# FONCTIONS ZÊTA $\ell$-MODULAIRES

*par*

Alberto Mínguez

*A la mémoire de Hiroshi Saito*

***Résumé.*** — Soient F un corps commutatif localement compact non archimédien, de caractéristique résiduelle notée $p$, et D une F-algèbre à division centrale de dimension finie. Soit $\ell$ un nombre premier différent de $p$. Dans cet article, généralisant les résultats de [**GJ**], on associe à chaque représentation $\ell$-modulaire lisse irréductible $\pi$ de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$, deux invariants $L(T,\pi)$, $\varepsilon(T,\pi,\psi)$ où $T$ est une variable et $\psi$ est un caractère non trivial de F.

***Abstract.*** — Let F be a non-Archimedean locally compact field, of residual characteristic $p$, and D be a finite dimensional central division F-algebra. Let $\ell$ be a prime number different from $p$. In this article, generalizing the results of [**GJ**], we associate to each $\ell$-modular smooth irreducible representation $\pi$ of $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$, two invariants $L(T,\pi)$, $\varepsilon(T,\pi,\psi)$, where $T$ is an indeterminate and $\psi$ is a non-trivial character of F.

## Introduction

Soient F un corps commutatif localement compact non archimédien, de corps résiduel $k_{\mathrm{F}}$, $p$ la caractéristique de $k_{\mathrm{F}}$, $q$ son cardinal, et D une algèbre à division de centre F et de rang fini $d^2$ sur F. Soit R un corps algébriquement clos de caractéristique $\ell$ différente de $p$. Une R-représentation $\pi$ d'un groupe G est une représentation de G dans un R-espace vectoriel (quand R est $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_\ell$, le corps fini à $\ell$ éléments, on dit aussi que $\pi$ est une représentation $\ell$-modulaire). Dans cet article on associe à chaque $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation lisse irréductible $\pi$ de $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ deux invariants : d'une part une

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11S40 – 22E50.
***Mots clefs.*** — Fonction $L$, fonction zêta, représentation $\ell$-modulaire.

L'auteur est partiellement financé par ANR-10-BLANC 0114, EPSRC grant EP/G001480/1, MTM2010-19298 et FEDER.

*fonction* $L$, notée $L(T,\pi)$, qui est une fraction rationnelle de la forme $\frac{1}{P(T)}$ où $P \in \overline{\mathbb{F}}_\ell\,[T]$ est un polynôme de degré au plus $m$ tel que $P\,(0)=1$; d'une autre part un *facteur epsilon*, noté $\varepsilon(T,\pi,\psi)$, dépendant d'un caractère non trivial $\psi : \mathrm{F} \to \mathrm{R}^\times$, qui est un monôme de la forme $AT^k$, avec $A \in \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ et $k \in \mathbb{Z}$

Pour $\mathrm{R}=\mathbb{C}$, les fonctions zêta et les fonctions $L$ furent introduites par Godement et Jacquet dans [**GJ**] et elles généralisent les fonctions $L$ de Tate [**Tat**] pour $m=1$ et $\mathrm{D}=\mathrm{F}$ et les fonctions $L$ définies dans [**JL**, §13] pour $md=2$.

Précisons : notons $\mathscr{S}_\mathrm{R}\,(\mathrm{M}_m\,(\mathrm{D}))$ le R-espace vectoriel des fonctions de $\mathrm{M}_m\,(\mathrm{D})$ (l'espace des matrices à $m$ lignes et $m$ colonnes à coefficients dans D) à valeurs dans R, localement constantes et à support compact. Notons aussi $\nu = |\mathrm{Nrd}|_\mathrm{F}$, la valeur absolue normalisée de la norme réduite et $\mu^\times$ une mesure de Haar sur G à valeurs dans R. Soit $\pi$ une R-représentation lisse irréductible de G. Pour tout coefficient $f$ de $\pi$, toute fonction $\Phi \in \mathscr{S}_\mathrm{R}\,(\mathrm{M}_m\,(\mathrm{D}))$ et tout $N \in \mathbb{Z}$, l'intégrale :

$$\int_{\mathrm{G},\nu(x)=q^{-N}} \Phi\,(x)\,f\,(x)\,d\mu^\times(x),$$

est bien définie. On peut alors définir la somme formelle (la *fonction zêta*) :

$$\mathrm{Z}\,(\Phi,T,f) = \sum_{N\in\mathbb{Z}} \left( \int_{\mathrm{G},\nu(x)=q^{-N}} \Phi\,(x)\,f\,(x)\,d\mu^\times(x) \right) T^N$$

à coefficients dans R.

L'avantage principal qu'il y a à considérer les fonctions zêta en tant que séries formelles vient de ce que les problèmes de convergence et les difficultés à prouver le prolongement analytique sont, en partie, mis de côté.

Dans cet article, on montre que les fonctions zêta sont des fractions rationnelles vérifiant une certaine équation fonctionnelle. Ceci est déjà connu (*cf.* [**GJ**]) pour $\mathrm{R}=\mathbb{C}$. Cette preuve ne s'adapte pas, en général, au cas où R n'est pas de caractéristique nulle. En effet, si P est un sous-groupe parabolique de G et K un sous-groupe compact maximal de G, une mesure à valeurs dans R semi-invariante sur $\mathrm{P}\backslash\mathrm{G}$ n'équivaut pas toujours, si $\ell > 0$, à une mesure de Haar sur K. La méthode d'induction de [**GJ**] n'est donc valable que si le corps R est de caractéristique banale, c'est-à-dire, quand $\ell$ ne divise pas le cardinal de $\mathrm{GL}_m(k_\mathrm{D})$ (voir [**Mi2**, §5]).

Ici on utilise un argument de relèvement à la caractéristique 0. Toute $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible de G est un sous-quotient de la réduction modulo $\ell$ d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de G (*cf.* [**Dat**] ou [**MS**]). La théorie des fonctions zêta est valable pour des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations grâce à [**GJ**] et on montre que cela suffit pour étendre la théorie au cas des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations.

Deux des intérêts de la théorie de fonctions zêta proviennent des faits suivants :

(1) L'équation fonctionnelle des fonctions zêta est étroitement liée à l'existence de la correspondance thêta locale pour la paire $(\mathrm{GL}_m(\mathrm{D}), \mathrm{GL}_m(\mathrm{D}))$ (*cf.* [**Wei**], [**Mi1**]).

Le but original de la construction des fonctions zêta $\ell$-modulaires était pour nous de comprendre le comportement de la correspondance thêta modulo $\ell$. Dans la section 3, on calcule les fonctions $L$ des caractères de $\mathrm{GL}_1(\mathrm{F})$ et on remarque que les arguments utilisés dans [**Kud**] pour prouver l'équation fonctionnelle ne sont pas valables si $q \equiv 1 \bmod l$. On en déduit que la correspondance thêta locale n'est plus bijective pour des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations.

(2) Les fonctions $L$ et les facteurs epsilon *de paires* apparaissent dans la caractérisation [**He1**] de la correspondance de Langlands [**He2**] [**HT**] pour $\mathrm{R} = \mathbb{C}$. Si $m \geq 2$, toute $\mathbb{C}$-représentation irréductible $\pi$ de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{F})$ est déterminée par la connaissance des fonctions :

$$L\,(T, \pi \times \rho)$$
$$\varepsilon(T, \pi \times \rho, \psi)$$

pour toute représentation irréductible $\rho$ de $\mathrm{GL}_{m'}(\mathrm{F})$ avec $m' < m$.

Si $m = 2$ et $m' = 1$ ces fonctions coïncident avec les fonctions $L\,(T, \rho\pi)$ et $\varepsilon(T, \rho\pi, \psi)$ respectivement, où $\rho\pi$ dénote la représentation $(\rho \circ \det) \otimes \pi$ de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F})$ ($\rho$ étant ici un caractère de $\mathrm{GL}_1(\mathrm{F}) = \mathrm{F}^\times$). Si $\mathrm{R} = \overline{\mathbb{F}}_\ell$, on montre que les fonctions $L$ et $\varepsilon$ de paires ne suffisent pas à caractériser les représentations irréductibles $\ell$-modulaires comme dans le cas complexe. Plus précisément, on donne un exemple, dans la section 6, de deux $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles $\pi_1$ et $\pi_2$ de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F})$ *non isomorphes* telles que pour tout caractère $\chi$ de $\mathrm{GL}_1(\mathrm{F})$ on ait :

$$\begin{aligned} L\,(T, \chi\pi_1) &= L\,(T, \chi\pi_2)\,, \text{ et} \\ \varepsilon(T, \chi\pi_1, \psi) &= \varepsilon(T, \chi\pi_2, \psi). \end{aligned}$$

Une fois définie la fonction $L(T, \pi)$, il est intéressant de la calculer explicitement si possible en fonction de paramétrisations de la représentation $\pi$. Dans le cas où $\mathrm{R} = \mathbb{C}$ ceci est fait dans [**Ja2**] où l'auteur la calcule en termes de la classification *à la Langlands* des représentations irréductibles de G. Dans le cas où $\mathrm{R} = \overline{\mathbb{F}}_\ell$, on ne dispose d'une telle classification que dans le cas où $\pi$ est un représentation dite *banale* (voir le paragraphe 5.1.2 pour la définition; c'est le cas, en particulier, si $\ell$ ne divise pas l'ordre de $\mathrm{GL}_n(k_{\mathrm{D}})$). Si $\pi$ est une représentation banale, on explicite dans le théorème 5.7, la fonction $L(T,\pi)$. Cette classification permet d'étudier le comportement de la réduction de la correspondance thêta dans le cas banal.

**Remerciements.** — Je voudrais particulièrement remercier Guy Henniart pour ses nombreux conseils et idées à propos de cet article qui, dans une version simplifiée, faisait partie de ma thèse sous sa direction. Je remercie aussi Vincent Sécherre et Shaun Stevens pour les remarques et corrections intéressantes qu'ils m'ont suggérées.

## 1. Notations et conventions

**1.1.** Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien, de caractéristique résiduelle notée $p$. Si E est une extension finie de F, ou plus généralement une algèbre à division sur une extension finie de F, on note $\mathscr{O}_{\mathrm{E}}$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{p}_{\mathrm{E}} = \varpi_{\mathrm{E}}\mathscr{O}_{\mathrm{E}}$ son idéal maximal, $\varpi_{\mathrm{E}}$ une uniformisante et $k_{\mathrm{E}}$ son corps résiduel.

Soit R un corps algébriquement clos de caractéristique $\ell$ différente de $p$ et soit G le groupe des points sur F d'un groupe réductif connexe défini sur F. Par R-*représentation lisse* de G on entend la donnée d'un R-espace vectoriel V et d'un homomorphisme de groupes de G dans $\mathrm{Aut}_{\mathrm{R}}(\mathrm{V})$ tel que, pour tout vecteur $v \in \mathrm{V}$, le stabilisateur de $v$ dans G soit ouvert. *Dans cet article, toutes les représentations sont supposées lisses.*

Une représentation de G sur un R-espace vectoriel V est *admissible* si, pour tout sous-groupe ouvert H de G, l'espace $\mathrm{V}^{\mathrm{H}}$ de ses vecteurs H-invariants est de dimension finie.

Un R-*caractère* de G est un homomorphisme de G dans $\mathrm{R}^{\times}$ de noyau ouvert. Si $\pi$ est une R-représentation de G, on désigne par $\pi^{\vee}$ sa contragrédiente. Si en outre $\chi$ est un R-caractère de G, on note $\chi\pi$ ou $\pi\chi$ la représentation tordue $g \mapsto \chi(g)\pi(g)$.

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrira *caractère* et *représentation* plutôt que R-caractère et R-représentation.

Toute R-représentation irréductible de G est admissible et admet un caractère central [**Vi1**, II.2.8]. Si $\sigma$ est une R-représentation de longueur finie de G, on note $[\sigma]$ sa classe d'isomorphie.

**1.1.1.** *On choisit une fois pour toutes une racine carrée* $q^{1/2}$ *dans* R *du cardinal du corps résiduel de* F. Si M est un sous-groupe de Levi de G et P un sous-groupe parabolique de G dont M est un facteur de Levi, ce choix définit un caractère non ramifié :

$$\delta_{\mathrm{P}}^{1/2} : \mathrm{M} \to \mathrm{R}^{\times} \tag{1.1}$$

dont le carré est le module de P. On note $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}$ le foncteur de restriction parabolique normalisé (relativement à (1.1)) et $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}$ son adjoint à droite, c'est-à-dire le foncteur d'induction parabolique normalisé lui correspondant. Ces foncteurs sont exacts, et préservent l'admissibilité et le fait d'être de longueur finie.

Une R-représentation irréductible de G est dite *cuspidale* si son image par $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}$ est nulle pour tout sous-groupe parabolique strict P de G, c'est-à-dire si elle n'est isomorphe à aucun quotient (ou, de façon équivalente, à aucune sous-représentation) d'une induite parabolique stricte. Elle est dite *supercuspidale* si elle n'est isomorphe à aucun sous-quotient d'une induite parabolique stricte.

**1.2. Formes intérieures de $\mathrm{GL}_n$ sur F.** — Dans ce paragraphe, on fixe une algèbre à division D de centre F et de degré réduit noté $d$. Pour tout entier $m \geqslant 1$, on désigne par $\mathrm{M}_m(\mathrm{D})$ la F-algèbre des matrices de taille $m \times m$ à coefficients dans D et par $\mathrm{G}_m = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ le groupe de ses éléments inversibles.

**1.2.1.** Soit Nrd la norme réduite de $\mathrm{M}_m(\mathrm{D})$ sur F. On note $q = q_{\mathrm{F}}$ le cardinal du corps résiduel de F et $|\ |_{\mathrm{F}}$ la valeur absolue normalisée de F, c'est-à-dire la valeur absolue donnant à une uniformisante de F la valeur $q^{-1}$. Puisque l'image de $q$ dans R est inversible, elle définit un R-caractère de $\mathrm{F}^{\times}$ noté $|\ |_{\mathrm{F,R}}$. L'application $g \mapsto |\mathrm{Nrd}(g)|_{\mathrm{F,R}}$ est un R-caractère de $\mathrm{G}_m$, qu'on notera $\nu_{m,\mathrm{R}}$ ou simplement $\nu$ si le contexte le permet.

**1.2.2.** Si $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ est une famille d'entiers positifs dont la somme est égale à $m$, il lui correspond le sous-groupe de Levi standard $\mathrm{M}_\alpha$ de $\mathrm{G}_m$ constitué des matrices diagonales par blocs de tailles $m_1, \dots, m_r$ respectivement, que l'on identifie naturellement au produit $\mathrm{G}_{m_1} \times \dots \times \mathrm{G}_{m_r}$. On note $\mathrm{P}_\alpha$ le sous-groupe parabolique de $\mathrm{G}_m$ de facteur de Levi $\mathrm{M}_\alpha$ formé des matrices triangulaires supérieures par blocs de tailles $m_1, \dots, m_r$ respectivement, et on note $\mathrm{U}_\alpha$ son radical unipotent. Si, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, on a une R-représentation $\pi_i$ de $\mathrm{G}_{m_i}$, il est aussi commode de noter :

$$\pi_1 \times \dots \times \pi_r = \boldsymbol{i}_{\mathrm{P}_\alpha}^{\mathrm{G}_m}(\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_r). \tag{1.2}$$

**1.2.3.** Étant donné un ensemble X, un multi-ensemble sur X est l'ensemble des fonctions $\mathfrak{m} : \mathrm{X} \to \mathbb{N}$ à support fini. On pourra le voir comme l'ensemble X avec ses éléments comptés avec des multiplicités. Etant donné une R-représentation irréductible $\pi$ de $\mathrm{G}_n$, il existe un unique multi-ensemble $\rho_1, \ldots, \rho_r$ de R-représentations cuspidales tel que, quitte à réarranger les $\rho_i$, $\pi$ soit un quotient de $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$. On dit que $\rho_1, \ldots, \rho_r$ est le *support cuspidal* de $\pi$. Pour une preuve de l'unicité du support cuspidal, on renvoie à [**MS**, Théorème 2.1], voir aussi [**Vi1**, II.2.20].

**1.3.** Pour tout anneau commutatif E on notera $\mathscr{S}_{\mathrm{E}}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ le E-module des fonctions $\Phi$ de $\mathrm{M}_m(\mathrm{D})$ dans E, localement constantes et à support compact. Fixons $\psi : \mathrm{F} \to \mathrm{R}^\times$ un caractère non trivial de F. Soit $\mu$ une mesure de Haar sur $\mathrm{M}_m(\mathrm{D})$ à valeurs dans R et $\mu^\times$ une mesure de Haar sur G à valeurs dans R (voir [**Vi1**, I.2.4]). Pour toute fonction $\Phi \in \mathscr{S}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$, on note $\widehat{\Phi}(x) = \int_{\mathrm{M}_m(\mathrm{D})} \Phi(y)\, \psi\left(\mathrm{tr}_{\mathrm{M}_m(\mathrm{D})/\mathrm{F}}(xy)\right) d\mu(y)$ sa transformée de Fourier. Comme dans le cas complexe, pour toute fonction $\Phi \in \mathscr{S}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$, on a $\widehat{\Phi} \in \mathscr{S}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ et $\Phi \mapsto \widehat{\Phi}$ définit un automorphisme de $\mathscr{S}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$.

On supposera que la mesure est auto-duale, c'est-à-dire, on choisira $\mu$ pour que :

$$\widehat{\widehat{\Phi}}(x) = \Phi(-x). \tag{1.3}$$

***Remarque 1.1***. — La mesure $\mu$ n'est pas unique mais on peut imposer $\mu(\mathscr{O}_{\mathrm{F}}) = q^{\frac{1}{2}r}$, où $r$ est le niveau de $\psi$.

**1.4.** On fixe un nombre premier $\ell \neq p$. On note $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique du corps de nombres $\ell$-adiques, $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ l'anneau des entiers de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ son corps résiduel, qui est un clôture algébrique du corps premier $\mathbb{F}_\ell$. On pose $\boldsymbol{r}_\ell : \overline{\mathbb{Z}}_\ell \to \overline{\mathbb{F}}_\ell$ la projection canonique.

**1.4.1.** Une représentation $\pi^\dagger$ de $\mathrm{G}_m$ sur un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel V est dite *entière* si elle est admissible et si elle admet une *structure entière*, c'est-à-dire un sous-$\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-module de V stable par G et engendré par une base de V sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

Par exemple, une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale est entière si, et seulement si, son caractère central est à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ et une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible est entière si, et seulement si, son support cuspidal est formé de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations cuspidales entières (*cf.* [**Vi1**, II.4.13] et [**Dat**, Proposition 6.6]).

Si $\mathfrak{v}$ est une structure entière de $\pi^\dagger$, la représentation de $\mathrm{G}_m$ sur le $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espace vectoriel $\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ est de longueur finie et sa semi-simplification ne dépend pas du choix de la structure entière d'après [**Vi1**, II.5.11]. On note $\boldsymbol{r}_\ell(\pi^\dagger)$ cette semi-simplifiée, qu'on appelle la *réduction* de $\pi^\dagger$ et qui ne dépend que de sa classe d'isomorphisme $[\pi^\dagger]$ (on commet ainsi un léger abus de notation, puisque $\boldsymbol{r}_\ell$ désigne aussi l'homomorphisme de réduction défini au début du paragraphe 1.4).

On appelle *relèvement* d'une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible $\pi$ de $\mathrm{G}_m$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation entière $\pi^\dagger$ de $\mathrm{G}_m$ telle que $[\pi] = \boldsymbol{r}_\ell(\pi^\dagger)$. Si un tel relèvement existe, on dit que $\pi$ se relève. Par exemple, dans [**MS**, Théorème 4.24] on prouve que toute $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale se relève.

**1.4.2.** On suppose que les choix de racines carrées de $q$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ (paragraphe 1.1.1) sont compatibles, c'est-à-dire que la seconde est la réduction modulo $\ell$ de la première. Si $\pi^\dagger$ est une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation entière de M, et si $\mathfrak{v}$ en est une structure entière, le sous-espace $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\mathfrak{v})$ des fonctions à valeurs dans $\mathfrak{v}$ est une structure entière de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\pi^\dagger)$ et la représentation $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\mathfrak{v}) \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ est isomorphe à $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell)$. Si en outre $\pi^\dagger$ est de longueur finie, ceci implique que $\boldsymbol{r}_\ell([\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\pi^\dagger)]) = [\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\boldsymbol{r}_\ell(\pi^\dagger))]$. On renvoie à [**Vi1**, II.4.14].

**1.4.3.** Soit $(\pi^\dagger, \mathrm{V}^\dagger)$ une représentation admissible entière de $\mathrm{G}_m$ et $\mathfrak{v}$ une structure entière de $\pi^\dagger$. Alors le sous–$\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-module $\mathfrak{v}^\vee$ de $(\pi^{\dagger\vee}, \mathrm{V}^{\dagger\vee})$ des $v^\vee \in \mathrm{V}^{\dagger\vee}$ tels que $\langle \pi^\dagger(g)v, v^\vee \rangle \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell$, pour tout $g \in \mathrm{G}$ et tout $v \in \mathfrak{v}$, est une structure entière de $\pi^{\dagger\vee}$ (*cf.* [**Vi1**, I.9.7]). De plus :

$$\mathfrak{v}^\vee \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell \simeq (\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell)^\vee.$$

## 2. Le théorème principal

On fixe une algèbre à division D de centre F et degré réduit noté $d$ et R un corps algébriquement clos de caractéristique différente de $p$. On fixe aussi un entier $m \geqslant 1$ et on désigne par G le groupe $\mathrm{G}_m = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$. On note finalement $n = md$.

**2.1.** Soit $N \in \mathbb{Z}$. Posons $\mathfrak{i}_N$ la fonction caractéristique de l'ensemble :

$$\{x \in \mathrm{G} : \nu(x) = q^{-N}\}.$$

Pour toute fonction $\Phi \in \mathscr{S}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ notons $\Phi_N = \mathfrak{i}_N \Phi$.

***Lemme 2.1.*** — *Soient $\Phi \in \mathscr{S}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ et $N \in \mathbb{Z}$. Alors la fonction $\Phi_N$ appartient à $\mathscr{S}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ et elle est nulle si $N << 0$.*

*Démonstration.* — La fonction $\Phi_N$ est localement constante. Prouvons que son support est compact. Soit $\mathrm{K}_0 = \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathrm{D}})$. Considérons l'ensemble des $m$-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$

tels que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m$ et :

$$\operatorname{supp}(\Phi) \cap \mathrm{K}_0 \begin{pmatrix} \varpi_{\mathrm{D}}^{a_1} & & & \\ & \varpi_{\mathrm{D}}^{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varpi_{\mathrm{D}}^{a_m} \end{pmatrix} \mathrm{K}_0 \neq \emptyset.$$

Cette dernière condition implique que les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sont bornés inférieurement. Si de plus on suppose que $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = N$ il n'y a qu'un nombre fini de tels $m$-uplets. On déduit que $\operatorname{supp}(\Phi_N)$ n'intersecte qu'un nombre fini de K-double classes contenues dans G ce qui montre le lemme.

□

**2.2.** Soit $\pi$ une représentation admissible de G dans un R-espace vectoriel V. On rappelle qu'un coefficient de $\pi$ est une fonction $f : \mathrm{G} \to \mathrm{R}$ de la forme $f_{v,v^\vee}(x) = \langle \pi(x)\, v, v^\vee \rangle$ où $v \in \mathrm{V}, v^\vee \in \mathrm{V}^\vee$ sont fixés, ou une combinaison linéaire de telles fonctions. On note $\check{f}$ le coefficient de $\pi^\vee$ défini par $\check{f}(g) = f(g^{-1})$.

Pour tout coefficient $f : \mathrm{G} \to \mathrm{R}$ de $\pi$, toute fonction $\Phi \in \mathscr{S}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ et tout $N \in \mathbb{Z}$ l'intégrale :

$$\int_{\mathrm{G}, \nu(x) = q^{-N}} \Phi(x)\, f(x)\, d\mu^\times(x) = \int_{\mathrm{G}} \Phi_N(x)\, f(x)\, d\mu^\times(x)$$

est bien définie. En effet l'intégrand appartient à $\mathscr{S}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ d'après le lemme 2.1.

On peut alors définir la somme formelle :

$$\mathrm{Z}(\Phi, T, f) = \sum_{N \in \mathbb{Z}} \left( \int_{\mathrm{G}, \nu(x) = q^{-N}} \Phi(x)\, f(x)\, d\mu^\times(x) \right) T^N.$$

De plus, par le lemme 2.1, pour $N$ assez petit on a :

$$\int_{\mathrm{G}, \nu(x) = q^{-N}} \Phi(x)\, f(x)\, d\mu^\times(x) = 0,$$

et donc $\mathrm{Z}(\Phi, T, f) \in \mathrm{R}((T))$.

***Remarque 2.2***. — Quand $\mathrm{R} = \mathbb{C}$, $\mathrm{Z}(\Phi, T, f)$ coïncide avec la fonction zêta définie en [**GJ**], avec $T = q^{-s}$.

**2.3.** Comme dans le paragraphe 1.4, on fixe un nombre premier $\ell \neq p$. On note $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique du corps de nombres $\ell$-adiques, $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ l'anneau des entiers de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ son corps résiduel, qui est un clôture algébrique du corps premier $\mathbb{F}_\ell$. Le symbole R désignera dans la suite un corps de caractéristique nulle ou $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ avec $\ell \neq p$. Le théorème suivant étend [**GJ**] au cas des R-représentations :

***Théorème 2.3***. — *Soit* R *un corps algébriquement clos de caractéristique nulle ou bien isomorphe à* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$. *Soit* $(\pi, \mathrm{V})$ *une* R*-représentation irréductible de* $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$. *Alors :*

(1) *Il existe* $P_0(\pi, T) \in \mathrm{R}[T]$ *tel que, pour tout coefficient* $f$ *de* $\pi$ *et toute fonction* $\Phi \in \mathscr{S}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ *:*

$$\mathrm{Z}(\Phi, T, f)\, P_0(\pi, T) \in \mathrm{R}\left[T, T^{-1}\right].$$

(2) *Il existe* $\gamma(T, \pi, \psi) \in \mathrm{R}(T)$ *tel que, pour tout coefficient* $f$ *de* $\pi$ *et toute fonction* $\Phi \in \mathscr{S}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ *:*

$$\mathrm{Z}\left(\widehat{\Phi}, q^{-\frac{1}{2}(n+1)}T^{-1}, \check{f}\right) = \gamma(T, \pi, \psi)\, \mathrm{Z}\left(\Phi, q^{-\frac{1}{2}(n-1)}T, f\right). \tag{2.1}$$

La preuve sera faite dans la section 4.

**2.4.** Avant de prouver le théorème, démontrons quelques conséquences directes.

***Corollaire 2.4***. — *Notons* $\mathscr{Z}(\pi)$ *le sous-*R*-espace vectoriel de* $\mathrm{R}(T)$ *engendré par les fonctions* $\mathrm{Z}\left(\Phi, Tq^{\frac{1-n}{2}}, f\right)$ *quand* $f$ *parcourt l'ensemble de coefficients de* $\pi$ *et* $\Phi$ *parcourt* $\mathscr{S}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$. *Alors* $\mathscr{Z}(\pi)$ *est un idéal fractionnaire de* $\mathrm{R}[T, T^{-1}]$ *contenant les constantes. Il admet un unique générateur de la forme :*

$$\frac{1}{P_1(\pi, T)}$$

*avec* $P_1(\pi, T) \in \mathrm{R}[T]$ *et* $P_1(\pi, 0) = 1$.

*Démonstration.* — Avant tout, remarquons que $1 \in \mathscr{Z}(\pi)$ : il suffit de prendre le coefficient associé à un vecteur $v$ quelconque et à $v^\vee$ tel que $v^\vee(v) = 1$ et $\Phi = \mu^\times(\mathrm{K})^{-1}\mathbf{1}_{\mathrm{K}}$ où K est un sous groupe compact de G de mesure inversible dans R (par exemple un voisinage ouvert pro-$p$ de l'élément neutre) et qui laisse invariant $v$ et $v^\vee$.

Soit $Q(T) \in \mathscr{Z}(\pi), r \in \mathbb{Z}$. Montrons que $Q(T)\, T^r \in \mathscr{Z}(\pi)$. On peut supposer qu'il existe $f$ un coefficient de $\pi$ et $\Phi \in \mathscr{S}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ tels que :

$$Q(T) = \mathrm{Z}\left(\Phi, Tq^{\frac{1-n}{2}}, f\right).$$

Soit $a \in G$ avec $\nu(a) = q^{-r}$ et posons :

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \Phi\left(xa^{-1}\right) q^{\frac{r(1-n)}{2}} \\ f'(x) &= f\left(xa^{-1}\right). \end{aligned}$$

On trouve que :

$$\mathrm{Z}\left(\Phi', Tq^{\frac{1-n}{2}}, f'\right) = \mathrm{Z}\left(\Phi, Tq^{\frac{1-n}{2}}, f\right) T^r.$$

Puisque l'anneau $\mathrm{R}\left[T, T^{-1}\right]$ est principal, on en déduit qu'il existe des uniques $P_1, Q_1 \in \mathrm{R}[T]$ premiers entre eux, avec $P_1(0) = Q_1(0) = 1$ tels que :

$$\mathscr{Z}(\pi) = \frac{Q_1(T)}{P_1(T)} \mathrm{R}\left[T, T^{-1}\right].$$

Il ne nous reste à montrer que $Q_1(T) = 1$. Or, puisque $1 \in \mathscr{Z}(\pi)$, on ne peut pas avoir $Q_1(T) \neq 1$.

□

On pose :

$$L(T, \pi) = \frac{1}{P_0(\pi, T)} \tag{2.2}$$

et on définit $\varepsilon(T, \pi, \psi)$ par l'équation :

$$\gamma(T, \pi, \psi) = \varepsilon(T, \pi, \psi) \frac{L\left(q^{-1}T^{-1}, \pi^\vee\right)}{L(T, \pi)}. \tag{2.3}$$

La fonction $\varepsilon(T, \pi, \psi)$ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\varepsilon(T, \pi, \psi)\, \varepsilon\left(q^{-1}T^{-1}, \pi^\vee, \psi\right) = \omega(-1),$$

$\omega$ étant le caractère central de $\pi$, et donc $\varepsilon(T, \pi, \psi)$ est de la forme $A(\psi, \pi)T^{k(\psi,\pi)}$, $A(\psi, \pi) \in \mathrm{R}^\times$, $k(\psi, \pi) \in \mathbb{Z}$, comme dans le cas complexe. Cette équation fonctionnelle provient de (2.1) appliquée à $\widehat{\Phi}$ et $\check{f}$ compte tenu de (1.3).

L'équation fonctionnelle (2.1) s'écrit alors dans $\mathrm{R}(T)$ sous sa forme plus usuelle :

$$\frac{\mathrm{Z}\left(\widehat{\Phi}, T^{-1}q^{\frac{-1-n}{2}}, \check{f}\right)}{L\left(q^{-1}T^{-1}, \pi^\vee\right)} = \varepsilon(T, \pi, \psi) \frac{\mathrm{Z}\left(\Phi, Tq^{\frac{1-n}{2}}, f\right)}{L(T, \pi)}.$$

**2.5.** Avant de passer à la section suivante, on montre la proposition suivante qui sera pratique dans la preuve du théorème 2.3 :

***Proposition 2.5***. — *Si le théorème 2.3 est vrai pour une* R*-représentation admissible* V *de* G *alors il est aussi vrai pour tout sous-quotient* W *de* V*. De plus,* $P_1(T,\mathrm{W})$ *divise* $P_1(T,\mathrm{V})$ *dans* $\mathrm{R}[T]$ *et :*

$$\gamma(T,\mathrm{W},\psi)=\gamma(T,\mathrm{V},\psi).$$

*Démonstration.* — C'est une conséquence immédiate du fait que l'espace des coefficients de W peut être vu comme un sous-espace de l'espace des coefficients de V. □

## 3. Un exemple : le cas de $\mathrm{GL}_1(\mathrm{D})$

Pour nous familiariser avec le problème on va traiter d'abord le cas de $\mathrm{GL}_1(\mathrm{D})$. Ceci nous permettra de rencontrer les premières difficultés et différences par rapport au cas complexe. On renvoie au joli exposé de Kudla [**Kud**] ou à la thèse de Tate [**Tat**] pour plus de détails sur les fonctions zêta de $\mathrm{GL}_1(\mathrm{F})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Dans le cas de $\mathrm{GL}_1(\mathrm{D})$ on renvoie à [**GJ**, §4] et [**BH**, §13].

On supposera ici R un corps algébriquement clos quelconque de caractéristique $\ell$ différente de $p$. Dans le cas où $d=1$, $\mathrm{D}=\mathrm{F}$ et les R-représentations irréductibles de $\mathrm{F}^\times$ sont des R-caractères. Si $d>1$, puisque $\mathrm{D}^\times$ est compact modulo $\mathrm{F}^\times$, les représentations de $\mathrm{D}^\times$ sont de dimension finie. Les R-représentations de dimension 1 sont de la forme $\chi\circ\mathrm{Nrd}$ avec $\chi$ un R-caractère de $\mathrm{F}^\times$.

Les R-représentations irréductibles étant de dimension finie, il est plus pratique de travailler en termes d'opérateurs. Pour toute fonction $\Phi\in\mathscr{S}_{\mathrm{R}}(\mathrm{D})$, on définit la série formelle à coefficients dans $\mathrm{V}\otimes\mathrm{V}^\vee$ :

$$\mathrm{Z}(\Phi,T,\pi)=\sum_{N\in\mathbb{Z}}\left(\int_{\mathrm{D}^\times,\nu(x)=q^{-N}}\Phi(x)\,\pi(x)\,d\mu^\times(x)\right)T^N.$$

Si l'on choisit une base de V et sa base duale, on peut voir $\mathrm{Z}(\Phi,T,\pi)$ comme une matrice dont les éléments sont les $\mathrm{Z}(\Phi,T,f)$.

***Théorème 3.1***. — *Le théorème 2.3(1) est vrai. On peut choisir* $P_0(T,\pi)=1$ *sauf si* $m=1$, $q^d\not\equiv 1 \mod \ell$ *et* $\pi$ *est le caractère* $\chi\circ\mathrm{Nrd}$*, avec* $\chi$ *un caractère non ramifié de* $\mathrm{F}^\times$*. Dans ce cas, on peut prendre :*

$$P_0(T,\chi\circ\mathrm{Nrd})=1-\chi(\varpi_{\mathrm{F}})\,T,$$

*où $\varpi_{\mathrm{F}}$ est une uniformisante de* F.

*Démonstration.* — La idée de la preuve est la même que dans le cas complexe. On suppose d'abord que $\pi$ est de la forme $\chi \circ \mathrm{Nrd}$, avec $\chi$ un caractère de $\mathrm{F}^{\times}$. Soit $\Phi \in \mathscr{S}_{\mathrm{R}}(\mathrm{D})$. Soit $x \in \mathrm{D}$ tel que $\nu(x) = q^{-N}$, alors pour $N$ assez grand $\Phi(x) = \Phi(0)$ car $\Phi$ est localement constante. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}\left(\Phi, T, \chi \circ \mathrm{Nrd}\right) &= \sum_{N \leq N_1} \left( \int_{\mathrm{D}^{\times}, \nu(x) = q^{-N}} \Phi\left(x\right) \chi \circ \mathrm{Nrd}\left(x\right) d\mu^{\times}(x) \right) T^N + \\ &\qquad + \sum_{N \geq N_1} \Phi\left(0\right) \left( \int_{\mathrm{D}^{\times}, \nu(x) = q^{-N}} \chi \circ \mathrm{Nrd}\left(x\right) d\mu^{\times}(x) \right) T^N . \end{aligned}$$

Si $\chi$ est ramifié, cette dernière somme est nulle et donc $\mathrm{Z}\left(\Phi, T, \chi \circ \mathrm{Nrd}\right) \in \mathrm{R}\left[T, T^{-1}\right]$.

Si $\chi$ est non ramifié, alors :

$$\begin{aligned} \sum_{N \geq N_1} \Phi\left(0\right) \left( \int_{\mathrm{D}^{\times}, \nu(x) = q^{-N}} \chi \circ \mathrm{Nrd}\left(x\right) d\mu^{\times}(x) \right) T^N &= \\ = \sum_{N \geq N_1} \Phi\left(0\right) \left(\chi\left(\varpi_{\mathrm{F}}\right) T\right)^N \int_{\mathscr{O}_{\mathrm{D}}^{\times}} d\mu(x) & \\ = \sum_{N \geq N_1} \Phi\left(0\right) \left(\chi\left(\varpi_{\mathrm{F}}\right) T\right)^N \mu\left(\mathscr{O}_{\mathrm{D}}^{\times}\right). & \end{aligned}$$

Si $q^d \equiv 1 \mod \ell$, alors $\mu\left(\mathscr{O}_{\mathrm{D}}^{\times}\right) = (q^d - 1)\mu\left(1 + \mathfrak{p}_{\mathrm{D}}\right) = 0$ et donc $\mathrm{Z}\left(\Phi, T, \chi \circ \mathrm{Nrd}\right) \in \mathrm{R}\left[T, T^{-1}\right]$.

Si $q^d \not\equiv 1 \mod \ell$, alors $\mu\left(\mathscr{O}_{\mathrm{D}}^{\times}\right) \in \mathrm{R}^{\times}$ et on trouve une série géométrique de raison $\chi\left(\varpi_{\mathrm{F}}\right) T$. Posons $\Phi_0 = \mu^{\times}\left(\mathscr{O}_{\mathrm{D}}^{\times}\right)^{-1} \mathbf{1}_{\mathscr{O}_{\mathrm{D}}}$, où $\mathbf{1}_{\mathscr{O}_{\mathrm{D}}}$ est la fonction caractéristique de $\mathscr{O}_{\mathrm{D}}$. Alors :

$$\mathrm{Z}\left(\Phi_0, T, \chi \circ \mathrm{Nrd}\right) = \frac{1}{1 - \chi\left(\varpi_{\mathrm{F}}\right) T},$$

d'où le théorème dans ce cas.

On suppose maintenant que $\pi$ est une représentation irréductible de dimension supérieure à 1. Si on suppose de plus $q \not\equiv 1 \mod \ell$, pour tout coefficient $f$ de $\pi$ et toute fonction $\Phi \in \mathscr{S}_{\mathrm{R}}\left(\mathrm{D}\right)$ :

$$\mathrm{Z}\left(\Phi, T, f\right) = Z\left(\Phi_1, T, f\right),$$

où $\Phi_1(x) = \Phi(x) - \mu^{\times}(\mathscr{O}_{\mathrm{F}}^{\times})^{-1} \int_{\mathscr{O}_{\mathrm{F}}^{\times}} \Phi(xh) d\mu^{\times}(h)$ (si $q \not\equiv 1 \mod \ell$, alors $\mu^{\times}(\mathscr{O}_{\mathrm{F}}^{\times})$ est inversible dans $\mathrm{R}^{\times}$). Ainsi, on peut supposer, dans ce cas, que $\Phi(0) = 0$.

Notons $\omega$ le caractère central de $\pi$. Soit K un sous-groupe compact ouvert de $\mathrm{D}^\times$ tel que $\Phi$ et $\pi$ soient K-invariants à droite et $\mu^\times(\mathrm{K})$ soit inversible dans $\mathrm{R}^\times$. Choisissons un ensemble fini $I$ de représentants $g_i$ de $\mathrm{D}^\times/\mathrm{KF}^\times$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}(\Phi, T, f) &= \sum_{i\in I}\left(\sum_N \int_{\mathrm{F}^\times, |x|_\mathrm{F}=q^{-N}} \Phi(g_i x)\omega(x)d\mu^\times(x)T^{dN}\right) \\ &= \sum_{i\in I}\left(\sum_N \int_{\mathrm{F}^\times, |x|_\mathrm{F}=q^{-N}} \phi_i(x)\omega(x)d\mu^\times(x)T^{dN}\right), \end{aligned}$$

où $\phi_i(x) = \Phi(g_i x) \in \mathscr{S}(\mathrm{F})$.

Si $q \not\equiv 1 \mod \ell$, on peut supposer que $\Phi(0) = 0$ et donc, pour tout $i \in I$, $\phi_i \in \mathscr{S}_\mathrm{R}(\mathrm{F}^\times)$ et cette dernière expression est un polynôme. Si $q \equiv 1 \mod \ell$, comme ci-dessus, chacune de ces intégrales est aussi un polynôme. $\square$

***Remarque 3.2***. — Notons $\mathscr{S}'_\mathrm{R}(\mathrm{D})$ l'espace de distributions sur $\mathscr{S}_\mathrm{R}(\mathrm{D})$ invariantes par $\mathrm{D}^\times$. Dans le cas où $\mathrm{R} = \mathbb{C}$ (*cf.* [**Wei**] ou [**Kud**]), c'est un R-espace vectoriel de dimension 1, ce qui permet de démontrer l'équation fonctionnelle (2.1). Mais, si R est de caractéristique $\ell$ et $q^d \equiv 1 \mod \ell$, cet espace est de dimension 2. On a deux distributions $\mathrm{D}^\times$-invariantes non proportionnelles données par :

$$\begin{aligned} \Phi &\mapsto \Phi(0), \\ \Phi &\mapsto Z(\Phi, 1, 1). \end{aligned}$$

On verra au paragraphe 4 une autre façon d'obtenir l'équation fonctionnelle dans le cas général par réduction modulo $\ell$ (voir aussi [**BH**] pour une autre preuve dans le cas $n = 1$.)

L'espace $\mathscr{S}'_\mathrm{R}(\mathrm{D})$ peut être vu comme l'espace des entrelacements entre la représentation métaplectique restreinte à la paire duale $(\mathrm{GL}_1(\mathrm{D}), \mathrm{GL}_1(\mathrm{D}))$ et la représentation triviale de $\mathrm{GL}_1(\mathrm{D}) \times \mathrm{GL}_1(\mathrm{D})$. La correspondance thêta locale (*cf.* [**MVW**]) n'est pas bijective dans ce cas ! On peut construire (*cf.* [**Mi3**]), à l'aide des fonctions zêta, d'autres contre-exemples, dans le cas non banal, pour la paire $(\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_m)$, avec $n$ et $m$ quelconques.

## 4. Preuve du théorème 2.3

Dans cette section on montre le théorème 2.3 par un argument de réduction modulo $\ell$.

**4.1. Caractéristique** 0. — On suppose d'abord que R est un corps de caractéristique 0. Le théorème 2.3 est vrai si $\mathrm{R} = \mathbb{C}$ d'après [**GJ**, Theorem 3.3]. Leur preuve reste vraie pour R de caractéristique 0 algébriquement clos quelconque. En effet, elle consiste à prouver les faits suivants :

(1) Le théorème 2.3 est vrai pour les représentations cuspidales.

(2) Si le théorème 2.3 est vrai pour des représentations admissibles (pas forcément irréductibles) $\sigma_i$ de $\mathrm{G}_i$, $i = 1, \dots, r$, alors il est vrai pour la représentation induite :

$$\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_r, \tag{4.1}$$

avec :

$$P_1(\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_r) = P_1(\sigma_1) \times \cdots \times P_1(\sigma_r)$$
$$\gamma(\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_r) = \gamma(\sigma_1) \times \cdots \times \gamma(\sigma_r).$$

Ensuite, puisque toute représentation irréductible de $\mathrm{G}_m$ est un sous-quotient irréductible d'une représentation de la forme (4.1) avec les $\sigma_i$ des représentations cuspidales, la proposition 2.5 implique que le théorème 2.3 est vrai pour toute représentation irréductible.

Pour R de caractéristique 0, la preuve de (1) reste valable et montre que, si $\sigma$ est une représentation cuspidale de $\mathrm{G}_m$ alors $P_1(T, \sigma) = 1$ sauf si $m = 1$ et $\sigma = \chi \circ \mathrm{Nrd}$ avec $\chi$ un caractère non-ramifié de $\mathrm{F}^\times$, cas où, comme on l'a vu dans la section 3 :

$$P_1(T, \chi \circ \mathrm{Nrd}) = 1 - \chi(\varpi_\mathrm{F})\, q^{\frac{1-d}{2}} T.$$

La preuve de (2) utilise la décomposition d'Iwasawa de $\mathrm{G}_m = \mathrm{PK}$ avec P un sous-groupe parabolique de G et K un sous-groupe compact maximal et le fait que la donnée d'une mesure à valeurs dans $\mathbb{C}$ semi-invariante sur $\mathrm{P}\backslash\mathrm{G}$ équivaut à la donnée d'une mesure de Haar sur K. Ces arguments restent valables pour R de caractéristique 0 (voir [**Mi2**, §5] pour plus de détails).

**4.2. Caractéristique positive.** — On suppose ici que R est isomorphe à $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ une clôture algébrique du corps premier $\mathbb{F}_\ell$, avec $\ell \neq p$. On reprend les notations du paragraphe 1.4.

**4.2.1.** Soient $\sigma_1^\dagger, \dots, \sigma_r^\dagger$ des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations cuspidales *entières*. Alors, d'après le paragraphe précédent 4.1, $P_1(T, \sigma_1^\dagger \times \cdots \times \sigma_r^\dagger) \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell[T]$. Comme toute $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière est un sous-quotient d'une représentation de la forme :

$$\sigma_1^\dagger \times \cdots \times \sigma_r^\dagger$$

avec les $\sigma_i^\dagger$ des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations cuspidales entières (par 1.4), on déduit de la proposition 2.5 et le lemme de Gauss, que, pour toute $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible *entière* $\pi^\dagger$, on peut choisir $P_0(T,\pi^\dagger) \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell[T]$ avec $P_0(0,\pi^\dagger)=1$.

**4.2.2.** Soit $\psi$ le caractère de F à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ fixé dans le paragraphe 1.3 et relevons-le en un caractère $\psi^\dagger$ (de niveau 1) à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times$.

On fixe aussi $\mu^\dagger$, $\mu^{\dagger\times}$ des mesures de Haar sur $\mathrm{M}_m(\mathrm{D})$ et $\mathrm{G}=\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ respectivement à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ telles que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_\ell\left(\mu^\dagger\left(\mathrm{M}_m(\mathscr{O}_\mathrm{D})\right)\right) &= \mu\left(\mathrm{M}_m(\mathscr{O}_\mathrm{D})\right) \\ \boldsymbol{r}_\ell\left(\mu^{\dagger\times}\left(1+\mathrm{M}_m(\mathfrak{p}_\mathrm{D})\right)\right) &= \mu^\times\left(1+\mathrm{M}_m(\mathfrak{p}_\mathrm{D})\right). \end{aligned}$$

Ainsi, pour toute fonction $\Phi \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ et toute fonction $\Psi \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{G})$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_\ell\left(\int_{\mathrm{M}_m(\mathrm{D})}\Phi(x)\,d\mu^\dagger(x)\right) &= \int_{\mathrm{M}_m(\mathrm{D})}\boldsymbol{r}_\ell(\Phi(x))\,d\mu(x) \\ \boldsymbol{r}_\ell\left(\int_{\mathrm{G}}\Psi(x)\,d\mu^{\dagger\times}(x)\right) &= \int_{\mathrm{G}}\boldsymbol{r}_\ell(\Psi(x))\,d\mu^\times(x). \end{aligned}$$

Si $\Phi \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{F})$, alors $\widehat{\Phi} \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{F})$. On a choisi les mesures $\mu^\dagger$ et $\mu$ et les caractères $\psi^\dagger$ et $\psi$ de façon que, pour toute $\Phi \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ :

$$\boldsymbol{r}_\ell\left(\widehat{\Phi}\right) = \widehat{\boldsymbol{r}_\ell(\Phi)}.$$

On suppose finalement que $\mu^\dagger$ est auto-duale par rapport à $\psi^\dagger$ (et donc $\mu$ est auto-duale par rapport à $\psi$).

***Théorème 4.1.*** — *Soient* $(\pi^\dagger, \mathrm{V}^\dagger)$ *une* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*-représentation irréductible entière de* G *et* $\mathfrak{v}$ *une structure entière de* $\pi^\dagger$*.*

(1) *Il existe* $P_0\left(\mathfrak{v}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\overline{\mathbb{F}}_\ell, T\right) \in \overline{\mathbb{F}}_\ell[T]$ *tel que pour tout coefficient* $f$ *de* $\mathfrak{v}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\overline{\mathbb{F}}_\ell$ *et toute fonction* $\Phi \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ *on ait :*

$$\mathrm{Z}(\Phi, T, f)\,P_0\left(\mathfrak{v}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\overline{\mathbb{F}}_\ell, T\right) \in \overline{\mathbb{F}}_\ell\left[T, T^{-1}\right].$$

(2) *Il existe* $\gamma\left(T, \mathfrak{v}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\overline{\mathbb{F}}_\ell, \psi\right) \in \overline{\mathbb{F}}_\ell(T)$ *tel que pour tout coefficient* $f$ *de* $\mathfrak{v}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\overline{\mathbb{F}}_\ell$ *et toute fonction* $\Phi \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ *on ait :*

$$\mathrm{Z}\left(\widehat{\Phi}, q^{-\frac{1}{2}(n+1)}T^{-1}, \check{f}\right) = \gamma\left(T, \mathfrak{v}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\overline{\mathbb{F}}_\ell, \psi\right)\mathrm{Z}\left(\Phi, q^{-\frac{1}{2}(n-1)}T, f\right).$$

*Démonstration.* — Soient $\Phi \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ et $f$ un coefficient de $\mathfrak{v} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell$.

Notons $\mathfrak{v}^\vee$ la structure entière (voir paragraphe 1.4.1) de $\pi^{\dagger\vee}$ des $v^\vee \in \mathrm{V}^{\dagger\vee}$ tels que $\left\langle \pi^\dagger(g)v, v^\vee \right\rangle \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell$, pour tout $g \in \mathrm{G}$, et tout $v \in \mathfrak{v}$.

On peut supposer que $f$ est de la forme $f_{v,v^\vee}$ avec $v$ et $v^\vee$ deux vecteurs dans $\mathfrak{v} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell$ et $\mathfrak{v}^\vee \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell$ respectivement. Soient $v^\dagger \in \mathfrak{v}$ et $v^{\dagger\vee} \in \mathfrak{v}^\vee$ des relèvements de $v$ et $v^\vee$, c'est-à-dire, des vecteurs tels que $v^\dagger = v \mod \ell$ et $v^{\dagger\vee} = v^\vee \mod \ell$. Notons $f^\dagger = f_{v^\dagger, v^{\dagger\vee}}$ le coefficient correspondant. Par construction, il est à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ et $\boldsymbol{r}_\ell(f^\dagger) = f$.

Relevons aussi $\Phi \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ en une fonction $\Phi^\dagger \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$. Ainsi $\mathrm{Z}\left(\Phi^\dagger, T, f^\dagger\right) \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell\,[[T]]\,[T^{-1}]$.

Puisque le théorème 2.3 est vrai pour $\pi^\dagger$ (paragraphe 4.1), il existe $P^\dagger(\Phi^\dagger, T, f^\dagger) \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell\,[T, T^{-1}]$ tel que :

$$\mathrm{Z}\left(\Phi^\dagger, T, f^\dagger\right) P_0^\dagger\left(\pi^\dagger, T\right) = P^\dagger(\Phi^\dagger, T, f^\dagger). \tag{4.2}$$

De plus, par 4.2.1, on peut supposer $P_0^\dagger(\pi^\dagger, T) \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell\,[T]$ et $P_0^\dagger\left(\pi^\dagger, 0\right) = 1$ et donc :

$$P^\dagger(\Phi^\dagger, T, f^\dagger) = \mathrm{Z}\left(\Phi^\dagger, T, f^\dagger\right) P_0^\dagger\left(\pi^\dagger, T\right) \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell\,[[T]]\left[T^{-1}\right] \cap \overline{\mathbb{Q}}_\ell\left[T, T^{-1}\right].$$

On en déduit que, en fait :

$$P^\dagger(\Phi^\dagger, T, f^\dagger) \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell\left[T, T^{-1}\right].$$

Par construction, on a $\mathrm{Z}(\Phi, T, f) = \boldsymbol{r}_\ell\left(\mathrm{Z}\left(\Phi^\dagger, T, f^\dagger\right)\right)$ dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell((T))$. Mais, d'après l'équation (4.2), on a $\boldsymbol{r}_\ell\left(\mathrm{Z}\left(\Phi^\dagger, T, f^\dagger\right)\right) \boldsymbol{r}_\ell\left(P_0^\dagger\left(\pi^\dagger, T\right)\right) = \boldsymbol{r}_\ell\left(P^\dagger\left(\Phi^\dagger, T, f^\dagger\right)\right)$.

Puisque $P_0^\dagger\left(\pi^\dagger, 0\right) = 1$ on a $\boldsymbol{r}_\ell\left(P_0^\dagger\left(\pi^\dagger, T\right)\right) \neq 0$ d'où :

$$\mathrm{Z}(\Phi, T, f) = \boldsymbol{r}_\ell\left(\mathrm{Z}\left(\Phi^\dagger, T, f^\dagger\right)\right) = \frac{\boldsymbol{r}_\ell\left(P^\dagger\left(\Phi^\dagger, T, f^\dagger\right)\right)}{\boldsymbol{r}_\ell\left(P_0^\dagger\left(\pi^\dagger, T\right)\right)},$$

qui appartient bien à $\overline{\mathbb{F}}_\ell(T)$. Cela démontre (1).

Montrons (2). Soient $\mathrm{Q}^\dagger, \mathrm{Q}'^\dagger \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell[T]$ premiers entre eux tels que $\gamma\left(T, \pi^\dagger, \psi^\dagger\right) = \frac{\mathrm{Q}^\dagger(T)}{\mathrm{Q}'^\dagger(T)}$. Alors pour toute $\Phi^\dagger \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ et tout coefficient $f^\dagger$ comme ci-dessus, on a :

$$\mathrm{Z}\left(\widehat{\Phi^\dagger}, q^{-\frac{1}{2}(n+1)}T^{-1}, \check{f}^\dagger\right) \mathrm{Q}'^\dagger(T) = \mathrm{Z}\left(\Phi^\dagger, q^{-\frac{1}{2}(n-1)}T, f^\dagger\right) \mathrm{Q}^\dagger(T).$$

On choisit $\Phi^\dagger \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ et $f^\dagger$ coefficient de $\pi^\dagger$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ tels que $\boldsymbol{r}_\ell\left(\mathrm{Z}\left(\Phi^\dagger, q^{-\frac{1}{2}(n-1)}T, f^\dagger\right)\right) \neq 0$. On déduit que $\boldsymbol{r}_\ell(\mathrm{Q}'^\dagger) \neq 0$. Il suffit alors de prendre :

$$\gamma\left(T, \mathfrak{v} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell, \psi\right) = \boldsymbol{r}_\ell\left(\gamma\left(T, \pi^\dagger, \psi^\dagger\right)\right) := \frac{\boldsymbol{r}_\ell\left(\mathrm{Q}^\dagger(T)\right)}{\boldsymbol{r}_\ell\left(\mathrm{Q}'^\dagger(T)\right)}. \tag{4.3}$$

□

**4.2.3.** La preuve du théorème 4.1 implique :

***Corollaire 4.2.*** — (1) *$P_1\left(T, \mathfrak{v} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell\right)$ divise $\boldsymbol{r}_\ell\left(P_1\left(T, \pi^\dagger\right)\right)$ dans l'anneau $\overline{\mathbb{F}}_\ell[T]$.*

(2) *La fonction $\gamma\left(T, \mathfrak{v} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell, \psi\right)$ satisfait l'équation suivante :*

$$\gamma\left(T, \mathfrak{v} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell, \psi\right) = \boldsymbol{r}_\ell\left(\varepsilon\left(T, \pi, \psi\right)\right) \frac{\boldsymbol{r}_\ell\left(L\left(q^{-1}T^{-1}, \pi^\vee\right)\right)}{\boldsymbol{r}_\ell\left(L\left(T, \pi\right)\right)}. \tag{4.4}$$

En général on n'a pas une égalité dans (1) (comme on vient de montrer dans le cas de $\mathrm{GL}_1(\mathrm{D})$, voir section 6 pour d'autres contre-exemples). Pourtant, l'égalité est satisfaite pour les représentations banales (voir section 5).

*Preuve du théorème 2.3.* — Soit $\pi$ une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible. D'après [**Dat**, Lemma 6.8.i)] ou [**MS**, Proposition 4.23], il existe $\pi^\dagger$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière et $\mathfrak{v}$ une structure entière de $\pi^\dagger$ telle que $\pi$ soit un sous-quotient de $\mathfrak{v} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell$.

Les assertions (1) et (2) du théorème 2.3 sont vraies, d'après le théorème 4.1, pour la représentation $\mathfrak{v} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell$. Elles sont aussi vraies pour la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation $\pi$ d'après la proposition 2.5.

□

## 5. Classification des fonctions $L$ dans le cas banal

Dans cette section on calcule les fonctions $L$ pour les $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ dites *banales*. Ces représentations satisfont deux conditions qui sont importantes pour nous : d'abord il existe une classification *à la Langlands* (voir ci-dessous) qui permet de les paramétrer; ensuite, elles se relèvent en caractéristique 0

**5.1. Les représentations banales.** — Dans ce paragraphe on fixe R un corps de caractéristique 0 ou bien $\mathrm{R} = \overline{\mathbb{F}}_\ell$ avec $\ell \neq p$. On rappelle brièvement la classification des R-représentations banales de $\mathrm{G}_m$, on renvoie à [**MS2**] pour plus de détails.

**5.1.1.** Soit un entier $n \geqslant 0$, soit $\rho$ une R-représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{G}_n$. Dans [**MS**, §7.1], on lui associe un caractère non ramifié $\nu_\rho$ tel que, pour toute représentation cuspidale $\rho'$, la représentation induite $\rho \times \rho'$ est réductible si et seulement si $\rho'$ est isomorphe à $\rho\nu_\rho$ ou $\rho\nu_\rho^{-1}$. Par exemple, si $\mathrm{D} = \mathrm{F}$, alors $\nu_\rho$ est indépendant de $\rho$ et vaut $|\det|_{\mathrm{F}}$. On note $\mathbb{Z}_\rho$ l'ensemble de classes d'équivalence des R-représentations de la forme $\rho\nu_\rho^i$ avec $i \in \mathbb{Z}$. Dans le cas où $\mathrm{R} = \overline{\mathbb{F}}_\ell$, cet ensemble est fini.

**5.1.2.** Soit un entier $n \geqslant 0$, soit $\rho$ une R-représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{G}_n$ et soient $a, b \in \mathbb{Z}$ des entiers tels que $a \leqslant b$. Un *segment* est une suite finie de la forme :

$$\Delta = \left(\rho\nu_\rho^a, \rho\nu_\rho^{a+1}, \dots, \rho\nu_\rho^b\right).$$

Un tel segment sera aussi noté $[a, b]_\rho$. On note :

$$n(\Delta) = b - a + 1, \quad a(\Delta) = \rho\nu_\rho^a, \quad b(\Delta) = \rho\nu_\rho^b, \tag{5.1}$$

respectivement la longueur et les extrémités de $\Delta$. Un multisegment est un multi-ensemble (*cf.* 1.2.3) de segments de la forme précédente. Son support est un multi-ensemble de R-représentations cuspidales : si $\rho$ est une représentation cuspidale, la multiplicité de $\rho$ dans le support d'un multisegment $\mathfrak{m}$ est le nombre de fois que cette représentation apparaît dans les différents segments de $\mathfrak{m}$. Un multisegment $\mathfrak{m}$ est dit *banal* si pour toute représentation cuspidale $\rho$, l'ensemble $\mathbb{Z}_\rho$ n'est pas inclus dans le support de $\mathfrak{m}$.

***Définition 5.1***. — On dira qu'une R-représentation $\pi$ est *banale* si son support cuspidal est banal.

En particulier, toute R-représentation de $\mathrm{G}_m$ est banale si $\mathrm{G}_m$ est un groupe banal pour R, c'est-à-dire si R est un corps de caractéristique 0 ou bien $\mathrm{R} = \overline{\mathbb{F}}_\ell$ avec $\ell$ ne divisant pas le cardinal du groupe fini $\mathrm{GL}_m(k_{\mathrm{D}})$, où $k_{\mathrm{D}}$ est le corps résiduel de D.

**5.1.3.** Soient $\Delta = [a, b]_\rho$ et $\Delta' = [a', b']_{\rho'}$ des segments. On dit que $\Delta$ *précède* $\Delta'$ si l'on peut extraire de la suite :

$$(\rho\nu_\rho^a, \dots, \rho\nu_\rho^b, \rho'\nu_{\rho'}^{a'}, \dots, \rho'\nu_{\rho'}^{b'})$$

une sous-suite qui est un segment de longueur strictement supérieure à $n(\Delta)$ et $n(\Delta')$.

Soit $\Delta = [a, b]$ un segment banal. On pose :

$$\mathrm{I}(\Delta) = \rho\nu_\rho^a \times \cdots \times \rho\nu_\rho^b. \tag{5.2}$$

La représentation $\mathrm{I}(\Delta)$ possède (*cf.* [**MS2**, Proposition 3.8]) un unique quotient irréductible, noté $\langle\Delta\rangle$. Dans [**MS2**, Théorème 0.3], on montre le théorème suivant :

***Théorème 5.2***. — (1) *Soient $\Delta_1,\dots,\Delta_r$ des segments tels que, pour tous $i<j$, le segment $\Delta_i$ ne précède pas $\Delta_j$ et tels que le multisegment $\mathfrak{m}=\Delta_1+\cdots+\Delta_r$ soit banal. Alors :*

$$\langle\Delta_1\rangle\times\cdots\times\langle\Delta_N\rangle \tag{5.3}$$

*admet un unique quotient irréductible, ne dépendant que de $\mathfrak{m}$ et noté $\langle\mathfrak{m}\rangle$. Il est banal et sa multiplicité comme facteur de (5.3) est égale à 1.*

(2) *L'application $\mathfrak{m}\mapsto\langle\mathfrak{m}\rangle$ définit une bijection entre multisegments banals et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles banales de $\mathrm{G}_m$, pour $m\geq 0$.*

***Remarque 5.3***. — Ces représentations sont notées $\mathrm{L}(\Delta_1,\dots,\Delta_N)$ dans [**MS2**]. Pour éviter une confusion avec les fonctions $L$, on a préféré d'utiliser ici la notation $\langle\Delta_1,\dots,\Delta_N\rangle$.

**5.2.** On suppose ici $\mathrm{R}=\overline{\mathbb{F}}_\ell$. Soit $\Delta_1+\cdots+\Delta_N$ un multisegment banal. Supposons, pour fixer les notations, que $\Delta_i=[a_i,b_i]_{\rho_i}$, $1\leq i\leq N$. Alors d'après [**MS2**, §5], il existe des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations cuspidales entières $\rho_i^\dagger$ qui relèvent $\rho_i$, pour $1\leq i\leq N$, telles que $\langle\Delta_1,\dots,\Delta_N\rangle$ soit exactement la réduction modulo $\ell$ de $\left\langle\Delta_1^\dagger,\dots,\Delta_N^\dagger\right\rangle$, avec $\Delta_i^\dagger=[a_i,b_i]_{\rho_i^\dagger}$.

**5.3.** On va calculer la fonction $L$ sucessivement pour une représentation cuspidale, une représentation de la forme $\langle\Delta\rangle$ et finalement, par récurrence, une représentation de la forme $\langle\Delta_1,\dots,\Delta_N\rangle$ avec $N$ quelconque.

**5.3.1.** On commence avec le cas d'une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation cuspidale.

***Proposition 5.4***. — *Soit $\rho$ une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation cuspidale de $\mathrm{G}_m$. Alors $L(T,\rho)=1$ sauf si $m=1$, $q^d\not\equiv 1 \mod l$ et $\rho$ est le caractère $\chi\circ\mathrm{Nrd}$, avec $\chi$ un caractère non ramifié de $\mathrm{F}^\times$. Dans ce cas :*

$$L(T,\chi\circ\mathrm{Nrd})=L\left(q^{\frac{1-d}{2}}T,\chi\right)=\frac{1}{1-\chi(\varpi_\mathrm{F})\,q^{\frac{1-d}{2}}T}.$$

*Démonstration*. — Si $m=1$, c'est le théorème 3.1 (attention à la normalisation de la fonction $L$ !). Supposons $m>1$. Alors il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale entière $\rho^\dagger$ (*cf* [**MS**, Proposition 4.23]) telle que $\rho$ soit un sous-quotient irréductible de $\boldsymbol{r}_\ell(\rho^\dagger)$. La proposition est donc une conséquence du corollaire 4.2 et du paragraphe 4.1 (voir [**Mi2**, §5.3] pour une preuve directe). □

**5.3.2.** Soient $\rho^\dagger$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale de $\mathrm{G}_r$ et $\Delta^\dagger = [a,b]_{\rho^\dagger}$ un segment.

***Proposition 5.5***. — *La fonction* $L(T, \langle\Delta^\dagger\rangle)$ *vaut* 1 *sauf si* $\rho^\dagger$ *est une représentation de* $\mathrm{GL}_1(\mathrm{D})$ *de la forme* $\chi^\dagger \circ \mathrm{Nrd}$*, avec* $\chi^\dagger$ *un* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*-caractère non ramifié de* $\mathrm{F}^\times$*, et dans ce cas :*

$$L\left(T, \langle\Delta^\dagger\rangle\right) = \frac{1}{1 - \chi^\dagger(\varpi_{\mathrm{F}})q^{-bd+\frac{1-d}{2}}T}. \tag{5.4}$$

*Démonstration.* — D'abord, si $\rho^\dagger$ n'est pas une représentation de $\mathrm{GL}_1(\mathrm{D})$ de la forme $\chi^\dagger \circ \mathrm{Nrd}$, avec $\chi^\dagger$ un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-caractère non ramifié de $\mathrm{F}^\times$, alors d'après la proposition 5.4, $L(T,\rho^\dagger) = 1$. On déduit de 4.1(2) que $L\left(T, \rho\nu_\rho^a \times \cdots \times \rho\nu_\rho^b\right) = 1$ et de la proposition 2.5 que $L\left(T, \langle\Delta^\dagger\rangle\right) = 1$.

Supposons que $\rho^\dagger$ est une représentation de $\mathrm{GL}_1(\mathrm{D})$ de la forme $\chi^\dagger \circ \mathrm{Nrd}$, avec $\chi^\dagger$ un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-caractère non ramifié de $\mathrm{F}^\times$, c'est-à-dire $\langle\Delta^\dagger\rangle$ est une représentation de Steinberg tordue. On peut alors supposer que $\chi^\dagger$ est le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-caractère trivial de $\mathrm{F}^\times$. La preuve de la proposition dans le cas des $\mathbb{C}$-représentations, quand $\mathrm{F} = \mathrm{D}$ est faite dans [**GJ**, Proposition 7.11] et elle est valable pour D quelconque (voir aussi [**Bad**, Theorem 6.1.(b)]). Mais la représentation de Steinberg est définie sur $\mathbb{Q}$ et donc, par extension des scalaires à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ on trouve le résultat pour des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations. □

Soient $\rho$ une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation cuspidale de $\mathrm{G}_r$ et $\Delta = [a,b]_\rho$ un segment banal (en particulier $q^d \not\equiv 1 \mod l$).

***Proposition 5.6***. — *La fonction* $L(T, \langle\Delta\rangle)$ *vaut* 1 *sauf si* $\rho$ *est une représentation de* $\mathrm{GL}_1(\mathrm{D})$ *de la forme* $\chi \circ \mathrm{Nrd}$*, avec* $\chi$ *un* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-caractère non ramifié de* $\mathrm{F}^\times$*, et dans ce cas :*

$$L\left(T, \langle\Delta\rangle\right) = \frac{1}{1 - \chi(\varpi_{\mathrm{F}})q^{-bd+\frac{1-d}{2}}T}. \tag{5.5}$$

*Démonstration.* — Par la proposition 5.5 et le corollaire 4.2, il suffit de traiter le cas où $\rho$ est de la forme $\chi \circ \mathrm{Nrd}$, avec $\chi$ un caractère non ramifié de $\mathrm{F}^\times$.

Notons $\rho^\dagger$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale entière de $\mathrm{G}_r$ qui relève $\rho$ et $\Delta^\dagger$ le segment $[a,b]_{\rho^\dagger}$. Supposons par l'absurde que l'égalité (5.5) n'a pas lieu. Alors, par (5.4) et le corollaire 4.2, $L\left(T, \langle\Delta\rangle\right) = 1$. Mais dans ce cas, par (2.3) :

$$\gamma\left(T, \langle\Delta\rangle, \psi\right) \in \overline{\mathbb{F}}_\ell\left[T, T^{-1}\right]. \tag{5.6}$$

Puisque le segment est banal, $\boldsymbol{r}_\ell\left(L\left(T,\left\langle\Delta^\dagger\right\rangle\right)^{-1}\right)$ et $\boldsymbol{r}_\ell\left(L\left(T^{-1}q^{-1},\left\langle\Delta^\dagger\right\rangle^\vee\right)^{-1}\right)$ sont premiers entre eux dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell\left[T,T^{-1}\right]$. En effet :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_\ell\left(L\left(T,\left\langle\Delta^\dagger\right\rangle\right)^{-1}\right) &= 1-\chi(\varpi_{\mathrm{F}})q^{-bd+\frac{1-d}{2}}T, \text{ et}\\ \boldsymbol{r}_\ell\left(L\left(T^{-1}q^{-1},\left\langle\Delta^\dagger\right\rangle^\vee\right)^{-1}\right) &= T^{-1}\left(T-\chi(\varpi_{\mathrm{F}}^{-1})q^{ad+\frac{1-d}{2}-1}\right)\\ &= -T^{-1}\chi(\varpi_{\mathrm{F}}^{-1})q^{ad+\frac{1-d}{2}-1}\left(1-\chi(\varpi_{\mathrm{F}})q^{-ad-\frac{1-d}{2}+1}\right).\end{aligned}$$

Or l'égalité :

$$1-\chi(\varpi_{\mathrm{F}})q^{-bd+\frac{1-d}{2}}T = 1-\chi(\varpi_{\mathrm{F}})q^{-ad-\frac{1-d}{2}+1}$$

est satisfaite si, et seulement si, $q^{d(-b+a-1)}=1$, ce qui est impossible puisqu'on a supposé le segment banal.

Or, par (4.4), $\gamma\left(T,\langle\Delta\rangle,\psi\right)=\boldsymbol{r}_\ell\left(\gamma\left(T,\left\langle\Delta^\dagger\right\rangle\psi\right)\right)\notin\overline{\mathbb{F}}_\ell\left[T,T^{-1}\right]$ ce qui contredit (5.6). $\square$

**5.3.3.** La fonction $L$ d'une R-représentation de la forme $\left\langle\Delta_1^\dagger,\ldots,\Delta_N^\dagger\right\rangle$, $N\geq 2$, est calculée dans [**Ja2**, Theorem 3.4]. Le calcul est fait pour des $\mathbb{C}$-représentations, quand F = D, mais il est valable pour des représentations de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ sur un corps R algébriquement clos de caractéristique 0 quelconque. Elle vaut :

$$L\left(T,\left\langle\Delta_1^\dagger,\ldots,\Delta_N^\dagger\right\rangle\right)=\prod_{1\leq i\leq N}L\left(T,\left\langle\Delta_i^\dagger\right\rangle\right).$$

***Théorème 5.7.*** — *Pour toute représentation banale $\langle\Delta_1,\ldots,\Delta_N\rangle$ :*

$$L\left(T,\langle\Delta_1,\ldots,\Delta_N\rangle\right)=\prod_{1\leq i\leq N}L\left(T,\langle\Delta_i\rangle\right).$$

La condition de banalité, comme on l'a mentionné plus haut, est utilisée de deux façons différentes : d'abord, si la représentation est banale alors elle s'écrit sous la forme décrite dans le théorème 5.2 (on ne dispose pas, pour l'instant, d'un théorème similaire dans le cas général); ensuite toute représentation banale se relève ce qui nous permet de relever tout coefficient (et cela est faux dans le cas général). Ce serait intéressant de trouver une preuve directe, sans utiliser d'argument de relèvement (voir [**Mi2**, §5.6] dans le cas où le groupe $\mathrm{G}_m$ est banal).

Pour prouver le théorème fixons quelques notations : on fixe l'entier $m$ tel que $\pi=\langle\Delta_1,\ldots,\Delta_N\rangle$ soit une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation de $\mathrm{G}_m$. Soient $\left(\Delta_1^\dagger,\ldots,\Delta_N^\dagger\right)$ des segments comme dans le paragraphe 5.2 tels que la réduction modulo $\ell$ de $\pi^\dagger=\left\langle\Delta_1^\dagger,\ldots,\Delta_N^\dagger\right\rangle$

soit $\langle \Delta_1, \ldots, \Delta_N \rangle$. Quitte à réarranger les indices $1 \le i \le N$, on supposera que, pour tous $1 \le i < j \le N$, $\Delta_i$ ne précède pas $\Delta_j$ et $\Delta_i^\dagger$ ne précède pas $\Delta_j^\dagger$ (on peut le supposer puisque le multi-segment $\Delta_1 + \cdots + \Delta_N$ est banal).

Soit $k \le N$ tel que $b\left(\Delta_i^\dagger\right) = b\left(\Delta_1^\dagger\right)$ (*cf.* (5.1)) si, et seulement si, $i \le k$. Notons $m_1$ l'entier tel que $\langle \Delta_1, \ldots, \Delta_k \rangle$ soit une représentation de $\mathrm{G}_{m_1}$ et $m_2 = m - m_1$. On note $\sigma_1 = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_k \rangle$ et $\sigma_2 = \langle \Delta_{k+1}, \ldots, \Delta_N \rangle$. On posera finalement $\sigma_1^\dagger = \left\langle \Delta_1^\dagger, \ldots, \Delta_k^\dagger \right\rangle$ et $\sigma_2^\dagger = \left\langle \Delta_{k+1}^\dagger, \ldots, \Delta_N^\dagger \right\rangle$.

***Lemme 5.8***. — *Pour toute fonction $\Phi_2^\dagger \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{M}_{m_2}(\mathrm{D}))$ et tout coefficient $f_2^\dagger$ de $\sigma_2^\dagger$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$, il existe $\Phi^\dagger \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ et $f^\dagger$ coefficient de $\pi^\dagger$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ tels que :*

$$\mathrm{Z}\left(\Phi^\dagger, Tq^{\frac{1-n}{2}}, f^\dagger\right) = \mathrm{Z}\left(\Phi_2^\dagger, Tq^{\frac{1-dm_2}{2}}, f_2^\dagger\right). \tag{5.7}$$

*Démonstration.* — La construction de $\Phi^\dagger$ et $f^\dagger$ à partir de $\Phi_2^\dagger$ et $f_2^\dagger$ pour qu'ils satisfassent l'équation (5.7) est faite dans [**Ja2**, 3.5.]. On vérifie que la fonction $\Phi^\dagger$ ainsi construite est un produit des fonctions à valeurs entières et $f^\dagger$ est défini par une intégrale (donnée par une mesure à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$) de fonctions à valeurs entières. (Etant en caractéristique 0, la condition de banalité n'est pas utilisée ici.) □

*Preuve du théorème 5.7.* — On rappelle qu'on note $\mathscr{Z}(\pi)$ le sous-$\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espace vectoriel de $\overline{\mathbb{F}}_\ell(T)$ engendré par les fonctions $\mathrm{Z}\left(\Phi, Tq^{\frac{1-n}{2}}, f\right)$ avec $f$ coefficient de $\pi$, $\Phi \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ et $n = md$. On veut montrer que $\prod_{1 \le i \le N} L(T, \langle \Delta_i \rangle) \in \mathscr{Z}(\pi)$. On le montre par récurrence sur $N$, le cas $N = 1$ étant la proposition 5.6.

Puisque pour tout $i < j$, $\Delta_i$ ne précède pas $\Delta_j$ et que les segments sont banales, $\prod_{1 \le i \le k} L(T, \langle \Delta_i \rangle)^{-1}$ est premier à $\prod_{1 \le i \le N} L\left(T^{-1}q^{-1}, \langle \Delta_i \rangle^\vee\right)^{-1}$ dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell[T, T^{-1}]$. Le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 5.6 nous montre que :

$$\prod_{1 \le i \le k} L(T, \langle \Delta_i \rangle) \in \mathscr{Z}(\pi).$$

Or le polynôme $\prod_{1 \le i \le k} L(T, \langle \Delta_i \rangle)^{-1}$ est aussi premier au produit $\prod_{k+1 \le i \le N} L(T, \langle \Delta_i \rangle)^{-1}$ dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell[T]$. Il suffit donc de montrer que :

$$\prod_{k+1 \le i \le N} L(T, \langle \Delta_i \rangle) \in \mathscr{Z}(\pi).$$

Par hypothèse de récurrence, on peut supposer qu'il existe un ensemble fini $J$ et, pour tout $j \in J$, une fonction $\Phi_2^{(j)} \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{M}_{m_2}(\mathrm{D}))$ et un coefficient $f_2^{(j)}$ de $\sigma_2$ tels que :

$$\sum_{j\in J} \mathrm{Z}\left(\Phi_2^{(j)}, Tq^{\frac{1-dm_2}{2}}, f_2^{(j)}\right) = \prod_{k+1\leq i\leq N} L\left(T, \langle\Delta_i\rangle\right).$$

Pour tout $j \in J$, on relève $\Phi_2^{(j)}$ en $\Phi_2^{(j)\dagger}$ fonction à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$, et $f_2^{(j)}$ en $f_2^{(j)\dagger}$ coefficient de $\sigma_2^\dagger$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$. Par le lemme 5.8, il existe $\Phi^{(j)\dagger} \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{M}_m(\mathrm{D}))$ et $f^{(j)\dagger}$ coefficient de $\pi^\dagger$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ tels que, pour tout $j \in J$ :

$$\mathrm{Z}\left(\Phi^{(j)\dagger}, Tq^{\frac{1-n}{2}}, f^{(j)\dagger}\right) = \mathrm{Z}\left(\Phi_2^{(j)\dagger}, Tq^{\frac{1-dm_2}{2}}, f_2^{(j)\dagger}\right).$$

Notons $\Phi^{(j)}$ et $f^{(j)}$ leur réduction modulo $\ell$. On a :

$$\sum_{j\in J} \mathrm{Z}\left(\Phi^{(j)}, Tq^{\frac{1-n}{2}}, f^{(j)}\right) = \prod_{k+1\leq i\leq N} L\left(T, \langle\Delta_i\rangle\right),$$

ce qui finit la preuve du théorème. □

## 6. Un exemple dans le cas non banal

On suppose ici que $\mathrm{R} = \overline{\mathbb{F}}_\ell$ avec $\ell \neq p$.

***Proposition 6.1***. — *Notons* $1_2$ *la* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-représentation triviale de* $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F})$. *Alors :*

$$L(T, 1_2) = \begin{cases} 1 & si\ q \equiv 1 \mod l \\ \frac{1}{1-q^{1/2}T} & si\ q \equiv -1 \mod l\ et\ l \neq 2 \\ \left(\frac{1}{1-q^{1/2}T}\right)\left(\frac{1}{1-q^{-1/2}T}\right) & si\ q^2 \not\equiv 1 \mod l\ (i.e.\ \ell\ banal). \end{cases}$$

*Démonstration.* — Si $\ell$ est banal c'est une conséquence de la section précédente.

Supposons $q^2 \equiv 1 \mod l$ et fixons la mesure de Haar sur $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F})$ telle que $\mu^\times(1 + \mathrm{M}_2(\mathscr{O}_\mathrm{F})) = 1$. On rappelle que $\mathscr{S}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{M}_2(\mathrm{F}))$ est engendré par $\mathscr{S}^0$ l'ensemble des fonctions caractéristiques des ensembles de la forme $\mathbf{a} + \varpi^n\mathrm{M}_2(\mathscr{O}_\mathrm{F})$ avec $\mathbf{a} \in \mathrm{M}_2(\mathrm{F})$ et $n \in \mathbb{N}$. Faisons agir $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_\mathrm{F})$ à droite et à gauche sur $\mathscr{S}^0$ : un choix de représentants de l'ensemble quotient est l'ensemble des fonctions caractéristiques des ensembles de la forme $\mathbf{a} + \varpi^n \mathrm{M}_2(\mathscr{O}_\mathrm{F})$ avec

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \varpi^\alpha & 0 \\ 0 & \varpi^\beta \end{pmatrix}, \ \alpha \leq \beta < n, \tag{6.1}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \varpi^\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \alpha < n, \tag{6.2}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Il suffit donc de calculer $\mathrm{Z}\left(\mathbf{1}_{\mathbf{a}+\varpi^n\mathrm{M}_2(\mathscr{O}_\mathrm{F})}, Tq^{-1/2}, 1_2\right)$ pour ces choix de matrices $\mathbf{a}$. En effet, pour tous $k, k' \in \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_\mathrm{F})$, on a $\mathrm{Z}\left(\Phi(k \cdot k'), T, 1_2\right) = \mathrm{Z}\left(\Phi(\cdot), T, 1_2\right)$ et donc $\mathscr{L}(1_2)$ est le $\overline{\mathbb{F}}_\ell\left[T, T^{-1}\right]$-module engendré par les fonctions zêta $\mathrm{Z}\left(\mathbf{1}_{\mathbf{a}+\varpi^n\mathrm{M}_2(\mathscr{O})}, Tq^{-1/2}, 1_2\right)$ avec $\mathbf{a}$ de la forme ci-dessus.

Si $\mathbf{a}$ est de la forme (6.1), alors $\mathbf{1}_{\mathbf{a}+\varpi^n\mathrm{M}_2(\mathscr{O}_\mathrm{F})} \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{GL}_2(\mathrm{F}))$ et donc la fonction zêta $\mathrm{Z}\left(\mathbf{1}_{\mathbf{a}+\varpi^n\mathrm{M}_2(\mathscr{O}_\mathrm{F})}, Tq^{-1/2}, 1_2\right) \in \overline{\mathbb{F}}_\ell[T, T^{-1}]$, pour tout $n$.

Si $\mathbf{a}$ est de la forme (6.3) :

$$\mathrm{Z}\left(\mathbf{1}_{\mathbf{a}+\varpi^n\mathrm{M}_2(\mathscr{O}_\mathrm{F})}, Tq^{-1/2}, 1_2\right) = \mu^\times\left(\mathrm{GL}_2\left(\mathscr{O}_\mathrm{F}\right)\right) T^n \left(1 - q^{-1/2}T\right)^{-1}\left(1 - q^{1/2}T\right)^{-1} = 0,$$

pour tout $n$, parce que, comme $q^2 \equiv 1 \mod l$, le volume du sous-groupe compact maximal $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_\mathrm{F})$ est 0.

Si $\mathbf{a}$ est de la forme (6.2), $\mathrm{Z}\left(\mathbf{1}_{\mathbf{a}+\varpi^n\mathrm{M}_2(\mathscr{O}_\mathrm{F})}, Tq^{-1/2}, 1_2\right) = \sum_{m \geq n} u_m T^m q^{-m/2}$, où :

$$\begin{aligned} u_m &= \int_{a,b,c,d \in \mathfrak{p}^n, (\varpi^\alpha + a)d - bc \in \mathfrak{p}^m - \mathfrak{p}^{m+1}} d\mu^\times(g) \\ &= \int_{a,b,c,d \in \mathfrak{p}^n, (\varpi^\alpha + a)d - bc \in \mathfrak{p}^m - \mathfrak{p}^{m+1}} q^{2m} d\mu(g). \end{aligned}$$

Calculons le volume de l'ensemble des $a, b, c, d \in \mathfrak{p}^n$, tels que $(\varpi^\alpha + a)d - bc \in \mathfrak{p}^m - \mathfrak{p}^{m+1}$. Posons $u = (\varpi^\alpha + a)d - bc$, *i.e.* $d = (u + bc)(\varpi^\alpha + a)^{-1}$. Si $m \geq n + \alpha$ alors $a, b, c \in \mathfrak{p}^n, u \in \mathfrak{p}^m - \mathfrak{p}^{m+1}$ et $d$ est fixé donc ce volume vaut :

$$q^{-3n}(q-1)q^{-m}q^{2m} = q^{-3n+m}(q-1).$$

Or, $q^{-3n+m}(q-1) = 0$, dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, si $q \equiv 1 \mod l$. Sinon, $\mathrm{Z}\left(\mathbf{1}_{\mathbf{a}+\varpi^n\mathrm{M}_2(\mathscr{O}_\mathrm{F})}, Tq^{-1/2}, 1_2\right)$ est une série géométrique de raison $Tq^{1/2}$, d'où la proposition. □

***Remarque 6.2***. — On s'attendait à ce résultat. En effet, si $q \equiv -1 \mod l$ et $l \neq 2$, la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation triviale de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F})$ est un sous-quotient de la réduction modulo $\ell$ de $(-1)^{v_\mathrm{F}} \mathrm{St}_2$ ($\mathrm{St}_2$ est la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F})$) qui a comme fonction $L$ :

$$L\,(T, (-1)^{v_\mathrm{F}}\,\mathrm{St}_2) = \frac{1}{1 - q^{1/2}T}.$$

Dans ce cas l'inverse de la fonction $\ell$ devait être un polynôme de degré 0 ou 1.

***Remarque 6.3***. — Supposons $\ell = 2$. Soit $\Phi \in \mathscr{S}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{M}_2(\mathrm{F}))$. Notons B le sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F})$ et soit V l'induite parabolique de B à $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F})$ de la représentation triviale de B. Alors V est composée (*cf.* [**Vi2**]) de la représentation triviale, qui apparaît avec multiplicité 2, et d'une représentation cuspidale, $\mathrm{Sp}_2$ dite *spéciale*.

Cette représentation spéciale, étant cuspidale, vérifie $L(T, \chi\mathrm{Sp}_2) = 1$ pour tout caractère $\chi$ de $\mathrm{F}^\times$. D'après le calcul précédent $L(T, \chi 1_2) = 1$ (c'est clair si $\chi$ est non-ramifié et s'il est ramifié on utilise le théorème 5.7 et le corollaire 4.2).

Puisque la représentation triviale et $\mathrm{Sp}_2$ sont deux sous-quotients de V, par la proposition 2.5, elles ont les mêmes facteurs *gamma* et puisque leurs fonction $L$ respectives sont égales, elles ont, par (2.3), les mêmes facteurs *epsilon*. Il est de même pour les représentations $\chi\mathrm{Sp}_2$ et $\chi 1_2$, pour tout caractère $\chi$ de $\mathrm{F}^\times$.

Dans le cas des coefficients complexes, on dispose d'un théorème de réciprocité qui nous dit que les fonctions $L$ et les facteurs epsilon des représentations de la forme $\chi\pi$ pour $\chi$ un caractère, déterminent toute représentation irréductible $\pi$ de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F})$ (*cf.* [**JL**] dans le cas de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F})$, [**He1**] dans le cas général). Ceci n'est donc plus vrai dans le cas non banal.

## Références

[Bad] A. I. Badulescu, *Global Jacquet-Langlands correspondence, multiplicity one and classification of automorphic representations*. With an appendix by Neven Grbac. Invent. Math. 172 (2008), no. 2, 383–438.

[BH] C.J. Bushnell, G. Henniart, *The local Langlands conjecture for $GL(2)$* Springer, Volume 335. (2006).

[Dat] J.-F. Dat, *$\nu$-tempered representations of $p$-adic groups I :$\ell$-adic case*. Duke Math. J., **126**(3) : 397-469, 2005.

[GJ] R. Godement, H. Jacquet, *Zeta functions of simple algebras*, Lectures Notes in Math. vol. 260, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1972.

[Ja1] H. Jacquet, *Zeta functions of simple algebras (local theory)*, Harmonic Analysis on Homogeneous spaces, Mem. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973,381-386.

[Ja2] H. Jacquet, *Principal L-Functions of the linear Group*, Proc. of Symp. in Pure Math., Vol. **33** (1979)

[JL] H. Jacquet, R.P. Langlands *Automorphic forms on* GL(2) , Lect. Notes in Math., Vol. **114** (1970).

[Kud] S. Kudla, *Tate Thesis*, An introduction to the Langlands program, Birkhäuser Boston (2004), 109-131.

[HT] M. Harris, R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Math. Studies **151** (2001).

[He1] G. Henniart, *Caractérisation de la correspondance de Langlands locale par les facteurs $\epsilon$ de paires*, Invent. Math., vol. 113, 1993, p. 339-350.

[He2] G. Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* $\mathrm{GL}_n$ *sur un corps p-adique*, Inv. Math. **130** (2000), 439-455.

[Mi1] A. Mínguez, *Correspondance de Howe explicite : paires duales de type II*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 41, f. 5, 2008, 715-739.

[Mi2] A. Mínguez, *Correspondance de Howe $\ell$-modulaire: paires duales de type II*, thèse, Orsay 2006. Disponible à http://www.math.jussieu.fr/∼minguez/

[Mi3] A. Mínguez, *Correspondance de Howe $\ell$-modulaire : paires duales de type II*, prépublication 2011. Disponible à http://www.math.jussieu.fr/∼minguez/

[MS] A. Mínguez, V. Sécherre, *Représentations lisses $\ell$-modulaires de* $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$, prépublication 2011. Disponible à http://www.math.jussieu.fr/∼minguez/

[MS2] A. Mínguez, V. Sécherre, *Représentations banales de* $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$, prépublication 2011. Disponible à http://www.math.jussieu.fr/∼minguez/

[MVW] C. Moeglin, M.F. Vignéras, J.L. Waldspurger, *Correspondance de Howe sur un corps p-adique*, LNM 1291, Springer-Verlag, 1987.

[Tat] J.Tate, *Fourier analysis in number fields, and Hecke's zeta functions*, Doctoral Disertation, Princeton Univ., Princeton, N.J., 1950; reprinted in Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965). Thompson, Washington, D.C., 1967, 305-347, MR **36** # 121.

[Vi1] M.F. Vignéras, *Représentations $\ell$-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $\ell \neq p$*, Birkhäuser, 1996.

[Vi2] M.F. Vignéras, *Représentations de $GL(2, F)$ en caractéristique $\ell$, $F$ corps p-adique, $p \neq l$*, Compos. Math. **72**, 1989, 33-66.

[Wei] A. Weil, *Fonction zêta et distributions*, Sém. Bourb. **312** (1966). Publ. SMF.



Alberto Mínguez, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Pierre et Marie Curie. 4, place Jussieu. 75005 Paris, France., URL: http://www.institut.math.jussieu.fr/∼minguez/
*E-mail :* `minguez@math.jussieu.fr`