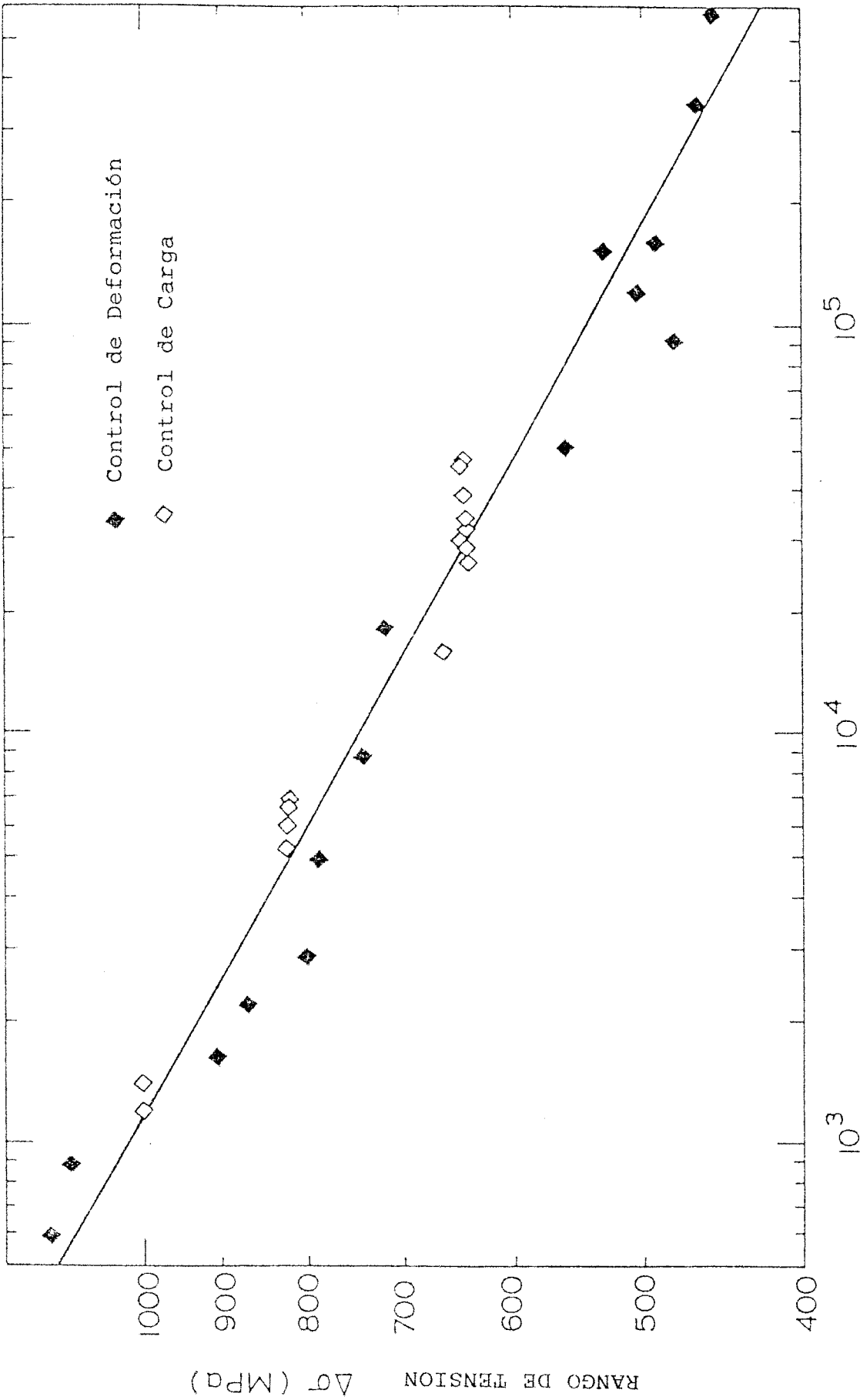
Test No.	Vida a Fa- tiga (Ciclos)	Grieta No.	Fase de Re- plicación (Ciclos)	Longitud de Grieta- ta, a ( $\mu\text{m}$ )	$D_{a1}$ $\mu\text{m}$	Porcentaje de Vida	$\Delta a$ ( $\mu\text{m}$ )	$\Delta N$ (Ciclos)	$\Delta a/\Delta N$ ( $\mu\text{m}/\text{Ciclos}$ )	$a_1$ ( $\mu\text{m}$ )
	19500		145		-	49.5	145	19500	0.00744	72.5
	24500		199		-	62.2	54	5000	0.0108	172
10	29622		358		-	75.2	159	5122	0.0310	278.5
	34500		419		-	87.6	61	4878	0.0125	388.5
	37743		763		-	95.8	344	3243	0.106	591
	10009		64		41.91	25.4	64	10009	0.00639	32
	14446		69		7.41	36.7	5	4437	0.00113	66.5
11	19500		151		-	49.5	82	5054	0.0162	110
	24500		192		-	62.2	41	5000	0.00820	171
	29622		194		-	75.2	2	5122	0.00039	193
	34500		368		-	87.6	174	4878	0.0357	281
	37743		405		-	95.8	37	3243	0.0114	386
	29622		147		-	75.2	147	29622	0.00496	73.5
12	34500		162		-	87.6	15	4878	0.00308	154.5
	37743		199		-	95.8	37	3243	0.0114	180.5
	14446		53		-	36.7	53	14446	0.00367	26.5
	19500		89		-	49.5	36	5054	0.00712	71
13	24500		117		-	62.2	28	5000	0.00560	103
	29622		143		-	75.2	26	5122	0.00508	130
	34500		193		-	87.6	50	4878	0.0103	168
	37743		220		-	95.8	27	3243	0.00833	206.5
	14446		45		-	36.7	45	14446	0.00312	22.5
14	19500		84		-	49.5	39	5054	0.00772	64.5
	24500		121		-	62.2	37	5000	0.00740	102.5
	29622		143		-	75.2	22	5122	0.00644	132
	34500		175		-	87.6	32	4878	0.00656	159
	37743		185		-	95.8	10	3243	0.00308	180

 $\Delta\sigma = 638.5 \text{ MPa}$



CAPITULO V - FIGURAS

- Figura 1. Curva Tensión-Número de Ciclos obtenida por Hobson [2, 3].
- Figura 2. Dependencia del Parámetro de Crecimiento  $f$  con el Rango de Tensión.
- Figura 3. Ritmo de Crecimiento de Grieta, Ecuación de Crecimiento de Grieta Grande de Hobson [2, 3] y Curvas Límites del Modelo - Desarrollado en esta Tesis.
- Figura 4. Comparación entre las Predicciones de Vida a Fatiga y los Resultados Experimentales.
- Figura 5. Pérdida de Similitud en la Forma de la Grieta después de la Coalescencia de dos Grietas Pequeñas.

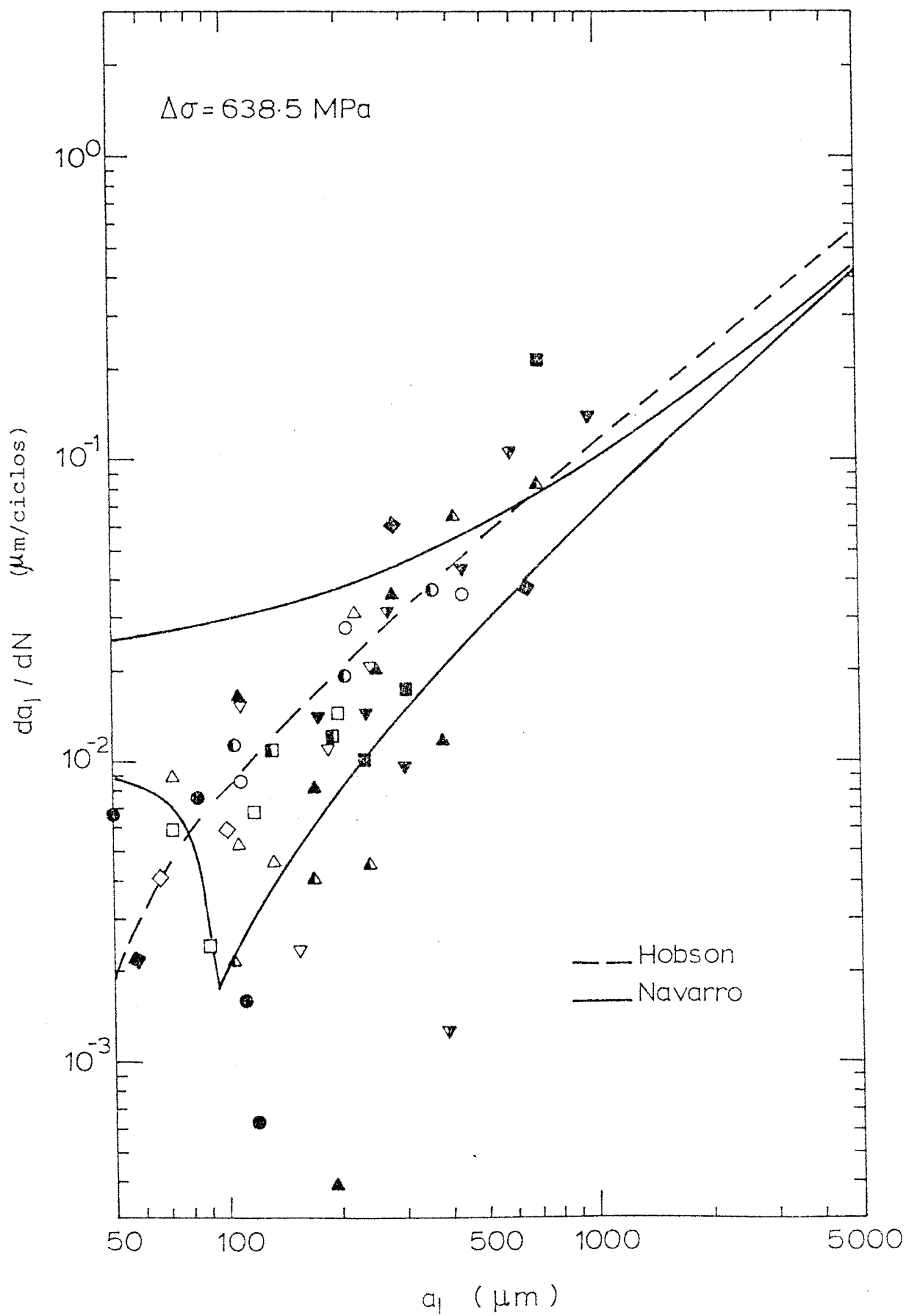


VIDA A FATIGA  $N_f$  (Ciclos)

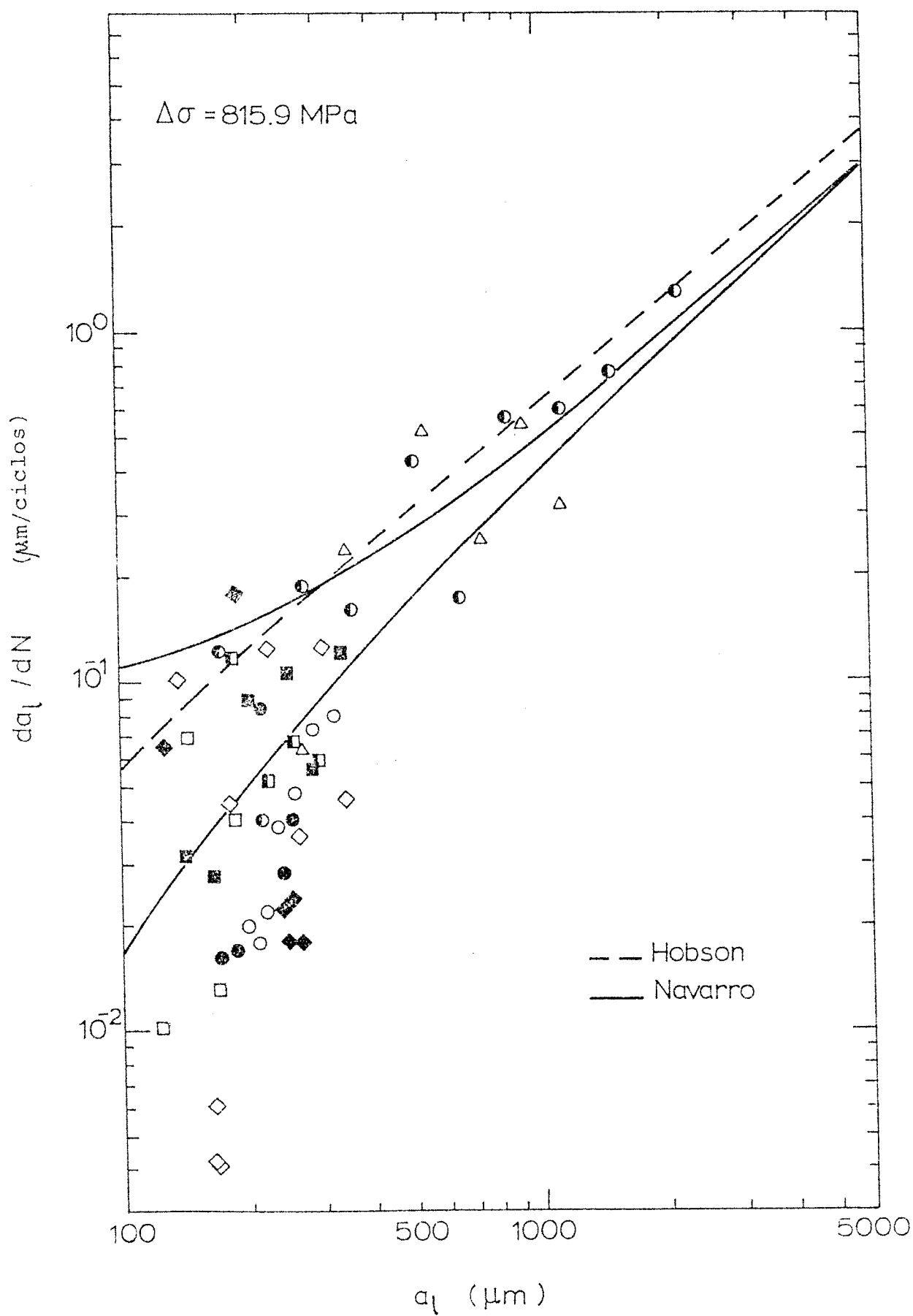
Figura 1. Curva Tensión-Número de Ciclos obtenida por Hobson [2, 3].

Figura 3. Ritmo de Crecimiento de Grieta, Ecuación de Crecimiento de Grieta Grande de Hobson [2, 3] y Curvas Límites del Modelo - Desarrollado en esta Tesis.

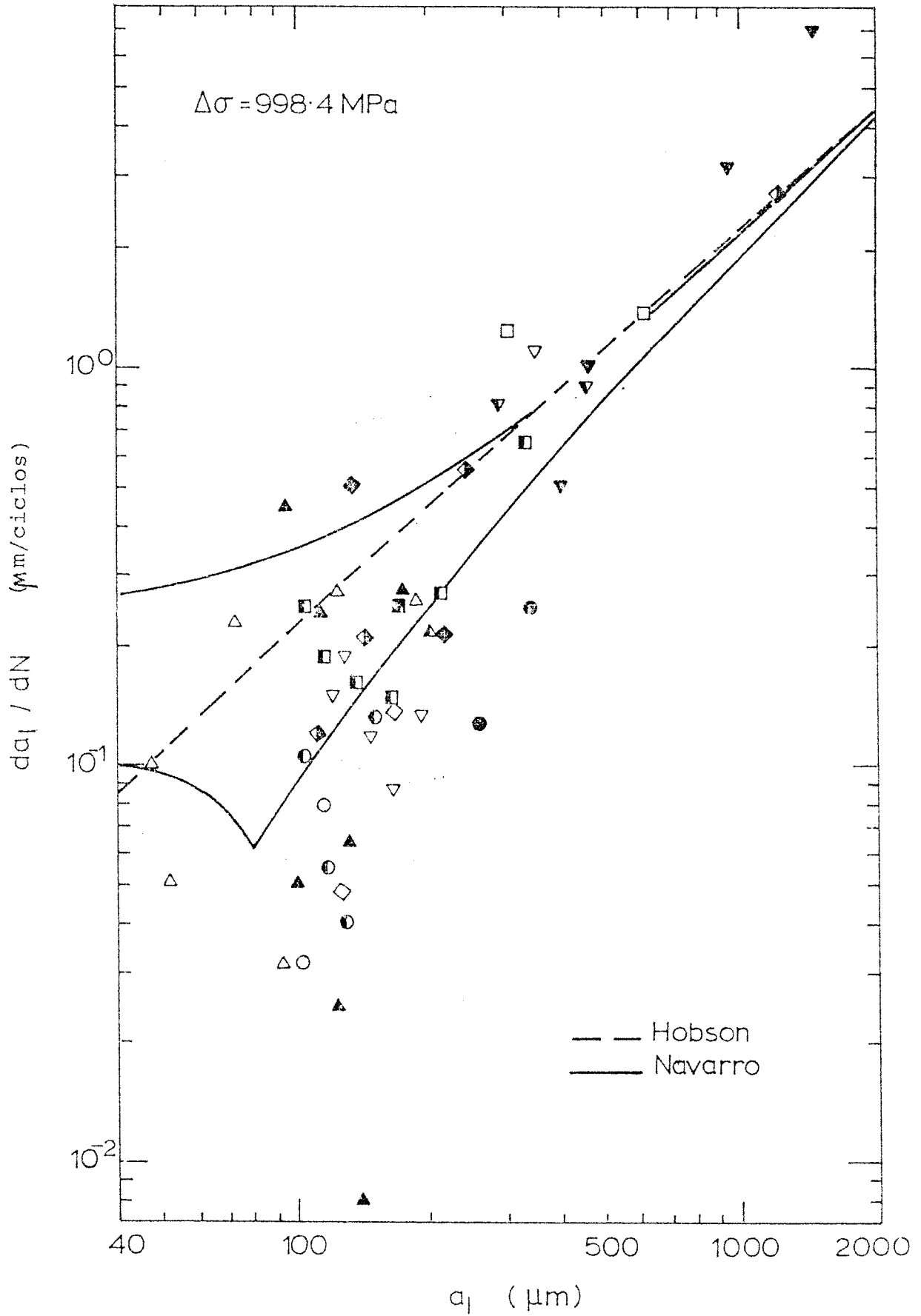
(a)



(b)



(c)



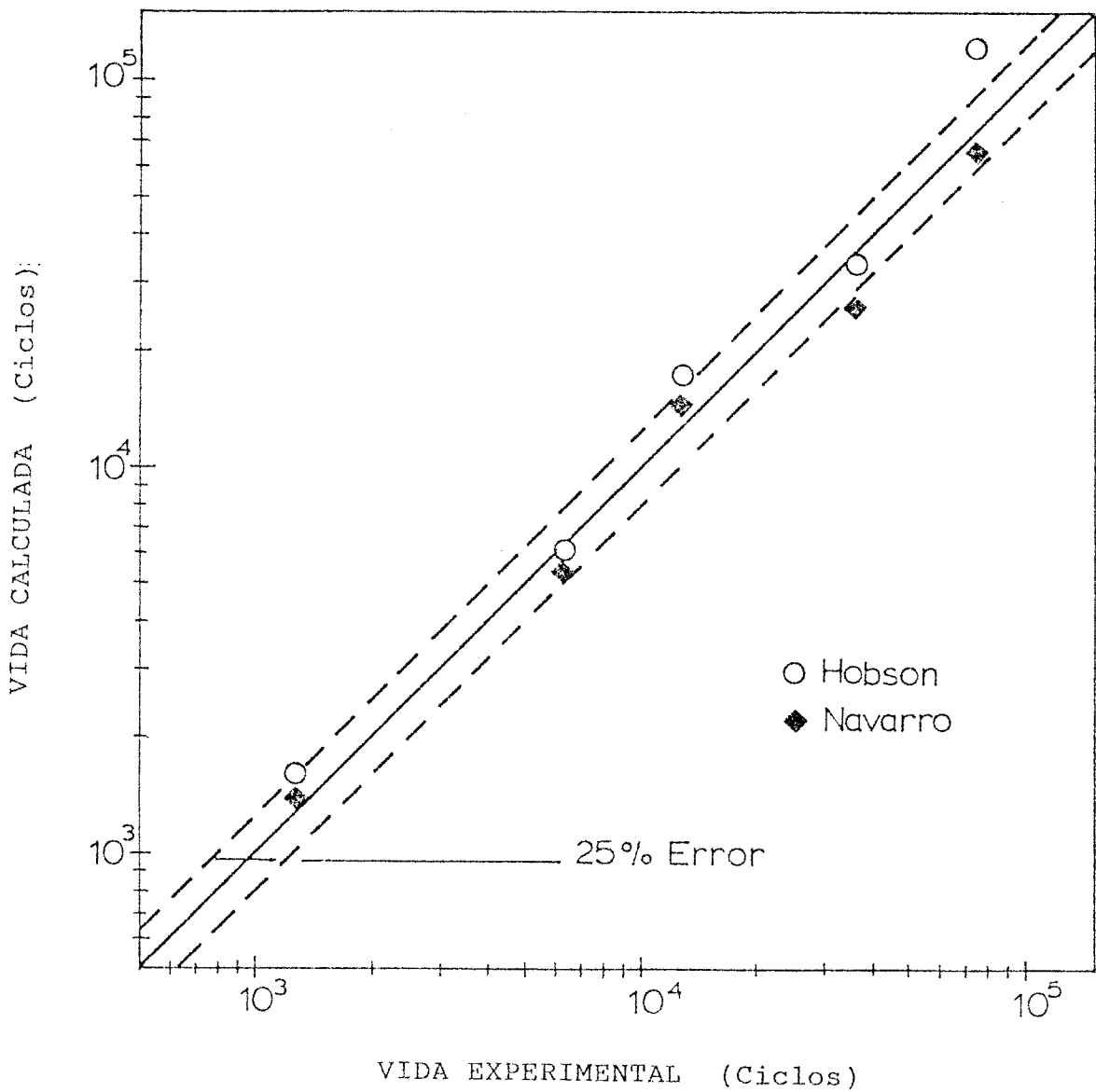


Figura 4. Comparación entre las Predicciones de Vida a Fatiga y los Resultados Experimentales.

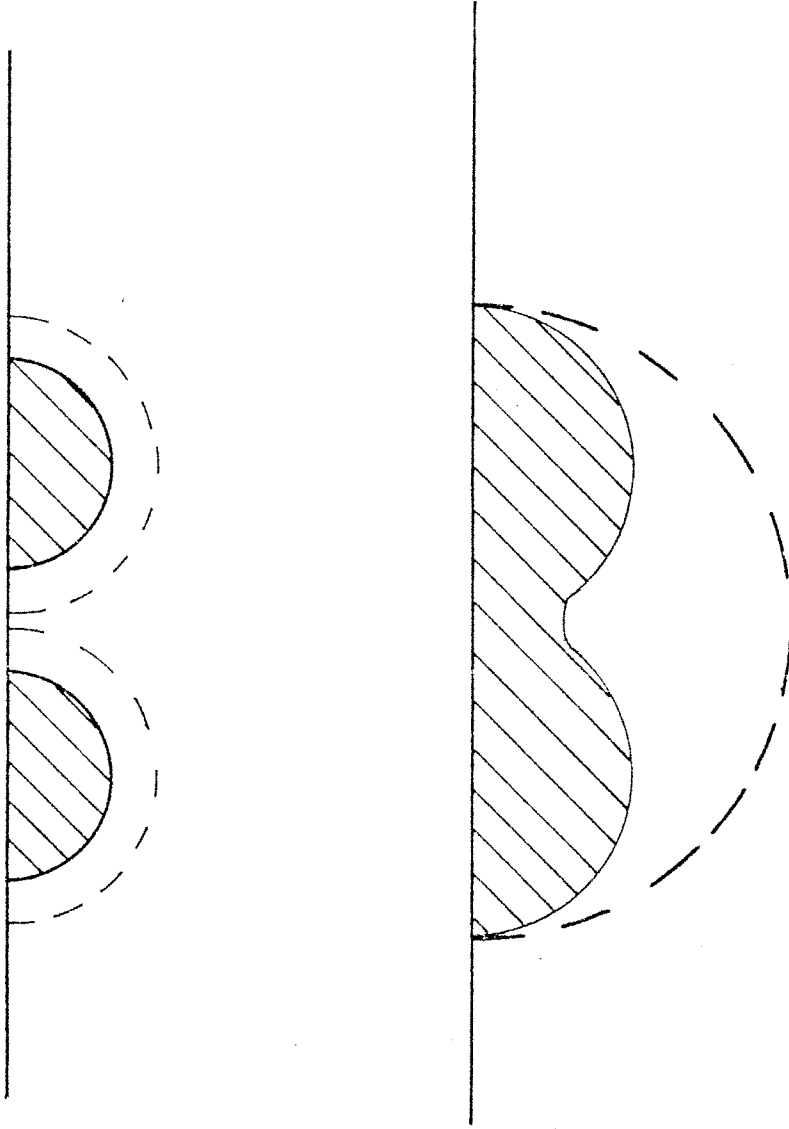


Figura 5. Pérdida de Similitud en la Forma de la Grieta después de la Coalescencia de dos Grietas Pequeñas.



## CAPITULO VI. CONCLUSIONES Y DESARROLLO FUTURO

## CONCLUSIONES Y DESARROLLO FUTURO.

El modelo desarrollado en este trabajo trata de establecer la base para una única ecuación de crecimiento que describa tanto el período de grieta pequeña, como el período de grieta grande. Las diferencias entre ambos aparecen como consecuencia de los diferentes valores adoptados en las dos fases por los parámetros que definen la ecuación. En particular, el período de grieta grande se caracteriza por ser constante el parámetro  $n=a/c$ , que define la razón entre la longitud de la grieta y la extensión de la zona plástica; esta constancia es la expresión de la similitud geométrica que debe ser preservada en el crecimiento de una grieta a través de un medio infinito, homogéneo y continuo. En el período de grieta pequeña, por el contrario, el parámetro  $n$  varía grandemente debido a la fundamental influencia de la microestructura del material.

Esta influencia de la microestructura ha sido explicada mediante la inclusión en el modelo de dos efectos importantes. En primer lugar está el efecto de los bordes de grano, que constituyen barreras efectivas al deslizamiento plástico durante el crecimiento inicial de la grieta. Sin embargo, una vez que la grieta se extiende a través de dos o tres granos, la resistencia de esas barreras es incapaz de bloquear decisivamente a la grieta. El segundo efecto de la microestructura se relaciona con el carácter discreto, no-continuo, del deslizamiento plástico, que ejerce, incluso después del período inicial, una influencia importante en el ritmo de

de crecimiento de la grieta. La transición entre los períodos de grieta pequeña y de grieta grande viene determinada por la condición de que la influencia sobre la descripción global del crecimiento de los saltos discretos de deslizamiento pueda ser despreciada y de que, por tanto, pueda usarse para el crecimiento una representación continua tal como la provista por la Mecánica de la Fractura.

El modelo predice el crecimiento intermitente, con deceleraciones y aceleraciones sucesivas, de las grietas pequeñas y la existencia de grietas no propagantes.

La ley de crecimiento proporcionada por la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (Ley de Paris) aparece en el modelo como el lugar geométrico de los mínimos relativos de la curva de velocidad de crecimiento, por lo que el modelo predice que las grietas pequeñas crecen a ritmos mayores que los calculados extrapolando los resultados de grietas grandes.

El Límite de Fatiga se iguala a la tensión por debajo de la cual una grieta creciendo dentro de un grano del metal, es incapaz de promover deslizamiento plástico en el grano vecino. La aplicación de este criterio a una grieta que se extiende sobre un número arbitrario de granos lleva a la construcción de un diagrama del tipo de Kitagawa, siendo posible explicar las desviaciones y la gran dispersión de los datos que aparecen en el régimen de grieta pequeña.

El modelo ha sido aplicado a datos experimentales de crecimiento en un acero de contenido medio en carbono. Los resultados concuerdan con el comportamiento observado. La vida a fatiga a distintos niveles de tensión para este material puede ser calculada mediante la integración de la ecuación de crecimiento, obteniéndose unas predicciones que están en una banda de error del 25% respecto de los resultados experimentales.

Como resultado adicional se ha presentado una formulación compacta para la representación, mediante la teoría de dislocaciones, de una grieta cuya zona plástica se extiende sobre un número arbitrario de regiones con diferentes tensiones de fricción, incluyendo las dos soluciones, acotada y no acotada, en los extremos del dominio de definición.

La solución general para la función de distribución, el desplazamiento plástico y la distribución de tensiones en el plano de la grieta, consiste en un término que representa la solución acotada más un término que contiene la singularidad multiplicado por la condición de existencia de la solución acotada.

Los posibles desarrollos futuros del trabajo presentado se centrarían, a juicio del autor en tres líneas.

En primer lugar sería muy interesante el desarrollo de las técnicas necesarias para la inclusión en el modelo, del fenómeno del cierre de grieta. En este sentido hay dos ideas

que se consideran prometedoras. Por un lado está el trabajar con el término  $Q$  de la solución general (ecuación (15) del Capítulo III) de forma que al descargar la grieta apareciera un campo de tensión acotado con una distribución de dislocaciones que reprodujera la apertura residual de la grieta debida al contacto prematuro de las superficies. La otra idea es utilizar la solución multizonas para simular el cierre por rugosidad.

La segunda línea de desarrollo posible sería la consideración de la naturaleza estadística de la microestructura, posiblemente mediante simulaciones del tipo Monte-Carlo con la función de distribución de probabilidad del tamaño de grano para la predicción probabilística de las curvas límites del modelo.

La tercera línea sería el intento de modelización de la naturaleza tridimensional de la geometría real de la grieta, lo cual llevaría aparejado el análisis numérico mediante ordenador de la ecuación de equilibrio para las distribuciones complejas de dislocaciones que describirían la grieta.