Matemáticas experimentales[1]

Antonio Pérez Jiménez

Introducción

En primer lugar, quiero manifestar mi más sincero agradecimiento a los Organizadores de estos II Encuentros Extremeños por la amabilidad que han tenido al invitarme.

Antes que nada, una aclaración. Al hablar de matemáticas experimentales me estaré refiriendo siempre a la enseñanza de nuestra materia. Nada más lejos de mis posibilidades que intentar adjetivar las propias matemáticas. Hablaré de enseñanza de las matemáticas y, en general, de la utilización de recursos que posibiliten la acción del alumno y su protagonismo en el aprendizaje. No pretendo, obviamente, magnificar ni dar valor absoluto a nada; las matemáticas experimentales serán, simplemente, una propuesta metodológica y organizadora del espacio educativo.

He elegido un tema que considero de actualidad. De actualidad no por lo nuevo, que no lo es, sino por lo "novedoso". En los tiempos de Reforma que nos ha tocado vivir en España, se están propiciando unos cambios que yo no dudaría en calificar de profundos: estamos pasando desde un paradigma de enseñanza expositivo, contemplativo, de "rigor matemático" y teórico, a otro en el que predomina la propia reflexión del alumno, el planteamiento de actividades y preguntas por parte del profesor, el "rigor didáctico", lo cultural.

Profundo, porque arranca desde el propio profesorado: desde casi al mismo tiempo que se implantan los actuales programas de EGB y BUP, en la década de los setenta, grupos de profesores relacionados con o aglutinados por los movimientos de Renovación Pedagógicas (los actuales MRP's) manifiestan su desacuerdo con los programas implantados por los "expertos" (las "matemáticas modernas", en nuestro caso; la "lingüística estructural", etc.). Pronto aparecen textos y métodos alternativos y, cada vez más, grupos y asociaciones que reivindican de una u otra manera, un cambio de programa, del currículo, que decimos hoy.

El Grupo Cero de Valencia puede ser, para los que enseñamos matemáticas, un primer ejemplo: irrumpen en la escena educativa en una "Escola d'Estiu" de Barcelona,, en 1975, dentro del marco de las actividades de "Rosa Sensat". Sus propuestas de entonces suponen un revulsivo: basta de hacer matemáticas sin sentido; hagamos clases con problemas de interés, vienen a decir. Comienzan a aparecer, en distinta época y hasta nuestros días, otros grupos: Zero de Barcelona, Azarquiel de Madrid, Beta de Badajoz, Halley de Cáceres; los colectivos de didáctica de León, Cantabria y Sevilla; los Seminarios Permanentes de Salamanca y Málaga; las asociaciones de profesores de Canarias, Andalucía, Castilla, Aragón, Navarra, Castellón, Extremadura, Alicante, Madrid y Galicia.

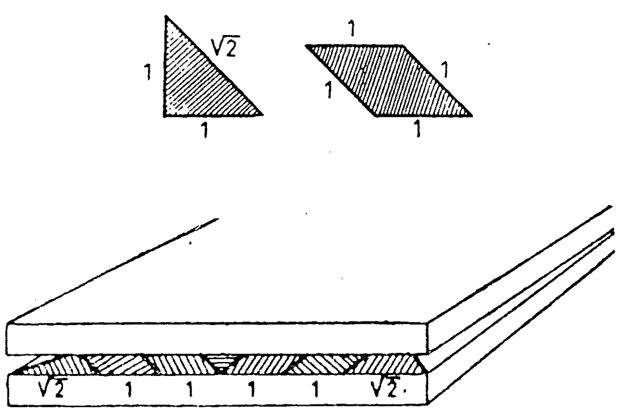
1 Conferencia pronunciada por el autor en los II Encuentros Extremeños de Educación Matemática, organizados por la Sociedad Extremeña de Profesores de Matemáticas, y celebrados en Cáceres del 19 al 21 de noviembre de 1991.

La propia Administración, en el año 83, lanza la Reforma en plan experimental. pero a diferencia de otras Reformas, el posicionamiento de Grupos de profesores es claro y, en cierta medida, la administración lo tiene en cuenta. Y es desde este punto de vista, del de la acción del profesorado, y desde el de la incorporación masiva del alumnado a la enseñanza secundaria, desde el que digo que se está produciendo una Reforma en profundidad.

Ya sé que el desencanto invade hoy muchos de nuestros Centros. Muchos son los problemas: desde los laborales y administrativos hasta los de "identidad", pasando por la falta de espacios y recursos que son imprescindibles en esta Reforma pregonada. Pero desde el centro mismo de la crisis, el posicionamiento didáctico, que para mí equivale a científico, es cada vez más importante.

Dije al principio que el planteamiento que voy a hacer no es nuevo, sino novedoso. Veamos un ejemplo.

Se trata de un problema que suelo contar. La situación es la siguiente:



Nos muestran, entreabierta, una caja cuadrada en la que hay un masaico construido con dos tipos de piezas: triángulos rectágulos e isósceles y rombos con lados iguales a los catetos de los triángulos. Los catetos y los lados del rombo son iguales. Se observa una primera fila compuesta por dos triángulos, con las hipotenusas hacia nosotros y situados en los extremos, y cuatro rombos. Se trata de averiguar cuántas piezas de cada tipo hay en total.

Cada vez que he propuesto este problema, los profesores han actuado, en general, como los alumnos: bien mediante dibujo o bien mediante piezas han intentado reconstruir el mosaico. En alguna ocasión, alguien da la solución "matemática" a primera vista: $(4+2\sqrt{2})^2 = 24+16\sqrt{2}$ y por lo tanto el mosaico estará compuesto por 48 triángulos (área $1/2$) y 32 rombos (área $\sqrt{2}/2$).

Los problemas sobre mosaicos son de rabiosa actualidad en la enseñanza, pero no son nuevos. El problema que he referido está contado por el profesor Puig Adam a propósito de un juego popular entonces conocido como "Rombo".

El problema viene a cuento de nuestra charla. Es un prototipo de problema en el sentido de que con problemas como éste podemos introducirnos en el mundo de las cantidades inconmensurables: la existencia de la $\sqrt{2}$, en nuestro caso, nos lleva a no poder "mezclar" rombos y triángulos en el recuento.

Y podemos introducir al alumno experimentalmente: acudiendo a la estrategia de resolver un problema con la misma estructura, pero más simple en sus datos; por ejemplo, en un friso puede observarse la imposibilidad de mezclar cantidades no conmensurables. Por otro lado, una progresiva generalización en los datos, conduce a un método general de resolución del problema planteado.

La experiencia con profesores de matemáticas, en su intento de resolver este problema, también nos dice mucho. Casi todos, intentan la vía experimental; no acuden directamente al modelo matemático, a pesar de que la caja, siendo cuadrada, podría apuntar al cálculo del área del cuadrado antes descrito. Parece que ante una situación nueva, todos la abordamos "tirando" de lo experimental. No siempre se acude directamente al bagaje de conocimientos, ni siquiera en matemáticas.

Pero retomemos el hilo de la charla allí donde lo habíamos dejado. Decíamos que el tema no era nuevo sino novedoso. Y no es nuevo porque, salvo con los actuales programas de matemáticas modernas, la enseñanza de las matemáticas ha estado siempre relativamente centrada en la propia experiencia, en lo empírico, en lo concreto. Bien es verdad que con distintos enfoques, principalmente dos: uno consistente en considerar los procesos de aprendizaje vinculados a una intuición estática, en la que la construcción del conocimiento estaba centrada en una especie de actitud contemplativa, y otro en el que la intuición se entendía desde un punto de vista dinámico. El punto de vista dinámico se impone al estático; Gattegno, Castelnuovo, Puig Adam, Nicolet, miembros de la CIEAEM, (Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas), hablan de una enseñanza en la que el aprendizaje adquiera una mayor importancia. Decir aprendizaje es decir, también, protagonismo del niño. Las tesis de Piaget sobre psicología evolutiva aparecen ya reflejadas en el primer libro de la Comisión. Puig Adam llega a afirmar que el profesor debe parecerse cada vez menos a un conferenciante y cada vez más a un maestro de taller. El Aula-Taller, incluso el Laboratorio de Matemáticas, no es una invención de los ochenta.

Tras el Congreso de Royaumont, el academicismo matemático se impone y las llamadas "matemáticas modernas" impregnan los contenidos y métodos de la enseñanza.

Cuando decidí hablar de matemáticas experimentales en esta Conferencia, lo hice adrede: es importante dar un giro a la actual enseñanza de nuestra materia; nuestros actuales programas llevan a impartir una matemática carente de significado, ahistórica y acultural: el formalismo por el formalismo. El alumno está obligado a trabajar de forma rutinaria y memorística: la falta de referencias es absoluta. Frente a ello, creo que se impone la utilización de recursos, de materiales que "encarnen" los conceptos, los métodos y permitan aquello que constituye la esencia de toda disciplina científica y, muy en particular, de la nuestra: la abstracción. Partiendo del formalismo bourbakista, ¿qué puede abstraer un alumno?. Podrá memorizar, sólo memorizar. El alumno aprenderá matemáticas, pero no en la escuela. O como nos ha recordado recientemente Leone Burton, en todo caso el alumno se acostumbrará a pensar en matemáticas, pero no a pensar matemáticamente.

¿Es la Matemática una ciencia experimental?

El título de la conferencia puede conducir a la afirmación: La Matemática es una ciencia experimental. Si en algo han estado de acuerdo empiristas y racionalistas ha sido precisamente en la consideración de la matemática como una ciencia no empírica del conocimiento matemático.

Frege, que se sitúa en una posición platónica al afirmar: "Si en el flujo continuo de todas las cosas no persistiera nada firme, eterno, desaparecería la inteligibilidad del mundo y todo se precipitaría en la confusión", considera, sin embargo, que "El modo de consideración histórico, que trata de detectar el devenir de las cosas y de descubrir su esencia a partir de su devenir, tiene, sin duda, una gran justificación" y añade, "pero también tiene sus límites". (Gottlob Frege, Fundamentos de la Aritmética, Ed. Laia, 2ª edición, Barcelona 1973).

Lo que sí parece claro, es la vinculación de la matemática, en sus orígenes, con la experiencia y el quehacer humanos. Así, Boyer, en su Historia de la Matemática, afirma: "Durante un cierto tiempo se pensó que la matemática se refería directamente al mundo de nuestra experiencia sensible, y sólo en el siglo XIX se liberó la matemática pura de las limitaciones que implican las observaciones de la naturaleza. Está totalmente claro, no obstante, que la matemática apareció originariamente como parte de la vida diaria del hombre (...)"

Y más adelante, hablando del Papiro de Moscú (1890 a. C.) y refiriéndose al cálculo del volumen del tronco de pirámide, Boyer dice, "No se sabe cómo llegaron los egipcios a estos resultados, pero parece muy posible que la regla para el volumen de la pirámide tuviera un origen experimental, y quizá también para el volumen del tronco, aunque no es tan fácil. Para este último, parece más probable una explicación de base teórica, y se ha sugerido que los egipcios pudieron proceder aquí de una manera análoga a como hicieron en los casos de los triángulos isósceles y del trapecio isósceles, es decir, pudieron haber descompuesto, al menos mentalmente, el tronco de pirámide en paralelepípedos, prismas y pirámides".

Otro historiador, Eric Temple Bell, (Historia de las Matemáticas", 1985 - 1ª ed. original, 1945) refiriéndose al carácter deductivo de las matemáticas, afirma: "Existe un abismo entre el empirismo práctico de los agrimensores que parcelaban los campos del antiguo Egipto, y la geometría de los griegos del siglo VI a. C. Aquello fue lo que precedió a las matemáticas; esto, las matemáticas propiamente dichas; ese abismo lo salva el puente del razonamiento deductivo aplicado en forma consciente y deliberada a las inducciones prácticas de la vida diaria. Las matemáticas no existen sin la estricta demostración deductiva a partir de hipótesis admitidas y claramente establecidas como tales. Lo anterior no niega que la intuición, los experimentos, la inducción y el golpe de vista sean elementos importantes en la inventiva matemática; únicamente establece el criterio por el cual el resultado de todo golpe de vista, sea cual sea el nombre que se le asigne, se juzga o no como matemáticas. Así, por ejemplo, la regla útil y práctica de los babilonios -que el área de un campo rectangular puede medirse multiplicando "el largo por el ancho"- puede verificarse en la práctica con toda la exactitud físicamente posible, pero esa regla no se incorpora en las matemáticas hasta que se ha deducido de supuestos explícitos".

Y, a continuación, en vista del auge de las matemáticas aplicadas, Bell habla del prestigio matemático de los procedimientos semiempíricos de cálculo. Esta son sus palabras: "Es significativo asentar que esta diferencia tajante entre las matemáticas y las demás ciencias empezó a desaparecer por el rápido desarrollo de las llamadas matemáticas aplicadas durante la segunda guerra mundial. Los procedimientos semiempíricos de cálculo, necesarios por su utilidad práctica en la guerra, alcanzaron un completo prestigio matemático".

¿Qué diría Bell ante la demostración por ordenador del teorema de los cuatro colores dada a conocer por Hankel y Appel en 1976 y anunciada en las páginas del New York Times? Según Davis y Hersh (Experiencia Matemática, Ed. Labor-MEC, 1988), la crítica del filósofo consistiría en afirmar que "se está sacrificando una parte esencial de la certeza matemática al nivel vulgar del conocimiento ordinario, que está sujeto a un escepticismo posible y cierto del cual siempre estuvo libre el conocimiento matemático". Sin embargo, para estos mismos autores, el matemático lo verá de distinta manera según pertenezca o no a esa familia de matemáticos que se sienten cómodos con el ordenador.

El ordenador es, qué duda cabe, la herramienta moderna con la que vienen trabajando últimamente algunos matemáticos. Los matemáticos han venido utilizando desde siempre multitud de herramientas y artilugios; la regla y compás, los ábacos y la regla de cálculo, son los más conocidos junto con las calculadores modernas y los ordenadores.

A este respecto, cuenta Henri Poincare la manera de proceder, tan distinta, de los matemáticos. Y, hablando de Klein, refiere: "(...) estudia una de las cuestiones más abstractas de la teoría de funciones; se trata de saber si sobre cierta superficie de Riemann, existe siempre una fución que admite singularidades dadas. ¿Qué hace el célebre matemático alemán? Reemplaza la superficie de Riemann por una superficie metálica, cuya conductibilidad eléctrica varía según ciertas leyes. Pone dos de sus puntos en comunicación con los polos de una pila. La corriente, dice, tendrá que pasar y, la forma como esta corriente sea distribuida sobre la superficie, definirá una función cuyas singularidades serán precisamente las que están previstas por el enunciado.

Sin duda, Klein sabe bien que ahí no ha hecho más que una estimación aproximada; sin embargo, no ha vacilado en publicarla. Probablemente creía encontrar en ello, si no una demostración rigurosa, por lo menos no sé que certeza moral. Un lógico habría rechazado con horror una concepción semejante o, más bien, no habría tenido que rechazarla, pues nunca habría podido nacer en su mente". (H. Poincaré; El Valor de la Ciencia; Espasa-Calpe, 3ª Ed.).

El nombre de Matemáticas Experimentales está sacado de una cierta clasificación que suele hacerse de las tendencias en la enseñanza de las matemáticas. Según esta clasificación, se distinguen tres tendencias:

1.- Las Matemáticas y el Entorno.
2.- La Resolución de Problemas.
3.- Las Matemáticas Experimentales.

La primera de estas tendencias supone, antes que nada, un rechazo a las llamadas matemáticas modernas:

- Busca la motivación.
- Pretende la interdisciplinariedad.
- Considera a las matemáticas como una ciencia auxiliar.
- Aborda problemas de la realidad.
- La enseñanza se entiende integrada dentro de la realidad cultural. En este sentido, las matemáticas no son sino un instrumento cultural.

El Grupo Cero de Valencia, al que ya he aludido, fue en el segundo lustro de los 70 el principal impulsor de esta corriente. A nivel teórico, la escuela holandesa de Freudhental, con sus estudios sobre fenomenología de las estructuras didácticas, será la principal valedora de esta tendencia.

La segunda de las tendencias señaladas, la Resolución de Problemas, retoma la línea de Polya.- Las matemáticas son, al fin y al cabo, los problemas que la originan. Resolver los problemas es un proceso íntimamente vinculado al de construcción y descubrimiento de las matemáticas. La N.C.T.M. (National Council of Teachers of Mathematics), recomienda que la Resolución de Problemas sea el principal objetivo de la enseñanza de los 80. Alan Schoenfeld, uno de los principales teóricos de esta tendencia, distingue cuatro enfoques principales:

1.- Ejercicios muy sencillos situados en el contexto del mundo real.
2.- Problemas de Matemáticas Aplicadas o de "Modelos Matemáticos".
3.- Problemas que intentan explorar, desde un punto de vista psicológico, los aspectos del pensamiento matemático.
4.- Resolución de problemas en el sentido de Pólya, en cuanto al método heurístico y a las estrategias generales de Resolución.

En cuanto a la tercera tendencia, las Matemáticas Experimentales, que dan nombre a nuestra charla, reúne aspectos de las tendencias anteriores: por un lado, considera muy importante los procesos de elaboración empíricos y, en este sentido conecta con la primera tendencia; por otra, utiliza como método la Resolución de Problemas. Cuando se habla de matemáticas experimentales, se le suelen asociar las siguientes notas características:

1.- Las matemáticas experimentales se basan en el método científico de ensayo y error.
2.- La matematización se produce mediante un proceso de construcción de modelos.
3.- Disminuye el énfasis en las demostraciones deductivas y se atiende más a las aportaciones de pruebas y conjeturas, conectando de esta manera con la línea de matemáticas informales de Lakatos.
4.- Por otro lado, las matemáticas experimentales determinan un espacio "natural" para el aprendizaje: el taller o Laboratorio de Matemáticas.

Pero antes de seguir con esta ya larga perorata con la que tengo el riesgo de aburrir al auditorio, vamos a comentar algunos ejemplos.

1º Ejemplo: Trabajando con poliedros.[2]

La matemática sobre poliedros suele considerarse una materia acabada. Parece que poco más hay que decir y, mucho menos de los platónicos. Hablar de ellos a los niños suele ser un ejercicio entre cultural, estético y de descripción. Es ésta una opinión que debe estar bastante extendida, porque poco, muy poco se habla de ellos en los programas actuales. Pero si a la enseñanza se le da el enfoque constructivo de elaboración de las matemáticas por los alumnos, de la aprehensión por estos del proceso de elaboración, entonces tratar en clase el tema de los poliedros puede ser muy instructivo.

El ejemplo se refiere exclusivamente a una parte de todo el partido que se le puede sacar al estudio

[2] Ver ejemplificación en la sección "Para Coleccionar"

de poliedros, dentro de otro más general, de percepción y matematización del espacio tridimensional.

Utilizaremos como material los troqueles "Plot" o los polígonos de plástico engarzables conocidos como Polydron.

En una primera fase, dejamos que los alumnos jueguen con el material, que se familiaricen con él. Aparecen ya poliedros "monstruos", quizás por un tendencia natural en los niños de alejarse de lo convencional o simplemente por una estética distinta.

Solicitamos que construyan poliedros con un solo tipo de piezas (polígonos regulares). Construyen el cubo, el dodecaedro, el tetraedro y suele aparecer el octaedro y, a veces, también el icosaedro. No suelen faltar algunos deltaedros (poliedros con caras triángulos equiláteros) no regulares.

Durante este proceso, los alumnos han observado que no se pueden construir poliedros con el hexágono. El profesor interviene para solicitar si pueden obtenerse poliedros regulares con polígonos de seis o más de seis lados. He aquí una buena cuestión para reflexionar sobre los ángulos.

Descartados el hexágono y los polígonos de más lados, nos centramos en el triángulo, cuadrado y pentágono. La evidencia empírica lleva a que con el cuadrado sólo se puede montar un poliedro, el cubo, y lo mismo con el pentágono. Cuatro cuadrados suman en un vértice 360º y por lo tanto no pueden "subirse al espacio". Cuatro pentágonos suman más de 360º en un vértice.

No ocurre lo mismo con los triángulos equiláteros: aparte de los deltaedros que ya han obtenido, (tetraedro, octaedro, y algunos no regulares) comienza a aparecer toda una fauna. Solicitamos que los nombren y los caractericen. Surgen nombres más variopintos y una conjetura: sólo hay deltaedros con números pares de caras: 4, 6, 8, ...

¿Por qué no puede haber deltaedros con un número impar de caras? ¿Cómo se puede construir un deltaedro a partir de otro, del anterior? Ambas preguntas están relacionadas y el proceso de construcción nos facilita una prueba de la primera.

Debemos entrar en una sistemática de construcción y clasificación. Desechamos los deltaedros cóncavos porque pueden ser obtenidos por yuxtaposición de los convexos. Nombramos y buscamos características: el orden del vértice aparece casi a primera vista. Escribimos una tabla sobre el encerado y facilitamos los nombre genéricos y los "vulgares" cuando los conozcamos.

DELTAEDRO	C	A	V	V-3	V-4	V-5
Tetraedro	4	6	4	4		
Delta-6	6	9	5	2	3	
Octaedro	8	12	6		6	
Delta-10	10	15	7		5	2
Delta-12	12	18	8		4	4
Delta-14	14	21	9		3	6
Delta-16	16	24	10		2	8
Icosaedro	20	30	12			12

En esa tabla, se echa de menos el deltaedro de 18 caras. ¿Existirá o no el delta-18? ¿Por qué no aparece? Los intentos de cosntruirlos han sido vanos. Se impone la reflexión. Y lo natural es hacerlo sobre el propio proceso de cosntrucción y teniendo en cuenta las características de los vértices. Añadir sólo dos triángulos al delta-16 obligaría a un vértice a ser de orden 6., es decir, plano; sin embargo sí puedo añadir cuatro al delta-16, abriéndolo desde los dos únicos vértices de orden 4. [Un estudio detallado de lo que acabo de hacer, y más general sobre Poliedros, aparece en el libro de Gregoria Guillén Poliedros (Ed. Síntesis, Madrid, 1991)].

He aquí una construcción empírica y una prueba de la misma naturalea. Por el camino, los alumnos no sólo se han familiarizado con los poliedros y han aprendido sus nombres, también han efectuado caracterizaciones y clasificaciones, han realizado pruebas basadas en el propio proceso de construcción, se han hecho preguntas y han elaborado conjeturas. La actividad ha sido, sin duda alguna, muy rica.

2º Ejemplo: Midiendo en la realidad. Trigonometría.

El enfoque usual de la trigonometría, que se suele restringir a 2º de BUP, es decir a alumnos de 15 años, está encaminado al estudio de las funciones circulares. Por ello, tras una alusión a la semejanza, se suelen definir las razones trigonométricas, se generalizan para ángulos mayores de 90°, se representan gráficamente, se establecen las relaciones entre ellas y se estudian las fórmulas centrales (desde la llamada fórmula fundamental, hasta los conocidos desarrollos del seno, el coseno y la tangente de la suma de ángulos; fórmulas para el ángulo doble y mitad). Los ejercicios suelen girar sobre la adquisición de habilidades con éstas fórmulas para lo que se suele acudir a la comprobación de identidades y a las ecuaciones trigonométricas. Por último, se estudia la llamada Trigonometría plana, con los teoremas del seno y coseno. En definitiva, un enfoque en demasía internalista, con ejercicios de aplicación.

Desde una perspectiva de enseñanza experimental, el enfoque es otro y, desde luego, debería empezarse a edades más tempranas, pues lo esencial de la trigonometría es la medición.

La trigonometría nos proporciona una extraordinaria ocasión para imbuir a nuestro alumnos en una perspectiva más histórica y cultural, de matemática aplicada. En este sentido, un aspecto esencial es explicitar los llamados trabajo de Campo y trabajo de Gabinete. Es decir, hay unas medidas que se toman en la realidad, con unos instrumentos de medición, y unas tareas a realizar sobre la mesa, en la que se traducen los problemas reales de medición a problemas semejantes y se utiliza un cierto bagaje teórico.

Desde esta perspectiva, los clásicos problemas escolares de cálculo de distancias a puntos inaccesibles pueden hacerse simplemente a escala (incluidos los de pies inaccesibles): se utilizan los datos, distancias y ángulos, para elaborar, a escala, un dibujo en el que las incógnitas serán segmentos que hay que medir sobre el papel y restituir la escala. Es un método sencillo y de una gran potencia.

Las razones trigonométricas empiezan a jugar un importante papel en el momento en que intentamos prescindir del dibujo a escala, para hacer un trabajo más preciso, menos laborioso e independiente de los útiles de dibujo. Definir las razones trigonométricas, calcular tablas por medición y su generalización a ángulos mayores de 90°, son eslabones que pueden ir perfectamente engarzados en el planteamiento de problemas sobre medidas.

Un ejemplo simple: el cálculo de la altura de una torre. Sobre el terreno, se han medido la distancia desde el pie de la torre hasta el punto del observador, y, con un goniómetro vertical, se ha calculado el ángulo de la visual trazada hasta la cima de la torre. El dibujo de gabinete supone, en primer lugar, una decisión sobre qué escala se usará, la realización del propio dibujo y, finalmente, la restitución de la escala correspondiente. Al entrar en juego las razones trigonométricas, el problema se reduce a multiplicar la medida tomada por la tangente del ángulo medido. Así, disponer de una tabla de tangentes nos permitirá economizar esfuerzos y ahorrar tiempo.

De esta manera, las razones trigonométricas se introducen con problemas elementales; los alumnos construyen pequeñas tablas midiendo y calculando sobre triángulos rectángulos que ellos mismos han dibujado; han de decidir cuál sea la unidad de medida más conveniente, para calcular con más precisión, y sobre qué lado conviene tomarla para ahorrar cálculos. En este proceso, surge la circunferencia goniométrica, que a su vez, nos sugiere la generalización a ángulos mayores de 90° y negativos, y la representación gráfica.

La llamada trigonometría plana no es necesariamente el último eslabón, para el que además se necesitan los teoremas del seno y coseno, como sugieren los planteamientos escolares tradicionales. Como se ha estado trabajando con triángulos cualesquiera, y no sólo con triángulos rectángulos, los alumnos han tenido que utilizar la estrategia de la altura. Trazar la altura permite reducir el problema a triángulos rectángulos. La utilización de este recurso tan simple, no debe ser un paso dado por el profesor para demostrar los consabidos teoremas, sino un objetivo de conocimiento. Con la "estrategia de la altura", los teoremas de seno y coseno se introducen mediante la generalización de aquellos problemas que ya han sido resueltos.

Otro aspecto que me parece importante destacar desde la óptica experimental, es el cálculo exacto de razones trigonométricas. Es usual calcular las razones de 30°, 60°, etc. y, curiosamente, "por decreto", se suele trabajar con ellas más que con las aproximadas. Calcular valores exactos tiene el interés de trabajar directamente desde la teoría. Si calculamos el seno de 60°, tomaremos un triángulo equilátero, de lado unidad, trazaremos su altura, que además es mediatriz, mediana y bisectriz. Sobre uno de los triángulos rectángulos aplicamos la definición de seno al ángulo de 30° y obtenemos su valor exacto. A mí me gusta más hablar de valor teórico. Este valor me va a permitir obtener, si quiero, la aproximación que desee. He aquí una buena ocasión para que el alumno discierna la teoría de la práctica, que aquí aparece servida, en una confrontación ofrecida por los propios problemas y ejercicios. Desde esta óptica, el desarrollo de las razones trigonométricas de la suma, resta, ángulos doble y mitad, etc., adquiere una justificación clara, pues permitirá obtener más razones trigonométricas exactas, lo que parece deseable en cálculos de envergadura.

Por último, unas palabras sobre recursos. Desde la utilización de sombras hasta la astronomía, pasando por la construcción y utilización de goniómetros, deben ser puestos en juego para engarzar, desde la óptica en la que estoy situado, todos los elementos que pueden hacer de la trigonometría en la enseñanza secundaria una herramienta cultural, histórica, empírica y teórica.

No estará de más salir alguna vez al campo y realizar alguna mediciones sobre el terreno, provisto de una cinta métrica y de un teodolito (siempre que este no tenga tal margen de error que, a simple vista, consigamos mejores mediciones). Construir un goniómetro puede ser un ejemplo sencillo: una regla, un transportador de ángulo la cánula de un bolígrafo y una plomada casera, bastarán para que los alumnos construyean un goniómetro vertical y se hagan una buena idea de cómo se miden los ángulos en la realidad. La clase, un laboratorio o taller, desde el punto de vista experimetal, debe estar provista de distintas herramientas de medición: desde el teodolito señalado, hasta un curvímetro pasando por los aparatos de medición mediante ultrasonidos, relativamente económicos.

Sobre la utilización de la Astronomía les invito a leer un hermoso documento de trabajo titulado "Geometría y Luz", elaborado por nuestros compañeros del Grupo Halley.

3º Ejemplo: Probabilidad. El Problema de los Repartos.

Vamos a abordar un problema histórico, el de los Repartos, para diagnosticar un obstáculo epistemológico y enfrentarlo por vía experimental.

He aquí el segundo problema propuesto por De Méré a Pascal y que se considera históricamente como el origen del moderno cálculo de probabilidades, tras la fructífera correspondencia mantenida por el propio Pascal con Fermat:

> "Dos jugadores, de común acuerdo, deciden interrumpir una partida antes de su final y quieren hacer un justo reparto de las cantidades apostadas, de acuerdo con las probabilidades que tienen cada uno de ganar"

Pascal comenta a Fermat, en carta de 29 de julio de 1654:

> "Admiro más el método de las partidas que el de los dados [se refiere Pascal al primer problema planteado por De Méré, en el que se trata de averiguar a cuántos lanzamientos hay que jugar con dos dados, para tener la seguridad de que se apostará con ventaja]. He visto a varias personas descubrir el de los dados, como el caballero De Méré, que es el que me propuso estos problemas, y también a Monsieur de Roberval, pero el señor De Méré no pudo hallar nunca el valor exacto de los repartos, ni tampoco ningún rodeo para conseguirlo, de suerte que me encontré con que era yo el único que había conocido esa proporción".

Pascal resuelva el problema de la siguiente manera (en la hipótesis de que se juegue a ganar tres partidas y de que, en el momento de la interrupción, el primer jugador haya ganado dos partidas y el segundo una): "considerad, pues señor, [dice en la citada carta a Fermat] que si el primero gana, le corresponden 64 monedas ("pistolas"); si pierde, le pertenecen 32 [pues en ese momento ambos jugadores estarían empatados]. Por lo tanto, si quieren no arriesgar esta partida y separarse sin jugarla, el primero debe decir: "Estoy seguro de tener 32 monedas, porque incluso la pérdida me las da, pero en cuanto a las otras 32, tal vez yo las consiga, tal vez vos: la probabilidad es la misma; repartamos pues esas 32 monedas por la mitad y dadme, además, mis 32 monedas que tengo seguras". Tendrá pues 48 monedas y el otro 16".

Es decir, el reparto se hace de acuerdo con las proporciones: 3/4 y 1/4, que son las probabilidades calculadas por Pascal.

El análisis que hace Fermat, se basa en la Combinatoria. Pascal opina que ese método es excesivo y que el suyo es más corto y más claro.

En una segunda carta a Fermat, de 24 de agosto de 1654, le dice que Roberval ha objetado su método: "Que es un error que se establezca que el arte de hacer el reparto basándose en la suposición de que se juega en cuatro partidas, habida cuenta que, cuando le faltan dos partidas a un jugador, y tres al otro, no es necesario que se jueguen cuatro partidas, pudiendo suceder que sólo se jugarán dos o tres o, a la verdad, tal vez cuatro". (Roberval se está refiriendo al caso en que a un jugador le faltan tres partidas y al otro dos).

La posición de Roberval lleva implícita que en el caso de que a un jugador le falte 2 partidas y al otro 1 las probabilidades respectivas serían de 1/3 y 2/3.

Y hasta aquí, la referencia histórica.

¿Qué ocurre en clase?

Suelo plantear, en lugar del enunciado histórico, otro de idéntica estructura:

"Se lanza una moneda en dos ocasiones. El jugador A gana en cuanto sale Cara y el jugador B cuando salen dos Cruces. ¿Qué probabilidad tiene cada jugador de ganar?".

El planteamiento de los alumnos es similar al de Roberval: organizan tres tipos de partidas: C, +C y ++; es decir Cara, Cruz-Cara y Cruz-Cruz. Y añaden: "A tiene 2 posibilidades sobre 3; su probabilidad será 2/3. La de B será 1/3".

Este problema es fácil de realizar experimentalmente. Se puede simular bastante bien con una tabla aleatoria. Realizada la simulación, el resultado se sitúa en torno a 3/4 y 1/4. Los alumnos han de enfrentarse con la discrepancia entre sus modelos.

Cuando he planteado directamente el problema histórico, en el supuesto de jugarse a tres partidas y habiendo ganado ya A le queda una partida y a B dos para ganar; el reparto estará en la proporción 2:1. Es decir, las probabilidades asociadas serán 2/3 y 1/3". Estamos en la misma situación que con el juego de Cara y Cruz. Antes, los alumnos lo abordaron por el método de Fermat y ahora, según el de Pascal. Desafortunadamente, mal en ambos casos.

Nos enfrentamos a una situación didáctica conocida: un obstáculo epistemológico. Los modelos teóricos elaborados por los alumnos son claros y rotundos (como lo era para Roberval). Didácticamente, los obstáculos deben ser sacados a la luz y los alumnos deben enfrentarse a ellos. La utilización de recursos experimentales (en este caso, la simulación) viene en nuestra ayuda al plantear a los alumnos el conflicto entre resultados dispares para un mismo problema.

El obstáculo citado está relacionado con la noción de equiprobabilidad. Los alumnos han considerado que todos los casos son equiprobables y han efectuado la proporción. ¿Qué ocurre, pues, con las clases ordinarias en las que la probabilidad se centra en el modelo de Laplace de casos favorables entre casos posibles?. Pues ocurre que los alumnos jamás se enfrentan al citado obstáculo, que se rehuye mediante la combinatoria, en busca de espacios probabilísticos equiprobables. Pascal le decía a Fermat que su método era laborioso. Y no le faltaba razón. Nuestros programas oficiales de probabilidad se centran más en la combinatoria que en el estudio del azar, con lo que no se da al tema su carácter más apreciado: el de adentrar a los alumnos en un modelo no determinista.

La realización y simulación de experiencias son una estrategia sencilla, que debería ser utilizada en la escuela como señalaban Vergas y Glaymann en su extraordinario librito "La Probabilidad en la Escuela". Hacer la probabilidad de esta manera, es adentrarse en lo que estoy definiendo como matemáticas experimentales.

Con los ejemplos anteriores he pretendido ejemplificar el enfoque experimental de la enseñanza de las matemáticas.

En el ejemplo de los poliedros platónicos, hemos visto cómo se puede realizar un proceso constructivo de lenguaje, conjeturas y pruebas desde una óptica empírica.

Con la trigonometría, hemos utilizado problemas reales que hemos matematizado a través de la semejanza, construyendo las razones trigonométricas; hemos marcado claramente la diferencia entre los procedimientos experimentales de medición y la utilización de modelos teóricos (en el cálculo de valores exactos), adentrándonos así en una valoración de la propia teoría.

En el ejemplo de los Repartos, hemos visto cómo desde la óptica experimental pueden abordarse los obstáculos epistemológicos a través del conflicto cognitivo que supone la confrontación de resultados dispares obtenidos por procedimientos distintos. Además, hemos comprobado cómo la historia nos puede servir para detectar posibles obstáculos que también tienen lugar en la enseñanza.

En los tres ejemplos hemos utilizado distinto tipo de materiales. En el caso de los poliedros, el material "Plot" o "Polydron"; en Trigonometría, desde los goniómetros hasta los instrumentos de dibujo para el trabajo de gabinete. En Probabilidad hemos utilizado monedas o hemos simulado el problema con tablas aleatorias.

La utilización de materiales y recursos diversos suele ser una característica esencial de las matemáticas experimentales. El lugar idóneo para trabajar con estos materiales es un Aula-Taller de Matemáticas y se concreta en una estructura educativa conocida como Laboratorio de Matemáticas.

El Laboratorio de Matemáticas

Ya he señalado cómo el espacio natural para el desarrollo de la enseñanza y aprendizaje desde el punto de vista experimental es el Laboratorio de Matemáticas. Pero al decir espacio natural, no nos estamos refiriendo a un Laboratorio en el sentido escolar clásico de un lugar al que se va a experimentar, a hacer prácticas. No. Se podría hablar de Laboratorio de Matemáticas sin que hay un lugar específico y determinado; es decir, sin disponer de un Aula-Taller. De hecho, más adelante, nos referiremos a los Laboratorios Móviles. Aclaremos, pues, que el Laboratorio es, antes que nada, una estructura para la enseñanza y el aprendizaje en la que se concreta la enseñanza experimental. Tendríamos que hablar entonces, más que de Laboratorio, de situaciones de Laboratorio.

Según Fortuny y Giménez, (Els Material del Laboratori de Matematiques, Dpto. de Didáctica de la UAB, 1988) que citan al pedagogo italiano De Bartolomeis, un Laboratorio es "un espacio de comportamiento y una forma de producción".

Veamos las dos notas características que señala De Bartolomeis.

Una forma de producción quiere decir, "una actitud investigadora respecto a la construcción de conceptos, la resolución de problemas, la innovación organizada, la preparación de procedimientos de investigación, de técnicas de colaboración, etc.".

Por espacio de comportamientos, se entiende "el proceso o forma de construir un concepto, de asumir una línea gradual y personal de aprendizaje".

Desde el punto de vista de las matemáticas, la estructura de Laboratorio se basa en una concepción informal de las mismas, en el sentido de Lakatos. Hacer matemáticas es un proceso constructivo, nunca terminado, en el que se realizan pruebas y conjeturas. Ya lo vimos en el ejemplo de los poliedros. Los alumnos conjeturan que se pueden construir los deltaedros con un número par de caras, hasta 20. El proceso de construcción refuta esta conjetura al no encontrarse deltaedros de 18 caras.

La estructura de Laboratorio se fundamenta en las tesis constructivistas de la enseñanza. El alumno se enfrenta a su aprendizaje a través de la acción, poniendo en juego su intuición, su lenguaje, su capacidad descriptiva y de abstracción, su visión estética. En unos casos, la acción es manipulativa y concreta, a veces lúdica; en otros es representativa y simbólica y, finalmente, formal, de acuerdo con los estadios evolutivos por los que atraviesa el alumno.

En cuanto a la pedagogía, el Laboratorio se basa en el método experimental, que abarca, con los pasos anteriormente señalados, desde lo intuitivo y empírico hasta lo teórico, pasando por el experimento mental. Según Giménez y Fortuny: "La estructura de Laboratorio da la oportunidad de experimentar: más que en la idea clásica de laboratorio, pensamos en situaciones de Laboratorio, que enfatizan el hecho de que el alumno es un participante activo que construye sus propios conocimientos, en contraposición a la concepción del alumno como receptor de los conocimientos ya acabados. Por tanto, el profesor ha de convertirse en el promotor del conocimiento más que en su emisor".

Para que una estructura de Laboratorio sea posible hay que disponer de un espacio organizado y equipado que favorezca la actividad investigadora. Debe, pues, disponerse necesariamente de un Equipo de Profesores que hará las veces de Centro de Programación y Control del trabajo del Laboratorio. Será misión de este equipo, tomar las decisiones sobre qué tipo de actividades se realizan y con qué materiales, qué problemas se proponen y qué ejercicios; cómo enlazan las actividades con el programa del departamento, cuándo estas actividades han de ser de investigación de consolidación o de evaluación del alumno; corresponde igualmente a este equipo la evaluación de las experiencias realizadas, es decir, del propio laboratorio. En definitiva, y dicho brevemente, el Equipo de Profesores ha de realizar la tarea de programación y organización.

Además del Equipo de Profesores, el Laboratorio debe disponer de medios y material. Respecto a los medios, retroproyector, proyector de diapositivas, pantalla, pizarra, vídeo y monitor y ordenadores. En cuanto al material, desde el software y vídeos didácticos hasta las tramas, pasando por los clásicos instrumentos de regla y compás, troqueles para poliedros, polígonos para mosaicos, dados, ruletas, calculadoras, y un largo etc. cuya enumeración nos llevaría al aburrimiento. A los ordenadores y al software didáctico dedicaré la última parte de esta charla.

Según la ubicación de los materiales, se distingue entre Laboratorios Móviles y Laboratorios Fijos. Los primeros suponen evidentemente una tarea suplementaria para el profesor, que ha de estar llevando, cada vez, el material al aula de los alumnos. Esta estructura móvil se lleva a cabo cuando no se puede disponer de un Aula-Taller. Lo deseable, evidentemente, es un Aula-Taller en la que se dispone del material y medios, organizados de tal manera que su utilización no demore la marcha de la clase.

Si lo deseable, desde mi punto de vista, es disponer de un Aula-Taller y de muchos medios y materiales, quiero insistir en la idea de que lo importante son las llamadas situaciones de laboratorios. O dicho de otra manera, aún cuando no se disponga de un espacio físico ad hoc, muchas actividades pueden ser realizadas en el aula de la clase y con pocos medios.

Un ejemplo muy simple: el trabajo con tramas. Repartimos tramas cuadradas a los alumnos. Solicitamos que construyan polígonos de perímetro $8+4\sqrt{2}$. Los alumnos obtienen soluciones diversas. Algunos, muy pocos, obtienen también polígonos estrellados.

Sobre éstos últimos surgen las dudas: ¿Valen o no valen como solución? ¿Es o no un polígono esa figura?. La discusión se centra sobre si es o no un polígono. Hay quien dice que sí; hay quien opina que son dos triángulos. El profesor plantea la pregunta, ¿Cuándo una figura es un polígono?

Es ésta una situación típica de laboratorio que se puede realizar sin más medios que una trama cuadrada de puntos. Hay otras muchas que pueden ser realizadas con pocos materiales y medios o con medios muy rudimentarios. Al fin y al cabo, de lo que se trata es de fomentar situaciones en la que el alumno se adentre en su propio aprendizaje y lo haga con curiosidad e interés.

Para terminar, quiero señalar dos cosas. Por un lado, que, en conexión con la Reforma y la innovación, el Laboratorio puede ser planteado como una estrategia para el cambio. Una estructura de Laboratorio es lo suficientemente flexible como para que en ella pueda trabajar un equipo de profesores y no todo el departamento o Seminario del Centro. Además, es una estructura que se hace; es decir, las experiencias pueden abordarse parcialmente y poco a poco. Por otro lado, hay un referencia en los centros: los laboratorios de las materias experimentales; de ellos se puede partir como modelo; pero, eso sí, con la idea de llegar al Laboratorio en el sentido que hemos señalado desde el principio. Por otro lado, el Laboratorio hay que entenderlo como una integración de las viejas y nuevas tecnología. No se trata de tener los mejores medios y materiales, sino los más adecuados y aquellos que cumplen una clara función en el aprendizaje, aportando alguna especificidad. Las nuevas tecnologías suelen ser un mito; sólo su confrontación en un mismo espacio de trabajo nos hará ver qué ventajas tienen éstas respecto de aquéllas y cuándo ambas pueden complementarse.

Dedicaremos la última parte de nuestra charla a una de esas nuevas tecnologías: los ordenadores y el software didáctico.

Las nuevas tecnologías

Me voy a centrar, como he dicho, en los ordenadores y el software didáctico, pero antes quiero dedicar, aunque sólo sea una alusión, a los vídeos y a las calculadoras.

Los vídeos son un extraordinario material visual en los que las imágenes adquieren su mejor dinamismo. Son, desde el punto de vista de la enseñanza de las matemáticas, una continuación de los filmes matemáticos de Nicolet bajo un nuevo soporte más ágil y económico. Su incorporación a las aulas supone llevar la enseñanza al terreno donde ha encontrado una mayor competencia fuera de las clases; se dice que estamos en una cultura de la imagen. Incorporémosla, pues, a la educación.

En cuanto a las calculadoras, aún persiste la duda sobre su uso. La polémica, ciertamente, es cada vez más apagada, pero se insiste en "el buen uso de la calculadora", o en "un uso adecuado"; ¿es que de los demás medios no hay que hacer también un buen uso?. Por supuesto, cuando se utilizan eufemismos como los indicados, no se está pensando en la calculadora como favorecedora del cálculo mental o como un instrumento para la Resolución de Problemas; se está pensando en las habilidades algorítmicas. En relación con estas habilidades, decía Peter Hilton (entrevista publicada en Crónica d'Ensenyament), que "seguimos intentando que los alumnos calculen de manera rápida y precisa, cuando las verdaderas matemáticas son las que llevan a comprender el por qué del funcionamiento de las operaciones elementales. Saber dividir con precisión y rapidez no tiene sentido desde el momento en que hay una máquina que lo hace".

Yo añadiría que los algoritmos están vinculados a los medios y que nuevos medios posibilitan la utilización de nuevos algoritmos. Es una realidad que cada vez se enseña menos el algritmo usual de la raíz cuadrada (por supuesto, nadie aprende ya el de la raíz cúbica).

La calculadora está haciendo posible la realización de cálculos antes impensables y permitiendo el planteamiento de problemas que, por su laboriosidad, antes nunca se acometían.

Pero si la calculadora está cambiando el panorama de la enseñanza, dando alternativas a los algoritmos elementales de suma, resta, multiplicación y división, y permitiendo su utilización el abordaje de otros problemas, entrando en el terreno de la Resolución de Problemas, ¿qué decir de los ordenadores?

Yo creo que los ordenadores son un extraordinario recurso para una enseñanza experimental de las matemáticas y quiero, al final, poner algún ejemplo. Pero antes, creo que es obligada una reflexión sobre su utilización.

La importancia de los ordenadores, y en general de las nuevas tecnologías, parece tal que los distintos Gobiernos han elaborado y elaboran planes institucionales de preparación del profesorado, de utilización en clase y de su inclusión en los currículos escolares. Las esperanzas puestas en los ordenadores hacia final de los 70 y principios de los 80 sobre las virtualidades de los mismos parecen que, hay por hoy, no se cumplen. Tal vez el papel del ordenador en la enseñanza sea más modesto del que, en principio, se le suponía. El Logo que, antes que un lenguaje de programación, es una filosofía de la enseñanza, parecía una herramienta tal que su introducción en las aulas iba a revolucionar la educación. Sin embargo, no ha sido así y hoy se le asigna un papel más humilde que el que se le suponía. S. Papert, su creador, denomina tecnocentrismo a aquella actitud consistente en colocar al ordenador en el centro del proceso de enseñanza y advierte que, "(...) si nos interesa eliminar el tecnocentrismo del tema de las computadoras, podemos encontrarnos en la necesidad de revisar nuestros conceptos sobre la educación, que son muy anteriores al advenimiento de los ordenadores", indicando inmediatamente que "podría argüirse que la principal contribución de las computadoras a la educación ha sido el obligarnos a repensar en temas que, en sí mismos, nada tienen que ver con las computadoras". Y más adelante, refiriéndose al Logo, dice: "No preguntéis qué puede hacer Logo con la gente, sino qué puede hacer la gente con Logo". (S. Papert, "Crítica del Tecnocentrismo", artículo publicado en Idealogic, 1986).

La actitud tecnocentrista ha desarrollado un conjunto de síntomas que yo no he dudado en calificar de "síndrome de la quincallería" o "síndrome de la cacharrería". El ordenador ha adquirido tal importancia que, en muchos casos, se ha convertido en sujeto, desvirtuando el discurso educativo. Esta actitud, seguramente obligada en el proceso de adecuación de esa tecnología a la enseñanza, ha imposibilitado un mayor y mejor avance en los cambios curriculares, necesarios en toda Reforma que contemple la realidad en la que está inmersa.

Pero, a pesar de esta actitud, se ha avanzado. No se ha llegado al punto que muchos podrían esperar en cuanto a su presencia en las aulas. Pero hay un abundante software cuya utilización incidirá en la mejora de la enseñanza.

Llegado a este punto, debemos preguntarnos, ¿qué software?.

Creo que, en clase, hay tres enfoques posibles de los ordenadores, teniendo en cuenta el software que se utilice: Mimético, Conductista y, por último, Experimental.

El enfoque mimético, que también es frecuente en los vídeos, consiste en utilizarlo como un medio sin especificidad propia; constituyen un ejemplo de mimetismo todos aquellos programas que "copian" el libro de texto y lo transcriben a una pantalla, utilizando el color y la movilidad del ordenador y, como pretexto, la pantalla (con estos programas se corre el peligro de hacer a los niños y niñas más teleadictos cada vez...!). Es también mimético todo software que, con uno u otro estilo, desarrolla una programación didáctica, o parte de ésta, sin habérsela cuestionado previamente. El desarrollo de todas las fórmulas trigonométricas, tal y como aparecen en los programas ordinarios, puede prepararse mediante una hoja de cálculo; pero el punto de vista del enseñante debería ser anterior: ¿tiene interés o es conveniente dicho desarrollo?; caso contrario, resucitaríamos las fórmulas de Briggs; y el problema no está, obviamente en su resurrección, sino en su sentido didáctico y en su oportunidad.

En cuanto al enfoque conductista, también conocido como enseñanza programada, consiste en realizar una enseñanza del paso a paso, con retrocesos (feed-bak), con "repasos" en aquellos puntos en que se producen errores. La "máquina de enseñar" fue utilizada como herramienta antes de la introducción masiva de los ordenadores. Estos serían para los conductistas las mejores máquinas de enseñar.

Hay muchos programas con este enfoque; al alumno se le va llevando poco a poco hacia la solución, con pequeñas unidades de información.

La utilización de los ordenadores, en este caso, es específica: un libro nunca tendrá la movilidad y agilidad requerida para éste tipo de enseñanza. Pero, en este tipo de programas, la interacción de los alumnos suele ser mínima, pues la propia filosofía conductista es, precisamente eso: un único camino en el que si el alumno se pierde debe volver a rememorar para seguir por ese mismo sendero.

Por último, hay un enfoque que he llamado experimental, es decir, consistente en la utilización de los ordenadores desde la óptica del método experimental. Se concibe el ordenador como una herramienta más que el alumno utiliza en su aprendizaje. No se pretende que el ordenador sustituya a nada ni a nadie; ni a los libros, como en la óptica mimética, ni a los profesores, como puede pretender el conductismo. El ordenador, desde el momento que está inserto en una estructura de Laboratorio, juega un papel específico, acorde con su virtualidad.

El principal elemento que se pone en juego en un software experimetal es el carácter interactivo del ordenador: el ordenador no hace preguntas y el alumno responde, sino que se establece un flujo de comunicación mediante el cual el alumno puede explorar, comprobar, investigar, elaborar conjeturas, refutarlas; en definitiva, experimentar.

Hay un par de programas didácticos que, a modo de ejemplos, y para terminar, quiero comentar. Uno de ellos, se titula GRÁFICOS y está elaborado por D. Tall y otros, y traducido por el equipo "Ábaco", de la Comunidad Canaria. Parte del programa es parecido al Eureka o a la parte gráfica del Derive. Dicho programa se dedica a la representación gráfica, desde las funciones elementales hasta las de variable compleja, pasando la representación de funciones en el espacio (de dos variables y paramétricas). Calcula gráficamente la derivada e integrales por distintos métodos y resulve ecuaciones por métodos numéricos.

La exploración que el programa permite hacer de las funciones es típicamente experimental. El alumno puede verificar si tal o cual función tiene la representación gráfica esperada. Puede explorar dónde hay asíntotas, dónde un máximo, etc. Puede, además, introducir funciones con parámetros dados y ver qué influencia tienen tales parámetros. A modo de ejemplo sencillo, diré que se puede experimentar cómo cambia la forma de una parábola al variar la amplitud. En pantalla pueden mantenerse varias representaciones para su comparación. Además, podemos hacer el proceso inverso: dar una gráfica y solicitar su ecuación.

La derivada y la integral, pueden ser igualmente exploradas a nivel gráfico. En el primer caso podemos ver cómo varía la recta tangente dentro del dominio especificado y obtener, además, a través de los distintos métodos de integración (rectángulos, trapecios, Simpson).

El segundo programa al que me voy a referir es conocido como CABRI. Ha sido elaborado por El Laboratorio de Estructuras Discretas de la Universidad de Grénoble y fue presentado en el ICME-6 (6ª Congreso Internacional de Educación Matemática), celebrado en Budapest en agosto de 1988. Hay implementaciones de este programa para PC's y Macintosh.

Es un programa sobre geometría elemental. Reconoce como objetos los puntos, segmentos, rectas, triángulos y círculos. Pueden construirse mediatrices, puntos medios, medianas, centros de círculos, rectas paralelas, bisectrices de ángulos. El usuario puede, por su cuenta, preparar otras construcciones mediante un proceso denominado "macro-construcciones", e incorporarlas al menú. Las construcciones usuales de regla y compás y los lugares geométricos de puntos, se realizan con bastante facilidad, aunque en este último caso, los objetos generados no son reconocibles como tales por el programa.

Dispone también de un "histórico" y un diario de sesiones, que nos permiten recrear las construcciones realizadas, desde el primer paso hasta el último. Finalmente, pueden medirse ángulos y segmentos.

El programa es fácil de manejar y totalmente interactivo. Es ideal para el aprendizaje de la geometría elemental plana y el desarrollo del lenguaje correspondiente.

Los objetos pueden ser desplazados por la pantalla, según el grado de libertad y con las condiciones de dependencia que haya entre ellos. Estos desplazamientos permiten comprobar experimentalmente teoremas como los referidos a los puntos notables de los triángulos, equidistancias de la bisectriz y la mediatriz, teorema de Pitágoras, condiciones para la existencia de un triángulo, según las medidas de los lados, etc.

Es, en fin, un programa que genera situaciones dinámicas para el aprendizaje de la geometría elemental plana.

Antonio Pérez Jiménez
I. B. Nervión. Sevilla