

TESIS

RESOLUCION APROXIMADA DE PROCESOS DE DECISIONES MARKOVIANOS

por

Juan Larrañeta Astola

Ingeniero Industrial por la E.T.S. de I.I.
de la **Universidad Politecnica de Barcelona**

presentada en la

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES
de la

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE BARCELONA

para la obtención del

Grado de Doctor Ingeniero Industrial

BARCELONA, SEPTIEMBRE 1976

A mis padres y Marisa, sin cuya
ayuda no hubiera sido posible.

Deseo agradecer al director de esta tesis, Doctor Don Ramón Companys, sus valiosos comentarios y apoyo en la realización de este trabajo.

Al Ministerio de Educación y Ciencia, por su ayuda económica por medio de una Beca para la Formación de Profesorado en el Extranjero, que me fue concedida durante los años 1971-1972.

También al Departamento de Industrial Engineering de la Universidad de Stanford, California, que me mantuvo este apoyo económico en la forma de una Scholarship como Teaching Assistant durante los años 1973-1974.

Y especialmente, al Profesor Robert C. Carlson, a quien se debe mi inicial interés por este tema.

I N D I C E

0. INTRODUCCION
1. El Tema
2. Los Procesos Aproximados
3. Los Límites
4. Nuevas Particiones del Espacio de Estado

- I. LOS LIMITES
1. Introducción
2. Terminología y Notación
3. Las Cotas de Error
4. Procesos de Decisiones Markovianos Finitos

- II. CONSTRUCCION DE LOS PROCESOS APROXIMADOS
1. Introducción
2. Un proceso Aproximado

3. Ejemplo
4. Considerando Todas las Decisiones Admisibles
5. Ejemplo
6. Un Número Limitado de Decisiones
7. Ejemplo
8. Algoritmos Mixtos
9. Discusión

III. CALCULO DE LOS LIMITES

1. Introducción
2. Modelos e Hipotesis
3. Algoritmo I
4. Algoritmo II
5. Algoritmo III
6. Los Límites

IV. DISEÑO DE NUEVAS PARTICIONES

1. Introducción

2. Notación
 3. Nuevas Particiones del Espacio de Estado
 4. Sobre los Límites
 - V. CONCLUSIONES
 - VI. REFERENCIAS
 - VII. BIBLIOGRAFIA
- APENDICES A, B, C.

0. INTRODUCCION

1. El Tema

Las técnicas más importantes usadas en la resolución de procesos de decisiones markovianos estacionarios con horizonte infinito son las aproximaciones sucesivas, mejora de políticas y programación lineal. La posibilidad de aplicar cualquiera de estos métodos y el esfuerzo computacional requerido para resolver un proceso dado depende, fundamentalmente, de la cardinalidad de los espacios de estado y de decisiones del proceso. La resolución de procesos de decisiones markovianos con horizonte infinito es posible siempre que los espacios de estado y de decisiones sean finitos (aun cuando el esfuerzo computacional puede ser prohibitivo) usando cualquiera de los algoritmos mencionados.

A grandes rasgos, el algoritmo llamado "aproximaciones sucesivas" selecciona políticas que maximizan una secuencia de problemas de optimización de un sólo período, empezando con una ganancia inicial f^0 . En procesos con descuento, el empleo del valor óptimo de la iteración presente como valor inicial de la siguiente conduce asintóticamente a la ganancia óptima

(total) del proceso original. Empezando con una política admisible elegida arbitrariamente, en cada iteración del algoritmo "mejora de políticas" se elige una política de manera que su correspondiente ganancia total - suponga una mejora con respecto a la ganancia total en la iteración previa. Este procedimiento supone la inversión de matrices cuya dimensión es la cardinalidad del espacio de estado del proceso. Finalmente, el uso de programación lineal requiere la definición de una nueva variable por cada combinación de valores de la variable de estado y sus correspondientes decisiones admisibles. Por lo tanto, cuando el espacio de estado y/o el espacio de decisiones no son finitos, es imposible la implementación rutinaria de los algoritmos mencionados. En el mejor de los casos las soluciones pueden ser obtenidas analíticamente. Y aun en estos casos éstas suelen ser aproximadas.

El estudio de soluciones aproximadas ha sido llevado a cabo para procesos markovianos con espacios de estado y de decisiones finitos (e.g. (1,2,3,4,5)) y para procesos secuenciales de decisiones, con descuento (6). En estos estudios se obtienen límites máximos y mínimos de el valor de la ganancia óptima, los cuales pueden ser calculados en cada iteración del algoritmo de aproximaciones sucesivas.

Nuestra intención es similar pero el punto de vista elegido es diferente. Los resultados sobre soluciones aproximadas que hemos mencionado han sido obtenidos usando el operador A para el problema original

(véase más adelante), el cual calcula el valor supremo en el algoritmo de aproximaciones sucesivas, mientras que nosotros definimos una secuencia $\{A_m\}$ de, lo que llamaremos, operadores aproximados, cuya cardinalidad siempre es finita y más pequeña que la del operador correspondiente al problema original. Estos operadores se obtienen definiendo, a partir del proceso original un nuevo proceso en una partición finita del espacio de estado. Usando este punto de vista Fox (7,8) ha mostrado que, suponiendo que los espacios de estado y de decisiones, las ganancias y las probabilidades de transición satisfacen ciertas condiciones de regularidad, las soluciones a una secuencia de algoritmo de aproximaciones sucesivas usando los operadores $\{A_m\}$ converge a la solución del proceso de decisiones markoviano (con descuento) original. Por otro lado Rolph y Strauch (9) usan una técnica diferente: los operadores aproximados A_m se obtienen partiendo el espacio de políticas admisibles y manteniendo el espacio de estado del problema original.

La finalidad de nuestro estudio es desarrollar límites (máximo y mínimo) de la ganancia óptima del proceso original, siguiendo un método similar al de Fox. Es decir, trabajaremos en un proceso diferente y más sencillo que el original, resoluble (computacionalmente) aun cuando el original no lo sea y así obtener límites sobre los resultados del proceso original sin necesidad de resolverlo. Como resultado, podremos obtener soluciones aproximadas de procesos cuyo espacio de estado no es finito. Los resultados que obtendremos también son aplicables a procesos con espacio

de estado finito, donde puede ser computacionalmente --
beneficioso el resolver una secuencia de problemas --
aproximados en lugar del original.

2. Los procesos Aproximados

En este estudio nos limitaremos a procesos --
de decisiones markovianos estacionarios con descuento.
En este contexto, presentamos tres algoritmos que se --
obtienen por medio de una partición del espacio de es--
tado, creando procesos que aproximan el original. El --
punto de vista del primer algoritmo es similar al usa--
do por Fox. En líneas generales, el espacio de estado
se rompe en subconjuntos (disjuntos) llamados bloques,
y se selecciona un estado representativo de cada blo--
que. El conjunto de decisiones admisibles, las ganan--
cias y las probabilidades de transición de todos los --
estados de el bloque. Este procedimiento presenta la --
desventaja de que el conjunto de decisiones admisibles
correspondientes al estado representativo puede no in--
cluir todas las decisiones que son admisibles para to--
dos los estados en ese bloque. Por lo tanto, decisio--
nes relevantes (que pueden producir ganancias conside--
rables) no serían tenidas en cuenta en el proceso apro--
ximado. Y, dado que una política admisible para el pro--
ceso original debe ser elegida como resultado de traba--
jar en el proceso aproximado, la información obtenida
de el proceso aproximado puede ser inadecuada.

En nuestro segundo método, en lugar de seleccionar un estado perteneciente a cada bloque, construimos tales estados a partir de los datos; el estado representativo no pertenece, necesariamente, a el bloque representativo, o incluso existe. Como espacio de decisiones para el bloque usamos la unión, con respecto a todos los estados en el bloque, de los conjuntos de decisiones admisibles para cada uno de los estados (en el bloque). Por lo tanto, se consideran todas las decisiones admisibles. Las ganancias representativas se obtienen de manera que minimicen el error (diferencia) con respecto a todas las ganancias en ese bloque. Las probabilidades de transición son construidas de una manera similar.

El tercer algoritmo es similar a el segundo excepto en que considera un número limitado de decisiones; como espacio de decisiones admisibles para un bloque usamos la intersección (en lugar de la unión), con respecto a todos los estados en el bloque, de los conjuntos de decisiones admisibles para cada estado de el bloque. Las ganancias y probabilidades de transición representativas son construidas de una manera similar a la usada en el algoritmo anterior.

Estos dos últimos algoritmos requieren la resolución de una familia de problemas de optimización sencillos. El número de ellos a resolver depende directamente de la cardinalidad de los espacios de decisiones. Las características, estructura y solución (en algunos casos) de estos problemas de optimización se discuten en el apéndice B.

Resumiendo, estos tres algoritmos producen procesos aproximados por medio de particiones del espacio de estado del proceso original. Por lo tanto se adecuan mejor (especialmente el segundo algoritmo) a procesos cuyos espacios de decisiones sean pequeños y similares. Las condiciones que imponemos en el modelo matemático estudiado son más débiles cuando el segundo algoritmo es usado que si el algoritmo primero o tercero fueran usados (las razones de ello se describen más adelante). Además, los límites de la ganancia óptima del problema original contienen un error más pequeño. Pero el esfuerzo computacional necesario para resolver el problema aumenta con el número de decisiones consideradas, lo que hace al segundo algoritmo más caro (computacionalmente) que a los otros. Estos son factores a considerar cuando se ha de seleccionar un algoritmo para una aplicación práctica.

3. Los Límites

Los límites que obtenemos expresan la diferencia entre la ganancia óptima para el proceso original y la ganancia obtenida (no necesariamente la óptima) estudiando el problema aproximado. La expresión de este límite está constituida por dos términos: el primero mide la diferencia entre las ganancias f_m^n y f_m^{n-1} , correspondiente a dos iteraciones subsiguientes en el proceso aproximado; el segundo término expresa la diferencia obtenida cuando se aplica (a una ganancia f_m^n) el operador supremo A_m correspondiente al proceso aproximado en lugar del operador supremo A , correspondiente al proceso original. Por lo tanto, es--

tos límites son accesibles en cada iteración del algoritmo de aproximaciones sucesivas (aplicada a el proceso aproximado), con la excepción del operador supremo A . De ahí que los resultados sean computables en procesos de Markov con espacio de estado y de decisiones finitos, si se emplea una vez el operador A . Pero si esto ha de ser evitado (o bien no es posible) los límites no son computables en esta forma preliminar.

Si bien algunos de los resultados que presentamos son aplicables a procesos de decisiones secuenciales con descuento, es en los procesos de decisiones markovianos con descuento donde nuestro interés reside, y, en este contexto, en aquellas situaciones donde el operador A no se usa. Nuestro punto de vista es limitar el término que incluye al operador A en el contexto del proceso de aproximación (uno de los tres descritos previamente) usado.

Si el primer algoritmo es el empleado, requerimos que las ganancias y las probabilidades de transición sean continuas (Lipschitz) con respecto a los estados y las decisiones. También asumimos que los conjuntos de decisiones admisibles sean continuos (Hausdorff) con respecto al estado: si el modelo satisface estas hipótesis se puede acotar el error debido a considerar solamente subconjuntos de todas las decisiones admisibles. Una vez que se determine la partición del espacio de estado y los estados representativos son elegidos, los límites son computables después de cada iteración del algoritmo de aproximaciones sucesivas aplicado al problema aproximado.

Cuando se usa el segundo algoritmo nuestro punto de vista es otro: la inclusión, de una manera explícita, de todas las decisiones en el proceso aproximado y la asociación de políticas considerada en el proceso aproximado, nos conduce a la definición de dos funciones de error (representadas por $\eta(\cdot)$ y $\xi(\cdot)$). Estas funciones de error son las que intervienen en la expresión del límite. Dependen de la partición seleccionada pero no de la iteración actual en el algoritmo de aproximaciones sucesivas. Una vez que el proceso aproximado esté definido, el cálculo de las funciones de error $\eta(\cdot)$ y $\xi(\cdot)$ es simple.

La principal ventaja de este algoritmo es que no necesitamos asumir que el modelo satisface las condiciones de continuidad impuestas para el primer algoritmo. Aun más, suponiendo que el modelo las satisfaga, el conocimiento del valor de las constantes es innecesario. Este hecho es de gran importancia para procesos con espacios de estado y de decisiones finitos: estos modelos satisfacen las condiciones trivialmente (usando la métrica discreta), pero el cálculo del valor de las constantes puede ser muy caro (computacionalmente).

Finalmente, el tercer algoritmo es similar al primero en la consideración de un número de decisiones y al segundo en la manera de construir los estados representativos. Por lo tanto, asumiremos que el modelo satisface las condiciones de continuidad de Lipschitz en las ganancias y probabilidades de transición (con respecto a los estados y decisiones), y que los espacios de decisiones son continuos según (la defini-

ción) de Hausdorff. Por otro lado, la construcción de las ganancias y probabilidades de transición correspondientes a los estados representativos producen funciones de error ($\eta'(\cdot)$ y $\xi'(\cdot)$) que son similares a las obtenidas en el segundo algoritmo. De ahí que los límites obtenidos en este último algoritmo sean calculados usando las constantes de Lipschitz y las funciones de error.

4. Nuevas Particiones del Espacio de Estado

Hasta ahora hemos comentado tres construcciones diferentes del proceso aproximado a partir del original. El procedimiento de aproximación que empleamos usa una secuencia de estos procesos.

El primer término en la expresión de los límites discutidos en la sección anterior converge monótonicamente a cero. Por lo tanto, la diferencia entre dos ganancias obtenidas secuencialmente es pequeña al cabo de algunas iteraciones. Pero esto no es así en el caso del segundo término: la disminución de este factor sólo es posible usando nuevas particiones del espacio de estado que produzcan bloques cada vez más pequeños (con respecto a la métrica que estamos usando). -- Una vez que se define el proceso aproximado y se obtiene una ganancia f_m^n , estudiamos: i) cuando es necesario o recomendable usar una nueva partición en lugar de la actual, y ii) el diseño de esta nueva partición a partir de la que estamos usando hasta este momento.

El uso de particiones con mayor número de -- bloques aumenta el esfuerzo computacional necesario para obtener una solución numérica, ya que la cardinalidad del espacio de estado del proceso aproximado es el número de bloques de la partición empleada. En este estudio discutimos a fondo estos temas obteniendo conclusiones sobre cuáles son los factores a considerar en el diseño de el procedimiento a seguir.

Además cuando calculamos los límites para -- una ganancia en particular, somos capaces de encontrar el bloque responsable de el máximo error (diferencia) debido al empleo del proceso aproximado en lugar de el original.

Usando el primer algoritmo, el error se disminuye rompiendo el bloque más grande. Si usamos el segundo algoritmo, las funciones de error obtienen su máximo combinado en algún bloque en particular. Rompiendo tal bloque, las nuevas funciones de error tienen máximos que son más pequeños que antes, lo que produce una disminución en el valor de los límites. Finalmente, en el tercer algoritmo combinamos los resultados de -- los otros dos.

I. LOS LIMITES

1. Introducción

El objeto de nuestro estudio es el problema de obtener una solución aproximada a un proceso de decisiones secuenciales (con descuento) resolviendo otro proceso de decisiones secuenciales más sencillo que el original. A este segundo proceso lo denominamos "proceso aproximado".

Desde el punto de vista notacional el proceso de decisiones secuenciales se representa (véase 11, 12) por

$$P \equiv (\Omega, D, h)$$

donde Ω es su espacio de estado, $D(x)$ es un espacio de decisiones (no vacío) para cada x en Ω , y h es su función de ganancias, que transforma el vector (x, y, v) en números reales. La coordenada x del vector (x, y, v) es un elemento de Ω , mientras que y pertenece a $D(x)$ y v es una función continua definida sobre los números reales. Definiendo

$$\Delta \equiv \prod_{x \in \Omega} D(x)$$

(el producto cartesiano de los espacios de decisiones) como el espacio de políticas, sea

$$H_{\delta} v(x) \equiv h(x, \delta(x), v) \quad y$$

$$A v(x) \equiv \sup_{y \in D(x)} h(x, y, v)$$

Formalmente representamos

$$Av = \sup_{\delta \in \Delta} H_{\delta} v$$

entendiendo que el operador supremo es obtenido computando el supremo de los valores para cada estado.

La secuencia de procesos aproximados se denota por

$$P_m \equiv (\Omega_m, D_m, h_m)$$

usandose el subíndice m para describir la asociación de cualquier elemento con el proceso aproximado. Por ejemplo, el operador supremo para el proceso aproximado se representa por medio de A_m . Similarmente, f y f_m representan, respectivamente, las ganancias óptimas asociadas al proceso original y al aproximado.

Nos encontramos ahora en posición de volver a describir nuestras intenciones: nuestro interés está en identificar secuencias de operadores $\{A_m\}$ cuyo uso produzca una manera más eficiente de aproximar la solución al problema original que el empleo del operador A correspondiente al problema original.

El proceso aproximado se obtiene por medio de una partición del espacio de estado de el problema original y redefiniendo sus correspondientes espacios de decisiones, probabilidades de transición y ganancias. En líneas generales, estas nuevas probabilidades de transición y ganancias se definen de manera que sean constantes en cada elemento de la partición que llamaremos bloques. Agregando los estados similares (aquellos que pertenecen al mismo bloque) conducirá a reducir el esfuerzo computacional necesario para resolver el problema aproximado. Y de esta manera obtenemos un nuevo proceso cuyo espacio de estado es siempre finito, menor que el del problema original, y por lo tanto más fácil de resolver que éste.

En este primer capítulo presentamos algunos resultados preliminares sobre el error o diferencia entre la ganancia óptima para el proceso original y una ganancia a considerar (no necesariamente la óptima) como candidato a la solución aproximada del proceso aproximado. Las únicas condiciones que imponemos para la consecución de estos resultados es que el proceso aproximado también sea un proceso de decisiones secuenciales con descuento y que éste conceptualmente definido en el mismo espacio de estado Ω que el proceso original. Sin embargo, nuestra intención es concentrarnos en procesos markovianos de decisión, perfilando estos resultados en el contexto de los procesos aproximados que serán definidos en el capítulo segundo.

2. Terminología y Notación

En esta sección introducimos la notación empleada en este trabajo.

Sea f_m^0 una ganancia terminal arbitrariamente elegida -para el proceso aproximado- y considerese como el valor terminal en la iteración básica del algoritmo de aproximaciones sucesivas.

Definimos

$$f_m^n \equiv A_m f_m^{n-1} \quad \text{para } n \geq 1.$$

Sea V el espacio de funciones acotadas definidas sobre Ω . Para cada u, v perteneciente a V definimos la métrica ρ como :

$$\rho(u, v) \equiv \sup_{x \in \Omega} |u(x) - v(x)|$$

Esta es la métrica que usaremos para comparar las ganancias óptimas del proceso original y las ganancias f_m^n del proceso aproximado. Dado que esta métrica ha sido definida en el espacio Ω , requerimos que el proceso aproximado también lo sea (al menos, conceptualmente).

Se dice que A es isotona si, para cada u, v en V y tal que

$$u \leq v, \quad Au \leq Av$$

Diremos que A satisface la condición de Lipschitz con valor α si existe un número real positivo α tal que para toda u, v en V se cumple

$$\rho(Au, Av) \leq \alpha \rho(u, v)$$

Si A satisface la condición de Lipschitz con valor α y $0 < \alpha < 1$ entonces A es una contracción. Decimos que A es α -descontado si A es isotona, satisface la condición de Lipschitz con valor α y $0 \leq \alpha < 1$. Decimos que A satisface la propiedad de igualdad de la suma en las filas si para cada u en V y cualquier constante c se cumple

$$A(u + c) = Au + \alpha c$$

A no ser que se especifique lo contrario, -- asumiremos de aquí en adelante que A y A_m son α -descontados. Nótese que esto supone que A y A_m son contracciones.

3. Las Cotas de Error

Los resultados obtenidos en el primer lema -- no son accesibles conociendo $\{f_m^n\}$ solamente. Estos resultados expresan la diferencia entre f y f_m^n como función del operador supremo A , mientras que en el cálculo de $\{f_m^n\}$ interviene A_m , el operador supremo correspondiente a el proceso aproximado.

Lema 1.1

$$\rho(f, f_m^n) \leq \rho(Af_m^n, f_m^n) / (1-\alpha) \leq (\alpha \rho(f_m^n, f_m^{n-1}) + \rho(Af_m^n, A_m f_m^n)) / (1-\alpha),$$

Demostración:

$$\rho(f, f_m^n) \leq \rho(f, Af_m^n) + \rho(Af_m^n, f_m^n) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Desigualdad Triangular} \\ \leq \alpha \rho(f, f_m^n) + \rho(Af_m^n, f_m^n) \end{array} \right. \quad \text{dado que } f=Af \text{ y } A \text{ -}$$

satisface la condición de Lipshitz con valor α .

De esta manera, la primera parte del lema es tá demostrada. Además,

$$\rho(Af_m^n, f_m^n) \leq \rho(Af_m^n, A_m f_m^n) + \rho(A_m f_m^n, f_m^n) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Desigualdad Triangular} \\ = \rho(Af_m^n, A_m f_m^n) + \rho(f_m^{n+1}, f_m^n) \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} f_m^{n+1} = A_m f_m^n \\ \leq \rho(Af_m^n, A_m f_m^n) + \alpha \rho(f_m^n, f_m^{n-1}). \end{array} \right.$$

donde la última desigualdad se obtiene debido a que A satisface la condición de Lipschitz con valor α .

Sustituyendo en la primera parte del lema - obtenemos el resultado. //

Analizando este primer resultado, se observa que hay dos términos interviniendo en el error. El primero es calculable mediante el uso del operador A_m . El segundo, que expresa la diferencia entre aplicar el operador A_m en lugar del operador A a las ganancias, será acotado más adelante en el contexto de cada uno de los procesos aproximados que presentamos en el siguiente capítulo. Continuaremos el análisis de estas cotas una vez que presentemos los resultados de los siguientes lemas. Estos son similares a los del lema anterior, si bien se obtienen de una manera diferente.

Para estos resultados asumimos que A satisfice la propiedad de igualdad de la suma en las filas, hasta que se diga expresamente que no es así.

Primero presentamos un resultado intermedio, que tiene una cierta entidad en sí mismo y que necesitaremos para el siguiente lema (6).

Lema 1.2.

Sea v una función definida en Ω . Si

$$a \leq Av - v \leq b$$

entonces

$$\alpha a(1-\alpha^n)/(1-\alpha) \leq A^{n+1} v - Av \leq \alpha b(1-\alpha^n)/$$

$$/(1-\alpha) \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Demostración :

Para $n=0$ el lema es obvio. Asumamos que se cumpla para $n=k-1$ y lo verificamos para $n=k$:

Debido a la hipótesis de la inducción, se cumple

$$\begin{aligned}
A^k v &\geq a(1 - \alpha^{k-1}) / (1-\alpha) + Av \\
&\geq a(1 - \alpha^{k-1}) / (1-\alpha) + (v+a) \\
&= v+a(1 - \alpha^k) / (1-\alpha)
\end{aligned}$$

Por otro lado, debido a que A es isotona

$$\begin{aligned}
A^{k+1} v &\geq A(v+a(1-\alpha^k) / (1-\alpha)) \\
&= Av + \alpha a(1-\alpha^k) / (1-\alpha).
\end{aligned}$$

El otro miembro de la desigualdad se obtiene usando un argumento análogo. //

Usando f_m^n en lugar de v , y pasando al límite obtenemos el resultado buscado.

Lema 1.3.

$$\text{Si } a \leq Af_m^n - f_m^n \leq b$$

entonces

$$a\alpha/(1-\alpha) \leq f - Af_m^n \leq b\alpha/(1-\alpha)$$

Demostración :

Dado que $f = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n v$ para cualquier v , como

$0 \leq \alpha \leq 1$, lema 1.2 implica el resultado. //

Usando este resultado intermedio obtenemos finalmente la acotación del error.

Lema 1.4.

$$\text{Si } a \leq f_m^n - f_m^{n-1} \leq b$$

entonces

$$a\alpha/(1-\alpha) + \inf_{x \in \Omega} (Af_m^{n-1}(x) - A_m f_m^{n-1}(x)) /$$

$$(1-\alpha) \leq f - f_m^n \leq b \alpha/(1-\alpha) + \sup (Af_m^{n-1}(x) - A_m f_m^{n-1}(x)) /$$

$(1-\alpha)$.

Demostración :

$$\text{Sea } \bar{a} \equiv \alpha a + \inf_{x \in \Omega} (A f_m^{n-1}(x) - A_m f_m^{n-1}(x)),$$

$$\text{y } \bar{b} \equiv \alpha b + \sup_{x \in \Omega} (A f_m^{n-1}(x) - A_m f_m^{n-1}(x)).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} A f_m^n - f_m^n &\geq \alpha (f_m^{n-1} + a) - f_m^n && \left| A \text{ es isotona} \right| \\ &= A f_m^{n-1} + \alpha a - f_m^n \\ (1) \quad &\geq \bar{a} \end{aligned}$$

Análogamente,

$$(2) \quad A f_m^n - f_m^n \leq \bar{b}$$

A partir de (1) y (2) obtenemos

$$\bar{a} \leq A f_m^n - f_m^n \leq \bar{b}.$$

Por lo tanto, lema 1.3 implica

$$(3) \quad \bar{a}\alpha/(1-\alpha) \leq f - A f_m^n \leq \bar{b}\alpha/(1-\alpha).$$

y el lema se deduce de

$$f - f_m^n = f - Af_m^n + Af_m^n - f_m^n.$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} f - f_m^n &\leq \vec{b} \alpha / (1-\alpha) + \vec{b} \quad \left| \text{usando (2) y (3)} \right| \\ &= \vec{b} / (1-\alpha). // \end{aligned}$$

Como se observará, los lemas 1.1 y 1.4 son similares. Pero el lema 1.1 presenta una cota sobre el valor absoluto del error, mientras que en el lema 1.4 hemos obtenido una acotación superior e inferior del error. Sin embargo, el segundo resultado ha sido obtenido asumiendo que el modelo satisface la propiedad de igualdad de la suma en las filas. Para el caso markoviano esto es equivalente a asumir que las probabilidades de transición son probabilidades condicionales ordinarias y a la existencia de un único factor de descuento que sea constante. Además, en ambos resultados, existe un factor que depende de la diferencia de los resultados que se obtienen cuando el operador A_m se aplica a la ganancia f_m^k en lugar del original A . De todas maneras, no es nuestra intención el computar la diferencia

$$Af_m^{n-1} - A_m f_m^{n-1}$$

y/o

$$Af_m^n - A_m f_m^n.$$

La razón de esta decisión es la pretensión de aplicar los resultados que obtengamos a procesos donde el uso del operador A es, o bien muy caro (computacionalmente) ó bien imposible. En lugar de ello, obtendremos cotas sobre

$$Af_m^{n-1} - Af_m^{n-1} \quad \text{y} \quad Af_m^n - A_m f_m^n.$$

4. Procesos de Decisiones Markovianos Finitos

Los resultados que hemos obtenido en este capítulo son ahora especializados y mejorados para el caso particular de procesos de decisiones markovianos cuyos espacios de estado y de decisiones son finitos.

En primer lugar necesitamos introducir más notación.

1° $P_{ij}^k \equiv p(j|i,k)$, representa la probabilidad de ir del estado i al estado j en un periodo cuando la decisión escogida es k, perteneciente a D_i .

2° $\{I_s; 1 \leq s \leq S\}$ representa una partición del espacio de estado en subconjuntos, llamados bloques.

3° $\vec{P}_s^\delta \equiv \max_i \sum_{j \in I_s} P_{ij}^{\delta(i)}$ para cada s y cada política admisible δ .

$$4^\circ \vec{P}_s \equiv \max_{\delta} \vec{P}_s^\delta \text{ para cada } s.$$

$$5^\circ \underline{P}_s^\delta \equiv \min_i \sum_{j \in I_s} p_{ij}^\delta(i) \text{ para cada } s \text{ y } \delta.$$

$$6^\circ \underline{P}_s \equiv \min_{\delta} \underline{P}_s^\delta \text{ para cada } s.$$

7° $b(c)$; el valor óptimo que resulta de la resolución del problema lineal,

Encuentrese (x_1, x_2, \dots, x_s) que

$$\text{maximice} \quad \sum_s c_s x_s$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_s x_s = \alpha, \quad \underline{P}_s \leq x_s \leq \vec{P}_s$$

$$\text{donde} \quad c \equiv (c_1, c_2, \dots, c_s)$$

8° $a(c)$; el valor óptimo que resulta de la resolución del problema de minimización analogo al anterior.

El empleo del siguiente lema (21), permite mejorar las cotas de error obtenidas previamente.

Lema 1.5

Dados v y δ satisfaciendo $H_\delta v = Av$,

1° si $\underline{c} \equiv \underline{c}(Av-v) \equiv \{ \min_{i \in I_s} (Av-v)_i ; 1 \leq s \leq S \}$ y

$\vec{c} \equiv \vec{c}(Av-v) \equiv \{ \max_{i \in I_s} (Av-v) ; 1 \leq s \leq S \}$ entonces

$$a(\underline{c})/(1-\alpha) \leq a_\delta(\underline{c})/(1-\alpha) \leq f - Av \leq b(\vec{c})/(1-\alpha), Y$$

2° si $\underline{c} \equiv \underline{c}(H_\delta v-v), \vec{c} \equiv \vec{c}(H_\delta v-v)$, $a_\delta(c)$ y $b_\delta(c)$

son los valores analogos a $a(c)$ y $b(c)$ obtenidos -- considerando el subproducto que resulta cuando δ es la única política admisible, y $v_\delta = H_\delta v_\delta$, entonces

$$a(\underline{c})/(1-\alpha) \leq a_\delta(\underline{c})/(1-\alpha) \leq v_\delta - H_\delta v \leq b_\delta(\vec{c})/(1-\alpha) \leq \\ \leq b(\vec{c})/(1-\alpha).$$

Demostración:

Como el espacio de estado y los espacios de decisiones son finitos, existe una política óptima (6). Es decir, existe una política μ tal que $f = v_\mu = H_\mu v_\mu$.

Ahora bien,

$$f - Av \leq f - H_\mu v \quad \left| H_\mu v \leq Av \right| \\ = v_\mu - H_\mu v \quad \left| f = v_\mu \right|$$

$$\begin{aligned}
&= H_{\mu} v_{\mu} - H_{\mu} v && |v_{\mu} = H_{\mu} v_{\mu}| \\
&= r_{\mu} + P_{\mu} v_{\mu} - (r_{\mu} + P_{\mu} v) && |H_{\mu} v_{\mu} \equiv r_{\mu} + P_{\mu} v_{\mu}| \\
&= P_{\mu} (v_{\mu} - v) \\
&= P_{\mu} ((I - P_{\mu})^{-1} r_{\mu} - v) && |v_{\mu} = (I - P_{\mu})^{-1} r_{\mu}| \\
&= P_{\mu} ((I - P_{\mu})^{-1} r_{\mu} - (I - P_{\mu})^{-1} (I - P_{\mu}) v) \\
&= P_{\mu} (I - P_{\mu})^{-1} (r_{\mu} - (I - P_{\mu}) v) \\
&= P_{\mu} (I - P_{\mu})^{-1} (r_{\mu} + P_{\mu} v - v) \\
&= P_{\mu} (I - P_{\mu})^{-1} (H_{\mu} v - v) && |H_{\mu} v \equiv r_{\mu} + P_{\mu} v| \\
&\leq P_{\mu} (I - P_{\mu})^{-1} (Av - v) && |P_{\mu} (I - P_{\mu})^{-1} \text{ es isotona}|
\end{aligned}$$

$$(*) \quad = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\mu}^n (Av - v) \quad | (I - P)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} P^n |$$

Además, la componente i del vector $P_{\mu} v$ satisface :

$$\begin{aligned}
|P_{\mu} v|_i &= \sum_{j \in \Omega} P_{ij}^{\mu(i)} v_j \\
&= \sum_s \sum_{j \in I_s} P_{ij}^{\mu(i)} v_j && | \text{Partición de } \Omega |
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_s \left(\sum_{j \in I_s} P_{ij}^{(i)} \right) \vec{c}_s \quad \left| \text{Definición de } \vec{c}_s \right|$$

$$\leq \max_s \sum_s x_s c_s$$

= $b(\vec{c})$, donde el máximo está calculado sobre las x_1, x_2, \dots, x_s satisfaciendo las condiciones

$$\sum_s x_s = \alpha, \text{ y } \underline{P}_s^\mu \leq x_s \leq \overline{P}_s^\mu, \text{ y dado que } x_s = \sum_{j \in I_s} P_{ij}^{\mu(i)}$$

las satisface. Y como para el vector $e = (1, 1, \dots, 1)$

las probabilidades de transición satisfacen $P_\mu^n e = \alpha^n$,

entonces

$$P_\mu^n v = P_\mu^{n-1} P_\mu v \leq P_\mu^{n-1} b(\vec{c}) = \alpha^{n-1} b(\vec{c}).$$

Enlazando con el argumento central en (*)

$$\begin{aligned} f - Av &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P_\mu^n (Av - v) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} b(\vec{c}(Av - v)) \\ &= b(\vec{c}(Av - v)) / (1 - \alpha). \end{aligned}$$

Y con esto hemos demostrado una de las desigualdades. La otra desigualdad la argumentamos como sigue.

$$\begin{aligned}
 f - Av &\geq v_\delta - H_\delta v && |Av = H_\delta v \text{ y } f \geq v| \\
 &= P_\delta (I - P_\delta)^{-1} (H_\delta v - v) && | \text{Los mismos argumentos} \\
 & && | \text{que anteriormente} | \\
 &= P_\delta (I - P_\delta)^{-1} (Av - v) \\
 &\geq a_\delta (\underline{c}(Av - v)) \\
 &\geq a(\underline{c}(Av - v)).
 \end{aligned}$$

Con esto queda probada la primera parte del lema. Considerando el subproceso cuya única política admisible es δ , la segunda parte del lema es un corolario de la primera. //

Los próximos lemas proporcionan cotas de error accesibles (computacionalmente) aplicando el operador A . Si el uso de A fuera posible, lema 1.1 y/o lema 1.3 se pueden emplear para estudiar la diferencia $f - f_m^n$. Una vez que esta diferencia es suficientemente pequeña, la aplicación de A a la ganancia f_m^n (y/o f_m^{n-1}) produce una política admisible

$$(Af_m^n = H_\delta f_m^n)$$

La diferencia entre la ganancia total que resultaría de implementar la política δ

$$(v_\delta = H_\delta v_\delta)$$

y la ganancia óptima f se acota en el siguiente resultado.

Lema 1.6.

$$\text{Si } H_{\delta} f_m^n = Af_m^n, \bar{c} \equiv \bar{c}(Af_m^n - f_m^n) \text{ y } \underline{c} \equiv \underline{c}(Af_m^n - f_m^n)$$

entonces

$$|f - v_{\delta}| \leq (b(\bar{c}) - a(\underline{c})) / (1 - \alpha).$$

Demostración :

Para $v = f_m^n$, el lema 1.5, 1° implica

$$(4) \quad a(\underline{c}) / (1 - \alpha) \leq a_{\delta}(\underline{c}) / (1 - \alpha) \leq f - Af_m^n \leq b(c) / (1 - \alpha)$$

y el lema 1.5, 2° implica

$$(5) \quad a(\underline{c}) / (1 - \alpha) \leq a_{\delta}(\underline{c}) / (1 - \alpha) \leq v_{\delta} - Af_m^n \leq b_{\delta}(c) / (1 - \alpha) \leq \\ \leq b(c) / (1 - \alpha)$$

dado que $H_{\delta} f_m^n = Af_m^n$. Y como,

$$b(\bar{c}) \geq b_{\delta}(\bar{c}) \geq a_{\delta}(\underline{c}) \geq a(\underline{c}), \text{ sumando (4) y (5)}$$

obtenemos el resultado.

Nótese que esta cota no requiere el conocimiento de v_{δ} , pero si el de Af_m^n y la correspondiente política admisible δ y así poder determinar los valores de \underline{c} y \bar{c} .

Comentarios:

En este capítulo hemos presentado varios lemas relacionando la ganancia óptima para el problema original con ganancias obtenidas trabajando en el proceso aproximado. El primer lema es aplicable a procesos de decisiones secuenciales con descuento. El resultado en lema 1.4 es aplicable a modelos satisfaciendo la propiedad de igualdad en la suma. Y, si además el modelo es un proceso markoviano con espacios de estado y de decisiones finitos, los resultados en los lemas 1.5 y 1.6 mejoran las cotas anteriores por medio de la resolución de programas lineales y el uso del operador supremo del proceso original que ha de ser empleado, pero sólo una vez.

Las cotas en los lemas 1.1 y 1.4 constan de dos términos. El primero relaciona dos ganancias sucesivas, obtenidas mediante el empleo del operador A_m . El cálculo del segundo término haría necesario el uso del operador A . Evitamos este inconveniente estimando la diferencia $Af_m^n - A_m f_m^n$. Este aspecto será discutido en el tercer capítulo, en el contexto de los procesos aproximados que se introducen en el capítulo siguiente.

II. CONSTRUCCION DE LOS PROCESOS APROXIMADOS

1. Introducción

Esta sección la dedicamos al estudio de -- las construcciones de los procesos aproximados, restringiendo nuestra atención a procesos de decisiones markovianos con descuento $PDM = \{\Omega, D, p, r, \alpha\}$.

Esencialmente, las construcciones que presentamos parten de dos puntos de vista claramente diferenciados. En terminos generales, en la primera -- construcción partimos el espacio de estado en bloques seleccionando un estado (representativo) de cada bloque. Sus correspondientes conjuntos de decisiones admisibles, ganancias y probabilidades de transición -- representaran a las decisiones, ganancias y probabilidades de transición asociadas con todos los esta-- dos de ese bloque.

El segundo punto de vista emplea también -- la idea de representar bloques de estados por uno en particular. Sin embargo, el estado representativo -- se construye a partir de los datos del problema, en lugar de seleccionar uno que ya existe y pertenece -- al bloque. Es decir, construimos el conjunto de decisiones admisibles, las ganancias y las probabilidades de transición asociadas con el estado representativo, empleando los datos del proceso original. Y obtendremos cotas sobre la función de ganancia óptima del proceso original a través del estudio (no necesa

riamente su solución) del proceso aproximado: estas cotas dependerán de la manera en que el estado representativo sea construido.

En el proceso aproximado, los conjuntos de decisiones admisibles debieran considerar todas las decisiones que sean relevantes para el proceso original. Esto plantea un problema para la primera construcción. En el segundo punto de vista, y dado que el estado representativo se construye a partir de los datos, la construcción que proponemos ya tiene en cuenta este y otros factores. En ambos casos, la solución rutinaria de los procesos aproximados produciría, en la mayoría de las situaciones, una política inadmisibles para el proceso original. Por medio de una regla, que asocia decisiones admisibles para el estado representativo con decisiones admisibles para los estados en ese bloque, obtenemos una política que si es admisible para el proceso original. Estos y otros aspectos del problema son elaborados en detalle más adelante, cuando presentamos las construcciones y en la sección dedicada a la discusión de las ventajas (y desventajas) relativas de cada una de las construcciones propuestas. Pero antes precisamos introducir más estructura en el modelo.

El modelo estudiado es un proceso de decisiones markoviano estacionario con descuento

$$PDM = \{\Omega, D, p, r, \alpha\}$$

con las siguientes características:

- 1* Ω es un espacio métrico.
- 2* Los espacios de decisiones $D(x)$ (para cada x en Ω) son subconjuntos de cierto espacio métrico D .

Las métricas definidas en Ω y D se representan por λ y λ' , respectivamente.

Estas hipótesis sobre los espacios de estado y de decisiones se emplean para obtener una medida del error debido a la construcción y resolución del proceso aproximado en lugar del original. Estas condiciones son lo suficientemente generales como para incluir la mayoría de los casos que aparecen en la literatura publicada sobre este tema. Por ejemplo el empleo de la métrica discreta es suficiente para satisfacer las hipótesis en el caso de decisiones sobre cadenas de Markov finitas.

Finalmente, aunque los procesos aproximados son conceptualmente definidos en el mismo espacio de estado que el proceso original, su estructura garantiza que para su resolución es suficiente con considerar tantos estados como bloques hay en la partición.

2. Un Proceso Aproximado

Presentamos un algoritmo que expresa la construcción del proceso aproximado siguiendo el punto de vista descrito en primer lugar.

ALGORITMO I

Escoger m .

- 1° Obtener una partición de Ω en m subconjuntos S_i^m para $i=1, \dots, m$
- 2° Seleccionar un estado representativo s_i^m de cada bloque S_i^m .

3° Definir, para cada $i (=1, 2, \dots, m)$

$$D_m^i \equiv D(s_i^m)$$

y para cada x en S_i^m ,

$$D^m(x) \equiv D_i^m$$

4° Definir, para cada i , e y en D_i^m

$$i) r_i^m(y) \equiv r(s_i^m, y)$$

$$ii) p_i^m(\cdot | y) \equiv p(\cdot | s_i^m, y)$$

y para cada x en S_i^m .

$$r_m(x, y) \equiv r_i^m(y) \quad y,$$

$$p_m(\cdot | x, y) \equiv p_i^m(\cdot | y)$$

5° El proceso aproximado es $PDM_m = \{\Omega, D^m, p_m, r_m, \alpha\}$.

Esta construcción especifica todos los pasos necesarios para la determinación del proceso aproximado en el caso de procesos con espacio de estado finito. Si no es finito asumiremos (capítulo III) algún tipo de continuidad para las ganancias y las probabilidades de transición. En este caso (y cuando -- procesos con espacio de estado finito satisfazan explícitamente estas condiciones de continuidad) requiriremos que la partición descrita en 1° sea seleccionada de una manera consistente con las condiciones -

de continuidad impuestas. Este aspecto será comentado en el tercer capítulo, después de las descripciones de las condiciones de continuidad.

Los estudios teóricos de Fox (7,8) sobre la convergencia asintótica de las soluciones de los procesos aproximados a la solución del proceso original han sido llevados a cabo empleando la construcción propuesta en el algoritmo I. Pero Fox no describe cotas de error sobre la ganancia óptima a partir del estudio de los procesos aproximados. Nosotros obtendremos nuestros resultados imponiendo sobre el modelo condiciones más restrictivas que las empleadas por Fox. Sin embargo, algunos aspectos del problema presentan dificultades cuando la construcción empleada es la que acabamos de describir. Si la elección del estado representativo (de un bloque) se hace arbitrariamente, el conjunto de decisiones admisibles para el proceso aproximado puede no incluir todas las decisiones relevantes. Por otro lado, un análisis detallado de todos los estados en el bloque puede mostrar grandes discrepancias entre sus correspondientes conjuntos de decisiones. En ese caso, ningún estado sería un buen representante del bloque pues su conjunto de decisiones no incluiría todas las decisiones relevantes a todos los estados en el bloque. La causa principal de este inconveniente esta, en este algoritmo, en que el estado representativo ha de ser perteneciente al bloque.

Sugerimos que, cuando la construcción del proceso aproximado siga este algoritmo, la partición sea escogida teniendo en cuenta las similitudes entre los conjuntos de decisiones admisibles. La difi-

cultad está en medir el error introducido al no considerar decisiones admisibles. De todas maneras, aun cuando la estimación de $Af_m^n - A_m f_m^n$ requiera condiciones restrictivas en el modelo, y el error obtenido no sea pequeño, las cotas que hemos desarrollado también se aplican a este algoritmo.

Finalmente, nos beneficiaremos de la agregación de estados similares, simplificando así el computo de la solución.

3. Ejemplo

Ilustraremos las formalizaciones presentadas en el algoritmo anterior por medio del problema de inventarios descrito por Wagner (10, p. 746). Los datos del problema se describen a continuación, donde $\Omega = \{0,1,2,3,4\}$, x es la variable de estado que representa el nivel de inventario antes de ordenar, e y es la variable de decisión, representando la cantidad que se ordena.

Tabla 1

		<u>$p(z x,y)$</u>					<u>$r(x,y)$</u>
<u>x</u>	<u>y</u>	<u>$z=0$</u>	<u>$z=1$</u>	<u>$z=2$</u>	<u>$z=3$</u>	<u>$z=4$</u>	
0	4	.5	0	.5	0	0	22
	5	0	.5	0	.5	0	25
1	3	.5	0	.5	0	0	20
	4	0	.5	0	.5	0	23
	5	0	0	.5	0	.5	26
2	2	.5	0	.5	0	0	18
	3	0	.5	0	.5	0	21

(continuación Tabla 1)

<u>x</u>	<u>y</u>	<u>z=0</u>	<u>z=1</u>	<u>z=2</u>	<u>z=3</u>	<u>z=4</u>	<u>r(x,y)</u>
	4	0	0	.5	0	.5	24
3	1	.5	0	.5	0	0	16
	2	0	.5	0	.5	0	19
	3	0	0	.5	0	.5	22
4	0	.5	0	.5	0	0	1
	1	0	.5	0	.5	0	17
	2	0	0	.5	0	.5	20

Con estos datos, si hacemos $m=2$ (rompemos el espacio de estado en dos bloques), el uso del algoritmo I -- puede producir:

1° Escogemos la partición $S_1^2 = \{0,1\}$, $S_2^2 = \{2,3,4\}$.

2° Seleccionamos como estados representativos $s_1^2=1$, $s_2^2=3$. Por lo tanto, los conjuntos de decisiones son

$$3^\circ \quad D^2(x) = \begin{cases} \{3,4,5\} & \text{para } x=0,1 \\ \{1,2,3\} & \text{para } x=2,3,4. \end{cases}$$

4°,5° El resto de los datos, con $\vec{p}_i^2(j|y) \equiv$

$$\equiv \sum_{x \in S_j^2} p_i^2(x|y)$$

Tabla 2

<u>i</u>	<u>y</u>	<u>$\vec{P}_i^2 (j y)$</u>		<u>$r_i^2(y)$</u>
		<u>j=1</u>	<u>j=2</u>	
1	3	,5	,5	20
	4	,5	,5	23
	5	0	1.0	26
2	1	,5	,5	16
	2	,5	,5	19
	3	0	1.0	22

Los apartados 1° y 2° nos permiten elegir la partición y los estados representativos arbitrariamente. En este caso particular, los bloques han sido escogidos observando las similitudes entre los espacios de decisiones. El estado 1 fue elegido para representar al primer bloque de manera que todas las decisiones admisibles para los estados 0 y 1 fueran consideradas. Esto no es posible para el segundo bloque. Hemos elegido el estado 3 porque su conjunto de decisiones incluye mas decisiones comunes a los estados del segundo bloque que si hubieramos elegido el estado 2 ó el 4.

4. Considerando Todas las Decisiones Admisibles

Seguimos ahora el segundo punto de vista de los descritos anteriormente en la presentación de otra construcción del proceso aproximado a partir del proceso original. Empezamos, de nuevo, obteniendo una partición del espacio de estado, cada uno de cu-

yos bloques será representado por un estado en el proceso aproximado. Pero, en lugar de seleccionar uno de los estados que pertenecen al bloque, construimos los estados representativos usando la información contenida en el bloque. Es decir, las ganancias y probabilidades de transición que representan a un bloque, no pertenece necesariamente a un estado de ese bloque en el problema original. Como espacio de decisiones para un bloque, usamos la unión de los conjuntos de decisiones del proceso original calculada sobre los estados que pertenecen a ese bloque. De esta manera, todas las decisiones admisibles para el proceso original son consideradas. Volveremos a estos puntos de la discusión después de especificar los diferentes aspectos de esta construcción.

Presentamos ahora la construcción del proceso aproximado y discutiremos después los diferentes apartados, su motivación, aspectos computacionales, etc., La construcción formal es la siguiente.

ALGORITMO II

Escoger m .

1° Obtener una partición de Ω en m subconjuntos S_i^m para $i=1, \dots, m$.

2° Definir $D_i^m \equiv \bigcup_{x \in S_i^m} D(x)$ para cada $i (=1, 2, \dots, m)$.

Y, para cada x en S_i^m ,

$$D^m(x) \equiv D_i^m$$

3° Extender la definición de r y p a aquellas decisiones en $D^m(x)$ para las que no están definidos.

Por cada $i (=1, 2, \dots, m)$ definir una transformación

$$\sigma_i^m : \Omega \times D_i^m \rightarrow D(\cdot) \quad \text{tal que}$$

$$i) \sigma_i^m(x, y) \equiv y \quad \text{si } x \in D(x)$$

$$ii) \sigma_i^m(x, y) \in D(x) \quad \text{si } x \notin D(x)$$

Y entonces, para cada x en S_i^m , definimos

$$r(x, y) \equiv r(x, \sigma_i^m(x, y))$$

$$p(\cdot | x, y) \equiv p(\cdot | x, \sigma_i^m(x, y))$$

4° Encontrar, para cada y en $D^m(x)$ una función de ganancias $r_i^m(y)$ constante en cada bloque y tal que

$$(1) \quad \text{Minimice} \sup_{\substack{x \in S_i^m \\ y \in D^m(x)}} |r(x, y) - r_i^m(y)|$$

5° Sea $\vec{p}(j | x, y) = \sum_{z \in S_j^m} p(z | x, y)$ para cada x en Ω , y

en $D^m(x)$. Encontrar, para cada y en $D^m(x)$ una probabilidad condicional ordinaria $p_i^m(\cdot | y)$ tal que

$$\text{Minimice} \sup_{\substack{x \in S_i^m \\ y \in D^m(x)}} |\vec{p}(j | x, y) - p_i^m(j | y)|$$

(2) Sujeto a $p_i^m(j|y) \geq 0$ para $j=1,2,\dots,m$,

$$\sum_{j=1}^m p_i^m(j|y) = 1 \quad \text{para } y \text{ en } D_i^m$$

6° Sea, para cada x en S_i^m ,

$$r_m(x,y) \equiv r_i^m(y) \quad y,$$

$p_m'(\cdot|x,y)$ una función no negativa definida

de Ω a R y tal que $\sum_{z \in S_j^m} p_m'(z|x,y) =$

$$= p_i^m(j|y) \text{ para } x \text{ en } S_i^m, y \text{ en } D_i^m.$$

Entonces, $PDM_m = \{\Omega, D^m, p_m', r_m, \alpha\}$.

En el apartado 1° se obtiene la partición del espacio de estado en bloques, y en el 2° se definen las decisiones admisibles para cada bloque. Los problemas de optimización en 3° y 4° determinan las ganancias y probabilidades de transición para el proceso aproximado. Su motivación se discutirá más adelante, pero antes hemos de comentar la significación de las transformaciones $\sigma_i^m (i=1,2,\dots,m)$ introducidas en el tercer apartado. Debido a la manera en que se han definido las decisiones para el proceso aproximado, puede suceder que algunas decisiones (sea y en $D^m(x)$) sean inadmisibles para el proceso original -- (y $D(x)$). En ese caso, algunas ganancias y probabilidades de transición (por ejemplo $r(x,y)$ y $p(\cdot|x,y)$) no estarían definidas. Podríamos habernos decidido por considerar aquellas ganancias y probabilidades --

de transición que corresponden a decisiones admisibles en la determinación de $r_i^m(y)$ y $p_i^m(\cdot|y)$ (empleando apartados similares a 4° y 5°). En lugar de eso, hemos preferido extender la definición de las ganancias y probabilidades de transición a todas las decisiones en D^m . Esto se hace duplicando los datos correspondientes a las decisiones asociadas por medio de σ_i^m (es decir $r(x,y) \equiv r(x, \sigma_i^m(x,y))$ y $p(\cdot|x,y) \equiv p(\cdot|x, \sigma_i^m(x,y))$). De esta manera podemos medir la diferencia entre la ganancia optima y la ganancia obtenida como consecuencia de implementar una política en particular (obtenida a partir del estudio del problema aproximado). En líneas generales, las transformaciones σ_i^m asocian a cada decisión en D^m o bien ella misma, si ya es admisible, o una decisión admisible seleccionada arbitrariamente. Las cotas de error dependerán de la manera en que la asociación ha sido definida. En el capítulo III continuaremos la discusión sobre las transformaciones σ_i^m en el contexto de las hipótesis allí descritas.

Cuando se compara Af_m^n con $A_m f_m^n$, términos con la forma

$$\sup_{\substack{x \in S_i^m \\ y \in D^m(x)}} |r(x,y) - r_i^m(y)| \quad y$$

$$\sup_{\substack{x \in S_i^m \\ y \in D^m(x)}} |\vec{p}(\cdot|x,y) - p_i^m(\cdot|y)| \quad \text{aparecerán.}$$

La minimización de estas expresiones tiene como consecuencia la disminución de las cotas de error entre

las soluciones a los procesos aproximados y la solución óptima. Esta es la motivación de los apartados 4° y 5° del algoritmo II,

Nótese que estos problemas de optimización requieren que el supremo sobre todas las decisiones sea minimizado; si los espacios de decisiones para el proceso aproximado son finitos, es suficiente minimizar

$$\sup_{x \in S_i^m} |r(x, y) - r_i^m(y)| \quad y$$

$$\sup_{x \in S_i^m} |\vec{p}(\cdot | x, y) - p_i^m(\cdot | y)|$$

(con sus correspondientes restricciones, si las hay) para cada decisión y en D_i^m ($i=1, \dots, m$); aun en el caso en que los D_i^m no sean siempre finitos, si es posible identificar un subconjunto finito de decisiones, donde se obtiene el supremo, este punto de vista nos permitiría resolver los problemas (1) y (2). Sin detallar los argumentos (que aparecen en el apéndice B) presentamos nuestros principales resultados con relación a (1) y (2).

Proposición 2.1. Si D_i^m son conjuntos finitos para $i=1, \dots, n$,

$$r_i^m(y) \equiv 1/2 \left| \sup_{x \in S_i^m} r(x, y) + \inf_{x \in S_i^m} r(x, y) \right|$$

para cada y en D_i^m , $i=1, \dots, m$, es una solución para el problema de optimización (1).

Proposición 2.2. Si Ω y D_i^m son conjuntos finitos para $i=1, \dots, m$, y, para cada y en D , $j=1, \dots, m$,

$$1^\circ \quad \vec{p}_i^m(j|y) \equiv 1/2 \left| \sup_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y) + \inf_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y) \right|$$

$$2^\circ \quad d_i^m(j,y) \equiv \sup_{x \in S_i^m} |\vec{p}_i^m(j|y) - \vec{p}(j|x,y)|$$

$$3^\circ \quad d_i^m(y) \equiv \max_j d_i^m(j,y)$$

entonces tenemos,

$$4^\circ \quad d_i^m(j,y) = 1/2 \left| \sup_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y) - \inf_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y) \right|$$

5° existe, para cada y en D_i^m e $i=1, \dots, m$, una probabilidad condicional ordinaria $p_i^m(\cdot|y)$ definido en $\{S_j^m; j=1, \dots, m\}$ tal que

$$i) \quad p_i^m(\cdot|y) - \inf_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y) \leq d_i^m(y)$$

$$ii) \quad \sup_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y) - p_i^m(\cdot|y) \leq d_i^m(y)$$

donde $p_i^m(\cdot|y)$ es una solución al problema de optimización (2).

Emplearemos los resultados recién expuestos para el cálculo de las ganancias y probabilidades de transición representativos en la sección siguiente.

5. Ejemplo

Empleamos el ejemplo de la sección 3 para ilustrar la implementación del algoritmo II.

Escogiendo la misma partición del espacio de estado que en el ejemplo anterior obtenemos los siguientes resultados.

$$1^\circ \quad S_1^2 = \{0,1\} \quad , \quad S_2^2 = \{2,3,4\}$$

$$2^\circ \quad D^2(x) = \begin{cases} \{3,4,5\} & \text{para } x = 0,1 \\ \{0,1,2,3,4\} & \text{para } x = 2,3,4. \end{cases}$$

3° La tabla siguiente describe las transformaciones σ_i^m seleccionadas arbitrariamente en esta ilustración para aquellas decisiones $y \notin D^m(x) \cap D(x)$ - (σ_i^m son la transformación idéntica para aquellas decisiones que ya son admisibles; es decir, para y en $D^m(x) \cap D(x)$).

Tabla 3

<u>x</u>	<u>$y \notin D^m(x) \cap D(x)$</u>	<u>$\sigma_i^m(x,y)$</u>
0	3	4
1	\emptyset	
2	0	2
	1	2
3	0	1
	4	3
4	3	2
	4	2

Duplicando los datos que corresponden a las decisiones asociadas por medio de σ_i^m obtenemos la tabla 4.

Tabla 4

		$p(z x, \sigma_i^m(x, y))$					$r(x, \sigma_i^m(x, y))$
x	y	$z=0$	$z=1$	$z=2$	$z=3$	$z=4$	
0	3	0,5	0	0,5	0	0	22
	4	0,5	0	0,5	0	0	22
	5	0	0,5	0	0,5	0	25
1	3	0,5	0	0,5	0	0	20
	4	0	0,5	0	0,5	0	23
	5	0	0	0,5	0	0,5	26
2	0	0,5	0	0,5	0	0	18
	1	0,5	0	0,5	0	0	18
	2	0,5	0	0,5	0	0	18
	3	0	0,5	0	0,5	0	21
	4	0	0	0,5	0	0,5	24
3	0	0,5	0	0,5	0	0	16
	1	0,5	0	0,5	0	0	16
	2	0	0,5	0	0,5	0	19
	3	0	0	0,5	0	0,5	22
	4	0	0	0,5	0	0,5	22
4	0	0,5	0	0,5	0	0	1
	1	0	0,5	0	0,5	0	17
	2	0	0	0,5	0	0,5	20
	3	0	0	0,5	0	0,5	20
	4	0	0	0,5	0	0,5	20

Haciendo $r_i^m(y) = 1/2 \left| \sup_{x \in S} r(x, \sigma_i^m(x, y)) + \right.$
 $\left. + \inf_{x \in S} r(x, \sigma_i^m(x, y)) \right|$ y usando el procedimiento des-

crito por la proposición 2.2 para la obtención de $p_i^m(\cdot|y)$, los datos para las ganancias y probabilidades de transición son :

Tabla 5

		<u>$p_i^2(j y)$</u>		
<u>i</u>	<u>y</u>	<u>j=1</u>	<u>j=2</u>	<u>$r_i^2(y)$</u>
1	3	0,5	0,5	21
	4	0,5	0,5	22,5
	5	0,25	0,75	25,5
2	0	0,5	0,5	9,5
	1	0,5	0,5	17
	2	0,25	0,75	19
	3	0,25	0,75	21
	4	0	1,0	22

Por ejemplo, para $i=2$, $y=0$, la proposición 2.1 da lugar a,

$$\begin{aligned} r_2^2(0) &= 1/2 \left| \max(18, 16, 1) + \min(18, 16, 1) \right| \\ &= 1/2 (18 + 1) = 9,5. \end{aligned}$$

De la misma manera se calculan las demás ganancias representativas. El procedimiento descrito en la proposición 2.2, cuando se aplica para calcular $p_2^2(\cdot|2)$ da lugar a,

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad p_2^2(1|2) &= 1/2 \left| \max(0,5, 0,5, 0) + \min(0,5, 0,5, 0) \right| \\ &= 0,25. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_2^2(2|2) &= 1/2 |\max(0,5, 0,5, 0) + \min(0,5, 0,5, 1,0)| \\ &= 0,75, \end{aligned}$$

$$2^\circ \quad d_2^2(1,2) = 0,25 \qquad d_2^2(2,2) = 0,25.$$

3° En general $\vec{p}_2^2(.|.)$ no será una probabilidad ordinaria (no sumara 1); perturbando sus valores sin incrementar $d_2^2(.,.)$ (la proposición 2.2 afirma que es to siempre es posible) obtenemos $p_2^2(.|.)$. En este ejemplo acaece que $\vec{p}_2^2(.|.)$ es una probabilidad ordinaria. Por lo tanto $p_2^2(1|2) = 0,25$ y $p_2^2(2|2) = 0,75$. De la misma manera con el resto de los datos en la tabla 5.

Como hemos visto en este ejemplo, este algoritmo considera todas las decisiones admisibles para cada estado (lo que el algoritmo I no hacia). Por tanto, todas las decisiones que son relevantes se toman en consideración en el proceso aproximado. En este aspecto, el algoritmo II aventaja al algoritmo I. El coste de esta ventaja es la desventaja del esfuerzo extra necesario para calcular r_i^m y p_i^m , y la consideración de más decisiones en la optimización (para cada punto) prescrita por el operador A_m . Si el número de decisiones admisibles es elevado y varia entre los estados, el esfuerzo computacional requerido para resolver el proceso aproximado puede convertirse en prohibitivo, pudiendo ser mayor que la resolución del proceso original. La siguiente sección propone otra alternativa, que puede ser fructífera en este tipo de situaciones.

6. Un Número Limitado de Decisiones

Presentamos ahora una tercera construcción que esencialmente repite la segunda, pero considerando, para cada bloque, solo aquellas decisiones que son admisibles para todos los estados en el bloque. De esta manera, el número de decisiones consideradas en el proceso aproximado decrece y el esfuerzo computacional necesario para resolverlo disminuye. Además algunas de las complejidades presentes en el algoritmo anterior, como la extensión de la definición de las ganancias y probabilidades de transición a nuevas decisiones desaparecen. Sin embargo, y debido a que no se consideran todas las decisiones relevantes en el proceso aproximado, este punto de vista tiene inconvenientes. Requerimos, para obtener las cotas del error, el mismo tipo de hipótesis de continuidad que en el algoritmo I. Por lo tanto, los resultados que obtenemos cuando se emplea esta construcción son aplicables a un número más restringido de modelos -- que cuando se emplea la construcción anterior. Y, en aquellos modelos a los que se les puede aplicar ambas construcciones, los resultados que obtenemos con el algoritmo II son superiores a los que se obtienen con el algoritmo III.

Formalmente, la construcción es la siguiente.

ALGORITMO III

Escoger m .

1° Obtener una partición de Ω en m subconjuntos S_i^m para $i=1,2,\dots,m$.

2° Definir $D_i^m \equiv \bigcap_{x \in S} D(x)$ para cada $i (=1, 2, \dots, m)$.

Y, para cada x en S_i^m ,

$$D^m(x) \equiv D_i^m$$

3° Encontrar, para cada y en $D^m(x)$ una función de ganancias $r_i^m(y)$ constante en cada bloque y tal que

$$(3) \quad \text{Minimice} \quad \sup_{\substack{x \in S_i^m \\ y \in D^m(x)}} |r(x, y) - r_i^m(y)|$$

4° Sea $\vec{p}(j|x, y) = \sum_{z \in S_j^m} p(z|x, y)$ para cada x en Ω , y

en $D^m(x)$. Encontrar, para cada y en $D^m(x)$ una probabilidad condicional ordinaria $p_i^m(\cdot|y)$ tal que

$$\text{Minimice} \quad \sup_{\substack{x \in S_i^m \\ y \in D^m(x)}} |\vec{p}(j|x, y) - p_i^m(j|y)|$$

Sujeto a $p_i^m(j|y) \geq 0$ para $j=1, \dots, m$

$$(4) \quad \sum_{j=1}^m p_i^m(j|y) = 1 \quad \text{para } y \text{ en } D_i^m$$

5° Sea, para cada x en S_i^m ,

$$r_m(x, y) \equiv r_i^m(y) \quad y,$$

$p_m'(\cdot|x, y)$ una función no negativa definida

$$\begin{aligned} & \text{de } \Omega \text{ a } R \text{ y tal que } \sum_{z \in S_j^m} p'_m(z|x,y) = \\ & = p_i^m(j|y) \text{ para } x \text{ en } S_i^m, \text{ y en } D_i^m. \end{aligned}$$

Entonces, $PDM_m = \{\Omega, D^m, p'_m, r_m, \alpha\}$.

7. Ejemplo

La construcción propuesta en el algoritmo - III aplicada al ejemplo visto en las secciones 3 y 5 da lugar a un nuevo proceso aproximado.

Seleccionando la misma partición que anteriormente :

$$1^\circ \quad S_1^2 = \{0,1\} \quad , \quad S_2^2 = \{2,3,4\}$$

$$2^\circ \quad D^2(x) = \begin{cases} \{4,5\} & \text{para } x = 0,1 \\ \{2\} & \text{para } x = 2,3,4. \end{cases}$$

3°, 4° Los datos del proceso original que se consideran en el computo de las ganancias y probabilidades de transición representativos son

Tabla 6

		<u>p(z x,y)</u>					
<u>x</u>	<u>y</u>	<u>z=0</u>	<u>z=1</u>	<u>z=2</u>	<u>z=3</u>	<u>z=4</u>	<u>r(x,y)</u>
0	4	0,5	0	0,5	0	0	22
	5	0	0,5	0	0,5	0	25
1	4	0	0,5	0	0,5	0	23
	5	0	0	0,5	0	0,5	26
2	2	0,5	0	0,5	0	0	18
3	2	0	0,5	0	0,5	0	19
4	2	0	0	0,5	0	0,5	20

Y, cuando se aplican los resultados en las proposiciones 2.1 y 2.2 a estos datos, obtenemos

Tabla 7

		<u>p_i²(j y)</u>			
<u>i</u>	<u>y</u>	<u>j=1</u>	<u>j=2</u>	<u>r_i²(y)</u>	
1	4	0,5	0,5	22,5	
	5	0	1,0	25,5	
2	2	0,25	0,75	19,0	

Por ejemplo, para $i=2$ e $y=2$, las proposiciones proporcionan, para

$$\begin{aligned}
 r_2^2(2) &= 1/2 \left| \max(18,19,20) + \min(18,19,20) \right| \\
 &= 19,0
 \end{aligned}$$

Y para el cálculo de $p_2^2(1|2)$ y $p_2^2(2|2)$ da lugar a

1°

$$\vec{p}(1|x,2) = \begin{cases} 0,5 & \text{para } x = 2 \\ 0,5 & \text{para } x = 3 \\ 0 & \text{para } x = 4 \end{cases}$$

$$\vec{p}(2|x,2) = \begin{cases} 0,5 & \text{para } x = 2 \\ 0,5 & \text{para } x = 3 \\ 1,0 & \text{para } x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad \vec{p}_2^2(1|2) &= 1/2 \left| \max(0,5,0,5,0) + \min(0,5,0,5,0) \right| \\ &= 0,25. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_2^2(2|2) &= 1/2 \left| \max(0,5,0,5,1,0) + \min(0,5,0,5,1,0) \right| \\ &= 0,75. \end{aligned}$$

3° En este caso, dado que $\vec{p}_2^2(1|2) + \vec{p}_2^2(2|2) = 1$, --
tenemos $p_1^2(1|2) = 0,25$, $p_2^2(2|2) = 0,75$.

De la misma manera con el resto de la tabla.

Nótese que, comparando el proceso aproximado obtenido aquí con el original (sección 3), la decisión 3, admisible para el estado 1 no aparece en el primer bloque. En el segundo, solamente se considera la decisión 2, lo cual olvida las decisiones 0, 1, 3 y 4, que sin embargo son admisibles para estados de ese bloque.

Aun cuando en el ejemplo que estamos usando, el proceso aproximado obtenido al emplear la tercera construcción es un subproceso del obtenido empleando el algoritmo II, esto no es siempre así. La razón de ello es que al resolver los problemas de optimización (1) y (2) se consideran las ganancias y probabilidades de transición que corresponden a las decisiones asociadas por las transformaciones σ_i^m , mientras que en el algoritmo III esto no es así (se podría decir que las asociaciones definidas por σ_i^m son la transformación identidad),

8. Algoritmos Mixtos

Los algoritmos II y III se basan en la idea de representar subconjuntos por puntos, construyendo el estado representativo en lugar de seleccionarlo entre los existentes. La intención es, en ambos casos, hacer que el error debido a la representación sea lo más pequeño posible. Pero se diferencian en el número de decisiones que consideran. Las construcciones propuestas suponen las dos alternativas extremas: el algoritmo II considera todas las decisiones del proceso original, mientras que el algoritmo III solo estudia aquellas que son admisibles para todos los estados en el mismo bloque. Ambas coinciden si y solo si todos los estados del mismo bloque tienen el mismo conjunto de decisiones admisibles.

La extensión natural de estos dos algoritmos es el estudiar los casos intermedios entre considerar todas las decisiones y solamente las comunes a todos los estados en el mismo bloque. De esta manera obtendríamos (lo que llamamos) algoritmos mixtos, que representarían compromisos entre el esfuerzo computacional requerido para resolverlos y el número de decisiones (y con ello la cota de error) consideradas. Sin embargo, creemos que es suficiente con describir las alternativas extremas, pues la extensión de los resultados que presentamos a estos algoritmos mixtos es inmediata,

9. Discusión

En este capítulo hemos presentado tres construcciones del proceso aproximado a partir del original; todos ellos basados en la partición del espacio de estado en bloques. El primer algoritmo es el empleado en los estudios teóricos previamente publicados sobre la convergencia asintótica de las soluciones de una secuencia de procesos aproximados -con particiones cada vez más refinadas- a la solución del problema original (Fox (7,8)). Si la motivación de este método es estimar el valor óptimo de el problema original y obtener una política admisible para implementarla, esta construcción no es satisfactoria. La mayor desventaja es que algunas decisiones (que pueden ser relevantes) no son tenidas en consideración al definir el proceso aproximado. Nosotros opinamos que, en este aspecto, el algoritmo II es una alternativa que mejora los resultados obtenibles con el algoritmo I.

Aun en aquellos procesos en que los espacios de de ci sio ne s son independientes del estado, el algoritmo II minimiza el error debido a la representación de conjuntos por puntos, lo que no se puede decir del algoritmo I. Pero la consideración de todas -- las decisiones puede convertir a este segundo mé to do en prohibitivo (computacionalmente). La otra al ter na t i va (extrema) que se nos presenta es incluir solo aquellas decisiones que son comunes a todos -- los estados del bloque. Esto es precisamente el al go ri tm o III. Pero mientras que este punto de vista limita el esfuerzo computacional, tiene la misma -- desventaja que el algoritmo I ; no son estudiadas decisiones que pueden ser relevantes. En algunos -- casos puede ser apropiado el emplear construccio-- nes que consideren un número de decisiones interme-- dio. Esto dependerá de las características de los espacios de decisiones del proceso objeto de estudio.

Sugerimos que la determinación del número de bloques en que el espacio de estado se particio-- na, las características de estos bloques, y la se-- lección del algoritmo a emplear para la obtención del proceso aproximado debe decidirse considerando los siguientes puntos :

- 1° La estructura relativa de los espa-- cios de decisiones del problema.
- 2° La cardinalidad del espacio de estado.
- 3° El error introducido (el orden de su magnitud) como consecuencia de la construcción y/o

selección de las ganancias y probabilidades de transición representativas como funciones constantes en cada bloque.

En general, tanto mejor cuanto más parecidos sean los espacios de decisiones correspondientes a los estados del mismo bloque.

Otro aspecto importante es la disparidad entre las probabilidades de transición condicionadas en estados y/o decisiones diferentes. La teoría de aproximaciones se ha preocupado de la representación de distribuciones probabilísticas por sus distribuciones marginales, disminuyendo así la dimensionalidad de las variables envueltas en el problema (por ejemplo (13, 14, 15, 16, 17)). Pero sobre el tema de representar una familia de distribuciones por una en particular, nosotros hemos preferido escoger una medida del error de la representación compatible con nuestras necesidades y que su cálculo requiera poco esfuerzo computacional. La medida escogida es la máxima diferencia calculada sobre los estados y decisiones en cada bloque. Siendo consecuentes, minimizamos esta diferencia. Lo que hacemos en los algoritmos II y III (apartados 5° y 4°, respectivamente).

Finalmente, la solución rutinaria de los procesos aproximados podría producir políticas inadmisibles. Las transformaciones σ_i^m definen una asociación de políticas garantizando que esto no suceda en el algoritmo II. En el algoritmo III no es necesario pues las políticas consideradas son siempre admisibles.

III. CALCULO DE LOS LIMITES

1. Introducción

En este capítulo estudiamos el factor Af_m^n - $A_m f_m^n$, que aparece en los límites que hemos obtenido en el capítulo I, en el contexto del proceso de decisiones markoviano estacionario con descuento -- $PDM = \{\Omega, D, p, r, \alpha\}$ discutido en el capítulo II. Asumiremos que el modelo que estudiamos satisface varias condiciones: requerimos que las ganancias y probabilidades de transición sean continuas en el sentido de Lipschitz, que los conjuntos de decisiones sean continuos en el sentido de Hausdorff y que el espacio de estado sea acotado. Por lo tanto, la mayoría de los procesos con espacio de estado finito y algunos modelos con espacio de estado denumerable están incluidos en la discusión.

2. Modelos e Hipotesis

El modelo que se estudia es un proceso de decisiones de Markov $PDM = \{\Omega, D, p, r, \alpha\}$ donde

Ω : Espacio de estado no vacío.

$D(x)$: Espacio de decisiones no vacío para cada x en Ω .

$p(\cdot | x, y)$: Probabilidad condicional ordinaria definida en Ω , para cada x en Ω , y en $D(x)$.

$r(x, y)$: Ganancia correspondiente al estado x en Ω , y en $D(x)$.

α : Factor de descuento, entre cero y uno.

$h(x, y, v)$: Operador de ganancias en una transición, definido como

$$r(x, y) + \alpha \sum_{z \in \Omega} p(z | x, y) v(z)$$

donde $v(\cdot)$ es una función definida de Ω a \mathbb{R} .

Durante toda la discusión asumiremos,

- 1* Ω es un espacio métrico.
- 2* Todos los espacios de decisiones $D(x)$ - (para cada x en Ω) son subespacios de un espacio métrico D .

Representaremos las métricas de Ω y D por λ y λ' , respectivamente.

Estas condiciones son lo suficientemente generales para incluir la mayoría de los procesos de Markov que aparecen en la literatura: i) los procesos con espacios de estado y de decisiones finitos - las satisfacen trivialmente; ii) cuando los espacios de estado y/o decisiones no son finitos se suele im-

poner condiciones más restrictivas que las descritas (18, 19, 20).

También asumiremos que,

3* Ω es un espacio denumerable acotado.

4* Existe un escalar γ tal que

$$D(x) \subset D(x') + \{d; \lambda'(0,d) \leq \gamma \lambda(x,x')\}$$

para todo x, x' en Ω . Es decir, los espacios de decisiones son continuos en el sentido de Hausdorff.

5* Existe un escalar β_1 tal que,

$$|r(x,y) - r(x',y)| \leq \beta_1 \lambda(x,x')$$

para todo x, x' en Ω .

5** Existe un escalar γ_1 tal que,

$$|r(x,y) - r(x,y')| \leq \gamma_1 \lambda'(y,y')$$

para todo y, y' en $D(x)$, x en Ω .

6* Existe un escalar β_2 tal que,

$$|p(\cdot | x, y) - p(\cdot | x', y)| \leq \beta_2 \lambda(x, x')$$

para todo x, x' en Ω .

6** Existe un escalar γ_2 tal que,

$$|p(\cdot | x, y) - p(\cdot | x, y')| \leq \gamma_2 \lambda'(y, y')$$

para todo y, y' en $D(x)$, x en Ω .

7* $r(x, y)$ es uniformemente acotada para todo x en Ω , y en $D(x)$.

Fox (7,8) ha mostrado que las soluciones a una secuencia de procesos aproximados (obtenidos empleando una construcción equivalente al algoritmo I) convergen a la solución del problema original. Las condiciones que el asume son esencialmente las mismas que nosotros empleamos. Sin embargo, para estimar el error que representa el uso de la solución a un proceso aproximado en particular, empleamos formas de continuidad algo más restrictivas. Con esta finalidad, las condiciones de continuidad en el sentido de Lipschitz son suficientes.

En los algoritmos I y III, y dado que sus construcciones suponen la exclusión, a priori, de decisiones, las constantes, γ , β_1 , γ_1 , β_2 y γ_2 aparecerán en los límites que obtendremos. En el segundo algoritmo, aun cuando las usamos para obtener los límites, las constantes no aparecen de forma explícita en los resultados. Si son conocidos sus valores se pueden emplear para obtener una cota a priori sobre el error. De cualquier manera, cuanto más pequeñas sea las constantes, menor será el error: ellas representan una medida de la regularidad del proceso. Por lo tanto, cuando varias formulaciones del problema -

son posibles, la elección debe hacerse de manera que las constantes sean lo más pequeñas posible.

Las hipótesis 1* - 7* incluyen aquellos procesos con espacios de estados y de decisiones finitos. En el ejemplo visto anteriormente $(\gamma, \beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2) = (1, 1, 17, 1/2, 1/2)$.

Por otro lado, la mayoría de los procesos con espacio denumerable son excluidos. Es costumbre identificar $\Omega = \mathbb{N}$ (los numeros naturales) siempre -- que el espacio de estado es denumerable. Para hacerlo acotado podríamos aplicarle la transformación biyectiva $n \rightarrow 1/n$. En ese caso Ω se convierte en un -- subespacio del intervalo unitario. Es decir, $\Omega \subset (0, 1]$, que es acotado con respecto a la métrica -- discreta. Pero en este caso, las hipótesis 3* - 7* -- son muy restrictivas. Por lo tanto, solo aquellos -- procesos con espacio de estado denumerable tales que transformaciones de este tipo preservan las condicio-- nes 1* - 7* están incluidos entre los modelos a los que nuestros resultados se aplican.

Presentamos ahora las cotas sobre $Af_m^n - A_m f_m^n$ para cada uno de los procesos aproximados obtenidos usando los algoritmos I, II y III.

3. Algoritmo I

Para el proceso aproximado construido por -- el algoritmo I obtenemos las siguientes cotas.

Proposición 3.1. Si el algoritmo I se emplea en la definición de $PDM_m = \{\Omega, D^m, p_m, r_m, \alpha\}$ y las condiciones 1* - 7* son satisfechas, entonces

$$\rho(Af_m^n, A_m f_m^n) \leq \{(\beta_1 + 2\gamma\gamma_1) + (\beta_2 + 2\gamma\gamma_2) \sum_{z \in \Omega} |f_m^n(z)|\}$$

$$\max_i \sup_{x \in S_i^m} \lambda(x, s_i^m)$$

Demostración: Para cada x en Ω , en S_i^m para algún $i(1, \dots, m)$

$$|Af_m^n(x) - A_m f_m^n(x)| = \quad | \text{si } x \in S_i^m |$$

$$| \sup_{y \in D(x)} \{r(x, y) + \alpha \sum_{z \in \Omega} p(z|x, y) f_m^n(z)\} -$$

$$- \sup_{y \in D^m(x)} \{r_i^m(y) + \alpha \sum_{z \in \Omega} p_i^m(z|y) f_m^n(z)\} | =$$

|por definición de A y A_m |

$$| \sup_{y \in D(x)} \{r(x, y) + \alpha \sum_{z \in \Omega} p(z|x, y) f_m^n(z)\} -$$

$$- \sup_{y \in D(s_i^m)} \{r(s_i^m, y) + \alpha \sum_{z \in \Omega} p(z|s_i^m, y) f_m^n(z)\} | \leq$$

$$|D^m(x) = D(s_i^m) \quad , \quad r_i^m(y) = r(s_i^m, y) \text{ y } p_i^m(\cdot, |y) =$$

$$= p(\cdot, |s_i^m, y)|$$

$$\begin{aligned}
& \leq \left| \sup_{y \in D(x)} \{r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)\} - \right. \\
& \quad \left. \sup_{y \in D(x) \setminus D(s_i^m)} \{r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)\} \right| + \\
& \left| \sup_{y \in D(x) \cap D(s_i^m)} \{r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)\} - \right. \\
& \quad \left. - \sup_{y \in D(x) \cap D(s_i^m)} \{r(s_i^m, y) + \alpha \sum p(z|s_i^m, y) f_m^n(z)\} \right| + \\
& \left| \sup_{y \in D(x) \cap D(s_i^m)} \{r(s_i^m, y) + \alpha \sum p(z|s_i^m, y) f_m^n(z)\} - \right. \\
& \quad \left. - \sup_{y \in D(s_i^m)} \{r(s_i^m, y) + \alpha \sum p(z|s_i^m, y) f_m^n(z)\} \right|
\end{aligned}$$

|pues la suma no es mayor que la suma de valores absolutos|

Estudiamos ahora los términos que intervienen en la suma.

Primer término :

$$\begin{aligned}
& \left| \sup_{y \in D(x)} \{r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)\} - \right. \\
& \quad \left. - \sup_{y \in D(x) \cap D(s_i^m)} \{r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)\} \right| =
\end{aligned}$$

$$\sup_{y \in D(x)} \{r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)\} -$$

$$\sup_{y \in D(x) \cap D(S_i^m)} \{r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)\} \leq$$

$$|D(x) \supset D(x) \cap D(s_i^m)|$$

$$\sup_{y \in D(x)} \{r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)\} -$$

$$\sup_{y \in D(x) - \{d: \lambda'(0,d) \leq \alpha \lambda(x, s_i^m)\}} \{r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)\}$$

$$|D(x) \cap D(s_i^m) \supset D(x) - \{d: \lambda'(0,d) \leq \gamma \lambda(x, s_i^m)\} \text{ según } 4^*|$$

$$\sup_{y \in D(x)} \{r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)\} -$$

$$- \left| \sup_{y \in D(x)} \{r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)\} \right.$$

$$\left. - \sup_{y \{d: \lambda'(0,d) \leq \gamma \sup_{x, x' \in S_i^m} \lambda(x, x')\}} \{r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)\} \right|$$

|según el lema A.3|

$$\leq \gamma_1 \gamma \lambda(x, s_i^m) - \alpha \gamma_2 \gamma \lambda(x, s_i^m) \sum_{z \in \Omega} |f_m^n(z)|.$$

|según 5** y 6*|

Segundo término :

$$\left| \sup_{y \in D(x) \cap D(s_i^m)} \{r(x, y) + \alpha \sum p(z|x, y) f_m^n(z)\} - \right.$$

$$\left. \sup_{y \in D(x) \cap D(s_i^m)} \{r(s_i^m, y) + \alpha \sum p(z|s_i^m, y) f_m^n(z)\} \right|$$

$$\leq \sup_{y \in D(x) \cap D(s_i^m)} |r(x, y) - r(s_i^m, y)| +$$

$$+ \alpha \sup_{y \in D(x) \cap D(s_i^m)} |\sum (p(z|x, y) - p(z|s_i^m, y)) f_m^n(z)|$$

|según lema A.1|

$$\leq \beta_1 \lambda(x, s_i^m) + \alpha \beta_2 \lambda(x, s_i^m) \sum_{z \in \Omega} |f_m^n(z)|.$$

|según 5* y 6*|

Tercer término : El argumento es el mismo que para el primer término.

Sumando los tres términos obtenemos,

$$|Af_m^n(x) - A_m f_m^n(x)| \leq \lambda(x, s_i^m) \{(\beta_1 + 2\gamma\gamma_1) + (\beta_2 + 2\gamma\gamma_2) \sum_{z \in \Omega} |f_m^n(z)|\}$$

donde x pertenece a S_i^m . Calculando el supremo sobre toda x en Ω , obtenemos el resultado, //

La cota obtenida en esta proposición es, --- esencialmente, un límite "a priori". Debido a ello se requiere el conocimiento de las constantes γ , β_1 , γ_1 , β_2 y γ_2 para su cálculo. Esto es apropiado para problemas con espacio de estado infinito donde se asume que las condiciones de continuidad en el sentido de Lipschitz son explícitas. Sin embargo, no es nuestra intención el calcular estas constantes en procesos con espacio de estado finito. El pretenderlo nos obligaría a resolver, en la mayoría de los casos, un problema de carácter combinatorio. Por lo tanto, el algoritmo no es adecuado para este tipo de procesos.

Estudiaremos ahora el término $Af_m^n - A_m f_m^n$ para el proceso aproximado resultante del uso del algoritmo II. También veremos que las condiciones requeridas para los procesos cuyos espacios de estado y de decisiones son finitos son más débiles que cuando no lo son.

4. Algoritmo II

Introducimos más notación. Para cada i y j tal que x pertenece a S_i^m , sea

$$1) \quad \eta^m(x) \equiv \sup_{y \in D^m(m)} |r_i^m(y) - r(x,y)|$$

$$2) \quad \xi_j^m(x) \equiv \sup_{y \in D^m(x)} |p_i^m(j|y) - \vec{p}(j|x,y)|$$

$$\text{donde } \vec{p}(j|x,y) = \sum_{x \in S_j^m} p(z|x,y),$$

Claramente, $\eta^m(\cdot)$ y $\xi_j^m(\cdot)$ son funciones no negativas definidas de Ω a \mathbb{R} que son uniformemente acotadas.

Antes de obtener una cota en el término $\rho(Af_m^n - A_m f_m^n)$ necesitamos un lema y nuevas hipótesis. Sean m_0 y m enteros positivos, donde $m_0 \leq m$, y considere los procesos aproximados obtenidos empleando el algoritmo II con particiones de tamaños m_0 y m , respectivamente. La nueva hipótesis es,

$$8^* \quad \sigma_k^m(y) \equiv \sigma_j^m(y) \quad \text{para } y \in D_k^m \text{ si } S_k^m \subset S_j^{m_0}.$$

Nótese que 8^* es siempre posible y representa una condición en la manera en que la asociación de políticas definida por σ^m se lleva a cabo.

Lema 3.1. Para un proceso de Markov con espacio de estado finito PDM y los procesos aproximados PDM_m ($m=1, 2, \dots$) obtenidos por medio del algoritmo II, si 8^* se satisface, entonces, por cada x en Ω ,

- 1) $\{\eta^m(x)\} \searrow 0$ cuando $m \nearrow$
- 2) Para cada $j=1, 2, \dots, m$, si $S_j^{m_0} \supset S_k^m$ para $m \geq m_0$, la secuencia $\{\xi_k^m(\cdot)\}_{m \geq m_0} \searrow 0$ cuando $m \nearrow$.

Demostración: Fijese m_0 . Para $m \geq m_0$ se representa por S_k^m los elementos de la partición de $S_j^{m_0}$ en subconjuntos como consecuencia de incrementar de m_0 a m el número de bloques en la partición de Ω . Por lo tanto, para cada j, k y x en Ω

$$S_j^{m_0} \supset S_k^m, \quad D_j^{m_0} \supset D_k^m \quad \text{y} \quad D_j^{m_0}(x) \supset D^m(x). \quad \text{De acuerdo}$$

con 8^* , $\eta^m(x) \leq \eta^{m_0}(x)$ y $\xi_k^m(x) \leq \xi_j^{m_0}(x)$, para cada x en Ω y j, k . Dado que el espacio de estado Ω es finito, siendo M el número de estados en Ω , es obvio que $\eta^M(x) = 0$ y $\xi_k^M(x) = 0$, para cada x en Ω , y $k=1, 2, \dots, M$. //

Las funciones $\eta^m(\cdot)$ y $\xi_k^m(\cdot)$ ($k=1, \dots, m$) se denominan funciones de error.

Proposición 3.2. Si PDM es un proceso de Markov con espacio de estado finito y PDM_m ($m=1, 2, \dots$) se obtienen usando el algoritmo II, entonces,

$$\rho(Af_m^n, A_m f_m^n) \leq \max_{x \in \Omega} (\eta^m(x) + \alpha \sum_{j=1}^m \xi_j^m(x) |f_m^n(j)|),$$

Demostración: Para cada x en Ω , x en S_i^m para algún $i(1, \dots, m)$.

$$|Af_m^n(x) - A_m f_m^n(x)| = | \text{si } x \in S_i^m |$$

$$| \sup_{y \in D(x)} \{r(x, y) + \alpha \sum_{z \in \Omega} p(z|x, y) f_m^n(z)\} -$$

$$- \sup_{y \in D_i^m} \{r_i^m(y) + \alpha \sum_{j=1}^m p_i^m(j|y) f_m^n(j)\} | \leq$$

|por definición de A y A_m |

$$| \sup_{y \in D(x)} \{r(x, y) + \alpha \sum_{z \in \Omega} p(z|x, y) f_m^n(z)\} -$$

$$- \sup_{y \in D_i^m} \{r(x, \sigma_i^m(x, y)) + \alpha \sum_{z \in \Omega} p(z|x, \sigma_i^m(x, y)) f_m^n(z)\} |$$

$$+ | \sup_{y \in D_i^m} \{r(x, \sigma_i^m(x, y)) + \alpha \sum_{z \in \Omega} p(z|x, \sigma_i^m(x, y)) f_m^n(z)\} -$$

$$- \sup_{y \in D_i^m} \{r_i^m(y) + \alpha \sum_{j=1}^m p_i^m(j|y) f_m^n(j)\} |$$

|pues la suma no es mayor que la suma de los valores absolutos|

Estudiamos ahora estos dos términos. El apartado 3° de el algoritmo II define, para cada y en D_i^m

$$\sigma_i^m(x, y) \equiv \begin{cases} y & \text{si } y \in D(x) \\ \varepsilon \in D(x) & \text{si } y \notin D(x) \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\sup_{y \in D_i^m} \{r(x, \sigma_i^m(x, y)) + \alpha \sum_z p(z|x, \sigma_i^m(x, y)) f_m^n(z)\} =$$

$$= \sup_{y \in D(x)} \{r(x, y) + \alpha \sum_z p(z|x, y) f_m^n(z)\}$$

y el primer término es cero.

Segundo término :

$$\left| \sup_{y \in D_i^m} \{r(x, \sigma_i^m(x, y)) + \alpha \sum_z p(z|x, \sigma_i^m(x, y)) f_m^n(z)\} - \right.$$

$$\left. \sup_{y \in D_i^m} \{r_i^m(y) + \alpha \sum_{j=1}^m p_i^m(j|y) f_m^n(j)\} \right| \leq$$

$$\sup_{y \in D_i^m} |r(x, \sigma_i^m(x, y)) - r_i^m(y) + \alpha \sup_{y \in D_i^m} \sum_{j=1}^m f_m^n(j)$$

$$\sum_{z \in S_j^m} (p(z|x, \sigma_i^m(x, y)) - p_i^m(j|y)) \leq$$

|según el lema A.1|

$$\eta^m(x) + \alpha \sup_{y \in D_i^m} \sum_{j=1}^m |f_m^n(j)| |\bar{p}(j|x, \sigma_i^m(x,y)) - p_i^m(j|y)| =$$

|pues $f_m^n(\cdot)$ es constante en S_j^m y la definición de $\eta^m(\cdot)$ |

$$\eta^m(x) + \alpha \sum_{j=1}^m |f_m^n(j)| \cdot \sup_{y \in D_i^m} |\bar{p}(j|x, \sigma_i^m(x,y)) - p_i^m(j|y)| \leq$$

|pues $f_m^n(j)$ es independiente de y |

$$\eta^m(x) + \alpha \sum_{j=1}^m |f_m^n(j)| \xi_j^m(x) \quad |\text{por definición de } \xi_j^m(\cdot)|$$

Computando el supremo sobre todas las x en Ω obtenemos el resultado. //

El lema 3.1 no se aplica a procesos con el espacio de estado infinito. Se puede demostrar que las secuencias $\{\eta^m(\cdot)\}$ y $\{\xi_j^m(\cdot)\}$ son no crecientes en m -- (para cada x en Ω), pero no es necesariamente cierto que convergen, y si lo hicieran, que converjan a cero. La razón es que la asociación de políticas definida -- por σ_i^m puede destruir las condiciones de continuidad -- (en el sentido de Lipschitz) de las ganancias y probabilidades de transición que intervienen en la definición del modelo. Para preservar la continuidad requerimos nuevas condiciones de la transformación

9* Para todo x, x' en Ω , $y \in D^m(x) \cap D^m(x')$, --
 existe $y' \in D^m(x) \cap D^m(x')$ y un escalar k tal
 que

$$\max(\lambda'(\sigma^m(x, y), y'), \lambda'(\sigma^m(x', y), y')) \leq k\lambda(x, x').$$

10* Para $y, y' \in D^m(x)$ existe un escalar k' --
 tal que

$$\lambda'(\sigma^m(x, y), \sigma^m(x, y')) \leq k' \lambda'(y, y').$$

Las condiciones 9* y 10* son afirmaciones so
bre las características que las transformaciones σ^m sa
tisfacen, estando relacionadas con la forma de los es-
 pacios de decisiones del proceso. Usaremos estas condi-
 ciones para argumentar que $\eta^m(\cdot)$ y $\xi_j^m(\cdot)$ convergen a -
 cero; el valor de las constantes k, k' no es relevante
 para el cálculo de los límites del error, si bien lo -
 es en relación al valor que toman estos límites.

En el apéndice C presentamos ejemplos donde
 las transformaciones σ^m no satisfacen las condiciones
 9* y 10*, con lo que la continuidad en el sentido de -
 Lipschitz de las ganancias y probabilidades de transi-
 ción para el proceso aproximado se pierden.

Pasamos ahora a acotar el factor $\rho(Af_m^n, Af_m^n)$
 cuando el espacio de estado no es finito. Presentamos
 primero un lema con dos partes: la primera afirma que
 las ganancias y probabilidades de transición de los --
 procesos aproximados heredan la continuidad del proce-
 so original, y la segunda es equivalente al lema 3.1,
 pero en el caso de procesos con espacio de estado infi-
 nito.

Lema 3.2. Sean PDM un proceso de decisiones markoviano denumerable y PDM_m ($m=1,2,\dots$) los procesos aproximados construidos mediante el algoritmo II; si se satisfacen $1^* - 10^*$, entonces

1°) Existen escalares β_1^m tales que para cada x, x' en Ω e y en $D^m(x) \cap D^m(x')$, $|r(x, \sigma^m(x, y)) - r(x', \sigma^m(x', y))| \leq \beta_1^m \lambda(x, x')$.

2°) Existen escalares γ_1^m tales que para x en Ω , y, y' en $D^m(x)$,

$$|r(x, \sigma^m(x, y)) - r(x, \sigma^m(x, y'))| \leq \gamma_1^m \lambda'(y, y').$$

3°) Existen escalares β_2^m tales que para x, x' en Ω e y en $D^m(x) \cap D^m(x')$,

$$|\bar{p}(\cdot | x, \sigma^m(x, y)) - \bar{p}(\cdot | x, \sigma^m(x', y))| \leq \beta_2^m \lambda(x, x').$$

4°) Existen escalares γ_2^m tales que para cada x en Ω , y, y' en $D^m(x)$

$$|\bar{p}(\cdot | x, \sigma^m(x, y)) - \bar{p}(\cdot | x, \sigma^m(x, y'))| \leq \gamma_2^m \lambda'(y, y').$$

Además, para cada x en Ω ,

5°) $\{\eta^m(x)\} \rightarrow 0$ cuando $m \nearrow \infty$, y

6°) Para cada $j=1,2,\dots,m$, si $S_j^{m_0} \supset S_k^m$ para $m \geq m_0$, la secuencia $\{\xi_k^m(\cdot)\}_{m \geq m_0} \rightarrow 0$ cuando $m \nearrow \infty$.

Demostración :

$$2^\circ) \quad \gamma_1^m \equiv \sup_{x \in \Omega} \sup_{y, y' \in D^m(x)} |r(x, \sigma^m(x, y)) - r(x, \sigma^m(x, y'))| / \\ / \lambda'(y, y')$$

$$\leq \sup_{x \in \Omega} \sup_{y, y' \in D^m(x)} \gamma_1 \lambda'(\sigma^m(x, y), \sigma^m(x, y')) / \lambda'(y, y')$$

|según 5**|

$$\leq \gamma_1 k'. \quad |según 10*|$$

$$1^\circ) \quad \beta_1^m \equiv \sup_{x, x' \in \Omega} \sup_{y \in D^m(x) \cap D^m(x')} |r(x, \sigma^m(x, y)) - \\ - r(x', \sigma^m(x', y))| / \lambda(x, x')$$

$$\leq \sup_{x, x' \in \Omega} \sup_{y \in D^m(x) \cap D^m(x')} (|r(x, \sigma^m(x, y)) -$$

$$= r(x, y')| + |r(x, y') - r(x', y')| + |r(x', y') - r(x', \sigma^m(x', y))|) / \\ / \lambda(x, x')$$

|donde y' satisfice 9*|

$$\leq \sup_{x, x' \in \Omega} (\gamma_1 \lambda'(\sigma^m(x, y), y') + \beta_1 \lambda(x, x') + \gamma_1 \lambda'(y', \sigma^m(x, y))).$$

$$\leq 1 / \lambda(x, x') \quad |según 5* y 5**|$$

$$\leq \beta_1 + 2k \gamma_1. \quad |\text{según } 9^*|$$

3°) y 4°) se demuestran de la misma manera.

Fijese m_0 , Para $m \geq m_0$ se representa por S_k^m los elementos de la partición de $S_j^{m_0}$ en subconjuntos, como consecuencia de incrementar de m_0 a m el número de bloques en la partición de Ω . Por lo tanto, para cada j, k y x en Ω , $S_j^{m_0} \supset S_k^m$, $D_j^{m_0} \supset D_k^m$ y $D^{m_0}(x) \supset D^m(x)$. De acuerdo con 8*, $\eta^m(x) \leq \eta^{m_0}$ y $\xi_k^m(x) \leq \xi_j^{m_0}(x)$. Por lo tanto las secuencias de las funciones de error $\{\eta^m(\cdot)\}_{m \geq m_0}$ y $\{\xi_k^m(\cdot)\}_{m \geq m_0}$ son monotonicamente decrecientes. Además,

$$\eta^m(x) \equiv \sup_{x \in S_i^m} \sup_{y \in D_i^m} |r_i^m(y) - r(x, \sigma_i^m(x, y))| \quad \begin{array}{l} \text{por definición} \\ \text{de } \eta^m(x) \end{array}$$

$$\leq 1/2 \sup_{x, x' \in S_i^m} \sup_{y \in D_i^m} |r(x, \sigma_i^m(x, y)) - r(x', \sigma_i^m(x', y))|$$

$$|\text{por definición de } r_i^m(y)|$$

$$\leq 1/2 \beta_1^m \sup_{x, x' \in S_i^m} \lambda(x, x') \quad |\text{según } 1^\circ \text{ de este lema}|$$

$$\xi_k^m(x) \equiv \sup_{x \in S_i^m} \sup_{y \in D_i^m} |p_i^m(j|y) - \vec{p}(j|x, \sigma_i^m(x, y))|$$

$$|\text{por definición de } \xi_k^m(x)|$$

$$\leq \sup_{x, x' \in S_i^m} \sup_{y \in D_i^m} |\bar{p}(j|x, \sigma_i^m(x, y)) - \bar{p}(j|x', \sigma_i^m(x', y))|$$

|según el lema A.2|

$$\leq \beta_2^m \sup_{x, x' \in S_i^m} \lambda(x, x'). \quad | \text{según 3}^\circ \text{ de este lema} |$$

Quando $m \nearrow \infty$, $S_k^m \searrow 0$. Por lo tanto $\{\eta^m(\cdot)\}$ y $\{\xi_k^m(\cdot)\}$ convergen monótonicamente a cero para todo x en Ω . //

Usando este lema obtenemos ahora la versión de la proposición 3.2 para el caso de procesos con espacio de estado infinito.

Proposición 3.3. Si PDM es un proceso de Markov con espacio de estado infinito, PDM_m ($m=1, 2, \dots$) se obtiene usando el algoritmo II y las condiciones 1* - 10* se satisfacen, entonces,

$$\rho(Af_m^n - A_m f_m^n) \leq \sup_{x \in \Omega} (\eta^m(x) + \alpha \sum_{j=1}^m \xi_j^m(x) \cdot |f_m^n(j)|)$$

Demostración: La misma que en la proposición 3.2, sustituyendo el lema 3.1 por el lema 3.2 cuando es necesario. //

Las cotas obtenidas en las proposiciones 3.2 y 3.3 son computables después que se determinan los procesos aproximados. Es decir $\eta^m(\cdot)$ y $\xi_j^m(\cdot)$ se determi--

nan resolviendo los problemas de optimización descritos en los apartados 4° y 5° del algoritmo II. Más adelante emplearemos los resultados que aparecen en estas proposiciones para la obtención de los límites.

En el caso particular de procesos con espacio de estado y espacios de decisiones finitos no hemos impuesto ninguna condición en el modelo markoviano. Es decir, hemos asumido que 8* se satisface, pero esta es una condición sobre las características de las transformaciones σ^m (lo cual siempre es posible). Por lo tanto, 8* es una caracterización más de la construcción descrita por el algoritmo II. En los procesos con espacio de estado infinito hemos impuesto las condiciones 9* y 10* para garantizar que las soluciones a la secuencia de problemas $\{PDM_m\}$ converjan a la solución del proceso original.

5. Algoritmo III

Debido a las características de la construcción descrita por el algoritmo III, los argumentos que aparecen en esta sección participan de las características de los empleados en los algoritmos I y II.

Proposición 3.4. Si PDM es un proceso de decisiones markoviano, PDM_m ($m=1,2,\dots$) se obtiene usando el algoritmo III y las condiciones 1* - 7* se satisfacen, entonces

$$\rho(Af_m^n, A_m f_m^n) \leq \gamma \max_{i=1,\dots,m} \sup_{x,x' \in S_i} \lambda(x,x') (\gamma_1 +$$

$$+ \alpha \gamma_2 \sum_{z \in \Omega} |f_m^n(z)|) + \sup_{x \in \Omega} (\eta^m(x) + \alpha \sum_{j=1}^m \xi_j^m(x), |f_m^n(j)|),$$

Demostración: Para cada x en Ω , x en S_i^m para algún $i(1, 2, \dots, m)$.

$$|Af_m^n(x) - A_m f_m^n(x)| = \quad |si\ x \in S_i^m|$$

$$\left| \sup_{y \in D(x)} \{r(x, y) + \alpha \sum_{z \in \Omega} p(z|x, y) f_m^n(z)\} - \right.$$

$$\left. - \sup_{y \in D_i^m} \{r_i^m(y) + \alpha \sum_{j=1}^m p_i^m(j|y) f_m^n(j)\} \right| \leq$$

|por definición de A y A_m |

$$\left| \sup_{y \in D(x)} \{r(x, y) + \alpha \sum p(z|x, y) f_m^n(z)\} - \right.$$

$$\left. - \sup_{y \in D^m(x)} \{r(x, y) + \alpha \sum p(z|x, y) f_m^n(z)\} \right| + \left| \sup_{y \in D_i^m} \{r(x, y) + \right.$$

$$\left. + \alpha \sum p(z|x, y) f_m^n(z)\} - \sup_{y \in D_i^m} \{r_i^m(y) + \alpha \sum_{j=1}^m p_i^m(j|y) f_m^n(j)\} \right|$$

Estudiamos ahora cada término separadamente.

Primer término :

$$\left| \sup_{y \in D(x)} \{r(x, y) + \alpha \sum p(z|x, y) f_m^n(z)\} - \right.$$

$$\left. - \sup_{y \in D_i^m} \{r(x, y) + \alpha \sum p(z|x, y) f_m^n(z)\} \right| =$$

$$\sup_{y \in D(x)} \{r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)\} -$$

$$\sup_{y \in D_i^m} \{r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)\}$$

|pues $D^m(x) \subset D(x)$ por definición de $D^m(x)$ |

$$\leq \sup_{y \in D(x)} \{r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)\} -$$

$$- \sup_{y \in D(x) - \{d: \lambda'(0,d) \leq \gamma\}} \sup_{x, x' \in S_i^m} \lambda(x, x') \{r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)\}$$

$$|D^m(x) \subset D(x) - \{d: \lambda'(0,d) \leq \gamma\} \sup_{x, x' \in S_i^m} \lambda(x, x') \text{ según } 4*|$$

$$\sup_{y \in D(x)} (r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)) -$$

$$- (\sup_{y \in D(x)} (r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)) -$$

$$y \in \{d: \lambda'(0,d) \leq \gamma\} \sup_{x, x' \in S_i^m} \lambda(x, x') \{r(x,y) + \alpha \sum p(z|x,y) f_m^n(z)\}$$

|según el lema A.3|

$$\leq \gamma_1 \lambda'(0,d) + \alpha \sup_{y \in \{d: \lambda'(0,d) \leq \gamma\}} \sup_{x, x' \in S_i^m} \lambda(x, x') \sum p(z|x,y) -$$

$$- p(z|x, y+d) \cdot |f_m^n(z)|$$

|según 5** y el hecho de que la suma no es mayor que la suma de los valores absolutos|

$$\leq \gamma_1 \gamma \sup_{x, x' \in S_i^m} \lambda(x, x') + \alpha \gamma_2 \gamma \sup_{x, x' \in S_i^m} \lambda(x, x') \cdot \sum_{z \in \Omega} f_m^n(z)$$

|según 6**|.

Segundo término :

$$\left| \sup_{y \in D^m(x)} \{r(x, y) + \alpha \sum p(z|x, y) \cdot f_m^n(z)\} - \right.$$

$$\left. - \sup_{y \in D^m(x)} \{r_i^m(y) + \alpha \sum_{j=1}^m p_i^m(j|y) f_m^n(j)\} \right|$$

$$\leq \sup_{y \in D^m(x)} |r(x, y) - r_1^m(y)| + \alpha \sup_{y \in D^m(x)} \left| \sum_{j=1}^m (\bar{p}(j|x, y) - \right.$$

$$\left. - p_i^m(j|y)) f_m^n(j) \right|$$

|Según el lema A.1, la definición de $\bar{p}(j|x, y)$ y que $f_m^n(\cdot)$ es constante en cada bloque|

$$\leq \eta^m(x) + \alpha \sum_{j=1}^m |f_m^n(j)| \cdot \sup_{y \in D^m(x)} |\bar{p}(j|x, y) - p_i^m(j|y)|$$

|por definición de $\eta^m(\cdot)$ |

$$\leq \eta^m(x) + \alpha \sum_{j=1}^m |f_m^n(j)| \cdot \xi_j^m(x).$$

Sumando los resultados correspondientes a -- los dos términos y calculando el supremo sobre toda x en Ω , obtenemos el resultado, //

Los términos que intervienen en la cota de $\rho(Af_m^n, A_m f_m^n)$ contienen en este caso, términos computables "a priori"; estos factores acotan el error debido a no considerar las decisiones que son relevantes. Los otros factores se obtienen de la misma manera que cuando el algoritmo II es el que se usa: por medio de las funciones de error se mide el error introducido por -- las ganancias y probabilidades de transición representativas.

Notación. - Para simplificar la compleja notación de la cota sobre $\rho(Af_m^n, A_m f_m^n)$, introducimos una nueva definición.

Para x en S_i^m definimos

$$E_n^m(x) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \lambda(x, s_i^m) ((\beta_1 + 2\gamma\gamma_1) + (\beta_2 + 2\gamma\gamma_2) \sum_{z \in \Omega} |f_m^n(z)|) \\ \qquad \qquad \qquad \text{si se emplea el algoritmo I} \\ \\ \eta^m(x) + \alpha \sum_{j=1}^m \xi_j^m(x) \cdot |f_m^n(j)| \\ \qquad \qquad \qquad \text{si se emplea el algoritmo II} \\ \\ \gamma \sup_{x, x' \in S_i^m} \lambda(x, x') (\gamma_1 + \alpha \gamma_2 \sum_{z \in \Omega} |f_m^n(z)|) + \\ \dagger \eta^m(x) + \alpha \sum_{j=1}^m \xi_j^m(x) |f_m^n(j)| \\ \qquad \qquad \qquad \text{si se emplea el algoritmo III} \end{array} \right.$$

$$y \quad E_n^m \equiv \sup_{x \in \Omega} E_n^m(x),$$

6. Los Límites

Usando los resultados de las secciones 3, 4 y 5 en conjunción con los límites obtenidos en el capítulo I, obtenemos límites sobre $f - f_m^n$. Los teoremas siguientes presentan estos resultados.

Teorema 3.1. Para un proceso de decisiones markoviano con descuento cuyo espacio de estado es denumerable -- (finito o infinito) PDM y sus correspondientes procesos aproximados PDM_m ,

- 1°) Si se usa el algoritmo I en la construcción de los procesos $\{PDM_m\}$ y se satisface 1* - 7*, ó
- 2°) Si PDM tiene espacios de estado y de decisiones finitos, se usa el algoritmo II en la definición de los procesos $\{PDM_m\}$ y se satisface 8*, ó
- 3°) Si se usa el algoritmo II en la construcción de los procesos $\{PDM_m\}$ y se satisface 1* - 10*, ó
- 4°) Si se usa el algoritmo III en la construcción de los procesos $\{PDM_m\}$ y se satisface 1* - 7*, ó

entonces,

$$5°) \rho(f, f_m^n) \leq \alpha \rho(f_m^n, f_m^{n-1}) / 1 - \alpha + E_n^m / 1 - \alpha.$$

Demostración: De acuerdo con las proposiciones 3.1, -- 3.2, 3.3 y 3.4 ó 2° ó 3° ó 4° se cumple $\rho(Af_m^n, A_m f_m^n) \leq E_n^m$. Sustituyendo en el lema 1.1 obtenemos el resultado. //

Teorema 3.2. Bajo las mismas condiciones que en el teorema 3.1, si PDM satisface la propiedad de igualdad de la suma en las filas, entonces $\rho(f, f_m^n) \leq \alpha \rho(f_m^n, f_m^{n-1}) / 1 - \alpha + E_{n-1}^m / 1 - \alpha$.

Demostración: El lema 1.4 implica

$$\rho(f, f_m^n) \leq \alpha \rho(f_m^n, f_m^{n-1}) / 1 - \alpha + \rho(Af_m^{n-1}, A_m f_m^{n-1}) / 1 - \alpha, \text{ con}$$

lo que el resultado es inmediato. //

IV. DISEÑO DE NUEVAS PARTICIONES

1. Introducción

En el capítulo II discutimos las construcciones de los procesos aproximados a partir del original, presentando tres algoritmos que denominamos algoritmo I, II y III, respectivamente. En los métodos que proponemos se emplean secuencias $\{PDM_m\}$ de estos algoritmos para aproximar la solución al proceso original.

Los límites que hemos obtenido contienen dos términos. El primero converge monótonicamente a cero. Por lo tanto

$$\rho(f_m^n, f_m^{n-1})$$

será suficientemente pequeño tras un número de iteraciones. Pero el segundo término,

$$\rho(Af_m^n, A_m f_m^n)$$

(que hemos acotado anteriormente por medio de E_n^m) no se comporta de la misma manera. De hecho, $\{E_n^m\}$ (para m fija) convergería a un valor positivo en la mayoría de los casos. Solamente empleando nuevas particiones del espacio de estado que contengan mayor número de elementos (es decir, aumentando m) seremos capaces de disminuir E_n^m de una manera apreciable.

Con respecto a estas reparticiones del espacio de estado, dos aspectos son de interés :

i) El diseño de una nueva partición del espacio de estado a partir de la que estamos empleando.

ii) Cuando se recomienda dejar de usar una partición y empezar de nuevo con otra.

En las próximas secciones discutimos el primer punto en el contexto de los tres algoritmos presentados, y más adelante nos referimos al segundo aspecto. Pero antes hemos de introducir más notación.

2. Notación

Con el único propósito de diferenciar dos particiones subsiguientes, denotaremos por m_0 la partición actual

$$\{S_i^{m_0} ; i = 1, \dots, m_0\}$$

y por m la nueva, con $m > m_0$. La nueva partición

$$\{S_i^m ; i = 1, \dots, m\}$$

se obtiene inductivamente rompiendo bloques de la partición actual en dos elementos. Es decir,

$$S_k^{m_0} = S_{k_1}^m \cup S_{k_2}^m.$$

Es obvio que de esta manera podemos obtener cualquier partición que proceda de romper los bloques de la partición actual. Cuando decidamos emplear una nueva partición, usaremos la última ganancia acumulada $f_{m_0}^n$, correspondiente a la partición empleada hasta ese momento, como ganancia terminal. Es decir, definiremos

$$f_m^1 \equiv f_{m_0}^n$$

y continuaremos la aproximación con el operador A_m en lugar de A_{m_0} .

3. Nuevas Particiones del Espacio de Estado

Para los resultados que ahora presentamos, sólo consideramos las particiones obtenidas rompiendo un bloque de la partición actual en dos.

Lema 4.1.

Si se emplea el algoritmo I en la construcción de los procesos aproximados, rompiendo un bloque $S_k^{m_0}$ de manera que

$$\sup_{x \in S_k^{m_0}} \lambda(x, s_k^{m_0}) = \max_{i=1, \dots, m_0} \sup_{x \in S_i^{m_0}} \lambda(x, s_i^{m_0})$$

obtenemos

$$E_1^m \leq E_n^{m_0}.$$

Demostración :

Por definición,

$$\begin{aligned} \rho(Af_m^1, A_m f_m^1) &= \max_{i=1, \dots, m} \sup_{x \in S_i^m} |Af_m^1(x) - A_m f_m^1(x)| \\ &\leq \max_{i=1, \dots, m} \sup_{x \in S_i^m} \lambda(x, s_i^m) ((\beta_1 + 2\gamma\gamma_1) + (\beta_2 + 2\gamma\gamma_2)) \\ &\quad \sum_{z \in \Omega} |f_m^1(z)| \end{aligned}$$

[según la proposición 3.1]

$$= \max_{i=1, \dots, m} \sup_{x \in S_i^m} \lambda(x, s_i^m) ((\beta_1 + 2\gamma\gamma_1) + (\beta_2 + 2\gamma\gamma_2)) \sum_z |f_{m_0}^n(z)|$$

$$|f_m^1 \equiv f_{m_0}^n|$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{\substack{i=1, \dots, m \\ i \neq k}} \sup_{x \in S_i^{m_0}} \lambda(x, s_i^m) ((\beta_1 + 2\gamma\gamma_1) + (\beta_2 + 2\gamma\gamma_2)) \sum |f_{m_0}^n(z)| \\ \max_{j=1, 2} \sup_{x \in S_{k_j}^{m_0}} \lambda(x, s_{k_j}^m) ((\beta_1 + 2\gamma\gamma_1) + (\beta_2 + 2\gamma\gamma_2)) \sum |f_{m_0}^n(z)| \end{array} \right.$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{\substack{i=1, \dots, m \\ i \neq k}} \sup_{x \in S_i^o} E_n^{m^o}(x) \\ \\ \max_{j=1, 2} \sup_{x \in S_{k_j}^o} \lambda(x, s_{k_j}^m) ((\beta_1 + 2\gamma\gamma_1) + (\beta_2 + 2\gamma\gamma_2) \Sigma |f_{m^o}^n(z)|) \end{array} \right.$$

| por definición de $E_n^{m^o}(x)$ |

$$= E_1^m.$$

Por lo tanto, rompiendo en dos un bloque donde se obtiene el

$$\max_{i=1, \dots, m} \sup_{x \in S_i^o} \lambda(x, s_i^m), \quad E_1^m \leq E_n^{m^o}.$$

Y esto es lo más que podemos hacer rompiendo un bloque en dos. //

Lo que dice este lema es que nuevas particiones deben ser diseñadas rompiendo un bloque donde se obtiene el error $E_n^{m^o}$.

Lema 4.2.

Si se emplea el algoritmo II en la construcción de los procesos aproximados, rompiendo el bloque $S_k^{m^o}$ en otros dos $S_{k_1}^m$ y $S_{k_2}^m$ tal que

$$\xi_{k_1}^m(x) + \xi_{k_2}^m(x) \leq \xi_k^{m_0}(x)$$

para cada x en Ω , obtenemos

$$E_1^m \leq E_n^{m_0}.$$

Demostración :

Por definición,

$$\rho(Af_m^1, A_m f_m^1) \leq \sup_{x \in \Omega} (\eta^m(x) + \alpha \sum_{j=1}^m \xi_j^m(x) |f_m^1(j)|)$$

|según las proposiciones 3.2 y 3.3|

$$= \max_{i=1, \dots, m} \sup_{x \in S_i^m} (\eta^m(x) + \alpha \sum_{j=1}^m \xi_j^m(x) |f_{m_0}^n(j)|)$$

$$|f_m^1 \equiv f_{m_0}^n|$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{\substack{i=1, \dots, m_0 \\ i \neq k}} \sup_{x \in S_i^{m_0}} (\eta^{m_0}(x) + \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m_0} \xi_j^m(x) |f_{m_0}^n(j)| + (\xi_{k_1}^m(x) + \xi_{k_2}^m(x)) \cdot |f_{m_0}^n(k)|) \\ \max_{j=1, 2} \sup_{x \in S_{k_j}^m} (\eta^{m_0}(x) + \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m_0} \xi_j^m(x) |f_{m_0}^n(j)| + (\xi_{k_1}^m(x) + \xi_{k_2}^m(x)) \cdot |f_{m_0}^n(k)|) \end{array} \right.$$

$$\text{pues } S_k^{m_0} = S_{k_1}^m \quad S_{k_2}^m$$

$$= E_1^m.$$

Por lo tanto, dado que

$$\eta^m(\cdot) \leq \eta^m(\cdot) \quad , \quad \xi_j^m(\cdot) \leq \xi_j^m(\cdot)$$

según los lemas 3.1 y 3.2 y

$$\xi_{k_1}^m(\cdot) + \xi_{k_2}^m(\cdot) \leq \xi_k^{m_0}(\cdot)$$

por hipótesis, $E_1^m \leq E_n^{m_0}$. //

Lema 4.3.

Si el algoritmo III se emplea en la construcción de los procesos aproximados, rompiendo un bloque $S_k^{m_0}$ en otros dos $S_{k_1}^m$, $S_{k_2}^m$ tal que

$$\xi_{k_1}^m(x) + \xi_{k_2}^m(x) \leq \xi_k^{m_0}(x)$$

para todo x en Ω , obtenemos

$$E_1^n \leq E_n^{m_0}.$$

Demostración :

Observando que en la cota correspondiente al algoritmo III (proposición 3.4) interviene el factor

$$\sup_{x \in \Omega} (\eta^m(x) + \alpha \sum_{j=1}^m \xi_j^m(x) |f_m^1(j)|)$$

el argumento empleado en el lema 4.2 muestra que este factor no aumenta. Dado que los demás factores que intervienen en la cota a lo sumo permanecen constantes o bien disminuyen, el valor total del error no aumenta. //

De ahora en adelante, asumiremos que las nuevas particiones se obtienen de la manera descrita en los lemas anteriores.

4. Sobre los Límites

En el siguiente resultado nos referimos al -segundo punto que hemos comentado en la introducción: en que momento dejamos de utilizar una partición y --empezamos con una nueva. Es decir, para que n hacemos

$$f_m^1 \equiv f_{m_0}^n$$

de manera que la cota obtenida para esta nueva partición sea más pequeña que la que hubieramos obtenido -de seguir con la otra partición.

Nótese que no podemos afirmar que

$$E_{n+1}^m \leq E_n^m$$

pues dependen, respectivamente de f_m^{n+1} y f_m^n . Y por lo tanto, no podemos concluir que

$$\rho(f, f_m^{n+1}) \leq \rho(f, f_m^n)$$

Sin embargo, mostraremos que la cota de error para $\rho(f, f_m^2)$ no es mayor que la cota sobre $\rho(f, f_{m_0}^{n+1})$ cuando

$$f_m^1 \equiv f_{m_0}^n$$

Y que esto es cierto para todo n . El próximo resultado describe estos puntos de una manera rigurosa.

Proposición 4.1

Siendo $f_m^1 \equiv f_{m_0}^n$ para cualquier n ,

- 1° Si se emplea el algoritmo I en la construcción de los procesos aproximados y se reparticiona el espacio de estado de acuerdo con el lema 4.1, o
- 2° Se emplea el algoritmo II en la construcción de los procesos aproximados y se reparticiona el espacio de estado de acuerdo con el lema 4.2, o

3° Se emplea el algoritmo III en la construcción de los procesos aproximados y se reparticiona el espacio de estado de acuerdo con el lema 4.3

entonces,

4° $\rho(f, f_m^2)$ no es mayor que la cota obtenida sobre $\rho(f, f_{m_0}^{n+1})$,

Demostración :

Por definición,

$$f_m^2 = A_m f_m^1 = A_m f_{m_0}^n \quad \text{y}$$

$$f_{m_0}^{n+1} = A_{m_0} f_{m_0}^n = A_{m_0} f_m^1.$$

Además,

$$\rho(f, f_m^2) \leq \rho(f, Af_m^1) + \rho(Af_m^1, A_m f_m^1) \quad | \text{desigualdad triangular} |$$

$$\leq \rho(f, Af_m^1) + E_1^m \quad | \rho(Af_m^1, A_m f_m^1) \leq E_1^m |$$

$$\leq \alpha \rho(f, f_m^1) + E_1^m \quad | A \text{ es } \alpha\text{-descontado} |$$

$$= \alpha \rho(f, f_{m_0}^n) + E_1^m \quad | f_m^1 \equiv f_{m_0}^n |$$

$$\leq \alpha (\rho(f_{m_0}^{n+1}, f_{m_0}^n) / (1 - \alpha + E_n^m) / (1 - \alpha + E_1^m)) \quad | \text{según el lema 1.1} |$$

$$\begin{aligned}
&= \rho(f_{m_0}^{n+1}, f_{m_0}^n) \cdot \alpha / 1 - \alpha + (\alpha E_n^{m_0} + (1 - \alpha) E_1^m) / 1 - \alpha \\
&\leq \rho(f_{m_0}^{n+1}, f_{m_0}^n) \cdot \alpha / 1 - \alpha + E_n^{m_0} / 1 - \alpha \quad | E_1^m \leq E_n^{m_0} \text{ según}
\end{aligned}$$

los lemas 4.1, 4.2 y 4.3|,

La última expresión es el límite del error -
obtenido sobre $\rho(f, f_{m_0}^{n+1})$ en el teorema 3.2. //

Es decir, que la elección de una nueva parti-
ción es independiente de la iteración que estamos lle-
vando a cabo. Por tanto, las consideraciones que inter-
vienen en esta decisión reflejarán la estructura del -
proceso que estamos considerando en ese momento.

V CONCLUSIONES

1) Se ha obtenido un método de resolución -- aproximada de procesos de decisiones markovianos con espacios de estado y de decisiones finitos, empleando el operador supremo correspondiente al proceso original.

2) Se han obtenido límites de error sobre la diferencia entre la ganancia óptima del proceso original y una ganancia del proceso aproximado, para procesos de decisiones secuenciales con descuento.

3) Se han presentado tres construcciones de procesos aproximados a partir del proceso original para procesos de decisiones markovianos con espacios de estado y de decisiones finitos.

4) La primera construcción es una generalización del método propuesto por Fox. Se ha presentado un algoritmo que emplea esta construcción, obteniendo se estimaciones sobre la convergencia de las soluciones aproximadas a la solución del proceso original.

5) Las otras dos construcciones presentadas son originales. Su implementación ha tenido en cuenta la estructura de los espacios de decisiones del proceso.

6) Se han presentado algoritmos que emplean estas dos últimas construcciones.

7) Se han presentado métodos alternativos para estimar la convergencia de las soluciones aproximadas, tanto en aquellos casos en que el empleo del operador supremo del proceso original es factible como cuando no lo es.

8) Se ha extendido la utilización de los tres métodos aproximados propuestos, y los correspondientes algoritmos que los utilizan, a ciertos procesos de decisiones markovianos cuyos espacios de estado son denumerables.

9) Bajo ciertas condiciones de regularidad, se ha estimado la convergencia de las soluciones aproximadas en estos procesos.

VI. REFERENCIAS

1. MacQueen, H., "A Modified Dynamic Programming Method for Markovian Decision Problems," J. of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 14 -- (1966), p. 38-43.
2. _____, "A Test for Suboptimal Actions in Markovian Decision Problems," Operations Research, -- Vol. 15 (1967), p 559-561.
3. Grinold, R., "Elimination of Suboptimal Actions - in Markov Decision Problems" Operations Research, Vol. 21 (1973), p. 848-851.
4. Hastings, N. y J. Mello, "Tests for Suboptimal -- Actions in Discounted Markov Programming." Management Science, Vol. 19 (1973), p. 1019-1022.
5. Hordijk, A. y H. Tijms, "Convergence Results and Approximations for Optimal (s,S) Policies," -- Management Science, Vol. 20 (1973) p. 1432-1438.
6. Porteus, E., "Some Bounds for Discounted Sequential Decision Processes," Management Science, Vol. 18 (1971), p. 7-11.

7. Fox, B., Finite-State Approximations to Denumerable-State Dynamic Programs," J. of Mathematical and Applications, Vol. 34 (1971), p. 665-670.
8. _____, "Discretizing Dynamic Programs," J. of Optimization Theory and Applications, Vol. 11 (1973), p. 228-234.
9. Rolph, J y R Strauch, "A Countable Policy Set for Sequential Decision Problems," The RAND Corporation, P-4789, Marzo de 1972.
10. Wagner, H., Principles of Operations Research, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, 1969.
11. Denardo, E., "Contraction Mappings in the Theory Underlying Dynamic Programming," SIAM Review, Vol. 9. (1967), p. 165-177.
12. Porteus, E., "On the Optimality of Structures Policies in Countable Stage Decision Processes," -- Research Paper No 141, Graduate School of Business, Stanford University, (1973).
13. Dudley, R., "Distances of Probability Measures -- and Random Variables," Ann. Math. Stat., Vol. 39. (1968), p. 1563-1572.
14. Matusita, K., "Discrimination and the Affinity of Distributions," en Discriminant Analysis and -- Applications, T. Cacoullos (ed.) Academic Press, New York.

15. Schay, G., "Optimal Joint Distribution of Several Random Variables with Given Marginals," Technical Report No 132, University of Massachusetts, Boston.

16. _____, "Nearest Random Variables with Given Distributions," The Annals of Probability, Vol. 2. (1974), p. 163-166.

17. Strassen, V., "The Existence of Probability Measures with Given Marginals," Ann. Math. Stat., Vol. 36. (1965), p. 423-439.

18. Maitra, A., "Dynamic Programming for Countable State Systems". Sankhya, Vol 27A (1967), p. 241-248.

19. _____, "Discounted Dynamic Programming on Compact State Spaces," Sankhya, Vol. 30A (1968), p. 211-216.

20. Hinderer, K., Foundations of Non-Stationary Dynamic Programming with Discrete Time Parameter, Springer-Verlag, (1970), New York.

21. Porteus, E., "Bounds and Transformations in the Computational Theory for Finite State and Action Markov Decision Processes." Research Paper no. 97, Graduate School of Business, Stanford University, 1973.

VII. BIBLIOGRAFIA.

1. Arrow, K., S. Karlin y H. Scarf (1958). Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production. Stanford University Press, Stanford, California, E.E.U.U.
2. Bellman, R. (1951). "On a General Class of Problems Involving Sequential Analysis", RAND Corporation, RM-647.
3. _____, (1952), "On the Theory of Dynamic Programming." Proc. Nat. of Science, Vol. 38, p. 716-719.
4. _____, (1954). "The Theory of Dynamic Programming". Bulletin Amer. Math. Soc. Vol. 60,, p. 503-516.
5. _____, (1957). "A Markovian Decision Process," J. Math. Mech., Vol. 6, p. 679-684.
6. _____, (1957), Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, E.E.U.U.
7. _____, (1963), "Some Directions of Research in Dynamic Programming," RAND Corp. RM-3661.

8. _____, y S. Dreyfus (1958), "Dinamic Program-
ming and the Reliability of Multicomponent Devi-
ces," Operations Research, Vol. 6, p. 200-206.
9. _____, (1962), Applied Dynamic Progra-
mming, Princeton University Press, Princeton, N.
J., E.E.U.U.
10. Blackwell, D. (1961), "On the Funcional Equation
of Dynamic Programming," J. Math. Anal. Appl., -
Vol. 2, p. 273-276.
11. _____, (1962), "Discrete Dynamic Programm-
ing," Ann. Math. Stat., Vol 33, p. 719-726.
12. _____, (1965), Discounted Dynamic Programm-
ing," Ann. Math. Stat., Vol 36, p. 226-235.
13. Blackwell, D., "Positive Dynamic Programming," -
Proc. 5th Berkeley Symp. Stat. Prob., Vol 1, Uni-
versity of California Press, Berkeley, Califor-
nia, E.E.U.U. (1967).
14. _____, D. Freedman y M. Orkin (1972), "The
Optimal Rewad Operator in Dynamic Programming,"
University of California, Berkeley, California
E.E.U.U.
15. Chung, K. (1960), Markov with Stationary Transi-
tion Probabilities, Springer, Berlin.

16. Cinlar, E. (1969), "Markov Renewal Theory", Adv. Appl. Prob., Vol 1, p. 123-187.
17. Cox, D. (1962), Renewal Theory, Methuen, London.
18. Debreu, G. y I. Herstein (1953), "Non-negative Square Matrices", Econometrica, Vol. 21, p. 597-607.
19. Denardo, E. (1967), Sequential Decision Processes, Tesis Doctoral. Northwestern University. E.E.U.U.
20. _____, (1968), "Separable Markovian Decision Problems," Management Science, Vol. 17, p. 441-462.
21. _____, (1970), "On Linear Programming in a Markov Decision Problem," Management Science, Vol. 16, p. 281-288.
22. _____, y B. Fox (1968), "Multichain Markov Renewal Programs," SIAM J. Appl. Math., Vol. 16, p. 468-487.
23. _____ y B. Miller (1968), "An Optimality Condition for Discrete Dynamic Programming with No Discounting," Ann. Math. Stat., Vol. 39, p. 1220-1227.
24. D'Epenoux, F. (1963), "A Probabilistic Production and Inventory Problem," Management Science, Vol. 10, p. 98-108. (Traducido de un artículo publicado en Revue Francaise de Recherche Operationnelle, Vol. 14, (1960)).

25. Derman, C. (1963), "On Sequential Decisions and Markov Chains," Management Science, Vol. 9, p. - 15-24.
26. _____, (1964), "On Sequential Control Processes," Ann. Math. Stat., Vol 35, p. 341-349.
27. _____, Finite State Markovian Processes, Academic Press, New York. (1970).
28. _____, y M. Klein (1965), "Some Remarks on Finite Horizon Markovian Decision Problems," Operations Research., Vol. 13, p. 272-278.
29. _____ y A. Veinott, Jr. (1967), "A solution to a Countable System of Equations Arising in Markovian Decision Processes," Ann. Math. Stat., Vol. 38, p. 582-584.
30. _____, (1967), "Constrained Markov Decision Chains," Management Science, Vol. 19, - p. 389-390.
31. Dreyfus, S. (1961), "Dynamic Programming," en -- Progress in Operations Research, R. Ackoff (ed.) Vol. 1, Capit. 5, Wiley, New York.
32. _____, (1965), Dynamic Programming and the Calculus of Variations, Academic Press, New York 1965.
33. Dubins, L. y L. Savage (1965), How to Gamble if You Must, McGraw-Hill, New York.

34. Dunford, N. y J. Schwartz (1958), Linear Operators, Interscience Publishers, New York.
35. Dynkin, E. (1961), Foundations of the Theory of Markov Processes, Springer, Berlin. (Traducción de una monografía rusa editada en 1959).
36. _____, (1965), Markov Processes, Vol. 1, Academic Press, New York.
37. Eaves, B., (1973), "A Fixed Point Theorem From Dynamic Programming," Technical Report, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, California.
38. El 'sgol'c, L. (1964), Qualitative Methods in Mathematical Analysis, Am. Math. Soc., Providence, R. Island.
39. Fadeev, D. y V. Fadeeva (1964), Computational Methods in Linear Algebra, W. Freeman, San Francisco, California.
40. Fan, K. y A. Hoffman (1955), "Some Metric Inequalities in the Space of Matrices," Proc. Amer. Soc., Vol. 6, p. 111-116.
41. Fisher, L. y S. Ross (1968), "A Example in Denumerable Decision Processes," Ann. Math. Stat., Vol. 39, p. 674-675.
42. Fox, B. (1973), "Reducing the Number of Computations in Iterative Processes," Acta Info., Vol. 3, p. 43-45.

43. Freimer, M. (1961), "On Solving a Markovian Decision Problem by Linear Programming," Sin publicar. Inst. for Defense Analysis, Cambridge, Mass.
44. Furukawa, N. (1967), "A Markov Decision Process with Discounted Rewards," Mem. Fac. Sci. Kyushu Univer. Ser. A., Vol. 21, p. 241-248.
45. de Ghellinck, G., y G. Eppen (1967), "linear Programming Solutions for Separable Markovian Decision Problems," Management Science, Vol. 13, p. 371-394.
46. Grinold, R. (1974), "A Generalized Discrete Dynamic Programming Model," Management Science, Vol. 20, p. 1092-1103.
47. Harrison, M. (1972), "Discrete Dynamic Programming with Unbounded Rewards," Ann. Math. Stat., Vol. 43, p. 636-644.
48. Holt, C., Modigliani, J. Muth y H. Simon, (1960) Planning Production, Inventories and Work Force, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
49. Hordijk, A. y H. Tijms (1974), "The Method of Successive Approximations and Markovian Decision Problems," Operations Research, Vol. 22, p. 519-521.
50. Howard, R. (1960), Dynamic Programming and Markov Processes, Technology Press of Mass. Ins. of Tech. Cambridge, Mass.

51. _____ y J. Matheson (1972), "Risk-Sensitive Markov Decision Processes," Management Science, Vol. 18, p. 256-269.
52. Iglehart, D. (1963), "Optimality of (s,S) Policies in the Infinite Horizon Dynamic Inventory -- Problem," Management Science, Vol. 9, p. 259-267.
53. Jaquette, S. (1972), "Markov Decision Processes with a New Optimality Criterion: Small Interest Rates," Ann. Math. Stat., Vol. 43, p. 1894-1901.
54. Jewell, W. (1963), "Markov Renewal Programming," I y II. Opns. Res., Vol. 11, p. 938-971.
55. Karlin, S. (1955), "The Structure of Dynamic -- Programming Models," Nav. Res. Log. Quart., Vol. 2, p. 285-294.
56. _____ (1959), Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics, Vols. I y II, Addison-Wesley. Reading, Mass.
57. _____ (1966) A First Course in Stochastic --- Processes, Academic Press, New York.
58. Kemeny, J. y J. Snell (1958), Finite Markov --- Chains, Van Nostrand, Princeton, New Jersey.
59. Klein, M. (1966), "Markovian Decision Models for Reject Allowance Problems," Mnagt. Sci., Vol. 12 p. 349-359.

60. Kolmogorov, A. y S. Fomin (1957), Element of the Theory of Functions and Funtional Analysis, Dover Pub. Inc., New York.
61. Krylov, N. (1965), "The Construccion of an Optimal Strategy for a Finite Controlled Chain," -- Theory Probability Appl., (URSS)(Traducción Inglesa)., Vol. 10, p. 45-54.
62. Kuratowski, C. (1948-1950), Topologie I, II Warszawa.
63. MacQueen, J. y Miller (1960), "Optimal Persistence Policies," Opns. Res., Vol. 8, p. 362-380.
64. Maitra, A. (1966), "A Note on Undiscounted Dynamic Programming," Ann. Math. Stat., Vol. 37, -- p. 1042-1044.
65. _____ (1969), "A Note on Positive Dynamic Programming," Ann. Math. Stat., Vol. 40, p. 316-318.
66. Manne, A. (1960), "Linear Programming and Sequential Decisions," Mgt. Sci., Vol. 6, p. 259-267.
67. Mine, H. y Osaki (1970), Markovian Decision Processes, American Elsevier, New York.
68. Neveu, J. (1965) Mathematical POUNDATIONS of the Calculus of Probability, Holden-Day, San Francisco California.

69. Ornstein, D. (1969), "On the Existence of Stationary Optimal Strategies," Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 20, p. 563-569.
70. Porteus, E. (1971), "On the Optimality of Generalized (s,S) Policies," Mgt. Sci., Vol. 17, -- p. 411-426.
71. _____ (1972), "The Optimality of Generalized (s,S) Policies Under Uniform Demand Densities," Mgt. Sci., Vol. 18, p.644-646.
72. _____ (1972) "Equivalent Formulation of the Stochastic Cash Balance Problem," Mgt. Sci., -- Vol. 19, p. 250-253.
73. Ross, S. (1968), "Arbitrary State Markovian Decision Problems," Ann. Math. Stat., Vol. 39, p. 2118-2122.
74. _____ (1970), Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden-Day, San Francisco, California.
75. Rothblum, U. (1974), "Multiplicative Markov Decision Chains," Thesis, Department of Operations -- Research, Stanford Univ. Stanford, California.
76. Strauch, R. (1969), Measure Theoretic Structures for Sequential Decision Models, The RAND Corp., Sta. Monica, California.

77. Totten, J. (1971), "Computational Methods for Finite State Finite Valued Markovian Decision Problems," Oper. Res. Cent., 71-9, Uni. of Calif., Berkeley, California.
78. Veinott, A. Jr. (1969), "Discret Dynamic Programming with Sensitive Disconunt Oprimality y Criteria," Ann. Math. Stat., Vol. 40, p. 1635-1660.
79. _____ y H. Wagner (1965), "Computing (s,S) Inventory Policies," Mgt. Sci., Vol. 2, p. 525-552.
80. Wald, A. (1947) Sequential Analysis, Wiley, New York.
81. Wong, P., y D. Luenberger (1968), "Reducing the Memory Requirements of Dynamic Programming," --- Opns. Res., Vol. 15, p. 1115-1125.
82. Yosida, K. (1966), Fuctional Analysis, Springer-Verlag, New York.

APENDICE A

En este apendice presentamos resultados matemáticos que han sido empleados a lo largo de los diferentes capítulos.

Lema A.1. Sean $a: C \rightarrow R$ y $b: C \rightarrow R$, dos funciones acotadas superiormente. Entonces,

$$1^\circ \quad \sup_{x \in C} a(x) + \sup_{x \in C} b(x) \geq \sup_{x \in C} (a(x) + b(x))$$

$$2^\circ \quad \left| \sup_{x \in C} a(x) - \sup_{x \in C} b(x) \right| \leq \sup_{x \in C} |a(x) - b(x)|$$

Demostración: 1) Obviamente $\sup a(x) \geq a(x)$, y $\sup b(x) \geq b(x)$. Por tanto, $\sup a(x) + \sup b(x) \geq a(x) + b(x)$, que implica el primer resultado.

2) Si $\sup a(x) = \sup b(x)$, el resultado es trivial. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\sup a(x) > \sup b(x)$. Por tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $\sup a(x) > \sup b(x) + \varepsilon$. Y por definición de supremo existe algún x en C satisfaciendo :

$$\sup a(x) \leq a(x) + \varepsilon \quad (\text{y } \sup b(x) \geq b(x), \text{ obviamente}).$$

Por tanto, $\sup a(x) - \sup b(x) \geq a(x) - b(x) + \varepsilon$ y $\sup a(x) - \sup b(x) \geq b(x) - a(x) - \varepsilon$.

Es decir,

$$|a(x) - b(x)| + \varepsilon \geq |\sup a(x) - \sup b(x)|$$

Y como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, el segundo resultado es inmediato. //

Lema A.2. Sean $S_i^m, D_i^m, i = 1, \dots, m$, los definidos en el capítulo II. Entonces,

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in S_i^m} \sup_{x \in D_i^m} |p_i^m(j|y) - \vec{p}(j|x, \sigma_i^m(x,y))| \leq \\ & \leq \sup_{x, x' \in S_i^m} \sup_{y \in D_i^m} |\vec{p}(j|x, \sigma_i^m(x,y)) - \vec{p}(j|x', \sigma_i^m(x',y))|. \end{aligned}$$

Demostración: Para cada x en S_i^m e y en D_i^m , tanto $p_i^m(j|y)$ como $\vec{p}(j|x, \sigma_i^m(x,y))$ son medidas probabilísticas definidas en la familia de conjuntos $\{S_i^m : i=1, 2, \dots, m\}$. Como $p_i^m(j|y)$ minimiza el problema de optimización (2), la conclusión es inmediata. //

El lema que sigue es trivial, pero se adecua a la forma que toman algunos de nuestros argumentos.

Lema A.3. Sea $a: B \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, C un subconjunto de B y $\sup_{x \in B} a(x) > \sup_{x \in C} a(x)$. Entonces, --

$$\sup_{x \in B-C} a(x) \geq \sup_{x \in B} a(x) - \sup_{x \in C} |a(x)|.$$

Demostración: Dado que $B = C \cup (B-C)$ y $\sup_{x \in B} a(x) > \sup_{x \in C} a(x)$,

$$\sup_{x \in B} a(x) = \sup_{x \in B-C} a(x). \text{ Por lo tanto,}$$

$$\sup_{x \in B} a(x) \leq \sup_{x \in B-C} a(x) + \sup_{x \in C} |a(x)|. //$$

APENDICE B

En este apéndice estudiamos los problemas de optimización por medio de los cuales se determinan las ganancias y probabilidades de transición que aparecen en los algoritmos II y III.

Primero necesitamos un lema.

Lema B.1. Sea $a: C \rightarrow R$, una función uniformemente acotada. La solución al problema de optimización de encontrar una constante a tal que

$$\text{minimice } \sup_{x \in C} |a - a(x)| \quad \text{es}$$

$$a = 1/2 (\sup_{x \in C} a(x) + \inf_{x \in C} a(x)) \quad \text{y el valor de la}$$

$$\text{función objetivo es } z = 1/2 (\sup_{x \in C} a(x) - \inf_{x \in C} a(x)).$$

Demostración: Suprimida, ya que es directa. //

Este lema señala que si el rango de una función está contenido en un intervalo acotado, el valor medio del menor intervalo cerrado conteniendo al rango de la función, minimiza la distancia máxima a todos los puntos de su rango.

Empleemos ahora este lema para demostrar los lemas 2.1 y 2.2.

Demostración del Lema 2.1. Para cada y en D_i^m , $i=1,2,\dots,m$, $r(x,y)$ es una función uniformemente acotada - (hipotesis 7*) definida de S_i^m a R . Por lo tanto, el lema 2.1 es, para cada y , precisamente el lema B.1.//

Demostración del Lema 2.2. Como hemos definido anteriormente $\vec{p}(j|x,y) \equiv \sum_{z \in S_j^m} p(z|x,y)$ para cada x en Ω ,

y en $D^m(x)$. De acuerdo con el lema B.1, para cada y en D_i^m , $i=1,\dots,m$, l° en el lema 2.1 es la solución - del problema de optimización (2) sin restricciones - (el apartado 5° en el algoritmo II y el apartado 4° en el algoritmo III, sin las restricciones). Por lo tanto, dado que $d_i^m(j,y) = \sup_{x \in S_i^m} |p_i^m(j|y) - \vec{p}(j|x,y)|$

para cada $j=1,\dots,m$, y D_i^m , el lema B.1 implica 4°.

Claramente, el valor optimo de la función objetivo en (2), sea z^* , satisface $z^* \geq d_i^m(y)$ para cada y en D_i^m , $i=1,\dots,m$, pues d_i^m es el valor de la función objetivo sin restricciones. Por lo tanto si mostramos que existe $p_i^m(j|y)$, tal que, para cada $i=1,\dots,m$, y en D_i^m satisface

i) Para cada $j=1,\dots,m$

$$p_i^m(j|y) - \inf_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y) \leq d_i^m(y)$$

$$\sup_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y) - p_i^m(j|y) \leq d_i^m(y)$$

ii) $p_i^m(j|y) \geq 0$ para cada $j=1,2,\dots,m$, y

$$\text{iii) } \sum_{j=1}^m p_i^m(j|y) = 1,$$

entonces, $p_i^m(\cdot|y)$ será la solución de (2) (con las - restricciones incluidas). Esto es lo que hacemos ahora, y el argumento está completo.

A partir de i) se deduce que

$$d_i^m(y) + \inf_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y) \geq p_i^m(j|y) \geq \sup_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y) - d_i^m(y) \quad (5)$$

La definición de $d_i^m(y)$ implica que ii) se satisface trivialmente. Mostraremos ahora que,

$$\sum_{j=1}^m (\sup_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y) + \inf_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y)) \geq 2. \quad (6)$$

El argumento es "por contradicción". Asumamos que (6) no es cierto. En ese caso

$$2 \sum_{j=1}^m \vec{p}(j|x,y) > \sum_{j=1}^m (\sup_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y) + \inf_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y))$$

pues

$$\sum_{j=1}^m \vec{p}(j|x,y) = 1. \text{ Por lo tanto, para cada } x \text{ en } \Omega,$$

$$2 \sum_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^m \vec{p}(j|x,y) > \sum_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^m (\sup_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y) +$$

$$+ \inf_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y)) = \sum_{j=1}^m \sum_{x \in \Omega} (\sup_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y) +$$

$$+ \inf_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y)) \quad |\Omega \text{ es finito}|$$

$$\geq \sum_{j=1}^m \sum_{x \in \Omega} (\vec{p}(j|x',y) + p(j|x',y)) \quad |\text{pues existe al me-}$$

nos un estado x^* tal que $p(j|x^*,y) - \varepsilon < \inf_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y)$

que lo satisface para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño |

$$= 2 \sum_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^m p(j|x',y) \quad |\Omega \text{ es finito}|$$

lo cual es una contradicción.

Por tanto,

$$1 \leq 1/2 \sum_{j=1}^m (\sup_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y) + \inf_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y))$$

$$= \sum_{j=1}^m (d_i^m(j,y) + \inf_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y)).$$

Que con i) implica $\sum_{j=1}^m p_i^m(j|Y) \leq \sum_{j=1}^m (d_i^m(j,y) +$

$$+ \inf_{x \in S_i^m} \vec{p}(j|x,y)).$$

Un argumento similar muestra que,

$$1 \geq \sum_{j=1}^m (\sup_{x \in S_i} \vec{p}(j|x,y) - d_i^m(j,y)), \text{ que de acuerdo}$$

con i) implica que

$$\sum_{j=1}^m p_i^m(j|y) \geq \sum_{j=1}^m (\sup_{x \in S_i} \vec{p}(j|x,y) - d_i^m(j,y)). \text{ Por}$$

lo tanto, el conjunto de $p_i^m(j|y)$ que satisface las -
restricciones i), ii) y iii) es no vacío. //

APENDICE C

Por medio de dos ejemplos mostramos que si el modelo no satisface las condiciones 9* y 10*, la continuidad en el sentido de Lipschitz de las ganancias (y de las probabilidades de transición posiblemente) puede quedar destruida.

Ejemplo C.1. Considerese el proceso de decisiones -- markoviano definido por,

$$\Omega = |0,1|$$

$$D(x) \equiv \begin{cases} \{ \text{Cuadrado de longitud 2 con centro en } (x,0) \} - \\ \{ (1-x,0) \} - \{ (x-1,0), (0,1), (0,-1) \} \\ \text{para } x \in (0,1) \\ \\ \{ \text{Cuadrado de longitud 2 con centro en } (0,0) \} - \\ \{ (0,1), (1,0), (0,-1) \} & \text{para } x = 0 \\ \\ \{ \text{Cuadrado de longitud 2 con centro en } (1,0) \} - \\ \{ (0,1), (0,-1) \} \end{cases}$$

$$r(x,y) = a \quad \text{para } y = (a,b).$$

$p(\cdot | x, y) \equiv$ distribución uniforme en Ω .

Definimos $\lambda' \equiv \lambda \equiv || \cdot ||$ = la norma euclídeana en el plano. La transformación σ_1^m , que asocia decisiones admisibles a las consideradas en el proceso aproximado, se define, para $y^* = (0,0)$ y $m = 1$ - por $\sigma_1^1(x, y^*) \equiv y'$, la solución del problema

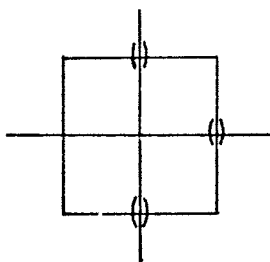
$$\min_{y \in D(x)} \lambda'(y, y^*).$$

Es decir,

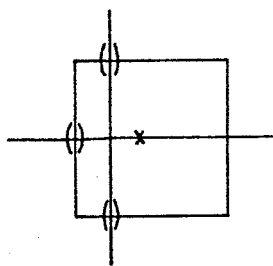
$$\sigma_1^1(x, y^*) \equiv \begin{cases} (-1, 0) & \text{para } x=0 \\ (1-x, 0) & \text{para } x \in (0, 1) \\ (0, 0) & \text{para } x=1 \end{cases}$$

Graficamente: Representamos $D(x)$, resultando

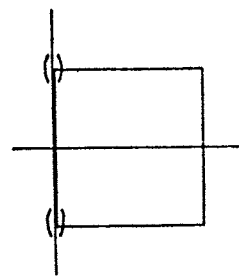
$D(0)$



$D(x)$



$D(1)$



Para $m=1$ $y^* = (0, 0) \in D(1) \cap D^1(x)$ para cada x en Ω . Por lo tanto,

$$\beta_1^1 \geq \sup_{x \in \Omega} |r(0, \sigma_1^1(0, y^*)) - r(x, \sigma_1^1(x, y^*))| / |0, x|$$

$$\geq \sup_{x \in (0, 1)} |r(0, (-1, 0)) - r(x, (1-x, 0))| / |x|$$

$$= \sup_{x \in (0, 1)} |-1 - (1-x)| / |x|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} |-2+x| / |x| = \infty,$$

Ejemplo C.2. Considerese el ejemplo anterior con los siguientes cambios :

$$r(x,y) \equiv a + b \quad \text{para } y = (a,b)$$

$$\sigma_1^1(1, (1-x, 0)) = \begin{cases} (0, 0) & \text{para } x = 1 \\ (1-x, 1) & \text{para } x \neq 1 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\gamma_1^1 = \sup_{x \in \Omega} \sup_{y, y' \in D_1(x)} |r(x, \sigma_1^1(x, y')) - r(x, \sigma_1^1(x, y))| /$$

$$/ ||y, y' ||$$

$$\geq \overline{\lim}_{y' \rightarrow (0,0)} |r(1, \sigma_1^1(1, y')) - r(1, \sigma_1^1(1, (0,0)))| /$$

$$/ ||(0,0), y' || \quad | \text{para } y = (0,0) |$$

$$\geq \lim_{x \rightarrow 1} |r(1, \sigma_1^1(1, (1-x, 0))) - r(1, \sigma_1^1(1, (0,0)))| /$$

$$/ ||(1-x, 0), (0,0) ||$$

$$| \text{para la subsecuencia } \{y'\} = \{(1-x, 0)\} |$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} |2-x| / |1-x| = \infty,$$