

TESIS

FORMALIZACION DE
DIVERSOS ASPECTOS DE LA TEORIA DE
REDES ELECTRICAS LINEALES:
APLICACION AL ESTUDIO DE LAS
REDES SIMETRICAS

por

FRANCISCO JAVIER GONZALEZ VAZQUEZ
Ingeniero Industrial

presentada en la
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES
de la
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

para la obtención del

GRADO DE DOCTOR INGENIERO INDUSTRIAL

SEVILLA, SETIEMBRE DE 1986

RESUMEN Y PLANTEAMIENTO

=====

El objeto de esta tesis es la formalización de diversos aspectos de la teoría de redes eléctricas lineales con dispositivos de dos terminales, con particular aplicación a las redes con simetría cíclica. Esta formalización se entiende como el establecimiento de los conceptos básicos de la teoría que permitan posteriormente una demostración formal de los principales resultados mediante la utilización de los instrumentos matemáticos habituales. Históricamente, la teoría de grafos de redes eléctricas se ha desarrollado como una trasposición de la teoría de grafos lineales (diagramas de líneas y puntos). En algunos casos tal trasposición es muy forzada, ya que en general dicha teoría no prevé la existencia de lazos ni de una multiplicidad de aristas con los mismos nudos extremos. Ese es uno de los motivos que exigen una teoría específica de grafos de redes eléctricas. Por otra parte, los resultados básicos de la teoría de grafos son fácilmente intuitivos y ello lleva a veces a tomar como demostraciones cosas que no son sino simples descripciones, lo cual a su vez dificulta la obtención de resultados menos inmediatos. La primera parte de esta tesis tiene pues como finalidad el establecimiento de los conceptos y de los resultados formales básicos de la teoría de grafos de redes eléctricas con dispositivos de dos terminales. Estos conceptos se desarrollan con la mayor generalidad (grafos no conexos, con aristas en paralelo, es decir, con los mismos nudos extremos, y con lazos). Para definir las matrices asociadas al grafo se introducen los conceptos de vector y matriz con índices en un alfabeto arbitrario, que evitan el recurso habitual a la reordenación de filas o columnas y permiten definir fácilmente particiones vectoriales y matriciales. Igualmente las variables asociadas a la red (tensiones e intensidades) se definen con la

mayor generalidad. A partir de los conceptos anteriores se formulan las leyes de Kirchoff y las ecuaciones primarias que definen los dispositivos que constituyen la red. La formulación adoptada es apropiada tanto para el régimen estacionario senoidal como para transitorios y para excitaciones no senoidales e incluso para redes lineales de parámetros variables en función del tiempo. Se hace un breve excursio sobre las relaciones causales entre las diversas señales asociadas a la red. Se define formalmente la simetría de la red, se definen y analizan las redes simétricas en régimen equilibrado y la descomposición de un régimen no equilibrado en una suma de regímenes equilibrados. Por último, se establece la red monofásica equivalente o red de secuencia de una red simétrica en régimen equilibrado, cuyo grafo se relaciona con el grafo de la red original mediante diversos morfismos de grafos.

INTRODUCCION

=====

La estructura de este trabajo es la siguiente: Los cuatro primeros capítulos están dedicados a establecer el sistema de ecuaciones de la red lineal. Los tres últimos a abordar la definición y propiedades de las redes simétricas.

El cap. 1 define grafo no orientado de la red que se concibe como un modo de expresar las relaciones de conexión existentes entre terminales de dispositivos y nudos de conexión. Dado que las propiedades topológicas de la red son esenciales para formular las leyes de Kirchoff y para la definición de la simetría de la red, y que dichas propiedades derivan fundamentalmente del grafo no orientado de dicha red, se desarrolla extensamente esta cuestión con aplicaciones. Se adopta la definición más general de corte y una definición de bucle más simple que la utilizada habitualmente. Se hace uso del concepto de clase de conexión de los nudos del grafo para poder considerar grafos no conexos, del concepto de itinerario que permite obtener y orientar caminos y bucles y del concepto de bosque maximal que sustituye al tradicional de árbol del grafo.

El cap. 2 define el grafo orientado de la red y sus relaciones con el no orientado. La orientación de un dispositivo se concibe como una ordenación de sus terminales, y no de los nudos a los que dichos terminales están conectados. Así tiene sentido la orientación de un dispositivo que tiene ambos terminales conectados al mismo nudo. En este capítulo se definen también las diversas matrices asociadas al grafo, lo cual requiere los conceptos de matriz y de vector con índices en alfabetos arbitrarios. Se suprime la identificación de los

vectores con las matrices filas o columnas y la trasposición de vectores. Se propone una nueva matriz C que relaciona las clases de conexión con los nudos del grafo.

El cap. 3 está destinado a la caracterización algebraica de las señales asociadas a la red: tensiones e intensidades. Estas señales están consideradas no en sus valores instantáneos, sino como funciones ordinarias o generalizadas del tiempo. El resto del capítulo se dedica a diversas formulaciones de las ecuaciones kirchoffianas de la red. Se introduce el concepto de intensidad de nudo, que es nula si la red verifica la primera ley de Kirchoff, pero que resulta útil para el estudio de subredes multiterminales y para la obtención de redes de secuencia.

El cap. 4 define los dispositivos que constituyen la red lineal y establece el sistema de ecuaciones de la misma. Se hace una breve digresión entre relaciones formales y relaciones causales entre las señales de la red. A título de aplicación se obtienen diversas propiedades de las subredes multiterminales.

El cap. 5 define los morfismos y las simetrías de grafos, que constituyen la base de la definición de la simetría de la red. Las simetrías de la red constituyen un grupo algebraico. El estudio se limita al subgrupo cíclico generado por una simetría particular de la red, que es el que tiene una mayor incidencia práctica (redes polifásicas). Este subgrupo opera sobre los conjuntos de nudos, aristas, arcos y terminales del grafo y también sobre las señales asociadas al grafo (tensiones e intensidades). El capítulo finaliza con la definición de la simetría de la red para un tipo de red bastante general (constituida por fuentes ideales de tensión y de intensidad y por otros elementos lineales cuyas ecuaciones primarias se formulan mediante una matriz híbrida de multipuerta).

En el cap. 6 se definen las redes simétricas en régimen equilibrado y se estudian sus propiedades y la descomposición de un régimen no equilibrado en componentes simétricas.

En el cap. 7 se desarrollan las propiedades de los morfismos de grafos y se aplican a la obtención de las redes de secuencia.

INDICE

=====

- Cap.1.-EL GRAFO NO ORIENTADO DE LA RED pag. 1
- 1.-Redes eléctricas con dispositivos de dos terminales.
 - 2.-El grafo no orientado de la red.
 - 3.-Definiciones.
 - 4.-Resultados básicos de grafos no orientados.
 - 5.-Cortes fundamentales de un grafo.
 - 6.-Bucles fundamentales de un grafo.
 - 7.-Caminos fundamentales de un grafo.
 - 8.-Algunas aplicaciones.
- Cap.2.-EL GRAFO ORIENTADO DE LA RED pag. 28
- 1.-Vectores y matrices con índices en alfabetos arbitrarios.
 - 2.-Algunas propiedades de los vectores y matrices.
 - 3.-El grafo orientado de la red.
 - 4.-Las matrices A, B, Q, K y C de un grafo orientado.
 - 5.-Matrices fundamentales de un grafo orientado.
 - 6.-Propiedades de las matrices del grafo.
 - 7.-Algunas aplicaciones.
- Cap.3.-ECUACIONES DE KIRCHOFF DE LA RED ELECTRICA pag. 56
- 1.-Las señales eléctricas de la red.
 - 2.-Ampliación del concepto de vector: vectores de señales.
 - 3.-Formulación de las ecuaciones de Kirchoff de la red.
 - 4.-Caracterización de los potenciales y de las intensidades de nudos.
- Cap.4.-EL SISTEMA DE ECUACIONES DE LA RED pag. 67
- 1.-La red primaria.
 - 2.-El sistema de ecuaciones de la red lineal: un ejemplo.
 - 3.-El sistema formal de ecuaciones de la red lineal.
 - 4.-Las soluciones del sistema formal de ecuaciones de la

red.

5.-Subredes multiterminales.

6.-Multiterminales equivalentes.

7.-Aplicación: Variables de pares de terminales de un multiterminal.

Cap.5.-REDES ELECTRICAS SIMETRICAS pag. 87

1.-Morfismos de grafos.

2.-Grafos simétricos.

3.-Operaciones de un grupo cíclico Γ sobre un conjunto.

4.-Operaciones del grupo Γ sobre el grafo G .

5.-Redes eectricas simétricas.

Cap.6.-REDES SIMETRICAS EN REGIMEN EQUILIBRADO pag. 106

1.-Vectores equilibrados y componentes simétricas.

2.- (Inexistente: error de numeración)

3.-Tensiones e intensidades en el régimen equilibrado.

4.-Relaciones monofásicas en el régimen equilibrado.

Cap.7.-REDES DE SECUENCIA pag. 119

1.-Concepto de red de secuencia.

2.-Redes con simetría regular.

3.-Morfismos de grafos y leyes de Kirchoff.

4.-Red de secuencia homopolar.

5.-Redes de secuencia: caso general.

CONCLUSIONES Y COMENTARIO BIBLIOGRAFICO pag. 155

BIBLIOGRAFIA pag. 162

INDICE ALFABETICO DE CONCEPTOS pag. 165

CAP. I : EL GRAFO NO ORIENTADO DE LA RED

=====

1.1.-REDES ELECTRICAS CON DISPOSITIVOS DE DOS TERMINALES

Una red eléctrica de este tipo está constituida por un cierto número de **dispositivos de dos terminales** (resistencias, fuentes de tensión, etc.) y por un cierto número de puntos o **nudos** de conexión. Cada terminal va conectado a un nudo (Fig.1). Los dispositivos interactúan a través de las conexiones y también de otros modos que se especificarán posteriormente (acoplamiento magnético, fuentes gobernadas, etc.).

1.2.-EL GRAFO NO ORIENTADO DE LA RED

Un grafo de la red es una descripción de sus conexiones, consideradas en sus elementos esenciales: los terminales y los nudos. Partimos, pues, de un conjunto T de terminales y de un conjunto N de nudos. Entre ellos existen dos clases de relaciones: por una parte, los dispositivos emparejan a los terminales; por otra, la conexión hace corresponder a cada terminal un nudo. Llamamos **arista** a cada par de terminales de un dispositivo. Escribimos A el conjunto de aristas de la red. Los elementos de A son, por tanto, subconjuntos de T con dos elementos, tales que todo terminal de T pertenece a una arista y dos aristas distintas no tienen ningún terminal común. Es decir, A es una partición de T formada por subconjuntos de T con dos elementos cada uno. Por otra parte, la conexión terminales-nudos se describe mediante una **función de conexión** $\nu: T \rightarrow N$, que hace corresponder a cada terminal un nudo. Denominamos **grafo no orientado** de la red al cuarteto $G=(T,A,N,\nu)$ cuyas componentes acabamos de describir. En todo lo que sigue supondremos que T y N

son conjuntos finitos, es decir que la red es finita. Para algunas cuestiones necesitaremos suponer que un cierto grafo no tiene aristas. En ese caso $T=\emptyset$, $A=\emptyset$, $v=\emptyset$.

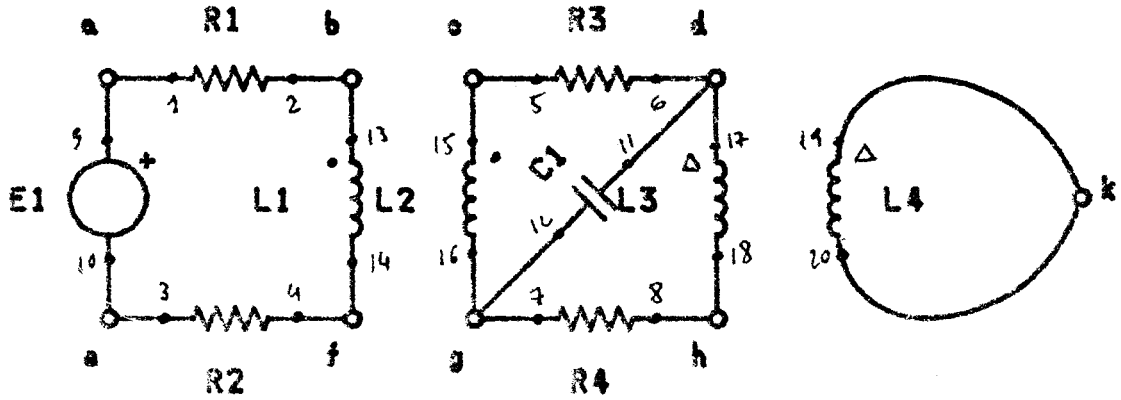


FIGURA 1.1

Ejemplo: Para la red de la fig. 1 tenemos:

$$T = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$$

$$A = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), \dots, (19, 20)\}$$

$$N = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}$$

t	1	2	3	4	5	6	...	20
v(t)	a	b	e	f	c	d	...	k

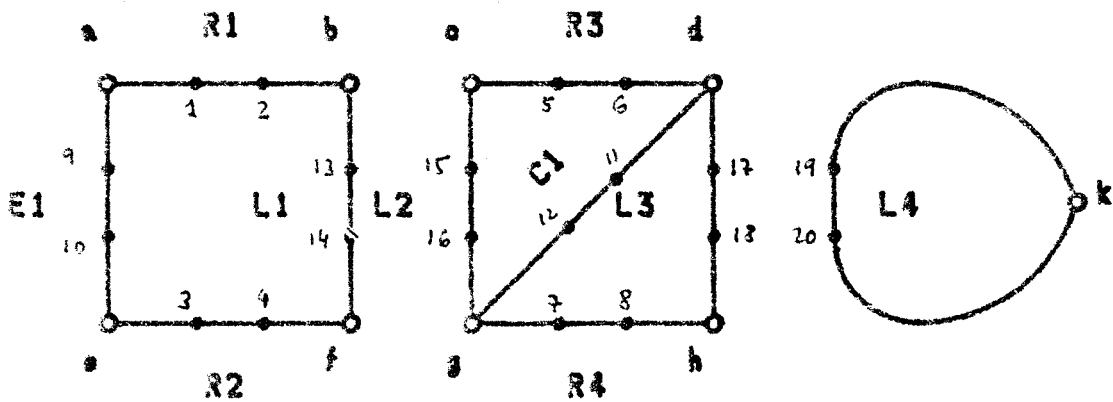


FIGURA 1.2

El grafo no orientado G se puede describir mediante esquemas como el de la fig.2. En ella hemos representado los nudos mediante círculos pequeños y los terminales mediante puntos. Una línea entre dos terminales indica una arista. Una línea entre un terminal y un nudo indica que el primero está conectado al segundo. Para abreviar le damos nombres simples a las aristas. Así para el ejemplo anterior ponemos:

$$R1=\{1,2\}; R2=\{3,4\}; R3=\{5,6\}; \dots ; L4=\{19,20\}$$

Cuando sólo interesa mostrar las relaciones entre las aristas y los nudos, se utiliza un esquema sin terminales, como el de la fig. 3, al cual denominamos **grafo lineal no orientado** de la red.

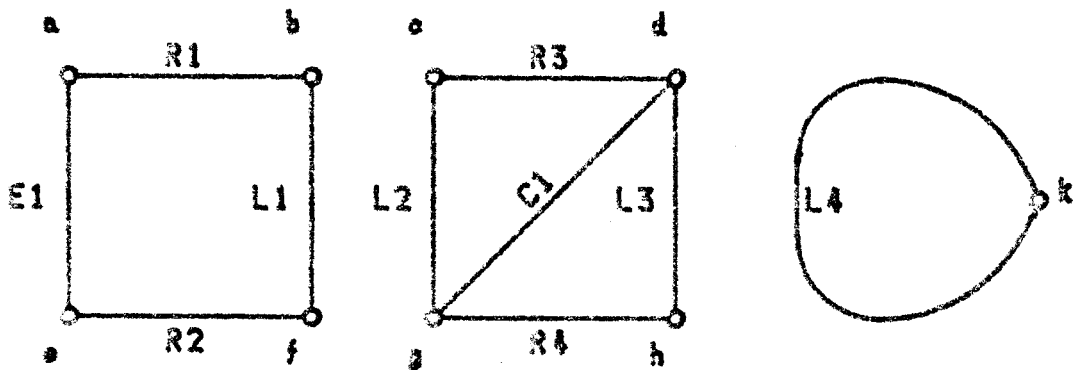


FIGURA 1.3

1.3.-DEFINICIONES

Advertencia: En todo este párrafo nos referiremos a un grafo

no orientado $G=(T,A,N,\nu)$.

Decimos que un nudo es un **extremo** de una arista, si algún terminal de la arista está conectado a dicho nudo. Entonces se dice que la arista **incide** en ese nudo. Llamamos **grado** de un nudo al número de terminales conectados a dicho nudo. Decimos que un nudo es **aislado** si su grado es 0, y que es un nudo **terminal** si su grado es 1. Dos nudos son **contiguos** si son extremos de la misma arista.

Sea $G'=(T',A',N',\nu')$ otro grafo no orientado. Decimos que es un **subgrafo** de G y lo simbolizamos $G'\subset G$ si posee las propiedades siguientes: $T'\subset T$; $A'\subset A$; $N'\subset N$ y, además, ν es una prolongación de ν' . Es decir, un subgrafo de G está constituido por ciertas aristas de G , por los terminales de dichas aristas, por ciertos nudos de G , incluyendo los extremos de las citadas aristas y manteniéndose las mismas conexiones terminales-nudos. De esta definición se desprende que dos subgrafos de G con las mismas aristas y nudos son idénticos. Por ello basta con conocer G , A' y N' para definir el subgrafo G' . Se dice que G' es un **subgrafo propio** de G si $G'\neq G$; se dice que es **abarcante** si $N'=N$; se dice que es el **subgrafo inducido** por N' , y se escribe $G'=\langle N' \rangle$, si G' está constituido por los nudos N' y por las aristas de G que tienen todos sus extremos en N' . Se pueden obtener subgrafos de G por **supresión de aristas**: el subgrafo resultante contiene todos los nudos de G y las aristas no suprimidas. También se obtienen subgrafos por **supresión de nudos**: El subgrafo resultante es el inducido por los nudos de G no suprimidos.

Dados los subgrafos $G'=(T',A',N',\nu')$ y $G''=(T'',A'',N'',\nu'')$ de G , llamamos **subgrafo unión** de G' y G'' y lo escribimos $G'\cup G''$ al que tiene las aristas $A'\cup A''$ y los nudos $N'\cup N''$. De modo análogo se define la **intersección** de subgrafos y se escribe $G'\cap G''$. Sean G' y G'' subgrafos abarcantes de G , decimos que son **complementarios** si sus conjuntos de aristas son subconjuntos complementarios de A .

Sea (p_i) una sucesión finita o infinita de nudos de G .

Decimos que es **conexa** si todo par de nudos consecutivos de la misma son contiguos. Se dice que los nudos p, p' de G son **conexos** en G si existe una sucesión conexa de nudos de G que pasa por p y p' . La relación de conexión entre nudos de G es una relación de equivalencia, por lo tanto establece una partición de N en clases de equivalencia, denominadas **clases de conexión** de G . Decimos que G es **conexo** si posee una sola clase de conexión, N . Esto equivale a decir que cada par de nudos de G son conexos. Denominamos conjunto de **nudos de referencia** de G a todo $N_0 \subset N$ constituido por un y sólo un representante de cada clase de conexión de G .

Ejemplo: El grafo de la fig.3 tiene tres clases de conexión:

$\{a,b,e,f\}, \{c,d,g,h\}, \{k\}$

En el mismo podemos tomar como conjunto de nudos de referencia:

$N_0 = \{e,c,k\}$

Definimos una **distancia** $d(p,p')$ en N escribiendo:
 i) $d(p,p') = +\infty$, si p y p' no son conexos; ii) Si p y p' son conexos entre todas las sucesiones conexas con primer término p y último término p' elegimos una que tenga un menor número m de términos, y entonces escribimos $d(p,p') = m-1$. Dado un $p \in N$ y un entero k denominamos **bola cerrada de centro p y radio k** al conjunto $N_0 \subset N$ de los $p' \in N$ tales $d(p,p') \leq k$; denominamos **esfera de centro p y radio k** al conjunto N_0 de los $p' \in N$ tales que $d(p,p') = k$.

En lo que sigue haremos uso del resultado siguiente:

R0// Sea X un conjunto finito con una relación de orden \leq no necesariamente total. Decimos que un elemento $x \in X$ es **maximal** si para todo $y \in X$ la relación $x \leq y$ implica $y = x$. Entonces para todo $z \in X$ existe un $x \in X$ maximal tal que $z \leq x$.

Dem.: Supongamos que el enunciado no se cumple para un $z \in X$. Podemos definir entonces una sucesión infinita (x_i) de elementos de X , con $x_0 = z$ y tales que $x_i < x_{i+1}$ para todo índice i . Entonces X no sería finito. Contradicción. \square

El conjunto de subgrafos de G es finito y la relación de inclusión \subset entre subgrafos es una relación de orden. A fortiori el conjunto de subgrafos conexos de G es finito y no vacío. Denominamos **componente conexa** de G , o simplemente **componente** de G , a todo subgrafo conexo maximal de G . Las componentes de G existen. En efecto, el subgrafo de G constituido por un solo nudo p es conexo. En consecuencia RO asegura que existe una componente de G que contiene a p .

Ejemplo: Los siguientes conjuntos A' de aristas y N' de nudos definen una componente del grafo de la fig.3:

$$A' = \{R1, E1, R2, L1\}$$

$$N' = \{a, b, e, f\}$$

Decimos que G es un **camino** si es conexo, posee dos nudos terminales y todos los restantes nudos tienen grado 2. Decimos que G es un **bucle** si es conexo y todos sus nudos tienen grado 2. Dado un grafo G llamamos **bucle de G** a todo subgrafo de G que sea un bucle. Decimos que G es un **bosque** si no tiene ningún bucle. Decimos que G es un **árbol** si es un bosque conexo. Llamamos **camino, bosque, o árbol de G** a todo subgrafo de G que sea respectivamente camino, bosque o árbol.

Sea G' un bosque maximal de G . Demostraremos más adelante que es cubriente. Llamamos **cobosque** de G a todo subgrafo de G complementario de un bosque maximal de G . A las aristas de G' les decimos **ramales** de G' , y a las de su cobosque **enlaces** de G' . Si además G' es conexo, a su cobosque le llamamos **coárbol**. Razonando como antes, RO asegura que todo grafo G tiene un bosque maximal y un árbol maximal.

Ejemplo: En la fig.4 se muestra un bosque maximal del grafo de la fig.3. Con líneas de trazos se han indicado los enlaces.

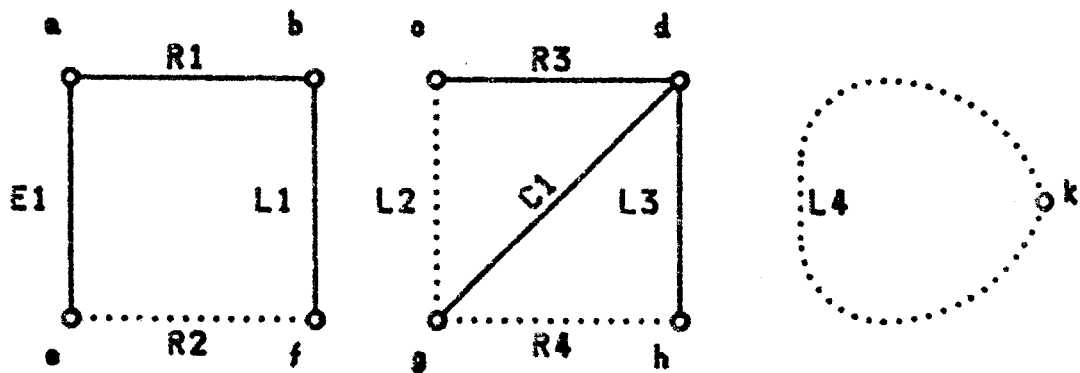


FIGURA 1.4

Dados dos subconjuntos N' , N'' de N , complementarios, denominamos **corte de G con extremos N' y N''** al conjunto de aristas de G que tienen un extremo en N' y otro en N'' . Para definir un corte basta con especificar uno de sus extremos, ya que el otro se deduce por complementariedad. Decimos que un corte es **trivial** si alguno de sus extremos es vacío.

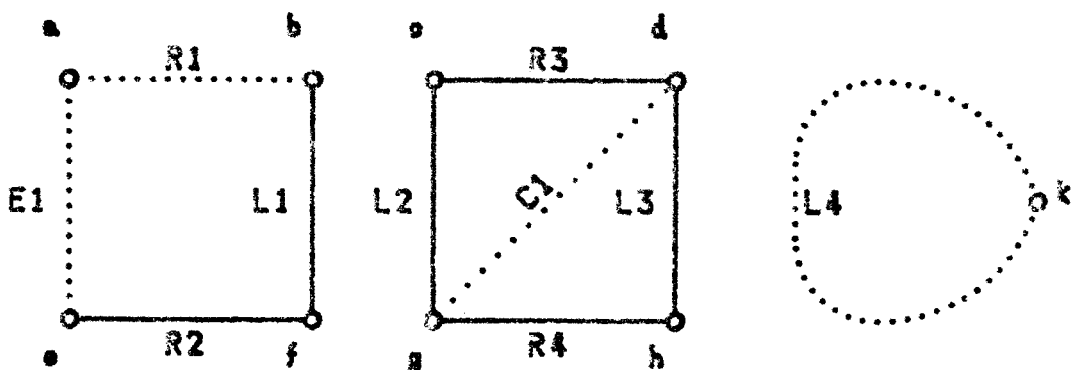


FIGURA 1.5

Ejemplo: En la fig. 5 se muestran las aristas del corte del grafo de la fig.3 con extremos $N' = \{a, b, c, e, h, k\}$ y $N'' = \{d, f, g\}$

Llamamos **itinerario** sobre G a toda sucesión t_0, t_1, t_2, \dots

infinita o finita con un número par de términos, de terminales de G tal que para todo índice $i \geq 0$:

- 1) $t_{i+1} \neq t_i$
- 2) $\langle t_{2i}, t_{2i+1} \rangle \in A$
- 3) $v(t_{2i+1}) = v(t_{2i+2})$.

Un itinerario induce una sucesión (p_i) de nudos de G y una sucesión (a_i) de aristas de G definidas: $p_i = v(t_{2i}) = v(t_{2i-1})$ y $a_i = \langle t_{2i}, t_{2i+1} \rangle$, para todo $i \geq 0$. La sucesión (p_i) es conexa.

Ejemplo: Los siguientes son itinerarios del grafo de la fig. 2

- 1, 2, 13, 14, 4, 3, 10, 9, 1, 2
12, 11, 17, 18, 8, 7, 16, 15, 5, 6
19, 20
20, 19, 20, 19, 20, 19, 20, 19, ...

Las sucesiones de nudos y de aristas inducidas por el primer itinerario citado son:

- a, b, f, e, a, b
R1, L1, R2, E1, R1

1.4. RESULTADOS BASICOS DE GRAFOS NO ORIENTADOS

Advertencia: En el resto de este capítulo nos referiremos a los grafos G, G', G'', G_k , etc. definidos: $G = (T, A, N, v)$; $G' = (T', A', N', v')$; $G'' = (T'', A'', N'', v'')$; $G_k = (T_k, A_k, N_k, v^{(k)})$; etc. Salvo aviso en contrario emplearemos las letras n, r y m respectivamente para referirnos a los números de nudos, aristas y clases de conexión de G .

R1// La suma de los grados de los nudos de G es $2r$.

Dem.: Cada terminal de G forma parte de una arista de G y sólo de una, y cada arista posee dos terminales. Cada terminal de G incide en un y sólo en un nudo de G y el número de terminales que inciden en un nudo es el grado de ese nudo. Por lo tanto el número total de terminales de G es $2r$ y es igual a la suma de los grados de los nudos de G . \square

R2// Todo bucle con n nudos posee n aristas. Todo camino con r aristas tiene $r+1$ nudos.

Dem.: Es consecuencia de R1. \square

R3// Sean G un grafo y Q un corte de G con extremos N' y N'' . Para que Q sea vacío es condición necesaria y suficiente que toda clase de conexión de G esté contenida en N' o en N'' . Para que G sea conexo es condición necesaria y suficiente que todo corte vacío de G sea trivial.

Dem.: Si Q no es vacío existe una arista a de Q con un extremo $p \in N'$ y otro $p' \in N''$. La clase de conexión N_p de p no está contenida en N' , ni en N'' . Por lo tanto la primera condición es suficiente. También es necesaria. En efecto, si una clase de conexión N_p no está contenida ni en N' ni en N'' , entonces existen $p, p' \in N_p$ tales que $p \in N'$ y $p' \in N''$. Como p y p' son conexos existe una sucesión conexa (p_i) con primer término p y último término p' . Sea k el menor entero tal que $p_k \in N''$, entonces $p_{k-1} \in N'$. Existe una arista a de G que tiene sus extremos en p_{k-1} y p_k , dado que éstos son contiguos. Entonces $a \in Q$. Q no es vacío.

La segunda parte es consecuencia de la primera. \square

R4// Sea G un bucle. Si G' es un bucle contenido en G , entonces $G' = G$.

Dem.: Supongamos que $G' \neq G$ y $G' \subset G$. Sean n y n' los respectivos números de nudos de G y G' . Se ha de cumplir $n' < n$. En efecto, un bucle tiene tantos nudos como aristas [R2]. Si $n' = n$, entonces $G' = G$. En consecuencia $N \neq N'$. Por otra parte, G es conexo y el corte Q con extremos N' y $N - N'$ no es trivial. Por lo tanto, existe una arista a de G que tiene un extremo en un nudo $p' \in N'$ y otro en un $p \in N - N'$ [R3]. Dicha arista no pertenece a G' . En p' inciden dos terminales de G' , dado que G' es un bucle, y otro de la arista a que no pertenece a G' . El grado de p' en G es ≥ 3 . Ahora bien, esto es imposible ya que G es un bucle. \square

R5// Sean G un grafo todos cuyos nudos tienen grado ≥ 2 y t_0 un terminal de G . Existe un itinerario infinito (t_i) sobre G .

Dem.: Para cada $i \geq 0$ escribimos t_{i+1} el otro terminal de la

arista a la que pertenece t_{2i} ; elegimos t_{2i+2} arbitrariamente entre los $t \in T$ tales que $v(t) = v(t_{2i+1})$ y $t \neq t_{2i+1}$. Esto último es siempre posible ya que todos los nudos de G tienen grado ≥ 2 . \square

R6// Sean G un grafo, y (a_i) y (p_i) sucesiones de aristas y de nudos de G con $l > 0$ y $l+1$ términos respectivamente. Para que (a_i) y (p_i) sean las sucesiones inducidas por un itinerario de G , es necesario y suficiente que se cumplan las dos condiciones siguientes: i) Para todo i , p_i y p_{i+1} son extremos de a_i ; ii) Para todo i , la relación $p_i = p_{i+1}$ implica a_i es un lazo. Si G posee un itinerario infinito (t_i) , entonces contiene al menos un bucle.

Dem.: Las condiciones son evidentemente necesarias. Veamos que son suficientes. A partir de (a_i) y (p_i) puede construirse una sucesión (t_i) de terminales de G con $2l$ términos del siguiente modo: a) t_0 es un terminal de a_0 tal que $v(t_0) = p_0$. b) Definido t_{2k} , sea t_{2k+1} tal que $t_{2k+1} \neq t_{2k}$. Ponemos $t_{2k+2} = t_{2k+1}$. c) Definido t_{2k+1} , si a_{k+1} es un lazo elegimos un t_{2k+2} tal que $t_{2k+2} \neq t_{2k+1}$ y ponemos $t_{2k+3} = t_{2k+2}$. Si a_{k+1} no es un lazo, sea t el único terminal de a_{k+1} tal que $v(t) = p_{k+1}$. Ponemos $t_{2k+3} = t$. Dejamos al cuidado del lector la demostración de que la sucesión así construida es un itinerario de G que induce a (a_i) y (p_i) .

Sean (p_i) y (a_i) las sucesiones de nudos y aristas de G inducidas por el itinerario infinito (t_i) . Como N es finito existe al menos un nudo que se repite en la sucesión (p_i) . Sea l el menor índice con la siguiente propiedad: Existe un $k \leq l$ tal que $p_k = p_{l+1}$. Entonces los nudos p_i , $k \leq i \leq l$ son todos distintos. En consecuencia, las aristas a_i , $k \leq i \leq l$ lo son también, ya que dos cualesquiera de ellas tienen al menos un extremo distinto. Por la misma razón, las aristas a_i , $k \leq i \leq l$ son todas distintas. Si $k+1 \leq l$ entonces a_l es distinta de a_k , ya que p_k , p_{k+1} y p_l son todos distintos. Si $k+1 = l$ entonces $a_k \neq a_l$, ya que $p_k = p_{l+1} \neq p_{k+1}$ y $t_{2k+1} \neq t_{2k+2}$. Es decir en todos los casos las aristas a_i , $k \leq i \leq l$ son todas distintas. El subgrafo de G constituido por los nudos y aristas p_i y a_i , $k \leq i \leq l$ es un bucle. Se dejan los detalles al lector. \square

R7// Si todos los nudos de un grafo G tienen grado ≥ 2 , entonces G contiene al menos un bucle. Si G es un bosque con alguna arista, posee al menos un nudo terminal.

Dem.: La primera parte es consecuencia de R5 y R6. Por otra parte, si G es un bosque con alguna arista, el subgrafo G' de G obtenido suprimiendo todos los nudos aislados de G es no vacío. Todos sus nudos tienen grado ≥ 1 . Si además tuvieran todos grado > 1 entonces G' contendría un bucle, lo cual es imposible. \square

R8// Sea G un bucle con n nudos. Para cada $t_0 \in T$ existe un y sólo un itinerario infinito (t_i) de G . Sean (p_i) y (a_i) las sucesiones de nudos y aristas de G inducidas por (t_i) . Se verifican las propiedades siguientes:

$$1) N = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$$

$$2) A = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

$$3) T = (t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$$

4) Para cualesquiera enteros $i \geq 0, j \geq 0$, la relación $t_i = t_j$ implica $i - j \in 2n\mathbb{Z}$, siendo \mathbb{Z} el conjunto de los números enteros.

Dem.: Dado que todos los nudos de G tienen grado 2, tal itinerario existe [R5] y es único. Para el resto se sigue el método de demostración de R6. Como G tiene n nudos en p_0, p_1, \dots, p_{n-1} hay al menos un nudo repetido. Existen, por lo tanto índices k, l tales que $0 \leq k < l \leq n$ tales que los nudos p_k, \dots, p_{l-1} son todos distintos y son los nudos de un bucle contenido en G . Este bucle es el propio G [R4] y por tanto, $l - k = n, k = 0$ y $l = n$. De ahí las propiedades 1), 2) y 3). De lo anterior se deduce que $p_0 = p_n$ y $t_0 \neq t_{2n-1} \neq t_{2n}$. Como el nudo p_0 es de grado 2 se sigue que $t_{2n} = t_0$. Por la primera parte del enunciado resulta que el itinerario t_{2n}, t_{2n+1}, \dots es idéntico al t_0, t_1, \dots . Por inducción, para cualesquiera enteros $i \geq 0, k \geq 0$ se cumple $t_{i+2kn} = t_i$. Sean ahora $i \geq 0, j \geq 0$ tales que $t_i = t_j$ y i', j' los restos enteros de la división de los anteriores por $2n$. Entonces $t_{i'} = t_{j'}$. Como $0 \leq i' < 2n$ y $0 \leq j' < 2n$ se sigue de 3) que $i' = j'$ y por tanto $i - j \in 2n\mathbb{Z}$. \square

R9// Un corte Q y un bucle G' de un grafo G tienen un número par de aristas comunes.

Dem.: Sea n el número de nudos de G' . De acuerdo con R8 existen

sucesiones (a_i) y (p_i) de aristas y de nudos de G' con las propiedades que allí se citan. Sean N'' y $N-N''$ los extremos del corte Q . Definimos una sucesión de números enteros (s_i) tales que $s_i=1$ si $p_i \in N''$ y $s_i=-1$ en caso contrario. Para que $s_i \neq s_{i+1}$ es condición necesaria y suficiente que $a_i \in Q$. Se tiene:

$$s_n/s_0 = (s_1/s_0) \cdot (s_2/s_1) \cdot \dots \cdot (s_n/s_{n-1})$$

Si r es el número de aristas de B que pertenecen a Q resulta: $s_n/s_0 = (-1)^r$. Ahora bien, por definición de la sucesión (p_i) se tiene $p_n = p_0$. De aquí $(-1)^r = 1$ y por lo tanto r es par. \square

R10// Sean G un grafo, G' un subgrafo de G , p y p' nudos de G' . Si p y p' son contiguos en G' lo son en G . Si son conexos en G' lo son también en G . Toda clase de conexión de G' está contenida en una y sólo una clase de conexión de G . Supongamos además que G' es cubriente. Sean C y C' los correspondientes conjuntos de clases de conexión de G y G' . Definimos una aplicación $f: C' \rightarrow C$ haciendo corresponder a cada $N'_p \in C'$ la clase $N_p \in C$ que la contiene. Esta aplicación es exhaustiva. Para que f sea inyectiva es condición necesaria y suficiente que $C' \subset C$. Entonces $C' = C$ y f es la aplicación idéntica.

Dem.: Dejamos todas las afirmaciones menos la última al cuidado del lector. Si C' no está contenido en C existe una $N'_p \in C'$ tal que N'_p no pertenece a C . Sea $N_p \in C$ tal que $N_p \supset N'_p$. Existe un $p' \in N_p$ tal que p' no pertenece a N'_p . Sea N'_p la correspondiente clase de conexión de p' en G' . Se cumple $N'_p \subset N_p$; $N'_p \neq N_p$ y $f(N'_p) = f(N_p)$. f no es inyectiva. \square

R11// Sea N_p una clase de conexión de un grafo G . Entonces $\langle N_p \rangle$ es una componente de G . Recíprocamente, si G' es una componente de G , entonces N' es una clase de conexión de G y $G' = \langle N' \rangle$. Las componentes de G constituyen una partición de G .

Dem.: Sean $p, p' \in N_p$. Existe una sucesión conexa (p_i) de nudos de G con primer término p y último término p' . Todos los nudos de la sucesión pertenecen a N_p . Cualquier par de nudos consecutivos de (p_i) son extremos de una arista de $\langle N_p \rangle$. En consecuencia p y p' son conexos también en $\langle N_p \rangle$. $\langle N_p \rangle$ es conexo. Sea G'' un subgrafo conexo de G que contenga a $\langle N_p \rangle$. Como G'' es un subgrafo de G se

tiene $N \in CN_p$ [R10]. Las aristas de G'' pertenecen a $\langle N_p \rangle$, por lo tanto $G'' = \langle N_p \rangle$ y G'' es un subgrafo conexo maximal de G . Recíprocamente si G' es una componente de G , N' está contenido en cierta clase de conexión N_p de G [R10] y por lo tanto en $\langle N_p \rangle$. De ahí que $G' = \langle N_p \rangle$. El resto se deja al lector. \square

R12// Sean p, p' dos nudos conexos y distintos de un grafo G . Existe un camino de G que tiene por nudos terminales a p y p' .

Dem.: Dado que p y p' son conexos existe una sucesión conexa (p_i) de nudos de nudos de G con primer término p y último término p' . Entre todas las sucesiones con esas propiedades existe al menos una con un menor número de términos. Todos los nudos de dicha sucesión son distintos. En efecto, sea $k+1$ el número de términos de la sucesión. Si $p_i = p_j$, $0 \leq j < i \leq k$ entonces la sucesión obtenida suprimiendo los términos $j, j+1, \dots, i-1$ de la anterior sería conexa, con menor número de términos que la anterior y uniría p con p' , en contra de la definición de la primera sucesión. Para cada i , sea a_i una arista de G con extremos p_i y p_{i+1} . Entonces los nudos p_i , $0 \leq i \leq k$ y las aristas a_i , $0 \leq i < k$ definen un camino de G con nudos terminales p y p' . \square

R13// Sean a una arista de un grafo G , con extremos p y p' . Si el subgrafo G' de G obtenido suprimiendo la arista a es un camino con nudos terminales p y p' , entonces G es un bucle.

Dem.: Se deja al lector. \square

R14// Sean a una arista de un grafo G con extremos p y p' , G' el subgrafo de G obtenido suprimiendo la arista a , C y C' los conjuntos de clases de conexión de G y G' , N_p^G y $N_p^{G'}$ las clases de conexión de p y p' en G' . Se verifica:

- 1) Para toda $N'' \in C'$ las relaciones $N'' \neq N_p^G$ y $N'' \neq N_p^{G'}$ implican $N'' \in C$.
- 2) $N_p^G \cup N_p^{G'} \in C$.
- 3) Si $N_p^G = N_p^{G'}$, entonces $C = C'$ y a no está contenida en ningún bucle de G .
- 4) En caso contrario $\text{Card}(C') = \text{Card}(C) + 1$ y a no está contenida en ningún bucle de G .

Dem.: 1) Sea $N'' \in C'$. Como G' es un subgrafo de G , existe una $N_k \in C$ tal que $N_k \supset N''$ [R10]. C' es una partición de N y, en consecuencia, toda clase de conexión de G' distinta de N'' está contenida en $N - N''$. El corte Q' de G' con extremos N'' y $N - N''$ es vacío [R3]. Si el corte Q de G con los mismos extremos no es vacío entonces contiene a la arista a , y por tanto $p \in N''$ ó $p' \in N''$. Es decir, si $N'' \neq N_p$ y $N'' \neq N_{p'}$, entonces Q es vacío. Existe una $N_k \in C$ tal que $N_k \supset N''$ [R10]. Entonces, ya que Q es vacío, $N_k \subset N''$ [R3]. De ahí el resultado.

2) Los nudos $N_p \cup N_{p'}$ son conexos en G , ya que los N_p y los $N_{p'}$ lo son en G' y p y p' lo son en G [R10]. El resto de la demostración es similar a la de la parte 1).

3) $C' \subset C$. En efecto, sea $N'' \in C'$. Si $N'' \neq N_p$, aplicando 1) se tiene $N'' \in C$. Según 2) $N_p \in C$. Por lo tanto $C' \subset C$ y $C = C'$ [R10]. Por definición, p y p' son conexos en G' . Por lo tanto, o bien $p = p'$, o bien existe un camino de G' con nudos terminales p y p' [R12]. En el primer caso existe un bucle de G constituido por la arista a y el nudo p , y en el segundo un bucle de G constituido por la arista a y los nudos y aristas del camino de G que tiene por nudos terminales p y p' [R13].

4) De acuerdo con 1) y 2) y empleando la aplicación f de R10, resulta $f(N'') = N''$ para toda $N'' \in C'$ tal que $N'' \neq N_p$ y $N'' \neq N_{p'}$, y $f(N_p) = f(N_{p'}) = N_p$, con $N_p = N_p \cup N_{p'}$. Como f es exhaustiva resulta $\text{Card}(C') = \text{Card}(C) + 1$. Por otra parte $N_p \neq N_{p'}$. El corte Q de G con extremos N_p y $N - N_p$ no contiene ninguna arista de G' . Dado que N_p no está contenida en ningún extremo de Q , Q no es vacío [R3]. Q contiene única y exclusivamente a la arista a . Si existiese un bucle de G que contuviese a la arista a entonces tal bucle y el corte Q tendrían una sola arista en común, en contra de R9. \square

R15// El número de componentes de un bosque G con r aristas y n nudos es $m = n - r$.

Dem.: Por inducción sobre r . Si $r = 0$ todos los nudos de G son aislados. Cada nudo es una componente de G . Entonces $m = n$. Sea ahora $r > 0$. Supongamos que el enunciado se cumple para todo $r' < r$. Si suprimimos una arista a de G el subgrafo G' resultante tiene $r' = r - 1$ aristas y $m' = m + 1$ componentes ya que G no contiene ningún

bucle [R14]. Por inducción resulta $m'=n-r'$ y, en definitiva, $m=n-r$. \square

R16// Sea G un grafo. Todo bosque maximal de G es cubriente.

Dem.: Sea G' un bosque maximal de G . Si G' no fuese cubriente entonces el subgrafo de G constituido por todos los nudos de G y las aristas de G' sería distinto de G' , contendría a G' y tampoco tendría bucles. G' no sería un bosque maximal. \square

R17// Sean G un grafo, G' un bosque maximal de G , C y C' los respectivos conjuntos de clases de conexión de G y G' . Se verifica: $C=C'$. Todo bosque G' de G con $C'=C$ es maximal.

Dem.: G' es cubriente [R16]. Supongamos que $C' \neq C$. C' no está entonces contenido en C [R10]. Existe por tanto un $N_p \in C'$ que no pertenece a C y existe una $N_p \in C$ tal que $N_p \supset N_p'$ y $N_p \neq N_p'$ [R10]. Consideremos el corte Q de G que tiene por extremos N_p y $N-N_p$. N_p no está contenida en ninguno de los extremos de Q . En consecuencia, Q no es vacío [R3]. Existe una arista a de G que tiene sus extremos en N_p y en $N-N_p$. Los extremos de a pertenecen a dos clases de conexión distintas de G' . El subgrafo cubriente de G constituido por las aristas de G' más la arista a es un bosque de G [R14], distinto de G' y que contiene a G' . G' no es maximal. Contradicción.

Por último, un bosque G' de G está contenido en un bosque maximal G'' de G . Cada clase de conexión de G'' está contenida en una de G' [R10]. De ahí $C=C'=C''$. Si $G'' \neq G'$ entonces existiría una arista a de G'' que no perteneciese a G' y a estaría contenida en un bucle de G'' . Contradicción. \square

R18// Sea G un grafo con r aristas, n nudos y m componentes. Todo bosque maximal de G tiene $r'=n-m$ aristas. Si $r=n-m$ entonces G es un bosque.

Dem.: Consecuencia de R15, R16 y R17. \square

R19// Un camino es un árbol.

Dem.: De acuerdo con R2, un camino G con r aristas posee $r+1$ nudos. Según R18 G es un bosque maximal de G . \square

R20// Sea G un grafo con r aristas, n nudos y m componentes. Se verifican las desigualdades: $r \geq n - m \geq 0$.

Dem.: Un bosque maximal de G tiene $n - m$ aristas [R18], de ahí la primera desigualdad. Por otra parte la aplicación que asocia a cada nudo de G su clase de conexión es exhaustiva. De ahí la segunda. \square

R21// Para que un conjunto A' de aristas de un grafo G sean ramales de un bosque maximal de G es condición necesaria y suficiente que el subgrafo cubriente de G que tiene a A' como conjunto de aristas sea un bosque.

Dem.: Inmediata. Todo bosque de G está contenido en un bosque maximal de G . \square

R22// Para que un conjunto A'' de aristas de un grafo G sean enlaces de un bosque maximal de G es condición necesaria y suficiente que el subgrafo G' de G obtenido suprimiendo las aristas A'' tenga las mismas clases de conexión que G . Entonces todo bosque maximal de G' es un bosque maximal de G .

Dem.: Es inmediata. Basta con tomar en consideración R17. \square

R23// Sean p y p' nudos conexos y distintos de un bosque G . Existe un y sólo un camino de G que tiene por nudos terminales a p y p' .

Dem.: La existencia se deriva de R12. Supongamos que existen dos caminos distintos con nudos terminales p y p' . Si añadimos una arista a con extremos p y p' al grafo G obtenemos un grafo G' con los mismos nudos y clases de conexión que G [R14]. G' posee dos bucles distintos G_1 y G_2 constituidos por la arista a y cada camino [R13]. Existe al menos una arista a' de G_1 que no pertenece a G_2 . En efecto, como un bucle no tiene nudos aislados, si toda arista de G_1 perteneciese a G_2 , entonces todo nudo de G_1 pertenecería también a G_2 , $G_1 \subset G_2$ y $G_1 = G_2$ [R4], en contra de las hipótesis. Si suprimimos la arista a' de G' el subgrafo G'' resultante tiene tantas aristas, nudos y clases de conexión como G [R14]. Como G es un bosque, se cumple $r = n - m$, siendo r , n y m

sus números de aristas, nudos y clases [R15]. Por lo tanto G'' es un bosque maximal de G' y contiene a G_2 , que es un bucle. Contradicción. \square

R24// Sea a una arista de un bucle G , con extremos p y p' . El subgrafo de G obtenido suprimiendo la arista a es un nudo aislado o un camino con nudos terminales p y p' .

Dem.: Si $p=p'$, a es un lazo. G se reduce entonces a la arista a y el nudo p [R4]. Si $p \neq p'$ al suprimir la arista a todos los nudos del subgrafo resultante tienen grado 2 salvo p y p' . Por otra parte, como a está contenida en un bucle de G , el subgrafo es conexo ya que G lo es [R14]. \square

R25// Sea G un grafo y d la función distancia entre nudos del mismo. Para cualesquiera $p, p', p'' \in N$ se verifica:

- 1) $d(p, p') \geq 0$
- 2) $d(p, p') = 0$ equivale a $p = p'$
- 3) $d(p, p') = d(p', p)$
- 4) $d(p, p'') \leq d(p, p') + d(p', p'')$
- 5) $d(p, p') = 1$ equivale a p y p' son contiguos

Dem.: Las afirmaciones 1), 2) y 5) se derivan inmediatamente de la definición de distancia.

3) Si p y p' no son conexos es evidente. Si lo son, a cada sucesión conexa de nudos de G :

$$p = p_0, p_1, \dots, p_k = p'$$

podemos asociarle otra (p'_i) tal que $p'_i = p_{k-i}$ para todo i . Entonces $p'_0 = p'$ y $p'_k = p$. En definitiva, a cada sucesión conexa que empieza en p y termina en p' podemos asociarle otra con igual número de términos que empieza en p' y termina en p , y recíprocamente. De ahí el resultado.

4) Si p y p' ó p' y p'' no son conexos el resultado es evidente. Si ambos pares lo son y $d(p, p') = k$ y $d(p', p'') = k'$ existen sucesiones conexas (p_i) y (p'_i) de nudos de G tales que $p_0 = p$, $p_k = p' = p'_0$, $p'_k = p''$. Entonces podemos definir una sucesión conexa (p''_i) tal que para $i \leq k$ $p''_i = p_i$ y para $k < i \leq k+k'$ $p''_i = p'_{i-k}$. Por lo tanto $d(p, p'') \leq k+k'$. \square

R26// Sea G un grafo. Dado un $p \in N$, la esfera y la bola cerrada de centro p y radio 0 son iguales a $\{p\}$. Si llamamos N_k a la bola cerrada de centro p y radio k se tiene para $k > 1$ que la esfera de radio k es igual a $N_k - N_{k-1}$. Por otra parte N_{k+1} está constituida por los nudos de N_k y los nudos de $N - N_k$ contiguos a nudos de N_k .

Dem.: Las dos primeras afirmaciones son inmediatas. Sea S_k el conjunto de nudos de $N - N_k$ contiguos a nudos de N_k . Si $p' \in N_k \cup S_k$ se tiene, de acuerdo con la propiedad 4) de R25, $d(p', p) \leq k+1$. Es decir, $p' \in N_{k+1}$. Recíprocamente, sea $p' \in N_{k+1}$. Si p' no pertenece a N_k entonces $d(p, p') = k+1$ y existe una sucesión conexa (p_i) de nudos de G tal que $p_0 = p$ y $p_{k+1} = p'$. Obviamente p_k es contiguo de p' y $d(p, p_k) \leq k$. Por lo tanto $p_k \in N_k$. \square

R27// Sean G un camino con nudos terminales p y p' y t_0 el único terminal de G conectado a p . Existe un y sólo un itinerario (t_i) sobre G . Entonces $T = \{t_0, t_1, \dots, t_{r-1}\}$. Sean (p_i) y (a_i) las sucesiones de nudos y de aristas de G inducidas por (t_i) . Se tiene:

$$N = \{p_0, p_1, \dots, p_r\}, \text{ con } p_r = p'$$

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_{r-1}\}$$

Dem.: Si añadimos a G una arista a con extremos p y p' obtenemos un bucle [R13] sobre el cual existe un y sólo un itinerario infinito con primer término t_0 [R8]. El resto de los detalles de la demostración los dejamos al cuidado del lector. \square

1.5.-CORTES FUNDAMENTALES DE UN GRAFO

Sean G un grafo, G' un bosque maximal de G , a un ramal de G' con extremos p y p' y G'' el subgrafo de G' obtenido por supresión del ramal a . Dado que G' no tiene bucles los extremos de a pertenecen a dos clases de conexión N_p'' y $N_{p'}''$ de G'' distintas [R14]. Definimos el corte fundamental Q_a del grafo G asociado al ramal a del bosque maximal G' como el que tiene por extremos N_p'' y $N - N_p''$.

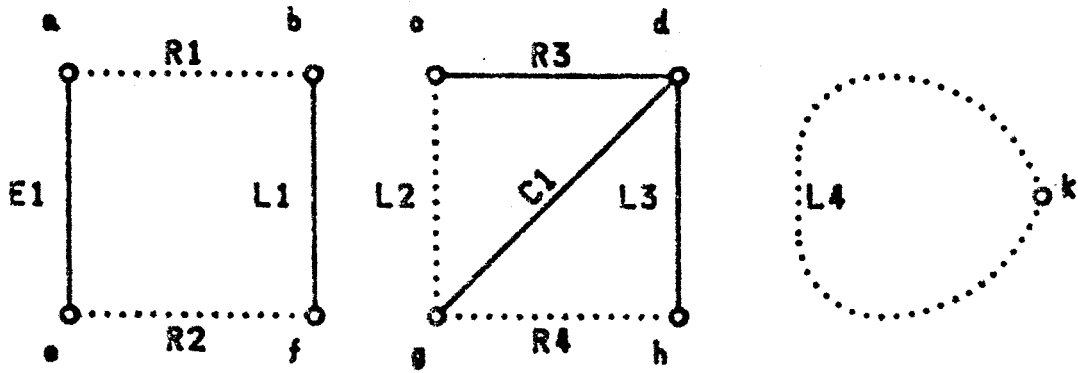


FIGURA 1.6

Ejemplo: Partiendo del grafo de la fig.3, y de su bosque maximal representado en la fig.4, en la fig.6 se muestra el grafo resultante de la supresión del ramal R1 del bosque. En la fig.7 se muestran las aristas del corte fundamental correspondiente.

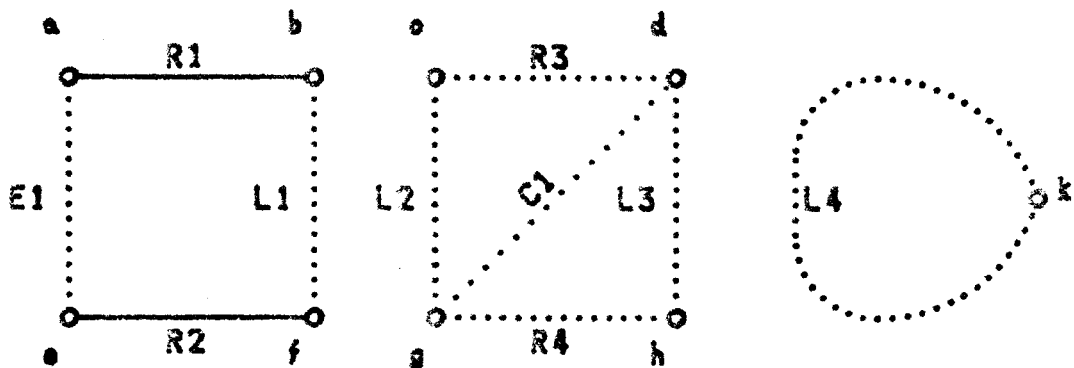


FIGURA 1.7

Obsérvese que la elección de la clase N_0^a es arbitraria, ya que podíamos haber tomado la N_0^b . Ello se debe al siguiente:

R28// Sea Q_n el corte fundamental de G definido más arriba. Las siguientes son definiciones equivalentes:

- 1) Q_n es el corte de G con extremos N_p y $N-N_p$.
- 2) Q_n es el conjunto de aristas de G que tienen un extremo en N_p y otro en N_p .
- 3) Q_n es el conjunto de aristas de G que tienen sus extremos en clases distintas de conexión de G .

Dem.: Sean A_1 , A_2 y A_3 los conjuntos de aristas resultantes de las definiciones 1), 2) y 3). Las relaciones siguientes son inmediatas: $A_2 \subset Q_n \subset A_3$ y $A_1 \subset Q_n \subset A_3$. Por otra parte, toda arista a' de G tiene ambos extremos en una misma clase de conexión de G . Según R17 G y G' tienen las mismas clases de conexión. Según R14 toda clase de conexión de G' es una clase de conexión de G , salvo N_p y N_p . De ahí que $A_1 \subset A_2$, lo que acaba la demostración, ya que entonces $Q_n = A_1 = A_2 = A_3$. \square

R29// El corte fundamental Q_n definido más arriba contiene un y sólo un ramal de G' : el ramal a .

Dem.: Por definición, todos los ramales de G' menos el ramal a tienen ambos extremos en una misma clase de conexión de G' . Aplicando R28 tenemos el resultado. \square

1.6.-BUCLES FUNDAMENTALES DE UN GRAFO

Sean G un grafo, G' un bosque maximal de G y a un enlace de G' . El subgrafo de G constituido por las aristas y nudos de G' más el enlace a contiene un bucle G_n , ya que si no G' no sería un bosque maximal de G . Dicho bucle es único. En efecto, a es una arista de G_n . Si suprimimos la arista a de G_n tenemos, o bien un nudo aislado, o bien un camino que tiene por nudos terminales los extremos p y p' de la arista a [R24]. Este camino es el único camino de G' con tales nudos terminales [R23]. Por tanto, en todos los casos G_n es único. Decimos que G_n es el **bucle fundamental de G asociado al enlace a del bosque maximal G'** . Resulta de la definición que G_n contiene un y sólo un enlace de G' : el enlace a .

Ejemplo: Partiendo del grafo de la fig.2 y del bosque maximal del mismo representado en la fig.4, se muestra en la fig.8 el subgrafo obtenido añadiendo el enlace L2 al bosque, y en la fig.9 el bucle fundamental correspondiente a dicho enlace.

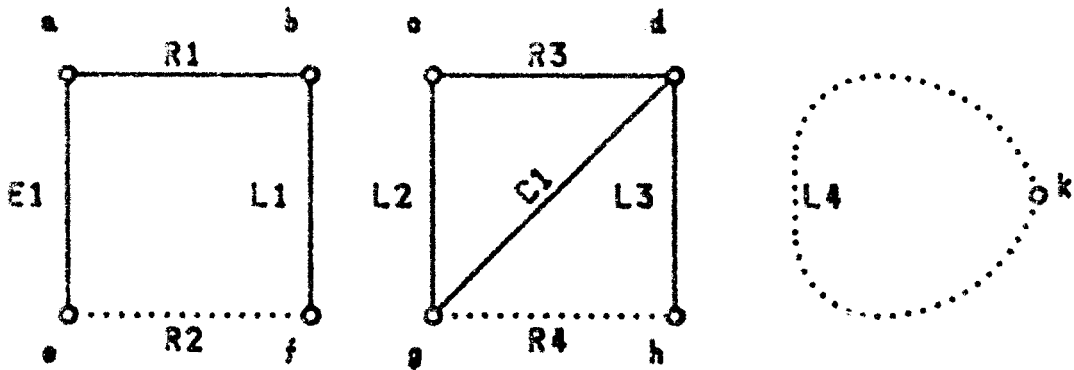


FIGURA 1.8

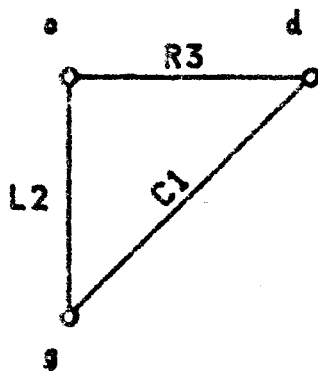


FIGURA 1.9

R30//Sean G un grafo, G' un bosque maximal de G , a un enlace de G' y a' un ramal de G' . Para que a pertenezca al corte fundamental de a' es condición necesaria y suficiente que a' pertenezca al bucle fundamental de a .

Dem.: Sean A_a el conjunto de aristas del bucle fundamental de a , $Q_{a'}$ el corte fundamental de a' y $A'' = A_a \cap Q_{a'}$. De acuerdo con [R9] $\text{card}(A'')$ es un número par. Por otra parte, A_a sólo contiene un enlace, a , y $Q_{a'}$ sólo contiene un ramal: a' . En consecuencia A'' contiene como máximo un enlace y un ramal. Si A'' no es vacío entonces $\text{card}(A'') \leq 2$ y de ahí $\text{card}(A'') = 2$ y $A'' = \{a, a'\}$. \square

1.7.-CAMINOS FUNDAMENTALES DE UN GRAFO

Sean G un grafo, G' un bosque maximal de G , N_0 un conjunto de nudos de referencia de G y p un nudo de G . Por definición existe un y sólo un nudo $p' \in N_0$ conexo con p . De acuerdo con R23, existe un y sólo camino G_p de G' con extremos en p y p' . Decimos que G_p es el camino fundamental de G asociado al nudo p , al bosque maximal G' y al conjunto de nudos de referencia N_0 .

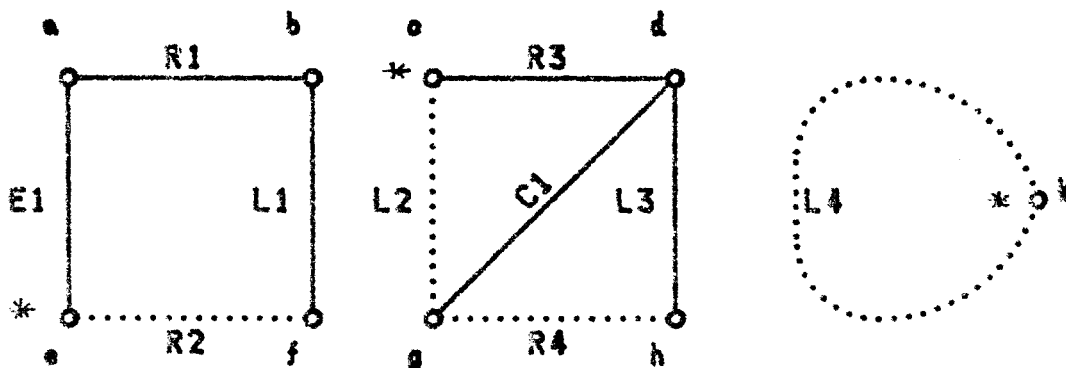


FIGURA 1.10

Ejemplo: Partiendo del grafo de la fig.3 y de su bosque maximal representado en la fig.4, se muestra en la fig.10 dicho bosque, en el cual se han marcado los nudos de referencia e, c y k. En la fig.11 se muestra el camino fundamental correspondiente al nudo

9.

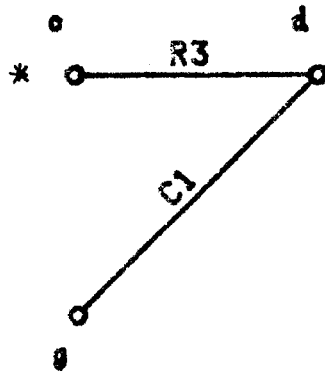


FIGURA 1.11

1.8.-ALGUNAS APLICACIONES

Obtención de un camino más corto entre dos nodos de un grafo

Sean p y p' tales nodos, naturalmente conexos. Aplicando las definiciones y R26 podemos obtener las esferas de centro en p y radios $0, 1, 2, \dots$ y, en consecuencia, las distancias de todos los nodos del grafo al nudo p . Sea $d(p, p') = k$. Existe una sucesión conexa (p_i) de nodos de G tales que $p_0 = p$ y $p_k = p'$. De acuerdo con la definición de distancia y con la demostración de R12, todos los nodos de dicha sucesión son distintos y constituyen los nodos de un camino más corto con nodos terminales p y p' . Para construir una sucesión de ese tipo procedemos iterativamente del final hacia el principio: Evidentemente, $p_k = p'$. Obtenido un cierto p_i , elegimos arbitrariamente p_{i-1} entre todos los nodos de G con la condición de que $d(p, p_{i-1}) = i - 1$ y que p_{i-1} sea contiguo de p_i . Igualmente elegimos una arista con extremos en p_i y p_{i-1} . Ambos forman parte del camino buscado.

Obtención de las clases de conexión y de un conjunto de nodos de referencia de un grafo G

El subgrafo de G constituido sólo por los nudos de G , sin ninguna arista tiene tantas clases de conexión como nudos tiene G y cada una está formada por un nudo de G . A dicho subgrafo le vamos añadiendo aristas de G . La introducción de una arista con extremos p y p' produce una nueva clase de conexión resultado de la unión de las clases de p y p' [R14]. El proceso se termina cuando ya se han añadido todas las aristas de G . Eligiendo arbitrariamente un nudo por cada clase de conexión de G construimos un conjunto de nudos de referencia de G .

Obtención de un bosque maximal de un grafo G

Se parte del bosque de G constituido por todos los nudos de G sin ninguna arista. Se procede por inducción sobre el número de aristas. Obtenido un cierto bosque G' de G se busca una arista a de G que no pertenezca a G' y que una dos clases distintas de conexión de G' . Si existe tal arista, la añadimos a G' y, de acuerdo con R14, obtenemos un bosque de G con una arista más. El proceso se termina cuando no podamos encontrar ya una arista con las propiedades citadas.

Obtención de un corte fundamental de un grafo G

Se procede de acuerdo con las definiciones.

Obtención de un bucle fundamental de un grafo G

Sea G' un bosque maximal de G y a un enlace de G' con extremos p y p' . Si $p=p'$ entonces el bucle fundamental es un lazo constituido por la arista a y el nudo p . Si $p \neq p'$, obtenemos el camino más corto de G' que tiene por extremos p y p' . Ese camino es único [R23]. Añadiendo al camino la arista a tenemos el bucle fundamental buscado. El resultado siguiente nos proporciona otro método para encontrar dicho bucle fundamental.

R31// Sean G un grafo, G' un bosque de G , a una arista de G que

no pertenece a G' y cuyos extremos pertenecen a una misma clase de conexión de G' y G'' el subgrafo de G obtenido añadiendo la arista a a G' . Si G'' no es un bucle, entonces posee un nudo aislado o terminal.

Dem.: El número m' de clases de conexión de G' es $m'=n'-r'$ [R15]. G'' tiene las mismas clases de conexión que G' [R14]. Por lo tanto, de su definición se deduce: $m''=n''-r''+1$. Para cada $i \geq 0$ sea n_i el número de nudos de grado i en G'' . Se verifica:

$$n''=n_0+n_1+n_2+\dots$$

Aplicando R1, resulta también:

$$2r''=n_1+2n_2+3n_3+\dots$$

Haciendo las pertinentes sustituciones, tenemos:

$$2n_0+n_1+2=2m''+n_3+2n_4+3n_5+\dots$$

De acuerdo con la definición de bucle, para que G'' lo sea se ha de tener $n''=n_2$ y $m''=1$. Si no se cumple alguna de estas condiciones entonces $n_0 \neq 0$ ó $n_1 \neq 0$. \square

Del resultado precedente se deduce que si el subgrafo G'' de G constituido por el bosque maximal de G y el enlace a no es el bucle fundamental, entonces posee un nudo aislado o terminal. Obviamente dicho nudo no pertenece al bucle. Obtenemos un subgrafo de G'' suprimiendo tal nudo. La operación se repite tantas veces como sean necesarias hasta obtener un subgrafo de G sin nudos terminales ni aislados: ese es el bucle fundamental buscado.

Obtención y propiedades del bosque normal

Sea una red eléctrica con un grafo G constituida por dispositivos de los tipos siguientes: Fuentes independientes de tensión (E), condensadores (C), resistencias (R), inductancias (L) y fuentes independientes de intensidad (J). Llamamos E, C, R, L y J a los respectivos conjuntos de aristas de G . Tenemos por tanto una partición del conjunto A de aristas de G en 5 subconjuntos. Sea G' un bosque maximal de G . Decimos que es **normal** si y sólo si cumple todas las condiciones siguientes:

- 1) $A' \supseteq E$.

ii) $A \cap J = \emptyset$

iii) $\text{Card}(A \cap C)$ es el máximo entre todos los bosques maximales de G que cumplen la condición i)

iv) $\text{Card}(A \cap L)$ es el mínimo entre todos los bosques maximales de G que cumplen la condición ii)

R32// Sean G_E , G_C , G_R y G_L los subgrafos cubrientes de G que tienen por conjuntos de aristas E , EUC , $EUCUR$ y $EUCURUL$, respectivamente. Para que exista un bosque normal de G es condición necesaria y suficiente que se cumplan las dos condiciones siguientes:

1) G_E es un bosque.

2) G_L tiene las mismas clases de conexión que G .

Para que un bosque maximal G' de G sea normal es necesario y suficiente que verifique las siguientes propiedades:

iv) $G_E \subset G' \subset G_L$.

v) $G_C \cap G'$ es un bosque maximal de G_C .

vi) $G_R \cap G'$ es un bosque maximal de G_R .

Dem.: Las condiciones 1) y 2) son necesarias: Si existe un bosque normal G' entonces 1) $G_E \subset G'$ por definición y G_E es un bosque y 2) $G' \subset G_L$ y G' tiene las mismas clases de conexión que G .

Veamos que las condiciones 1) y 2) son suficientes. De acuerdo con las definiciones se verifica:

$$G_E \subset G_C \subset G_R \subset G_L \subset G$$

Si se cumple 1) existen un bosque maximal G'_C de G_C tal que $G'_C \supset G_E$, un bosque maximal G'_R de G_R tal que $G'_R \supset G'_C$, y un bosque maximal G' de G_L tal que $G' \supset G'_R$ [R21]. G' tiene las mismas clases de conexión que G_L [R17]. Si se cumple la condición 2) G' tiene las mismas clases de conexión que G . Por lo tanto es un bosque maximal de G [R17]. Sea G'' un bosque maximal cualquiera de G tal que $G'' \supset G_E$. El subgrafo $G'' \cap G_C$ es un bosque de G_C y por tanto está contenido en un bosque maximal de G_C . En consecuencia el número de aristas tipo C de G' es mayor o igual que las de G'' y G' cumple la condición iii) del bosque normal. Que cumple también la iv) se demuestra de modo similar.

El grafo normal G' construido anteriormente cumple las condiciones iv), v) y vi) del enunciado. La demostración de la

necesidad de estas condiciones se deja al cuidado del lector. \square

R33// Sean G_E , G_C , G_R y G_L los anteriores, G' un bosque normal de G , a un enlace de G' , b un ramal de G' , G_a el bucle fundamental de G asociado a a y a G' y Q_b el corte fundamental de G asociado a b y a G' :

vii) Si $a \in C$, entonces $G_a \subset G_C$; si $a \in R$, $G_a \subset G_R$; si $a \in L$, $G_a \subset G_L$.

viii) Si $b \in L$, $Q_b \subset JUL$; si $b \in R$, $Q_b \subset JULUR$; si $b \in C$, $Q_b \subset JULURUC$.

Dem.: vii) Probemos la primera afirmación. Sea $a \in C$ un enlace de G' . De acuerdo con R32, $G'' = G' \cap G_C$ es un bosque maximal de G_C . Entonces el bucle fundamental de a en G_C es también el bucle fundamental de a en G . De ahí que $G_a \subset G_C$. Las demás afirmaciones de este apartado se demuestran de modo semejante. \square

viii) Sea $b \in L$ un ramal de G' . Supongamos que Q_b contiene una arista a de G_R . Entonces a es un enlace de G' y b pertenece a G_a . [R30]. De acuerdo con vii) $G_a \subset G_R$. Por lo tanto $b \in L$, por definición de G_R . Contradicción. Las demás afirmaciones se demuestran de modo similar. \square

CAP. II : EL GRAFO ORIENTADO DE LA RED

=====

2.1.-VECTORES Y MATRICES CON INDICES EN ALFABETOS ARBITRARIOS

Sea K un cuerpo conmutativo. Un vector ordinario w de orden n sobre K , es un elemento del conjunto K^n , el cual se puede identificar con una familia (w_i) de elementos de K con índices en el conjunto $\{1,2,\dots,n\}$. Una matriz ordinaria M de orden $m \times n$, se puede de modo análogo identificar con una familia (m_{ij}) de elementos de K con índices en el conjunto

$$\{1,2,\dots,m\} \times \{1,2,\dots,n\}.$$

Estas definiciones son excesivamente rígidas cuando se trata de hacer particiones de matrices y vectores. Para flexibilizarlas introducimos los conceptos siguientes.

En lo sucesivo denominamos **alfabeto** a todo conjunto finito. Llamamos **vector con coeficientes en K e índices en el alfabeto X** a toda familia $w=(w_i)$ de elementos de K con índices en el conjunto X . Escribimos K^X el conjunto de estas familias. Denominamos **matriz con coeficientes en K e índices en los alfabetos X e Y** a toda familia $M=(m_{ij})$ de elementos de K con índices en el conjunto $X \times Y$. Escribimos $K^{X \times Y}$ el conjunto de tales matrices. También escribimos w_x y M_{xy} cuando deseamos hacer constar los conjuntos de índices de w y de M . Obsérvese que los vectores y matrices ordinarios son vectores y matrices con índices en conjuntos del tipo $X=\{1,2,\dots,m\}$ y $Y=\{1,2,\dots,m\}$. Para escribir los vectores y matrices que acabamos de definir hay que indicar los índices de cada coeficiente. Así ponemos:

$$w = \begin{matrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad M = \begin{matrix} & a & d & p & q \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & -1 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{matrix}$$

que son, respectivamente, un vector w_x y una matriz M_{xY} con índices en los conjuntos $X=\{1,7,3\}$ y $Y=\{a,d,p,q\}$. Se tiene: $m_{7p}=6$, $w_3=0$, etc. En los sucesivos nos referiremos siempre a este tipo de vectores y matrices y a un cierto cuerpo K conmutativo, sin nombrarlo.

Sean w_x un vector y $T \subset X$. Indicamos w_T el **subvector** $(w_i)_{i \in T}$, es decir un nuevo vector constituido por los elementos w_i , $i \in T$ de w_x . De modo similar, sean M_{xY} una matriz, $T \subset X$ y $Z \subset Y$. Escribimos M_{TZ} la **submatriz** de M_{xY} constituida por las filas $i \in T$ y las columnas $j \in Z$. Así, si w y M son los arriba indicados y $T=\{1,3\}$, $Z=\{d,q\}$ tenemos el subvector y la submatriz siguientes:

$$\begin{matrix} & & & d & q \\ & 1 & 3 & 1 & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & & 3 & \end{matrix}$$

Obsérvese que en este caso hemos escrito el vector en fila, mientras que anteriormente lo habíamos escrito en columna. Estas dos formas de escritura son igualmente válidas, salvo ciertas convenciones que se enunciarán más abajo.

Obviamente es necesario indicar los conjuntos de índices para nombrar los subvectores y las submatrices. Así hemos escrito más arriba w_T y M_{TZ} . Por el contrario, es posible omitir estos conjuntos de índices cuando nombramos los vectores o las matrices completos si esos conjuntos de índices ya han sido especificados anteriormente. Escribiendo ahora w ó M ya sabemos que nos referimos a w_x y M_{xY} respectivamente.

Operaciones de vectores y matrices

Las operaciones de vectores y matrices son análogas a las de los vectores y matrices ordinarios salvo el hecho de que los índices toman sus valores en alfabetos cualesquiera. En este párrafo sean u, v, w vectores, X, Y, Z, T alfabetos, A, B, C matrices y r un escalar, es decir $r \in K$. Para cada operación mostramos su escritura y al lado su definición en función de los coeficientes de los vectores y de las matrices.

* Suma de vectores

$$u_x = v_x + w_x$$

$$u_i = v_i + w_i$$

* Producto de un escalar por un vector

$$v_x = r u_x$$

$$v_i = r u_i$$

* Producto escalar de dos vectores

$$r = u_x \cdot v_x$$

$$r = \sum_i u_i v_i \quad (i \in X)$$

* Suma de matrices

$$A_{xy} = B_{xy} + C_{xy}$$

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$$

* Producto de un escalar por una matriz

$$A_{xy} = r B_{xy}$$

$$a_{ij} = r b_{ij}$$

* Producto de un vector por una matriz

$$u_y = v_x \cdot A_{xy}$$

$$u_j = \sum_i v_i a_{ij} \quad (j \in Y)$$

* Producto de una matriz por un vector

$$u_x = A_{xy} \cdot v_y$$

$$u_i = \sum_j a_{ij} v_j \quad (i \in Y)$$

* Producto de matrices

$$A_{xz} = B_{xy} \cdot C_{yz}$$

$$a_{ik} = \sum_j b_{ij} c_{jk} \quad (j \in Y)$$

* Cambio de índices de un vector. Sea $\sigma: T \rightarrow X$ una biyección.

$$u_T = v_X$$

$$u_i = v_{\sigma(i)}$$

Decimos que σ es una ordenación si $T = \{1, 2, \dots, n\}$, siendo $n = \text{card}(X)$. En ese caso u es un vector ordinario.

* Cambio de índices de una matriz. Sean σ la anterior y $\tau: Z \rightarrow Y$ otra biyección.

$$A_{xz} = B_{\sigma\tau} \quad a_{ij} = b_{\sigma(i)\tau(j)}$$

Si σ y τ son ordenaciones, A es una matriz ordinaria.

* Trasposición de una matriz

$$A_{xy} = {}^t B_{yx} \quad a_{ij} = b_{ji}$$

Convenciones para la escritura de productos de vectores y matrices

a) Un vector que multiplica por la izquierda a una matriz o a otro vector se escribe como vector fila.

b) Un vector que multiplica por la derecha a una matriz o a otro vector se escribe como vector columna.

c) En las cadenas de productos de matrices y/o vectores se ordenan las filas de cada matriz o vector como las columnas de la matriz o vector que le precede. Se escriben los índices de las columnas de las matrices y de los vectores fila. Si el primer elemento de la cadena es una matriz se escriben también los índices de sus filas. Así los productos $w.M$, $N.M.u$ se escriben:

$$\begin{matrix} & & & d & e \\ a & b & c & & \\ \left[w_a & w_b & w_c \right] & \begin{bmatrix} m_{ad} & m_{ae} \\ m_{bd} & m_{be} \\ m_{cd} & m_{ce} \end{bmatrix} & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & & & d & e \\ & a & b & c & \\ k & \begin{bmatrix} n_{ka} & n_{kb} & n_{kc} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} m_{ad} & m_{ae} \\ m_{bd} & m_{be} \\ m_{cd} & m_{ce} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_d \\ u_e \end{bmatrix} \\ l & \begin{bmatrix} n_{la} & n_{lb} & n_{lc} \end{bmatrix} & & & \end{matrix}$$

Vectores y matrices notables

* Para cada $i \in X$ escribimos δ_i el vector definido:

$$\delta_i^i = 1 \quad \delta_j^i = 0, \text{ si } i \neq j$$

Para todo vector u_x se tiene:

$$\delta_i^i \cdot u_x = u_i$$

$$u_x = \sum_i u_i \delta_i^x \quad (i \in X)$$

Para toda matriz A_{xy} , el vector $u_y = \delta_i^i \cdot A_{xy}$ es el vector fila i de A .

Para toda matriz A_{xy} , el vector $u_x = A_{xy} \cdot \delta_j^j$ es el vector columna j de A .

* Para cada $Y \subset X$ escribimos δ_Y^X definido:

$$\delta_Y^i = 1, \text{ si } i \in Y$$

$$\delta_Y^i = 0, \text{ si } i \notin Y$$

Para toda matriz A_{xy} , el vector $u_y = \delta_Y^i \cdot A_{xy}$ es la suma de las filas de A con índices $i \in Y$.

Para toda matriz A_{xy} , el vector $u_x = A_{xy} \cdot \delta_j^j$ es la suma de las columnas de A con índices $j \in Z$.

* Decimos que un vector u_y es combinación lineal de las filas de A si existe un vector v_x tal que $u = v \cdot A$.

Decimos que un vector u_x es combinación lineal de las columnas de A si existe un v_y tal que $u = A \cdot v$.

* Decimos que una matriz A_{xy} es cuadrada si $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$.

* Sea A_{xx} una matriz tal que

$$a_{ij} = 0, \text{ si } i \neq j$$

$$a_{ij} = 1, \text{ si } i = j$$

Decimos que es la matriz unidad con índices en X y la escribimos 1_x .

Para toda matriz A_{xy} se tiene:

$$A_{xy} = 1_x \cdot A_{xy} = A_{xy} \cdot 1_y$$

Particiones de vectores o matrices

* Sea X un alfabeto. Denominamos **partición** de X a toda familia $P = (X_i)$, tal que:

i) I es un alfabeto

ii) Los X_i son subconjuntos de X no vacíos y disjuntos.

iii) La unión de todos los X_i es X .

Sea w_x un vector. Llamamos **partición del vector** w_x según F a la familia $(w^i)_i$ de vectores tales que $w^i = w_{x_i}$ para todo $i \in I$. Sea $I = \{a, b, \dots, z\}$. Indicamos la partición de w_x escribiendo:

$$w = (w^a \mid w^b \mid \dots \mid w^z)$$

* Sean $M_{X,Y}$ una matriz, $F = (X_i)_i$ una partición de X y $F' = (Y_j)_j$ una partición de Y . Denominamos **partición de M según F y F'** a la familia $(M^{i,j})_{i,j}$ de matrices tales que $M^{i,j} = M_{x_i, y_j}$ para cualesquiera $i \in I$, $j \in J$. Supuestos $I = \{a, b, \dots, k\}$ y $J = \{p, q, \dots, z\}$ indicamos tal partición escribiendo:

$$M = \begin{matrix} & Y_p & Y_q & \dots & Y_z \\ \begin{matrix} X_a \\ X_b \\ \dots \\ X_k \end{matrix} & \begin{bmatrix} M^{ap} & M^{aq} & \dots & M^{az} \\ M^{bp} & M^{bq} & \dots & M^{bz} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M^{kp} & M^{kq} & \dots & M^{kz} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La propiedad más utilizada de las particiones de matrices y vectores es la siguiente: Sean u_x, v_y vectores, $M_{X,Y}$ una matriz y $F = (X_i)_i$, $F' = (Y_j)_j$ particiones de X e Y respectivamente, $(M^{i,j})_{i,j}$, $(u^i)_i$ y $(v^j)_j$ las correspondientes particiones de M , u y v . La relación $u = M \cdot v$ equivale a: Para todo $i \in I$ se verifica

$$u^i = \sum_j M^{i,j} \cdot v^j \quad (j \in J)$$

* Sean I un alfabeto, $F = (X_i)_i$ una familia de alfabetos y $(w^i)_i$ una familia de vectores tales que para todo $i \in I$ el conjunto de índices de w^i es X_i . Nos interesa expresar la familia (w^i) como partición de un cierto vector w_x según F . Si los conjuntos X_i son disjuntos no hay problema: Tomamos como conjunto X la unión de todos los X_i y como vector w_x uno tal que $w_{x_i} = w^i$ para todo $i \in I$. w_x es único. Ahora bien, si los X_i no son disjuntos esto no es posible. Entonces procedemos de la siguiente manera:

Sean X un conjunto y $(\sigma_i)_I$ una familia de aplicaciones $\sigma_i: X_i \rightarrow X$ tales que:

i) Para cada índice i , σ_i es inyectiva.

ii) La familia de conjuntos $(\sigma_i(X_i))_I$ es una partición de X .

Decimos entonces que $(X, (\sigma_i)_I)$ es un **coproducto** de la familia P y escribimos:

$$X = \coprod_{i \in I} X_i$$

Este coproducto existe siempre. Efectivamente, basta con tomar X como el conjunto de pares (j, i) tales que $i \in I$ y $j \in X_i$, y como aplicaciones σ_i las definidas $\sigma_i: j \mapsto (j, i)$

Definimos entonces un vector w_x poniendo:

$$w_{\sigma_i(j)} = w_j$$

para cualesquiera $i \in I$, $j \in X_i$. Decimos que w_x es una **fusión** de la familia $(w_i)_I$, y lo escribimos como las particiones de vectores, aunque no lo sea. Este concepto se justifica más abajo.

* Sean I, J alfabetos, $P=(X_i)_I$, $P'=(Y_j)_J$ familias de alfabetos y $(M^{i,j})_{I,J}$ una familia de matrices tales que para cualesquiera $i \in I$, $j \in J$, $M^{i,j}$ tiene por conjuntos de índices X_i , Y_j . Razonando de modo similar al párrafo anterior resulta que si los conjuntos X_i son disjuntos y los Y_j lo son también entonces es posible expresar $(M^{i,j})$ como el resultado de una partición de una cierta matriz $M_{x,y}$ según P y P' . Si no se cumple tal condición procedemos como en el caso de los vectores, empleando un coproducto (X, σ) de P y otro (Y, τ) de P' , y definiendo una matriz $M_{x,y}$ tal que $m_{\sigma_i(j), \tau_k(l)} = m_{j,k}$. Decimos entonces que $M_{x,y}$ es la **fusión** de la familia $(M^{i,j})_{I,J}$.

El resultado más utilizado de las fusiones de vectores y matrices es el siguiente: Sean $I, J, P, P', (w^i), (M^{i,j})$ y M los anteriores. Sea $(v^j)_J$ otra familia de vectores tales que para todo j , el conjunto de índices de v^j es Y_j . Definimos una fusión v_v de la familia (v^j) empleando el coproducto (Y, τ) . La relación: Para todo $i \in I$,

$$w^i = \sum_{j \in J} M^{i,j} \cdot v^j$$

equivale a $w = M \cdot v$.

Otras definiciones

* Decimos que la matriz $A_{X \times Y}$ es la **inversa** de $B_{Y \times X}$ y escribimos $A=B^{-1}$ si $B.A=1_X$ y $A.B=1_Y$. Sean σ y τ ordenaciones de X e Y . Si $A=B^{-1}$ entonces $A^{\sigma\tau}=(B^{\tau\sigma})^{-1}$. Esta relación permite calcular la inversa de una matriz generalizada.

* Sea $A_{X \times Y}$ una matriz cuadrada y σ y τ ordenaciones de X e Y . Definimos el **determinante** de A con respecto a σ y τ escribiendo $\det_{\sigma\tau}(A)=\det(A^{\sigma\tau})$. Para que A sea invertible es condición necesaria y suficiente que su determinante sea distinto de 0.

* Denominamos **rango** de una matriz $A_{X \times Y}$ al número de filas o columnas de A linealmente independientes. Ambos números son iguales. En efecto. El número de filas o columnas linealmente independientes es invariante con respecto a un cambio de índices de las filas o de las columnas de la matriz. Mediante un cambio apropiado obtenemos a partir de la matriz A una cierta matriz ordinaria $A^{\sigma\tau}$. Los números de filas o de columnas de $A^{\sigma\tau}$ linealmente independientes son iguales. En consecuencia, los correspondientes de A , también lo son. Abreviamos $\text{rg}(A)$.

2.2.-ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS VECTORES Y MATRICES

* Las operaciones de vectores y matrices tienen propiedades análogas a las de los vectores y matrices ordinarios: La suma es conmutativa y asociativa y los productos son asociativos y distributivos con respecto a la suma. Además:

$${}^c(A.B)={}^cA.{}^cB \quad B^{-1}.A^{-1}=(A.B)^{-1}$$

Las únicas propiedades particulares dignas de mencionarse son las siguientes:

$$w.A={}^cA.w \quad A^{\sigma\tau}.B^{\tau\eta}=(A.B)^{\sigma\eta}$$

* Sea X un alfabeto. Los vectores δ_i , $i \in X$ constituyen una **base canónica** del espacio vectorial K^X . Para cada vector $w \in K^X$ las w_i , $i \in X$ constituyen las componentes de w con respecto a

dicha base canónica. En consecuencia tenemos $\dim(K^X) = \text{card}(X)$.

* Sea $M_{X,Y}$ una matriz. Los vectores columna (respectivamente, fila) de M engendran un subespacio vectorial de K^X (resp. K^Y). Ambos subespacios tienen la misma dimensión: $\text{rg}(M)$.

* Sean $A_{X,Y}$, $B_{Y,Z}$ matrices y $C=A.B$. Las filas de C son combinación lineal de las de B . Las columnas de C son combinación lineal de las de A . En efecto, para cualesquiera $i \in X$, $j \in Z$ se tiene: $\delta_{ij}.C = (\delta_{ij}.A).B$ y $C.\delta_{ij} = A.(B.\delta_{ij})$. De ahí el resultado. Recíprocamente, si $C_{X,Z}$ es combinación lineal de las filas de $B_{Y,Z}$, existe una matriz $A_{X,Y}$ tal que $C=A.B$.

* Decimos que las matrices $A_{X,Z}$, $B_{Y,Z}$ son **equivalentes en filas** si las filas de B son combinación lineal de las de A y viceversa. Entonces los subespacios de K^Z generados por las filas de A y por las filas de B son idénticos y $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

* Sean la matriz $A_{X,Z}$ y $Y \subset X$. Decimos que $A_{Y,Z}$ es una **reducida** (por filas) de $A_{X,Z}$ si $\text{rg}(A_{X,Z}) = \text{rg}(A_{Y,Z}) = \text{card}(Y)$. En otras palabras, si las filas Y son una base del subespacio de K^Z generado por las filas de $A_{X,Z}$. Las matrices $A_{Y,Z}$ y $A_{X,Z}$ son equivalentes en filas. Emplearemos el superíndice r para referirnos a cualquier matriz reducida si no hay posibilidad de confusión sobre la reducida a la que nos referimos. Así A^r simboliza una reducida de la matriz A .

R1// Sean $A_{X,Y}$, $B_{Y,Z}$ matrices tales que $A.B=0$. Entonces $\text{rg}(A) + \text{rg}(B) \leq \text{card}(Y)$.

Dem.: Definimos un homomorfismo de espacios vectoriales $f: K^Y \rightarrow K^X$ escribiendo $f: w_Y \mapsto A.w_Y$. De acuerdo con un conocido resultado de la teoría de espacios vectoriales tenemos:

$$\dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f) = \dim(K^Y)$$

En nuestro caso $\text{Im } f$ está generado por los vectores columna de A . Por lo tanto $\dim(\text{Im } f) = \text{rg}(A)$. Ya hemos visto que $\dim(K^Y) = \text{card}(Y)$. Por último para cada $j \in Z$ tenemos $f(B.\delta_{j^p}) = 0$. Es decir, los vectores columna de B pertenecen a $\text{Ker } f$. El subespacio de K^Y

engendrado por ellos está contenido en $\text{Ker } f$. De ahí $\text{rg}(B) \leq \dim(\text{Ker } f)$. \square

* Decimos que el par de matrices (A_{xy}, B_{yz}) es ortogonal si $A \cdot B = 0$ y $\text{rg}(A) + \text{rg}(B) = \text{card}(Y)$. Si el par (A, B) es ortogonal, el par $({}^c B, {}^c A)$ lo es también. Sea A'_{xy} una matriz equivalente en filas a A . Si el par (A, B) es ortogonal el par (A', B) lo es también.

R2// Sea (A_{xy}, B_{yz}) un par de matrices ortogonales. Para cada $w \in K^Y$ son equivalentes las relaciones siguientes:

i) $A \cdot w = 0$

ii) Existe un $v \in K^Z$ tal que $w = B \cdot v$

Dem.: De la demostración de R1 se deduce que las columnas de B engendran $\text{Ker}(f)$, siendo f el homomorfismo allí definido. Si $A \cdot w = 0$, entonces $w \in \text{Ker}(f)$ y w es combinación lineal de las columnas de B . Por otra parte, si $w = B \cdot v$, entonces $A \cdot w = 0$. \square

R3// Sean A_{xy}, B_{yz}, C_{yt} matrices tales que el par (A, B) es ortogonal y $A \cdot C = 0$. Entonces las columnas de C son combinación lineal de las de B , es decir existe una matriz D tal que $C = B \cdot D$.

Dem.: Para cada $k \in T$ se tiene $A \cdot (C \cdot \delta_k^t) = 0$. En consecuencia, existe un vector w_k^t tal que $C \cdot \delta_k^t = B \cdot w_k^t$ [R2]. Definimos una matriz D_{yt} poniendo $D \cdot \delta_k^t = w_k^t$ para todo $k \in T$. \square

R4// Sea A_{xy} una matriz. Existe una cierta matriz B_{yz} tal que el par (A, B) es ortogonal.

Dem.: Si $A = 0$, basta con poner $Z = Y$ y $B_{yz} = 1_Y$. Si $A \neq 0$, sea A_{sx} una reducida de A . Si $\text{card}(S) = \text{card}(Y)$, elegimos un alfabeto Z arbitrario y definimos $B_{yz} = 0$. Si, por último, $\text{card}(S) < \text{card}(Y)$, existe un cierto $T \subset Y$ tal que $\text{card}(T) = \text{card}(S)$ y que la matriz A_{tx} es invertible. Ponemos $Z = Y - S$. Entonces $Z \neq \emptyset$. La matriz B_{yz} definida: $B_{tz} = -A_{st}^{-1} \cdot A_{sz}$, $B_{zz} = 1_Z$ es la matriz buscada. \square

* Sean A_{xy} una matriz, $\{Y_1, Y_2\}$ una partición de Y , $A_{x \cdot y}$ una reducida de A_{xy} y $X_0 = X - X'$. Mediante transformaciones elementales de filas de la matriz A podemos obtener una nueva matriz B_{xy} equivalente en filas a A_{xy} definida por la partición:

$$B = \begin{matrix} & Y_1 & Y_2 \\ X_0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ X_1 & \begin{bmatrix} B_{x_1 y_1} & 0 \end{bmatrix} \\ X_2 & \begin{bmatrix} A_{x_2 y_1} & A_{x_2 y_2} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Tal que $A_{x_2 y_2}$ es una reducida de $A_{x y_2}$ y $\text{rg}(B_{x_1 y_1}) = \text{card}(X_1)$. El conjunto de las transformaciones elementales de filas de A para obtener la matriz B equivale al producto $B = M \cdot A$, en donde M es una matriz cuadrada no singular. Ponemos $X'' = X_0 U X_1$. Puede demostrarse fácilmente que el par $(M_{x'' x}, A_{x y_2})$ es ortogonal y que $M_{x'' x} \cdot A_{x y_1} = B_{x'' y_1}$.

Por inducción, sea $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ una partición de Y . Existe una partición $\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$ de X y una matriz $B_{x y}$ equivalente en filas a A que admite una partición del tipo:

$$B = \begin{matrix} & Y_1 & Y_2 & Y_3 & \dots & Y_n \\ X_0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ X_1 & \begin{bmatrix} B^{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ X_2 & \begin{bmatrix} B^{21} & B^{22} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \dots & \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \\ X_n & \begin{bmatrix} B^{n1} & B^{n2} & B^{n3} & \dots & B^{nn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

tal que para todo índice i se tiene $\text{rg}(B^{i1}) = \text{card}(X_i)$. Decimos entonces que B es una equivalente **escalonada** de A .

2.3.-GRAFO ORIENTADO DE LA RED

Orientar un dispositivo de dos terminales equivale a establecer un orden entre sus terminales. Sea un dispositivo con terminales t y t' . Entre sus terminales hay dos ordenaciones posibles descritas por los pares orientados (t, t') y (t', t) . Elegimos arbitrariamente uno de los dos. Al par elegido le denominamos **arco**. Un arco es, por tanto, un par ordenado de terminales de una arista.

Denominamos **grafo orientado** de la red al cuarteto $G' = (T, R, N, \nu)$, en donde T , N y ν son los mismos del grafo no orientado y R es el conjunto de arcos, es decir un conjunto de pares ordenados de terminales elegidos uno por cada arista. R es,

por tanto, un subconjunto de $T \times T$. Decimos que el grafo no orientado se obtiene a partir del orientado **despojando** a éste último de su orientación, y que se obtiene una arista **despojando** a un arco de su orientación. Dados un arco $a'=(t,t')$, el conjunto de arcos R y el grafo orientado $G=(T,R,N,\nu)$, escribimos respectivamente $la'=(t,t')$, $A=|R|$ y $|G|=(T,A,N,\nu)$ la arista, el conjunto de aristas y el grafo no orientado.

Sea (t',t'') un arco. Decimos que t' es el **primer terminal** del arco y t'' el **segundo**. Definimos sendas proyecciones $n_1:R \rightarrow T$ y $n_2:R \rightarrow T$ que hacen corresponder a cada arco su primer y su segundo terminal respectivamente. Al nudo de G conectado al primer terminal del arco le llamamos **origen** del arco y al conectado al segundo **final** del arco. Definimos las aplicaciones $v_1=v \circ n_1$ y $v_2=v \circ n_2$, que hacen corresponder a cada arco su origen y su final respectivamente. En la fig.2 mostramos una representación gráfica de la red de la fig.1. Una flecha entre dos terminales indica la orientación del arco, dirigida del primer al segundo terminal. Se tiene:

$$R=\{(1,2), (3,4), (5,6), \dots, (20,19)\}$$

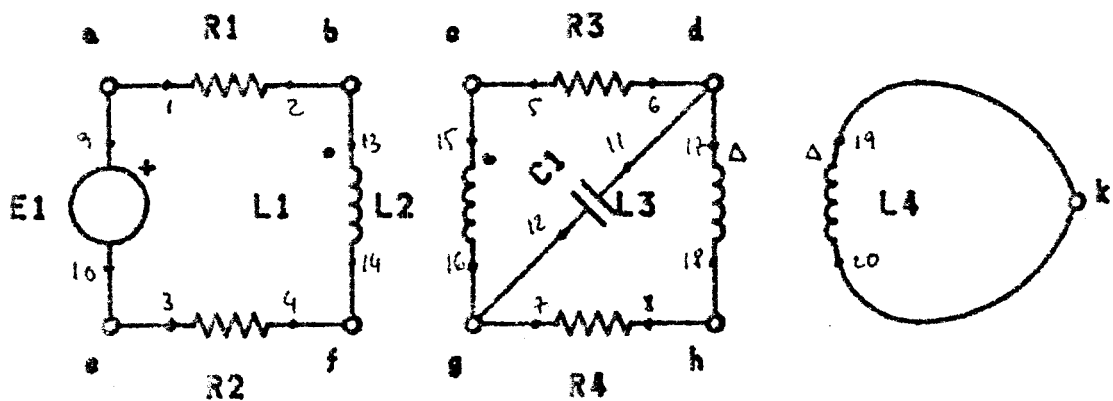


FIGURA 2.1

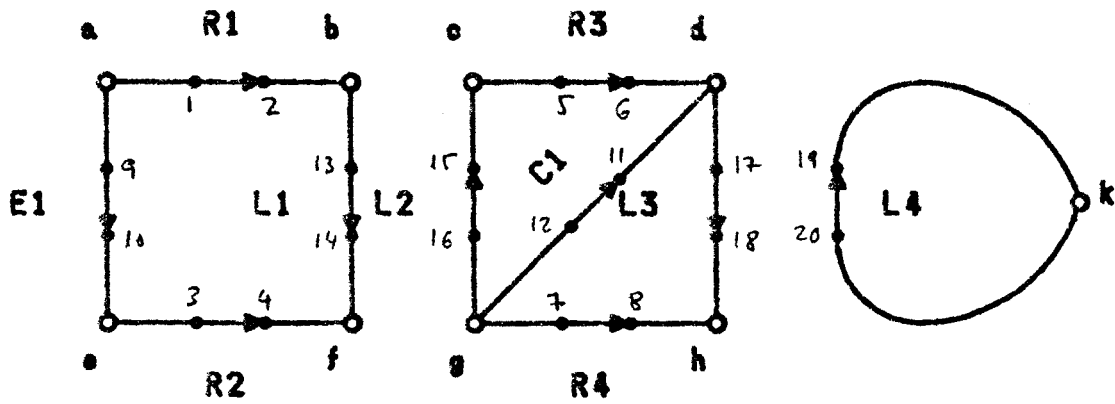


FIGURA 2.2

En la fig.3 mostramos un diagrama simplificado en el cual se omiten los terminales. En este caso la flecha va dirigida del origen al final del arco. Tal diagrama se denomina **grafo lineal orientado** de la red. Como en el caso de las aristas, es costumbre asignar nombres simples a los arcos, en vez de citar el par de terminales que los componen. Así hemos elegido:

$$R1=(1,2), R2=(3,4), R3=(5,6), \dots, L4=(20,19)$$

Por lo tanto, en forma abreviada tenemos:

$$R=\{R1,R2,R3,R4,E1,C1,L1,L2,L3,L4\}$$

Las funciones v_1 y v_2 son:

	R1	R2	R3	R4	E1	C1	L1	L2	L3	L4
v_1	a	e	c	g	a	g	b	g	d	k
v_2	b	f	d	h	e	d	f	c	h	k

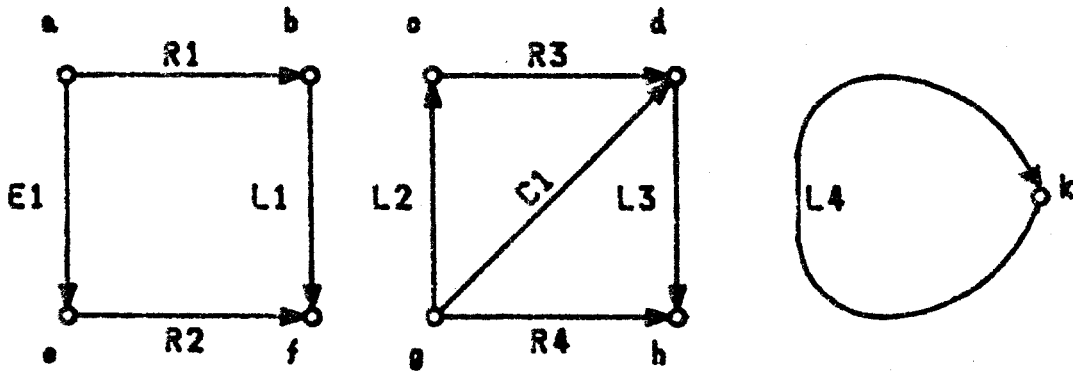


FIGURA 2.3

Se define una **orientación** de un bucle $G=(T,R,N,v)$ eligiendo arbitrariamente un itinerario (t_i) infinito sobre G . Para cada $a \in R$ sea $t_i = n_i(a)$. De acuerdo con 1R8, existen infinitos índices k tales que $t_i = t$ y todos ellos tienen la misma paridad. Decimos que a tiene la misma **orientación** que el bucle si k es par, y que tiene la **contraria** si k es impar. En el caso de los bucles fundamentales se elige como terminal t_0 del itinerario el primer terminal del único enlace que forma parte del bucle. En la fig.4 mostramos un bosque maximal del grafo de la fig.3 y en la fig.5 se muestran en línea llena los arcos del bucle fundamental correspondiente al enlace $L2$ con sus orientaciones con respecto a dicho bucle.

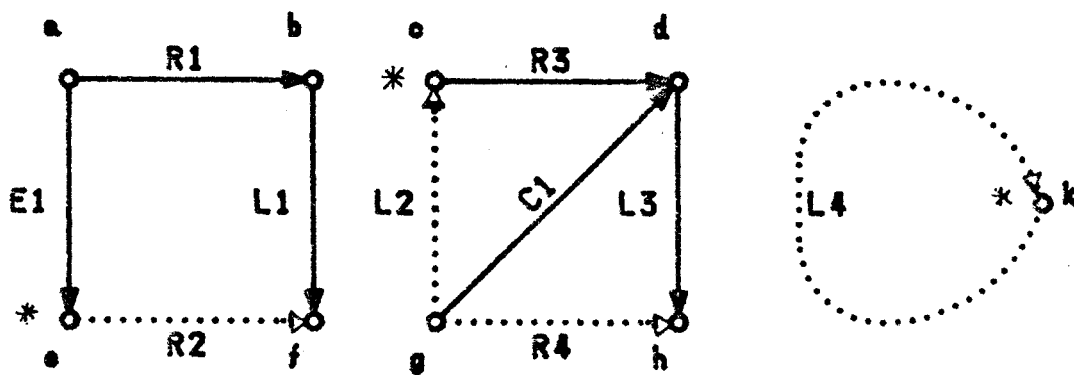


FIGURA 2.4

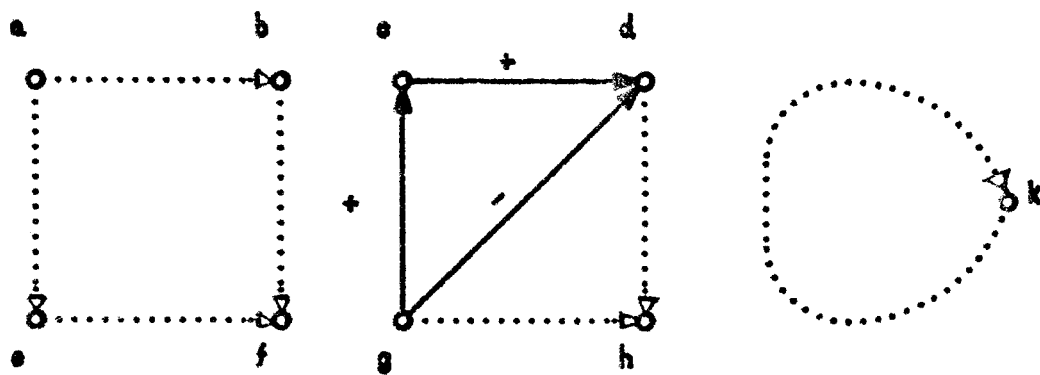


FIGURA 2.5

Se define una **orientación** de un corte con extremos N' y N'' eligiendo uno de los pares ordenados (N', N'') ó (N'', N') . Al primer conjunto del par elegido le denominamos **origen** del corte, y al segundo **final** del corte. Decimos que un arco del corte tiene la misma **orientación** que el corte si el origen del arco pertenece al origen del corte, y que tiene la **contraria** si el origen del arco pertenece al final del corte. En el caso de los cortes fundamentales se elige como origen del corte el extremo del corte al cual pertenece el origen del único ramal que forma parte del corte. En la fig.6 se muestran dibujadas en línea llena los arcos

del corte fundamental del grafo de la fig.3 correspondientes al ramal R1 del bosque fundamental de la fig.4, con sus orientaciones respecto a dicho corte.

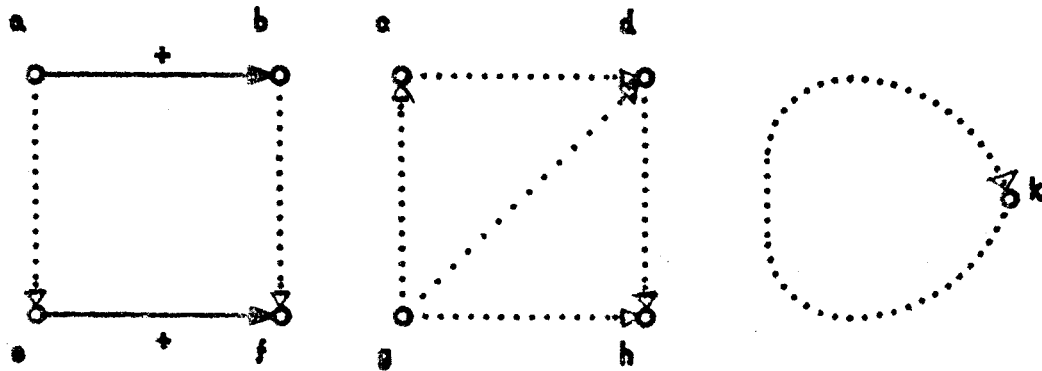


FIGURA 2.6

Se define una **orientación** de un camino con nudos terminales p y p' eligiendo uno de los dos pares ordenados (p, p') ó (p', p) . Al primer elemento del par elegido le llamamos **origen** del camino y al otro **final** del camino. Sea (p, p') el par elegido. De acuerdo con [1R27] existe un itinerario (t_i) del camino tal que t_0 es el terminal conectado a p , y con las propiedades que allí se citan. La **orientación** de cada arco del camino con respecto al camino se define entonces de modo similar al caso del bucle empleando dicho itinerario. En el caso de los caminos fundamentales se elige como final del camino el nudo de referencia. En la fig.7 se muestran en línea llena los arcos pertenecientes al camino fundamental correspondiente al nudo g del grafo de la fig.3, con respecto al bosque maximal de la fig.4 y al conjunto de nudos de referencia marcados con (*). Al lado de cada arco del camino se ha señalado su orientación respecto al mismo.

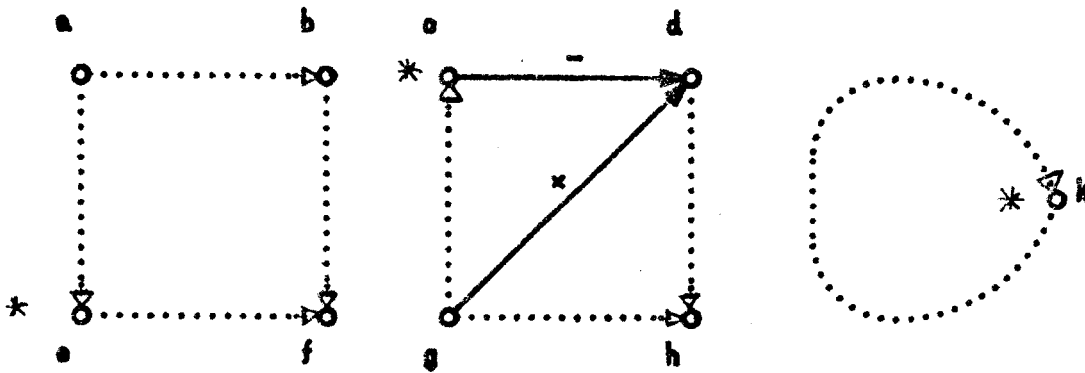


FIGURA 2.7

ADVERTENCIA:

En lo que resta de este capítulo nos referiremos a un grafo orientado $G=(T,R,N,v)$, a un cierto bosque maximal G' de G y a un cierto conjunto N_+ de nudos de referencia de G . Llamaremos B , Q , K , C , R_+ y R_- respectivamente, a los conjuntos de bucles, de cortes, de caminos, de clases de conexión, de ramales y de enlaces de G . Escribiremos $N_+=N-N_-$, $r=\text{card}(R)$, $n=\text{card}(N)$ y $m=\text{card}(C)$. Se supondrá que los bucles, cortes y caminos están convenientemente orientados. También emplearemos algunas de estas letras para nombrar a ciertas matrices. Esperamos que el contexto permita distinguir el significado de cada símbolo empleado.

2.4.-LAS MATRICES A, B, Q, K Y C DE UN GRAFO ORIENTADO

Definimos una matriz A_{NR} de incidencia nudos-arcos de G mediante la relación siguiente:

$$a_{p,a} = \delta_{p^1(a)} - \delta_{p^2(a)}, \text{ para cualesquiera } p \in N, a \in R.$$

Es decir, i) $a_{p,a} = 0$ si a es un lazo o p no es un extremo de a ;

ii) $a_{pa}=1$ si a no es un lazo y p es el origen de a ; iii) $a_{pa}=-1$ si a no es un lazo y p es el final de a . De acuerdo con la definición para todo $a \in R$ se verifica: $A \cdot \delta_a = \delta_{R^1(a)} - \delta_{R^2(a)}$. Así, para el grafo de la fig.3 tenemos:

$$\begin{array}{c}
 R1 \ R2 \ R3 \ R4 \ E1 \ C1 \ L1 \ L2 \ L3 \ L4 \\
 \\
 \begin{array}{c}
 a \\
 b \\
 c \\
 d \\
 e \\
 f \\
 g \\
 h \\
 k
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccccccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \end{array}$$

Definimos una matriz C_{CN} de incidencia clases de conexión-nodos de G escribiendo:

$$\delta_{E,C} = \delta_N, \text{ para toda } c \in C$$

Es decir, i) $c_{cp}=1$ si el nudo p pertenece a la clase de conexión C y ii) $c_{cp}=0$ si no pertenece. Así para el grafo de la fig.3 tenemos:

$$\begin{array}{c}
 a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad h \quad k \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \{a,b,e,f\} \\
 \{c,d,g,h\} \\
 \{k\}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccccccccc}
 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \end{array}$$

Sean ahora x un bucle, corte o camino de G y a un arco de G . Definimos una función de orientación relativa $sg(a,x)$ del arco a con respecto a cualquier objeto x de los antes citados escribiendo: i) $sg(a,x)=0$ si a no pertenece a x , ii) $sg(a,x)=1$, si a pertenece a x y tiene su misma orientación y iii) $sg(a,x)=-1$, si a pertenece a x y tiene orientación opuesta a éste.

Definimos una matriz B_{BR} de incidencia bucles-arcos de G

escribiendo: $b_{a,b} = sg(a,b)$ para cualesquiera $a \in R$, $b \in B$. Así para el grafo de la fig.8 tenemos, identificando los bucles por las aristas que los constituyen:

$$\begin{array}{c}
 R1 \ R2 \ R3 \ R4 \ E1 \ C1 \ L1 \ L2 \ L3 \ L4 \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 \{E1, R1, L1, R2\} \\
 \{L2, R3, L3, R4\} \\
 \{L2, R3, C1\} \\
 \{C1, L3, R4\} \\
 \{L4\}
 \end{array} \right\} \begin{bmatrix}
 -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Definimos una matriz Q_{GR} de incidencia cortes-arcos de G escribiendo: $q_{a,q} = sg(a,q)$ para cualesquiera $a \in R$, $q \in Q$. Así para el grafo de la fig.8 tenemos, identificando cada corte por el conjunto de nudos origen del mismo:

$$\begin{array}{c}
 R1 \ R2 \ R3 \ R4 \ E1 \ C1 \ L1 \ L2 \ L3 \ L4 \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 \{a\} \\
 \{a,b\} \\
 \{a,b,c\} \\
 \{a,b,c,d\} \\
 \{a,b,c,d,e\} \\
 \{a,b,c,d,e,f\} \\
 \{a,b,c,d,e,f,g\} \\
 \dots\dots\dots
 \end{array} \right\} \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

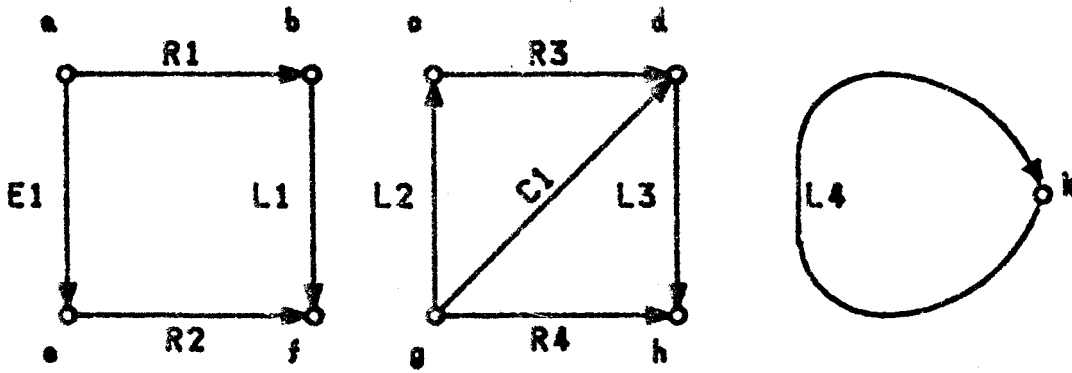


FIGURA 2.8

Definimos una matriz K_{KR} de **incidencia caminos-arcos** de G escribiendo: $k_{ka} = sg(a, k)$ para cualesquiera $a \in R, k \in K$. Así para el grafo de la fig.8 tenemos, identificando cada camino por el conjunto de arcos que lo constituyen:

	R1	R2	R3	R4	E1	C1	L1	L2	L3	L4
{R1}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
{R1, L1}	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
{R1, L1, R2}	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0
{R2}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
{R2, E1}	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
{R3, C1, R4}	0	0	1	1	0	-1	0	0	0	0
.....

2.5.-MATRICES FUNDAMENTALES DE UN GRAFO ORIENTADO

Definimos una matriz Q_{aR}^f , a la que denominamos **matriz de cortes fundamentales de G** , del siguiente modo: De acuerdo con §1.5 para cada $a \in R$, existe un y sólo un corte fundamental q de G que contenga al ramal a . Entonces escribimos:

$$\delta_{aR} \cdot Q_{aR}^f = \delta_{aR} \cdot Q_{aR}$$

Es decir, por definición la fila a de Q^f es igual a la fila q de Q_{GR} . La matriz Q^f está en consecuencia constituida por unas ciertas filas de la matriz Q . Por otra parte la matriz Q^f admite una partición del tipo:

$$R_1 \quad R_2$$

$$R_1 \quad 1_{R_1} \quad Q_{R_1 R_2}^f$$

En efecto, para cada ramal a de G existe un y sólo un corte fundamental de G que contenga a a . Dicho corte no contiene a ningún otro ramal de G y además tiene la misma orientación que a por definición de la orientación de los cortes fundamentales [§2.3]. En la fig.9 se muestra un grafo y un bosque maximal. A éstos les corresponde una matriz de cortes fundamentales:

R1 R3 E1 C1 L1 L3 R2 R4 L2 L4

$$\begin{array}{l}
 R1 \\
 R3 \\
 E1 \\
 C1 \\
 L1 \\
 L3
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

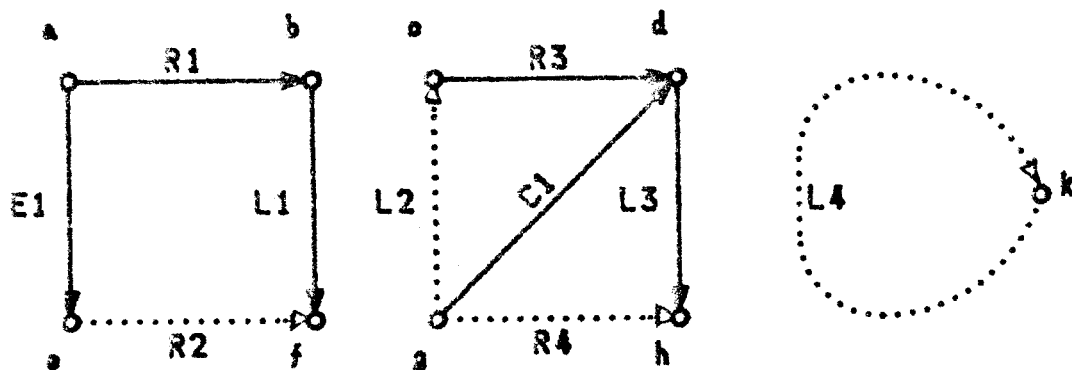


FIGURA 2.9

Definimos una matriz $B_{R_1 R_2}^f$, a la que denominamos **matriz de**

bucles fundamentales de G, del siguiente modo: De acuerdo con §1.6 para cada $a \in R_+$ existe un y sólo un bucle fundamental b de G que contenga al enlace a . Entonces escribimos:

$$\delta_{R_+} \cdot B_{R_+}^f = \delta_{B_+} \cdot B_{B_+}$$

Es decir, por definición la fila a de B^f es igual a la fila b de B_{B_+} . La matriz B^f está en consecuencia constituida por unas ciertas filas de la matriz B . Por otra parte la matriz B^f admite una partición del tipo:

$$R_+ \begin{bmatrix} R_+ & R_- \\ 1_{R_+} & B_{R_+}^f \end{bmatrix}$$

En efecto, para cada enlace a de G existe un y sólo un bucle fundamental de G que contenga a a . Dicho bucle no contiene a ningún otro enlace de G y además tiene la misma orientación que a , por definición de la orientación de los bucles fundamentales [§2.3]. Para el grafo y bosque maximal de la fig. 9 tenemos la matriz de bucles fundamentales siguiente:

R2 R4 L2 L4 R1 R3 E1 C1 L1 L3

$$\begin{array}{l} R2 \\ R4 \\ L2 \\ L4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definimos una matriz $K_{N_+}^f$, a la que denominamos **matriz de caminos fundamentales de G**, del siguiente modo: De acuerdo con §1.7 para cada $p \in N_+$ existe un y sólo un camino fundamental k de G que contenga con origen p . Entonces escribimos:

$$\delta_{N_+} \cdot K_{N_+}^f = \delta_{K_+} \cdot K_{K_+}$$

Es decir, por definición la fila p de K^f es igual a la fila k de K_{K_+} . La matriz K^f está en consecuencia constituida por unas ciertas filas de la matriz K .

Definimos una matriz $C_{N_+}^f$, a la que denominamos **matriz fundamental de conexión de G**, del siguiente modo: Por definición del conjunto N_+ para cada $p \in N_+$ existe una y sólo una $c \in C$ tal que pec . Entonces escribimos:

$$\delta R_r \cdot C_{N_r N}^f = \delta E_r \cdot C_{CN}$$

Es decir, por definición la fila p de C^f es igual a la fila c de C . La matriz C^f está en consecuencia constituida por unas ciertas filas de la matriz C . De acuerdo con la definición de los conjuntos C y N_r y de la matriz C , resulta que C^f admite una partición del tipo:

$$N_r \begin{bmatrix} N_r & N_f \\ 1_{N_r} & C_{N_r N_f}^f \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Para el grafo, bosque maximal y conjunto de nudos de referencia de la fig. 9 se tienen las siguientes matrices K^f y C^f :

$$K^f = \begin{matrix} & R1 & R2 & R3 & R4 & E1 & C1 & L1 & L2 & L3 & L4 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ d \\ f \\ g \\ h \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$C^f = \begin{matrix} & c & e & k & a & b & d & f & g & h & k \\ \begin{matrix} c \\ e \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2.6. -PROPIEDADES DE LAS MATRICES DEL GRAFO

R5// $rg(Q) \geq rg(Q^f) = n - m$; $rg(B) \geq rg(B^f) = r + m - n$; $rg(C) = rg(C^f) = m$.

Dem.: Las matrices Q^f , B^f y C^f están constituidas por filas de las matrices Q , B y C respectivamente, y contienen como submatrices a 1_{R_r} , 1_{R_e} y 1_{N_r} . De acuerdo con 1R1B $Card(R_r) = n - m$. \square

R6// Sean $N'CN$ y q un corte de G con origen N' . Entonces $\delta B.Q_{QR} = \delta N'.A_{NR}$. $rg(Q) \leq rg(A)$.

Dem.: De la definición de la matriz A resulta que para todo $a \in A$ se tiene

$$\begin{aligned} \delta N'.A_{NR}.\delta \bar{a} &= \delta N'.\delta K^1(\bar{a}) - \delta N'.\delta K^2(\bar{a}) \\ &= \delta K^1(\bar{a}) - \delta K^2(\bar{a}) \\ &= sg(a, q) \\ &= \delta B.Q_{QR}.\delta \bar{a} \end{aligned}$$

, como puede comprobar el lector. En consecuencia, toda fila de Q es combinación lineal de las filas de A , de ahí la segunda parte del enunciado. \square

R7// $C.A=0$; $\delta B.C=\delta N$; $\delta N.A=0$.

Dem.: Para cada $c \in C$ se tiene, de acuerdo con la definición de la matriz C :

$$\delta B.C.A = \delta N.A$$

Ahora bien, el corte q de G con origen c es vacío por definición de clase de conexión. Por lo tanto, aplicando [R6] resulta:

$$\begin{aligned} \delta B.C.A &= \delta B.Q \\ &= 0 \end{aligned}$$

De aquí $C.A=0$.

Por otra parte, para todo $p \in N$ se tiene:

$$\begin{aligned} \delta B.C.\delta_N p &= \sum_c \delta B.C.\delta_N p \quad (c \in C) \\ &= \sum_c \delta N.\delta_N p \\ &= \sum_c \delta N \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ya que p pertenece a una sola clase de conexión de G . De ahí: $\delta B.C=\delta N$. El resto es consecuencia de lo anterior. \square

R8// $rg(A)=rg(Q)=rg(Q^*)=n-m$. Las matrices A , Q y Q^* son equivalentes en filas. El par de matrices (C,A) es ortogonal.

Dem.: Dado que $C.A=0$ [R7] y que $rg(C)=m$ [R5] se tiene $rg(A) \leq n-m$ [R1]. Por lo tanto, $rg(A)=n-m$ [R5]. Por otra parte, $rg(Q) \geq n-m$ [R5] y las filas de Q son combinación lineal de las de A [R6]. De ahí el resto del enunciado. \square

R9// $A.^t B=0$; $Q.^t B=0$; $rg(B)=rg(B^*)=r+m-n$. Los pares de matrices

$(A, {}^tB)$, $(Q, {}^tB)$ y $(Q^f, {}^tB)$ son ortogonales. ${}^tB_{R^f, R^f} = -Q_{R^f, R^f}$.

Dem.: Pongamos $M = A \cdot {}^tB$. Para cualesquiera $p \in N$, $b \in B$ se tiene:

$$m_{pb} = \sum_{a \in R} a_{pa} \cdot b_{ba} \quad (a \in R)$$

Para p y b dados el sumatorio anterior se puede reducir al conjunto de índices $a \in R''$, siendo R'' el conjunto de arcos que pertenecen al bucle b , inciden en el nudo p y no son lazos. En efecto, si un arco a no cumple alguna de esas tres condiciones se tiene: $a_{pa} \cdot b_{ba} = 0$. Si R'' no es vacío, entonces el nudo p pertenece al bucle b , y hay exactamente dos terminales t y t' del bucle b conectados a p , los cuales pertenecen a dos arcos distintos del bucle b que inciden en p . Obsérvese que para todo $a \in R$ el producto $a_{pa} \cdot b_{ba}$ no depende de la orientación del arco a , ya que si adoptásemos para a la orientación opuesta entonces a_{pa} y b_{ba} cambiarían de signo simultáneamente. Sean a y a' los dos arcos de b que inciden en p . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que t y t' son respectivamente los primeros terminales de a y a' . Entonces $a_{pa} = a_{pa'} = 1$. Por otra parte, al estar conectados t y t' al mismo nudo, entonces ambos tienen paridades distintas con respecto al itinerario que define la orientación de b . Por lo tanto, $b_{ba} = -b_{ba'}$ y de aquí:

$$\begin{aligned} m_{pb} &= a_{pa} \cdot b_{ba} + a_{pa'} \cdot b_{ba'} \\ &= b_{ba} + b_{ba'} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en todos los casos $m_{pb} = 0$ y $A \cdot {}^tB = 0$. El resto es consecuencia de [R5], [R1], [R8] y de las propiedades de la ortogonalidad de matrices. \square

R10// Sea $N' \subset N$. Para que $A_{N', R}$ sea una reducida de la matriz A del grafo G es condición necesaria y suficiente que $N - N'$ sea un conjunto de nudos de referencia del grafo G .

Dem.: De acuerdo con [R7], la suma de las filas de la matriz A correspondientes a los nudos pertenecientes a una misma clase de conexión de G es nula. Esto equivale a decir que una cualquiera de dichas filas es combinación lineal de las restantes. En consecuencia para obtener una reducida de A hay que suprimir al menos una fila de A por cada clase de conexión de G . Si llevamos a cabo la supresión de una fila por cada clase de conexión de G

la submatriz resultante es equivalente en filas a A y tiene $n-m$ filas. De acuerdo con [R8] su rango es $n-m$. Por lo tanto es una reducida de A. El conjunto de nudos correspondientes a las filas suprimidas es evidentemente un conjunto de nudos de referencia del grafo G. Por lo tanto la condición es suficiente. Su necesidad se demuestra de modo análogo. □

R11// Sea $R'' \subset CR$. Para que las columnas R'' de la matriz A del grafo G sean linealmente independientes es condición necesaria y suficiente que el subgrafo cubriente de G que tiene el conjunto R'' de arcos sea un bosque.

Dem.: Que las columnas R'' de la matriz A sean linealmente independientes equivale a decir que $\text{rg}(A_{NR''}) = \text{card}(R'')$. Ahora bien, $A_{NR''}$ es la matriz de incidencia nudos-arcos del subgrafo citado en el enunciado. Sean r'' , n'' y m'' , respectivamente, los números de aristas, nudos y clases de conexión de dicho subgrafo. Se tiene $\text{rg}(A_{NR''}) = r'' = n'' - m''$ [R8]. De acuerdo con [1R15] y [1R18], para que se cumpla esta condición es necesario y suficiente que el subgrafo sea un bosque. □

R12// Sea k un camino de G con origen p y final p' . Se tiene:

$$\delta_k \cdot K \cdot A = \delta_R - \delta_{R'}$$

Dem.: Construimos un grafo G' añadiendo a G un arco a que tenga origen p' y final p . Sean R' el conjunto de arcos y A' , B' y K' las correspondientes matrices de G' . El camino k es un camino de G' . El camino k más el arco a constituyen un bucle b de G' [1R13]. Orientamos dicho bucle de modo que $\text{sg}(a, b) = +1$. Los arcos de k tienen entonces la misma orientación con respecto a k que con respecto a b . Por construcción de G' se tiene:

$$A_{NR} = A_{NR}$$

$$A_{NR} \cdot \delta_R = \delta_{R'} - \delta_R$$

$$\delta_{R'} \cdot B' = \delta_k \cdot K' + \delta_R$$

Por otra parte $B' \cdot A' = 0$ [R9]. De aquí:

$$\delta_{R'} \cdot B' \cdot A' = \delta_{R'} \cdot (B'_R \cdot A_{NR} + B'_a \cdot a) \cdot A'_{(ca)}$$

$$= \delta_k \cdot K \cdot A + \delta_{R'} - \delta_R$$

$$= 0$$

y, en definitiva

$$\delta K.K.^t A = \delta R - \delta R' : \square$$

$$R13 // K^f.^t A_{N+R} = 1_{N+};$$

$$K^f.^t A_{N+R} = -^t C_{N+R}^f; K_{N+R}^f = 0; K_{N+R}^f.^t A_{N+R} = 1_{N+}.$$

Dem.: Sea un $p \in N_+$. El camino fundamental k de p tiene origen p y final $p' \in N_-$, siendo p' el nudo de referencia perteneciente a la clase de conexión de p . De las definiciones resulta:

$$\delta R_+.K^f = \delta K.K$$

Aplicando [R12] se tenemos:

$$\delta R_+.K^f.^t A = \delta R - \delta R'$$

Dado que $p \in N_+$ y que $p' \in N_-$, al establecer las correspondientes particiones de A , se verifica:

$$\delta R_+.K^f.^t A_{N+R} = \delta R_+$$

$$\delta R_+.K^f.^t A_{N+R} = -\delta R'$$

De la primera relación resulta la primera parte del enunciado. Por otra parte, ya que p pertenece a la clase de conexión de p' se cumple:

$$\begin{aligned} \delta R' &= C_{N+R}^f . \delta R_+ \\ &= \delta R_+.^t C_{N+R}^f \end{aligned}$$

y de ahí el segundo resultado.

Dado que un camino fundamental no contiene ningún enlace se sigue que $K_{N+R}^f = 0$ y el resto es consecuencia de la primera parte. \square

2.7.-ALGUNAS APLICACIONES

Orientación de un bucle

Sean G un bucle y $a \in R$ un arco de G . Vamos a definir una orientación de G de modo que a tenga la misma orientación que G . Sean t el primer terminal de a , (t_i) un itinerario infinito sobre G tal que $t_0 = t$ y (a_i) y (p_i) las sucesiones de aristas (arcos) y nudos de G asociados a (t_i) . Por definición se tiene $a_0 = a$, $p_0 = v_1(a)$. Por lo tanto el itinerario (t_i) cumple las condiciones pedidas. En principio esta formulación tiene el inconveniente que obliga a manejar una sucesión de terminales. Este inconveniente

puede evitarse: Basta con utilizar 1R6 y 1R8 para construir las sucesiones (a_i) y (p_i) asociadas a un itinerario de G , tomando $a_0=a$ y $p_0=v_1(a)$ y finalizando el cálculo de términos de estas sucesiones en cuanto encontremos un nudo p_n tal que $p_n=p_0$. Estas sucesiones son únicas, ya que están asociadas al único itinerario que posee las propiedades pedidas. Para cada $a' \in R$ existe un y sólo un índice i , $0 \leq i < n$ tal que $a_i=a'$. Entonces, $sg(a', G)=+1$ si $v_1(a')=p_i$ y -1 en caso contrario. Este cálculo sólo requiere el conocimiento de las funciones v_1 y v_2 .

Orientación de un camino

Sean G un camino, $p \in N$ el origen de G y t el único terminal de G conectado a p . Se define un itinerario (t_i) sobre G tal que $t_0=t$. Se calculan las sucesiones asociadas (a_i) y (p_i) tomando en cuenta que $p_0=p$. El resto es similar al problema anterior.

Definición práctica del grafo orientado

Aunque los terminales juegan un papel básico en la definición de los grafos orientados, en la mayoría de los casos puede ignorarse su existencia. En tales circunstancias, para definir un grafo orientado basta con conocer los conjuntos R de arcos y N de nudos del mismo y las aplicaciones $v_1: R \rightarrow N$ y $v_2: R \rightarrow N$.

CAP. III : ECUACIONES DE KIRCHOFF DE LA RED ELECTRICA

=====

3.1.-LAS SEÑALES ELECTRICAS DE LA RED

Las señales eléctricas de una red son las tensiones e intensidades de los dispositivos que la constituyen. Algebraicamente caracterizaremos a las señales como elementos de un K -espacio vectorial V , siendo K un cuerpo conmutativo y $V \neq \{0\}$. Precisaremos esta definición con varios ejemplos.

a) Redes resistivas invariantes. -Son las que están constituidas por fuentes independientes de tensión y de intensidad y por resistencias y fuentes dependientes invariantes respecto al tiempo. Entonces tomamos $K=R$, siendo R el conjunto de los números reales, y V el conjunto de funciones reales ordinarias.

b) Redes lineales invariantes con señales generales. -Son aquellas en las cuales todas las relaciones entre tensiones e intensidades vienen definidas mediante ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes, siendo el tiempo la variable independiente. En este caso la caracterización de las señales puede hacerse considerando cada señal como una distribución o función generalizada del tiempo, en las cuales se incluyen no sólo las funciones reales ordinarias, sino también la función escalón, sus derivadas como distribución y sus retardos. En este caso adoptamos $V=F$, siendo F el conjunto de tales funciones. Nótese con la palabra 'señal' nos referimos a una función $f \in F$, y no al valor particular $f(t)$ que pueda tomar dicha función en el instante t , que incluso puede no estar definido. Ponemos en este caso $K=R(\delta)$, siendo éste el cuerpo de las fracciones de polinomios reales en la distribución δ de Dirac con

la operación producto de convolución.

c) Redes de continua en régimen permanente. -En este caso, cada tensión o intensidad de la red se puede caracterizar mediante un número real (que representa una función constante del tiempo). Entonces tomamos $K=V=R$.

d) Redes en régimen permanente senoidal. -Cada tensión o intensidad de una tal red se puede identificar mediante un fasor, es decir mediante un número complejo. Tomamos entonces $K=V=C$, siendo C el conjunto de los números complejos.

e) Redes lineales invariantes cuyas señales poseen una transformada de Laplace. -La clase de funciones generalizadas a las que nos hemos referido en el apdo. b) poseen una transformada de Laplace como distribuciones. Podemos caracterizar dichas señales por su transformada de Laplace. Escribimos entonces $V=L$, en donde L es el conjunto de transformadas. Por otra parte, en el dominio de Laplace las ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes se expresan mediante relaciones del tipo $F_2(s)=(P(s)/Q(s)).F_1(s)$, en donde $P(s)$ y $Q(s)$ son funciones polinomiales de la variable compleja s , con coeficientes reales. En consecuencia, podemos considerar a L como un espacio vectorial con respecto al cuerpo de las fracciones de polinomios reales en la variable s . Escribimos $K=R(s)$, siendo K el mencionado cuerpo.

En general, supondremos que K es una extensión de R , lo cual equivale a decir que R es un subcuerpo de K . En determinadas aplicaciones nos interesa que K sea una extensión de C y que V sea en consecuencia un C -espacio vectorial. Si no lo son, identificamos los elementos de K con los del conjunto $K'=K \times K$ del tipo $(k,0)$ y los elementos de V con los del conjunto $V'=V \times V$. Definimos la suma en estos conjuntos del modo habitual y para cualesquiera $k, k' \in K'$, $v \in V'$ escribimos

$$k.k' = (k_1.k'_1 - k_2.k'_2, k_1.k'_2 + k_2.k'_1)$$

$$k.v = (k_1.v_1 - k_2.v_2, k_1.v_2 + k_2.v_1)$$

siendo k_1, k'_1 y v_1 las correspondientes componentes.

Identificamos cada número complejo $k=k_1+jk_2$ con el elemento (k_1, k_2) de K' . Entonces K' es una extensión de \mathbb{C} y el K' -espacio vectorial V' es también un \mathbb{C} -espacio vectorial. Introducidas estas definiciones nombramos K y V los conjuntos así definidos.

Consideremos ahora un dispositivo eléctrico con los dos terminales t y t' . Las señales eléctricas asociadas a él son, en principio, las tensiones entre terminales $u_{t,t'}$ y $u_{t',t}$ y las intensidades de terminales j_t y $j_{t'}$, entendiendo las primeras como la tensión del primer terminal citado con respecto al segundo y las segundas como la intensidad que entra en el dispositivo por el terminal correspondiente. Por definición resulta $u_{t,t'} = -u_{t',t}$. Introduciendo la condición de que los dispositivos que vamos a considerar no almacenan cargas eléctricas efectivas, se tiene: $j_t + j_{t'} = 0$. Al orientar el dispositivo, eligiendo por ejemplo el arco $a=(t, t')$, podemos asociar una tensión u_a y una intensidad i_a al dispositivo tomando como tensión u_a la del primer terminal del arco a con respecto al segundo, es decir $u_a = u_{t,t'}$, y como intensidad i_a la del primer terminal del arco a , es decir $i_a = j_t$. En definitiva, hemos asociado al dispositivo una tensión y una intensidad a partir de la orientación definida por el arco a .

Para manejar los conceptos introducidos últimamente necesitaremos algunas definiciones y resultados, cuestión que se aborda en el párrafo siguiente.

3.2.-AMPLIACION DEL CONCEPTO DE VECTOR: VECTORES DE SEÑALES

Sea K un cuerpo conmutativo, V un K -espacio vectorial y X un alfabeto cualquiera. Denominamos **vector** v de elementos de V con índices en X a toda familia $(v_i)_x$ de elementos de V . Esta definición supone una ampliación de la establecida en §2.1. Escribimos V^X el conjunto de tales vectores. Las operaciones suma de vectores y multiplicación por un parámetro se definen de modo similar al realizado anteriormente. Con tales operaciones el

conjunto V^x adquiere una estructura de K -espacio vectorial. Igualmente se aplican en este caso el concepto de subvector y la partición de vectores, el producto de una matriz por un vector, el producto de un vector de K^x por un vector de V^x y los correspondientes convenios de escritura. Sin embargo, en este caso no tiene sentido definir el producto de vectores de V^x , ya que en general el conjunto V no tiene definido un producto. Dejamos al cuidado del lector el establecimiento de las propiedades de estas operaciones que, con la salvedad de la observación anterior, son análogas a las definidas en el capítulo precedente.

Consideremos ahora las tensiones del conjunto de dispositivos de la red. Siendo R el conjunto de arcos del grafo de la red resulta que dichas tensiones constituyen una familia $(u_\alpha)_R$ de elementos de un cierto K -espacio vectorial V . Tenemos así definido un vector u_R de tensiones de arcos o de ramas de la red, significando con la palabra rama un dispositivo orientado de la red. De forma semejante se define el vector i_R de intensidades de arcos o de ramas de la red.

Veamos algunos conceptos y resultados complementarios de los vectores últimamente definidos. Sea $w \in K^Y$. El conjunto de los $u \in V^Y$ tales que $w \cdot u = 0$ es un subespacio de V^Y . A la relación $w \cdot u = 0$ la denominamos una **ligadura lineal** sobre V^Y , o simplemente una **ligadura** de V^Y . De modo semejante, si $(w^i)_X$ es una familia finita de vectores de K^Y , el conjunto U de los $u \in V^Y$ tales que para todo $i \in X$, $w^i \cdot u = 0$ es un subespacio vectorial de V^Y . Definimos una matriz $A_{X \times Y}$ escribiendo $a_{ij} = w_j^i$ para cualesquiera $i \in X$, $j \in Y$. Es inmediato que U puede definirse también mediante la relación $A \cdot u = 0$. Decimos que A es una **matriz de ligaduras** del subespacio U . Sean $R \subset X$, $S, T \subset Y$ tales que $A_{R \times Y}$ es una reducida de A , las columnas T son una base del subespacio de V^R generado por las columnas de $A_{R \times Y}$ y $S = Y - T$. Entonces $\text{rg}(A) = \text{card}(R) = \text{card}(T)$. La matriz $A_{R \times T}$ es no singular. Por lo tanto, la relación $A \cdot u = 0$ equivale a:

$$u_T = -A_{R \times T}^{-1} \cdot A_{R \times S} \cdot u_S$$

Para cualesquiera valores de las variables u_j , $j \in S$ existe un y

sólo un $u \in U$ tal que dichas variables son componentes de dicho vector. Decimos entonces que el conjunto de variables S es una **base** del subespacio U definido por el conjunto de ligaduras anteriores. A $\text{card}(S)$ le llamamos **rango** de U , y escribimos $\text{rg}(U)$. Es inmediato que $\text{rg}(U) = \text{card}(Y) - \text{rg}(A)$. Por lo tanto, $\text{rg}(U)$ no depende del particular conjunto S que hemos empleado para definirlo. Resulta inmediato que $\text{rg}(A) = \dim(W)$, siendo W el subespacio de K^Y generado por la familia $(w^i)_x$. Dado que $\dim(K^Y) = \text{card}(Y)$ se tiene en definitiva: $\text{rg}(U) = \text{codim}(W)$. Por otra parte a cualquier matriz A_{xy} le podemos asociar una aplicación $f: V^Y \rightarrow V^X$ definida $f: u \mapsto A \cdot u$. Decimos que f es una **aplicación matricial** de V^Y en V^X . f es un homomorfismo de K -espacios vectoriales y el conjunto U definido anteriormente es su núcleo.

R1// Sean K un cuerpo conmutativo; V un K -espacio vectorial; A_{xy} y B_{yz} matrices con coeficientes en K y $u \in V^Y$, tales que el par (A, B) es ortogonal. Para que $A \cdot u = 0$ es condición necesaria y suficiente que exista un $v \in V^Z$ tal que $u = B \cdot v$. Si además $\text{rg}(B) = \text{card}(Z)$, entonces v es único. Supongamos $V \neq \{0\}$. Sea M_{zy} otra matriz. Si para todo $u \in V^Y$, la relación $A \cdot u = 0$ implica $M \cdot u = 0$ entonces las filas de M son combinación lineal de las filas de A .
Dem.: La condición es suficiente, ya que $A \cdot B = 0$ por definición. Veamos que es necesaria. Sean $R \subset X$, $S, T \subset Y$ tales que A_{Ry} es una reducida de A , $\{S, T\}$ es una partición de Y y las columnas T son una base del subespacio de V^R generado por las columnas de A_{Ry} . Entonces $\text{rg}(A) = \text{card}(R) = \text{card}(T)$. La matriz A_{RT} es no singular. Por lo tanto, la relación $A \cdot u = 0$ equivale a:

$$u_T = -A_{RT}^{-1} \cdot A_{RS} \cdot u_S$$

y de aquí

$$u = \begin{matrix} S \\ T \end{matrix} \begin{bmatrix} 1_S \\ -A_{RT}^{-1} \cdot A_{RS} \end{bmatrix} \cdot u_S$$

o bien, en forma abreviada, $u = C \cdot v_S \cdot u_S$. Dejamos al cuidado del lector la demostración de que el par (A, C) es ortogonal. En consecuencia, las columnas de C son combinación lineal de las de B [2R3]. Es decir, existe una matriz D_{zs} tal que $C = B \cdot D$ y, en definitiva:

$$u = C.u_B \\ = B.(D.u_B)$$

y poniendo $v=D.u_B$ se demuestra la necesidad.

Supongamos ahora que $u=B.v=B.v'$, entonces $B.(v-v')=0$. De acuerdo con lo anterior, si $E_{z \times}$ es una matriz tal que el par (B,E) es ortogonal existe un vector w tal que $v-v'=E.w$. Ahora bien, $rg(E)=card(Z)-rg(B)$ por la definición de ortogonalidad. En consecuencia, si $card(Z)=rg(B)$ entonces $rg(E)=0$, $E=0$ y $v=v'$. Por lo tanto, v es único.

Si $A.u=0$, existe un vector v tal que $u=B.v$ y recíprocamente. Entonces $M.B.v=0$ para todo v y $M.B=0$. Como el par $({}^tB, {}^tA)$ es ortogonal y ${}^tB.{}^tM=0$ existe una matriz D tal que ${}^tM={}^tA.D$. De aquí $M={}^tD.A.$ \square

3.3.-FORMULACION DE LAS ECUACIONES DE KIRCHOFF DE LA RED

ADVERTENCIA: En todo el resto de este capítulo nos referiremos a una red eléctrica con un grafo orientado $G=(T,R,N,\nu)$, con un bosque maximal G' y un conjunto N_r de nudos de referencia. Llamaremos B, Q, K, C, R_r y R_n respectivamente a los conjuntos de bucles, cortes, caminos y clases de conexión de G y a los ramales y enlaces de G' . Escribiremos $N_f=N-N_r$, $r=card(T)$, $n=card(N)$ y $m=card(G)$. Utilizaremos las matrices de G definidas en el capítulo precedente. Esperamos que el contexto permita distinguir el significado de cada símbolo empleado.

a) Primera ley de Kirchoff

Sea $p \in N$. Denominamos **intensidad j_p del nudo p** a la suma de las intensidades de los terminales de la red conectados a p . Las intensidades de nudos constituyen un **vector j_N de intensidades de nudos**. La primera ley de Kirchoff se puede definir del siguiente modo: "La intensidad de cada nudo de la red es nula". Es decir:

$$i) j_N = 0.$$

Veremos ahora varias formas equivalentes de esta relación:

R2// Sea A_{NR} la matriz de incidencia nodos-arcos del grafo de la red. Se tiene: $j = A \cdot i$.

Dem.: En efecto, llamemos j_t al vector de intensidades de terminales de la red. Por definición, para todo $p \in N$ se verifica:

$$j_p = \sum_t j_t \quad (t \in T \mid v(t) = p) \\ = \sum_t \delta_p^{v(t)} \cdot j_t \quad (t \in T)$$

Ahora bien, Existe una biyección $R \times \{1,2\} \rightarrow T$ definida:

$(a,k) \mapsto n_k(a)$. Si $t = n_k(a)$, la relación $p = v(t)$ equivale a $p = v_k(a)$.

Además $j_t = i_a$ si $k=1$ y $j_t = -i_a$ si $k=2$. En consecuencia:

$$j_p = \sum_a \delta_p^{v_1(a)} \cdot i_a - \sum_a \delta_p^{v_2(a)} \cdot i_a \quad (a \in R) \\ = \sum_a (\delta_p^{v_1(a)} - \delta_p^{v_2(a)}) \cdot i_a \quad (a \in R) \\ = A_p \cdot i_a \quad (a \in R). \square$$

Del resultado anterior se deriva la expresión equivalente:

$$ii) A \cdot i = 0.$$

Otras expresiones equivalentes de la primera ley son las siguientes:

$$iii) A^r \cdot i = 0.$$

$$iv) Q \cdot i = 0.$$

$$v) Q^r \cdot i = 0.$$

$$vi) Q^f \cdot i = 0.$$

$$vii) i_{R^c} = -Q_{R^c R}^f \cdot i_R$$

Las relaciones iii) a viii) resultan de la equivalencia entre las matrices A , A^r , Q , Q^r y Q^f [2R8], y de las propiedades de la matriz Q^f . La relación iv) significa que "la suma de las intensidades de las ramas de un corte, consideradas positivas en la dirección del corte, es nula."

$$viii) \text{ Existe un vector } i_{\text{B}} \text{ tal que } i = {}^t B \cdot i_{\text{B}}.$$

ix) Sea $B^r = B_B \cdot R$. Existe un vector i_B^r tal que $i = {}^t B^r \cdot i^r$. Además i^r es único para cada i .

Las relaciones viii) y ix) son consecuencia de la ortogonalidad de los pares de matrices $(A, {}^t B)$ y $(A, {}^t B^r)$ $[2R^T + R1]$. A los vectores i^r e i^r se les denomina **vectores de intensidades de bucles**.

$$x) i = {}^t B^f \cdot i_{R^e}$$

Esta relación tiene la misma justificación que las dos anteriores por la ortogonalidad del par $(A, {}^t B^f)$. Su significado es que las intensidades de los enlaces constituyen una base de las intensidades de las ramas de la red con respecto a la primera ley de Kirchoff.

$$xi) i_{R^e} = {}^t B_{R^e}^f \cdot i_{R^e}$$

Esta relación es otra manera de expresar la x), teniendo en cuenta las propiedades de la matriz B^f . Por otra parte, es idéntica a la v), como puede comprobar el lector.

Decimos que i_{R^e} es un vector de intensidades **kirchoffianas** de la red o un vector **kirchoffiano** de intensidades si verifica la primera ley de Kirchoff.

b) Segunda ley de Kirchoff

La definimos del siguiente modo: "Para todo bucle de la red, la suma de las tensiones de las ramas que constituyen el bucle, considerando dichas tensiones positivas si la orientación de la rama coincide con la del bucle, es nula". Esta definición se puede expresar: Para todo $b \in B$,

$$\sum_{a \in b} b_{a^*} \cdot u_a = 0 \quad (a \in R)$$

o bien, de forma sintética:

$$i) B \cdot u = 0.$$

Veremos ahora varias relaciones equivalentes a ésta.

$$ii) B^r \cdot u = 0.$$

$$iii) B^f \cdot u = 0.$$

$$iv) u_{Rr} = -B_{Rr}^f \cdot u_{Rr}.$$

Las relaciones ii) a iv) se derivan de la equivalencia en filas de las matrices B , B^r y B^f y de las propiedades de la matriz B^f .

$$v) \text{ Existe un vector } u'_0 \text{ tal que } u = {}^t Q \cdot u'.$$

$$vi) \text{ Sea } Q^r = Q_0 \cdot R. \text{ Existe un vector } u''_0 \text{ tal que } u = {}^t Q^r \cdot u''.$$

Para cada u , u'' es único.

Las relaciones v) y vi) se derivan de la ortogonalidad de los pares $(Q, {}^t B)$ y $(Q, {}^t B^r)$ [2R9+R1]. A los vectores u' y u'' se les denomina **vectores de tensiones de cortes**.

$$vii) u = {}^t Q^f \cdot u_{Rr}$$

$$viii) u_{Rr} = {}^t Q_{Rr}^f \cdot u_{Rr}.$$

La relación vii) se justifica como las v) y vi), habida cuenta de la ortogonalidad del par $(Q^f, {}^t B)$. Su significado es que las tensiones de los ramales de una red constituyen una base de las tensiones de las ramas de la red con respecto a la segunda ley de Kirchoff. La viii) se deduce de la vii) de acuerdo con las propiedades de la matriz Q^f .

$$ix) \text{ Existe un } v \in V^N \text{ tal que } u = {}^t A \cdot v.$$

x) Sean N_r un conjunto de nudos de referencia de G , $N_f = N - N_r$ y $A^r = A_{N_f R}$. Existe un vector v'_{N_f} tal que $u = {}^t A^r \cdot v'$.

Las relaciones ix) y x) resultan de la ortogonalidad de los pares $(A, {}^t B)$ y $(A^r, {}^t B)$. A los vectores v y v' se les denomina respectivamente, **vector de potenciales de nudos** y **vector de tensiones de nudos con respecto a los nudos de referencia** N_r de

la red. El vector v' es único para cada u .

Decimos que u_R es un vector de tensiones kirchoffianas de la red o un vector kirchoffiano de tensiones si verifica la segunda ley de Kirchoff.

3.4.-CARACTERIZACION DE LOS POTENCIALES Y DE LAS INTENSIDADES DE NUDOS

Salvo aviso en contra, todos los conceptos empleados en este epígrafe son los del epígrafe anterior.

Sean i_R , u_R , j_N y v_N los vectores de intensidades y tensiones de ramas y de potenciales e intensidades de nudos del grafo G y A_{NR} la matriz de incidencia nudos-arcos de G . Decimos que j (respectivamente u) **deriva** de i (resp. v) si $j=A.i$ (resp. $u=A.v$).

R3// Sean v_N un vector de potenciales de nudos y u_R un vector de tensiones de arcos que deriva de v . Se verifica:

i) Para todo $a \in R$, $u_a = v_{v_1(a)} - v_{v_2(a)}$. Significado: la tensión de una rama es la diferencia de potencial entre su origen y su final.

ii) Para que u_R derive de otro vector v_N'' de potenciales de nudos es condición necesaria y suficiente que exista un vector δ_N tal que: $v_N'' - v_N = C^t \delta$. Para que u_R derive de otro vector v_N'' de potenciales de nudos es condición necesaria y suficiente que exista un vector v_0 tal que: $v_N'' - v_N = C^t v_0$. Significado: Para que u derive de v'' es necesario y suficiente que la diferencia $v_p'' - v_p$ sea la misma para todos los nudos p pertenecientes a una misma clase de conexión de G . Sea un $v_0 \in V$. Si u deriva de V , entonces también deriva de $v + \delta_N v_0$. Significado: Sumándole a todos los potenciales v_p una misma cantidad arbitraria obtenemos un nuevo vector de potenciales de nudos del cual deriva u .

iii) u_R deriva de un vector v' de potenciales de nudos tal que: $v_N' = 0$. v' es único. Además v_N' es el vector de tensiones de

nudos con respecto a los nudos de referencia N_r y se cumple:
 $v_{N_r}^1 = K^f \cdot u$.

iv) Para cada vector \hat{v}_{N_r} existe un y sólo un vector de potenciales de nudos v'' del que deriva u y tal que tal que $v_{N_r}'' = \hat{v}$. Entonces, se cumple: $v_{N_r}^1 = K^f \cdot u + {}^t C_{N_r N_r}^f \cdot \hat{v}$.

Dem.: i) Dado que $u = {}^t A \cdot v$ se tiene:

$$\begin{aligned} u_{\alpha} &= \delta_{\alpha\beta} \cdot u \\ &= (\delta_{\alpha\beta} \cdot {}^t A) \cdot v \\ &= (A \cdot \delta_{\alpha\beta}) \cdot v \\ &= (\delta_{N_1}^1(\alpha) - \delta_{N_2}^2(\alpha)) \cdot v, \text{ por definición de } A \\ &= v_{N_1}(\alpha) - v_{N_2}(\alpha) \end{aligned}$$

ii) Por definición $u = {}^t A \cdot v = {}^t A \cdot v''$. De aquí, ${}^t A \cdot (v - v'') = 0$. El resto resulta de la ortogonalidad del par (C, A) [2R7+2R8+R1].

iii) De ii) se deduce que para todo \hat{v} , $v' = v + {}^t C^f \cdot \hat{v}$ es también un vector de potenciales de nudos del que deriva u . Ahora bien, de las propiedades de C^f resulta $v_{N_r}' = \hat{v} + v_{N_r}$. Eligiendo $\hat{v} = -v_{N_r}$ obtenemos un v' tal que $v_{N_r}' = 0$. Entonces, $u = {}^t A \cdot v' = {}^t A_{N_r R} \cdot v_{N_r}'$ y, aplicando [2R13] tenemos: $v_{N_r}^1 = K^f \cdot u$.

iv) Aplicando ii) resulta que para que v'' sea un vector de potenciales de nudos del que deriva u es necesario y suficiente que exista un vector \hat{v}_{N_r} tal que: $v'' = v' + {}^t C^f \cdot \hat{v}$, en donde v' es el de iii). Ahora bien, de las definiciones se deduce: $v_{N_r}'' = v_{N_r}' + \hat{v}$, y en definitiva $v_{N_r}'' = \hat{v}$. \square

R4// Sean i_R un vector de intensidades de ramas, no necesariamente kirchoffiano, j_N vector de intensidades de nudos derivado de i y C_{CN} la matriz de clases de conexiones del grafo G . Se verifica: $C \cdot j = 0$ y $\delta_N^N \cdot j = 0$.

Dem.: Es consecuencia inmediata de R2 y 2R7. \square

CAP. IV : EL SISTEMA DE ECUACIONES DE LA RED

=====

ADVERTENCIA: Salvo aviso en sentido contrario, en este capítulo se emplearán los símbolos definidos en los capítulos precedentes.

4.1.-LA RED PRIMARIA

Denominamos **red primaria** al conjunto de dispositivos de la red y **relaciones primarias** de la red a las existentes entre las señales asociadas a los dispositivos sin tener en cuenta las conexiones que la red establezca entre ellos. Así un condensador inicialmente descargado mantiene una relación en el dominio de Laplace entre sus señales asociadas del tipo $i_k = sCu_k$, sea cual fuere la red de la que forme parte. Supondremos que la red lineal se compone de dos tipos de dispositivos **básicos**: fuentes independientes y dispositivos lineales. Una **fuerza independiente de tensión** está caracterizada por una relación primaria del tipo $u_k = u_k^0$, en donde u_k^0 es una constante. De modo análogo se define una **fuerza independiente de intensidad** mediante una relación primaria del tipo $i_k = i_k^0$, siendo i_k^0 una constante. Las relaciones primarias de los **dispositivos lineales** vienen definidas por combinaciones lineales entre las tensiones e intensidades de los dispositivos implicados en su definición. En el dominio de Laplace, el condensador y las bobinas acopladas inicialmente relajados y las fuentes gobernadas lineales son dispositivos lineales.

Nos referiremos siempre a **modelos**, y no a dispositivos reales. El comportamiento de los dispositivos reales se aproxima a estos modelos en mayor o menor medida. En ciertos casos, el dispositivo real, aun siendo lineal, puede no admitir un modelo

de los tipos básicos (fuentes con impedancia interna, bobinas con resistencia, condensadores con pérdidas, etc.). Sin embargo, el comportamiento de estos dispositivos es equivalente al de una cierta agrupación de dispositivos básicos.

Existen relaciones primarias que llevan implícita una relación causa-efecto y otras que no. En el caso del condensador inicialmente descargado con capacidad no nula podemos someterlo a un control de tensión conectándolo a los bornes de una fuente independiente de tensión y entonces obtenemos como respuesta, en el dominio de Laplace, una intensidad $i_m = sCu_m$, o bien conectarlo a los bornes de una fuente independiente de intensidad y obtener como respuesta una tensión $u_m = (sC)^{-1}i_m$. Es decir, tanto la tensión como la intensidad del condensador pueden actuar como causa o excitación y entonces la otra variable actúa como efecto o respuesta. Decimos que la relación entre ambas es **bilateral** y la escribimos en la forma

$$i_m - sCu_m = 0$$

o bien, de modo más sintético

$$f(u_m, i_m) = 0$$

Como se puede apreciar f establece una ligadura entre las variables u_m e i_m y la denominamos **función de ligadura**.

Las funciones de ligadura pueden ser de más de dos variables, como en el caso de varias bobinas acopladas magnéticamente entre sí.

Consideremos ahora un tríodo ideal con impedancia de rejilla infinita, resistencia anódica nula y factor de amplificación k no nulo. Podemos aplicar una fuente independiente de tensión a la rejilla y obtener una tensión anódica k veces superior, pero no podemos aplicarla al ánodo y pretender con ello obtener una tensión de rejilla k veces inferior porque es físicamente imposible. En la relación

$$u_m = ku_r$$

existente entre la tensión u_r de rejilla y la tensión u_m anódica de tal dispositivo, la primera es siempre la causa y la segunda el efecto. Por ello decimos que es **unilateral** y de forma

sintética la escribimos:

$$u_a = f(u_r)$$

A la función f le llamamos **función de transferencia**. En general, aparecen relaciones unilaterales en la definición de las fuentes tanto dependientes como independientes. En el caso de una fuente de tensión independiente definida como se ha hecho más arriba, podemos considerar a la variable u_a como un efecto y a la constante u_r como una variable fijada externamente o causa. Sin embargo, hay que distinguir la realidad física de los modelos empleados para representarla. Así, a veces se representa un transformador ideal, que está definido mediante relaciones bilaterales, mediante fuentes dependientes. En este caso, las relaciones que definen a tales fuentes no son bilaterales. Igualmente las fuentes independientes que se utilizan para modelar condiciones iniciales de condensadores y bobinas no pueden considerarse como físicamente definidas mediante relaciones bilaterales.

4.2.-EL SISTEMA DE ECUACIONES DE LA RED LINEAL: UN EJEMPLO

Consideremos la red de la fig.1 y su grafo representado en la fig.2. Estamos interesados en obtener su solución general en el dominio de Laplace, bajo condiciones iniciales arbitrarias. Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

* Primera ley de Kirchoff:

i) $i_1 + i_2 = 0$

ii) $i_3 + i_4 = 0$

* Segunda ley de Kirchoff:

iii) $u_1 - u_2 = 0$

iv) $u_3 - u_4 = 0$

* Relaciones primarias bilaterales:

v) $u_4 - sLi_4 + Li_2 = 0$

* Relaciones primarias unilaterales:

vi) $u_1 = u_3$

vii) $u_2 = k u_3$

viii) $i_3 = -k i_2$

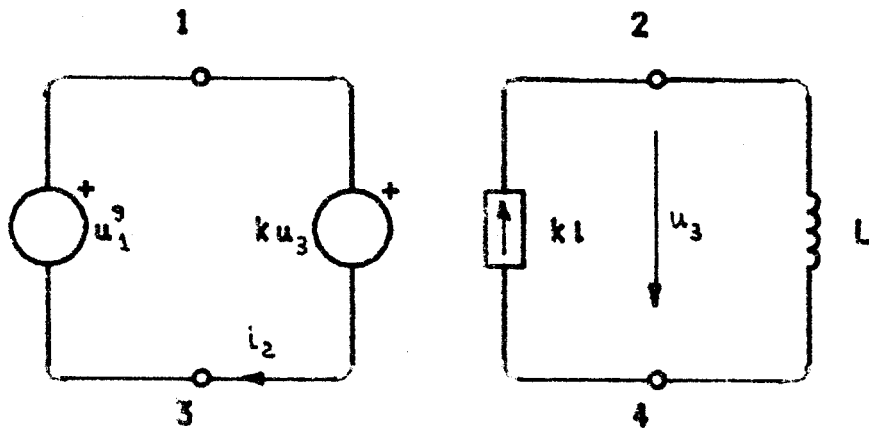


FIGURA 4.1

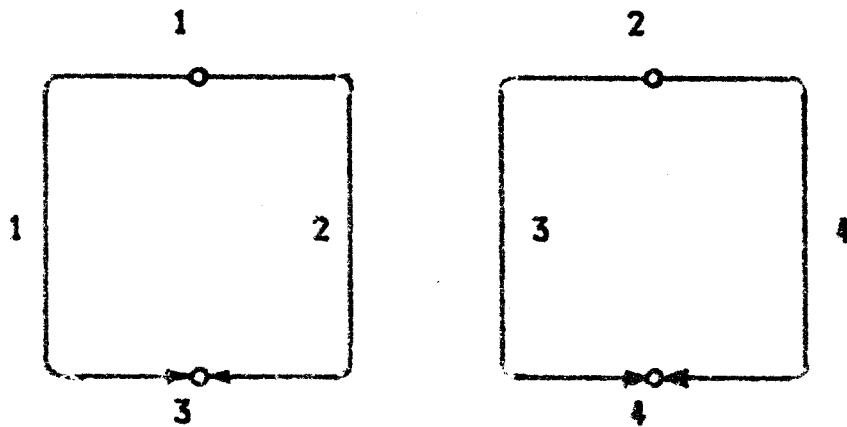


FIGURA 4.2

Nótese que no hemos seguido el convenio tradicional de representar con letras mayúsculas las transformadas, y que i_2 es la intensidad inicial de la bobina, supuesta indeterminada.

Distinguiremos dos soluciones de este sistema de ecuaciones. La primera consiste en considerarlo como un sistema ordinario de

ecuaciones de primer grado. El sistema resulta ser indeterminado y sus soluciones expresables en función de la variable indeterminada i_4 . Operando tenemos:

$$u_1 = u_2 = u^{\circ}_1$$

$$u_3 = u_4 = k^{-1} \cdot u^{\circ}_1$$

$$i_4 = (sL)^{-1} \cdot (Li_4 + k^{-1} \cdot u^{\circ}_1)$$

etc. Diremos que ésta es la **solución formal** del sistema de ecuaciones de la red.

Ahora bien, si examinamos de nuevo el sistema de ecuaciones teniendo en cuenta las relaciones causales que se establecen entre las señales la cuestión no es tan sencilla. En efecto, causalmente, las variables u_1 , u_2 e i_3 son respuestas a una excitación unilateral de otras variables, como lo muestran las relaciones vi) a viii). En consecuencia, las variables que figuran en el segundo miembro de estas relaciones no pueden, por medio de dichas relaciones, condicionar a las variables que figuran en los primeros miembros. Sin embargo u_1 , u_2 e i_3 se encuentran ligadas entre sí por el resto de relaciones de la red, en concreto por la relación iii), lo cual indirectamente condiciona a las excitaciones de las relaciones unilaterales, lo cual es imposible físicamente. La condición iii) es, pues, una relación que sólo puede resultar a posteriori, como consecuencia de las demás, y nunca a priori. Por lo tanto, para obtener una **solución causal** del sistema de ecuaciones de la red debemos:

- Separar todas las ligaduras bilaterales que condicionan a las variables-respuesta de las relaciones unilaterales;
- Obtener la solución ordinaria del sistema de ecuaciones resultante y
- Comprobar a posteriori si todas soluciones de b) verifican las ligaduras separadas en la fase a).

Así, para obtener la solución causal correspondiente a la red de la figura, separamos la relación iii) que es la única que liga a las variables citadas y resolvemos el sistema restante. Las soluciones de este sistema se pueden expresar en función de

dos variables indeterminadas: i_2 e i_1 . Se tiene:

$$\begin{aligned}i_2 &= -i_1 \\i_3 &= ki_1 \\i_4 &= -ki_1 \\u_4 &= -ksLi_1 - Li_2 \\u_3 &= -ksLi_1 - Li_2 \\u_2 &= -k^2sLi_1 - kLi_2\end{aligned}$$

etc. Es inmediato que la solución general de este sistema no cumple la condición iii). En consecuencia, la red no tiene solución causal. Resulta fácil ver que para llegar a esta conclusión no necesitábamos resolver el sistema. Basta con separar las ligaduras que afectan a las variables-respuesta de las relaciones unilaterales y comprobar si ese conjunto de ligaduras es combinación lineal de las restantes ecuaciones. En caso afirmativo, la solución causal es idéntica a la solución formal. Si no existe ésta, tampoco existe la otra. Puede demostrarse que ambas soluciones son idénticas si la red no tiene fuentes dependientes. Decimos entonces que la red es **bilateral**, aunque podría extenderse esta denominación a todos los casos en que exista solución causal.

En lo que sigue nos limitaremos al estudio de las soluciones formales del sistema de ecuaciones de la red. Llamamos **sistema formal** de ecuaciones de la red al que se obtiene prescindiendo de las consideraciones causales.

4.3.-EL SISTEMA FORMAL DE ECUACIONES DE LA RED LINEAL

De lo dicho en este capítulo y en el precedente, resulta que el sistema formal de ecuaciones de la red eléctrica lineal, está constituido por los siguientes grupos:

i) Primera ley de Kirchoff

$$A \cdot i = 0$$

O cualquier otra expresión equivalente.

ii) Segunda ley de Kirchoff

$$B.u=0$$

O cualquier otra expresión equivalente.

iii) Relaciones primarias de los dispositivos lineales

Llevando a cabo, en caso necesario, una transformación de la red pueden expresarse estas relaciones en la forma:

$$(i_Y | i_Z) = H_{LL} \cdot (u_Y | u_Z)$$

en donde Z_{CR} es el conjunto de ramas con impedancias o fuentes dependientes de tensión, Y_{CR} es el conjunto de ramas con admitancias o fuentes dependientes de intensidad, $L=Y_{UZ}$ y H es una matriz de parámetros híbridos. Esta formulación obliga a que cada fuente dependiente esté gobernada por la tensión de una rama Y o la intensidad de una rama Z . Si en la red original no sucede así se obtiene una red equivalente añadiéndole ramas de impedancia nula en serie con ciertas ramas de la red original o ramas de admitancia nula en paralelo con ciertas otras y transfiriendo el control de algunas fuentes dependientes a las nuevas ramas así creadas.

iv) Definición de las fuentes independientes de tensión

$$u_E = u^{\circ}_E$$

en donde E_{CR} es el conjunto de arcos con dispositivos de este tipo y u° es un vector constante.

v) Definición de las fuentes independientes de intensidad

$$i_J = i^{\circ}_J$$

en donde J_{CR} es el conjunto de arcos con dispositivos de este tipo y i° es un vector constante.

Vista ahora en su conjunto, la red resulta ser un conjunto de relaciones lineales que ligan a los vectores u_R e i_R . Al par (u, i) lo denominamos **régimen de la red**. Ciertas de estas variables, u°_E e i°_J actúan como entradas o excitaciones de la

red, aunque algunas de ellas sean propiamente condiciones iniciales. Por ello al par (u^0, i^0) , que podemos identificar con el vector $(u^0 | i^0)$ le llamamos **excitación formal de la red**, o simplemente **excitación de la red**. El cuarteto (i_e, u_o, u_i, i_i) es la **salida o respuesta de la red**.

Para escribir estas ecuaciones hemos supuesto que la red primaria está constituida por dispositivos básicos. Se pueden considerar, como es sabido, redes primarias constituidas por otro tipo de dispositivos, pero la que aquí adoptamos se adapta más a los propósitos de este trabajo y tiene carácter casi general, aunque a veces requiera una transformación de la red original consistente en la sustitución de ciertos dispositivos por una agrupación de dispositivos básicos. En el caso más general de red lineal, las ecuaciones iii), iv) y v) se sustituyen por una expresión del tipo:

$$M_{SR}^+ \cdot u_R + M_{SR}^- \cdot i_R = w_S^0$$

en donde S es un alfabeto apropiado, M^+ y M^- son matrices y w^0 es un vector constante.

4.4.-LAS SOLUCIONES DEL SISTEMA FORMAL DE ECUACIONES DE LA RED

En general, agrupando las ecuaciones de la red se llega a una expresión del tipo:

$$M_{XV} \cdot w_V = d_X$$

en donde M es una cierta matriz, d, un cierto vector y w un vector de incógnitas. Discutiremos ahora las soluciones de este sistema.

Sea M_{SX}^+ una matriz tal que el par (M^+, M) es ortogonal. Entonces, para que el sistema tenga solución es necesario y suficiente que $M^+ \cdot d = 0$ [R1]. Supongamos que se verifica esta relación. Sea w^0 una solución particular. Entonces, para cualquier otra solución w se tiene $M \cdot (w - w^0) = 0$. Como hemos visto en §4.1 $w - w^0 \in U$ siendo U un cierto subespacio de V^Y . A $\text{rg}(U)$ le llamamos **número de grados de indeterminación de la solución** y

significa que la solución general del sistema se expresa en función de un número de variables indeterminadas igual a $\text{rg}(U)$. Si $\text{rg}(U)=0$ el sistema sólo tiene una solución.

4.5.-SUBREDES MULTITERMINALES

Sea una red eléctrica S' con un grafo G' . Una **subred** S de S' es una parte de S' constituida por un conjunto de dispositivos y un conjunto de nudos de conexión de S' tales que todo dispositivo de S tiene conectados ambos terminales a nudos de S . De la definición se desprende que la subred posee un grafo G que es un subgrafo de G' . Decimos que la subred S de S' es **multiterminal** si el sistema de relaciones primarias de la red S' puede partirse en dos conjuntos: uno que relaciona a variables de S entre sí y otro que relaciona a variables de S' no pertenecientes a S entre sí. Con otras palabras, la última condición expresa que no existe ningún tipo de acoplamiento entre los dispositivos de S y los del resto de la red S' . Obsérvese que el sistema de relaciones primarias de la subred puede formularse de muy diversas maneras equivalentes entre sí. La definición de subred multiterminal debe entenderse en el sentido de que existe una cierta formulación del sistema de relaciones primarias que cumple las condiciones que allí se indican.

Clasificamos los nudos de la subred S en dos tipos: **internos**, que son los que sólo tienen conectados dispositivos pertenecientes a S y **terminales**, que tienen conectados dispositivos no pertenecientes a S . Conviene no confundir el concepto de nudo terminal de una subred definido aquí con el nudo terminal de un grafo. Esta clasificación establece una partición de N en dos conjuntos: I y T . Esperemos que el contexto permita distinguir este conjunto del conjunto T de terminales del grafo G . Las variables asociadas a los arcos de S son las de la red S' . Los potenciales de nudos de S son los de la red S' . En cambio, en general, la intensidad de un nudo q de S sólo es la de S' si el $q \in I$, ya que el paso de la red S' a la subred S implica la

supresión de los arcos no pertenecientes a S, junto con el mantenimiento de las tensiones e intensidades de los restantes. Si las intensidades de S' son kirchoffianas, las de S no tienen porqué serlo: ésta es la principal diferencia conceptual entre una red y una subred.

El sistema de ecuaciones de la subred multiterminal S se compone de los grupos siguientes:

i) Primera ley de Kirchoff: Las intensidades de los nudos interiores son nulas: $j_T=0$ y $j_N=A \cdot i_R$, siendo A la matriz de incidencia nudos-arcos.

ii) Segunda ley de Kirchoff: La forma más adecuada de plantearla es: Existe un vector v de potenciales de nudos de G tal que $u_R = {}^t A \cdot v_N$.

iii) Subred primaria: Adoptamos la formulación más general:

$$M_{XR} \cdot u_R + M_{XR} \cdot i_R = \omega_X$$

Siendo X un alfabeto apropiado.

Las variables asociadas a la subred S interactúan con el resto de las variables de la red S' exclusivamente a través de las variables comunes v_T y j_T . El significado de v_T es obvio. Por otra parte, para cada $p \in T$, j_p es la suma de las intensidades de los terminales de S conectados a q, la cual es igual, por aplicación de la primera ley de Kirchoff a la red S', a la suma de las intensidades suministradas a la subred S por los dispositivos de S' no pertenecientes a S a través del nudo p. El estudio de las subredes multiterminales tiene como finalidad el establecer las relaciones que ligan a las variables v_T y j_T con independencia de la red S' de la cual S forma parte. El sistema de ecuaciones de la subred se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -A_{TR} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{TR} & 0 \\ -{}^t A_{TR} & 0 & 1 & 0 & -{}^t A_{TR} \\ 0 & 0 & M_{XR} & M_{XR} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_T \\ j_T \\ u_R \\ i_R \\ v_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_X \end{bmatrix}$$

Poniendo $w=(v_T|j_T)$, $w^I=(u_R|i_R|v_I)$ y llamando \hat{w}° al vector de constantes, la relación anterior puede reescribirse:

$$M^T \cdot w + M^I \cdot w^I = \hat{w}^\circ$$

siendo M^T y M^I matrices resultantes de la partición de la anterior. Sea M° una matriz tal que el par (M°, M^I) sea ortogonal. Dado un valor del vector w , para que exista un w^I tal que el par (w, w^I) sea una solución del sistema de ecuaciones de la subred es necesario y suficiente que se verifique: $M \cdot w = w^\circ$, en donde $M = M^\circ \cdot M^T$ y $w^\circ = M^\circ \cdot \hat{w}^\circ$ [3R1]. Es decir, sea cual sea la red S' , para que w pueda ser un vector de variables terminales de la subred S es condición necesaria y suficiente que $M \cdot w = w^\circ$. En lo que sigue emplearemos la expresión 'subred multiterminal' para referirnos al conjunto de dispositivos que la constituyen y diremos simplemente **multiterminal** para referirnos a las relaciones entre las variables asociadas a los nudos terminales de la subred. A la relación

$$M \cdot w = w^\circ$$

la denominamos **ecuación del multiterminal** y a M **matriz de ligaduras** del multiterminal. En caso necesario emplearemos la partición: $M^V \cdot v_T + M^J \cdot j_T = w^\circ$, en vez de $M \cdot w = w^\circ$. Veamos ahora algunas propiedades de los multiterminales.

Sea C_{CN} la matriz de incidencia clases de conexión-nudos de la subred multiterminal S . A partir de la relación i) tenemos: $C_{CT} \cdot j_T = 0$ y $\delta_T^T \cdot j_T = 0$ [3R4]. Dicho con otras palabras: la suma de las intensidades de los nudos terminales de la subred pertenecientes a una misma clase de conexión y la suma de las intensidades de los nudos terminales son nulas.

Si (j_N, v_N, u_R) verifica las relaciones de la subred multiterminal entonces, para todo vector v° el nuevo conjunto de variables $(j_N, v_N + C \cdot v^\circ, u_R)$ también verifica las ecuaciones de la subred multiterminal [3R3]. En particular, si $M \cdot (v_T | j_T) = w^\circ$ tenemos para todo vector v° : $M \cdot (v_T + C_{CT} \cdot v^\circ | j_T) = w^\circ$. Es decir: Supuesto sometido el multiterminal a unas ciertas intensidades j_T y a unos potenciales v_T podemos variar en una misma cantidad arbitraria los potenciales de todos los nudos terminales

pertenecientes a una misma clase de conexión, manteniendo las mismas intensidades. Del mismo modo, sea $v_0 \in V$, si v es un vector de potenciales de los nudos terminales $v + \delta_T^T \cdot v_0$ lo es también correspondiente a las mismas intensidades de nudos terminales [3R3]. En otras palabras: podemos variar todos los potenciales de los nudos terminales en una misma cantidad manteniendo las mismas intensidades de dichos nudos.

Sea C' el conjunto de clases de conexión de la subred tales que su intersección con el conjunto T de nudos terminales no es vacía. Si $c \in C - C'$ entonces la fila c de la matriz $C_{C,T}$ es nula, como puede probar el lector a partir de las definiciones. Entonces la relación $C_{C,T} \cdot j_T = 0$ equivale a $C_{C',T} \cdot j_T = 0$, y para todo vector v_c^0 : ${}^c C_{C,T} \cdot v_c^0 = {}^c C_{C',T} \cdot v_c^0$. A la matriz $C_{C',T}$ le denominamos **matriz de conexiones de los terminales** de S . La matriz $C_{C',T}$ es la expresión de la partición C^0 del conjunto T en clases por la relación de conexión entre nudos de la subred S . A cada clase $c \in C'$ le corresponde una y sólo una clase $c' = c \cap T \in C^0$ de esta partición y reciprocamente. Para ciertos efectos podemos identificar a C' con C^0 . Las relaciones anteriormente obtenidas pueden escribirse:

iv) $C_{C',T} \cdot j_T = 0$; $\delta_T^T \cdot j_T = 0$

v) Si el par (v_T, j_T) verifica las relaciones del multiterminal entonces el par $(v_T + {}^c C_{C',T} \cdot v_c^0, j_T)$ también las verifica, para todo vector v_c^0 . En consecuencia: $M^Y \cdot {}^c C_{C',T} = 0$. Del mismo modo para todo $v_0 \in V$, el par $(v_T + \delta_T^T \cdot v_0, j_T)$ verifica igualmente las relaciones del multiterminal y $M^Y \cdot \delta_T^T = 0$.

Sea M^0 una matriz tal que el par (M^0, M) es ortogonal. Para que exista una solución de la ecuación $M \cdot w = w^0$ del multiterminal es necesario y suficiente que $M^0 \cdot w^0 = 0$. Sean W_1, X los conjuntos de índices de M y $X_2 \subset X$ tal que las columnas X_2 de X constituyen una base del espacio vectorial generado por las columnas de M . A partir de la ecuación del multiterminal tenemos la ecuación equivalente:

$$M_{W_1 X_2} \cdot W_{X_2} = W^0 - M_{W_1 X_1} \cdot W_{X_1}$$

Si la ecuación del multiterminal tiene solución puede reducirse a otra equivalente:

$$w_{x_2} = w^{1^{\circ}} + M_{x_2 \times x_1}^1 \cdot w_{x_1}$$

Decimos entonces que las w_i , $i \in X_1$ constituyen una **base de las variables** del multiterminal. Para cada valor de $w_{x_1} \in V^{x_1}$ existe una y sólo una solución de la ecuación del multiterminal. De los resultados iv) y v) se deduce para cualquier base de las variables del multiterminal lo siguiente:

vi) Por cada clase de conexión de los terminales del multiterminal existe al menos una intensidad de nudo terminal perteneciente a dicha clase que no pertenece a la base.

vii) Por cada clase de conexión de los terminales del multiterminal existe al menos un potencial de nudo terminal perteneciente a dicha clase que pertenece a la base.

Supongamos ahora que $w^{\circ} = 0$ y que exista una matriz $Y_{\tau\tau}$ tal que las relaciones: $M^v \cdot v_{\tau} + M^j \cdot j_{\tau} = 0$ y $j_{\tau} = Y \cdot v_{\tau}$ son equivalentes para cualesquiera valores de los vectores v y j . Entonces Y es la **matriz de admitancias** del multiterminal. Para todo v se verifica: $C_{\tau\tau} \cdot Y \cdot v = 0$ y de aquí: $C_{\tau\tau} \cdot Y = 0$. En otras palabras la suma de las filas de la matriz de admitancias correspondientes a los nudos terminales pertenecientes a una misma clase de conexión es nula. $\delta_{\tau\tau} \cdot Y = 0$. La suma de las filas de la matriz Y es nula. Igualmente para cualesquiera valores de v y del vector v° la relación $j = Y \cdot v$ implica $j = Y \cdot (v + {}^t C_{\tau\tau} \cdot v^{\circ})$. En consecuencia, para todo v° : $Y \cdot {}^t C_{\tau\tau} \cdot v^{\circ} = 0$ y $Y \cdot {}^t C_{\tau\tau} = 0$. Dicho de otro modo: la suma de las columnas de la matriz Y pertenecientes a los nudos terminales de una misma clase de conexión es nula. $Y \cdot \delta_{\tau\tau}^t = 0$. La suma de las columnas de la matriz Y es nula.

4.6.-APLICACION: MULTITERMINALES EQUIVALENTES

Se dice que dos multiterminales son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de nudos terminales y las relaciones entre sus variables terminales son equivalentes.

Sea ahora un multiterminal S con un conjunto T de nudos terminales, un conjunto C° de clases de conexión de aquéllos y una relación entre sus variables terminales:

$$M^v \cdot v_T + M^j \cdot j_T = w^\circ$$

Estamos interesados en averiguar bajo qué condiciones puede existir formalmente una subred S' equivalente a S y sin nudos interiores.

R1// Sean G un grafo con un conjunto de nudos T ; R y C los conjuntos de arcos y de clases de conexión de G ; A_{TR} y C_{CT} las matrices de incidencia nudos-arcos y clases de conexión-nudos de G ; S un multiterminal definido por la relación:

$$M_{XK} \cdot v_T + M_{XA} \cdot j_T = w_X$$

, siendo X un conjunto apropiado de índices; C° el conjunto de clases de conexión de los nudos terminales de S y $C_{C^\circ T}$ la matriz de conexión de los terminales de S . Si cada clase de conexión de S está contenida en una de G entonces existen matrices D y E tales que: $D \cdot C^\circ = C$ y $M^v = E \cdot A$. En particular, la matriz $E_{XK} = M_{XN} \cdot K^*$ siendo N un conjunto de nudos no de referencia de G y K^* una matriz de caminos fundamentales de G asociados a un bosque maximal y al mismo conjunto de nudos de referencia, cumple las condiciones pedidas.

Dem.: Definimos una matriz D_{CC° escribiendo para cualesquiera $c \in C$, $c' \in C^\circ$: $d_{cc'} = 1$ si $c \in c'$ y $d_{cc'} = 0$, en caso contrario. Sea $F = D \cdot C^\circ$. Para cualesquiera $c \in C$, $p \in T$ se tiene:

$$f_{cp} = \sum_{c' \in C^\circ} d_{cc'} \cdot \delta_{c'p} \quad (c' \in C^\circ)$$

Como C° es una partición de T existe una y sólo una $c' \in C^\circ$ tal que $p \in c'$. Por lo tanto, $f_{cp} = d_{cc'}$. Si $p \in c'$ entonces $c \cap c' \neq \emptyset$, y como C es una partición resulta $c' \subset c$ y $f_{cp} = 1$. Si $p \notin c'$, entonces $c' \not\subset c$ y $f_{cp} = 0$. De ahí que en todos los casos $f_{cp} = \delta_{cp}$ y $C = D \cdot C^\circ$.

De acuerdo con las propiedades de los multiterminales $M^v \cdot C^\circ = 0$ y:

$$\begin{aligned} M^v \cdot C &= M^v \cdot C^\circ \cdot D \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como el par de matrices (C, A) es ortogonal [2R8], el par (A, C) lo es también. Por lo tanto existe una matriz E tal que $M^v = E \cdot A$ [2R3].

Si existe una matriz E tal que $MY = E \cdot A$ entonces $MX_{N_f} = E \cdot A_{N_f R}$. La matriz $A_{N_f R}$ es una reducida de A [2R10]. En consecuencia existe una matriz F tal que $A = A_{N_f R} \cdot F$ y $MY = MX_{N_f} \cdot F$. Definimos una matriz $E = MX_{N_f} \cdot K^f$. Entonces $MX_{N_f} = E \cdot A_{N_f R}$ [2R13]. De ahí $MY = MX_{N_f} \cdot F = E \cdot A$. \square

R2// Sean S y G los anteriores. Si toda clase de conexión de los nudos terminales de S está contenida en una clase de conexión de G entonces para cada vector j_T que verifica las relaciones de S existe un vector i_R tal que $j = A \cdot i$.

Dem.: De acuerdo con R1, existe una matriz D tal que $C = D \cdot C^o$ [R1]. Si j verifica las relaciones de S : $C^o \cdot j = 0$, de acuerdo con las propiedades de los multiterminales, y $C \cdot j = D \cdot C^o \cdot j = 0$. Como el par de matrices (C, A) es ortogonal [2R8] se sigue que existe un i_R tal que $j = A \cdot i$ [3R1]. \square

R3// Sean S y G los anteriores. Si toda clase de conexión de los nudos terminales de S está contenida en una clase de conexión de G , entonces la subred S' que posee el grafo G y la subred primaria:

$$E \cdot u_R + M^j \cdot A \cdot i_R = w^o$$

en donde E es la de R1, es equivalente a S . En particular, si G es conexo existe siempre una subred S' con el grafo G equivalente a S .

Dem.: Es consecuencia de las propiedades generales de los multiterminales, de R1 y de R2. \square

4.5.- APLICACION: VARIABLES DE PARES DE TERMINALES DE UN MULTITERMINAL

Dado un multiterminal S con un conjunto T de nudos terminales y un conjunto C^o de clase de conexión de los nudos terminales vamos a definir unas subredes equivalentes a S .

Sea P el conjunto de los pares no orientados de elementos de T . Vamos a definir un grafo $G^o = (T^o, R^o, T, v^o)$. Para cada $aa \in P$ y cada pea escribimos p_a en vez del par (p, a) . Definimos T^o como el

conjunto de los p_a anteriores y A° el conjunto de los pares (p_a, p'_a) tales que $a = (p, p') \in P$. Entonces A° es una partición de T° en conjuntos con dos elementos cada uno. Orientamos arbitrariamente los pares constitutivos de A° y obtenemos un conjunto R° . A° es, en consecuencia, el conjunto de aristas de G° . Para cada $(p_a, p'_a) \in R^\circ$ escribimos pp' en vez de (p_a, p'_a) . pp' se puede interpretar como el par de terminales (p, p') de S . Definimos $v^\circ: p_a \rightarrow p$. G° es un grafo conexo, como puede probar el lector. Sean i_{R° , u_{R° los vectores de intensidades y tensiones de los arcos de G° . Para cada $pp' \in R^\circ$ denominamos a $i_{pp'}$ y $u_{pp'}$ **intensidad y tensión** del par (p, p') de terminales de S . Sea $n = \text{card}(T)$ y $m = \text{card}(C^\circ)$. A partir de $R3$ se derivan los resultados siguientes:

i) Existe una subred multiterminal equivalente a S y cuyo grafo es G° . $\text{Card}(R^\circ) = n(n-1)/2$.

ii) Sea G un bosque maximal de G° . Entonces G es conexo y tiene $n-1$ arcos [1R18]. Existe una subred multiterminal equivalente a S y cuyo grafo es G .

iii) Sea G' el subgrafo cubriente de G° definido por los arcos $pp' \in R^\circ$ tales que p y p' son nudos terminales conexos de S . Entonces el subgrafo G' tiene las mismas clases de conexión que S y existe una subred multiterminal equivalente a S y cuyo grafo es G' .

iv) Sea G'' un bosque maximal de G' . Entonces existe una subred multiterminal equivalente a S y cuyo grafo es G'' . G'' tiene $n-m$ arcos [1R18].

La utilidad de los resultados anteriores es la siguiente: Podemos sustituir cualquier multiterminal S por una subred equivalente S' con $n-1$ arcos y, si conocemos las clases de conexión de sus terminales, por una subred con $n-m$ arcos. En todo caso, la intensidad j_p del nudo terminal p es igual a la suma de las intensidades de los pares de terminales que son arcos del grafo y que inciden en p , con el signo correspondiente y la tensión del arco pp' de S' es igual a $v_p - v_{p'}$. En vez de caracterizar el multiterminal S por la relación entre sus

variables terminales, lo podemos caracterizar por la subred primaria de la S' equivalente. El número de variables involucradas en la definición de la subred primaria de S' es igual al doble del número de arcos de S' . El número de variables involucradas en la definición de las relaciones del multiterminal S es $2n$. La ventaja de emplear subredes equivalentes con los grafos G y G'' definidos más arriba es que su número de arcos es $<n$ y, en consecuencia, se puede caracterizar el multiterminal con un menor número de variables.

Ejemplo: En la fig. 3 se muestra una subred multiterminal S . Su conjunto de nudos terminales es $T=\{1,2,3,4,5,6\}$ y su conjunto de clases de conexión de sus nudos terminales es: $C^*=\{(1,4), (2,5), (3,6)\}$.

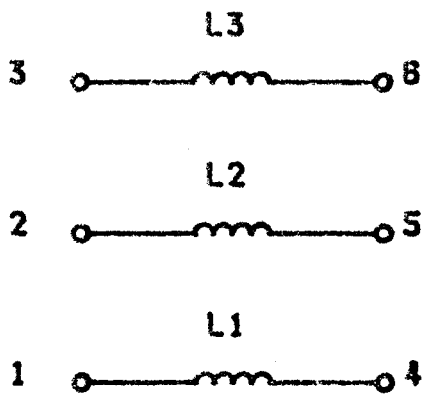


FIGURA 4.3

La ecuación del multiterminal S puede escribirse:

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot V_T + \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{bmatrix} sL_1 & sM_1 & sM_2 & 0 & 0 & 0 \\ sM_1 & sL_2 & sM_3 & 0 & 0 & 0 \\ sM_2 & sM_3 & sL_3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot j_T = 0 \end{matrix}
 \end{matrix}$$

Esta ecuación implica una relación entre 12 variables. Ahora bien, de acuerdo con lo dicho anteriormente existe una subred

equivalente de S con el grafo de la fig. 4a).

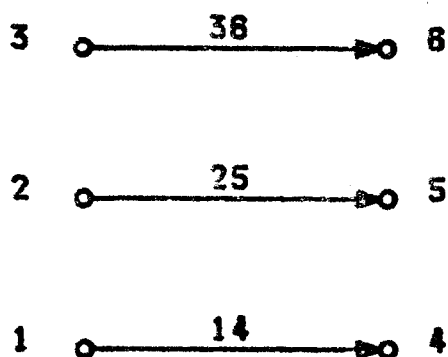


FIGURA 4.4 a)

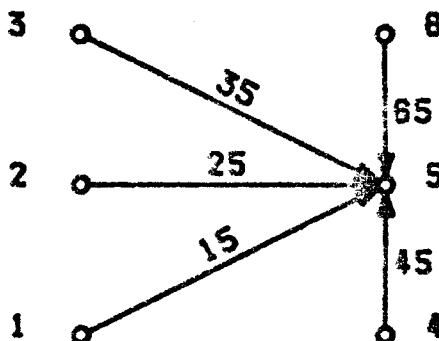


FIGURA 4.4 b)

Expresada en función de las variables de pares de terminales asociadas al grafo de la fig. 4a), la ecuación del multiterminal puede escribirse:

$$\begin{matrix} & 14 & 25 & 36 \\ 1 & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ 3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{14} \\ u_{25} \\ u_{36} \end{bmatrix} + \begin{matrix} & 14 & 25 & 36 \\ \begin{bmatrix} sL_1 & sM_1 & sM_2 \\ sM_1 & sL_2 & sM_3 \\ sM_2 & sM_3 & sL_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{14} \\ i_{25} \\ i_{36} \end{bmatrix} = 0$$

Entonces implica solamente 6 variables. Obsérvese que la ecuación resultante es la que corresponde a una tripuerta con las puertas (1,4), (2,5) y (3,6). Este resultado significa que el hexaterminal se comporta como una tripuerta 'natural' en cualesquiera circunstancias, lo cual en este caso es evidente por simple inspección de su configuración.

De modo semejante, podemos expresar la ecuación del multiterminal en función de las variables de pares de terminales asociadas al grafo de la fig. 4 b). Utilizando como nudo de referencia el 5, dicho grafo tiene una matriz A de incidencia nudos-arcos y una matriz K^f de caminos fundamentales, respectivamente:

$$\begin{array}{c}
 15 \ 25 \ 35 \ 45 \ 65 \\
 \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 15 \ 25 \ 35 \ 45 \ 65 \\
 \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Utilizando R3 llegamos a una nueva expresión de la ecuación del multiterminal:

$$\begin{array}{c}
 15 \ 25 \ 35 \ 45 \ 65 \\
 \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc}
 -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] \cdot \begin{array}{l} u_{15} \\ u_{25} \\ u_{35} \\ u_{45} \\ u_{65} \end{array} + \begin{array}{c} 15 \ 25 \ 35 \ 45 \ 65 \\ \left[\begin{array}{ccccc}
 sL_1 & sM_1 & sM_2 & 0 & 0 \\
 sM_1 & sL_2 & sM_3 & 0 & 0 \\
 sM_2 & sM_3 & sL_3 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1
 \end{array} \right] \cdot \begin{array}{l} i_{15} \\ i_{25} \\ i_{35} \\ i_{45} \\ i_{65} \end{array} = 0
 \end{array}
 \end{array}$$

En este caso la ecuación del multiterminal se expresa mediante una relación entre 10 variables de pares de terminales. Nótese que para llegar a esta formulación no se han tenido en cuenta las clases de conexión de los nudos terminales del multiterminal. □

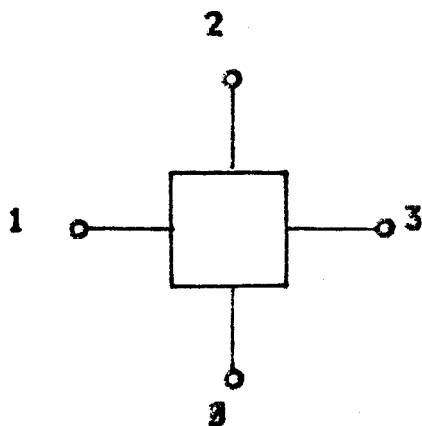


FIGURA 4.5 a)

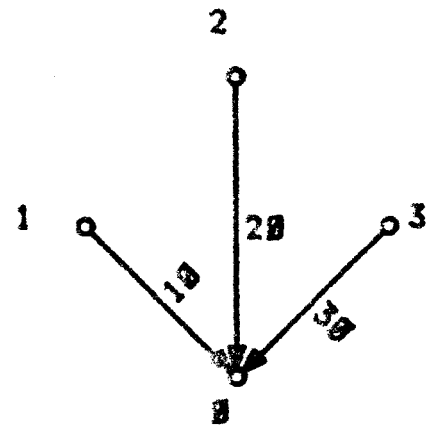


FIGURA 4.5 b)

Ejemplo: Sea un tetraterminal cualquiera (fig.5a). Lo dicho

anteriormente nos permite asegurar que siempre es posible expresar sus ecuaciones en función de las variables de pares de terminal del grafo de la fig. 5b). Esas ecuaciones son precisamente las de la tripuerta con terminal común 0, es decir con las puertas $(1,0)$, $(2,0)$ y $(3,0)$. Este resultado se generaliza inmediatamente para n -puertas con terminal común. Ello quiere decir que en cualesquiera circunstancias un $(n+1)$ -terminal se comporta como una n -puerta con terminal común. \square

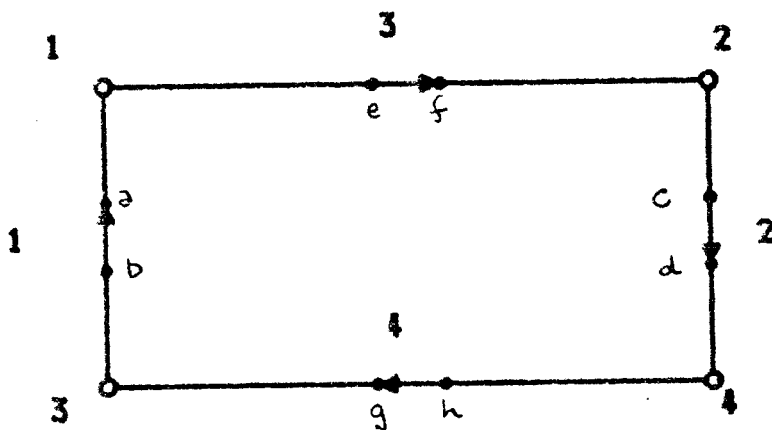
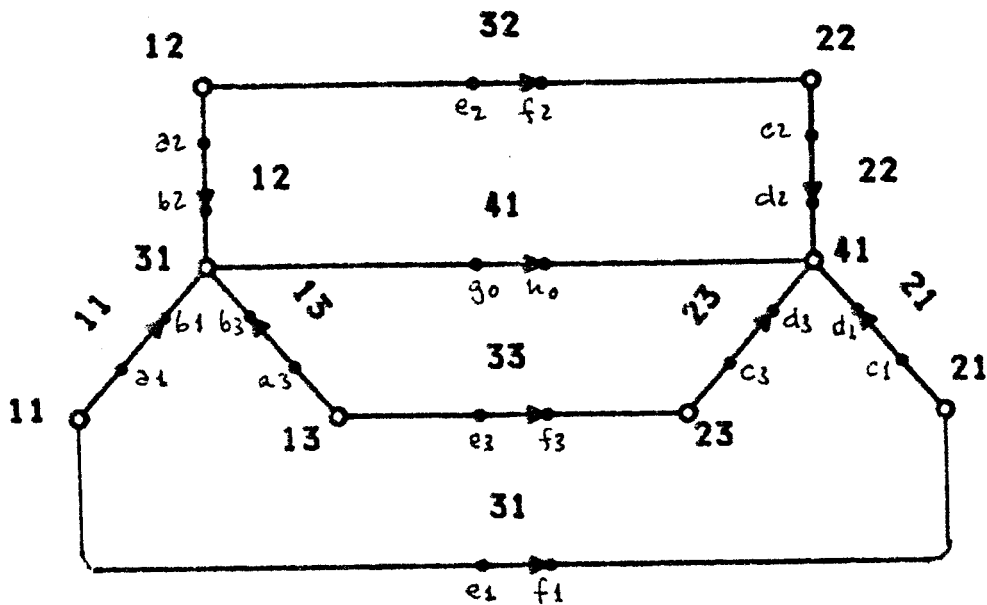


FIGURA 5.1

Escribimos $\text{Mor}(G, G')$ el conjunto de tales morfismos. Decimos que σ es un **isomorfismo** si ψ y φ son biyectivas. Decimos que G y G' son **isomorfos** si existe un isomorfismo de G en G' . Denominamos **simetría** de G a todo isomorfismo de G en G . Escribimos $\text{Sim}(G)$ el conjunto de tales simetrías. En particular $\text{id}_G = (\text{id}_T, \text{id}_N)$, en donde id_T e id_N son las respectivas aplicaciones idénticas de T en T y de N en N , es una simetría de G , llamada **trivial**.

Sean G , G' y G'' grafos, $\sigma = (\psi, \varphi) \in \text{Mor}(G, G')$ y

$\sigma'=(\psi',\varphi')\in\text{Mor}(G',G'')$. El par $\sigma''=(\psi'\circ\psi,\varphi'\circ\varphi)$ es un morfismo de G en G'' . Decimos que es la **composición** de σ' y σ y escribimos $\sigma''=\sigma'\circ\sigma$. La composición de morfismos de grafos es una operación asociativa. Para todo $\sigma\in\text{Mor}(G,G')$, se tiene: $\sigma\circ\text{id}_G=\text{id}_{G'}\circ\sigma=\sigma$. Si σ es un isomorfismo, existe un $\sigma'\in\text{Mor}(G',G)$ tal que $\sigma'\circ\sigma=\text{id}_G$ y $\sigma\circ\sigma'=\text{id}_{G'}$. Decimos entonces que σ' es el **recíproco** de σ y escribimos $\sigma'=\sigma^{-1}$.

Sean G, G' y σ los anteriores. Para cualesquiera $t\in T, a\in A, q\in N, N''\subset N$ escribimos $\sigma.t, \sigma.a, \sigma.q$ y $\sigma.N''$ en vez de $\psi(t), \varphi(q), \varphi(a)$ y $\varphi(N'')$ y los denominamos **imagen** por σ de los elementos respectivos. De las definiciones se desprende que $\nu'(\sigma.t)=\sigma.\nu(t)$ y que $\nu'(\sigma.a)=\sigma.\nu(a)$.

Sea G el anterior. Para cada $a=(t,t')\in T\times T$ ponemos $-a=(t',t)$. Decimos que $-a$ es el **opuesto** de a . Escribimos

$$\underline{R}=\{(t,t')\in T\times T \mid (t,t')\in A\}$$

Es inmediato que $\underline{R}\cup\underline{R}$ y que si $a\in\underline{R}$ entonces $a\in\underline{R}$ ó $-a\in\underline{R}$, es decir \underline{R} está constituido por el conjunto de arcos de G y por sus opuestos. \underline{R} contiene todas las orientaciones posibles de las aristas del grafo y lo denominamos conjunto de **arcos virtuales** de G . Sea σ el anterior. Para cada $a=(t,t')\in\underline{R}$ escribimos $\sigma.a=(\sigma.t,\sigma.t')$ y lo denominamos **imagen** de a por σ . Es inmediato que $\sigma.a\in\underline{R}'$, $\sigma.(-a)=-(\sigma.a)$ y $\sigma.|a|=\sigma.a$. Es decir, un morfismo de G en G' hace corresponder a cada arco virtual a de G un arco virtual a' de G' . Si $a\in\underline{R}$, entonces $a'\in\underline{R}'$ ó $-a'\in\underline{R}'$. Las aplicaciones $\nu_i:\underline{R}\rightarrow N, i=1,2$ definidas en §2.3 se prolongan de forma natural a aplicaciones $\nu_i:\underline{R}\rightarrow N$ escribiendo para cada $a=(t_1,t_2)\in\underline{R}, \nu_i(a)=\nu(t_i), i=1,2$. Entonces se tiene $\sigma.\nu_i(a)=\nu_i(\sigma.a), i=1,2$.

Ejemplo: Para el morfismo de la fig. 1 tenemos la siguiente correspondencia entre los arcos de G y los virtuales de G' :

\underline{R}	11	12	13	21	22	23	31	32	33	41
σ	-1	-1	-1	2	2	2	3	3	3	-4

Esta tabla se prolonga fácilmente a todos los arcos virtuales de G . Así $\sigma.(-11)=-\sigma.11=1$, $\sigma.(-12)=1$, etc. \square

Cuando no se precisa hacer referencia expresa a los terminales de G y G' la correspondencia entre \underline{R} y \underline{R}' contiene toda la información necesaria para describir la acción del morfismo sobre dichos terminales, ya que su significado en el caso del ejemplo anterior puede interpretarse: El morfismo σ hace corresponder al primer terminal del arco 11 de G el segundo terminal del arco 1 de G' , etc. Es decir, definiendo las correspondencias que establece σ entre N y N' y entre \underline{R} y \underline{R}' queda suficientemente caracterizado el morfismo.

5.2.-GRAFOS SIMÉTRICOS

Sea G un grafo. La composición de morfismos dota a $\text{Sim}(G)$ de una estructura de grupo, en donde id_G es el elemento unidad y donde los inversos son los recíprocos. Puede demostrarse fácilmente que $\text{Sim}(G)$ es un grupo finito. Decimos que el grafo G es **simétrico** si posee una simetría no trivial.

Sea G un grafo con una simetría no trivial σ_0 . La simetría σ_0 engendra un subgrupo cíclico Γ de $\text{Sim}(G)$. Decimos que σ_0 es una **simetría p-fásica** si $\text{card}(\Gamma)=p$. Puede probarse que p es el menor entero positivo tal que $\sigma_0^p=\text{id}_G$. Γ es isomorfo al conjunto $P=\{0,1,2,\dots,p-1\}$ dotado de la operación suma módulo p . Para cada $\sigma \in \Gamma$ existe un y sólo un $k \in P$ tal que $\sigma=\sigma_0^k$. Metafóricamente podemos considerar la simetría $\sigma \in \Gamma$ como una 'rotación' que coloca cada terminal t sobre la posición que anteriormente ocupaba el terminal $\sigma.t$, cada nudo q sobre la posición anteriormente ocupada por el nudo $\sigma.q$ y Γ como un grupo de 'rotaciones' de una fracción p -sima de revolución en torno al mismo eje. La acción de Γ sobre G puede describirse como operaciones de Γ sobre diversos conjuntos.

Ejemplo: En la fig. 2 mostramos un grafo simétrico con una

simetría σ_0 definida por las tablas siguientes:

N	11	12	13	21	22
σ_0	12	13	11	22	21

R	11	12	13	21	22	23	24	25	26	30
σ_0	12	13	11	22	23	24	25	26	21	-30

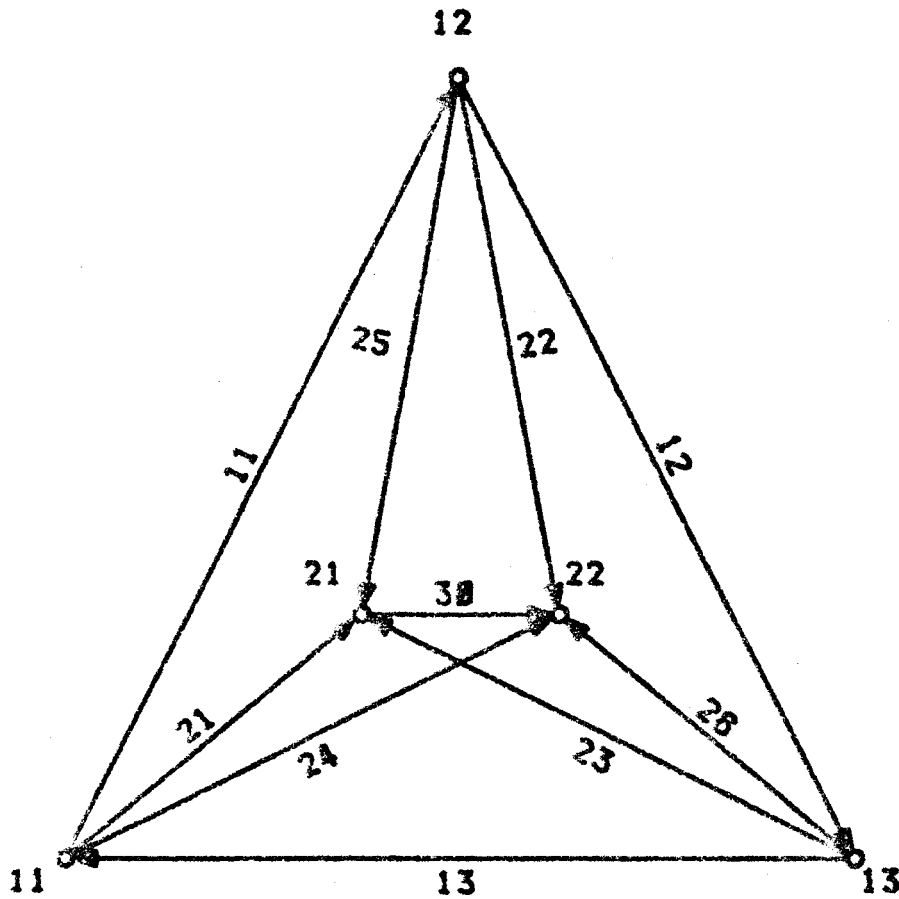


FIGURA 5.2

ADVERTENCIA: En lo que resta de este capítulo nos referiremos a una red con un grafo G que posee una

simetría no trivial p -fásica σ_0 , la cual engendra un grupo cíclico Γ

5.3.-OPERACIONES DE UN GRUPO CICLICO Γ SOBRE UN CONJUNTO

Recordaremos brevemente algunos conceptos de la operación del grupo cíclico Γ sobre un conjunto X . Sea $f: \Gamma \times X \rightarrow X$ una aplicación. Decimos que f es una **operación** de Γ sobre X si para cualesquiera $x \in X$, $\sigma, \sigma' \in \Gamma$ se verifican las relaciones:

$$i) f(\text{id}_\Gamma, x) = x$$

$$ii) f(\sigma, f(\sigma', x)) = f(\sigma \cdot \sigma', x)$$

Entonces escribimos $\sigma.x$, en vez de $f(\sigma, x)$. Así hemos descrito un operación por la izquierda de Γ sobre X . También podemos definir una operación por la derecha. Se necesita para ello una aplicación $f: X \times \Gamma \rightarrow X$ que verifique: i) $f(x, \text{id}_\Gamma) = x$ y ii) $f(f(x, \sigma), \sigma') = f(x, \sigma \cdot \sigma')$, para cualesquiera $x \in X$, $\sigma, \sigma' \in \Gamma$. Escribimos entonces x^σ ó $x.\sigma$ en vez de $f(x, \sigma)$. Indicaremos algunos resultados y definiciones referidos a operaciones por la izquierda dejando al lector que los complete para las operaciones por la derecha.

Se tiene: $p = \text{card}(\Gamma)$. Escribiremos \mathbb{Z} el conjunto de los números enteros, $m\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros múltiplos de un entero m dado, $k+m\mathbb{Z}$ el conjunto de los $i \in \mathbb{Z}$ tales que $i - k \in m\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ el grupo de clases de restos módulo m , que identificaremos con el conjunto $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ con la operación suma módulo m . En particular el grupo P definido en §5.2 no es sino $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Al elemento $\sigma.x$ le llamamos **imagen** de x por σ . Este concepto se extiende a la imagen $\sigma.Y$ ó Y^σ de un subconjunto $Y \subset X$ que es el conjunto de los $\sigma.x$ ó de los x^σ con $x \in Y$. Sean Γ y X los anteriores. Para cada $\sigma \in \Gamma$, la aplicación $f: X \rightarrow X$ definida $f: x \mapsto \sigma.x$ es una permutación de X . Ello se deriva de que para cualesquiera $x, y \in X$ las relaciones $y = \sigma.x$ y $x = \sigma^{-1}.y$ son equivalentes. Dado un $x \in X$ denominamos **órbita** de x por Γ y la escribimos $\Gamma.x$ al conjunto:

$$\Gamma.x = \{y \in X \mid \exists \sigma \in \Gamma, y = \sigma.x\}$$

Escribimos X/Γ el conjunto de órbitas de X . Las órbitas establecen una partición de X , es decir dos órbitas distintas no tienen ningún elemento común. A $d = \text{card}(\Gamma.x)$ lo denominamos **período** de x . Puede probarse que d es el menor entero positivo tal que $\sigma_0^d.x = x$ y que $pd \in \mathbb{Z}$. Para cada $y \in \Gamma.x$ existe un y sólo un entero d , $0 \leq m < d$, tal que $y = \sigma_0^m.x$. Decimos que x es un elemento **neutro** de X con respecto a Γ si su período es 1, es decir si $\Gamma.x = \{x\}$. Decimos que un conjunto $Y \subset X$ es **estable** con respecto a Γ si para cualesquiera $\sigma \in \Gamma$, $x \in Y$ se verifica que $\sigma.x \in Y$. Sea Y un subconjunto estable de X . La restricción de la operación de Γ sobre X a $\Gamma \times Y$ es una operación de Γ sobre Y **inducida** por aquélla. En particular si Y es una órbita de X , hay una operación inducida de Γ sobre Y . Sea S un conjunto cualquiera. La operación de Γ sobre X **induce** una operación por la derecha de Γ sobre el conjunto S^X de las aplicaciones de X en S . Para cualesquiera $f \in S^X$, $\sigma \in \Gamma$ escribimos $f^\sigma \in S^X$ definida $f^\sigma: x \mapsto f(\sigma.x)$. Dejamos la demostración al lector. Es decir f^σ toma en $x \in X$ el mismo valor que f tomaba en la imagen de x por σ . De algún modo eso significa una 'rotación hacia atrás' de los valores de la función f .

5.4.-OPERACIONES DEL GRUPO Γ SOBRE EL GRAFO G

Para cualesquiera $\sigma \in \Gamma$, $t \in T$, $a \in A$, $q \in N$ y $a' \in \underline{R}$ los 'productos' definidos en §5.1: $\sigma.t$, $\sigma.a$, $\sigma.q$ y $\sigma.a'$ definen operaciones por la izquierda de Γ sobre T , A , N y \underline{R} , respectivamente. Denominamos **terminal p-fásico**, **arista p-fásica**, **nudo p-fásico** y **arco p-fásico** a cada órbita de T , A , N y \underline{R} respectivamente.

Ejemplo: De lo dicho en el epígrafe anterior resulta que σ_0 induce una permutación de N y otra de \underline{R} . Así podemos reescribir las tablas del ejemplo precedente notándolas como permutaciones:

$$\sigma_0.N : (11 \ 12 \ 13)(21 \ 22)$$

$$\sigma_0.\underline{R} : (11 \ 12 \ 13)(21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 25 \ 26)(30 \ -30)(-11 \ -12 \ -13) \\ (-21 \ -22 \ -23 \ -24 \ -25 \ -26)$$

Significando en el caso de la primera tabla que $\sigma_0.11=12$,

$\sigma_{0.12}=13$, $\sigma_{0.13}=11$, etc. Precisamente $\{11,12,13\}$ y $\{21,22\}$ constituyen los nudos polifásicos de G con respecto a Γ y $\{1111,1121,1131\}$, $\{1211,1221,1231,1241,1251,1261\}$ y $\{1301\}$ las aristas polifásicas de G con respecto a Γ . Los períodos del nudo 21, del arco 30 y de la arista 1301 son, respectivamente, 2, 2 y 1. La arista 1301 es un neutro de A con respecto a Γ . \square

R1// Sean $\sigma \in \Gamma$ y $a=(t,t') \in \underline{R}$. Utilizando la letra d para referirnos a los períodos respectivos, tenemos los siguientes resultados:

- i) $d_t = d_{t'} = d_a$.
- ii) Si $-a \notin \Gamma$ entonces $d_a = d_{\sigma a}$.
- iii) Si $-a \in \Gamma$ entonces $d_a = 2d_{\sigma a}$ y $\sigma_{0.1} \sigma^{-1} a = -a$.
- iv) Si p es impar $d_a = d_{\sigma a}$.
- v) $d_a \in d_{\sigma^k a} \langle \sigma \rangle \mathbb{Z}$, para $i=1,2$.

Dem.: Todos ellos se derivan de las definiciones y de las propiedades de los morfismos de grafos. Consideremos, por ejemplo, los enunciados ii) y iii). De la definición de morfismo se deduce que, para todo $k \in \mathbb{Z}$, $\sigma^k a = \sigma^k |a|$. Por lo tanto, $d_a \in d_{\sigma^k a} \mathbb{Z}$. Recíprocamente si $\sigma^k |a| = |a|$ entonces $\sigma^k a = \pm a$. En consecuencia, $\sigma_{0.1} \sigma^{2k} a = a$ y $2d_{\sigma a} \in d_a \mathbb{Z}$. Si $-a \in \Gamma$, entonces para todo $k \in \mathbb{Z}$, $\sigma^k |a| = |a|$ equivale a $\sigma^k a = a$ y $d_a = d_{\sigma a}$. Si $-a \in \Gamma$, existe un entero positivo $m < d_a$ tal que $-a = \sigma^m a$. Entonces $m d_{\sigma a} \in d_a \mathbb{Z}$, que junto con las relaciones anteriores implica $d_a = 2d_{\sigma a}$. De ahí el resultado. \square

La operación de Γ sobre N induce sendas operaciones por la derecha de Γ sobre V^N y V^T [§5.3]. Así Γ opera sobre los vectores de intensidades y de tensiones de nudos y las intensidades de los terminales. Para cualesquiera $j, v \in V^N$ y $\sigma \in \Gamma$ escribimos j^σ y v^σ las imágenes de tal operación.

Sea $a=(t,t')$ un arco de G . En la definición de la tensión y de la intensidad de un dispositivo no orientado con terminales t, t' [§3.1] ya vimos que a cada orientación $a=(t,t')$ ó $-a=(t',t)$ del dispositivo le correspondían unas ciertas tensiones e intensidades que, en el segundo caso, adoptaban valores opuestos a los del primero. Con la simbología introducida en el §5.1 esto

quiere decir que $u_{-a} = -u_a$ y que $i_{-a} = -i_a$. En consecuencia, podemos asignar una tensión e intensidad a todos los arcos virtuales de G , y no sólo a los arcos ordinarios. En general, podemos definir una prolongación canónica de cada vector $w \in V^R$ a un vector $w' \in V^R$ escribiendo para cada $a \in R$, $w'_a = w_a$ si $a \in R$ y $w'_a = -w_{-a}$, en caso contrario. Al nuevo vector así definido lo nombramos con la misma letra.

R2// Para cualesquiera $\sigma \in \Gamma$ y $w \in V^R$ escribimos $w^\sigma \in V^R$ el vector definido $w^\sigma_a = w_{\sigma^{-1}(a)}$ para todo $a \in R$. Entonces w^σ indica una operación de Γ sobre V^R .

Dem.: La operación de Γ sobre R [§5.2] induce una operación por la derecha de Γ sobre V^R . Sea S el conjunto de los $w \in V^R$ tales que $w_{-a} = -w_a$ para todo $a \in R$. Para cualesquiera $\sigma \in \Gamma$ y $w \in S$ se verifica $w^\sigma \in S$. Es decir, S es estable con respecto a tal operación la cual, por lo tanto, induce una operación de Γ sobre S . Por otra parte, la prolongación canónica de V^R a V^R es una biyección $f: V^R \rightarrow S$. Para cualesquiera $\sigma \in \Gamma$ y $w \in V^R$ escribimos $w^\sigma = f^{-1}(f(w)^\sigma)$. Esta es la operación definida en el enunciado. Dejamos los detalles al lector. \square

Como consecuencia del resultado anterior tenemos unas operaciones de Γ sobre los vectores de tensiones e intensidades asociadas a los arcos de G . El significado de estas operaciones es de nuevo una 'rotación hacia atrás' de los valores de las intensidades y de las tensiones de modo que a cada arco le correspondan una nueva intensidad o una nueva tensión igual a la que tenía anteriormente el arco virtual imagen según la simetría.

R3// A cada $a \in R$ le asignamos un signo, escrito $sg(a)$ igual a $+1$ si $a \in R$ y a -1 en caso contrario. Sea $\sigma \in \Gamma$. La aplicación $\eta: R \rightarrow R$ definida $\eta: a \mapsto sg(\sigma(a))\sigma(a)$ es una permutación de R .

Dem.: Sean $f: R \rightarrow A$ tal que $f: a \mapsto |a|$ y $g: A \rightarrow A$ tal que $g: a' \mapsto \sigma(a')$. De acuerdo con las definiciones f es una biyección y g es una permutación. Es inmediato que $f \circ \eta = g \circ f$. De ahí el resultado. \square

Sean ahora $\sigma \in \Gamma$, $w, w' \in V^R$ tales que $w' = w^\sigma$. Para cada $a \in R$ tenemos:

$$w'_a = w_{\sigma^{-1}(a)} = w_{sg(\sigma, a) \eta(a)} = sg(\sigma, a) w_{\eta(a)}$$

Es decir la operación de Γ sobre V^R equivale a una permutación de índices y a un cierto cambio de signo de las componentes de los vectores de V^R .

Sean X un alfabeto cualquiera, R el conjunto de arcos de G y M una matriz $R \times X$, $X \times R$ ó $R \times R$. Definimos una prolongación canónica de M a los conjuntos $R \times X$, $X \times R$ y $R \times R$, respectivamente, de forma similar al caso de los vectores de V^R . Lo ejemplificaremos en la prolongación de la matriz A_{NR} de incidencia nudos-arcos, escribiendo $a_{q, -a} = -a_{q, a}$ para cualesquiera $q \in N$, $a \in R$.

Sean X e Y alfabetos sobre los que opera el grupo Γ . Definimos una operación inducida de Γ sobre las matrices con índices en $X \times Y$ escribiendo para cualesquiera $M \in K^{X \times Y}$ y $\sigma \in \Gamma$, M^σ la matriz $X \times Y$ definida:

$$m_{x, y}^\sigma = m_{\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y)}$$

para cualesquiera $x \in X$, $y \in Y$. Decimos que la matriz M es **circulante** con respecto a Γ si para todo $\sigma \in \Gamma$ se verifica $M^\sigma = M$. Esta condición equivale a $M \cdot \sigma_0 = M$.

R4// Sean X e Y alfabetos sobre los que opera Γ , $w' \in V^X$ y $w \in V^Y$. Para todo $\sigma \in \Gamma$, las relaciones $w' = M \cdot w$ y $w'^\sigma = M^\sigma \cdot w^\sigma$, son equivalentes. Para todo $\sigma \in \Gamma$, las relaciones $j = A \cdot i$ y $j^\sigma = A^\sigma \cdot i^\sigma$ son equivalentes y las $u = {}^t A \cdot v$ y $u^\sigma = {}^t A^\sigma \cdot v^\sigma$ lo son también.

Dem.: Demostraremos la segunda parte del enunciado. Ponemos $j' = j^\sigma$, $i' = i^\sigma$ y $A' = A^\sigma$. Para cada $q \in N$ se tiene:

$$\begin{aligned} j'_q &= j_{\sigma^{-1}(q)} \\ &= \sum_a a_{\sigma^{-1}(q), a} \cdot i_a \quad (a \in R) \\ &= \sum_a a_{\sigma^{-1}(q), \eta(a)} \cdot i_{\eta(a)} \quad (a \in R) \\ &= \sum_a a_{\sigma^{-1}(q), \sigma^{-1}(\eta(a))} \cdot i_{\sigma^{-1}(\eta(a))} \quad (a \in R) \\ &= \sum_a a'_{q, \eta(a)} \cdot i'_a \quad (a \in R) \end{aligned}$$

Siendo η la definida en R3. De ahí la segunda parte. La primera la dejamos al cuidado del lector. \square

5.5.-REDES ELECTRICAS SIMETRICAS

Sean una red eléctrica con un grafo G y el sistema formal de ecuaciones definido en §4.3, σ una simetría no trivial de G y Γ el grupo generado por aquélla. Introduciremos progresivamente el concepto de simetría de la red. Veamos en primer lugar que la operación de Γ sobre G deja invariantes las leyes de Kirchoff.

R5// Sea A_{NR} la matriz de incidencia nudos-arcos del grafo G . A es circulante con respecto a Γ .

Dem.: Definimos una prolongación canónica de la matriz A_{NR} al conjunto de índices $N \times R$ de la forma habitual. Para cualesquiera $q \in N$, $a \in R$ se verifica:

$$\begin{aligned} a_{q, -a} &= \delta_{q^2}^{(-a)} - \delta_{q^1}^{(-a)} \\ &= \delta_{q^1}^{(a)} - \delta_{q^2}^{(a)} \end{aligned}$$

Sea $\sigma \in \Gamma$. Pongamos $A' = A^\sigma$. De lo anterior se deduce:

$$\begin{aligned} a'_{q, a} &= a_{\sigma^{-1}q, \sigma^{-1}a} \\ &= \delta_{\sigma^{-1}q^2}^{(\sigma^{-1}a)} - \delta_{\sigma^{-1}q^1}^{(\sigma^{-1}a)} \\ &= \delta_{\sigma q^1}^{(a)} - \delta_{\sigma q^2}^{(a)} \\ &= \delta_{q^1}^{(a)} - \delta_{q^2}^{(a)} \\ &= a_{q, a} \end{aligned}$$

Y, en consecuencia, $A' = A$. \square

Del resultado anterior y de R4 se deduce que para todo $\sigma \in \Gamma$ las relaciones $j = A \cdot i$ y $j^\sigma = A \cdot i^\sigma$ son equivalentes, y que las relaciones $u = {}^t A \cdot v$ y $u^\sigma = {}^t A \cdot v^\sigma$ lo son también. Por otra parte, decir que i sea kirchoffiano equivale a decir que $j_N = 0$. De aquí $j^\sigma = 0$ e i^σ es igualmente kirchoffiano. Decir que u es kirchoffiano equivale a decir que deriva de los potenciales v . Entonces u^σ deriva de los potenciales v^σ . En consecuencia, las operaciones del grupo Γ sobre las tensiones e intensidades de los arcos dejan invariantes las leyes de Kirchoff.

Los anteriores resultados se pueden obtener también directamente a partir de conceptos más primitivos, como se muestra a continuación.

R6// Sea i_R un vector de intensidades de arcos de la red, j_N el vector de intensidades de nudos derivado de i y $\sigma \in \Gamma$. Entonces j^σ deriva de i^σ . Si i es kirchoffiano, i^σ lo es también.

Dem.: Sean j_t y $j_{t'}$ los vectores de intensidades de terminales de G correspondiente a i e i^σ respectivamente y $a=(t,t') \in R$. Se verifica: $\sigma.a=(\sigma.t, \sigma.t') \in R$. De ahí:

$$\begin{aligned} j_{t'} &= i_{\sigma.a} \\ &= i_{\sigma.t} \\ &= j_{\sigma.t} \\ j_{t'} &= -j_{t'} \\ &= -j_{\sigma.t} \\ &= j_{\sigma.t}. \end{aligned}$$

Como cada terminal de G pertenece a un arco de G se sigue que $j'=j^\sigma$. Sea j' el vector de intensidades de nudos de G derivado de i^σ . Para cualesquiera $t \in T$, $q \in N$ las relaciones $q=v(t)$ y $\sigma.q=v(\sigma.t)$ son equivalentes [§5.1]. Nótese además que la aplicación $t \mapsto \sigma.t$ es una biyección y por lo tanto equivale a un cambio de índices. De ahí que para cada $q \in N$ tenemos:

$$\begin{aligned} j'_q &= \sum_t j_t \quad (t \in T \mid v(t)=q) \\ &= \sum_t j_{\sigma.t} \quad (t \in T \mid v(t)=q) \\ &= \sum_t j_t \quad (t \in T \mid v(t)=\sigma.q) \\ &= j_{\sigma.q} \end{aligned}$$

Y en definitiva $j'=j^\sigma$. Esto prueba la primera parte del enunciado. La segunda, es consecuencia de la anterior. \square

R7// Sea v_N un vector de potenciales de nudos de la red, u_R el vector de tensiones de arcos derivado de v y $\sigma \in \Gamma$. Entonces u^σ deriva de v^σ . Si u es kirchoffiano, u^σ lo es también.

Dem.: Ponemos $u'=u^\sigma$ y $v'=v^\sigma$. Sea $a=(t,t') \in R$. De acuerdo con las definiciones se verifica:

$$\begin{aligned} u'_a &= u_{\sigma.a} \\ &= v_{v_1(\sigma.a)} - v_{v_2(\sigma.a)} \\ &= v_{\sigma.v_1(a)} - v_{\sigma.v_2(a)} \\ &= v'_{v_1(a)} - v'_{v_2(a)} \end{aligned}$$

De ahí la primera parte del enunciado. La segunda es consecuencia de la anterior. \square

Precisemos ahora otros aspectos de la simetría de la red. Para que Γ pueda ser considerado un grupo de simetría de la red es necesario que para cada $\sigma \in \Gamma$ el dispositivo imagen por σ de un dispositivo de tipo E, J, Y ó Z sea también del mismo tipo. Metafóricamente al girar la red sobre si misma según cualquier $\sigma \in \Gamma$, cada dispositivo debe ocupar el lugar ocupado anteriormente por otro del mismo tipo. En esto no influye la orientación del dispositivo. En consecuencia, una primera condición para considerar a Γ como un grupo de simetría de la red es que los conjuntos de aristas $|E|$, $|J|$, $|Y|$ y $|Z|$ sean estables con respecto a Γ .

Otra condición que podemos establecer para la simetría es que si 'rotamos' los valores de las tensiones e intensidades de las ramas de acuerdo con cualquier $\sigma \in \Gamma$, entonces los nuevos valores verifiquen también las ecuaciones de la red. Sea (u, i) el régimen de la red. Para cada $\sigma \in \Gamma$ escribimos $(u, i) \cdot \sigma = (u \cdot \sigma, i \cdot \sigma)$. Si se cumple la primera condición para que Γ sea un grupo de simetría de la red, entonces los conjuntos de arcos virtuales \underline{E} , \underline{J} , \underline{Y} y \underline{Z} son también estables con respecto a Γ , como puede demostrar el lector y Γ opera sobre los conjuntos V^E , V^J , etc. Por 'rotar' el régimen de la red según σ entendemos un nuevo régimen (u^σ, i^σ) . Precisemos que esta rotación implica la rotación de la excitación, en el sentido de que a la excitación le asignamos un nuevo valor $(u^\sigma \cdot \sigma, i^\sigma \cdot \sigma)$. Recíprocamente, si rotamos la excitación de la red debemos esperar que exista un nuevo régimen de la red igual al resultado de rotar el anterior.

Esta última condición es demasiado general y poco útil, ya que implica obtener las respuestas de la red para comprobar que ésta es simétrica. Ya hemos visto en más arriba que si los vectores de tensiones e intensidades de las ramas de la red son kirchoffianos, entonces las nuevas tensiones e intensidades resultantes de una rotación lo son también. Sólo nos falta establecer una condición para los dispositivos tipo Y y Z con la finalidad de asegurar que las tensiones e intensidades rotadas verifiquen la ecuación [§4.3]:

$$(i \vee l u_z) = H_{LL} \cdot (u \vee l i_z)$$

siendo $L=YUZ$. Dado que $|Y|$ y $|Z|$ son estables con respecto a Γ , entonces $|L|$ lo es también. Aplicando R4, puede demostrarse que para todo $\sigma \in \Gamma$ la ecuación anterior equivale a:

$$(i^{\sigma} \vee l u^{\sigma}_z) = H^{\sigma} \cdot (u^{\sigma} \vee l i^{\sigma}_z)$$

Entonces, si $H^{\sigma} = H$ las definiciones de los dispositivos lineales son invariantes con respecto a una rotación de las tensiones e intensidades de la red. Así nos vemos motivados para introducir esta segunda condición para considerar la red como simétrica. Decimos que σ_0 es una **simetría de la red** y que la red es **simétrica** si se verifican las dos condiciones siguientes:

i) Los conjuntos de aristas $|E|$, $|J|$, $|Y|$ y $|Z|$ son estables con respecto a Γ .

ii) La matriz H es circulante con respecto a Γ .

Entonces, al rotar un régimen de la red según σ_0 obtenemos un nuevo régimen correspondiente a una rotación de la excitación de la red según σ_0 .

Ejemplo: La red de la fig. 3 posee una simetría σ_0 definida:

$$\sigma_0.N : (11 \ 12) (21 \ 22) (30) (40)$$

$$\sigma_0.R : (10 \ -10) (21 \ 22) (31 \ -32) (41 \ 42) (50) (-21 \ -22) \dots$$

$$(-50)$$

Los conjuntos $E=\{41,42\}$, $J=\{10\}$, $Y=\emptyset$, $Z=\{21,22,31,32,50\}$ cumplen la propiedad de que sus respectivos conjuntos de aristas son estables con respecto a Γ .

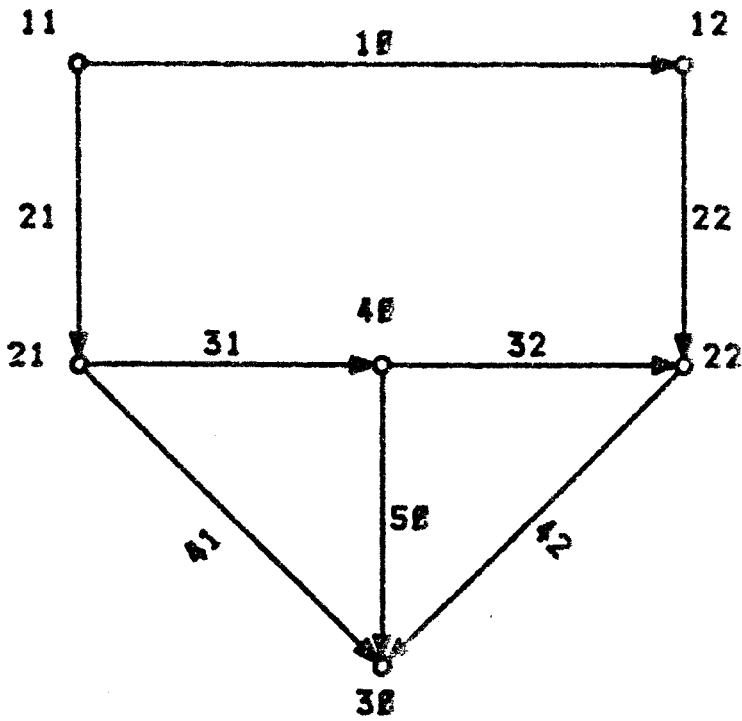
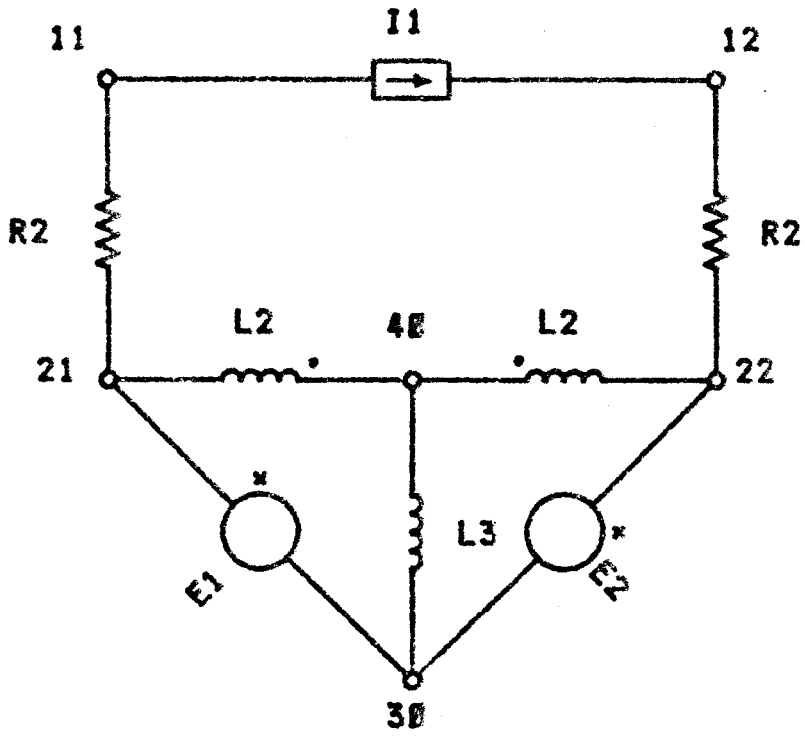
La matriz H de la red es:

$$\begin{array}{c} 21 \\ 22 \\ 31 \\ 32 \\ 50 \end{array} \begin{bmatrix} & & & & & \\ & R2 & & & & \\ & & R2 & & & \\ & & & sL2 & -sM1 & -sM2 \\ & & & -sM1 & sL2 & sM2 \\ & & & -sM2 & sM2 & sL3 \end{bmatrix}$$

Como prueba del carácter circulante de esta matriz con respecto a Γ tenemos, por ejemplo:

$$h_{\sigma_0, 22}^{\sigma_0} = h_{\sigma_0, 31}^{\sigma_0}, \sigma_0 \cdot \sigma_0 = h_{-\sigma_0, 31} = -h_{\sigma_0, 31} = -sM2 = h_{\sigma_0, 32}$$

FIGURA 5.3



Siendo (u,i) un régimen de esta red, el nuevo régimen $(u,i) \cdot \sigma_0$ resultante de una rotación del anterior corresponde a la red que se muestra en la fig. 4, en donde las fuentes independientes han rotado de acuerdo con σ_0 . Así $i_{18} = i_{10} = -i_{10} = -I_1$, $u_{21} = u_{22} = E_2$, etc. \square

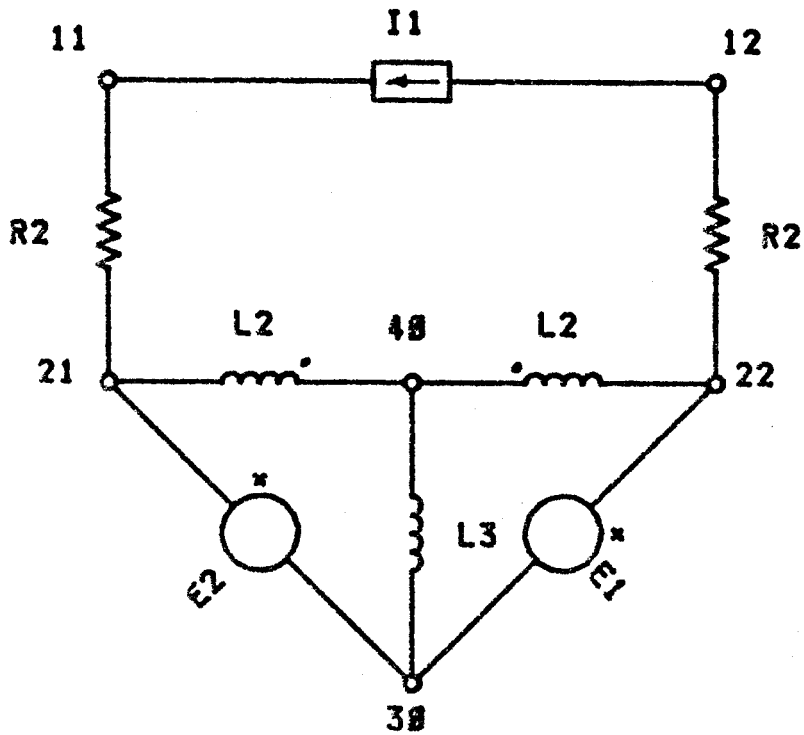


FIGURA 5.4

Ejemplo: En la fig. 6 mostramos una red con una simetría σ_0 definida:

$$\sigma_0.N : (11 \ 12 \ 13) (21 \ 22 \ 23) (30) (40) (51 \ 52 \ 53) (61 \ 62 \ 63) (70)$$

$$\sigma_0.R : (11 \ 12 \ 13) (21 \ 22 \ 23) (31 \ 32 \ 33) (40) (51 \ 52 \ 53) \\ (61 \ 62 \ 63) (71 \ 72 \ 73) (-11 \ -12 \ -13) \dots (-71 \ -72 \ -73)$$

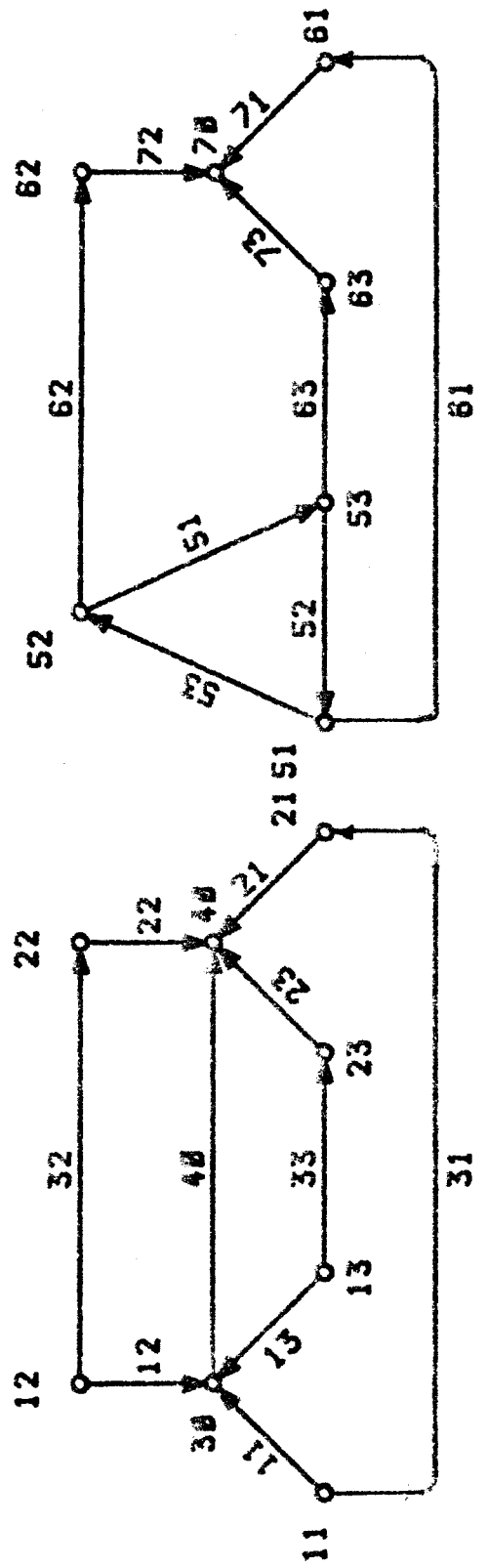
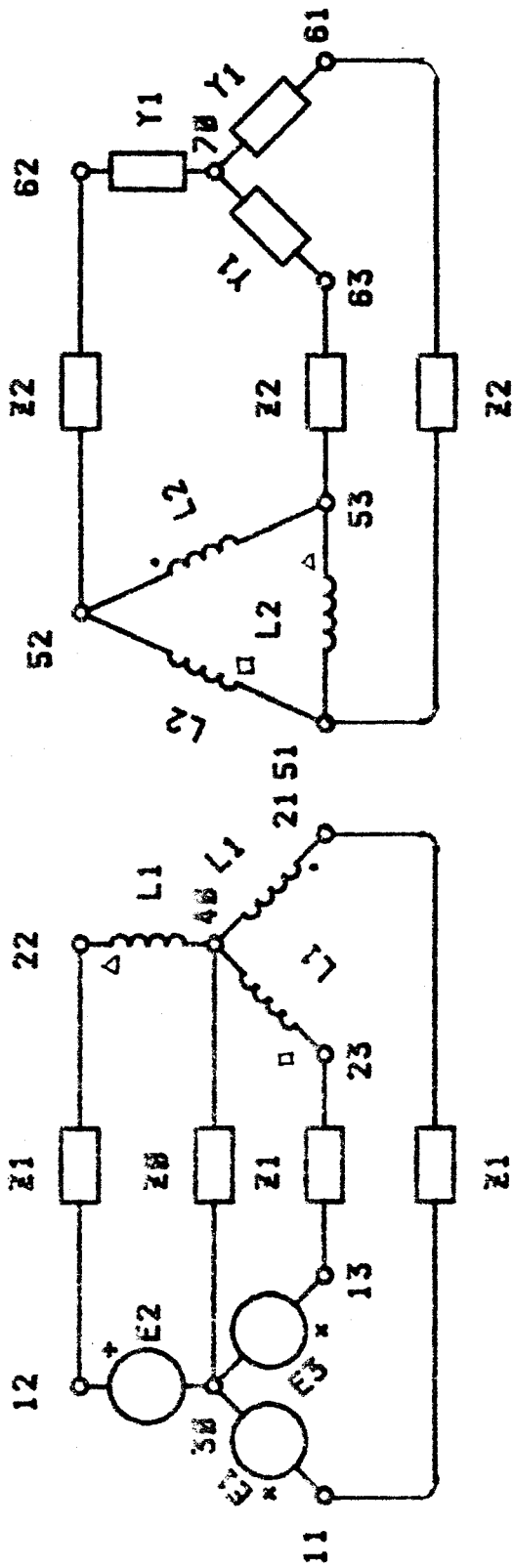
Los conjuntos E, J, Z e Y vienen definidos:

$$E = \{11, 12, 13\} \quad J = \emptyset \quad Y = \{71, 72, 73\}$$

$$Z = \{21, 22, 23, 31, 32, 33, 40, 51, 52, 53, 61, 62, 63\}$$

Puede probarse fácilmente que $|E|$, $|J|$, $|Y|$ y $|Z|$ son estables con respecto a Γ .

FIGURA 5.6



La matriz H de la red es:

	31	32	33	21	22	23	51	52	53	61	62	63	71	72	73	40
31	Z1															
32		Z1														
33			Z1													
21				sL1			sM									
22					sL1			sM								
23						sL1			sM							
51				sM			sL2									
52					sM			sL2								
53						sM			sL2							
61										Z2						
62											Z2					
63												Z2				
71													Y1			
72														Y1		
73															Y1	
40																Z0

Dejamos al lector la prueba de que esta matriz es circulante con respecto a Γ . El resultado de rotar el régimen de la red con respecto a σ_0 es un régimen correspondiente a la red que se muestra en la fig. 7. Así se tiene $u_{11}^1 = u_{10}^0, u_{12}^1 = u_{11}^0 = E2$, etc. \square

CAP. VI: REDES SIMÉTRICAS EN RÉGIMEN EQUILIBRADO

=====

ADVERTENCIA: En todo este capítulo nos referiremos a una red eléctrica con un grafo G y una simetría p -fásica σ , definida como en §5.5. Nombraremos Γ el grupo generado por σ , $P=\{0,1,2,\dots,p\}$ y $\alpha=\exp(2\pi j/p)$.

6.1.-VECTORES EQUILIBRADOS Y COMPONENTES SIMÉTRICAS

Sea X un alfabeto sobre el cual opera el grupo cíclico finito Γ . Γ opera también por la derecha sobre V^X , en las formas especificadas en §5.3 y §5.4. Sea un vector $w \in V^X$ tal que existe un complejo γ que verifica $w \cdot \sigma = \gamma \cdot w$. Dado que $\text{id}_\sigma = \sigma^p$, se cumple $\gamma^p \cdot w = w$. Si $w \neq 0$ se tiene: $\gamma^p = 1$, γ es una raíz p -ésima de la unidad y existe un y sólo un $k \in P$ tal que $\gamma = \alpha^{-k}$. Decimos entonces que w es un vector **equilibrado de secuencia k** con respecto a σ . A la secuencia 0 se le denomina **homopolar**, a la 1 **directa** y, en el caso trifásico a la 2 **inversa**.

R1// Sean Γ el anterior y X un alfabeto sobre el cual opera Γ . Para cada $w \in V^X$ existe una y sólo una familia $(w^k)_P$ de vectores de V^X tales que:

i) $w = \sum_{k \in P} w^k$ ($k \in P$)

ii) Para todo $k \in P$, w^k es un vector equilibrado de secuencia k con respecto a σ .

Para todo $k \in P$ se verifica:

$$w^k = p^{-1} \cdot \sum_{i \in P} \alpha^{k \cdot i} \cdot (w \cdot \sigma^i) \quad (i \in P)$$

Dem.: En efecto, de la definición de la familia (w^k) se tiene para todo $k \in P$:

$$w \cdot \sigma^k = \sum_{i \in P} \alpha^{-i \cdot k} \cdot w^i \quad i \in P$$

Este es un sistema de ecuaciones con una matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha^{-1} & \alpha^{-2} & \dots & \alpha^{1-p} \\ 1 & \alpha^{-2} & \alpha^{-4} & \dots & \alpha^{2-2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha^{1-p} & \alpha^{2-2p} & \dots & \alpha^{(p-1)(1-p)} \end{bmatrix}$$

que es del conocido tipo de Vandermonde. Se demuestra fácilmente que su determinante es siempre no nulo. Por lo tanto, existe una familia (w^k) y es única. Dejamos al cuidado del lector el último resultado. \square

A la familia de vectores (w^k) asociados a w , le llamamos **componentes simétricas** del vector w con respecto a σ . Para cada $k \in P$, llamamos a w^k **componente de secuencia k** de w .

R2// Sean X e Y alfabetos sobre los que opera el grupo cíclico Γ , $M_{Y \times X}$ una matriz circulante con respecto a Γ , $w \in V^X$ y $w' \in V^Y$ vectores tales que $w' = M \cdot w$ y (w^k) , (w'^k) las componentes simétricas de los anteriores con respecto a σ . Entonces para todo $k \in P$ se verifica que $w'^k = M \cdot w^k$.

Dem.: De acuerdo con la definición de matriz circulante y con [5R4], para todo $\sigma' \in \Gamma$ se cumple: $w'^{\sigma'} = M \cdot w^{\sigma'}$. De aquí:

$$\begin{aligned} w'^k &= p^{-1} \cdot \sum_i \alpha^{ki} \cdot (w'^{\sigma^i}) && (i \in P) \\ &= M \cdot p^{-1} \cdot \sum_i \alpha^{ki} \cdot (w^{\sigma^i}) && (i \in P) \\ &= M \cdot w^k \end{aligned}$$

\square

6.2.-RED SIMETRICA EN REGIMEN EQUILIBRADO

Sea (u, i) un régimen de la red. Para toda $\sigma' \in \Gamma$ escribimos $(u, i) \cdot \sigma' = (u \cdot \sigma', i \cdot \sigma')$. Decimos que el régimen de la red es **equilibrado de secuencia k** con respecto a σ , si $\alpha^{-k} \cdot (u, i) = (u, i) \cdot \sigma$. Debido a la definición de red simétrica, la condición de equilibrada implica que $\alpha^{-k} \cdot (u^\sigma, i^\sigma) = (u^\sigma, i^\sigma) \cdot \sigma$, es decir la excitación de la red es igualmente equilibrada de secuencia k .

R3// Sean u_R, i_R, v_N, j_N los vectores de tensiones e intensidades de ramas, potenciales e intensidades de nudos de la red y $(u^k), (i^k), (v^k)$ y (j^k) las correspondientes familias de componentes simétricas con respecto a σ . Las relaciones $j=A.i$ y $u=A.v$ implican para todo $k \in P$, $j^k=A.i^k$ y $u^k=A.v^k$. Si (u,i) es un régimen la red cuando la excitación de la red es (u^φ, i^φ) , entonces (u^k, i^k) es un régimen cuando la excitación es $(u^{\varphi k}, i^{\varphi k})$. Si existe un régimen (u,i) de la red para una excitación (u^φ, i^φ) equilibrada de secuencia k , entonces existe también un régimen equilibrado de secuencia k correspondiente a la misma excitación.

Dem.: Estos resultados son consecuencia de la definición de red simétrica, de [R1] y de [R2]. Probaremos, por ejemplo, el último.

Sea (u,i) un régimen de la red cuando está sometida a la excitación equilibrada (u^φ, i^φ) del enunciado. Entonces (u^φ, i^φ) es la componente de secuencia k de (u^φ, i^φ) . En efecto, la familia de vectores (w^m, w'^m) , $m \in P$ tal que $w^m=0$ y $w'^m=0$ si $m \neq k$, $w^k=u^\varphi$ y $w'^k=i^\varphi$ es una descomposición de (u^φ, i^φ) en componentes simétricas, y esta descomposición es única [R1]. Las ecuaciones de la red simétrica son: i) $j=A.i$, ii) $j=0$, iii) $u=A.v$ y iv) $(u_z | i_v) = H_{LL} \cdot (i_z | u_v)$, siendo las matrices A y H circulantes con respecto a Γ y los conjuntos $|E|, |J|, |Y|, |Z|$ estables con respecto a Γ [§5.5]. En consecuencia, (u^k, i^k) es un régimen equilibrado de secuencia k correspondiente a la excitación (u^φ, i^φ) [R2]. □

En resumen, todo régimen de una red simétrica se puede descomponer en la suma de una familia de regímenes equilibrados. La excitación de cada uno de éstos es una componente de secuencia de la excitación correspondiente al citado régimen. Para que exista un régimen equilibrado de secuencia k de la red correspondiente a una excitación del mismo tipo es necesario y suficiente que exista un régimen cualquiera para dicha excitación. Nótese que el régimen equilibrado impone unas condiciones adicionales al sistema de ecuaciones de la red, condiciones que en el caso anterior son compatibles con el resto de relaciones entre las variables de la red. Si el vector u es

equilibrado de secuencia k y deriva de un vector de potenciales v , entonces también deriva de la componente v^k de secuencia k del vector v . Es decir si u es kirchoffiano y equilibrado existe siempre un vector de potenciales equilibrado del cual deriva. En lo que sigue supondremos que, dado un régimen (u, i) equilibrado de secuencia k , el vector correspondiente de potenciales es equilibrado de secuencia k .

6.3.-TENSIONES E INTENSIDADES EN EL REGIMEN EQUILIBRADO

Sean X un alfabeto sobre el cual opera Γ , w_x un vector equilibrado de secuencia k con respecto a σ y $\gamma = \alpha^{-k}$. Para cada $x \in X$, de acuerdo con la definición, se tiene $w_{\sigma \cdot x} = \gamma \cdot w_x$. Para cada entero m se verifica $w_{\sigma^m \cdot x} = \gamma^m \cdot w_x$. Es decir, conocido el valor de w_x es posible conocer el valor de w_y , para cada $y \in \Gamma \cdot x$. Si $w_x = 0$ entonces $w_y = 0$. Sea d el período de x con respecto a Γ . Se cumple $\sigma^d \cdot x = x$ y $w_x = \gamma^d \cdot w_x$. En consecuencia, si $\gamma^d \neq 1$, lo cual equivale a $kd \notin \mathbb{Z}$, entonces $w_x = 0$. En particular si x pertenece al neutro de X , se tiene $d=1$ y $w_x = 0$ salvo para la secuencia homopolar. Si w es equilibrado de secuencia homopolar, para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $y \in \Gamma \cdot x$ se tiene $w_y = w_x$.

Lo dicho en el párrafo precedente se aplica directamente a los potenciales de nudos y a las intensidades de nudos de la red simétrica en régimen equilibrado. Decimos que un nudo, una rama o un terminal pertenecen al **neutro** de la red si son neutros de los conjuntos N , R ó T , respectivamente. Si los vectores v y j de potenciales e intensidades de nudos de la red son equilibrados de secuencia no homopolar, entonces los potenciales e intensidades de los nudos del neutro son nulos. Si dichos vectores son equilibrados de secuencia homopolar entonces todos los nudos de una misma órbita de N por Γ , es decir de un mismo nudo p -fásico, tienen la misma intensidad y el mismo potencial. La operación de Γ sobre V^R tiene algunas características especiales que conviene resaltar.

R4// Sean $w \in V^R$ un vector equilibrado de secuencia k , $a, b \in R$ tales

que $|b| \in \Gamma \cdot |a|$, $\gamma = \alpha^{-k}$ y d el período de $|a|$. Existe un entero m tal que $|b| = \sigma^m \cdot |a|$. Se cumple: $w_b = \pm \gamma^m \cdot w_a$. Si se verifica una de las dos condiciones siguientes entonces $w_a = 0$: i) $-a \notin \Gamma \cdot a$ y $k d \notin \mathbb{Z}$; ii) $-a \in \Gamma \cdot a$ y $2kd/p$ no es un entero impar.

Dem.: La existencia de m se deriva de la definición de las órbitas. Si $|b| = \sigma^m \cdot |a|$, tenemos $b = \pm \sigma^m \cdot a$ y $w_b = \pm \gamma^m \cdot w_a$, de acuerdo con las definiciones. Si $-a \notin \Gamma \cdot a$, se cumple $\sigma^d \cdot a = a$ [5R1] y $w_a = \gamma^d \cdot w_a$. Si $-a \in \Gamma \cdot a$, se verifica $\sigma^d \cdot a = -a$ [5R1] y $-w_a = \gamma^d \cdot w_a$. Por último, las relaciones $\gamma^d = 1$ y $\gamma^d = -1$ equivalen, respectivamente, a $k d \in \mathbb{Z}$ y $2kd/p \in 1 + 2\mathbb{Z}$, como puede comprobar el lector. \square

El resultado anterior se aplica directamente a las tensiones e intensidades de ramas de la red simétrica en régimen equilibrado. Para que una rama $a \in R$ pertenezca al neutro es condición necesaria y suficiente que sus dos terminales pertenezcan al neutro [5R1]. Nótese que, de acuerdo con 5R1, una rama $a \in R$ puede no pertenecer al neutro, aunque la arista $|a|$ sea un neutro de A . En tal caso la órbita de a en R tiene dos elementos a y $-a$. Si el régimen de la red es equilibrado de secuencia no homopolar entonces las tensiones e intensidades de todas las ramas pertenecientes al neutro de la red son nulas. Si el régimen de la red es equilibrado de secuencia homopolar entonces las tensiones e intensidades de los arcos de una misma órbita de R por Γ , es decir pertenecientes al mismo arco p -fásico, son iguales. En este mismo supuesto, si un $a \in R$ verifica $-a \in \Gamma \cdot a$ entonces las tensiones e intensidades de los arcos de la órbita de a son todas nulas.

Ejemplo: Sea el de la fig.1 el grafo G de una red con la simetría σ definida:

$$\sigma.N : (11 \ 12 \ 13) (21 \ 22)$$

$$\sigma.R : (11 \ 12 \ 13) (21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 25 \ 26) (30 \ -30) \dots$$

La simetría σ es hexafásica. Si el régimen de la red es equilibrado de secuencia k con respecto a σ y el vector de potenciales de nudos también lo es, entonces tenemos los siguientes resultados:

$k=0$) Nulas la tensión e intensidad del arco 30.

k=1) Nulos los potenciales de todos los nudos y las tensiones e intensidades de los arcos 11, 12, 13 y 30.

k=2) Nulos los potenciales de los nudos 21 y 22 y las tensiones e intensidades del arco 30.

k=3) Nulos los potenciales de los nudos 11, 12 y 13 y las tensiones e intensidades de los arcos 11, 12 y 13.

k=4) Nulos los potenciales de los nudos 21 y 22 y la tensión e intensidad del arco 30.

k=4) Nulos los potenciales de todos los nudos y las tensiones e intensidades de los arcos 11, 12, 13 y 30.

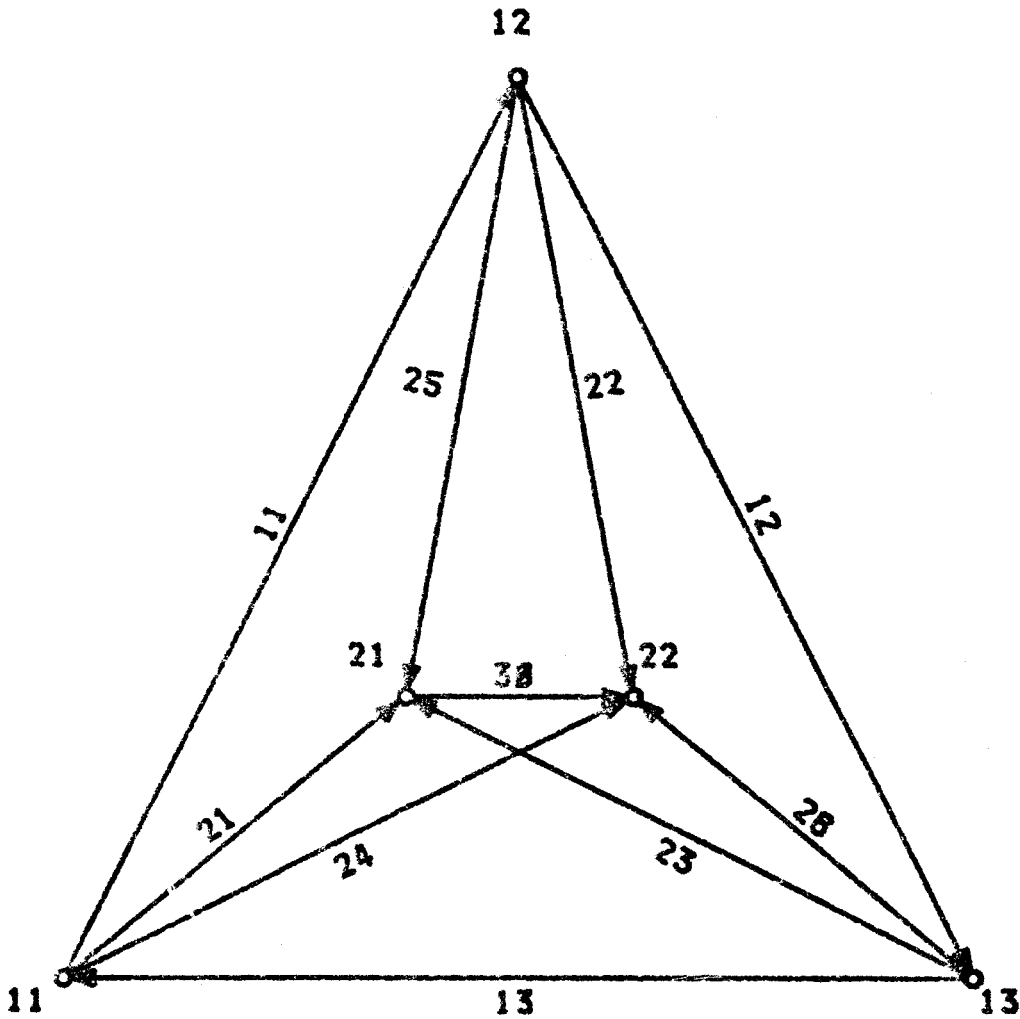


FIGURA 6.1

Obsérvese que si $k'=p-k$ la anulación de una tensión, intensidad o potencial por razones de simetría en el caso del régimen equilibrado de secuencia k implica la anulación para el caso de secuencia k' . La demostración de este resultado la dejamos al lector. □

6.4.-RELACIONES MONOFÁSICAS EN EL RÉGIMEN EQUILIBRADO

Sean $A^\circ \subset A$ y $N^\circ \subset N$ conjuntos de representantes de A/Γ y de N/Γ respectivamente [§5.3], es decir conjuntos de representantes de las aristas y nudos polifásicos de G con respecto a Γ , $R^\circ \subset R$ el conjunto de arcos correspondientes a las aristas A° . Al par (R°, N°) le denominamos **generatriz** del grafo G con respecto a Γ . Si el régimen (u, i) de la red es equilibrado de secuencia k , entonces basta con conocer las intensidades y tensiones de las ramas R° y los potenciales e intensidades de los nudos N° para conocer las variables correspondientes de las demás ramas y nudos de la red. Esto permite reducir las relaciones entre las variables de la red a relaciones entre las variables asociadas a una generatriz. En particular, las relaciones primarias entre las variables de la red pueden reducirse a relaciones entre las tensiones e intensidades de las ramas de la generatriz. A las relaciones resultantes les denominamos **relaciones primarias monofásicas** de la red en régimen equilibrado.

Para escribir las relaciones primarias monofásicas correspondientes a un régimen equilibrado de secuencia k , tomamos en cuenta las relaciones de §4.3 y §5.5. Ponemos $\chi = \alpha^{-k}$, $E^\circ = E \cap R^\circ$, $J^\circ = J \cap R^\circ$, $Y^\circ = Y \cap R^\circ$, $Z^\circ = Z \cap R^\circ$ y $L^\circ = L \cap R^\circ$. Como $|E|$, $|J|$, $|Y|$, $|Z|$ y $|L|$ son estables con respecto a Γ , $|E^\circ|$, $|J^\circ|$, $|Y^\circ|$, $|Z^\circ|$ y $|L^\circ|$ son conjuntos de representantes de las aristas polifásicas de $|E|, \dots, |L|$ con respecto a Γ . Las relaciones primarias monofásicas se reducen a los grupos siguientes:

i) Definición de las fuentes independientes de tensión:

$$u_{E^\circ} = u_{E^\circ}$$

ii) Definición de las fuentes independientes de intensidad:

$$i_{\sigma} = i^{\sigma}.$$

iii) Definición de los dispositivos lineales: Ponemos $w'_L = (i_1 | i_2)$ y $w_L = (u_1 | i_2)$ en la relación correspondiente de §5.5. Se tiene $w' = H \cdot w$ con $H^{\sigma} = H$. Para cada $a \in L$ se verifica:

$$w'_a = \sum_b h_{ab} \cdot w_b \quad (b \in L)$$

Sea un $b \in L^{\circ}$ y $b' \in R$. Si $|b'| \in \Gamma \cdot |b|$ entonces w_b se puede expresar en función de $w_{b'}$ [R4]. Dado que $|L|$ es estable con respecto a Γ se deduce que w'_a es expresable en función de los w_b , $b \in L^{\circ}$. Mostraremos que la relación indicada más arriba equivale a otra del tipo

$$w'_a = \sum_b h'_{ab} \cdot w_b \quad (b \in L^{\circ})$$

en donde los h'_{ab} son unos coeficientes que se calcularán. Por razones de claridad emplearemos la notación $h(a,b)$ y $h'(a,b)$ en vez de h_{ab} y h'_{ab} . Para cualesquiera $a \in L$, $b \in L^{\circ}$ los coeficientes anteriores deben verificar:

$$h'(a,b) \cdot w_b = \sum_{b'} h(a,b') \cdot w_{b'} \quad (b' \in L \mid |b'| \in \Gamma \cdot |b|)$$

Sea d el período de $|b|$ con respecto a Γ . Para cada $b' \in L$ tal que $|b'| \in \Gamma \cdot |b|$ existe un y sólo un entero m , $0 \leq m < d$ tal que $b' = +\sigma^m \cdot b$. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} h(a,b') \cdot w_b &= h(a, \sigma^m \cdot b) \cdot w_{\sigma^m \cdot b} \\ &= \gamma^m h(a, \sigma^m \cdot b) \cdot w_b \end{aligned}$$

y podemos escribir

$$h'(a,b) = \sum_m \gamma^m \cdot h(a, \sigma^m \cdot b) \quad (0 \leq m < d)$$

En consecuencia, podemos definir una nueva matriz $H'_L \cdot L^{\circ}$ con los coeficientes anteriores. De la relación $w' = H \cdot w$ derivamos la relación monofásica:

$$w'_L = H' \cdot w_L.$$

Veremos ahora algunas propiedades de los coeficientes $h'(a,b)$.

R5// Sean $b \in L^{\circ}$ y d el período de $|b|$ con respecto a Γ . Si se cumple al menos una de las condiciones siguientes, entonces $h'(\sigma \cdot a, b) = \gamma h'(a, b)$ para todo $a \in L$:

- i) $-b \in \Gamma \cdot b$ y $k \text{ dep } Z$
- ii) $-b \in \Gamma \cdot b$ y $2kd/p$ es un entero impar.

Dem.: Probaremos la i). Tenemos:

$$\begin{aligned}
h'(\sigma.a, b) &= \sum_m \gamma^m h(\sigma.a, \sigma^m.b) && \{0 \leq m < d\} \\
&= \sum_m \gamma^m h(a, \sigma^{m-1}.b) && \{0 \leq m < d\} \\
&= h(a, \sigma^{-1}.b) + \gamma \sum_m \gamma^m h(a, \sigma^m.b) && \{0 \leq m < d-1\} \\
&= \gamma \sum_m \gamma^m h(a, \sigma^m.b) && \{0 \leq m < d\} \\
&= \gamma h'(a, b)
\end{aligned}$$

ya que $H^\sigma = H$ por definición, $\sigma^{-1} = \sigma^{d-1}$ y $\gamma^d = \alpha^{-kd/p} = 1$.

La parte ii) se demuestra de modo similar, teniendo en cuenta que $\sigma^d.b = -b$ [5R1]. \square

R6// Sean $a \in L$ y $b \in L^\circ$ tales que $h'(\sigma.a, b) = \gamma h'(a, b)$ y d el período de $|a|$ con respecto a Γ . En cada uno de los casos siguientes, se verifica $h'(a, b) = 0$.

- i) $-a \notin \Gamma.a$ y $kd \notin pZ$.
- ii) $-a \in \Gamma.a$ y $2kd/p$ no es impar.

Dem.: Es similar a la de R4. \square

R7// Sean $a \in L$, $b \in L^\circ$ tales que a es una rama del neutro de la red y d el período de $|b|$. Si $k=0$ se tiene $h'(a, b) = d.h(a, b)$. Si $k \neq 0$ resulta:

$$h'(a, b) = (\gamma^d - 1) / (\gamma - 1) \cdot h(a, b)$$

Dem.: Es inmediata teniendo en cuenta que $H^\sigma = H$ y que $\sigma.a = a$. \square

Ejemplo: La red de la fig. 2 posee una simetría σ bifásica definida:

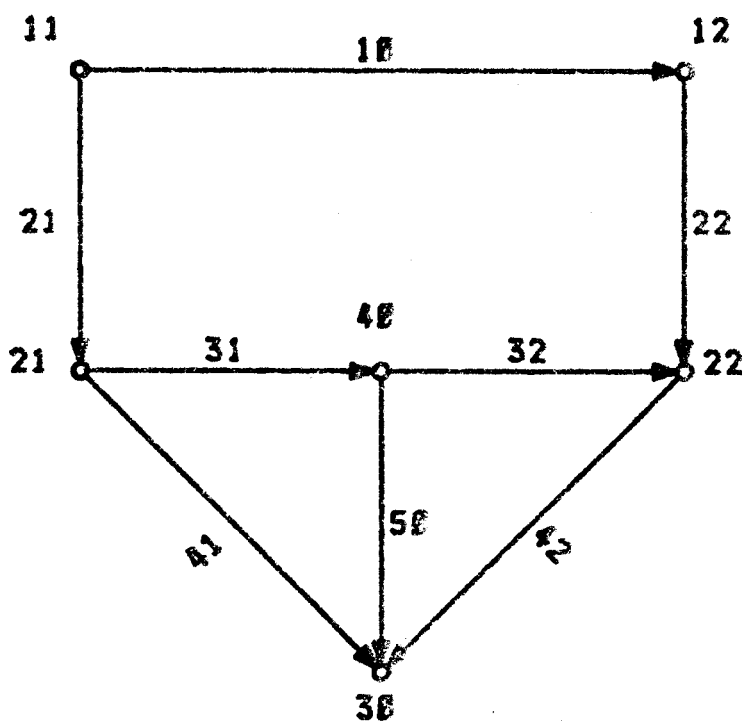
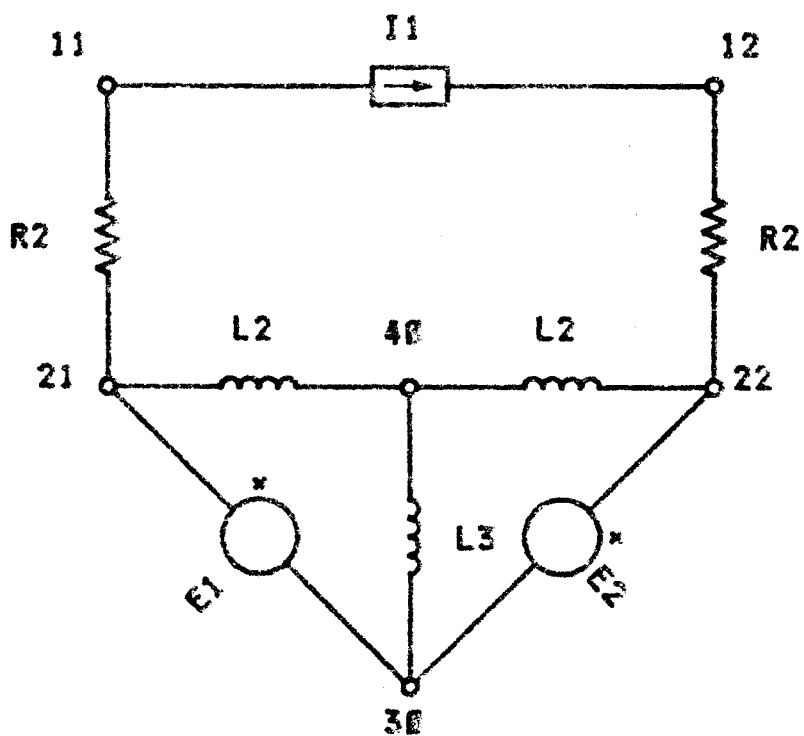
$$\sigma.N : (11 \ 12) (21 \ 22) (30) (40)$$

$$\sigma.R : (10 \ -10) (21 \ 22) (31 \ -32) (41 \ 42) (50) (-21 \ -22) \dots$$

$$(-50)$$

Los conjuntos $E = \{41, 42\}$, $J = \{10\}$, $Y = \emptyset$, $Z = \{21, 22, 31, 32, 50\}$ cumplen la propiedad de que sus respectivos conjuntos de aristas son estables con respecto a Γ .

FIGURA 6.2



La matriz H de la red es:

$$\begin{array}{c}
 \\
 21 \\
 22 \\
 31 \\
 32 \\
 50
 \end{array}
 \begin{array}{ccccc}
 21 & 22 & 31 & 32 & 50 \\
 \left[\begin{array}{ccccc}
 R2 & & & & \\
 & R2 & & & \\
 & & sL2 & -sM1 & -sM2 \\
 & & -sM1 & sL2 & sM2 \\
 & & -sM2 & sM2 & sL3
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Los conjuntos $R^\circ = \{10, 21, 31, 41, 50\}$ y $N^\circ = \{11, 21, 30, 40\}$ constituyen los arcos y nudos de una generatriz de G con respecto a Γ . Con las definiciones establecidas más arriba tenemos: $E^\circ = \{41\}$, $J^\circ = \{10\}$, $Z^\circ = \{21, 31, 50\}$, $Y^\circ = \emptyset$. Si esta red es equilibrada de secuencia k entonces podemos expresar las relaciones primarias entre las tensiones e intensidades de los arcos Z e Y en función de las tensiones e intensidades de los arcos Z° e Y° , utilizando la matriz H' definidas más arriba, que en nuestro caso es:

$$\begin{array}{c}
 \\
 21 \\
 31 \\
 50
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 21 & 31 & 50 \\
 \left[\begin{array}{ccc}
 R2 & & \\
 & sL2 + \gamma sM1 & -sM2 \\
 & -sM2 + \gamma sM2 & sL3
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Ejemplo: En la fig. 3 mostramos una red con una simetría trifásica definida:

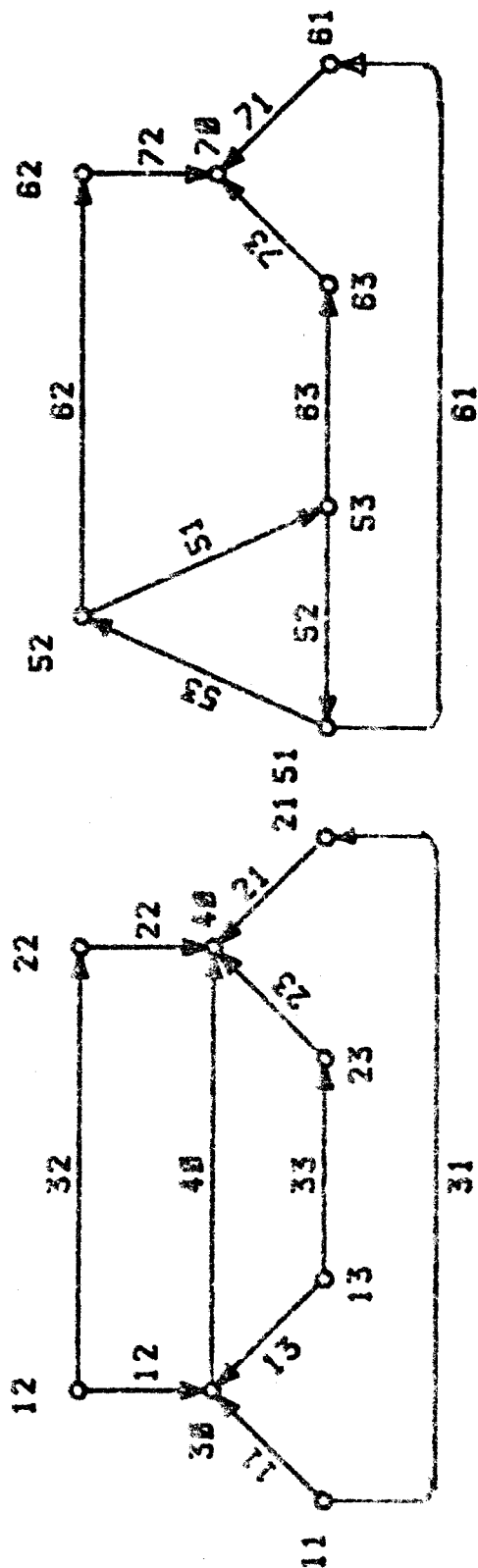
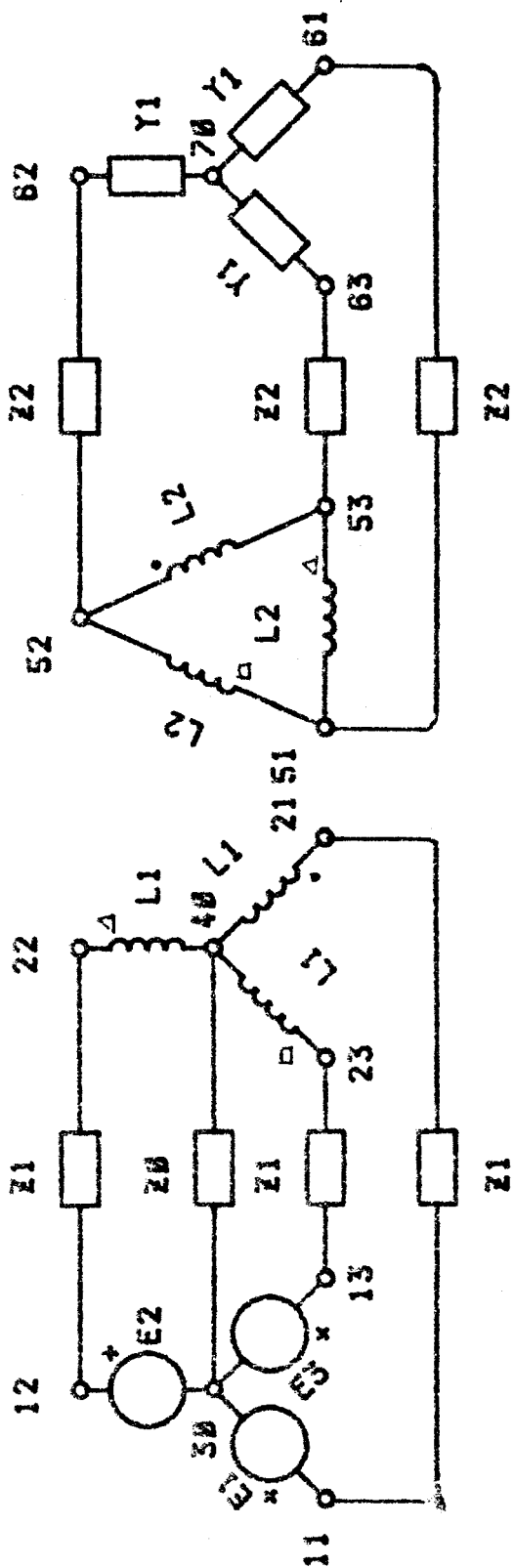
$$\begin{array}{l}
 \sigma.N : (11 \ 12 \ 13) (21 \ 22 \ 23) (30) (40) (51 \ 52 \ 53) (61 \ 62 \ 63) (70) \\
 \sigma.R : (11 \ 12 \ 13) (21 \ 22 \ 23) (31 \ 32 \ 33) (40) (51 \ 52 \ 53) \\
 \quad (61 \ 62 \ 63) (71 \ 72 \ 73) (-11 \ -12 \ -13) \dots (-71 \ -72 \ -73)
 \end{array}$$

Los conjuntos E, J, Z e Y vienen definidos:

$$\begin{array}{l}
 E = \{11, 12, 13\} \quad J = \emptyset \quad Y = \{71, 72, 73\} \\
 Z = \{21, 22, 23, 31, 32, 33, 40, 51, 52, 53, 61, 62, 63\}
 \end{array}$$

Los conjuntos $R^\circ = \{11, 21, 31, 40, 51, 61, 71\}$ y $N^\circ = \{11, 21, 30, 40, 51, 70\}$ definen los arcos y nudos de una generatriz de G con respecto a Γ . Con la terminología empleada más arriba se tiene: $Y^\circ = \{71\}$ y $Z^\circ = \{21, 31, 40, 51, 61\}$.

FIGURA 6.3



La matriz H de la red es:

	31	32	33	21	22	23	51	52	53	61	62	63	71	72	73	40
31	Z1															
32		Z1														
33			Z1													
21				sL1			sM									
22					sL1			sM								
23						sL1			sM							
51				sM			sL2									
52					sM			sL2								
53						sM			sL2							
61										Z2						
62											Z2					
63												Z2				
71													Y1			
72														Y1		
73															Y1	
40																Z0

La correspondiente matriz H' de la red supuesto un régimen equilibrado de secuencia k es:

	21	31	40	51	61	71
21	sL1			sM		
31		Z1				
40			Z0			
51	sM			sL2		
61					Z2	
71						Y1

CAP. VII: REDES DE SECUENCIA

=====

ADVERTENCIA: En todo este capítulo nos referiremos a una red eléctrica con un grafo G y una simetría p -fásica σ , definida como en §5.5. Nombraremos Γ el grupo generado por σ , $P=\{0,1,2,\dots,p\}$, $\alpha=\exp(2\pi j/p)$ y (R°, N°) una generatriz de G con respecto a Γ . Supondremos que el régimen de la red es equilibrado de secuencia k y pondremos $\gamma=\alpha^{-k}$.

7.1.-CONCEPTO DE RED DE SECUENCIA

En el §6.3 hemos visto que cuando el régimen de la red es equilibrado de secuencia k , todas las tensiones e intensidades de la red pueden expresarse en función de las tensiones e intensidades de los elementos de la directriz. Nos planteamos ahora el obtener una red constituida esencialmente por los arcos y nudos de la generatriz, tal que sus variables y relaciones sean esencialmente las variables y relaciones monofásicas de la red original. Una red con tales características la denominamos **red de secuencia**. Nótese que la definición es un tanto imprecisa por el uso de la palabra 'esencial'. La imprecisión se debe a que si suprimiéramos dicha palabra, impondríamos a la definición unas condiciones imposibles de cumplir en la mayoría de los casos. Así por ejemplo, para que los arcos y nudos de la generatriz sean los arcos y nudos de un grafo, se necesita que todos los extremos de los arcos de la generatriz sean nudos de la generatriz, lo cual puede no ser cierto. En otras ocasiones el conjunto de arcos de la generatriz no es suficiente para representar las relaciones kirchoffianas. Por último a veces es necesario introducir nuevas variables para obtener una red que de algún modo verifique las

relaciones monofásicas de la red original. El desarrollo de estas cuestiones nos permitirá concretar el sentido de la definición de red de secuencia.

7.2.-REDES CON SIMETRÍA REGULAR

Decimos que la simetría σ de la red es **regular** si cada órbita de N y de A por Γ tiene exactamente p elementos. Entonces cada órbita de T y de R tiene también p elementos [SR1]. Consideramos dos casos:

A) Todos los extremos de los arcos R° de G pertenecen a N° . Consideremos la red cuyo grafo es el subgrafo de G definido por los arcos R° y los nudos N° , cuyas fuentes independientes son las mismas que las correspondientes a los arcos del subgrafo de la red original y cuyas relaciones primarias son las correspondientes relaciones monofásicas de la red original. Veamos que constituye una red de secuencia. Llamamos u e i a los vectores de tensiones e intensidades de la red original y u' e i' a los de la nueva red. La equivalencia entre ambas redes se entiende en el sentido de que a toda relación entre las variables u' e i' de ciertos arcos de G' le corresponde una relación monofásica equivalente entre las variables u e i asociadas a los mismos arcos de G . En cuanto a las relaciones primarias la cuestión es inmediata por definición. Por otra parte, los arcos inciden en los mismos nudos que en la red original de modo que las ecuaciones correspondientes a la segunda ley de Kirchoff son equivalentes a las de la red original. Sólo resta por ver que en los nudos correspondientes de la red original inciden exactamente los mismos arcos que en la red de secuencia. Supongamos que en un $q \in N^\circ$ de la red original incidiera un $a \in R^\circ$. Debido a la definición de R° existe un $b \in R^\circ$ y un entero $0 < m < p$ tal que $|a| = \sigma^m \cdot |b|$. Por la definición de los morfismos de grafos, existe un extremo q' de b tal que $\sigma^m \cdot q' = q$. Entonces $q \neq q'$. Ahora bien, de acuerdo con las hipótesis $q' \in N^\circ$, ya que es un extremo de un arco perteneciente a R° , y una misma órbita de N tendría dos representantes, en contra

de la definición de N° . Es decir en los nudos N° de la red original inciden exactamente los mismos arcos que en la red de secuencia. Por lo tanto las ecuaciones correspondientes a la primera ley de Kirchoff son equivalentes en ambas redes. La nueva red así definida es una red de secuencia.

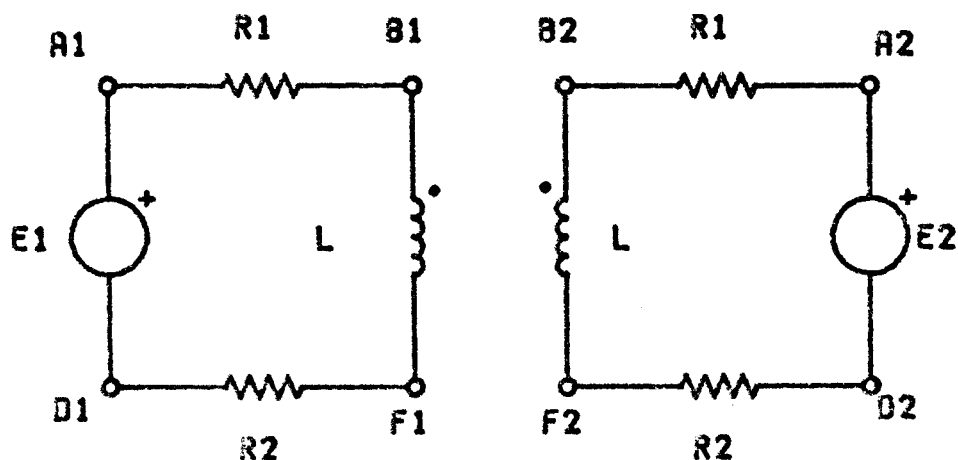


FIGURA 7.1

Ejemplo: En la fig. 1 mostramos una red y en la 2 su grafo G , con un conjunto de ramas impedancia $Z=\{21,22,31,32,41,42\}$, un conjunto de ramas admitancia $Y=\emptyset$ y una matriz H de dispositivos lineales definida:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & 21 & 22 & 31 & 32 & 41 & 42 \\
 21 & \left[\begin{array}{cccccc}
 R1 & & & & & \\
 & R1 & & & & \\
 & & sL & sM & & \\
 & & sM & sL & & \\
 & & & & R2 & \\
 & & & & & R2
 \end{array} \right] \\
 22 \\
 31 \\
 32 \\
 41 \\
 42
 \end{array}
 \end{array}$$

Se comprueba fácilmente que el grafo G posee una simetría bifásica σ definida:

$$\begin{aligned}
 \sigma.N &: (A1 A2) (B1 B2) (D1 D2) (F1 F2) \\
 \Sigma.R &: (11 12) (21 22) (31 32) (41 42)
 \end{aligned}$$

que es también una simetría regular de la red. Los conjuntos $R^\circ=\{11,21,31,41\}$ y $N^\circ=\{A1,B1,D1,F1\}$ constituyen los arcos y nudos

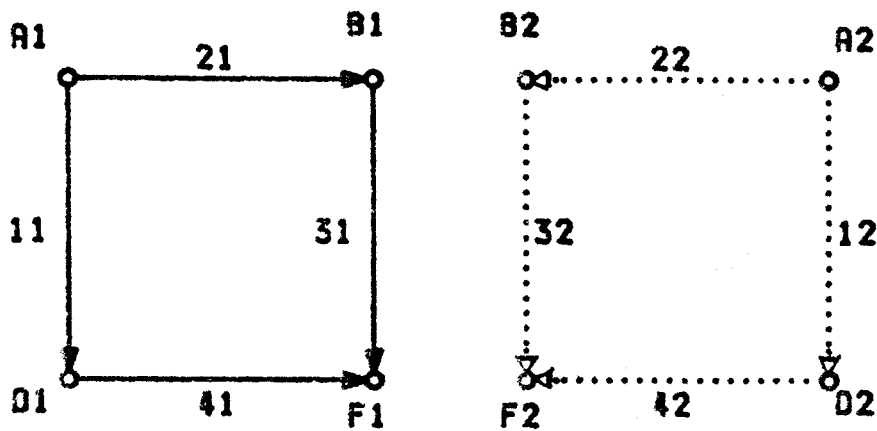


FIGURA 7.2

de una generatriz de G con respecto a Γ . En el grafo G se han indicado con línea llena los arcos que pertenecen a la generatriz y con línea de puntos los que no pertenecen a ella. Se cumple la propiedad de que todos los arcos de la generatriz inciden en un nudo de la misma. Por lo tanto el subgrafo de G constituido por los los arcos y nudos de la generatriz es el grafo de la red de secuencia. En la fig. 3 se muestra dicha red. Sus dispositivos son los de la red original, salvo la impedancia Z cuyo valor es $sL + \gamma sM$, valiendo $\gamma = 1$ para la red de secuencia homopolar y $\gamma = -1$ para la de secuencia directa. \square

B) No todos los extremos de los arcos R° pertenecen a N° . Consideremos el subgrafo G' de G definido por los arcos R° , los extremos de dichos arcos y los nudos N° . Definimos un nuevo grafo constituido por el subgrafo anterior, un nudo q° más y unos ciertos arcos adicionales definidos del siguiente modo: a) El origen de cada arco adicional es un nudo de G' ; b) su final es el nudo q° ; c) entre cada nudo de q de G' y el nudo q° hay como máximo un arco; d) para que q sea origen de uno de tales arcos es necesario y suficiente que exista al menos otro nudo de G' que pertenezca a la misma órbita de N por Γ . Definimos ahora una nueva red cuyo grafo es el anteriormente definido, cuyas fuentes

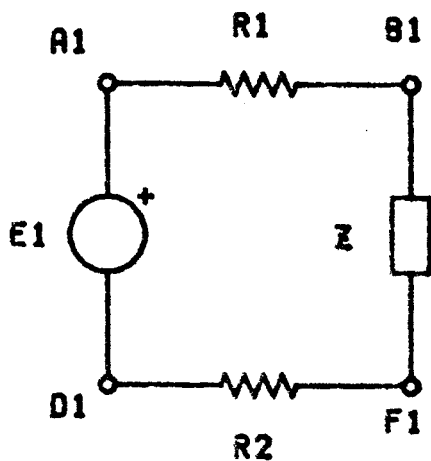


FIGURA 7.3

independientes son las correspondientes a los arcos del subgrafo G' de G , cuyas relaciones primarias correspondientes a los dispositivos de los arcos de G' son las relaciones primarias monofásicas de la red original y cuyos dispositivos situados sobre los arcos adicionales son los siguientes: Si un arco adicional a tiene su origen en un nudo q no perteneciente a N° entonces existe un arco adicional a' y un entero m tal que a' tiene su origen en un nudo $q' \in N^\circ$ y $q = \sigma^m \cdot q'$. Entonces definimos el dispositivo de a escribiendo $u_a = \gamma^m \cdot u_{a'}$, es decir se trata de una fuente de tensión dependiente. Si un arco adicional a tiene origen $q \in N^\circ$ entonces definimos su dispositivo escribiendo:

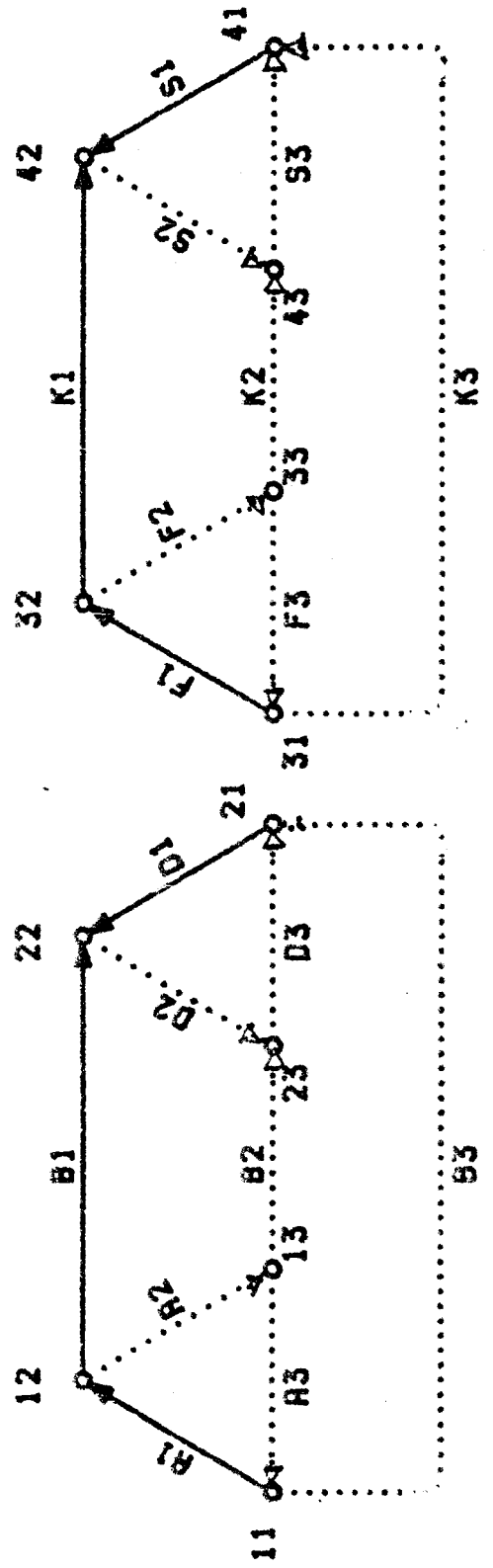
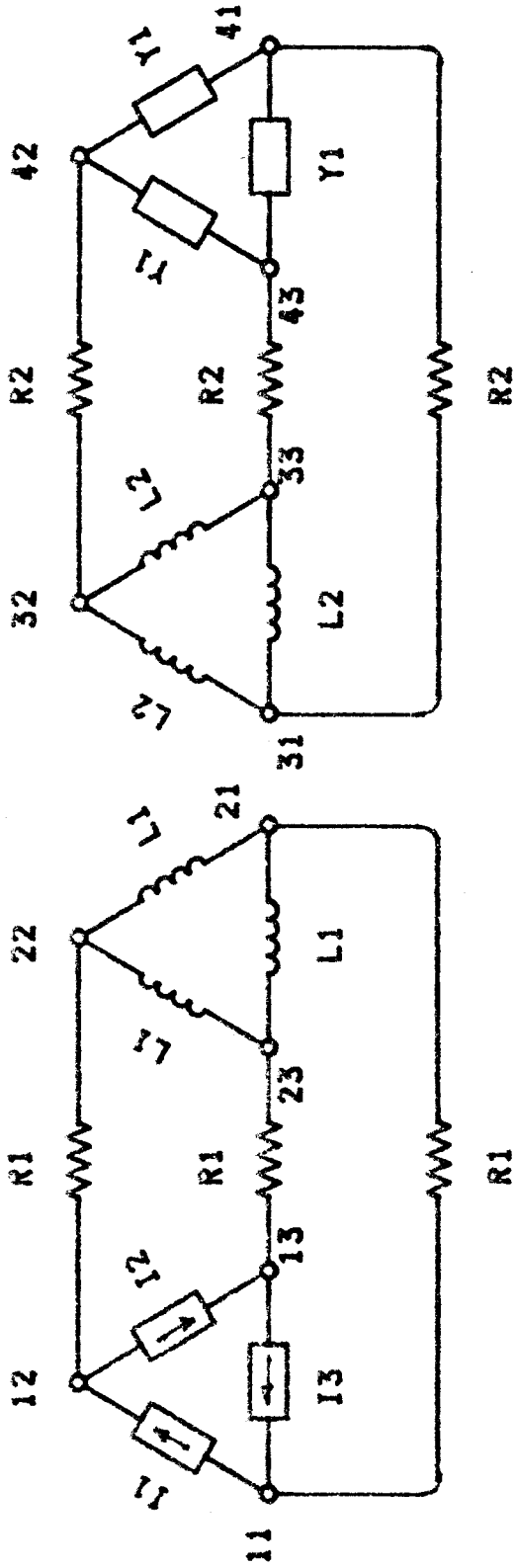
$$i_a = -\sum_{a'} \gamma^{m(a')} \cdot i_{a'}$$

en donde el sumatorio se extiende a todos los arcos adicionales distintos de a cuyo origen q' pertenece a la misma órbita de q en N , y siendo $m(a')$ un entero tal que $q' = \sigma^{m(a')} \cdot q$. Por último atribuimos a q° un potencial 0, con lo cual las tensiones de los arcos adicionales son los potenciales de sus nudos origen.

Veamos que la nueva red así definida es una red de secuencia. Las relaciones primarias entre los dispositivos de los arcos de G' y las de la segunda ley de Kirchoff correspondientes a los mismos arcos son evidentemente equivalentes a los de la red original. La definición de las fuentes de tensión dependientes de los arcos adicionales equivale igualmente a la definición de los

potenciales equilibrados de la red original. Sólo queda por mostrar que las ecuaciones de la primera ley de Kirchoff de la nueva red son equivalentes a las de la red original. Para ello consideremos un nudo q de la generatriz. La primera ley de Kirchoff aplicada al nudo q de la red original se formula: La suma de las intensidades de los arcos virtuales de G que tienen origen en q es nula. Para cada arco virtual a de la red original no perteneciente a la generatriz y con origen q existe un arco virtual a' de la generatriz tal que para un cierto entero m , $a' = \sigma^m \cdot a$. Entonces, el origen de a' es $q' = \sigma^m \cdot q$ y a' (como arco virtual) y q' pertenecen a G' . $i_{a'} = \gamma^{-m} \cdot i_a$. Sea a'' el arco adicional de la nueva red con origen q' y final q'' . La primera ley de Kirchoff aplicada al nudo q' de la nueva red implica que sumando $i_{a''}$ más las intensidades de los arcos virtuales de G' que tienen su origen en q' el resultado es nulo. Es decir $-i_{a''}$ es la contribución del arco a' a la intensidad del arco a'' . Por la definición del dispositivo situado sobre el arco adicional que tiene su origen en el nudo q , resulta que i_a contribuye con $\gamma^{-m} \cdot i_a$ a la intensidad del nudo q en la nueva red. Pero esa contribución es igual precisamente a la intensidad del arco a de la red original. Dado que la suma de las intensidades de nudos de G' es nula [3R4], entonces la intensidad del nudo q'' es nula. En consecuencia las ecuaciones de la primera ley de Kirchoff de la nueva red son equivalentes a las de la red original.

Ejemplo: En las figs. 4 y 5 se muestra una red y su grafo G . El conjunto de ramas impedancia de la red es $Z = \{B1, B2, B3, D1, D2, D3, F1, F2, F3, K1, K2, K3\}$ el conjunto de ramas admitancia es $Y = \{S1, S2, S3\}$. La correspondiente matriz H es:



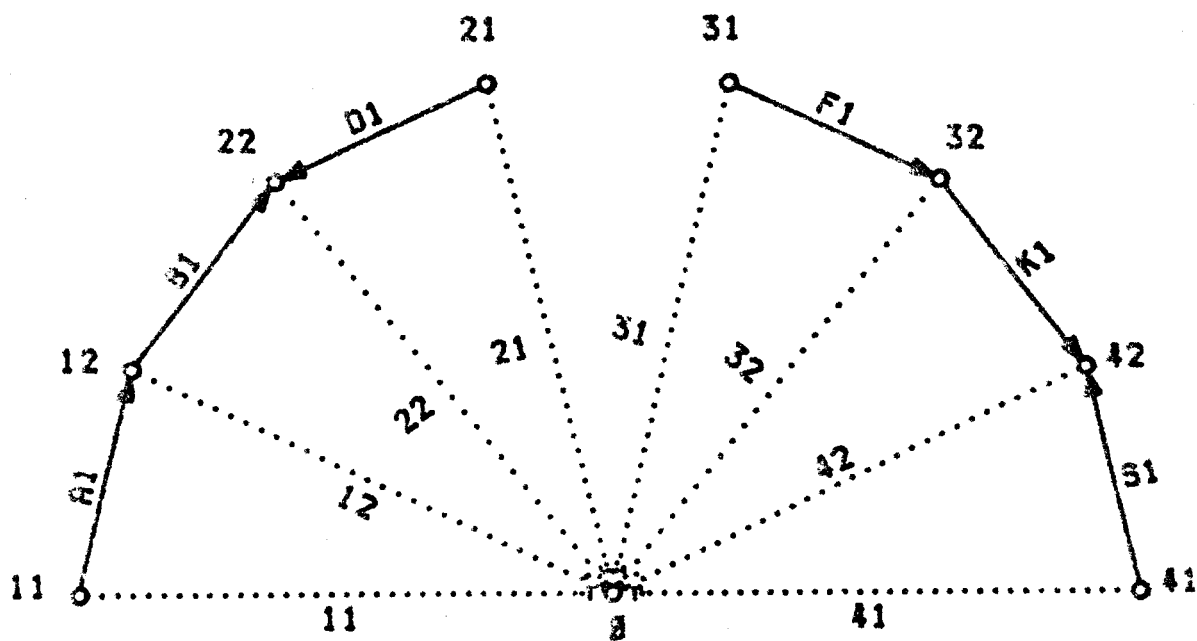
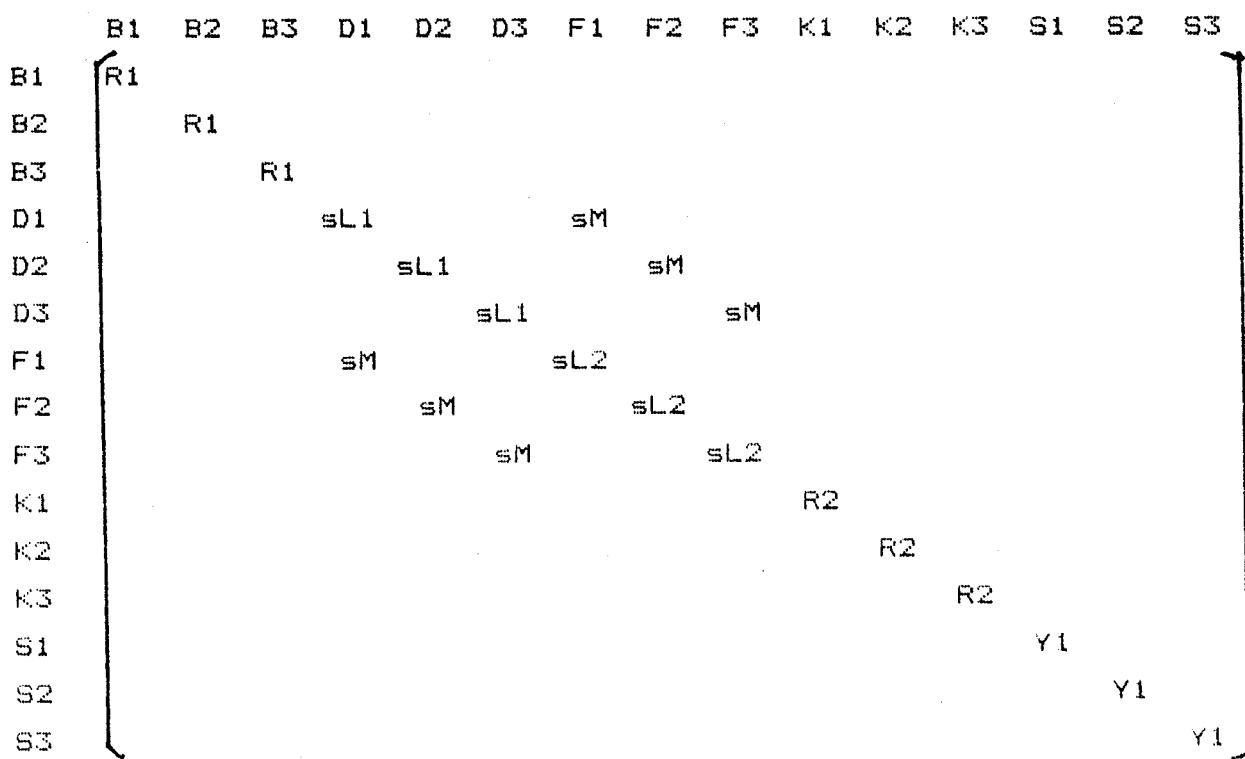


FIGURA 7.6

Esta red tiene una simetría regular σ definida

$$\sigma.N : (11\ 12\ 13)(21\ 22\ 23)(31\ 32\ 33)(41\ 42\ 43)$$

$\sigma.R : (A1 A2 A3) (B1 B2 B3) (D1 D2 D3) (F1 F2 F3) (K1 K2 K3)$
 $(S1 S2 S3)$

Los conjuntos $R^\circ = \{A1, B1, D1, F1, K1, S1\}$ Y $N^\circ = \{11, 21, 31, 41\}$ definen una generatriz de G con respecto a Γ . En la fig. 5 se han indicado con línea llena los arcos pertenecientes a la generatriz. En la fig. 6 se muestra el grafo G' de la red de secuencia, construido según lo dicho más arriba.

En la fig. 7 se muestra la red de secuencia, en la cual las fuentes dependientes situadas sobre las ramas adicionales 11, 12, 21, 22, 31, 32, 41, 42 están definidas:

$$i_{11} = -\gamma^{-1} i_{12}$$

$$u_{12} = \gamma u_{11}$$

...

$$i_{41} = -\gamma^{-1} i_{42}$$

$$u_{42} = \gamma u_{41}$$

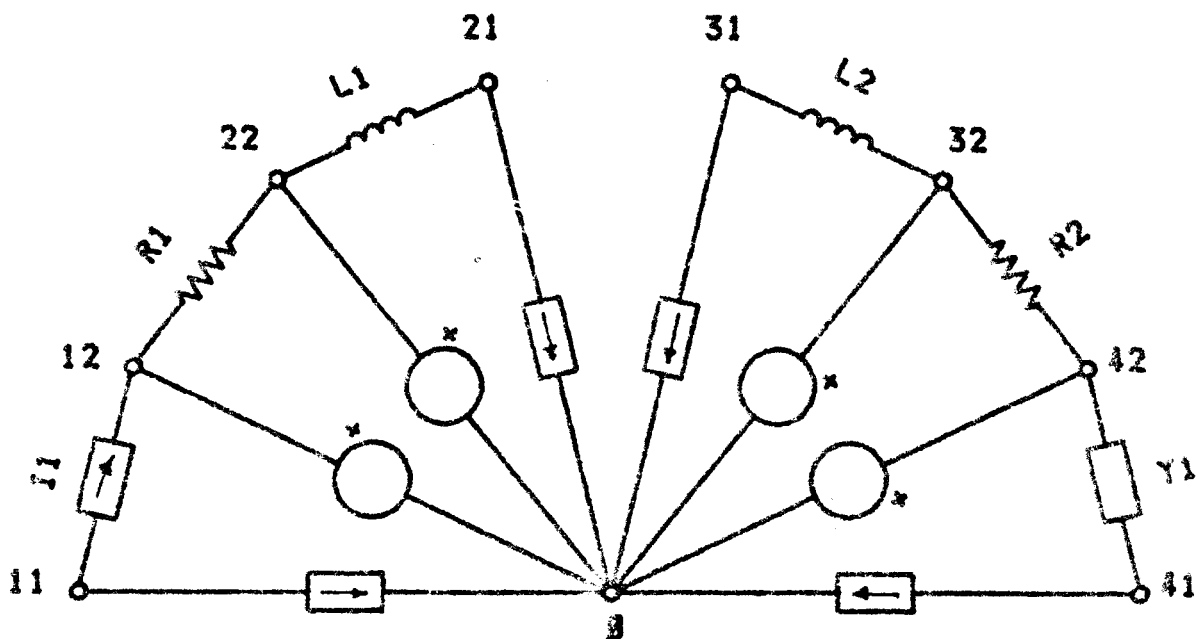


FIGURA 7.7

En el ejemplo que nos ocupa a partir de la red de secuencia obtenida es posible derivar otra sin fuentes dependientes y con los arcos de la generatriz (fig.8). Las tensiones e intensidades de los arcos B1 y K1 de esta nueva red son los mismos que los de

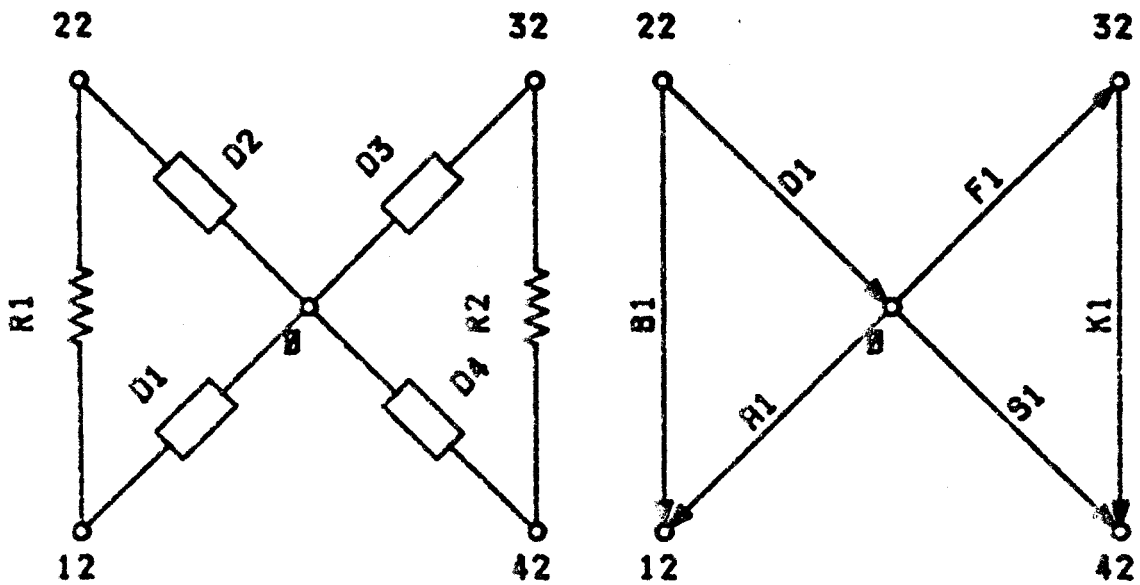


FIGURA 7.8

la red de secuencia. Las nuevas tensiones e intensidades de la rama D1 son $u_{B1} = (\gamma/\gamma-1) \cdot u_{D1}$ e $i_{B1} = (1-\gamma)^{-1} \cdot i_{D1}$, etc. Las ecuaciones primarias de los nuevos dispositivos D1, D2, D3, D4 se obtienen por cambio de variables a partir de las ecuaciones primarias de los dispositivos a los que sustituyen. Sin embargo esta transformación no es general, es decir hay otros casos en que no es posible eliminar las fuentes dependientes sin grandes alteraciones de la estructura de la red de secuencia. □

7.3.-MORFISMOS DE GRAFOS Y LEYES DE KIRCHOFF

Hasta aquí hemos visto las propiedades de las simetrías de grafos, que no son sino una clase particular de morfismos, con respecto a las leyes de Kirchoff. Ahora abordaremos otras relacionadas con las morfismos en general. En todo este epígrafe escribiremos $\delta(i,k)$ en vez de δ^i_k por razones de claridad.

R1// Sean G y G' sendos grafos con las correspondientes matrices de incidencia nudos-arcos $A_{N \times R}$ y $A'_{N' \times R'}$ y $\tau \in \text{Mor}(G, G')$ y las matrices $M_{N \times N}$ y $M'_{N' \times N'}$ definidas:

$$m_{q \cdot q} = \delta(q', \tau \cdot q)$$

y

$$m'_{1,1} = \delta(a', \tau.a) - \delta(-a', \tau.a)$$

para cualesquiera $q \in N$, $q' \in N'$, $a \in R$, $a' \in R'$. Entonces se verifica: $M.A = A'.M'$.

Dem.: El coeficiente de índices $q'a$ del producto $M.A$ es:

$$\begin{aligned} & \sum_{q \in N} \delta(q', \tau.q) \cdot (\delta(q, \nu_1(a)) - \delta(q, \nu_2(a))) \quad \{q \in N\} \\ & = \delta(q', \tau.\nu_1(a)) - \delta(q', \tau.\nu_2(a)) \end{aligned}$$

Por otra parte, recordando que $\nu_1(a) = \nu_2(-a)$ y que $\nu_i(\tau.a) = \tau.\nu_i(a)$ para todo $a \in R$, el coeficiente correspondiente a los mismos índices del producto $A'.M'$ es:

$$\begin{aligned} & \sum_{a' \in R'} (\delta(q', \nu_1(a')) - \delta(q', \nu_2(a'))) \cdot (\delta(a', \tau.a) - \delta(-a', \tau.a)) \quad \{a' \in R'\} \\ & = \sum_{a' \in R'} (\delta(q', \nu_1(a')) \cdot \delta(a', \tau.a) - \delta(q', \nu_2(a')) \cdot \delta(a', \tau.a)) \quad \{a' \in R'\} \\ & = \delta(q', \tau.\nu_1(a)) - \delta(q', \tau.\nu_2(a)) \end{aligned}$$

De ahí el resultado. \square

Ejemplo: En la fig.9 se muestran dos grafos G (el superior) y G' (el inferior). Definimos un $\alpha \in \text{Mor}(G, G')$ mediante las tablas siguientes:

N	11	12	13	21	22	23	31	41
σ	1	1	1	2	2	2	3	4

R	11	12	13	21	22	23	31	32	33	41
σ	-1	-1	-1	2	2	2	3	3	3	-4

la igualdad $M.A = M'.A'$ de R_1 aplicada a este caso se formula:

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
 \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 11 & 12 & 13 & 21 & 22 & 23 & 31 & 41 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 11 & 12 & 13 & 21 & 22 & 23 & 31 & 32 & 33 & 41 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} 1 & & & & & & & 1 & & & & \\ & 1 & & & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & -1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & -1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & -1 & & & & \\ -1 & -1 & -1 & & & & & & & & 1 \\ & & & -1 & -1 & -1 & & & & & -1 \end{array} \right] =
 \end{array}$$

$$= \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -1 \\ & 1 & & -1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 21 & 22 & 23 & 31 & 32 & 33 & 41 \\ -1 & -1 & -1 & & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} & 11 & 12 & 13 & 21 & 22 & 23 & 31 & 32 & 33 & 41 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & & \\ -1 & -1 & -1 & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & -1 & -1 & -1 & -1 & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \square$$

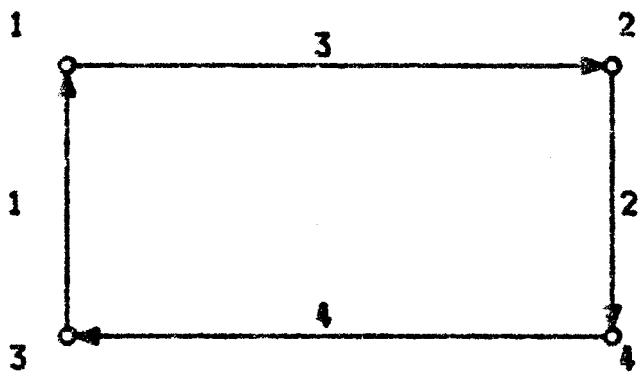
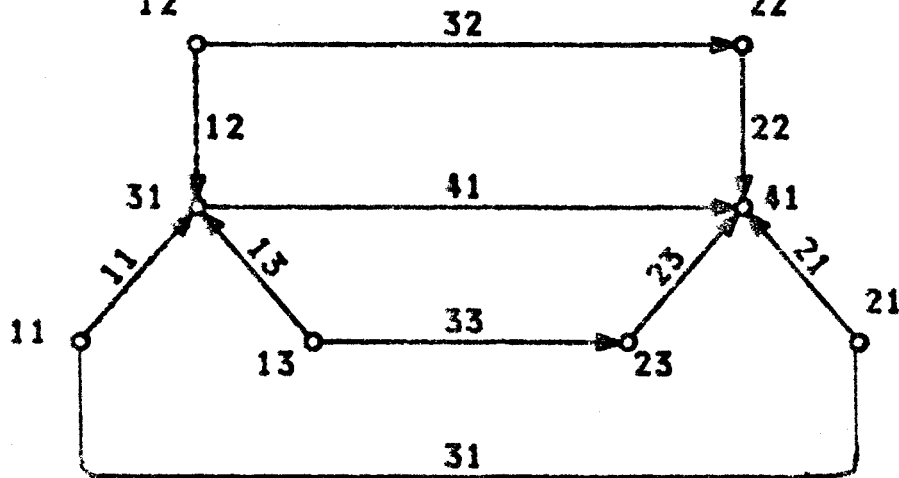


FIGURA 7.9

R2// Sean G, G', τ, M, M' los del enunciado anterior e i, i' vectores de intensidades de arcos de los grafos G y G' respectivamente, tales que $i' = M'.i$ y j y j' los vectores de intensidades de nudos derivados de i e i' . Se verifica $j' = M.j$. Si i es kirchoffiano, i' lo es también. Para cualesquiera $a' \in R'$ y $q' \in N'$, se tiene:

$$i'_a = \sum_a i_a \quad \{a \in R \mid \tau.a = a'\}$$

y

$$j'_{q'} = \sum_q j_q \quad \{q \in N \mid \tau.q = q'\}$$

Dem.: Inmediata a partir de las definiciones y de R2. En cuanto a la última parte, de acuerdo con la definición de i' y de j' , para cualesquiera $a' \in R'$ y $q' \in N'$, se verifica:

$$\begin{aligned} i'_a &= \sum_a (\delta(a', \tau.a) - \delta(-a', \tau.a)) \cdot i_a && \{a \in R\} \\ &= \sum_a \delta(a', \tau.a) \cdot i_a && \{a \in R\} \\ &= \sum_a i_a && \{a \in R \mid \tau.a = a'\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} j'_{q'} &= \sum_q \delta(q', \tau.q) \cdot j_q && \{q \in N\} \\ &= \sum_q j_q && \{q \in N \mid \tau.q = q'\} \quad \square \end{aligned}$$

Como consecuencia del resultado precedente, podemos asociar a cada vector i de intensidades de arcos de G y a cada vector j de intensidades de nudos de G un vector i' de intensidades de arcos de G' y un vector j' de intensidades de nudos de G' . Además, i'_a y $j'_{q'}$ son respectivamente iguales a la suma de las intensidades de los arcos virtuales de G cuya imagen por τ es a' y a la suma de las intensidades de los nudos de G cuya imagen por τ es q' . Decimos que i' y j' son los vectores inducidos respectivamente por i y j mediante τ . Si j deriva de i , entonces j' deriva de i' . Si i es kirchoffiano, i' lo es también.

R3// Sean G, G', τ, M, M' los de R1 y v, v' vectores de potenciales de nudos de los grafos G y G' respectivamente, tales que $v = M.v'$ y u y u' los vectores de tensiones de arcos derivados de v y v' . Se verifica $u = M'.u'$. Si u' es kirchoffiano, u lo es también. Para cualesquiera $a \in R$ y $q \in N$ se tiene:

$$v_a = v'_{\tau.a}$$

y

$$u_{\tau} = u'_{\tau}.$$

Dem.: Inmediata a partir de las definiciones y de R1. En cuanto a la última parte, para cualesquiera $a \in R$ y $q \in N$ se verifica:

$$\begin{aligned} v_q &= \sum_{q'} \delta(q', \tau, q) \cdot v'_{q'} & \{q' \in N'\} \\ &= v'_{\tau, q} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u_{\tau} &= \sum_{a'} (\delta(a', \tau, a) - \delta(-a', \tau, a)) \cdot u'_{a'} & \{a' \in R'\} \\ &= \sum_{a'} \delta(a', \tau, a) \cdot u'_{a'} & \{a' \in R'\} \\ &= u'_{\tau, \tau} \quad \square \end{aligned}$$

Como consecuencia del resultado precedente, podemos asociar a cada vector u' de tensiones de arcos de G' y a cada vector v' de potenciales de nudos de G' , respectivamente, un vector u de tensiones de arcos de G y un vector v de potenciales de nudos de G . v_q y u_{τ} son respectivamente iguales al potencial del nudo imagen por τ de q y a la tensión del arco virtual imagen de a por τ . Decimos que u y v son los vectores **inducidos** por u' y v' mediante τ . Si u' deriva de v' , entonces u deriva de v . Si u' es kirchoffiano, u lo es también.

Ejemplo: El morfismo σ de la fig.9 establece las siguientes relaciones entre las tensiones e intensidades de arcos, las intensidades y potenciales de nudos de ambos grafos:

$$\begin{aligned} u_{11} &= u_{12} = u_{13} = -u'_1 \\ u_{21} &= u_{22} = u_{23} = u'_2 \dots \\ i_1 &= -i_{11} - i_{12} - i_{13} \\ i'_2 &= i_{21} + i_{22} + i_{23} \dots \\ v_{11} &= v_{12} = v_{13} = v'_1 \\ v_{21} &= v_{22} = v_{23} = v'_2 \dots \\ j_1 &= j_{11} + j_{12} + j_{13} \\ j'_2 &= j_{21} + j_{22} + j_{23} \dots \square \end{aligned}$$

7.4. RED DE SECUENCIA HOMOPOLAR

Sean una red eléctrica simétrica definida en la forma habitual funcionando en régimen equilibrado homopolar y (R^b, N^o)

una generatriz de G con respecto a Γ . Definimos a partir del grafo G de la red un nuevo grafo $G^\circ = (T^\circ, R^\circ, N^\circ, \nu^\circ)$ que será el grafo de la red de secuencia homopolar del siguiente modo: i) T° es el conjunto de los terminales de los arcos R° ; ii) Para cada $t \in T^\circ$ sea $q \in N^\circ$ el representante de $\Gamma \cdot \nu(t)$, ponemos $\nu^\circ(t) = q$. El grafo G° está bien definido, al ser N° un conjunto de representantes de las órbitas de N por Γ . Ahora definimos un $\tau \in \text{Mor}(G, G^\circ)$ con las propiedades siguientes:

R4// Sean A y A° los conjuntos de aristas de G y G° . Existe un $\tau \in \text{Mor}(G, G^\circ)$ tal que:

i) Para cada $a \in R$ sea m el menor entero $m \geq 0$ tal que $\sigma^{-m} \cdot |a| \in A^\circ$, entonces $\tau \cdot a = \sigma^{-m} \cdot a$.

ii) Para cada $q \in N$, sea $q^\circ \in N^\circ$ el representante de $\Gamma \cdot q$, entonces $\tau \cdot q = q^\circ$. Si $q \in N^\circ$, $\tau \cdot q = q$. La relación $\tau \cdot q = q^\circ$ equivale a $q \in \Gamma \cdot q^\circ$.

iii) Para todo $a \in R$ se verifica la propiedad i). Además $\tau \cdot a \in \Gamma \cdot a$. Si $a \in R^\circ$ entonces $\tau \cdot a = a$.

iv) Sean $a^\circ \in R^\circ$ y d el período de $|a^\circ|$ con respecto a Γ . Para todo $a \in R$ son equivalentes las dos relaciones siguientes: 1) $\tau \cdot a = a^\circ$; 2) Existe un y sólo un entero m , $0 \leq m < d$ tal que $a = \sigma^m \cdot a^\circ$.

Dem.: Las propiedades i) y ii) son, en realidad, la definición de τ . Del concepto de generatriz se deduce que para todo $a \in R$ existe un y sólo un $a^\circ \in R^\circ$ tal que $|a| \in \Gamma \cdot |a^\circ|$. Sea d el período de $|a^\circ|$. Existe un y sólo un entero $0 \leq m < d$ tal que $|a| = \sigma^m \cdot |a^\circ|$. Poniendo $\tau \cdot a = \sigma^{-m} \cdot a$ se tiene la propiedad i). Para cada $t \in T$ existe un y sólo un $a \in R$ tal que $t \in |a|$. Entonces $\tau \cdot t = \sigma^{-m} \cdot t$, en donde m es el definido anteriormente. En consecuencia $\tau \cdot t$ está bien definida y τ existe. Veamos que es efectivamente un morfismo. De la definición se deduce que τ hace corresponder a cada arista de G una de G° . Por otra parte, sean $t \in T$, y $q \in N$ tales que $q = \nu(t)$. Por la definición de τ , resulta que $t^\circ = \tau \cdot t \in \Gamma \cdot t$ y que $q^\circ = \tau \cdot q$ es el único nudo tal que $q^\circ \in N^\circ \cap \Gamma \cdot q$. Por el concepto de simetría resulta que $\nu(t^\circ) \in \Gamma \cdot q$. Por la definición de G° resulta que $\nu^\circ(t^\circ)$ es el único nudo de $N^\circ \cap \Gamma \cdot q$. En consecuencia $\tau \cdot \nu(t) = \nu^\circ(\tau \cdot t)$. Con lo cual queda demostrado que τ es un morfismo.

La demostración de iii) y iv) la dejamos al lector. \square .

FIGURA 7.10

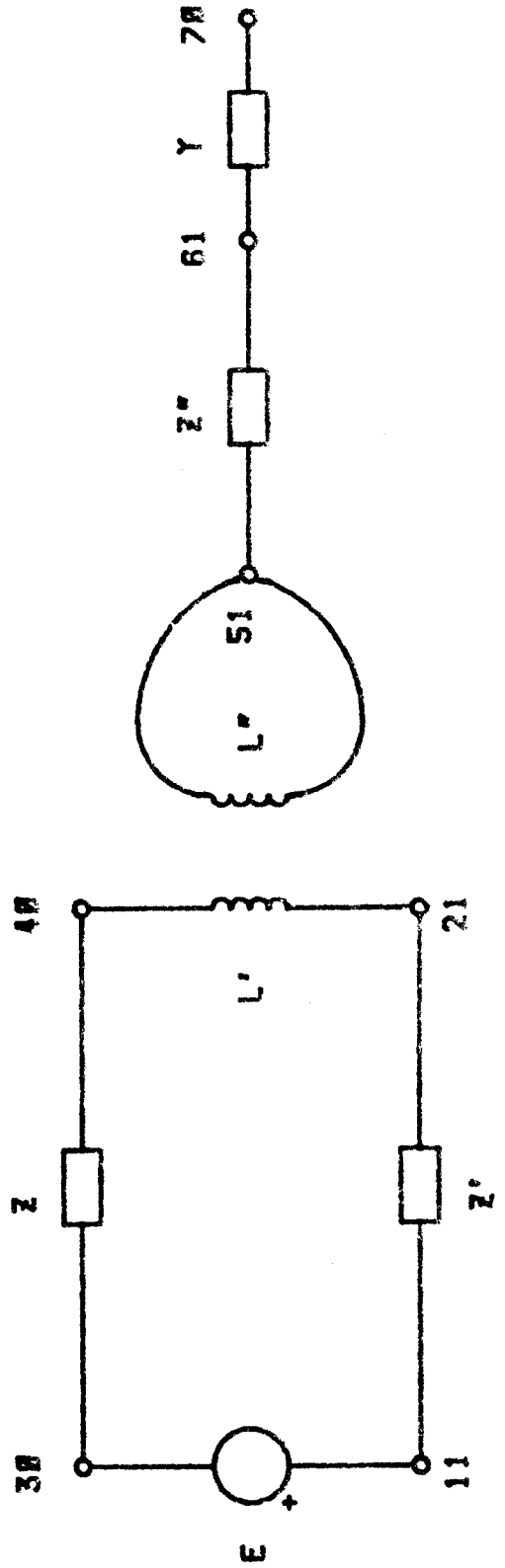
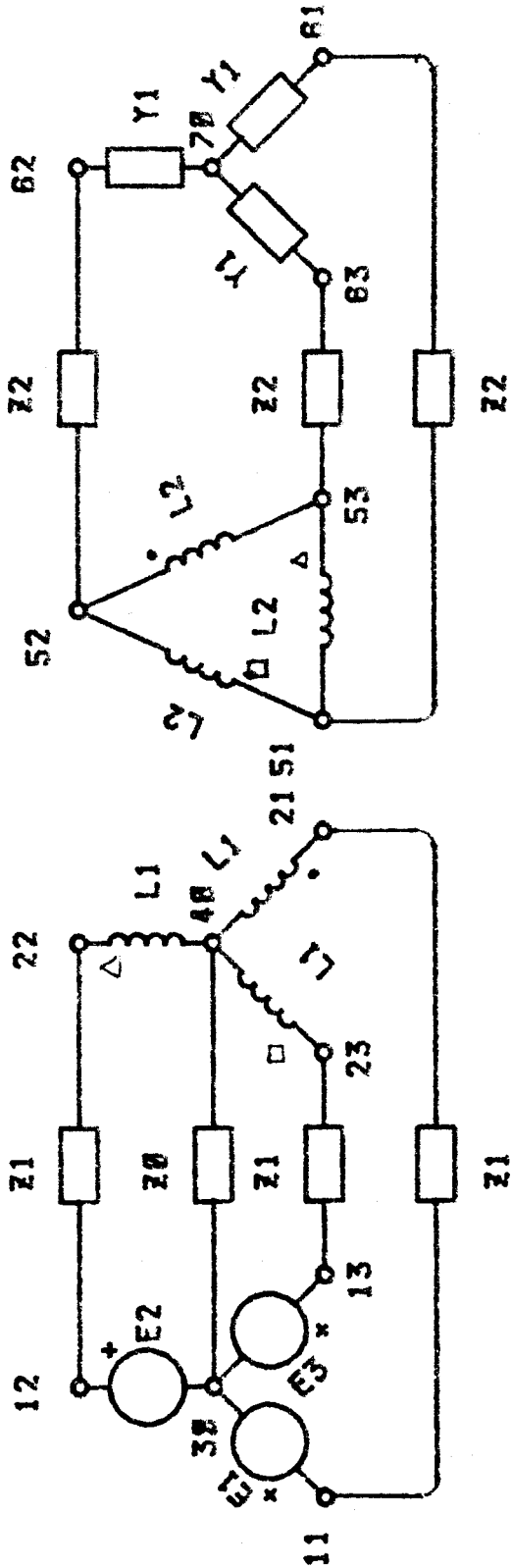
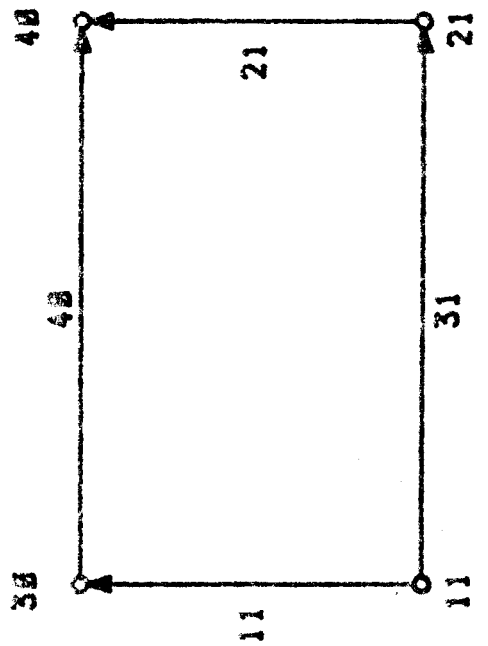
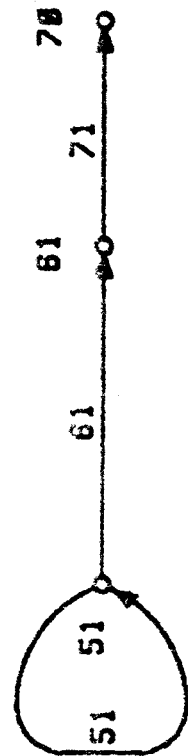
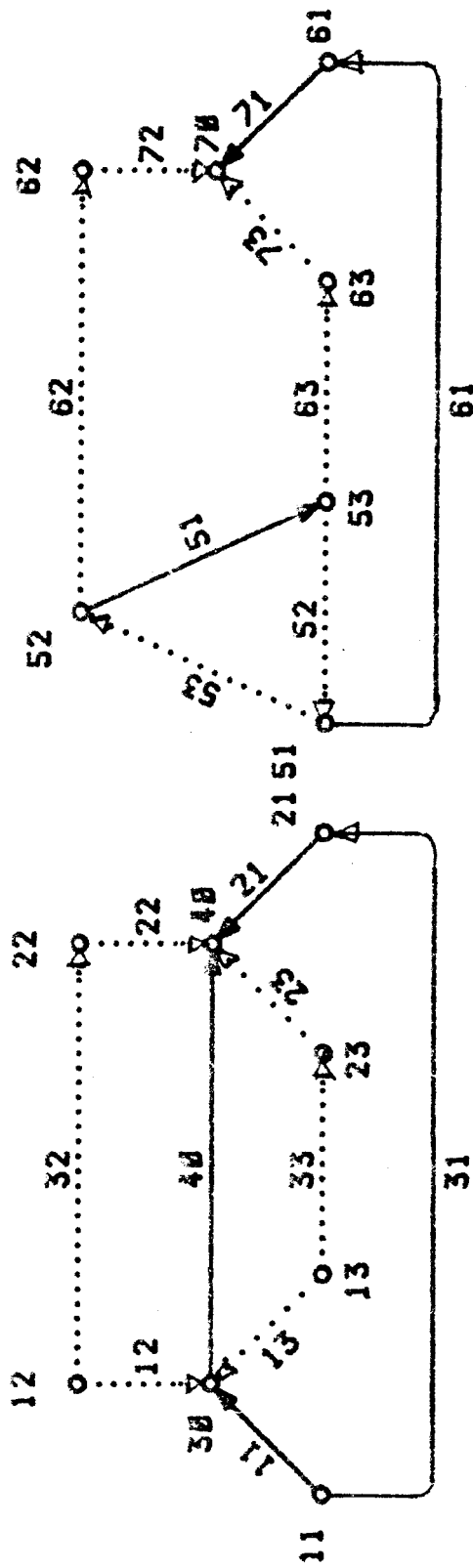


FIGURA 7.11



Es decir, a partir del grafo G hemos definido un nuevo grafo cuyas aristas y nudos son los de la generatriz de G y un morfismo que hace corresponder a cada nudo y arista de G el nudo y arista de la generatriz pertenecientes a la misma órbita por Γ .

Ejemplo: En la parte superior de las figs. 10 y 11 se muestra una red con su correspondiente grafo. Se define una simetría σ de la red escribiendo:

$$\begin{aligned} \sigma.N &: (11\ 12\ 13)(21\ 22\ 23)(30)(40)(51\ 52\ 53) \\ &\quad (61\ 62\ 63)(70) \\ \sigma.R &: (11\ 12\ 13)(21\ 22\ 23)(31\ 32\ 33)(40) \\ &\quad (51\ 52\ 53)(61\ 62\ 63)(71\ 72\ 73) \end{aligned}$$

En el grafo se indican en línea llena los arcos de una generatriz. Se supone que la red funciona en régimen homopolar. En la parte inferior de la fig.11 se muestra el grafo de la red de secuencia definido de acuerdo con lo dicho más arriba. Se ha tomado como conjunto $N^{\circ} = \{11, 21, 30, 40, 51, 61, 70\}$. Los dispositivos de la red de secuencia se definirán más adelante y se muestran en la parte inferior de la fig.10. Las nuevas impedancias y admitancias valen $Z=Z_0$, $Z'=Z_1/3$, $Z''=Z_2/3$, $Y=3Y_1$, $L'=L_1/3$, $L''=L_2/3$, $M'=M/3$. La fuente E toma el valor E_1 . \square

De acuerdo con 87.3 a cada vector kirchoffiano i de intensidades de ramas de G le podemos hacer corresponder un vector kirchoffiano i' de intensidades de ramas de G° inducido por τ y a cada vector u' de tensiones kirchoffianas de rama de G° le podemos hacer corresponder un vector u de tensiones kirchoffianas de rama de G .

R5// Sean u' un vector kirchoffiano de tensiones de ramas de G° y u el vector de tensiones de ramas de G inducido por u' mediante τ . Para cada $a \in R^{\circ}$ se cumple $u_a = u'_a$. El vector u es kirchoffiano equilibrado de secuencia homopolar. Recíprocamente a cada vector u kirchoffiano de secuencia homopolar podemos hacerle corresponder un vector u' que induce u por medio de τ .

Dem.: Veamos que el vector inducido u es de secuencia homopolar. Si u' es kirchoffiano entonces deriva de un vector v' equilibrado

de secuencia homopolar de potenciales de nudos de G° [6R3]. Definimos un vector v de potenciales de nudos de G escribiendo $v_q = v_{\Gamma.q}$ para todo $q \in N$. Entonces u deriva de v [R3]. Además v es equilibrado de secuencia homopolar. En efecto, para cualesquiera $q \in N^\circ$, $q' \in \Gamma.q$ se tiene $v_q = v_{q'}$, de acuerdo con la definición de v y de τ . De aquí que u es equilibrado de secuencia homopolar [5R7]. La demostración de la reciprocidad la dejamos al cuidado del lector. \square

R6// Sean i un vector kirchoffiano de intensidades de ramas de G equilibrado de secuencia homopolar e i' el vector de intensidades de G° inducido i mediante τ . Para cada $a^\circ \in R^\circ$ se verifica $i'_{a^\circ} = d_{\Gamma.a^\circ} \cdot i_{a^\circ}$, siendo $d_{\Gamma.a^\circ}$ el período de $|a^\circ|$ con respecto a Γ . Si $-a^\circ \in \Gamma.a^\circ$ se tiene $i'_{a^\circ} = 0$. Recíprocamente para cada vector i' kirchoffiano de intensidades de ramas de G° que cumple la última condición, existe un vector i kirchoffiano de intensidades de ramas de G de secuencia homopolar tal que i' es el inducido por i mediante τ .

Dem.: Sea i' el inducido por i mediante τ . De acuerdo con R2, para todo $a^\circ \in R^\circ$ se cumple:

$$i'_{a^\circ} = \sum i_{a^\circ} \quad (a \in R \mid \tau.a = a^\circ)$$

De acuerdo con R4, y teniendo en cuenta que i es un vector de secuencia homopolar, esta suma puede escribirse:

$$i'_{a^\circ} = \sum m_i i_{a^\circ} \quad (m \in Z \mid 0 \leq m < d_{\Gamma.a^\circ}) \\ = d_{\Gamma.a^\circ} \cdot i_{a^\circ}$$

En donde $d_{\Gamma.a^\circ}$ es el período de $|a^\circ|$. Igualmente, la relación $-a^\circ \in \Gamma.a^\circ$ implica $i_{a^\circ} = 0$ y $i'_{a^\circ} = 0$.

Demostraremos ahora la reciprocidad. Sea $q \in N$ y $q^\circ = \tau.q$ e i' un vector de intensidades kirchoffiano de arcos G° tal que $i'_{a^\circ} = 0$ para todo $a^\circ \in R^\circ$ que cumpla $-a^\circ \in \Gamma.a^\circ$. Definimos un vector i de intensidades de arcos de G poniendo $i_a = (1/d_{\Gamma.a^\circ}) \cdot i'_{a^\circ}$ para todo $a \in R$. Veamos que i es equilibrado homopolar. Basta con probar que $i_a = i_{a'}$ para cualesquiera $a^\circ \in R^\circ$ y $a \in \Gamma.a^\circ$. En efecto $|a| \in \Gamma.|a^\circ|$ y $d_{\Gamma.a} = d_{\Gamma.a^\circ}$. Sea $m \geq 0$ el menor entero tal que $|a| = \sigma^m \cdot |a^\circ|$. Entonces $\tau.a = \sigma^{-m}.a = \underline{a^\circ}$ por definición de τ . Si $\tau.a = a^\circ$ se tiene $i_a = (1/d_{\Gamma.a^\circ}) \cdot i'_{a^\circ} = i_{a^\circ}$. Si $\sigma^{-m}.a = -a^\circ$, se verifica $-a^\circ \in \Gamma.a^\circ$ y $i'_{a^\circ} = i_{a^\circ} = i_{a^\circ} = 0$. Es inmediato que i induce i' mediante τ . Veamos por

último que i es kirchoffiano. Sean j y j' los vectores de intensidades de nudos de G y G° correspondientes a i e i' respectivamente, $q \in N$ y $q' = \tau \cdot q$. $j' = 0$ y j es equilibrado homopolar [5R6]. De acuerdo con R2 tenemos:

$$j'_a = \sum_a \tau_a \cdot j_a \quad \{q' \in N \mid \tau \cdot q' = q^\circ\}$$

De las propiedades de τ resulta que la relación $\tau \cdot q' = q^\circ$ equivale a $q' \in \Gamma \cdot q$. En consecuencia, $j'_a = d_a \cdot j_a$ y $j_a = 0$. Por lo tanto i es kirchoffiano. \square

Como consecuencia de R5 y R6 a cada régimen (u, i) kirchoffiano equilibrado de secuencia homopolar de G , le corresponde un régimen (u', i') kirchoffiano de G° , tal que $i'_a = 0$ para todo $a \in R^\circ$ tal que $-a \in \Gamma \cdot a$, y recíprocamente. Para todo $a \in R^\circ$ se tiene $u'_a = u_a$ y $i'_a = d_{i, a} \cdot i_a$. Es decir, las nuevas tensiones de los arcos de la generatriz son iguales a las originales, las nuevas intensidades son iguales a las anteriores multiplicadas por factores que dependen sólo de G . Falta definir la nueva red primaria para tener la red de secuencia homopolar. Recordando las relaciones primarias monofásicas [§6.4] tenemos:

i) Fuentes independientes de la red de secuencia: $\forall a \in J^\circ$, $i'_a = i_a = d_{i, a} \cdot i_a$; $\forall a \in E^\circ$, $u'_a = u_a = u_a$.

ii) Dispositivos lineales de la red de secuencia: Tendremos una relación primaria del tipo $(u'_z - i'_z \psi) = H'' \cdot (i'_z - i_u \psi)$, en donde H'' viene definida del siguiente modo: 1) $\forall a, b \in Z^\circ$: $h''_{ab} = h_{ab} / d_{i, a}$; 2) $\forall a \in Z^\circ$, $\forall b \in Y^\circ$: $h''_{ab} = h_{ab}$; 3) $\forall a \in Y^\circ$, $\forall b \in Z^\circ$: $h''_{ab} = h_{ab} \cdot d_{i, a} / d_{i, b}$; 4) $\forall a \in Y^\circ$, $\forall b \in Y^\circ$: $h''_{ab} = h_{ab} \cdot d_{i, a}$.

iii) Relaciones adicionales debidas al régimen homopolar: Para todo $a \in R^\circ$ tal que $-a \in \Gamma \cdot a$: $u'_a = 0$ y $i'_a = 0$.

7.5. REDES DE SECUENCIA: CASO GENERAL

Sea una red eléctrica simétrica definida en la forma habitual con un régimen equilibrado. Como primer paso hacia la obtención del grafo correspondiente a una red de secuencia construimos un grafo $G_0 = (T_0, R_0, N_0, \nu^\circ)$ con una simetría σ_0 y un $\tau \in \text{Mor}(G_0, G)$ del siguiente modo:

Sean T° el conjunto de los terminales y A° el conjunto de las aristas de los arcos de R° . Escribimos $T_0 = T^\circ \times P$ y $N_0 = N^\circ \times P$. Para cualesquiera $t \in T^\circ$, $a = (t, t') \in R^\circ$, $b = (t, t') \in A^\circ$, $q \in N^\circ$, $k \in P$ ponemos t_k en vez de (t, k) , $a_k = (t_k, t'_k)$, $b_k = (t_k, t'_k)$, q_k en vez de (q, k) . Definimos R_0 como el conjunto de los a_k anteriores y R_0 como el conjunto de los $a_k \in R_0$ tales que $a_k \in R^\circ$. Entonces las b_k anteriores constituyen el conjunto A_0 de aristas de G_0 . Dotamos al conjunto P de una estructura de grupo con la operación suma módulo p . Ya hemos visto que este grupo es isomorfo a Γ . Definimos σ_0 poniendo $\sigma_0.t_k = t_{k+1}$ y $\sigma_0.q_k = q_{k+1}$ (sumas mod. p) para cualesquiera $t \in T^\circ$, $q \in N^\circ$, $k \in P$. Para cada $t \in T^\circ$ existe un y sólo un $q \in N^\circ$ tal que $\nu(t) \in \Gamma.q$. Sea $m \in P$ el menor número tal que $\sigma^m.q = \nu(t)$. Escribimos $\nu^0(t_k) = q_{k+m}$ (suma mod. p) para todo $k \in P$. Para cualesquiera $k \in P$, $t \in T^\circ$, $q \in N^\circ$ ponemos $\tau.t_k = \sigma^k.t$ y $\tau.q_k = \sigma^k.q$. Identificamos cada elemento $t \in T^\circ$, $a \in R^\circ$, $b \in A^\circ$, $q \in N^\circ$ con los correspondientes $t_0 \in T_0$, $a_0 \in R_0$, $b_0 \in A_0$ y $q_0 \in N_0$. Dejamos al cuidado del lector la demostración de que los objetos construidos son efectivamente un grafo G_0 , una simetría σ_0 y un morfismo τ con las propiedades siguientes:

- i) Para cualesquiera $a \in R^\circ$, $b \in A^\circ$, $k \in P$ se tiene $-a_k = (-a)_k$, $|a_k| = |a|_k$, $\sigma_0.a_k = a_{k+1}$, $\sigma_0.b_k = b_{k+1}$ (sumas mod. p).
- ii) (R°, N°) es una generatriz de G_0 con respecto al grupo Γ_0 generado por σ_0 , la cual es una simetría p -fásica regular.
- iii) $\tau \circ \sigma_0 = \sigma_0 \circ \tau$.
- iv) Para cualesquiera $q \in N^\circ$ y $a \in R^\circ$ se tiene $\tau.q = q$ y $\tau.a = a$.

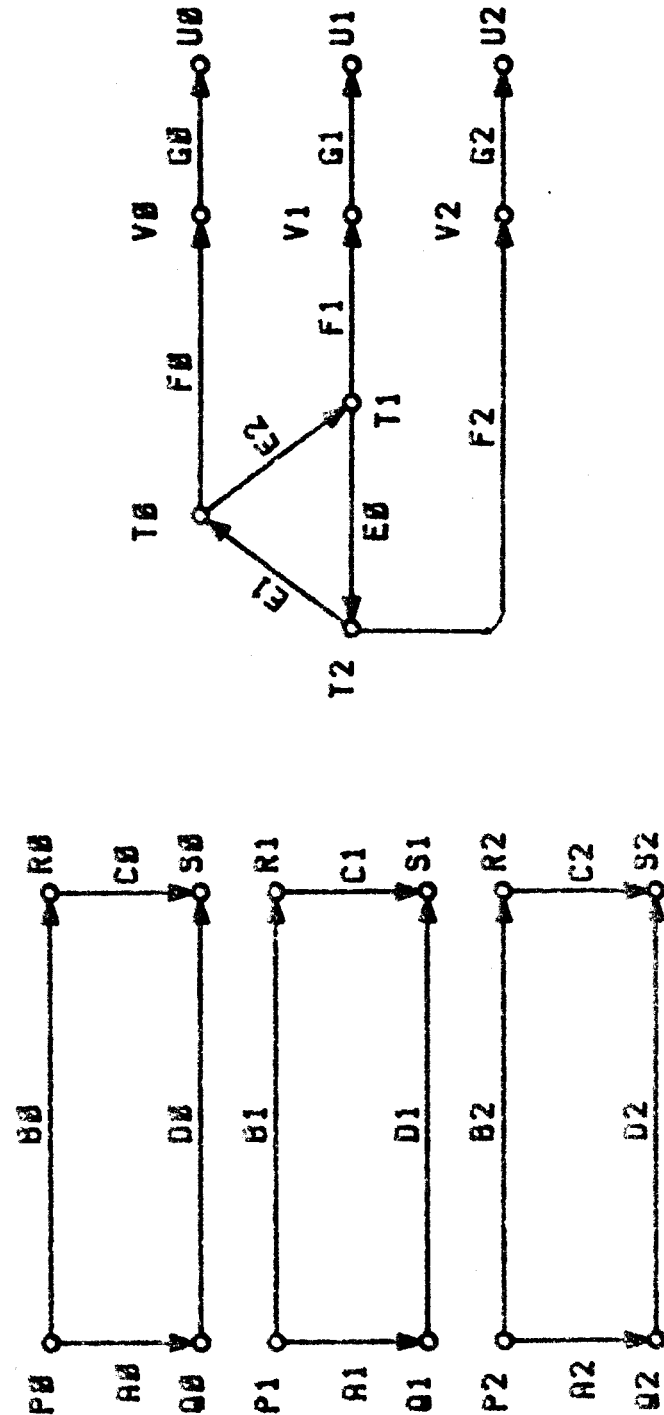
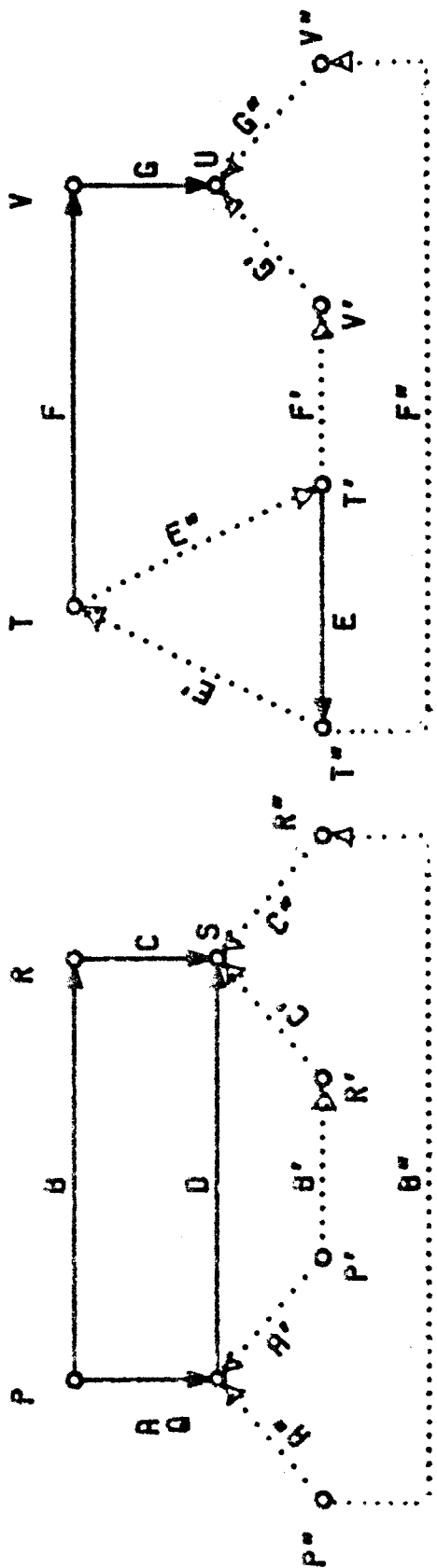
Al grafo G_0 así construido le decimos una **expansión** de G con respecto a Γ .

Ejemplo: En la fig.12 (parte superior) mostramos un grafo G con una simetría trifásica σ definida:

$$\begin{aligned} \sigma.N &: (P \ P' \ P'') (Q) (R \ R' \ R'') (S) (T \ T' \ T'') (U) (V \ V' \ V'') \\ \sigma.R &: (A \ A' \ A'') (B \ B' \ B'') (C \ C' \ C'') (D) (E \ E' \ E'') (F \ F' \ F'') \\ & \quad (G \ G' \ G'') \dots \end{aligned}$$

Se han dibujado con línea llena los arcos de una generatriz con respecto a Γ . Se ha tomado como conjunto $N^\circ = \{P, Q, R, S, T, U, V\}$. En

FIGURA 7.12



la parte inferior de la misma figura se muestra una expansión G_0 de G , la cual posee una simetría σ_0 trifásica regular definida:

$$\sigma_0.N : (P_0 P_1 P_2)(Q_0 Q_1 Q_2)\dots(V_0 V_1 V_2)$$

$$\sigma_0.R : (A_0 A_1 A_2)(B_0 B_1 B_2) \dots (G_0 G_1 G_2) \dots$$

Existe un $\tau_{\text{Mor}}(G_0, G)$ definido:

$$\begin{array}{l} N^\circ \quad P_0 P_1 P_2 Q_0 Q_1 Q_2 R_0 R_1 R_2 S_0 S_1 S_2 \dots V_0 V_1 V_2 \\ \tau \quad P \quad P' P'' Q \quad Q \quad Q \quad R \quad R' R'' S \quad S \quad S \quad \dots V \quad V' V'' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R^\circ \quad A_0 A_1 A_2 B_0 B_1 B_2 C_0 C_1 C_2 D_0 D_1 D_2 \dots G_0 G_1 G_2 \\ \tau \quad A \quad A' A'' B \quad B' B'' C \quad C' C'' D \quad D \quad D \quad \dots G \quad G' G'' \end{array}$$

Los grafos y morfismos así definidos verifican las propiedades indicada más arriba. \square

Ejemplo: En la parte superior de la fig.13 mostramos un grafo G con una simetría hexafásica σ definida:

$$\sigma.N : (P Q R)(S T)$$

$$\sigma.R : (A B C)(D E F G H J)(K -K)$$

Se ha tomado como conjunto $N^\circ = \{P, S\}$. En la parte inferior se muestra la correspondiente expansión G_0 con la simetría regular σ_0 definida:

$$\sigma_0.N^\circ : (P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 P_5)(S_0 S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6)$$

$$\begin{array}{l} \sigma_0.R : (A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5)(D_0 D_1 D_2 D_3 D_4 D_5) \\ (K_0 K_1 K_2 K_3 K_4 K_5) \end{array}$$

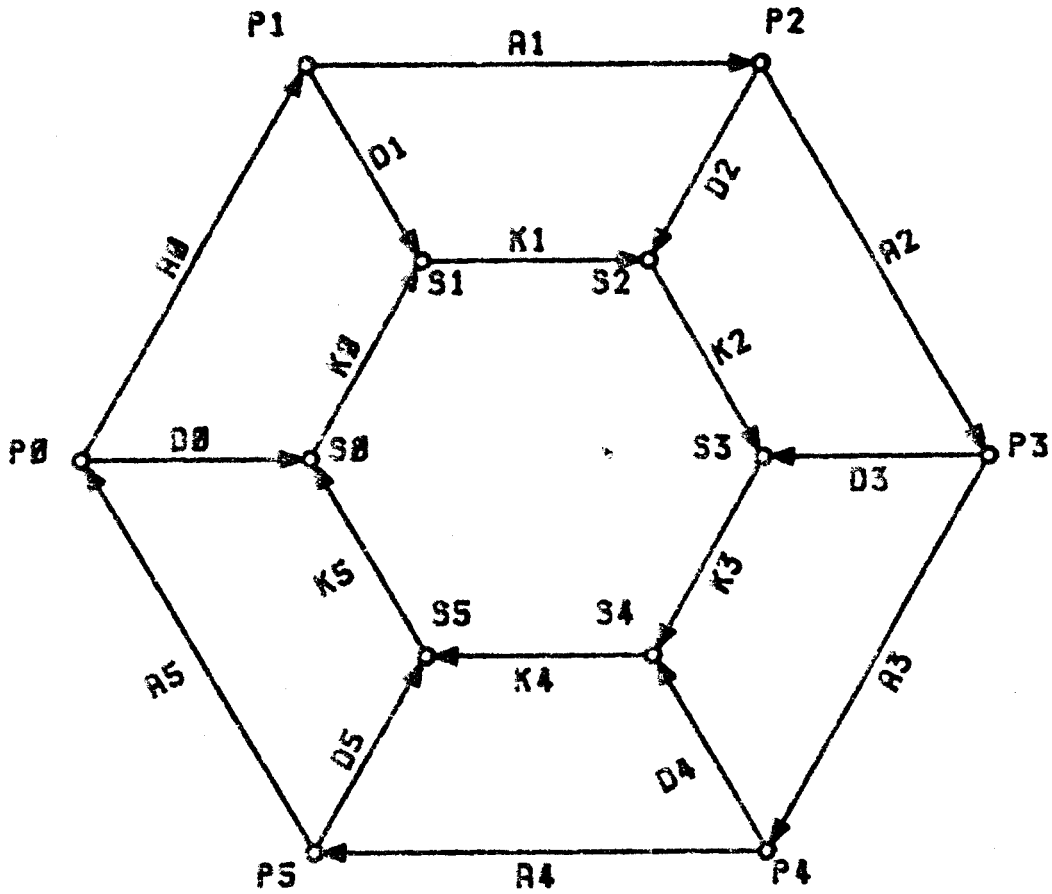
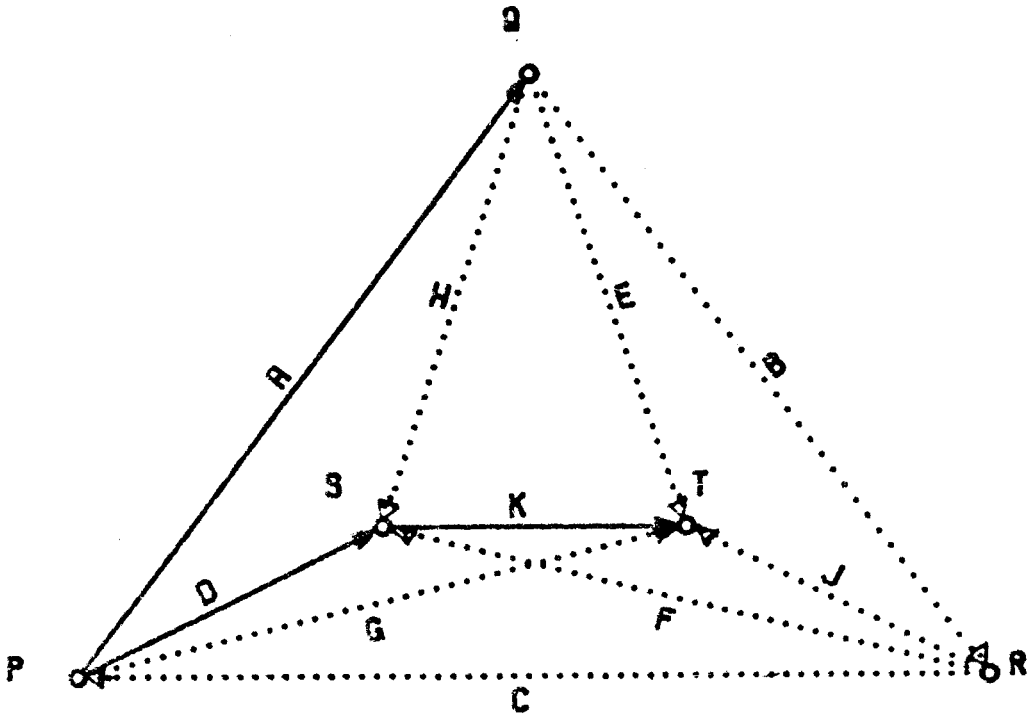
y el $\tau_{\text{Mor}}(G_0, G)$:

$$\begin{array}{l} N \quad P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 S_0 S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 \\ \tau \quad P \quad Q \quad R \quad P \quad Q \quad R \quad S \quad T \quad S \quad T \quad S \quad T \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R \quad A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 D_0 D_1 D_2 D_3 D_4 D_5 K_0 K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 \\ \tau \quad A \quad B \quad C \quad A \quad B \quad C \quad D \quad E \quad F \quad G \quad H \quad J \quad K \quad -K \quad K \quad -K \quad K \quad -K \end{array}$$

\square

FIGURA 7.13



Veamos algunas propiedades adicionales de estos objetos.

R7// Sean $q \in \mathbb{N}^*$ y d' el período de q con respecto a Γ . Para todo $q' \in \mathbb{N}_0$, la relación $\tau.q' = q$ equivale a: existe un entero n , $0 \leq n < p/d'$ tal que $q' = q_{nd'}$. Sean $a \in \mathbb{R}^*$ y d el período de $|a|$ con respecto a Γ . Si $-a \in \Gamma.a$, para todo $b \in \mathbb{R}_0$ la relación $\tau.b = a$ equivale a: existe un entero n , $0 \leq n < p/d$ tal que $b = a_{nd}$. Si $-a \notin \Gamma.a$, para todo $b \in \mathbb{R}_0$ la relación $\tau.b = a$ equivale a: existe un entero n , $0 \leq n < p/d$ tal que $b = (-1)^n a_{nd}$.

Dem.: Sea $q' = q''$ con $q'' \in \mathbb{N}^*$ y $m \in \mathbb{P}$. De la definición y propiedades de σ , σ_0 y τ resulta que $\tau.q' = \tau.\sigma_0^m.q'' = \sigma^m.q''$. De ahí $q \in \Gamma.q''$ y, por la definición de la generatriz $q = q''$, ya que los nudos de la generatriz son un conjunto de representantes de las órbitas de N por Γ . En consecuencia, $\sigma^m.q = q$ y por definición de período, $m \in d' \mathbb{Z} \cap \mathbb{P}$. Por otra parte $p \in d \mathbb{Z}$. De ahí el primer resultado. Si $\tau.b = a$, entonces $\tau.|b| = |a|$. Y recíprocamente, si $\tau.|b| = |a|$, entonces $\tau.b = \pm a$. Razonando de modo similar al precedente se demuestra que para todo $b \in \mathbb{R}_0$, la relación $\tau.|b| = |a|$ equivale a: existe un entero n , $0 \leq n < p/d$ tal que $|b| = |a_{nd}|$. Si $-a \in \Gamma.a$ se tiene $\sigma^d.a = a$ [5R1] y $\tau.a_{nd} = \sigma^{nd}.a = a$. Si $-a \notin \Gamma.a$ se tiene $\sigma^d.a = -a$ [5R1] y $\tau.a_{nd} = \sigma^{nd}.a = (-1)^n a$. De aquí $\tau.(-1)^n a_{nd} = a$. \square

De acuerdo con §7.3 a cada vector i' de intensidades de ramas de G_0 le podemos hacer corresponder un vector i de intensidades de ramas de G inducido por τ y a cada vector u de tensiones kirchoffianas de rama de G le podemos hacer corresponder un vector u' de tensiones kirchoffianas de rama de G_0 . Hasta el final de este epígrafe supondremos que los vectores u e i son kirchoffianos equilibrados de secuencia k . Pondremos como es habitual $\alpha = \exp(2\pi j/p)$ y $\gamma = \alpha^{-k}$.

R8// Sea v un vector de potenciales de nudos de G equilibrado de secuencia k . El vector v' de potenciales de nudos de G_0 inducido por v mediante τ es equilibrado de secuencia k . Sean $q \in \mathbb{N}^*$ y d el período de q con respecto a Γ . Si $\gamma^{-d} \neq 1$, entonces $v'_d = 0$. Sean u un vector kirchoffiano de tensiones de ramas de G equilibrado de secuencia k y u' el inducido por u mediante τ . u' es kirchoffiano

equilibrado de secuencia k . Para cada $a \in R^\circ$ se cumple $u_a = u'_a$.

Dem.: Sean $q \in N^\circ$, $m \in P$, $q' = \sigma \circ^m \cdot q$ y $q'' = \tau \cdot q'$. Se verifica:

$$\begin{aligned} q'' &= \tau \cdot \sigma \circ^m \cdot q \\ &= \sigma^m \cdot \tau \cdot q \\ &= \sigma^m \cdot q \end{aligned}$$

De las definiciones resulta:

$$\begin{aligned} v'_a &= v_{q''} \\ &= \gamma^m \cdot v_q \\ &= \gamma^m \cdot v'_a \end{aligned}$$

En consecuencia, v' es equilibrado de secuencia k . El resto del enunciado se deriva de [6R3] y [7R3]. \square

R9// Sean i un vector kirchoffiano de intensidades de ramas de G equilibrado de secuencia k e i' un vector de intensidades de ramas de G_0 equilibrado de secuencia k tal que $i'_a = (d_{\tau \cdot a} / p) i_{\tau \cdot a}$ para cada $a \in R_0$, siendo $d_{\tau \cdot a}$ el período de $|\tau \cdot a|$ con respecto a Γ . Entonces i' es equilibrado de secuencia k e induce i mediante τ . Sean $a \in R^\circ$ y d el período de $|a|$ con respecto a Γ . En los dos supuestos siguientes $i'_a = 0$: 1) $-a \in \Gamma \cdot a$ y $\gamma^d \neq 1$; 2) $-a \in \Gamma \cdot a$ y $\gamma^d = -1$. Sean j' el vector de intensidades de nudos de G_0 derivado de i' , $q \in N^\circ$ y d' el período de q con respecto a Γ . La relación $j'_q \neq 0$ implica $\gamma^{d'} \neq 1$.

Dem.: En primer lugar, i' es equilibrado de secuencia k . En efecto, sean $a, a' \in R_0$ tales que $a' = \sigma \circ a$. De acuerdo con las propiedades de σ , $\sigma \circ$ y τ resulta: $\tau \cdot a' = \sigma \cdot \tau \cdot a$ y $|\tau \cdot a'| \in \Gamma \cdot |\tau \cdot a|$. De ahí $d_{\tau \cdot a'} = d_{\tau \cdot a}$ y $i'_a = \gamma i'_a$.

Veamos ahora que i' induce i . Sea $b \in R^\circ$. Ponemos

$$\begin{aligned} r &= \sum_a i'_a \quad (a \in R_0 \mid \tau \cdot a = b) \\ &= (d_{\tau \cdot b} / p) \cdot \sum_a i_b \quad (a \in R_0 \mid \tau \cdot a = b) \end{aligned}$$

Como $p \in d_{\tau \cdot b} \mathbb{Z}$ por definición de período y hay exactamente $p/d_{\tau \cdot b}$ arcos de R_0 tales que $\tau \cdot a = b$ [R7], entonces $r = i_b$ y

$$i_b = \sum_a i'_a \quad (a \in R_0 \mid \tau \cdot a = b)$$

Los supuestos en los cuales $i'_a = 0$ se deducen de R4.

Por último, como i es kirchoffiano, se tiene $j = 0$. Para todo $q \in N^\circ$ se cumple:

$$j_q = \sum_{q'} j'_q \quad (q' \in N_0 \mid \tau \cdot q' = q)$$

Aplicando R7, resulta que la relación $\tau \cdot q' = q$ equivale a: existe

un entero n , $0 \leq n < p/d$ tal que $q' = q_{nd}$. De aquí, $q' = \sigma_0^{nd} \cdot q$ y $j'_d = \gamma^{nd} j_d$. En consecuencia:

$$0 = (\sum_n \gamma^{nd}) \cdot j_d \quad (n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq n < p/d)$$

Si $\gamma^{nd} = 1$, entonces $0 = (p/d) j_d$ y $j_d = 0$. \square

Recapitulemos los resultados obtenidos en este epígrafe. A partir del grafo G hemos definido un grafo G_0 de simetría regular. Al régimen (u, i) kirchoffiano equilibrado de secuencia k de G le hemos asociado un régimen (u', i') de G_0 , el cual es equilibrado de secuencia k , kirchoffiano en las tensiones pero no necesariamente en las intensidades. Si el régimen (u', i') es kirchoffiano, entonces el problema está resuelto ya que sabemos cómo obtener una red de secuencia cuando el grafo tiene una simetría regular. Si el régimen (u', i') no es kirchoffiano nos proponemos obtener un nuevo grafo $G_k = (T_k, R_k, N_k, \nu^k)$ con una simetría casi-regular σ_k y al cual le asociaremos un régimen kirchoffiano equilibrado (u'', i'') biunívocamente relacionado con (u, i) mediante un $\tau_k \in \text{Mor}(G_0, G_k)$ definidos del siguiente modo:

Sea $N_k \subset N_0$ constituido por los nudos tales que el período d de $\tau_k \cdot q$ con respecto a Γ verifica: $k d \in \mathbb{Z}$. Es inmediato que N_k es estable con respecto al grupo Γ_0 generado por σ_0 . Sea $q^0 \notin N_0$. Escribimos: $N_k = N_k \cup \{q^0\}$; $\tau_k \cdot q = q$ y $\sigma_k \cdot q = \sigma_0 \cdot q$ para todo $q \in N_k$; $\sigma_k \cdot q^0 = q^0$; $\tau_k \cdot q = q$, para todo $q \in N_0 - N_k$; $T_k = T_0$; $\tau_k \cdot t = t$, $\sigma_k \cdot t = \sigma_0 \cdot t$ y $\nu^k(t) = \tau_k \cdot \nu^0(t)$, para todo $t \in T_k$; $R_k = R_0$; $N_k^0 = (N^0 \cap N_k) \cup \{q^0\}$. Dejamos al cuidado del lector la demostración de que los objetos así definidos constituyen efectivamente un grafo G_k , una simetría σ_k y un morfismo τ_k con las propiedades siguientes:

- i) (R^0, N_k^0) es una generatriz de G_k con respecto al grupo Γ_k generado por σ_k .
- ii) $\sigma_k \circ \tau_k = \tau_k \circ \sigma_0$.
- iii) Para todo $a \in R^0$ se cumple $\tau_k \cdot a = a$.
- iv) La aplicación $q \mapsto \tau_k \cdot q$ de N_0 en N_k es exhaustiva. Sea $q' \in N_k$. Para todo $q \in N_0$ la relación $\tau_k \cdot q = q'$ equivale a $q = q'$. Para todo $q \in N_0$ la relación $\tau_k \cdot q = q^0$ equivale a $q \in N_0 - N_k$.
- v) Todos los elementos de G_k , excepto q^0 tienen período p .

con respecto a Γ_k .

Ejemplo: Partiendo del grafo G de la parte superior de la fig.12, en la parte inferior de dicha figura hemos mostrado la expansión G° del grafo, descrita en el ejemplo correspondiente. Si la red original es de régimen equilibrado homopolar ($k=0$) el régimen asociado a G° de acuerdo con R8 y R9 es kirchoffiano equilibrado homopolar. Si la red original es de régimen equilibrado no homopolar ($k=1$ ó $k=2$) entonces el régimen asociado a G° no es necesariamente kirchoffiano en las intensidades. En la fig.14 se muestran el grafo G_1 , que es igual a G_2 , que permitirá como veremos inmediatamente derivar de (u,i) un régimen equilibrado kirchofiano. Por facilidad de dibujo y comprensión el nudo común q° , que en dicha figura se nombra O se ha dividido en varios con el mismo nombre, debiéndose entender que el grafo G_1 es conexo, y que, por ejemplo, los arcos DO , $D1$ y $D2$ son lazos. \square

Ejemplo: De modo similar partiendo del grafo G de la fig.13 (parte superior) en su parte inferior se mostraba la expansión G° de G . Si la red que tiene por grafo G es de régimen homopolar podemos asociarle a G° un régimen kirchoffiano equilibrado homopolar. Si el régimen de la red original es equilibrado de régimen no homopolar no es posible dicha asociación. Necesitamos entonces como veremos inmediatamente un nuevo grafo G_k . En las figs.15 y 16 se muestran los grafos G_k para diversos valores de k . En la fig.15 se muestra el grafo G_3 . En la fig.16 (parte superior) se muestra el G_1 , que es igual a G_3 ; en la inferior el G_2 que es igual a G_4 . En general los grafos G_k y G_{p-k} son iguales como puede deducir el lector. \square

FIGURA 7.14

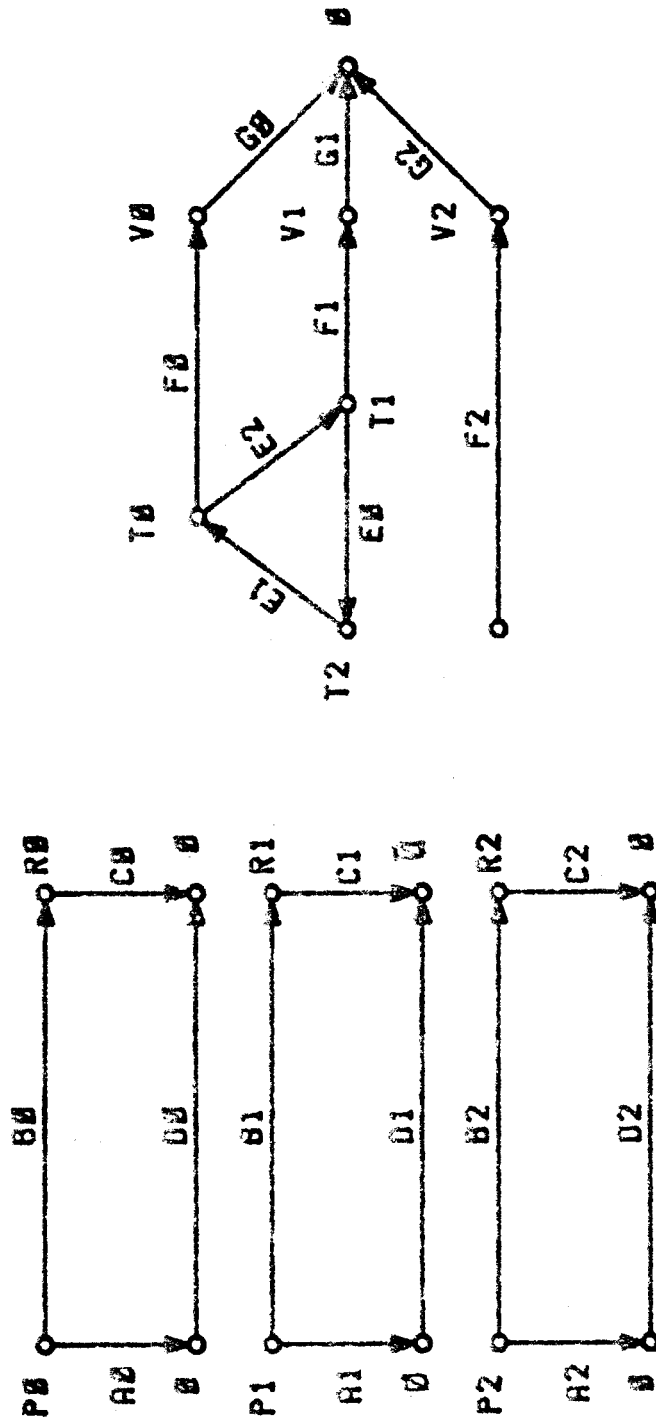


FIGURA 7.15

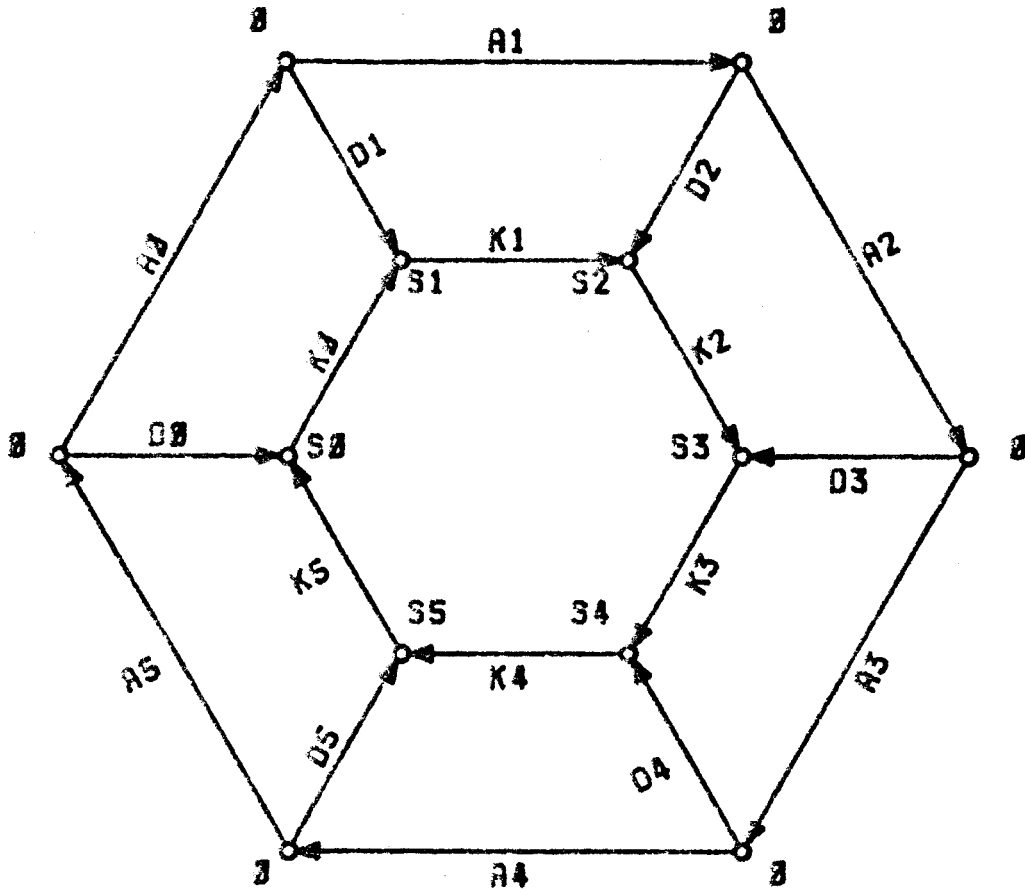
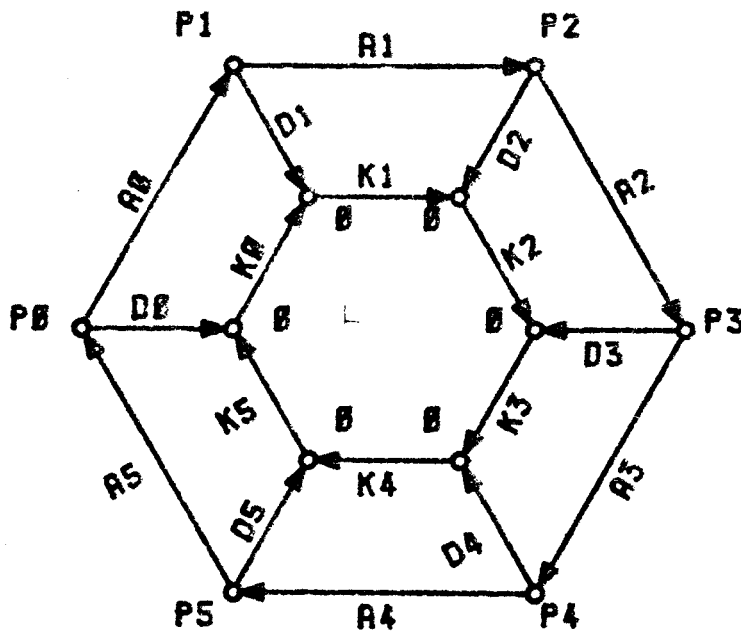
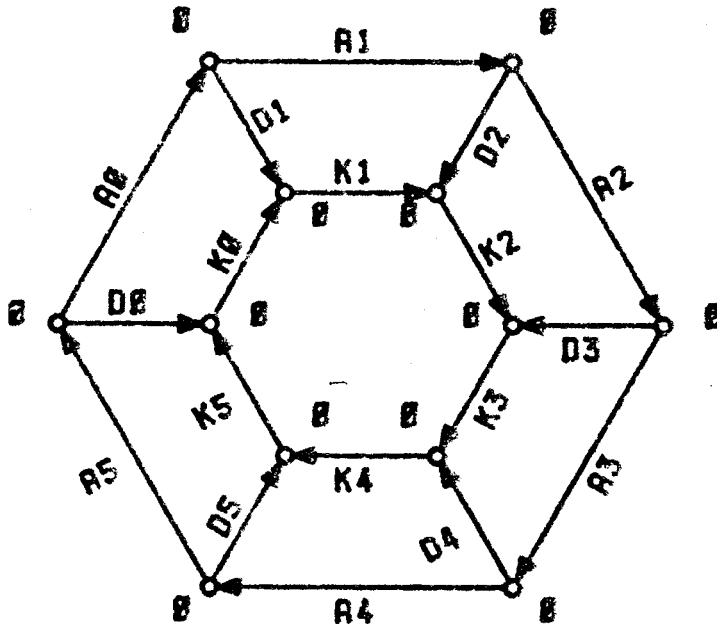


FIGURA 7.16



Con todo, el resultado más importante es el siguiente:

R10// Sean u' e i' los de R_8 y R_9 y u'' e i'' vectores de tensiones e intensidades de ramas de G_k tales que $u''=u'$ e $i''=i'$. Entonces i'' y u' son, respectivamente, los vectores inducidos por i' y u' mediante τ_k . El régimen (u'', i'') de G_k es kirchoffiano equilibrado de secuencia k con respecto a τ_k .

Dem.: Teniendo en cuenta las propiedades de τ_k , la primera parte del enunciado es inmediata. El carácter equilibrado de secuencia k de u'' e i'' también es fácil de demostrar.

Veamos que u'' es kirchoffiano. Sea v' el vector de potenciales de nudos de R_8 . Existe un y sólo un vector v'' de potenciales de nudos de G_k que induce v' mediante τ_k . En efecto, para que exista es necesario y suficiente que $v''_q = v'_q$ para cualesquiera $q, q' \in N_0$ tales que $\tau_k \cdot q = \tau_k \cdot q'$. Ponemos $q'' = \tau_k \cdot q$. De las propiedades de τ_k resulta que: $q \in N_k^+$ implica $q' = q'' = q$ y $q \in N_k^-$ implica $q'' = q^0$ y $q' \in N_k^-$. De acuerdo con la definición de v' tenemos en todos los casos $v''_q = v'_q$. Dado que la aplicación $q \mapsto \tau_k \cdot q$ es exhaustiva, para cada $q'' \in N_k$ podemos elegir un $q \in N_0$ tal que $\tau_k \cdot q = q''$ y poner $v''_{q''} = v'_q$. Entonces v'' es única y $v''_{\tau_k \cdot q} = v'_q$ para todo $q \in N_0$. Sean ahora $a \in R_0$ y $q_i = v^0_{q_i}(a)$, $q'_i = v^{k_i}_{q'_i}(a)$, para $i=1,2$. Se cumple: $q'_i = \tau_k \cdot q_i$, para $i=1,2$ y

$$\begin{aligned} u''_a &= u'_a \\ &= v_{q_1} - v_{q_2} \\ &= v_{q_1}'' - v_{q_2}'' \end{aligned}$$

Por lo tanto u'' deriva de v'' y u'' es kirchoffiano.

Veamos por último que i'' es kirchoffiano. Sean j' y j'' los vectores de intensidades de nudos de G_0 y G_k , derivados de i' e i'' respectivamente. Se tiene, de acuerdo con R2:

$$j''_q = \sum_{q'} j_{q'} \quad (q \in N_0 \mid \tau_k \cdot q = q')$$

para todo $q' \in N_k$. Si $q' \in N_k^+$, entonces $j''_q = j_{q'} = 0$, de acuerdo con las propiedades de τ_k y con R8. Si $q' \in N_k^-$, entonces $q' = q^0$. Teniendo en cuenta que la suma de las intensidades de los nudos de G_k es nula [3R4], resulta $j''_q = 0$, $j'' = 0$ y i'' es kirchoffiano. \square

En resumen, a partir del grafo G de la red con un régimen kirchoffiano equilibrado de secuencia k hemos derivado un nuevo

grafo G_k al cual le hemos asociado un régimen kirchoffiano equilibrado de secuencia k . El nuevo grafo tiene la propiedad de que todos sus elementos tienen período p con respecto a Γ_k , salvo un nudo q° . Definimos ahora un grafo de la red de secuencia del mismo modo que el caso B de la red de simetría regular [§7.2], tomando el nudo q° como "nudo adicional". La red primaria se define en cuanto a los arcos adicionales de modo similar. En cuanto a la red primaria de los arcos no adicionales, recordando las relaciones primarias monofásicas [§6.4] y la relación entre los regímenes (u, i) y (u'', i'') , tenemos:

i) Fuentes independientes de la red de secuencia: $\forall a \in J^\circ$, $i_a'' = (d_{1a1}/p) \cdot i_a^\circ$; $\forall a \in E^\circ$, $u_a'' = u_a^\circ$.

ii) Dispositivos lineales de la red de secuencia: Tendremos una relación primaria del tipo $(u_a'' - i_a \psi_a) = H'' \cdot (i_a'' - u_a \psi_a)$, en donde H'' viene definida del siguiente modo: 1) $\forall a, b \in Z^\circ$: $h_{ab}'' = p \cdot h_{ab}' / d_{1b1}$; 2) $\forall a \in Z^\circ$, $\forall b \in Y^\circ$: $h_{ab}'' = h_{ab}'$; 3) $\forall a \in Y^\circ$, $\forall b \in Z^\circ$: $h_{ab}'' = h_{ab}' \cdot d_{1a1} / d_{1b1}$; 4) $\forall a \in Y^\circ$, $\forall b \in Y^\circ$: $h_{ab}'' = h_{ab}' \cdot d_{1a1} / p$.

iii) Relaciones adicionales debidas al régimen de secuencia k : Para todo $a \in R^\circ$ que cumpla alguna de las condiciones siguientes $i_a'' = 0$: 1) $-a \in \Gamma_a$ y $\gamma^d \neq 1$; 2) $-a \in \Gamma_a$ y $\gamma^d = -1$.

Ejemplo: Consideremos la red de la fig. 17, cuyo grafo es el del ejemplo precedente. La simetría hexafásica del grafo descrita en dicho ejemplo es también una simetría de la red, con la generatriz que allí se define. La intensidad de la rama A de la fuente polifásica de intensidades i_a, i_b, i_c tiene las componentes de secuencia siguientes:

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \alpha^8 & \alpha^{10} \\ -1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^9 & \alpha^{12} & \alpha^{15} \\ 1 & \alpha^4 & \alpha^8 & \alpha^{12} & \alpha^{16} & \alpha^{20} \\ 1 & \alpha^5 & \alpha^{10} & \alpha^{15} & \alpha^{20} & \alpha^{25} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

en donde $\alpha = \exp(2\pi j/6)$. De aquí resulta:

$$i_0 = (i_a + i_b + i_c) / 3$$

$$i_1 = i_2 = i_3 = 0$$

$$i_2 = (i_a - \alpha i_b - \alpha^2 i_c) / 3$$

$$i_4 = (i_a - \alpha^2 i_b - \alpha i_c) / 3$$

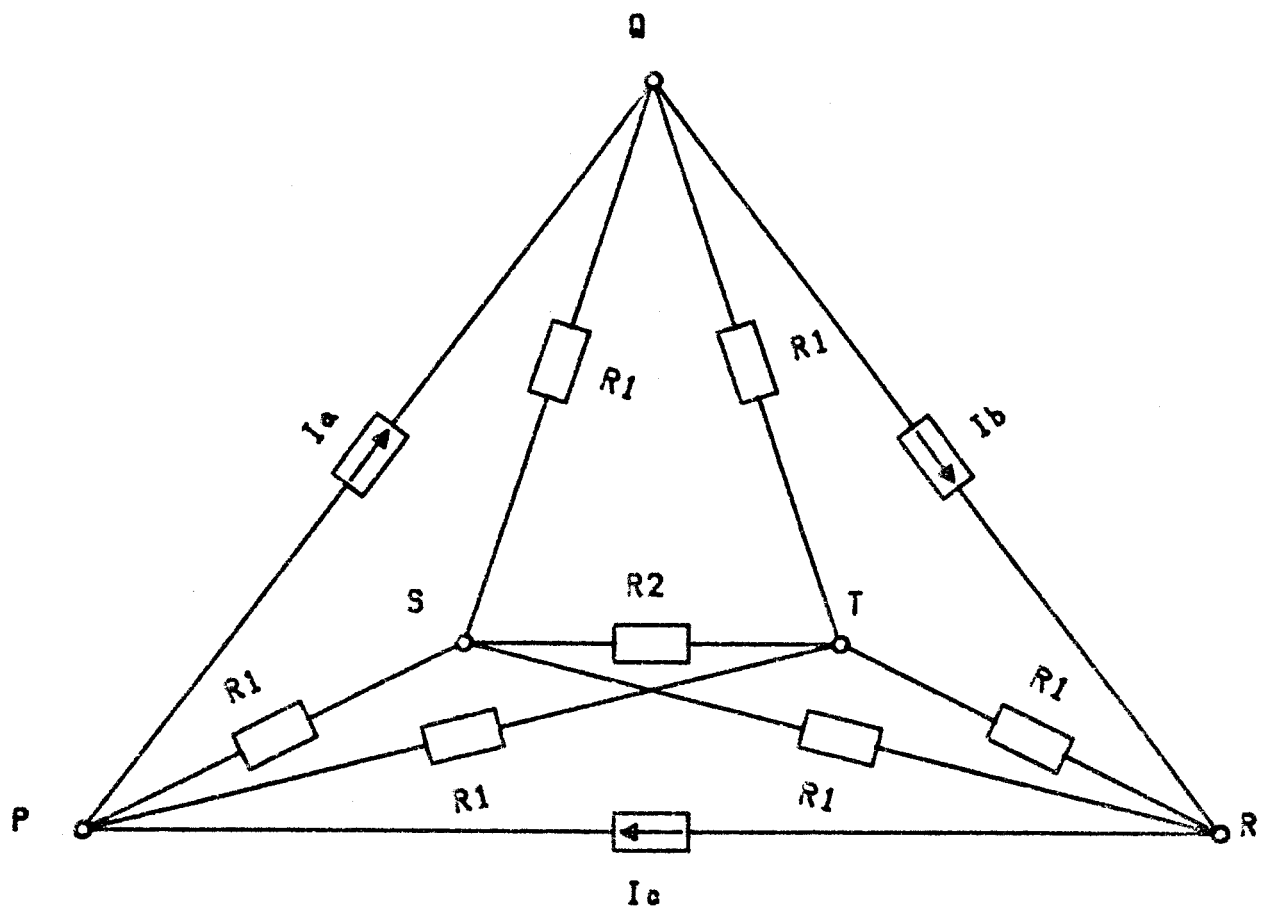


FIGURA 7.17

Dado que sólo existe la fuente polifásica citada y que el sistema de ecuaciones de la red es determinado si los valores de las resistencias son no nulos (determinación que no demostramos por no alargar la exposición), en la red no existen tensiones ni intensidades de las secuencias 1, 3 y 5. Para resolver la red basta con obtener las redes monofásicas de las secuencias 0, 2 y 4. Basándonos una vez más en los resultados del ejemplo anterior y en lo dicho en este capítulo obtenemos las redes de secuencia monofásicas que se representan en las fig. 18 (secuencia 0), 19 (secuencia 2) y 20 (secuencia 4).

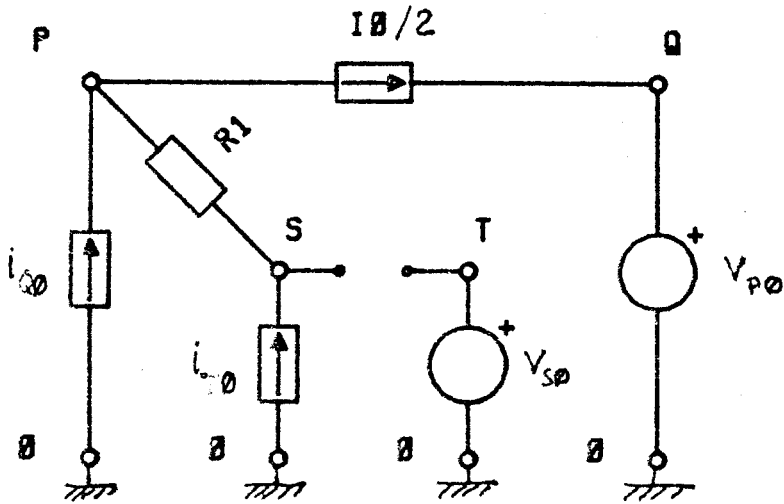


FIGURA 7.18

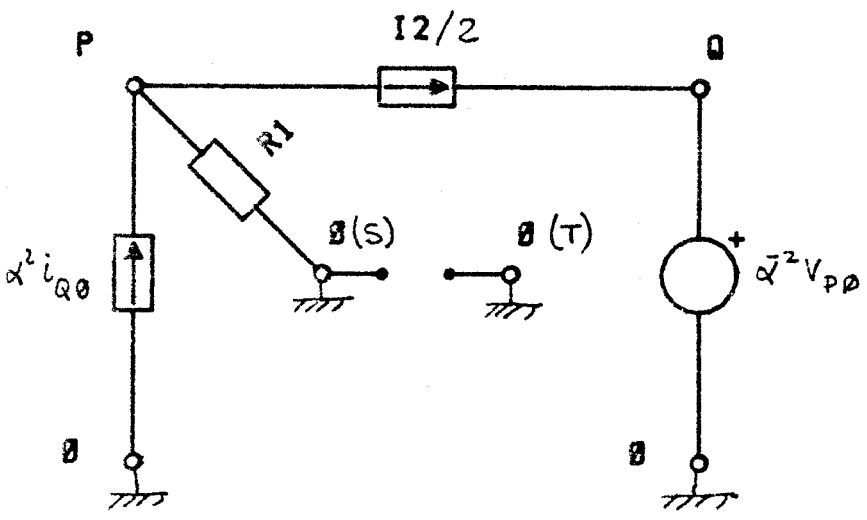


FIGURA 7.19

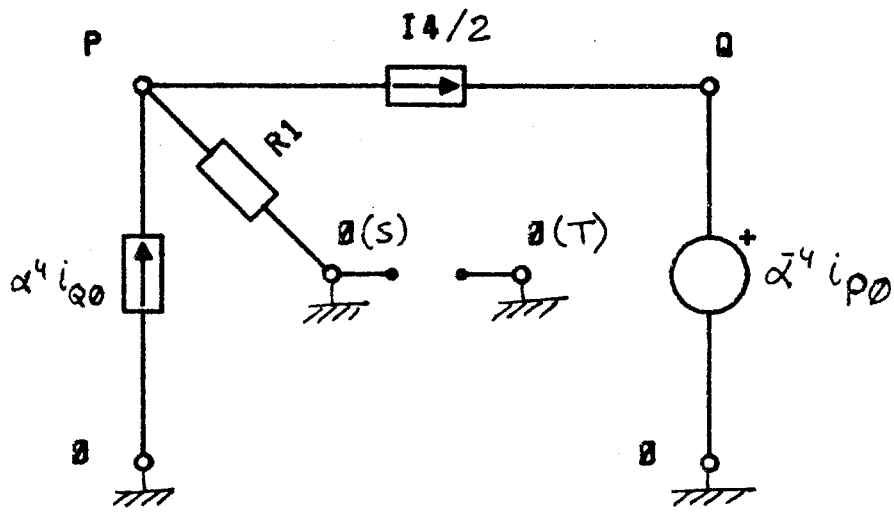


FIGURA 7.20

Nótese que las intensidades que circulan por las ramas PQ y ST de las redes de secuencia son respectivamente igual a $1/2$ y $1/6$ de las correspondientes intensidades de secuencia. La arista ST (K en el grafo original) tiene período 1. El arco $-K$ pertenece a la órbita del arco K. En consecuencia para toda secuencia k que verifique $\alpha^k \neq -1$ la intensidad de secuencia k de la rama K es nula. Esto se cumple para k igual a 0, 2 y 4. De ahí que la resistencia de la rama K se pueda sustituir en dichas redes de secuencia por un circuito abierto. □

CONCLUSIONES Y COMENTARIO BIBLIOGRAFICO

=====

El autor desea hacer constar las dificultades que existen para conseguir una bibliografía más o menos completa de los temas aquí planteados. Por una parte, por su carácter teórico estas cuestiones son tratadas fundamentalmente en libros y en congresos y mucho menos en artículos de revistas, lo cual implica un coste económico alto de la bibliografía. Por otra el seguimiento de algunas de ellas exige remontarse varias décadas o casi un siglo, como es el caso de los artículos originales de Fortescue (sobre coordenadas simétricas) y de Barnett (sobre bisección de redes con simetría especular), que ha sido imposible obtenerlos, debiendo recurrirse a referencias de otros autores.

Capítulos 1, 2

Grafos.-HARARY, un autor de referencia en teoría de grafos, define el grafo no orientado como un conjunto N de nudos y un conjunto A de pares no ordenados de nudos. Esta definición excluye de la consideración de la teoría de grafos los grafos no orientados que contengan lazos o aristas múltiples con los mismos nudos extremos, a los cuales denomina pseudografos. Define los grafos orientados como un conjunto N de nudos y un conjunto R de pares ordenados de nudos. Esta definición no permite ni los lazos ni la existencia de dos arcos que tengan mismo nudo origen y el mismo nudo final. CHRISTOFIDES, define un grafo como un conjunto N de nudos y un conjunto A de líneas que unen algunos de los nudos N . Esta definición, que es muy común, es de por sí formalmente insuficiente ya que no establece la relación entre las líneas y los nudos. La definición de Christofides permite la existencia de lazos y de múltiples aristas con los mismos nudos extremos, pero su definición de la orientación de los arcos parece identificarse con ordenación del par de nudos extremos del

mismo, lo cual en el caso de los lazos, al ser ambos extremos iguales no permite una orientación. SWAMY define un grafo como un conjunto N de nudos y un conjunto A de aristas o R de arcos, a los que identifica (sic) con pares no orientados u orientados de nudos. Contradictoriamente con tal definición permite la existencia de lazos y de aristas en paralelo con los mismos nudos extremos. BALABANIAN distingue, aunque no de modo explícito entre terminales y extremos de una arista y excluye los lazos. Por otra parte su estudio de los grafos se limita a los grafos conexos casi exclusivamente. Las definiciones del grafo no orientado y orientado según WEINBERG son las que más se aproximan a las que se emplean en esta tesis, aunque no son idénticas. Se diferencian de las de Swamy en que a cada arista o arco se le asocia, y no se identifica, un par de nudos.

A juicio del autor las definiciones de grafos que se proponen en esta tesis tienen las siguientes ventajas: a) Sus elementos constitutivos (terminales y nudos de conexión) son elementos de los circuitos eléctricos, sin necesidad de echar mano de analogías gráficas (líneas y puntos) para establecer las definiciones. Las gráficas (grafo lineal) se conciben aquí como simples representaciones. b) La orientación de los dispositivos (orientación de los arcos) tiene en cuenta el hecho de que un dispositivo puede ser orientado independientemente de la red de la que forma parte y que esa orientación es independiente del hecho de que sus terminales estén o no unidos al mismo nudo de conexión. c) Son fácilmente generalizables a redes con dispositivos multiterminales. d) Son formales, es decir se basan en objetos matemáticos conocidos: conjuntos, pares ordenados, aplicaciones y particiones. Todo el desarrollo conceptual se hace a partir de esas definiciones sin que sea necesario introducir a posteriori nuevos axiomas. e) Son de la máxima generalidad: Los grafos así definidos pueden tener lazos y aristas múltiples.

Grado de un nudo.—La definición que se emplea en esta tesis es análoga, aunque no idéntica a la de HARARY.

Bucles y caminos.—HARARY, define los bucles y caminos como

una sucesiones de nudos y aristas y en particular los bucles han de contener al menos tres nudos. Las definiciones de SWAMY son similares. Su definición de la orientación de un bucle es gráfica: se basa en el recorrido de un dibujo del bucle en el sentido (o en sentido contrario) de las agujas del reloj. BALABANIAN define un camino como una sucesión ordenada de aristas. Su definición de bucle es análoga, aunque no idéntica a la empleada en esta tesis. Define la orientación del bucle como una ordenación cíclica de sus nudos, lo cual impide orientar los lazos.

Las definiciones que en esta tesis se proponen de bucles y caminos los conciben como grafos dotados de ciertas propiedades. El concepto de itinerario aquí introducido permite una definición formal de la orientación de caminos, bucles y lazos.

Cortes.-HARARY define el corte ("cutset") como un conjunto minimal de aristas de un grafo conexo cuya supresión origina un grafo no conexo. Esta definición es más restrictiva que la empleada en el presente trabajo. La definición de corte ("cutset") según CHRISTOFIDES es idéntica a la que se emplea en este trabajo, aunque como otros autores utiliza también la definición de corte propiamente dicho que es análoga a la de Harary.

Arboles y bosques.-La definición de árbol de HARARY es la que se utiliza aquí. Su concepto de árbol cubriente equivale, aunque no de forma inmediata, al bosque maximal de un grafo conexo. La definición de maximalidad de SUAMY es la que se emplea en esta tesis. Sin embargo, dicho autor prefiere emplear el concepto de árbol cubriente de Harary y dar una definición de bosque que equivale, aunque no de forma inmediata, al bosque maximal que se emplea en esta tesis.

La definición de bosque maximal que se emplea en esta tesis no sólo tiene una utilidad formal o conceptual sino que permite, junto con el concepto de clase de conexión, elaborar fácilmente algoritmos de obtención de bosques maximales cuyas aristas pertenezcan a determinadas clases, cosa importante para la

obtención de bosques normales y para la resolución de redes con ecuaciones de variables mezcladas.

Los conceptos de matriz y de vector con conjuntos arbitrarios de índices que se proponen en esta tesis son originales, aunque de hecho los especialistas de teoría de redes eléctricas vienen utilizándolos desde hace muchos años bajo el repetido recurso de reordenar filas y columnas. Detalles menores originales de esta tesis son los productos por la izquierda y por la derecha de matrices y vectores, trasposición de los productos tensoriales, y la definición de fusión de matrices y vectores, para lo cual se utiliza el coproducto tal como lo define LANG.

La matriz de incidencia nudos-arcos que se emplea en esta tesis (extendida a los lazos) es la que emplea CHRISTOFIDES. La matriz de cortes es la de SWAMY. Las matrices K y K^f se hayan, si no expresamente formuladas, implícitas en la literatura de grafos. Las matrices C y C^f son originales de esta tesis. DE CLARIS define una matriz fundamental de conexión del grafo que no tiene nada que ver con la que se emplea en este texto. Igualmente es, en gran medida, original de esta tesis la demostración de los resultados de los capítulos 1 y 2, si bien la mayor parte de dichos resultados son conocidos.

Capítulos 3 y 4

La caracterización algebraica de las señales eléctricas que se da en esta tesis es más general que las habitualmente empleadas en la literatura. El concepto de intensidad de nudo y su desarrollo es original de esta tesis. La discusión sobre causalidad y unilateralidad en las redes eléctricas se aparta de los conceptos de ZADEH y de las definiciones habituales.

Capítulos 5, 6 y 7

El estudio de las redes simétricas comenzó con los redes polifásicas equilibradas, a partir de los trabajos de Fortescue

que aplicó a las redes eléctricas de este tipo las coordenadas simétricas para resolver problemas de régimen permanente senoidal, extendido mediante el uso de datos fundamentalmente experimentales al régimen transitorio senoidal pero manteniendo el uso de fasores. El libro de WAGNER sigue siendo un buen compendio de este desarrollo. Otros autores han hecho una posterior extensión del método de las componentes simétricas al estudio de los transitorios de las redes polifásicas empleando la transformada de Laplace. Una noticia de este desarrollo se puede encontrar en los artículos de LEWIS y GOSLAND. Como es sabido, posteriormente se han introducido otros sistemas de coordenadas para estudiar el comportamiento de las máquinas eléctricas polifásicas y los transitorios de las redes polifásicas, un ejemplo de los cual lo constituyen los artículos de HEYLENS y HORWARD. En otra dirección, Barnett estudia las redes con simetría especular (como una clase bastante amplia de bipuertas) y alguna de las reglas para simplificar la solución de las ecuaciones de este tipo de redes se pueden encontrar en SCOTT. Las simetrías de una red que pueden interpretarse como unas ciertas permutaciones de los elementos que constituyen la red forman un grupo algebraico. Los tipos de simetría anteriormente citados son cíclicos, en el sentido de se estudian un conjunto de simetrías de la red que derivan todas de una determinada. Este tipo de simetrías es la de mayor utilidad y la que permite un mayor desarrollo de sus propiedades, aunque se pueden encontrar simetrías no cíclicas de importancia. Más recientemente se han desarrollado técnicas para estudiar este tipo de simetrías generales y de los sistemas de coordenadas que permiten simplificar la resolución de los sistemas de ecuaciones correspondientes. El lector puede encontrar ejemplos de esto en los artículos de RUBIN, SINGH Y HARTER. Sorprende sin embargo que en todo este balance no se encuentre una definición formal de lo que es una red simétrica. Precisamente esta tesis intenta cubrir este hueco y establecer una relación igualmente formal entre las redes simétricas cíclicas equilibradas y las correspondientes redes de secuencia.

Morfismos de grafos.-Siguiendo a LANG, empleamos la palabra morfismo en vez de la tradicional de homomorfismo. Una definición análoga a la empleada en esta tesis, aunque no idéntica, se puede encontrar en HARARY que la emplea para resolver el problema del coloreado de los mapas. Este autor establece la definición exclusivamente para grafos no orientados. En nuestra tesis la definición del morfismo de grafos orientados se deriva de la del morfismo de grafos no orientados introduciendo el efecto de la orientación de las aristas. Por ello los morfismos de grafos orientados, tal como los definimos, no conservan necesariamente la orientación de los arcos. Esta definición, aplicada al caso de los isomorfismos de grafos, es más amplia que las de WEINBERG que obliga a que se conserve la orientación de los arcos y a la de BALABANIAN que de hecho confunde isomorfismo con identidad. La conservación de la orientación en un morfismo entre grafos de redes eléctricas es una cosa que no puede exigirse ya que la orientación de un dispositivo es elegida arbitrariamente por el analista y no resulta de propiedades esenciales de los mismos. Precisamente para obviar los problemas que plantea la elección de una orientación particular en la tesis se introduce el concepto de arco virtual.

Simetría de grafos.-La definición empleada en esta tesis es análoga a la de automorfismo de HARARY. Al igual que en el caso de los morfismos este autor establece la definición exclusivamente para grafos no orientados.

Grupos de simetría.-En la terminología referente a los grupos de simetría, en realidad grupos finitos y en particular cíclicos, se ha seguido a LANG y GODEMENT. Igualmente en dichos autores puede encontrarse la definición y propiedades de las operaciones de grupos sobre conjuntos. Algunas operaciones particulares de los grupos de simetría sobre el grafo de la red son conocidas en la literatura tales como el concepto de nudo polifásico o de rama polifásica (que en esta tesis se nombra arista polifásica) el resto es elaboración original.

Red simétrica.-Hasta donde conoce el autor, en la literatura no se encuentra ninguna definición formal de red simétrica, que equivale a la idea tradicional de red polifásica equilibrada en las cargas, y de red simétrica en régimen equilibrado, que es algo más restrictiva que la idea de red polifásica equilibrada en las cargas y en los generadores, en el sentido de que si la solución de una red de este tipo no es determinada pueden existir en la misma tensiones o intensidades no equilibradas. Lo que más se aproxima a una definición formal de las redes simétricas es la de 3-RUBIN: "Las redes simétricas tienen sus elementos dispuestos de modo que ciertas permutaciones de las ramas de la red producen una (nueva) configuración que es idéntica a la original".

Redes de secuencia.-Las redes de secuencia son conocidas desde los trabajos de Fortescue y un balance de su empleo o utilidad puede encontrarse en WAGNER. En los trabajos citados el establecimiento de las redes de secuencia se hace utilizando una serie de transformaciones locales: ramas en triángulo se pasan a ramas en estrella, las ramas de fase y las del neutro se tratan de modo diferenciado según que la red sea de secuencia directa, inversa u homopolar, etc. Este método no tiene carácter general y sólo se aplica con seguridad a redes trifásicas. En esta tesis se proponen, por primera vez a juicio del autor, una serie de transformaciones globales de la red que conducen al establecimiento de la red de secuencia y que permiten relacionar las variables de la red original con las de la red de secuencia.

BIBLIOGRAFIA

=====

Libros

- BALABANIAN, N.; BICKART, T.A. y SESHU, S.: "Teoría de redes eléctricas". Reverté. Barcelona. 1972. (Original de 1969)
- CHRISTOFIDES, N.: "Graph theory". Academic Press. Londres. 1975
- HARARY, F.: "Graph theory". Addison-Wesley. Reading (Massachusetts). 1972
- CHUA, L. y LIN, P-M.: "Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques". Prentice-Hall. Englewood Cliffs (New Jersey). 1975.
- DE CLARIS, N. y SAEKS, R.: "Theoretic foundations of finite networks and system analysis" capítulo en KALMAN, R.E. y DE CLARIS (eds.): "Aspects of network and system theory". Holt, Rinehart & Winston. New York. 1971
- EDELMANN, H.: "Théorie et calcul des réseaux de transport d'énergie électrique". Dunod. Paris. 1966 (Original de 1963)
- GODEMENT, R.: "Cours d'algèbre". Hermann. Paris. 1966
- LANG, S.: "Algebra". Addison-Wesley. Reading (Massachusetts). 1965
- SCOTT, R.E.: "Linear circuits". Addison-Wesley. Reading (Massachusetts). 1960
- SWAMY, M.N.S. y THULASIRAMAN, K.: "Graphs, networks, and algorithms". Jhon Wiley & Sons. New York. 1981
- THINKHAM, M.: "Group theory and quantum mechanics". McGraw-Hill Book. New York. 1964
- WAGNER, C.F. y EVANS, R.D.: "Symmetrical components". McGraw-Hill Book. New York. 1933
- WEINBERG, L.: "Linear graphs - Theorems, algorithms, and applications" capítulo en KALMAN, R.E. y DE CLARIS (eds.): "Aspects of network and system theory". Holt, Rinehart & Winston. New York. 1971
- ZADEH, L. y DESOER, Ch.: "Linear system Theory". McGraw-Hill

Artículos

- GOSLAND, L.; SHAH, K.R y LEWIS, W.P.: "Solution of network transients using symmetrical-component techniques". Proc. IEE 1968, num. 5, pags. 722-723
- HARTER, W.G.: "Representations of multidimensional symmetries in networks". Journal of Mathematical Physics, vol. 15, num. 11, Nov. 1974, pags. 2016-2021
- HEYLENS, A.: "Généralisation de la méthode hybride aux réseaux polyphasés en régime transitoire". Revue E, 1976, num. 7, pags. 145-161
- HORWARD, J.L.: "Note sur quelques aspects topologiques des réseaux polyphasés en vue de leur description en composantes par un formalisme d'état". Revue E, 1977, num. 9, pags. 213-219
- LEWIS, W.P.: "Solution of network transients using symmetrical-component techniques". Proc. IEE 1966, num. 12, pags. 2012-2016
- LIN, P.M. y FLANDERS, H.: "Natural frequencies of cyclic linear networks". IEEE Trans. Circ. and Systems, Sept. 1971, pags. 551-554
- 1-RUBIN, H.: "Symmetric basis functions for networks with arbitrary geometrical simmetries". IEEE Trans. Circ. Theory., Sept. 1971, pags. 547-549
- 2-RUBIN, H. y EVEN, R.: "Partitioning for linear systems with arbitrary structural symmetries: A generalization of the bisection technique". IEEE Trans. Circ. Theory, Jul. 1973, pags. 422-425
- 3-RUBIN, H. y MEADOWS, H.E.: "Controllability and observability in linear time-variable networks with arbitrary symmetry groups". Bell System Technical Journal, 1972, num. 2, pags. 507-542
- 1-SINGH, L.P. y SINHA, V.P.: "Steady state analysis of multiphase power system networks using group theoretic techniques". Journal of the Institution of Engineers (India), vol. 60, pt. EI 5, Abril 1980, pags. 247-253
- 2-SINGH, L.P. y SINHA, V.P.: "Transient analysis of power system networks using group theoretic techniques". Journal of the

Institution of Engineers (India), vol. 59, pt. EI 6, Junio 1979, pags. 333-339

SHIMONY, U.: "Regularity in linear electric networks of general symmetry". IEEE Trans. Circ. and Systems, Oct. 1980, pags. 976-978

Bibliografía revisada después de cerrado el texto

CHEN, W.K.: "Applied graph theory". North-Holland. Amsterdam 1971.

ONOGI, Y. et al.: "A method of suppressing fault currents and improving the ground level electric field in a novel six-phase power transmission system". IEEE Trans. PAS, vol. 102, num. 4, pags. 870-880.

WILSON, D.D. & STEWART, J.R.: "Switching surge characteristics of six-phase transmission lines". IEEE Trans. PAS, vol. 103, num. 11. Nov. 1984, pags. 3393-3401.

YEUNG, K.S.: "A new look at the method of symmetrical components". IEEE Trans. on Education, vol. E-26, num. 2, Mayo 1983, pags. 68-70

SANDBERG, I.W.: "On causality and linear maps". IEEE Trans. CAS, vol. 32, num. 4, Abril 1985, pags. 392-393

VIDYASAGAR, M.: "A note on time invariance and causality". IEEE Trans. Automat. Contr., vol AC-28, Sep. 1983, pags. 929-931.

=====

Alfabeto, 28
 Aplicación matricial, 60
 Arbol, 6
 Arbol de un grafo, 6
 Arco, 38
 Arco p-fásico, 93
 Arco virtual, 89
 Arista, 1
 Arista p-fásica, 93

 Base canónica de K^x , 35
 Base de las variables de un multiterminal, 79
 Base de un conjunto de ligaduras, 60
 Bilateralidad, 68
 Bola cerrada, 5
 Bosque, 6
 Bosque de un grafo, 6
 Bosque normal, 25
 Bucle, 6
 Bucle de un grafo, 6
 Bucle fundamental, 20
 Bucle orientado, 41

 Camino, 6
 Camino de un grafo, 6
 Camino fundamental, 22
 Camino orientado, 43
 Clases de conexión, 5
 Coárbol, 6
 Cobosque, 6
 Combinación lineal de las columnas de una matriz, 32
 Combinación lineal de las filas de una matriz, 32
 Componente de secuencia, 107
 Componente de un grafo, 6

Componentes simétricas, 107
Composición de morfismos, 89
Coproducto, 34
Corte, 7
Corte fundamental, 18
Corte orientado, 42
Corte trivial, 7

Determinante de una matriz, 35
Dispositivo, 1
Dispositivo básico, 67
Dispositivo lineal, 67
Dispositivo orientado, 38
Distancia entre nudos, 5

Ecuación del multiterminal, 77
Enlace, 6
Esfera, 5
Estable, 93
Excitación formal de la red, 74
Expansión de un grafo, 139
Extremo de una arista, 4

Final de un arco, 39
Final de un camino, 43
Final de un corte, 42
Fuente independiente de intensidad, 67
Fuente independiente de tensión, 67
Función de conexión, 1
Función de ligadura, 68
Función de orientación relativa, 45
Función de transferencia, 69
Fusión de matrices, 34
Fusión de vectores, 34

Generatriz de un grafo, 112
Grado de un nudo, 4

Grados de indeterminación, 74

Grafo conexo, 5

Grafo lineal no orientado, 3

Grafo lineal orientado, 40

Grafo no orientado, 1

Grafo orientado, 38

Grafo simétrico, 90

Grafos isomorfos, 88

Imágen de un arco por un morfismo, 89

Imágen por un morfismo, 89

Imágen por una operación, 92

Incidencia arista-nudo, 4

Intensidad de nudo, 61

Intensidad de terminal de un dispositivo, 58

Intensidades kirchoffianas, 63

Intersección de subgrafos, 4

Isomorfismo de grafos, 88

Isomorfismo recíproco, 89

Itinerario, 7

Ligadura, 59

Matrices equivalentes en filas, 36

Matriz circulante, 96

Matriz con coeficientes en K , 28

Matriz cuadrada, 32

Matriz de admitancias de un multiterminal, 79

Matriz de bucles fundamentales, 48

Matriz de caminos fundamentales, 49

Matriz de conexiones de los terminales de una subred, 78

Matriz de cortes fundamentales, 47

Matriz de incidencia bucles-arcos, 45

Matriz de incidencia caminos-arcos, 47

Matriz de incidencia clases de conexión-nudos, 45

Matriz de incidencia cortes-arcos, 46

Matriz de incidencia nudos-arcos, 44

Matriz de ligaduras, 59
Matriz de ligaduras del multiterminal, 77
Matriz escalonada, 38
Matriz fundamental de conexión, 49
Matriz inversa, 35
Matriz ortogonal, 37
Matriz reducida, 36
Matriz unidad, 32
Maximal, 5
Modelos, 67
Morfismo de grafos, 87
Multiterminal, 77
Multiterminales equivalentes, 79

Neutro, 93
Neutro de una red, 109
Nudo, 1
Nudo aislado, 4
Nudo de referencia, 5
Nudo interno de una subred, 75
Nudo p-fásico, 93
Nudo terminal, 4
Nudo terminal de una subred, 75
Nudos conexos, 5
Nudos contiguos, 4

Operación de un grupo sobre un conjunto, 92
Operaciones inducidas, 93
Opuesto de un par de terminales, 89
Orbita, 92
Ordenación, 30
Orientación de un arco con respecto a un bucle, 41
Orientación de un arco con respecto a un camino, 43
Orientación de un arco con respecto a un corte, 42
Origen de un arco, 39
Origen de un camino, 43
Origen de un corte, 42

Partición de un alfabeto, 32
Partición de un vector, 33
Partición de una matriz, 33
Período, 93

Rama, 59
Ramal, 6
Rango de un conjunto de ligaduras, 60
Rango de una matriz, 35
Red bilateral, 72
Red de secuencia, 119
Red primaria, 67
Red simétrica, 100
Régimen de la red, 73
Régimen equilibrado, 107
Relaciones primarias de una red, 67
Relaciones primarias monofásicas, 112
Respuesta de la red, 74

Secuencia directa, 106
Secuencia homopolar, 106
Secuencia inversa, 106
Simetría de la red, 100
Simetría de un grafo, 88
Simetría p-fásica, 90
Simetría regular, 120
Simetría trivial, 88
Sistema formal de ecuaciones de la red, 72
Solución causal del sistema de ecuaciones de la red, 71
Solución formal del sistema de ecuaciones de la red, 71
Subgrafo, 4
Subgrafo cubriente, 4
Subgrafo inducido, 4
Subgrafo propio, 4
Subgrafos complementarios, 4
Submatriz, 29

Subred, 75
Subred multiterminal, 75
Subvector, 29
Sucesión conexa, 5
Sucesiones de aristas y nudos inducidas por un itinerario, 8
Supresión de aristas, 4
Supresión de nudos, 4

Tension entre terminales de un dispositivo, 58
Tensiones kirchoffianas, 65
Terminal de un dispositivo, 1
Terminal p-fásico, 93
Terminales de un arco, 39

Unilateralidad, 68
Unión de subgrafos, 4

Vector columna, 32
Vector con coeficientes en K , 28
Vector de elementos de V^x , 58
Vector de intensidades de arcos o de ramas, 59
Vector de intensidades de bucles, 63
Vector de intensidades de nudos, 61
Vector de potenciales de nudos, 64
Vector de tensiones de arcos o de ramas, 59
Vector de tensiones de cortes, 64
Vector de tensiones de nudos, 64
Vector equilibrado, 106
Vector fila, 32
Vector kirchoffiano de intensidades, 63
Vector kirchoffiano de tensiones, 65