J. reine angew. Math. **503** (1998), 193–236

Journal für die reine und angewandte Mathematik


# Le théorème de continuité de la division dans les anneaux d'opérateurs différentiels[1])

Par *Zoghman Mebkhout* à Paris et *Luis Narváez Macarro*[2]) à Sevilla

**Abstract.** In this paper we prove the continuity of Weierstrass-Hironaka division of finite order linear differential operators over a complex analytic manifold $X$ with respect to the induced topology by a canonical one of Fréchet nuclear on the sheaf $\mathscr{D}_X^\infty$. As a consequence, admissible modules over $\mathscr{D}_X^\infty$ and coherent modules over $\mathscr{D}_X$ inherit a canonical locally convex structure and admit finite free resolutions with strict morphisms. This structure allows, as example, to give a topological caracterisation of regularity and to prove that the existence of a regular Bernstein-Sato functional equation for a coherent $\mathscr{D}_X$-module, $\mathscr{M}$, with respect to an arbitrary divisor $Y \subset X$, implies the comparison theorem $\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}[*Y] \simeq j_* j^{-1} \mathscr{M}^\infty$.

## Introduction

Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ une variété analytique complexe dénombrable à l'infini. Le faisceau structural est à valeurs dans la catégorie des espaces localement convexes métrisables complets nucléaires. On peut alors définir le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre infini $\mathscr{D}_X^\infty$ comme le faisceau des endomorphismes continus du faisceau structural $\mathrm{Homtop}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X)$. Dans ce travail nous munissons le faisceau $\mathscr{D}_X^\infty$ d'une structure canonique de faisceau d'algèbres de Fréchet-nucléaires qui le fait apparaître comme le complété du faisceau des opérateurs différentiels d'ordre localement fini $\mathscr{D}_X$. Nous disposons alors des outils de l'analyse, en particulier de la théorie des espaces vectoriels topologiques localement convexes, pour étudier l'extension $\mathscr{D}_X \to \mathscr{D}_X^\infty$.

Nous montrons le résultat central de cet article: tout point de $X$ admet un système fondamental de voisinages au-dessus desquels la division de Weierstrass-Hironaka des opérateurs d'ordre fini [B-M], [$\mathrm{Ca}_1$] est *continue* pour la topologie canonique induite.

[1]) Recherche entreprise dans le cadre de l'Action Intégrée HF 96-0132.
[2]) Supported by DGICYT PB94-1435.

Ce résultat a de nombreuses conséquences et soulève plusieurs questions (§4). Il montre que tout $\mathscr{D}_X$-module cohérent admet une résolution locale finie par des modules libres de type fini dont les morphismes sont topologiquement $\mathbb{C}$-scindés, et donc *stricts*, sur assez d'ouverts. Cela permet de considérer le couple $(\mathscr{D}_X, \mathscr{D}_X^\infty)$ comme l'analogue d'un anneau de Zariski et de son complété en Algèbre Commutative. Pour l'illustrer nous montrons, sur le modèle de la démonstration de Serre [Ser], que l'extension $\mathscr{D}_X \to \mathscr{D}_X^\infty$ est fidèlement plate.

De la même façon, à partir d'un schéma †-adique $\mathscr{X}^\dagger = (X_k, \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})$ au sens de Meredith [Mr] sur un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques $(0, p)$, nous avons défini le faisceau des opérateurs différentiels $p$-adiques d'ordre infini $\mathscr{D}_{\mathscr{X}^\dagger}^\dagger$ comme un faisceau d'endomorphismes du faisceau structural $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}$ ayant certaines propriétés qui portent sur la réduction modulo les puissances de l'idéal maximal et qui rendent compte des conditions de croissance de Monsky-Washnitzer [M-N$_2$], 4.2.1, [M-N$_3$], 4.4.5. La seule propriété de continuité est insuffisante. Le faisceau $\mathscr{D}_{\mathscr{X}^\dagger}^\dagger$ est seulement plat sur le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini $\mathscr{D}_{\mathscr{X}^\dagger}$. La situation $p$-adique présente de nombreuses différences avec la situation complexe, par exemple on n'a pas un théorème de division *continue* en toute généralité [M-N$_2$], p. 304. Il faut imposer des conditions de nature $p$-adique sur le diviseur. C'est là une différence profonde de structure. Cependant cette analogie fournit plusieurs conjectures [M-N$_2$] de finitude en cohomologie $p$-adique. Ce point de vue est un cadre naturel pour la théorie des coefficients $p$-adiques au sens de Grothendieck [Gro]. Grâce à la démonstration du théorème de l'indice des équations différentielles $p$-adiques on obtient dans ce contexte la définition de la catégorie des coefficients $p$-adiques sur les courbes qui a toutes les propriétés de finitude de la catégorie des coefficients $\ell$-adiques [C-M], [Me$_3$].

Voici le contenu de ce travail. Dans le premier paragraphe nous rappelons, pour fixer les notations et pour la commodité du lecteur, les algorithmes de division dans le cas commutatif [A-H-V], [Ga] et dans le cas non commutatif [B-M], [Ca$_1$]. Dans le deuxième paragraphe nous munissons le faisceau des opérateurs d'ordre infini d'une structure de faisceau de Fréchet-nucléaire. Dans le troisième paragraphe nous montrons la majoration fondamentale, qui est le résultat technique central de ce travail. Dans le quatrième paragraphe nous utilisons ce résultat pour munir les $\mathscr{D}_X$-modules cohérents et les $\mathscr{D}_X^\infty$-modules admissibles de structures topologiques localement convexes. Nous passons en revue les problèmes liés à cette structure que nous avons rencontrés. Dans le dernier paragraphe nous montrons un critère topologique de la régularité, qui fait apparaître l'irrégularité comme la différence entre deux topologies localement convexes naturelles. Comme application, nous montrons directement, sans faire appel au complexe des solutions holomorphes, que l'existence d'une équation de Bernstein-Sato régulière le long d'une hypersurface arbitraire pour un $\mathscr{D}_X$-module holonome ou spécialisable entraîne le théorème de comparaison. Ceci généralise le cas d'une hypersurface lisse traité dans [L-M] par des méthodes tout-à-fait différentes. Chemin faisant, nous montrons l'existence d'un développement *canonique* du type de Laurent pour les fonctions ayant des singularités essentielles le long d'une hypersurface singulière.

Le théorème de continuité dans le cas de la dimension un a été traité dans [M-N$_1$], [Na]. Le dernier paragraphe, concernant le rapport entre l'équation fonctionnelle et le théorème de comparaison, s'inspire et précise les calculs faits par le premier auteur dans [Me$_1$], §8. Il n'était pas prévu dans le projet initial de cet article et a été mis au point par le second auteur.

## 1. Rappel des théorèmes de division

**1.1. Division dans les anneaux des séries formelles.** Soient un corps $k$ et $\underline{F} = (F_1, \dots, F_m)$ un vecteur de séries formelles à coefficients dans $k$. On a une écriture unique

$$\underline{F} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} F_{\alpha,j}\, \underline{x}^{\alpha,j}$$

où les $F_{\alpha,j}$ sont dans $k$ et $\underline{x}^{\alpha,j}$ dénote le vecteur $(0, \dots, \underline{x}^{\alpha}, \dots, 0)$, le monôme étant à la $j$-ème place. Autrement dit, on a $F_j = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} F_{\alpha,j}\, \underline{x}^{\alpha}$ pour chaque $j \in \{1, \dots, m\}$. Le *support* de $\underline{F}$ est l'ensemble

$$\mathcal{N}(\underline{F}) = \{(\alpha, j) \in \mathbb{N}^n \times \{1, \dots, m\} \mid F_{\alpha,j} \neq 0\} \subseteqq \mathbb{N}^n \times \{1, \dots, m\}\,.$$

Comme d'habitude, si $(\alpha, i)$ et $(\beta, j)$ sont deux éléments de $\mathbb{N}^n \times \{1, \dots, m\}$, considérons les deux relations de bon ordre total suivantes:

**Ordre léxicographique inverse.** $\alpha <_{\mathrm{lexinv}} \beta$ s'il existe un indice $j$ compris entre 1 et $n$ tel que $\alpha_i = \beta_i$ pour $i > j$ et $\alpha_j < \beta_j$.

***L*-ordre semi-léxicographique pour les vecteurs.** $(\alpha, i) <_L (\beta, j)$ si $L(\alpha) < L(\beta)$ ou si $L(\alpha) = L(\beta)$ et soit $i < j$ soit $i = j$ et $\alpha <_{\mathrm{lexinv}} \beta$, où $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire à coefficients non négatifs.

Le monoïde $\mathbb{N}^n$ opère sur $\mathbb{N}^n \times \{1, \dots, m\}$ par addition sur la première composante et cette opération est compatible avec $<_L$.

Soient $\underline{F}^1, \dots, \underline{F}^p \in k[\![\underline{x}]\!]^m$ des vecteurs non nuls. Notons

$$\Delta_1 := \mathbb{N}^n + \exp(\underline{F}^1),$$
$$\Delta_i := \big(\mathbb{N}^n + \exp(\underline{F}^i)\big) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j, \quad i = 2, \dots, p\,,$$
$$\bar{\Delta} := \mathbb{N}^n \times \{1, \dots, m\} \setminus \bigcup_{i=1}^{p} \Delta_i = \mathbb{N}^n \times \{1, \dots, m\} \setminus \bigcup_{i=1}^{p} \big(\mathbb{N}^n + \exp(\underline{F}^i)\big)\,.$$

Rappelons le théorème de division de vecteurs de séries formelles (cf. [A-H-V], [Ga]).

**Théorème 1.1.1.** *Pour chaque $\underline{G} \in k[\![\underline{x}]\!]^m$ ils existent des séries $Q_1, \dots, Q_p \in k[\![\underline{x}]\!]$ et un vecteur $\underline{R} \in k[\![\underline{x}]\!]^m$ uniques tels que*

1. $\underline{G} = \sum_{i=1}^{p} Q_i\, \underline{F}^i + \underline{R}$,

2. $\mathcal{N}(Q_i) + \exp(\underline{F}^i) \subseteqq \Delta_i$ *pour tout* $i = 1, \ldots, p$,

3. $\mathcal{N}(\underline{R}) \subseteqq \bar{\Delta}$.

*Bases de division.* Si $I \subset k[\![\underline{x}]\!]^m$ est un sous-module non nul, posons

$$\exp(I) = \{\exp(\underline{F}) \mid \underline{F} \in I, F \neq 0\} \subseteqq \mathbb{N}^n \times \{1, \ldots, m\}.$$

Il s'agit d'un idéal de $\mathbb{N}^n \times \{1, \ldots, m\}$, et donc il a une base $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^d\}$, unique si elle est minimale,

$$\exp(I) = \sum_{i=1}^{d} (\alpha^i + \mathbb{N}^n).$$

Une *base de division* de $I$ est une famille d'éléments $\underline{F}^1, \ldots, \underline{F}^d \in I$ tels que

$$\exp(\underline{F}^i) = \alpha^i, \quad i = 1, \ldots, d.$$

D'après le théorème de division formelle, une base de division de $I$ est toujours un système de générateurs, et en plus, un vecteur $\underline{F}$ appartient à $I$ si et seulement si le reste de la division par une base de division est nul. Cette propriété peut être interprétée de la façon suivante: si $\underline{F}^1, \ldots, \underline{F}^d$ est une base de division de $I$, considérons l'application $k[\![\underline{x}]\!]$-linéaire

$$\pi : (B_1, \ldots, B_d) \in k[\![\underline{x}]\!]^d \mapsto \sum_{i=1}^{d} B_i \underline{F}^i \in k[\![\underline{x}]\!]^m$$

et l'application $k$-linéaire $\sigma : k[\![\underline{x}]\!]^m \to k[\![\underline{x}]\!]^d$ qui associe à chaque $\underline{G} \in k[\![\underline{x}]\!]^m$ le vecteur $(Q_1, \ldots, Q_d) \in k[\![\underline{x}]\!]^d$ des quotients par la division par rapport aux $\underline{F}^i$. On a $\pi \circ \sigma \circ \pi = \pi$, autrement dit $\sigma$ est un scindage de $\pi$, d'où une décomposition $k$-linéaire

$$k[\![\underline{x}]\!]^m = I \oplus (k[\![\underline{x}]\!]^m / I). \tag{1}$$

**1.2. Division dans les anneaux de séries convergentes.** Soit $n$ un entier $\geqq 1$ et considérons l'anneau $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ des séries convergentes à $n$ variables. Pour chaque polyrayon $\varrho = (\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ on notera $\mathcal{O}(\varrho)$ l'anneau des séries convergentes $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha$ telles que $|f|_\varrho := \sum |a_\alpha| \varrho^\alpha < \infty$.

L'espace $\mathcal{O}(\varrho)$ muni de la norme $|\ |_\varrho$ est une algèbre de Banach (cf. [Gr-Re]) et on a $\mathcal{O} = \bigcup_\varrho \mathcal{O}(\varrho)$. On munit ainsi l'espace $\mathcal{O}$ d'une topologie localement convexe limite inductive des espaces $\mathcal{O}(\varrho)$ $(\mathcal{LB})$ pour laquelle il est complet [EVT], chap. IV, § 3, cor. 2, [Seb].

Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme linéaire à coefficients $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ non négatifs et non tous nuls. Pour un $\beta \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ posons

$$\Lambda_\beta := \{(\ell_1 + \delta_1, \ldots, \ell_n + \delta_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \mid 0 < \delta_1 < \beta_1 \delta_2 < \cdots < \beta_{n-1} \delta_n < \beta_n\}.$$

**Définition 1.2.1.** On dira qu'un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}_*^n$ est *effilé* pour la forme linéaire $L$ s'il existe $\beta \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et une fonction continue $C : \Lambda_\beta \to \mathbb{R}_+^*$ tels que $\mathcal{U}$ contient l'ouvert de $\mathbb{R}_+^n$

$$\mathscr{U}_{\beta,C} = \{(\eta^{l'_1}, \ldots, \eta^{l'_n}) \,|\, (l'_1, \ldots, l'_n) \in \Lambda_\beta, 0 < \eta < C(l'_1, \ldots, l'_n)\}\,.$$

Les ouverts effilés sont non vides, l'intersection de deux ouverts effilés est aussi un ouvert effilé, donc non vide, et si $\mathscr{U}$ est un ouvert effilé les polycylindres centrés à l'origine de polyrayon $\varrho \in \mathscr{U}$ forment un système fondamental de voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$. De plus, tout polycylindre ouvert de polyrayon $\varrho \in \mathscr{U}$ est réunion de polycylindres compacts donts les polyrayons appartiennent aussi à $\mathscr{U}$.

Rappelons le théorème de continuité de la division commutative [Ga]:

**Théorème 1.2.2.** *Gardons les notations du théorème* 1.1.1 *et supposons*

$$\underline{F}^1, \ldots, \underline{F}^p \in \mathcal{O}^m\,.$$

*Alors, il existe un ouvert effilé $\mathscr{U}$ de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ et une fonction $C_0 : \mathscr{U} \to \mathbb{R}_+^*$ tels que pour chaque $\varrho \in \mathscr{U}$ et chaque $\underline{G} \in \mathcal{O}(\varrho)^m \subset \mathcal{O}^m \subset \mathbb{C}[\![\underline{x}]\!]^m$, si $Q_1, \ldots, Q_p, \in \mathbb{C}[\![\underline{x}]\!]$, $\underline{R} \in \mathbb{C}[\![\underline{x}]\!]^m$ désignent les quotients et le reste donnés par le théorème* 1.1., *on a*

$$|Q_i|_\varrho,\, |\underline{R}|_\varrho := \sup_{1 \leqq j \leqq m} |R_j|_\varrho \leqq C_0(\varrho)|\underline{G}|_\varrho\,.$$

**1.3. Division dans les anneaux des opérateurs différentiels d'ordre fini.** Nous allons rappeler le théorème de division des opérateurs différentiels d'ordre fini [B-M], [$\mathrm{Ca}_1$], [$\mathrm{Ca}_2$].

Notons $\mathscr{D}$ l'anneau des germes à l'origine de $\mathbb{C}^n$ d'opérateurs différentiels linéaires à coefficients holomorphes.

Fixons une forme linéaire $L : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ à coefficients non négatifs et non tous nuls, et l'ordre $<_L$ correspondant.

Si $\underline{P} = (P_1, \ldots, P_m) \in \mathscr{D}^m$, on a une écriture unique

$$\underline{P} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha,j} \underline{\partial}^{\alpha,j} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{(\alpha^1,\alpha^2) \in \mathbb{N}^{2n}} a_{\alpha^1,\alpha^2,j}\, \underline{x}^{\alpha^1} \underline{\partial}^{\alpha^2,j}\,,$$

où les $a_{\alpha,j}$ sont dans $\mathcal{O}$, les $a_{\alpha^1,\alpha^2,j}$ sont dans $\mathbb{C}$ et $\underline{\partial}^{\alpha,j}$ dénote le vecteur $(0, \ldots, \underline{\partial}^\alpha, \ldots, 0)$, le monôme étant à la $j$-ème place. Autrement dit, on a $P_j = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha,j} \underline{\partial}^\alpha$ pour chaque $j \in \{1, \ldots, m\}$. Le support de $\underline{F}$ est l'ensemble

$$\mathcal{N}(\underline{F}) = \{(\alpha^1, \alpha^2, j) \in \mathbb{N}^{2n} \times \{1, \ldots, m\} \,|\, a_{\alpha^1,\alpha^2,j} \neq 0\} \subset \mathbb{N}^{2n} \times \{1, \ldots, m\}\,.$$

De même, on posera $\operatorname{ord}(\underline{P}) = \sup_{1 \leqq j \leqq m} \operatorname{ord}(P_j)$. Le *symbol principal* de $\underline{P}$ est le vecteur homogène

$$\sigma(\underline{P}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha| = \operatorname{ord}(\underline{P})} a_{\alpha,j}\, \xi^{\alpha,j} \in \mathcal{O}[\underline{\xi}]^m\,.$$

On appellera *exposant* de $\underline{P}$ l'élément $\exp(\underline{P}) := \exp(\sigma(\underline{P})) \in \mathbb{N}^{2n} \times \{1, \ldots, m\}$, où $\exp(\sigma(\underline{P}))$ est pris comme l'exposant d'un vecteur de séries formelles dans les variables $x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n$.

Rappelons le théorème de division non commutative [Ca$_1$], [Ca$_2$]:

**Théorème 1.3.1.** *Soient $\underline{P}^1, \ldots, \underline{P}^p \in \mathscr{D}^m$ des vecteurs non nuls de germes d'opérateurs différentiels. Alors, pour tout $\underline{A} \in \mathscr{D}^m$, ils existent des opérateurs $Q_1, \ldots, Q_p \in \mathscr{D}$ et un vecteur $\underline{R} \in \mathscr{D}^m$ uniques tels que*

1. $\underline{A} = \sum_{i=1}^{p} Q_i \underline{P}^i + \underline{R}$,

2. $\mathscr{N}(Q_i) + \exp(\underline{P}^i) \subseteqq \Delta_i$ *pour tout* $i = 1, \ldots, p$,

3. $\mathscr{N}(\underline{R}) \subseteqq \bar{\Delta}$,

*où $\bar{\Delta}$ et les $\Delta_i$ sont définis comme dans* 1.2.

## 2. Structure topologique localement convexe sur les anneaux d'opérateurs différentiels

**2.1. Étude globale intrinsèque.** Soit $X$ une variété analytique complexe lisse de dimension $n$, que nous supposerons toujours dénombrable à l'infini. Pour chaque ouvert $U$ de $X$, la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes muni l'espace $\mathscr{O}_X(U)$ d'une structure d'espace de Fréchet-nucléaire. Les morphismes de restriction sont continus et si $\{U_i\}_{i \in I}$ est un récouvrement ouvert de $U$, l'injection naturelle

$$\mathscr{O}_X(U) \hookrightarrow \prod_{i \in I} \mathscr{O}_X(U_i)$$

est une immersion topologique. Le faisceau structural $\mathscr{O}_X$ est un *faisceau de Fréchet-nucléaire* (cf. [Gu-Ro], chap. VIII, A). On a facilement:

**Lemme 2.1.1.** *Soit $P : \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$ un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(a) *$P$ est continu, i.e. pour chaque ouvert $V \subseteqq X$, $P(V) : \mathscr{O}_X(V) \to \mathscr{O}_X(V)$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire continue.*

(b) *$P$ est localement continu, i.e. il existe un récouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de $X$ tel que la restriction $P|_{U_i} : \mathscr{O}_{U_i} \to \mathscr{O}_{U_i}$ est continu.*

Notons $\mathscr{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels linéaires d'ordre localement fini à coefficients holomorphes sur $X$. Il résulte du lemme précédent que tout opérateur différentiel d'ordre localement fini est un endomorphisme continu du faisceau structural. On a la définition suivante [Me$_1$]:

**Définition 2.1.2.** On définit le pré-faisceau des opérateurs différentiels linéaires d'ordre infini sur $X$ comme le pré-faisceau d'anneaux non commutatifs des endomorphismes continus du faisceau structural $\mathcal{O}_X$, que nous noterons $\mathrm{Homtop}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.

En vertu du lemme 2.1.1, le pré-faisceau $\mathrm{Homtop}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ est un faisceau. De plus on montre facilement:

**Proposition 2.1.3.** *Soit $P : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(a) *$P$ est continu.*

(b) *Pour tout couple de compacts $K$, $K' \subseteqq X$ avec $K \subset \mathring{K}'$, il existe une constante $C_{K,K'} > 0$ telle que $|P(f)|_K \leqq C_{K,K'} |f|_{K'}$, $\forall f \in \mathcal{O}_X(K')$.*

Pour chaque $\alpha \in \mathbb{N}^n$, posons $\Delta^{(\alpha)} := \dfrac{\partial^\alpha}{\alpha!}$, où $\alpha! := \prod \alpha_i!$.

**Proposition 2.1.4.** *Si $(U; \underline{x})$ est une carte locale de $X$ et $P$ est un opérateur différentiel d'ordre infini sur $U$, il existe des fonctions uniques $a_\alpha \in \mathcal{O}_X(U)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, telles que $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \Delta^{(\alpha)}$ avec*

$$\lim_{|\alpha| \to \infty} |a_\alpha(x)|^{\frac{1}{|\alpha|}} = 0$$

*uniformément sur chaque compact de $U$, ou de façon équivalente*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha(\underline{x})\, \underline{\xi}^\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U \times \mathbb{C}^n)\,.$$

*Preuve.* On définit la famille $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ des fonctions holomorphes sur $U$ par

$$a_\alpha(\underline{x}) = \sum_{\gamma \leqq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (-\underline{x})^\gamma P(\underline{x}^{\alpha - \gamma})\,,$$

où on a écrit $\gamma \leqq \alpha$ pour $\gamma_i \leqq \alpha_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Pour tout $\underline{y} \in \mathbb{C}^n$ on a formellement l'égalité

$$a_\alpha(\underline{x}) = \sum_{\gamma \leqq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (-\underline{x} + \underline{y})^\gamma P\big((\underline{x} - \underline{y})^{\alpha - \gamma}\big)\,.$$

Cette égalité entraîne facilement la proposition. □

Nous notons aussi par $\mathcal{D}_X^\infty$ le faisceau $\mathrm{Homtop}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$. En vertu de la proposition précédente le faisceau $\mathcal{D}_X^\infty$ coïncide avec le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre infini défini dans [Sa], [S-K-K] (voir aussi [$\mathrm{Is}_1$]). Dans le cas $C^\infty$ l'équivalence entre les deux définitions est une conséquence du théorème des noyaux de Schwartz [Sch].

**Remarque 2.1.5.** La proposition précédente nous donne un isomorphisme (non canonique) de $\mathcal{O}_U$-modules à gauche

$$\mathcal{D}_X^\infty|_U \simeq \pi_* \mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}^n}, \tag{2}$$

où $\pi : U \times \mathbb{C}^n \to U$ est la projection, qui évidemment ne respecte pas les structures d'anneaux. Pour une généralisation de cette remarque voir [$\mathrm{Is}_2$].

**Définition 2.1.6.** Pour chaque ouvert $U \subseteqq X$ on appellera *topologie canonique* sur $\mathcal{D}_X^\infty(U)$, que nous noterons $\mathcal{T}_c$, celle qui est définie par la famille des semi-normes

$$p_{(K,K')} : P \in \mathcal{D}_X^\infty(U) \mapsto p_{(K,K')}(P) := \sup \left\{ \frac{|P(f)|_K}{|f|_{K'}} \mid f \in \mathcal{O}_X(K'), f \neq 0 \right\},$$

où $K$, $K'$ sont des compacts de $U$ avec $K \subset \mathring{K}'$.

Il existe des familles "fondamentales" dénombrables $\{(K_n, K_n')\}_{n \in \mathbb{N}}$ des couples de compacts de $U$, $K_n \subset \mathring{K}_n'$, telles que pour tout couple de compacts $K$, $K'$ de $U$, avec $K \subset \mathring{K}'$, ils existent $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ tels que

$$K \subseteqq \bigcup_{i=1}^r K_{n_i}, \quad \bigcup_{i=1}^r K_{n_i}' \subseteqq K' \quad \text{et donc} \quad p_{(K,K')} \leqq \sup_{1 \leqq i \leqq r} p_{(K_{n_i}, K_{n_i}')}.$$

On montre ainsi que, pour tout ouvert $U$ de $X$, l'espace des sections $\mathcal{D}_X^\infty(U)$, muni de sa topologie canonique, devient une $\mathbb{C}$-algèbre de Fréchet, i.e. localement convexe, métrisable et complète, dont la composition d'opérateurs est continue. De plus, une suite d'opérateurs converge vers un opérateur sur $U$ si et seulement si elle converge localement.

Le faisceau $\mathcal{D}_X^\infty$ est un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres de Fréchet, et le sous faisceau $\mathcal{D}_X$ pour la topologie induite est un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres localement convexes métrisables.

**Remarque 2.1.7.** Si $(U; \underline{x})$ est une carte locale de $X$ et $P$ est un opérateur différentiel d'ordre infini sur $U$, la série $P = \sum a_\alpha \Delta^{(\alpha)}$ de la proposition 2.1.4 est convergente par rapport à la topologie canonique. En particulier l'espace $\mathcal{D}_X(U)$ est dense dans $\mathcal{D}_X^\infty(U)$ et donc son complété $\widehat{\mathcal{D}_X(U)}$ est égal à $\mathcal{D}_X^\infty(U)$.

**2.2. Étude en coordonnées locales.** Soit $U \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert. Pour chaque compact $K \subset U$ et pour chaque polyrayon $L \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ on définit, pour tout $P = \sum a_\alpha \Delta^{(\alpha)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}^\infty(U)$, la semi-norme $|P|_{(K,L)} := \sum |a_\alpha|_K L^\alpha$. Si $L > 0$, on notera aussi $|-|_{(K,L)}$ la semi-norme $|-|_{(K,(L,\dots,L))}$. Quand $K$ et $L$ varient, on obtient une topologie localement convexe (métrisable) sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}^\infty(U)$ qui en fait coïncide avec la topologie obtenue en transportant celle de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U \times \mathbb{C}^n)$ par l'isomorphisme $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}^\infty(U) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U \times \mathbb{C}^n)$ dans 2.1.5. C'est donc une topologie de Fréchet-nucléaire (cf. [$\mathrm{Do}_2$]). On montre alors facilement:

**Proposition 2.2.1.** *Pour chaque ouvert $U \subseteqq \mathbb{C}^n$ non vide, la topologie canonique sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}^\infty(U)$ coïncide avec la topologie définie par la famille des semi-normes $|-|_{(K,L)}$, où $K \subset U$ est un compact et $L \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.*

**Corollaire 2.2.2.** *Si $X$ est une variété analytique complexe lisse, le faisceau $\mathscr{D}_X^\infty$ muni de la topologie canonique est un faisceau à valeurs dans la catégorie des algèbres de Fréchet-nucléaires.*

**2.2.3.** Notons $\mathscr{D}^\infty$ la fibre à l'origine du faisceau $\mathscr{D}^\infty_{\mathbb{C}^n}$.

Pour chaque polyrayon $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ notons $\mathscr{D}^\infty(\varrho)$ le sous-espace de $\mathscr{D}^\infty$ dont les éléments sont de la forme $\sum a_\alpha \Delta^{(\alpha)}$, avec $a_\alpha \in \mathscr{O}(\varrho)$ et

$$\lim_{|\alpha| \to \infty} (|a_\alpha|_\varrho)^{\frac{1}{|\alpha|}} = 0 \,.$$

On notera aussi $\mathscr{D}(\varrho) = \mathscr{D}^\infty(\varrho) \cap \mathscr{D}$.

On a $\mathscr{D}^\infty = \bigcup_\varrho \mathscr{D}^\infty(\varrho)$, $\mathscr{D} = \bigcup_\varrho \mathscr{D}(\varrho)$. Remarquons néanmoins que les $\mathscr{D}^\infty(\varrho)$ (resp. les $\mathscr{D}(\varrho)$) ne sont pas de sous-anneaux de $\mathscr{D}^\infty$ (resp. de $\mathscr{D}$).

Sur chaque $\mathscr{D}^\infty(\varrho)$ on considérera la topologie définie par la famille des semi-normes

$$|P|_{\varrho, L} := \sum |a_\alpha|_\varrho L^\alpha \,, \tag{3}$$

pour $P = \sum a_\alpha \Delta^{(\alpha)} \in \mathscr{D}^\infty(\varrho)$, $L$ étant un polyrayon de $(\mathbb{R}_+^*)^n$.

Si $U$ est le polycylindre ouvert centré à l'origine de polyrayon $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, les $\sigma_i$ pouvant être infinis, et $\{\sigma^m\}_{m \geqq 1}$ est une suite croissante de polyrayons finis qui tends vers $\sigma$, alors,

$$\mathscr{D}^\infty_{\mathbb{C}^n}(U) = \bigcap_{m \geqq 1} \mathscr{D}^\infty(\sigma^m) \,, \tag{4}$$

et la topologie définie sur $\mathscr{D}^\infty_{\mathbb{C}^n}(U)$ par les semi-normes $|-|_{(K,L)}$, avec $K \subset U$ compact et $L \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ coïncide avec la topologie définie par la famille des semi-normes

$$|-|_{\sigma^m, L}, \quad m \geqq 1,\ L \in (\mathbb{R}_+^*)^n \,.$$

Etant donné un opérateur $P = \sum a_\alpha \Delta^{(\alpha)} \in \mathscr{D}^\infty(\varrho)$, on pose $b_\alpha := \dfrac{a_\alpha}{\alpha!}$. La topologie définie sur les $\mathscr{D}^\infty(\varrho)$ peut être aussi définie par la famille de semi-normes:

$$|P|_\varrho^L := \sum_{d=0}^\infty d! \left( \sum_{|\alpha| = d} |b_\alpha|_\varrho L^\alpha \right),$$

$L$ étant un polyrayon dans $(\mathbb{R}_+^*)^n$, car on a les inégalités $|P|_{\varrho, L} \leqq |P|_\varrho^L \leqq |P|_{\varrho, nL}$ pour tout $P \in \mathscr{D}^\infty(\varrho)$. Ces semi-normes seront utilisées de façon *essentielle* dans la preuve du théorème de continuité 3.1.2.

**2.2.4.** Les deux topologies sur $\mathscr{D}^\infty$ (resp. sur $\mathscr{D}$) limite inductive localement convexe des espaces $\mathscr{D}^\infty_{\mathbb{C}^n}(U)$ (resp. $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(U)$), munis de la topologie canonique, quand $U$ est un voisinage ouvert de l'origine, et limite inductive des espaces $\mathscr{D}^\infty(\varrho)$ (resp. $\mathscr{D}(\varrho)$), munis de la topologie définie par les semi-normes précédentes, quand $\varrho$ est un polyrayon, coïncident. Il est facile de voir que cette topologie est séparée et est donc de type $\mathscr{LF}$ [EVT] (voir 4.3.1).

## 3. Le théorème de continuité de la division dans l'anneau des germes d'opérateurs différentiels d'ordre fini

**3.1. La majoration fondamentale.** Nous allons montrer que les quotients et le reste de la division du théorème 1.3.1 dépendent continuement du dividende pour la topologie canonique introduite dans le paragraphe précédent. Fixons une forme linéaire $L : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ à coefficients non négatifs et non tous nuls. Nous commençons par montrer une proposition préliminaire.

**Proposition 3.1.1.** *Soient $n \geqq 1$, $\delta \geqq 0$ des entiers. Il existe un polynôme $\Phi(t)$ à coefficients rationnels positifs tel que pour tous les entiers $d$, $\eta$ avec $d \geqq \delta$, $0 \leqq \eta \leqq d$, les multi-indices $\gamma \in \mathbb{N}^n$, $|\gamma| = d - \delta$ et les polyrayons $\varrho \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ avec $\varrho_i \leqq 1$, $i = 1, \ldots, n$, on ait les inégalités*

$$\frac{\gamma!}{(d-\delta)!} \sum_{|\mu|=\eta} \varrho^\mu \left( \sum_{\substack{\gamma' \leqq \mu, \gamma \\ |\mu - \gamma'| \leqq \delta}} \frac{1}{\gamma'!} \right) \leqq \frac{\Phi(d-\eta)}{(\eta-\delta)!} \frac{\varrho^\gamma}{(\prod_i \varrho_i)^{d-\eta}} .$$

*Preuve.* Soient $d \geqq \delta$, $\gamma \in \mathbb{N}^n$ et $0 \leqq \eta \leqq d$. Posons pour chaque $\mu \in \mathbb{N}^n$ avec $|\mu| = \eta$

$$\Delta_\mu := \{\gamma' \in \mathbb{N}^n \,|\, \gamma' \leqq \mu, |\gamma'| \geqq \eta - \delta, \gamma' \leqq \gamma\} ,$$

et

$$D_\eta := \{\mu \in \mathbb{N}^n \,|\, |\mu| = \eta, \Delta_\mu \neq \emptyset\} .$$

Notons $\gamma^0$ le multi-indice dont les composantes sont $\gamma_i^0 = \sup\{0, \gamma_i - (d-\eta)\}$ pour $i = 1, \ldots, n$. L'ensemble $D_\eta$ est contenu dans $\{\mu \in \mathbb{N}^n \,|\, |\mu| = \eta, \mu \geqq \gamma^0\}$ et l'application

$$\mu \in \{\mu \in \mathbb{N}^n \,|\, |\mu| = \eta, \mu \geqq \gamma^0\} \mapsto \mu - \gamma^0 \in \{\mu' \in \mathbb{N}^n \,|\, |\mu'| = \eta - |\gamma^0|\}$$

est injective, d'où le cardinal de $D_\eta$ est plus petit ou égal à

$$\operatorname{card}\{\mu' \in \mathbb{N}^n \,|\, |\mu'| \leqq \delta + (n-1)(d-\eta)\} = \binom{\delta + (n-1)(d-\eta) + n}{n} .$$

Prenons maintenant un $\mu$ avec $|\mu| = \eta$ et $\Delta_\mu \neq \emptyset$. Il est clair que l'ensemble $\Delta_\mu$ est contenu dans $\Delta_0 := \{\gamma' \in \mathbb{N}^n \,|\, \gamma' \leqq \gamma, |\gamma'| \geqq \eta - \delta\}$ et

$$\operatorname{card}(\Delta_0) \leqq \operatorname{card}\{\beta \in \mathbb{N}^n \,|\, |\beta| \leqq d - \eta\} = \binom{d-\eta+n}{n},$$

d'où

$$\sum_{\gamma' \in \Delta_\mu} \frac{1}{\gamma'!} \leqq \binom{d-\eta+n}{n} \frac{1}{\tilde{\gamma}'!},$$

avec $\tilde{\gamma}'! = \inf\{\gamma'! \,|\, \gamma' \in \Delta_0\}$. Il est clair que l'on doit avoir $|\tilde{\gamma}'| = \eta - \delta$.

Par conséquent,

$$\frac{\gamma!}{(d-\delta)!}\sum_{|\mu|=\eta}\varrho^{\mu}\left(\sum_{\gamma'\in\Delta_\mu}\frac{1}{\gamma'!}\right)$$

$$\leqq \frac{\gamma!}{(d-\delta)!}\binom{\delta+(n-1)(d-\eta)+n}{n}\binom{d-\eta+n}{n}\frac{1}{\tilde{\gamma}'!}\sup_{\mu\in D_\eta}\varrho^{\mu}$$

$$\leqq \frac{\gamma!}{(d-\delta)!}\binom{\delta+(n-1)(d-\eta)+n}{n}\binom{d-\eta+n}{n}\frac{1}{\tilde{\gamma}'!}\,\frac{\varrho^{\gamma}}{(\prod_i \varrho_i)^{d-\eta}},$$

et pour terminer la preuve de cette proposition il suffit de remarquer que si $\alpha, \beta\in\mathbb{N}^n$ sont deux multi-indices, avec $\alpha\leqq\beta$, alors $\frac{(|\alpha|)!}{\alpha!}\leqq\frac{(|\beta|)!}{\beta!}$. □

**Théorème 3.1.2.** *Avec les notations du théorème* 1.3.1, *soient* $\underline{P}^1,\dots,\underline{P}^p$ *des vecteurs non nuls de* $\mathscr{D}^m$. *Alors il existe un ouvert effilé* $\mathscr{U}\subset(\mathbb{R}_+^*)^{2n}$ *pour la forme L, une fonction* $\underline{\lambda}:\mathscr{U}\to(]1,+\infty[)^n$ *et une fonction* $C:\mathscr{U}\times]1,+\infty[\to\mathbb{R}_+^*$ *vérifiant les propriétés suivantes: pour tout* $\varrho=(\varrho^1,\varrho^2)\in\mathscr{U}$, *pour tout réel* $N>1$ *et pur tout* $\underline{A}\in\mathscr{D}(\varrho^1)^m\subset\mathscr{D}^m$, *si* $Q_1,\dots,Q_p,\underline{R}$ *désignent les quotients et le reste donnés par le théorème* 1.3.1, *alors on a les majorations*

$$|Q_i|_{\varrho^1}^{N\lambda(\varrho)},\ |\underline{R}|_{\varrho^1}^{N\lambda(\varrho)}\leqq C(\varrho,N)\,|\underline{A}|_{\varrho^1}^{N\lambda(\varrho)},$$

*où la norme* $|-|_{\varrho^1}^{N\lambda(\varrho)}$ *d'un vecteur est le maximum des normes de ses composantes.*

*Preuve.* Posons $d_i=\operatorname{ord}(\underline{P}^i)$ pour chaque $i=1,\dots,p$ et

$$\underline{P}^i=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}p^i_{\alpha,j}\,\underline{\partial}^{\alpha,j}.$$

Soit $\bar{\varrho}^1\in(\mathbb{R}_+^*)^n$ un polyrayon fixe tel que tous les $p^i_{\alpha,j}$ sont définis dans un voisinage du polycylindre $K_{\bar{\varrho}^1}$. Soit $M>0$ une constante avec $|p^i_{\alpha,j}|_{K_{\bar{\varrho}^1}}\leqq M$, $\forall\alpha,\forall j,\forall i$.

Soit $\mathscr{U}\subset(\mathbb{R}_+^*)^{2n}$ un ouvert effilé et $C_0:\mathscr{U}\to\mathbb{R}_+^*$ une fonction pour lesquels on a les majorations du théorème 1.2.2 pour la division par les éléments

$$\sigma(\underline{P}^1)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=d_1}p^1_{\alpha,j}\,\underline{\xi}^{\alpha,j},\dots,\sigma(\underline{P}^p)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=d_p}p^p_{\alpha,j}\,\underline{\xi}^{\alpha,j}$$

de l'anneau $\mathbb{C}\{x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n\}$. On peut supposer que l'on a

$$2\varrho_i^1<\bar{\varrho}_i^1\leqq 1,\quad \varrho_i^2<1,\quad \forall i=1,\dots,n,\ \forall\varrho\in\mathscr{U}.$$

Soit $\varrho\in\mathscr{U}$ et

$$\underline{A}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\mu|\leqq d}a_{\mu,j}\,\underline{\partial}^{\mu,j}\in\mathscr{D}(\varrho^1)^m.$$

Appliquons l'algorithme de la division du théorème 1.3.1 en tenant compte des majorations du théorème 1.2.2. Posons

$$\underline{A}^{[d]} := \underline{A} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\mu| \leqq d} a_{\mu,j}^{[d]} \underline{\partial}^{\mu,j}.$$

On divise au moyen du théorème 1.2.2 le vecteur homogène $\sigma(\underline{A}^{[d]})$ par les vecteurs homogènes $\sigma(\underline{P}^i)$ et on trouve

$$\sigma(\underline{A}^{[d]}) = \sum_{i=1}^{p} \left( \sum_{|\gamma| = d - d_i} q_{i,\gamma}^{[d]} \underline{\xi}^{\gamma} \right) \sigma(\underline{P}^i) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\gamma| = d} r_{\gamma,j}^{[d]} \underline{\xi}^{\gamma,j},$$

avec les majorations:

$$(5) \qquad \sum_{|\gamma| = d - d_i} |q_{i,\gamma}^{[d]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^{\gamma}, \ \sup_j \left( \sum_{|\gamma| = d} |r_{\gamma,j}^{[d]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^{\gamma} \right)$$
$$\leqq C_0(\varrho) \sup_j \left( \sum_{|\mu| = d} |a_{\mu,j}^{[d]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^{\mu} \right).$$

Posons maintenant

$$\underline{A}^{[d-1]} := \underline{A}^{[d]} - \left[ \sum_{i=1}^{p} \left( \sum_{|\gamma| = d - d_i} q_{i,\gamma}^{[d]} \underline{\partial}^{\gamma} \right) \underline{P}^i + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\gamma| = d} r_{\gamma,j}^{[d]} \underline{\partial}^{\gamma,j} \right]$$
$$= \underline{A}^{[d]} - \sum_{j=1}^{m} \left[ \sum_{i=1}^{p} \sum_{\Omega_i} \binom{\gamma}{\gamma'} \underline{\partial}^{\gamma-\gamma'} (p_{\alpha,j}^i) \, q_{i,\gamma}^{[d]} \underline{\partial}^{\gamma'+\alpha,j} + \sum_{|\gamma| = d} r_{\gamma,j}^{[d]} \underline{\partial}^{\gamma,j} \right]$$
$$=: \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\mu| \leqq d-1} a_{\mu,j}^{[d-1]} \underline{\partial}^{\mu,j},$$

où $\Omega_i$ est l'ensemble des $(\alpha, \gamma, \gamma') \in (\mathbb{N}^n)^3$ tels que $|\gamma| = d - d_i$, $|\alpha| \leqq d_i$ et $\gamma' \leqq \gamma$.

Nous procédons en trois étapes.

*Première étape.* Avec les notations précédentes, nous allons d'abord obtenir les majorations suivantes:

$$\sup_j \sum_{|\mu| = \eta} \eta! |a_{\mu,j}^{[d-1]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^{\mu} \leqq \sup_j \sum_{|\mu| = \eta} \eta! |a_{\mu,j}^{[d]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^{\mu}$$
$$+ \kappa(\varrho) \nu'(\varrho)^{d-\eta} \sup_j \sum_{|\mu| = d} d! |a_{\mu,j}^{[d]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^{\mu},$$

pour $\eta = 0, \ldots, d-1$ et pour tout $\varrho = (\varrho^1, \varrho^2) \in \mathcal{U}$, où $\kappa(\varrho) > 0$ et $\nu'(\varrho) > 1$.

Si $0 \leqq \eta \leqq d-1$, $|\mu| = \eta$ et $1 \leqq j \leqq m$ on a l'égalité

$$a_{\mu,j}^{[d-1]} = a_{\mu,j}^{[d]} - \sum_{i=1}^{p} \sum_{\Omega_{i,\mu}} \binom{\gamma}{\gamma'} \underline{\partial}^{\gamma-\gamma'} (p_{\alpha,j}^i) \, q_{i,\gamma}^{[d]},$$

où $\Omega_{i,\mu}$ est l'ensemble des $(\alpha, \gamma, \gamma') \in \Omega_i$ tels que $\gamma' + \alpha = \mu$, et en vertu des inégalités de Cauchy on a les majorations:

$$|a_{\mu,j}^{[d-1]}|_{\varrho^1} \leqq |a_{\mu,j}^{[d]}|_{\varrho^1} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{\Omega_{i,\mu}} \binom{\gamma}{\gamma'} |\underline{\partial}^{\gamma-\gamma'}(p_{\alpha,j}^{i})|_{\varrho^1} |q_{i,\gamma}^{[d]}|_{\varrho^1}$$

$$\leqq |a_{\mu,j}^{[d]}|_{\varrho^1} + 2^n M \sum_{i=1}^{p} \sum_{\Omega_{i,\mu}} \binom{\gamma}{\gamma'} (\gamma-\gamma')! \frac{1}{(\bar{\varrho}^1 - 2\varrho^1)^{\gamma-\gamma'}} |q_{i,\gamma}^{[d]}|_{\varrho^1},$$

d'où les majorations

$$\eta! \sum_{|\mu|=\eta} |a_{\mu,j}^{[d-1]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^{\mu}$$

$$\leqq \eta! \sum_{|\mu|=\eta} |a_{\mu,j}^{[d]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^{\mu} + 2^n M \sum_{|\mu|=\eta} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\Omega_{i,\mu}} \eta! \frac{\gamma!}{\gamma'!} \frac{1}{(\bar{\varrho}^1 - 2\varrho^1)^{\gamma-\gamma'}} |q_{i,\gamma}^{[d]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^{\mu}$$

$$\leqq \eta! \sum_{|\mu|=\eta} |a_{\mu,j}^{[d]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^{\mu} + 2^n M v(\varrho^1)^{d-\eta} \sum_{|\mu|=\eta} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\Omega_{i,\mu}} \eta! \frac{\gamma!}{\gamma'!} |q_{i,\gamma}^{[d]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^{\mu},$$

avec

$$v(\varrho^1) := \frac{1}{\inf_i \{\bar{\varrho}_i^1 - 2\varrho_i^1\}} > 1,$$

car

$$\inf_i \{\bar{\varrho}_i^1 - 2\varrho_i^1\} < \inf_i \{\bar{\varrho}_i^1\} \leqq 1,$$

$$|\gamma - \gamma'| = |\gamma| - |\gamma'| = d - d_i - |\gamma'| = d - d_i + |\alpha| - |\mu| \leqq d - \eta$$

et

$$\frac{1}{(\bar{\varrho}^1 - 2\varrho^1)^{\gamma-\gamma'}} \leqq v(\varrho^1)^{|\gamma-\gamma'|} \leqq v(\varrho^1)^{d-\eta}.$$

Mais en vertu de la proposition 3.1.1 on a les inégalités:

$$\sum_{|\mu|=\eta} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\Omega_{i,\mu}} \eta! \frac{\gamma!}{\gamma'!} |q_{i,\gamma}^{[d]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^{\mu} = \cdots \leqq \sum_{i=1}^{p} \sum_{|\gamma|=d-d_i} |q_{i,\gamma}^{[d]}|_{\varrho^1} \frac{\eta!(d-d_i)!}{(\eta-d_i)!} (\varrho^2)^{\gamma} \frac{\Phi(d-\eta)}{\prod_i (\varrho_i^2)^{(d-\eta)}},$$

où $\Phi$ est un polynôme à coefficients rationnels positifs. Il existe donc une constante $C_0'(\varrho^1) > 0$ telle que l'on ait l'inégalite $\Phi(t) \leqq C_0'(\varrho^1) v(\varrho^1)^t$, $\forall t \geqq 1$, et en vertu de (5) on a les majorations:

$$\sup_j \sum_{|\mu|=\eta} \eta! |a_{\mu,j}^{[d-1]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^{\mu} \leqq \cdots \leqq \sup_j \sum_{|\mu|=\eta} \eta! |a_{\mu,j}^{[d]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^{\mu}$$

$$+ 2^n M C_0'(\varrho^1) \frac{v(\varrho^1)^{2(d-\eta)}}{\prod_i (\varrho_i^2)^{(d-\eta)}} \sum_{i=1}^{p} \frac{n!(d-d_i)!}{(\eta-d_i)!} \sum_{|\gamma|=d-d_i} |q_{i,\gamma}^{[d]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^{\gamma}$$

$$\leqq \sup_j \sum_{|\mu|=\eta} \eta! |a_{\mu,j}^{[d]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^{\mu}$$

$$+ 2^n M C_0'(\varrho^1) C_0(\varrho) \frac{v(\varrho^1)^{2(d-\eta)}}{\prod_i (\varrho_i^2)^{(d-\eta)}} \left( \sum_{i=1}^{p} \frac{\eta!(d-d_i)!}{(\eta-d_i)!\,d!} \right) \sup_j \sum_{|\mu|=d} d!|\, a_{\mu,j}^{[d]}|_{\sigma^1} (\varrho^2)^{\mu}$$

$$\leqq \sup_j \sum_{|\mu|=\eta} \eta!\,|a^{[d]}_{\mu,j}|_{\varrho^1}(\varrho^2)^\mu + \kappa(\varrho)\,\nu'(\varrho)^{d-\eta} \sup_j \sum_{|\mu|=d} d!\,|a^{[d]}_{\mu,j}|_{\varrho^1}(\varrho^2)^\mu,$$

la dernière inégalité étant une conséquence du fait que

$$\frac{\eta!\,(d-d_i)!}{(\eta-d_i)!\,d!} \leqq \binom{\eta}{d_i}\binom{d}{d_i}^{-1} \leqq 1 \quad \text{pour } \eta < d,$$

avec

$$(6) \qquad \kappa(\varrho) := p\,2^n M C_0'(\varrho^1)\,C_0(\varrho) > 0, \quad \nu'(\varrho) := \frac{\nu(\varrho^1)^2}{\prod_i (\varrho_i^2)} > 1.$$

D'où la majoration de la première étape.

*Deuxième étape.* En vertu de l'algorithme de la division on trouve une suite de vecteurs dans $\mathscr{D}(\varrho^1)^m$

$$\underline{A}^{[s]} := \sum_{j=1}^m \sum_{|\mu|\leqq s} a^{[s]}_{\mu,j}\,\underline{\partial}^{\mu,j},$$

et une suite de familles de séries dans $\mathscr{O}(\varrho^1)$

$$\{q^{[s]}_{i,\gamma}\}_{|\gamma|=s-d_i}, \quad 1 \leqq i \leqq p, \quad \{r^{[s]}_{\gamma,j}\}_{|\gamma|=s,\,1\leqq j\leqq m}$$

indexées de façon décroissante par $s = d, \ldots, 0$, avec $\underline{A}^{[d]} = \underline{A}$ et liées par les relations

$$\sigma(\underline{A}^{[s]}) = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{|\gamma|=s-d_i} q^{[s]}_{i,\gamma}\,\underline{\xi}^\gamma\right)\sigma(\underline{P}^i) + \left(\sum_{j=1}^m \sum_{|\gamma|=s} r^{[s]}_{\gamma,j}\,\underline{\xi}^{\gamma,j}\right),$$

et les inégalités:

$$(7) \qquad \sum_{|\gamma|=s-d_i} |q^{[s]}_{i,\gamma}|_{\varrho^1}(\varrho^2)^\gamma, \quad \sup_j \sum_{|\gamma|=s} |r^{[s]}_{\gamma,j}|_{\varrho^1}(\varrho^2)^\gamma \leqq C_0(\varrho) \sup_j \sum_{|\mu|=s} |a^{[s]}_{\mu,j}|_{\varrho_1}(\varrho^2)^\mu, \quad \forall s = 0, \ldots, d.$$

Par récurrence on trouve les relations:

$$\underline{A}^{[s-1]} := \underline{A}^{[s]} - \left[\sum_{i=1}^p \left(\sum_{|\gamma|=s-d_i} q^{[s]}_{i,\gamma}\,\underline{\partial}^\gamma\right)\underline{P}^i + \sum_{j=1}^m \sum_{|\gamma|=s} r^{[s]}_{\gamma,j}\,\underline{\partial}^{\gamma,j}\right],$$

et les majorations:

$$(8) \qquad \sup_j \sum_{|\mu|=\eta} \eta!\,|a^{[s]}_{\mu,j}|_{\varrho^1}(\varrho^2)^\mu \leqq \sup_j \sum_{|\mu|=\eta} \eta!\,|a^{[s+1]}_{\mu,j}|_{\varrho^1}(\varrho^2)^\mu + \kappa(\varrho)\,\nu'(\varrho)^{s+1-\eta} \sup_j \sum_{|\mu|=s+1} (s+1)!\,|a^{[s+1]}_{\mu,j}|_{\varrho^1}(\varrho^2)^\mu,$$

pour $s = 0, \ldots, d-1$ et $\eta = 0, \ldots, s$.

*Troisième étape.* Nous allons utiliser les majorations de la deuxième étape pour déduire le théorème 3.1.2 comme dans le cas d'une variable [M-N$_1$], [Na].

Les quotients et le reste de la division de $\underline{A}$ par les $\underline{P}^1, \ldots, \underline{P}^p$ sont donnés par

$$Q_i = \sum_{s=d_i}^{d} \sum_{|\gamma|=s-d_i} q_{i,\gamma}^{[s]} \underline{\partial}^{\gamma}, \quad 1 \leqq i \leqq p, \quad \underline{R} = \sum_{s=0}^{d} \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\gamma|=s} r_{\gamma,j}^{[s]} \underline{\partial}^{\gamma,j}.$$

Posons

$$\lambda_\eta^s(\varrho) := v'(\varrho)^\eta \sup_j \sum_{|\mu|=\eta} \eta! \, |a_{\mu,j}^{[s]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^\mu ,$$

pour $\varrho \in \mathscr{U}$ et $0 \leqq \eta \leqq s \leqq d$. D'après (8), on a $\lambda_\eta^s(\varrho) \leqq \lambda_\eta^{s+1}(\varrho) + \kappa(\varrho) \lambda_{s+1}^{s+1}(\varrho)$ pour $0 \leqq s \leqq d-1$, $0 \leqq \eta \leqq s$, d'où par récurrence

$$\lambda_\eta^s(\varrho) \leqq \lambda_\eta^{s+r}(\varrho) + \sum_{l=1}^{r} \kappa(\varrho) [1+\kappa(\varrho)]^{l-1} \lambda_{s+l}^{s+r}(\varrho)$$

pour $r = 1, \ldots, d$ et $0 \leqq \eta \leqq s \leqq d-r$. Dans le cas $r = d-s$ on a

$$\begin{aligned} \lambda_\eta^s(\varrho) &\leqq \lambda_\eta^d(\varrho) + \sum_{l=1}^{d-s} \kappa(\varrho) [1+\kappa(\varrho)]^{l-1} \lambda_{s+l}^d(\varrho) \\ &\leqq \lambda_\eta^d(\varrho) + \prod_{l=1}^{d-s} [1+\kappa(\varrho)]^l \lambda_{s+l}^d(\varrho) , \end{aligned}$$

d'où en multipliant par $[1+\kappa(\varrho)]^s$ et en mettant $\eta = s$ on trouve

$$[1+\kappa(\varrho)]^s \lambda_s^s(\varrho) \leqq \cdots = \sum_{l=s}^{d} [1+\kappa(\varrho)]^l \lambda_l^d(\varrho) , \tag{9}$$

pour tout $s = 0, \ldots, d$. Posons $\lambda(\varrho) := [1+\kappa(\varrho)] v'(\varrho) > 1$ pour chaque $\varrho \in \mathscr{U}$. On peut reécrire (9) comme

$$\lambda(\varrho)^s \sup_j \sum_{|\mu|=s} s! \, |a_{\mu,j}^{[s]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^\mu \leqq \sum_{l=s}^{d} \lambda(\varrho)^l \sup_j \sum_{|\mu|=l} l! \, |a_{\mu,j}^{[d]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^\mu , \tag{10}$$

et d'après (7) on trouve

$$\begin{aligned} &\lambda(\varrho)^{s-d_i} \sum_{|\gamma|=s-d_i} (s-d_i)! \, |q_{i,\gamma}^{[s]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^\gamma \\ &\leqq \lambda(\varrho)^{s-d_i} \frac{(s-d_i)!}{s!} C_0(\varrho) \sup_j \sum_{|\mu|=s} s! \, |a_{\mu,j}^{[s]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^\mu \\ &\leqq C_0(\varrho) \lambda(\varrho)^s \sup_j \sum_{|\mu|=s} s! \, |a_{\mu,j}^{[s]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^\mu \leqq \cdots \\ &\leqq C_0(\varrho) \sum_{l=s}^{d} \lambda(\varrho)^l \sup_j \sum_{|\mu|=l} l! \, |a_{\mu,j}^{[d]}|_{\varrho^1} (\varrho^2)^\mu , \end{aligned}$$

$$\lambda(\varrho)^s \sup_j \sum_{|\gamma|=s} s!\,|r^{[s]}_{\gamma,j}|_{\varrho^1}(\varrho^2)^\gamma \leqq C_0(\varrho)\,\lambda(\varrho)^s \sup_j \sum_{|\mu|=s} s!\,|a^{[s]}_{\mu,j}|_{\varrho^1}(\varrho^2)^\mu$$

$$\leqq C_0(\varrho) \sum_{l=s}^{d} \lambda(\varrho)^l \sup_j \sum_{|\mu|=l} l!\,|a^{[d]}_{\mu,j}|_{\varrho^1}(\varrho^2)^\mu .$$

Posons pour chaque $\varrho \in \mathscr{U}$

$$\underline{\lambda}(\varrho) := \lambda(\varrho)\varrho^2 = \big(\lambda(\varrho)\,\varrho_1^2, \ldots, \lambda(\varrho)\,\varrho_n^2\big) .$$

D'après la définition de $v'(\varrho)$ (voir (6)), toutes les composantes de $\underline{\lambda}(\varrho)$ sont strictement plus grandes que 1.

Pour chaque réel $N > 1$, on a

$$|Q_i|^{N\underline{\lambda}(\varrho)}_{\varrho^1} = \sum_{s=d_i}^{d} \left( \sum_{|\gamma|=s-d_i} |q^{[s]}_{i,\gamma}|_{\varrho^1}\big(N\underline{\lambda}(\varrho)\big)^\gamma \right)(s-d_i)!$$

$$= \sum_{s=d_i}^{d} N^{s-d_i}\lambda(\varrho)^{s-d_i} \left( \sum_{|\gamma|=s-d_i} |q^{[s]}_{i,\gamma}|_{\varrho^1}(\varrho^2)^\gamma \right)(s-d_i)!$$

$$\leqq \sum_{s=d_i}^{d} N^{s-d_i} C_0(\varrho) \left[ \sum_{l=s}^{d} \lambda(\varrho)^l l! \sup_j \left( \sum_{|\mu|=l} |a^{[d]}_{\mu,j}|_{\varrho^1}(\varrho^2)^\mu \right) \right]$$

$$= C_0(\varrho) \sup_j \sum_{l=d_i}^{d} \left[ \sum_{|\mu|=l} |\,a^{[d]}_{\mu,j}|_{\varrho^1}(\varrho^2)^\mu \left( \sum_{s=d_i}^{l} N^{s-d_i} \right) \right] l!\,\lambda(\varrho)^l$$

$$= C_0(\varrho) \sup_j \sum_{l=d_i}^{d} \left[ \sum_{|\mu|=l} |a^{[d]}_{\mu,j}|_{\varrho^1}(\varrho^2)^\mu \left( \frac{N^{l-d_i+1}-1}{N-1} \right) \right] l!\,\lambda(\varrho)^l$$

$$\leqq \frac{N}{N-1}\, C_0(\varrho) \sup_j \sum_{l=d_i}^{d} \left[ \sum_{|\mu|=l} |a^{[d]}_{\mu,j}|_{\varrho^1}(\varrho^2)^\mu N^l \right] l!\,\lambda(\varrho)^l$$

$$= \frac{N}{N-1}\, C_0(\varrho) \sup_j \sum_{l=d_i}^{d} \left[ \sum_{|\mu|=l} |a^{[d]}_{\mu,j}|_{\varrho^1}(\varrho^2)^\mu \right] l!\big(N\lambda(\varrho)\big)^l$$

$$\leqq \frac{N}{N-1}\, C_0(\varrho) \sup_j |A_j|^{N\underline{\lambda}(\varrho)}_{\varrho^1} = \frac{N}{N-1}\, C_0(\varrho)\,|\underline{A}|^{N\underline{\lambda}(\varrho)}_{\varrho^1}$$

pour tout $i = 1, \ldots, p$, et de façon analogue

$$|\underline{R}|^{N\underline{\lambda}(\varrho)}_{\varrho^1} \leqq \cdots \leqq \frac{N}{N-1}\, C_0(\varrho)\,|\underline{A}|^{N\underline{\lambda}(\varrho)}_{\varrho^1} ,$$

ce qui termine la preuve du théorème 3.1.2 en posant

$$C(\varrho, N) = \frac{N}{N-1}\, C_0(\varrho) . \quad \square$$

**3.2. Continuité de la division. Scissions continues.** Soit $L : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle à coefficients non négatifs et $<_L$ l'ordre correspondant.

**Définition 3.2.1.** Une $L$-base de voisinages ouverts de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ est un ensemble $\mathscr{B}$ de polycylindres ouverts centrés à l'origine pour lequel il existe un ouvert effilé $\mathscr{U} \subset (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$ par rapport à $L$ tel que $\mathscr{B} \supseteqq \{\mathring{K}_{\varrho'} \mid \exists \varrho'' \text{ avec } (\varrho', \varrho'') \in \mathscr{U}\}$.

L'intersection d'un nombre fini de $L$-bases est une $L$-base.

**Théorème 3.2.2.** *Soient $\underline{P}^1, \ldots, \underline{P}^p \in \mathscr{D}^m$ non nuls. Notons pour chaque $\underline{A} \in \mathscr{D}^m$*

$$Q_i(\{\underline{P}^1, \ldots, P^p\}; \underline{A}), \quad i = 1, \ldots, p, \quad \underline{R}(\{\underline{P}^1, \ldots, P^p\}; \underline{A})$$

*les quotients et le reste de la division de $\underline{A}$ par les $\underline{P}^i$ donnés par le théorème* 1.3.1. *Alors, il existe une L-base $\mathscr{B}$ telle que pour chaque $U \in \mathscr{B}$ et chaque $\underline{A} \in \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(U)^m$, on a*

$$Q_i(\{\underline{P}^1, \ldots, \underline{P}^p\}; \underline{A}) \in \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(U), \quad \underline{R}(\{\underline{P}^1, \ldots, \underline{P}^p\}; \underline{A}) \in \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(U)^m$$

*pour $i = 1, \ldots, p$, et les applications $\mathbb{C}$-linéaires*

$$Q_i(\{\underline{P}, \ldots, \underline{P}^p\}; -) : \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(U)^m \to \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(U)\,,$$
$$\underline{R}(\{\underline{P}^1, \ldots, \underline{P}^p\}; -) : \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(U)^m \to \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(U)^m$$

*sont continues pour la topologie naturelle de $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(U)$ induite par celle de $\mathscr{D}^\infty_{\mathbb{C}^n}(U)$.*

*Preuve.* Il suffit d'appliquer (4) dans 2.2.3, la proposition 2.2.1, le théorème 3.1.2 et le fait que tout polycylindre ouvert de polyrayon dans un ouvert effilé $\mathscr{U}$ est réunion de polycylindres compacts avec polyrayons appartenant aussi à $\mathscr{U}$. □

**Corollaire 3.2.3.** *Soient $\underline{P}^1, \ldots, \underline{P}^p \in \mathscr{D}^m$ non nuls. Alors, les applications*

$$Q_i(\{\underline{P}^1, \ldots, \underline{P}^p\}; -) : \mathscr{D}^m \to \mathscr{D}\,,$$
$$\underline{R}(\{\underline{P}^1, \ldots, \underline{P}^p\}; -) : \mathscr{D}^m \to \mathscr{D}^m$$

*sont continues pour la topologie naturelle sur $\mathscr{D}$.*

**Corollaire 3.2.4.** *Soient $\underline{P}^1, \ldots, \underline{P}^p \in \mathscr{D}^m$ des vecteurs no nuls de germes d'opérateurs différentiels d'ordre fini et gardons les notations du théorème* 1.3.1. *Alors, pour tout $\underline{A} \in (\mathscr{D}^\infty)^m$ ils existent des opérateurs $Q_1, \ldots, Q_p \in \mathscr{D}^\infty$ et un vecteur $\underline{R} \in (\mathscr{D}^\infty)^m$ tels que*

1. $\underline{A} = \sum_{i=1}^{p} Q_i \underline{P}^i + \underline{R}$,

2. $\mathscr{N}(Q_i) + \exp(\underline{P}^i) \subseteqq \Delta_i$ *pour tout* $i = 1, \ldots, p$,

3. $\mathscr{N}(\underline{R}) \subseteqq \bar{\Delta}$.

(*Le support d'un opérateur différentiel d'ordre infini est défini de façon évidente comme le support de son symbole total.*)

**Remarque 3.2.5.** Le corollaire précédent ne montre pas l'unicité des quotients et du reste dans de la division des opérateurs d'ordre infini par les opérateurs d'ordre fini. Cette question reste donc ouverte.

**Proposition 3.2.6.** *Soient* $r, s \geqq 1$, $V \subseteqq \mathbb{C}^n$ *un voisinage de* $0$ *et* $F : \mathscr{D}_V^r \to \mathscr{D}_V^s$ *un homomorphisme de* $\mathscr{D}_V$*-modules (à gauche). Alors, il exite une* $L$*-base de voisinages ouverts* $\mathscr{B}$ *de* $0$ *telle qu'il existe une famille de scissions* $\mathbb{C}$*-linéaires continues*

$$\Sigma(U) : \mathscr{D}_V(U)^s \to \mathscr{D}_V(U)^r, \quad U \in \mathscr{B},$$
$$F(U) \circ \Sigma(U) \circ F(U) = F(U),$$

*qui est compatible aux restrictions.*

*Preuve.* Ce résultat se déduit par l'argument usuel du théorème 3.2.2, en considérant tout d'abord une base de division de l'image de la fibre de $F$ à l'origine. □

**Corollaire 3.2.7.** *Soit* $V \subseteqq \mathbb{C}^n$ *un voisinage de* $0$ *et*

$$\mathscr{D}_V^{r_i} \xrightarrow{F_i} \mathscr{D}_V^{s_i} \xrightarrow{G_i} \mathscr{D}_V^{t_i}, \quad i \in J$$

*une famille finie de suites exactes de* $\mathscr{D}_V$*-modules libres de type fini. Alors, il existe une* $L$*-base* $\mathscr{B}$ *de voisinages ouverts de* $0$ *telle que pour tout* $i \in J$ *et tout* $U \in \mathscr{B}$ *la suite*

$$\mathscr{D}_V^{r_i}(U) \xrightarrow{F_i(U)} \mathscr{D}_V^{s_i}(U) \xrightarrow{G_i(U)} \mathscr{D}_V^{t_i}(U)$$

*est exacte et topologiquement* $\mathbb{C}$*-scindée.*

*Preuve.* Pour chaque $i \in J$ considérons une $L$-base de voisinages ouverts $\mathscr{B}_i$ de $0$ et une famille de scissions continues $\Sigma_i(U) : \mathscr{D}_V(U)^{s_i} \to \mathscr{D}_V(U)^{r_i}$ des $F_i(U)$ comme dans la proposition précédente. Notons aussi $\sigma_i : \mathscr{D}^{s_i} \to \mathscr{D}^{r_i}$ la scission de $(F_i)_0$ correspondante, qui n'est rien d'autre que la limite inductive des $\Sigma_i(U)$. On a $f_i = f_i \circ \sigma_i \circ f_i$ et

$$\ker g_i = \operatorname{Im} f_i = \ker(1 - f_i \circ \sigma_i).$$

Soit $\underline{B} \in \ker G_i(U)$. Son germe à l'origine $\underline{B}_0$ appartient à $\ker g_i$, et donc

$$0 = \underline{B}_0 - f_i(\sigma_i(\underline{B}_0)) = [\underline{B} - F_i(U)(\Sigma_i(U)(\underline{B}))]_0.$$

A cause du prolongement analytique, $0 = \underline{B} - F_i(U)(\Sigma_i(U)(\underline{B}))$, d'où $\underline{B} \in \operatorname{Im} F_i(U)$. Pour conclure, il suffit de prendre pour $\mathscr{B}$ comme l'intersection des $\mathscr{B}_i$. □

**Proposition 3.2.8.** *Soit $V \subseteqq \mathbb{C}^n$ un voisinage de* 0 *et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_V$-module cohérent* (*à gauche*) *muni d'une présentation*

$$\mathcal{D}_V^r \xrightarrow{F} \mathcal{D}_V^s \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow 0\,.$$

*Alors, si $\mathcal{B}$ est une L-base comme dans la proposition* 3.2.6, *pour tout $U \in \mathcal{B}$ la suite*

$$\mathcal{D}_V^r(U) \xrightarrow{F(U)} \mathcal{D}_V^s(U) \xrightarrow{\pi(U)} \mathcal{M}(U) \longrightarrow 0$$

*est exacte et $\mathbb{C}$-scindée.*

*Preuve*. Quitte à restreindre $V$, on peut supposer que le noyau de $F$ est muni d'une bonne filtration sur $V$, et donc, pour tout polycylindre compact $K \subset V$, la suite

$$\mathcal{D}_V^r(K) \xrightarrow{F(K)} \mathcal{D}_V^s(K) \xrightarrow{\pi(K)} \mathcal{M}(K) \longrightarrow 0 \tag{11}$$

est aussi exacte en vertu du théorème B de Cartan. Or, si $K$ est l'adhérence d'un polycylindre ouvert $U'$ de $\mathcal{B}$, la suite (11) est la limite inductive des suites exactes

$$\mathcal{D}_V^r(U'') \xrightarrow{F(U'')} \mathcal{D}_V^s(U'') \xrightarrow{\pi(U'')} \operatorname{coker} F(U'') \longrightarrow 0$$

où $U'' \in \mathcal{B}$, $K \subset U''$. Par conséquent, la suite (11) est aussi $\mathbb{C}$-scindée, avec comme scission $\Sigma(K)$ limite inductive des scissions $\Sigma(U'')$. Maintenant, si $U \in \mathcal{B}$, la suite

$$\mathcal{D}_V^r(U) \xrightarrow{F(U)} \mathcal{D}_V^s(U) \xrightarrow{\pi(U)} \mathcal{M}(U) \longrightarrow 0$$

est la limite projective des suites (11), avec $K = \overline{U'} \subset U$, $U' \in \mathcal{B}$, donc elle est $\mathbb{C}$-scindée et exacte. □

**Remarque 3.2.9.** L'espace de cohomologie $H^1(U, \mathcal{D}_U)$ est non nul et donc la proposition 3.2.8 n'est pas une conséquence directe du théorème B de Cartan. La preuve précédente utilise le théorème de continuité de la division.

## 4. Premières applications et problèmes

**4.1. Fidèle platitude de $\mathcal{D}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.** Dans ce paragraphe nous allons montrer que le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre infini est une extension fidèlement plate du faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini à partir de 3.2, résultat qui était obtenu dans [S-K-K], 3.4 par voie micro-différentielle.

Soit $L : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle à coefficients non négatifs. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module à gauche on note $\mathcal{M}^\infty$ le $\mathcal{D}_X^\infty$-module à gauche $\mathcal{D}_X^\infty \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$.

**Théorème 4.1.1.** *L'extension $\mathcal{D} \to \mathcal{D}^\infty$ est fidèlement plate à droite et à gauche.*

*Preuve.* Soit

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

une suite exacte de $\mathscr{D}$-modules de type fini, et considérons une suite exacte de présentations finies

$$0 \to P_1^\bullet \to P_2^\bullet \to P_3^\bullet \to 0$$

avec

$$P_i^\bullet = \mathscr{D}^{t_i} \xrightarrow{\tau_i} \mathscr{D}^{s_i} \xrightarrow{\pi_i} \mathscr{D}^{r_i}$$

présentation de $M_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

On peut trouver un voisinage ouvert $V$ de l'origine où les matrices des $\tau_i$ et $\pi_i$ sont définies, et grâce à la cohérence de $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$, on obtient un diagramme commutatif de $\mathscr{D}_V$-modules libres à lignes exactes et colonnes exactes:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{D}_V^{r_1} \arrow[r] & \mathscr{D}_V^{r_2} \arrow[r] & \mathscr{D}_V^{r_3} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{D}_V^{s_1} \arrow[r] \arrow[u, "\Phi_1"'] & \mathscr{D}_V^{s_2} \arrow[r] \arrow[u, "\Phi_2"'] & \mathscr{D}_V^{s_3} \arrow[r] \arrow[u, "\Phi_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{D}_V^{t_1} \arrow[r] \arrow[u, "\Psi_1"'] & \mathscr{D}_V^{t_2} \arrow[r] \arrow[u, "\Psi_2"'] & \mathscr{D}_V^{3_3} \arrow[r] \arrow[u, "\Psi_3"'] & 0
\end{tikzcd}$$

avec $(\Phi_i)_0 = \pi_i$, $(\Psi_i)_0 = \tau_i$ pour tout $i$. D'après le corollaire 3.2.7, il existe une base $\mathscr{B}$ de voisinages ouverts de l'origine telle que pour tout $U \in \mathscr{B}$, le diagramme correspondant des sections sur $U$ est aussi à lignes exactes et colonnes exactes et topologiquement scindées, d'où l'exactitude du diagramme des complétés. Or, pour de tels $U$ on sait que $\widehat{\mathscr{D}_V(U)} = \mathscr{D}_V^\infty(U)$ (2.1.7) et que si $F: \mathscr{D}_V^p \to \mathscr{D}_V^q$ est un homomorphisme $\mathscr{D}_V$-linéaire, alors on a des identifications

$$\widehat{F(U)} = \mathscr{D}_V^\infty(U) \otimes_{\mathscr{D}_V(U)} F(U) =: F(U)^\infty .$$

Par conséquent, pour chaque $U \in \mathscr{B}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{D}_V^\infty(U)^{r_1} \arrow[r] & \mathscr{D}_V^\infty(U)^{r_2} \arrow[r] & \mathscr{D}_V^\infty(U)^{r3} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{D}_V^\infty(U)^{s_1} \arrow[r] \arrow[u, "\Phi_1(U)^\infty"'] & \mathscr{D}_V^\infty(U)^{s_1} \arrow[r] \arrow[u, "\Phi_2(U)^\infty"'] & \mathscr{D}_V^\infty(U)^{s_3} \arrow[r] \arrow[u, "\Phi_3(U)^\infty"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{D}_V^\infty(U)^{t_1} \arrow[r] \arrow[u, "\Psi_1(U)^\infty"'] & \mathscr{D}_V^\infty(U)^{t_2} \arrow[r] \arrow[u, "\Psi_2(U)^\infty"'] & \mathscr{D}_V^\infty(U)^{t_3} \arrow[r] \arrow[u, "\Psi_3(U)^\infty"'] & 0
\end{tikzcd}$$

est à lignes exactes et colonnes exactes, et donc la suite

$$0 \to \operatorname{coker} \Phi_1(U)^\infty \to \operatorname{coker} \Phi_2(U)^\infty \to \operatorname{coker} \Phi_3(U)^\infty \to 0$$

est aussi exacte, ou ce qui revient au même, la suite

$$0 \to \mathscr{D}_V^\infty(U) \otimes \operatorname{coker} \Phi_1(U) \to \mathscr{D}_V^\infty(U) \otimes \operatorname{coker} \Phi_2(U) \to \mathscr{D}_V^\infty(U) \otimes \operatorname{coker} \Phi_3(U) \to 0$$

est exacte. En prenant des limites inductives par rapport à $U$ on obtient l'exactitude de

$$0 \to \mathscr{D}^\infty \otimes_{\mathscr{D}} M_1 \to \mathscr{D}^\infty \otimes_{\mathscr{D}} M_2 \to \mathscr{D}^\infty \otimes_{\mathscr{D}} M_3 \to 0\,,$$

d'où la platitude de $\mathscr{D}^\infty$ sur $\mathscr{D}$.

La "fidélité" provient du fait que, en oubliant les indices, chaque $\operatorname{coker} \Phi(U)$ est séparé pour la topologie quotient ($\Phi(U)$ étant topologiquement scindée, son image est fermée), et il s'injecte donc dans son complété. Or, son complété coïncide avec $\operatorname{coker} \widehat{\Phi(U)}$, ou encore avec

$$\operatorname{coker} \Phi(U)^\infty = \mathscr{D}_V^\infty(U) \otimes_{\mathscr{D}_V(U)} \operatorname{coker} \Phi(U)\,.$$

En prenant des limites inductives par rapport à $U$, on obtient l'inclusion $M \hookrightarrow \mathscr{D}^\infty \otimes_{\mathscr{D}} M$, et donc $M \neq 0$ entraîne $\mathscr{D}^\infty \otimes_{\mathscr{D}} M \neq 0$. □

**Remarque 4.1.2.** Dans la preuve précédente, si $\mathscr{M}_i = \operatorname{coker} \Phi_i$, d'après la proposition 3.2.8 on a en fait $\operatorname{coker} \Phi_i(U) = \mathscr{M}_i(U)$ pour tout $U \in \mathscr{B}$.

**Remarque 4.1.3.** Une des motivations initiales de ce travail (voir [$\mathrm{Me}_2$], p. 118) était la démonstration précédente parallèle à la démonstration de Serre [Ser] dans le cas des anneaux locaux noethériens, la topologie canonique localement convexe jouant le rôle de la topologie $m$-adique.

**4.2. Structure localement convexe sur les $\mathscr{D}_X^\infty$-modules admissibles et les $\mathscr{D}_X$-modules cohérents.** Dans ce paragraphe nous allons déduire que tout $\mathscr{D}_X^\infty$-module admissible est muni canoniquement d'une structure de faisceau de Fréchet-nucléaire et que tout $\mathscr{D}_X$-module cohérent est muni canoniquement d'une structure localement convexe métrisable-nucléaire. Rappelons la définition [S-K-K]:

**Définition 4.2.1.** Soit $X$ une variété analytique complexe lisse. On dit qu'un $\mathscr{D}_X^\infty$-module $\mathscr{N}$ est admissible si pour tout point de $X$ ils existent un voisinage ouvert $V$ et un $\mathscr{D}_V$-module cohérent $\mathscr{M}_V$ tels que $\mathscr{N}|_V \simeq \mathscr{M}_V^\infty = \mathscr{D}_V^\infty \otimes_{\mathscr{D}_V} \mathscr{M}_V$.

**Lemme 4.2.2.** *Soit $V$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_V$-module cohérent muni d'une résolution libre finie $0 \to \mathscr{D}_V^{m_p} \to \cdots \to \mathscr{D}_V^{m_0} \to \mathscr{M} \to 0$. Alors, pour tout ouvert de Stein $U \subseteqq V$, la suite $0 \to (\mathscr{D}_V^\infty)^{m_p}(U) \to \cdots \to (\mathscr{D}_V^\infty)^{m_0}(U) \to \mathscr{M}^\infty(U) \to 0$ est exacte.*

*Preuve.* D'après la platitude de $\mathscr{D}_V^\infty$ sur $\mathscr{D}_V$ la suite

$$0 \to (\mathscr{D}_V^\infty)^{m_p} \to \cdots \to (\mathscr{D}_V^\infty)^{m_0} \to \mathscr{M}^\infty \to 0$$

est exacte. Or, d'après la remarque 2.1.5, le faisceau $\mathscr{D}_V^\infty$ est acyclique sur tout ouvert de Stein de $V$, d'où le résultat. □

**Définition 4.2.3.** Soit $V \subset \mathbb{C}^n$ un voisinage ouvert de l'origine, $L: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle à coefficients non négatifs et soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_V$-module cohérent. On dit qu'une $L$-base de voisinages ouverts de l'origine $\mathscr{B}$ est adaptée à $\mathscr{M}_0$ s'ils existent

1. une résolution libre finie

$$0 \to \mathscr{D}_{V_0}^{r_d} \xrightarrow{F_d} \mathscr{D}_{V_0}^{r_{d-1}} \to \cdots \to \mathscr{D}_{V_0}^{r_1} \xrightarrow{F_1} \mathscr{D}_{V_0}^{r_0} \to \mathscr{M}|_{V_0} \to 0$$

sur un voisinage ouvert de l'origine $V_0 \subseteqq V$ qui contient tous les ouverts de $\mathscr{B}$,

2. pour chaque $i = 0, \ldots, d$, une famille $\Sigma_i(U) : \mathscr{D}_{V_0}^{r_{i-1}}(U) \to \mathscr{D}_{V_0}^{r_i}(U)$, $U \in \mathscr{B}$ de scissions $\mathbb{C}$-linéaires continues des $F_i(U)$, compatibles aux restrictions.

**Corollaire 4.2.4.** *Soit $V \subset \mathbb{C}^n$ un voisinage ouvert de l'origine et soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_V$-module cohérent. Il existe une L-base de voisinages ouverts de l'origine $\mathscr{B}$ adaptée à $\mathscr{M}_0$. De plus, si $\mathscr{B}$ est une telle base et $\mathscr{D}_V^{m_0} \xrightarrow{q} \mathscr{M} \to 0$ est un morphisme surjectif* (*resp.*

$$\mathscr{D}_V^r \xrightarrow{F} \mathscr{D}_V^s \xrightarrow{q} \mathscr{M} \to 0$$

*est une présentation*), *alors pour tout $U \in \mathscr{B}$ les morphismes $q(U)$ et $q^\infty(U)$ sont aussi surjectifs et topologiquement $\mathbb{C}$-scindés* (*resp. les suites*

$$(\mathscr{D}_V)^r(U) \xrightarrow{F(U)} (\mathscr{D}_V)^s(U) \xrightarrow{q(U)} \mathscr{M}(U) \to 0\,,$$

$$(\mathscr{D}_V^\infty)^r(U) \xrightarrow{F^\infty(U)} (\mathscr{D}_V^\infty)^s(U) \xrightarrow{q^\infty(U)} \mathscr{M}^\infty(U) \to 0$$

*sont exactes et topologiquement $\mathbb{C}$-scindées*).

*Preuve.* On peut trouver localement une résolution libre finie de $\mathscr{M}$ (cf. [Ka], [Me$_2$], 2.1.16). Pour conclure, il suffit d'appliquer les corollaires 3.2.7, 3.2.8 et le lemme 4.2.2. □

**Théorème 4.2.5.** *Soit $X$ une variété analytique complexe lisse. Tout $\mathscr{D}_X^\infty$-module admissible $\mathscr{N}$ est muni d'une structure naturelle de faisceau de Fréchet-nucléaire, qui est caractérisée par la propriété suivante: Si $W \subseteqq X$ est un ouvert muni d'un morphisme surjectif $(\mathscr{D}_W^\infty)^s \to \mathscr{N}|_W \to 0$ tel que la suite $(\mathscr{D}_W^\infty)^s(W) \to \mathscr{N}(W) \to 0$ est exacte, alors la topologie de $\mathscr{N}(W)$ coïncide avec la topologie quotient de $(\mathscr{D}_W^\infty)(W)^s$.*

*Preuve.* D'après le corollaire 4.2.4, pour chaque point $p \in X$ on peut trouver: (1) un voisinage ouvert $V_p$ de $p$, que l'on peut prendre de Stein et contenu dans une carte locale, (2) un $\mathscr{D}_{V_p}$-module cohérent $\mathscr{M}_p$ muni d'une présentation finie

$$\mathscr{D}_{V_p}^{r_p} \xrightarrow{F_p} \mathscr{D}_{V_p}^{s_p} \xrightarrow{q_p} \mathscr{M}_p \to 0\,,$$

et d'un isomorphisme $\mathscr{N}|_{V_p} \simeq \mathscr{M}_p^\infty$, et (3) une base $\mathscr{B}_p$ de voisinages ouverts de Stein de $p$ dans $V_p$ telle que pour tout $U \in \mathscr{B}_p$ la suite

$$(\mathscr{D}_{V_p}^\infty)^{r_p}(U) \xrightarrow{F_p^\infty(U)} (\mathscr{D}_{V_p}^\infty)^{s_p}(U) \xrightarrow{q_p^\infty(U)} \mathscr{M}_p^\infty(U) \simeq \mathscr{N}(U) \to 0$$

est exacte et le morphisme $F_p^\infty(U)$ est topologiquement $\mathbb{C}$-scindé. Nous pouvons donc munir chaque $\mathscr{N}(U)$, $U \in \mathscr{B}_p$, $p \in X$, de la topologie quotient associée à $F_p^\infty(U)$, qui est une topologie de Fréchet-nucléaire. Voyons tout d'abord que cette topologie est indépendante du "réseau" $\mathscr{M}_p$ et de la présentation choisie. Supposons que

$$(\mathscr{D}_U^\infty)^r \xrightarrow{F} (\mathscr{D}_U^\infty)^s \xrightarrow{q} \mathscr{N}|_U \to 0$$

est une autre présentation. En comparant avec

$$(\mathscr{D}_U^\infty)^{r_p} \xrightarrow{F_p^\infty} (\mathscr{D}_U^\infty)^{s_p} \xrightarrow{q_p^\infty} \mathscr{M}_p|_U^\infty \simeq \mathscr{N}|_U \to 0$$

on montre que

$$(\mathscr{D}_U^\infty)^r(U) \xrightarrow{F(U)} (\mathscr{D}_U^\infty)^s(U) \xrightarrow{q(U)} \mathscr{N}(U) \to 0$$

est aussi exacte et la topologie quotient de $F(U)$ coïncide avec celle de $F_p^\infty(U)$.

A partir de là on déduit que si $U \in \mathscr{B}_p$, $U' \in \mathscr{B}_{p'}$, $p, p' \in X$, avec $U' \subseteqq U$, le morphisme de restriction $\mathscr{N}(U) \to \mathscr{N}(U')$ est continu.

Par l'argument usuel (cf. [Bu], 6), en utilisant le théorème des homomorphismes de Banach pour les espaces de type $\mathscr{F}$ (cf. [EVT], chap. 1, 14), on montre que les données précédentes définissent une structure canonique de faisceau de Fréchet sur $\mathscr{N}$.

Pour montrer que cette structure vérifie la propriété de l'énoncé il suffit d'appliquer encore une fois le théorème des homomorphismes de Banach. □

**Corollaire 4.2.6.** *Soit $X$ une variété analytique complexe lisse. Tout $\mathscr{D}_X$-module cohérent est muni d'une structure naturelle de faisceau d'espaces localement convexes métrisables nucléaires.*

*Preuve.* Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent. D'après le théorème précédent, le $\mathscr{D}_X^\infty$-module admissible $\mathscr{M}^\infty$ est un faisceau de Fréchet-nucléaire. Or, d'après la fidèle platitude de $\mathscr{D}_X^\infty$ sur $\mathscr{D}_X$, le faisceau $\mathscr{M}$ s'injecte dans $\mathscr{M}^\infty$, d'où le résultat. □

**Corollaire 4.2.7.** *Soient $V \subset \mathbb{C}^n$ un voisinage ouvert de l'origine, $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_V$-module cohérent et $\mathscr{B}$ une L-base de voisinages ouverts de l'origine adaptée à $\mathscr{M}_0$. Alors si $\mathscr{D}_V^{m_0} \xrightarrow{q} \mathscr{M} \to 0$ est un morphisme surjectif, pour tout $U \in \mathscr{B}$ le morphisme*

$$q(U) : (\mathscr{D}_V)^{m_0}(U) \to \mathscr{M}(U)$$

*est surjectif, la topologie canonique de $\mathscr{M}(U)$ est la topologie quotient de $q(U)$ et*

$$\mathscr{M}^\infty(U) = \widehat{\mathscr{M}(U)}\,.$$

*Preuve.* Il s'agit d'une conséquence du corollaire 4.2.4, du théorème 4.2.5 et de la définition des topologies canoniques sur $\mathscr{M}$ et sur $\mathscr{M}^\infty$. □

**Remarque 4.2.8.** Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module cohérent muni de sa topologie canonique, notons $\widehat{\mathscr{M}}$ le pré-faisceau des complétés des sections de $\mathscr{M}$. Le corollaire 4.2.7 nous dit que

$$\mathscr{M}^\infty(U) = \hat{\mathscr{M}}(U),$$

pour tout $U \in \mathscr{B}$ dans une base d'ouverts $\mathscr{B}$. En particulier le faisceau associé au préfaisceau des complétés est isomorphe au faisceau de Fréchet $\mathscr{M}^\infty$.

**Définition 4.2.9.** Soit $\mathscr{M}$ (resp. $\mathscr{M}^\infty$) un $\mathscr{D}_X$-module cohérent (resp. un $\mathscr{D}_X^\infty$-module admissible). On appelle *topologie quotient*, et on note $\mathscr{T}_q(\mathscr{M})$ (resp. $\mathscr{T}_q(\mathscr{M}^\infty)$), la topologie canonique introduite précédemment.

**Exemple 4.2.10.** Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module cohérent qui est localement libre de rang fini sur $\mathscr{O}_X$, i.e. un fibré vectoriel à connexion intégrable, alors la topologie $\mathscr{T}_q(\mathscr{M})$ coïncide avec la topologie canonique en tant que $\mathscr{O}_X$-module cohérent (cf. [Gu-Ro], chap. VIII, A).

**4.3. Problèmes.** Nous allons passer en revue les questions que nous avons rencontrées liées à la structure topologique de $\mathscr{D}_X^\infty$ introduite dans ce travail.

**Problème 4.3.1.** Est-ce que l'espace $\mathscr{D}^\infty$ muni de la topologie canonique est complet? Etant donné un $\mathscr{D}$-module (à gauche) $M$ de type fini il existe une présentation finie $\mathscr{D}^r \xrightarrow{r} \mathscr{D}^s \to M \to 0$ et nous pouvons considérer sur $M$ la topologie quotient induite. Cette topologie est separée (3.2.3) et est indépendante de la présentation choisie. On peut montrer avec les arguments précédents que tout morphisme $\mathscr{D}$-linéaire entre $\mathscr{D}$-modules de type fini est topologiquement $\mathbb{C}$-scindé. Si la réponse à la question précédente était affirmative, on obtiendrait une démonstration plus directe de la fidèle platitude de $\mathscr{D}^\infty$ sur $\mathscr{D}$, car on aura, pour tout $\mathscr{D}$-module de type fini $M$, un isomorphisme canonique

$$\mathscr{D}^\infty \otimes_{\mathscr{D}} M \simeq \hat{M}.$$

Cette question est liée aux propriétés particulières du système inductif $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}^\infty(U)$ quand $U$ parcours une base dénombrable de voisinages ouverts de l'origine. Dans le cas de $\mathscr{O} = \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ les morphismes de restriction $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(U) \to \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(V)$ sont compacts chaque fois que $V$ est un ouvert relativement compact dont l'adhérence est contenue dans $U$ (voir [Seb], [EVT]). Dans le cas de $\mathscr{D}^\infty$ les morphismes de restriction $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}^\infty(U) \to \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}^\infty(V)$ ne sont pas compacts. En fait, d'après l'isomorphisme 2.1.5, ils s'identifient avec

$$\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}^n) \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(U) \to \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}^n) \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(V),$$

qui ne sont que $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}^n)$-nucléaires (cf. [$\text{Do}_1$], §4). Ceci conduit à des questions non triviales sur la commutation du produit tensoriel complété avec la limite inductive (cf. [PTT], I, §1, No. 3), ou encore à *l'acyclicité* de $\mathscr{D}^\infty$ au sens de Palamodov [Pa] (cf. aussi [Vo]).

**Problème 4.3.2.** Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent muni de sa topologie canonique. Est-ce que le pré-faisceau $\hat{\mathscr{M}}$ des complétés des sections de $\mathscr{M}$ est un faisceau? □

**Problème 4.3.3.** Soit $f\colon X = Z \times Y \to Y$ une projection de variétés analytiques complexes lisses, et $\mathscr{N}$ un $\mathscr{D}_X^\infty$-module admissible dont le support est propre sur $Y$. Est-ce que $\mathbf{R}f_* \mathbf{DR}_f(\mathscr{N})$ est un complexe de $\mathscr{D}_Y^\infty$-modules parfait à morphismes stricts, c'est-à-dire admettant localement des résolutions libres finies dont les morphismes sont stricts?

Dans la situation précédente, si $\mathscr{N} = \mathscr{M}^\infty$ pour un $\mathscr{D}_X$-module cohérent $\mathscr{M}$, est-ce que le morphisme de projection $\mathscr{D}_Y^\infty \otimes_{\mathscr{D}_Y} \mathbf{R} f_* \mathbf{DR}_f(\mathscr{M}) \to \mathbf{R} f_* \mathbf{DR}_f(\mathscr{M}^\infty)$ est un isomorphisme? □

Pour la première partie du problème précédent la démonstration de Kiehl-Verdier (cf. [$\mathrm{Do}_1$]) du théorème de Grauert semble s'adapter, en utilisant les hyperrecouvrements au lieu des recouvrements.

La résolution du problème précédent entraîne la cohérence des images directes des $\mathscr{D}_X$-modules cohérents par un morphisme propre, sans hypothèses d'existence de filtrations globales qui existent toujours dans le cas holonome [$\mathrm{Ma}_2$], [$\mathrm{Ma}_3$] mais pas en général en vertu d'un contre exemple de Deligne (cf. [$\mathrm{Ma}_4$]).

**Problème 4.3.4.** Considérons la sous-catégorie de la catégorie dérivée $D^b(\mathscr{D}_X^\infty)$ des complexes parfaits $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^\infty)$, c'est-à-dire, des complexes qui admettent localement des résolutions libres finies. C'est une catégorie triangulée [SGA 6]. Considérons la sous-catégorie $D_{\mathrm{strict}}(\mathscr{D}_X^\infty)$ des complexes qui admettent localement des résolutions libres finies strictes pour la topologie canonique précédente. La catégorie $D_{\mathrm{strict}}(\mathscr{D}_X^\infty)$ est une sous-catégorie triangulée de la catégorie $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^\infty)$.

Est-ce que l'inclusion $D_{\mathrm{ac}}^b(\mathscr{D}_X^\infty) \subset D_{\mathrm{strict}}(\mathscr{D}_X^\infty)$ est une équivalence de catégories?, où $D_{\mathrm{ac}}^b(\mathscr{D}_X^\infty)$ désigne la catégorie des complexes admissibles, c'est-à-dire les complexes qui admettent localement des résolutions libres finies où les morphismes sont des matrices d'opérateurs d'ordre fini.

L'analogue de la question précédente pour les complexes holonomes est la réciproque du théorème de constructibilité et est bien compris. Si on désigne par $D_{\mathrm{h}}^b(\mathscr{D}_X^\infty)$ la sous-catégorie de la catégorie $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^\infty)$ des complexes dont le complexe des solutions est constructible et par $D_{\mathrm{ah}}^b(\mathscr{D}_X^\infty)$ la sous-catégorie de la catégorie $D_{\mathrm{ac}}^b(\mathscr{D}_X^\infty)$ des complexes admissibles holonomes, c'est-à-dire, les complexes qui admettent localement des résolutions libres finies où les morphismes sont des matrices d'opérateurs d'ordre fini à cohomologie holonome, alors l'inclusion $D_{\mathrm{ah}}^b(\mathscr{D}_X^\infty) \subset D_{\mathrm{h}}^b(\mathscr{D}_X^\infty)$ est une équivalence de catégories [$\mathrm{Me}_2$], II, 4.1.5 comme conséquence du théorème d'existence de Riemann. En particulier tout $\mathscr{D}_X$-module cohérent dont le complexe des solutions est constructible est holonome. □

**Problème 4.3.5.** Est-ce que l'inclusion $\mathrm{Homtop}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X) \subseteqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X)$ est une égalite? (Pour la motivation de cette question voir [$\mathrm{Me}_1$].) Remarquons que l'inclusion précédente pour une variété réelle $C^\infty$ est une égalité en vertu du théorème de Peetre [$\mathrm{Pe}_1$], [$\mathrm{Pe}_2$]. Dans le cas d'une variété analytique complexe nous pensons que la réponse est négative. □

**Problème 4.3.6.** En rapport avec la question précédente se pose la question de définir les catégories dérivées des catégories des faisceaux sur les espaces analytiques à valeurs dans la catégorie des espaces localement convexes de type $\mathscr{FN}$ et des foncteurs dérivés dans ces catégories, par exemple du foncteur $\mathbf{R}\,\mathrm{Homtop}_{\mathbb{C}_X}(-,-)$. Ces foncteurs dérivés doivent coïncider avec les foncteurs de faisceaux analogues usuels sous des conditions de constructibilité [$\mathrm{Me}_1$]. □

**Problème 4.3.7.** Est-ce que tout idéal de type fini de l'anneau $\mathscr{D}^\infty$ est de présentation fini? □

## 5. Un critère topologique de régularité

**5.1. Formes normales des fonctions à singularités essentielles.** Si $Y$ est une hypersurface d'un ouvert de Stein $U$ de $\mathbb{C}^n$ définie par une fonction $f$ et $g$ une fonction holomorphe sur $U - Y$, on a alors un développement de Laurent [Me$_1$], 8.3.1

$$g(\underline{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(\underline{x}) f(\underline{x})^k ,$$

où les $a_k$ forment une suite de fonctions holomorphes sur $U$, la convergence étant uniforme sur les compacts de $U - Y$. Ce développement n'est pas unique. Nous allons montrer qu'en imposant des conditions sur l'équation $f$ et sur les fonctions $a_k$ le développement est alors unique. Nous utilisons ce résultat pour montrer le théorème de comparaison.

**Définition 5.1.1.** Soit $f: (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction analytique distinguée par rapport à $x_n$, i.e. $f(0, \ldots, 0, x_n) \neq 0$. On dira qu'un polyrayon $\varrho = (\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ est un *polyrayon de Weierstrass* pour $f$ si

1. $f$ est défini dans un voisinage de $K_\varrho$,
2. $f(0, \ldots, 0, x_n) \neq 0$ si $0 < |x_n| \leqq \varrho_n$,
3. $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ si $|x_n| = \varrho_n$ et $|x_i| \leqq \varrho_i$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.

Dans ce cas on dira aussi que $K_\varrho$ (resp. $\mathring{K}_\varrho$) est un polycylindre compact (resp. ouvert) de Weierstrass pour $f$.

Soit $f: (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un polynôme de Weierstrass par rapport à $x_n$ de degré $d \geqq 1$. Soit $\Omega$ un voisinage ouvert de l'origine où $f$ est défini, $Y \subset \Omega$ l'hypersurface d'équation $f \neq 0$ et $j: W = \Omega - Y \hookrightarrow \Omega$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire. Notons $\pi: \Omega \times \mathbb{C} \to \Omega$ la projection et $p: \pi_* \mathcal{O}_{\Omega \times \mathbb{C}} \to j_* j^{-1} \mathcal{O}_\Omega$ le morphisme qui associe à chaque fonction $H \in \mathcal{O}_{\Omega \times \mathbb{C}}(V \times \mathbb{C})$ la fonction $h \in \mathcal{O}_\Omega(V - Y)$ définie par:

$$h(\underline{x}) = H\left(\underline{x}, \frac{1}{f(\underline{x})}\right), \quad \forall \underline{x} \in V - Y.$$

**Théorème 5.1.2.** *Sous les hypothèses précédentes, on a*:

(1) *Pour tout polycylindre ouvert U de Weierstrass pour f et pour toute fonction analytique $g: U - Y \to \mathbb{C}$ à singularités essentielles le long de Y, il existe une unique fonction analytique $G: U \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, avec $G(\underline{x}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(\underline{x}) t^k$, telle que les $G_k$ sont des polynômes de dégré $\leqq d-1$ par rapport à $x_n$ pour tout $k \geqq 1$ et*

$$g(\underline{x}) = G\left(\underline{x}, \frac{1}{f(\underline{x})}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k(\underline{x})}{f(\underline{x})^k}, \quad \forall \underline{x} \in U - Y.$$

(2) *Dans la situation de* (1), *notons* $\tau(U) : \mathcal{O}_\Omega(U-Y) \to \mathcal{O}_{\Omega\times\mathbb{C}}(U\times\mathbb{C})$ *l'application qui associe à chaque fonction g la fonction G correspondante. Alors* $\tau(U)$ *est une scission continue de* $p(U)$, *et si g est une fonction méromorphe le long de* $Y$, $\tau(U)(g)$ *est une fonction polynomiale par rapport à t.*

*Preuve.* Soit $U = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid |x_i| < \varrho_i\}$ un polycylindre ouvert de Weierstrass pour $f$. Pour $\underline{x} = (\underline{x}', x_n) \in U - Y$ on a:

$$g(\underline{x}) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\underline{x}', \zeta_n)}{\zeta_n - x_n} d\zeta_n - \sum_{\alpha \in Y_{\underline{x}'}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\alpha} \frac{g(\underline{x}', \zeta_n)}{\zeta_n - x_n} d\zeta_n,$$

où $\Gamma$ est le cycle $|\zeta_n| = R$, avec $|x_n| < R$ et $R$ sufisamment grand, $Y_{\underline{x}'} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid (\underline{x}', \alpha) \in Y \cap U\}$, et les $\Gamma_\alpha$ sont des petits cycles $|\zeta_n - \alpha| = r$, avec $0 < r < |x_n - \alpha|$ pour tout $\alpha \in Y_{\underline{x}'}$.

Posons

$$A(\underline{x}, \zeta_n) = \frac{f(\underline{x}', \zeta_n) - f(\underline{x})}{\zeta_n - x_n}.$$

Il s'agit d'une fonction analytique qui est un polynôme symétrique en $\zeta_n$, $x_n$ de degré $d-1$. Posons:

$$A(\underline{x}, \zeta_n) = \sum_{j=0}^{d-1} A_j(\underline{x}', \zeta_n)\, x_n^j.$$

On a

$$\frac{1}{\zeta_n - x_n} = \frac{A(\underline{x}, \zeta_n)}{f(\underline{x}', \zeta_n) - f(\underline{x})} = \frac{-A(\underline{x}, \zeta_n)}{f(\underline{x})\left(1 - \dfrac{f(\underline{x}', \zeta_n)}{f(\underline{x})}\right)}$$
$$= -\frac{1}{f(\underline{x})} \sum_{m=0}^{\infty} A(\underline{x}, \zeta_n) \frac{f(\underline{x}', \zeta_n)^m}{f(\underline{x})^m},$$

où la série converge normalement si la distance de $\zeta_n$ à $Y_{\underline{x}'}$ est assez petite par rapport à la distance de $x_n$ au même ensemble. Par conséquent, si $\Gamma'_\alpha$ est le cycle $|\zeta_n - \alpha| = r'$, avec $r'$ suffisamment petit, on a:

$$g(\underline{x}) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\underline{x}', \zeta_n)}{\zeta_n - x_n} d\zeta_n$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f(\underline{x})^k} \frac{1}{2\pi i} \sum_{\alpha \in Y_{\underline{x}'}} \int_{\Gamma'_\alpha} A(\underline{x}, \zeta_n)\, g(\underline{x}', \zeta_n)\, f(\underline{x}', \zeta_n)^{k-1} d\zeta_n,$$

mais comme le cycle $\sum_\alpha \Gamma'_\alpha$ est homologue au cycle $\Gamma$ dans $U - Y$, on a:

(12)
$$g(\underline{x}) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\underline{x}', \zeta_n)}{\zeta_n - x_n} d\zeta_n$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f(\underline{x})^k} \sum_{j=0}^{d-1} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma A_j(\underline{x}', \zeta_n)\, g(\underline{x}', \zeta_n)\, f(\underline{x}', \zeta_n)^{k-1} d\zeta_n \right) x_n^j.$$

Posons:

$$G_0(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\underset{\sim}{x}'\zeta_n)}{\zeta_n - x_n} d\zeta_n, \tag{13}$$

et, pour $k \geqq 1$, $G_k(\underset{\sim}{x}) = \sum_{j=0}^{d-1} G_{kj}(\underset{\sim}{x}')\, x_n^j$, avec

$$G_{kj}(\underset{\sim}{x}') = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma} A_j(\underset{\sim}{x}', \zeta_n)\, g(\underset{\sim}{x}', \zeta_n)\, f(\underset{\sim}{x}', \zeta_n)^{k-1} d\zeta_n. \tag{14}$$

Il est clair que les $G_k$ ainsi définies sont des fonctions analytiques sur $U$.

Soient $K \subset U$ un compact et $L > 0$ une constante arbitraires. Soit $K' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ un polycylindre compact centré à l'origine et $R' > 0$ une constante tels que le polycylindre compact $K_1 = K' \times \bar{B}(0, R')$ est de Weierstrass pour $f$ et $K \subset \mathring{K}_1 \subset K_1 \subset U$. D'après (13), on a

$$|G_0|_K \leqq R' \frac{1}{d(K, K_1^c)} |g|_{K' \times \partial \bar{B}(0, R')}.$$

Prenons un $\delta > 0$ tel que $\delta \leqq \dfrac{1}{2L}$ et $\delta < \inf\{|f(\underset{\sim}{x})| \mid \underset{\sim}{x} \in K' \times \partial \bar{B}(0, R')\}$, et considérons le compact $K_2 = \{\underset{\sim}{x} \in K_1 \mid |f(\underset{\sim}{x})| = \delta\}$. Pour chaque $\underset{\sim}{x}' \in K'$ le cycle $\Gamma_{\underset{\sim}{x}'} = \{\zeta_n \mid |f(\underset{\sim}{x}', \zeta_n)| = \delta\}$ est homologue au cycle $\Gamma = \{\zeta_n \mid |\zeta_n| = R'\}$ dans $(U - Y) \cap (\{\underset{\sim}{x}'\} \times \mathbb{C})$, et sa longueur est une fonction continue de $\underset{\sim}{x}'$. Elle est donc bornée par une constante $C > 0$ si $\underset{\sim}{x}' \in K'$. D'après (14), pour tout $k \geqq 1$ on a:

$$\begin{aligned} |G_{kj}|_{K'} &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\underset{\sim}{x}'}} A_j(\underset{\sim}{x}', \zeta_n)\, g(\underset{\sim}{x}', \zeta_n)\, f(\underset{\sim}{x}', \zeta_n)^{k-1} d\zeta_n \right|_{K'} \\ &\leqq MC|g|_{K_2} \delta^{1-k} \leqq MC|g|_{K_2} (2L)^{1-k}, \end{aligned}$$

où $M$ est une constante telle que $|A_j|_{\bar{U}} \leqq M$ pour tout $j = 0, \ldots, d-1$, d'où

$$|G_k|_K \leqq \sum_{j=0}^{d-1} |G_{kj}|_{K'} (R')^j \leqq MC \frac{(R')^d - 1}{R' - 1} |g|_{K_2} (2L)^{1-k}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |G_k|_K L^k \leqq R' \frac{1}{d(K, K_1^c)} |g|_{K' \times \partial \bar{B}(0, R')} + 2LMC \frac{(R')^d - 1}{R' - 1} |g|_{K_2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < +\infty$$

ce qui montre que la fonction $G(\underset{\sim}{x}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(\underset{\sim}{x})\, t^k$ est analytique sur $U \times \mathbb{C}$ et l'application

$$g \in \mathcal{O}_\Omega(U - Y) \mapsto G \in \mathcal{O}_{\Omega \times \mathbb{C}}(U \times \mathbb{C})$$

est continue.

D'après (12), on a:

$$g(\underline{x}) = G\left(\underline{x}, \frac{1}{f(\underline{x})}\right), \quad \forall \underline{x} \in U - Y.$$

Pour l'unicité il suffit de voir si $G(\underline{x}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(\underline{x})\, t^k$ est une fonction analytique sur $U \times \mathbb{C}$ telle que les $G_k$ sont des polynômes de dégré $\leqq d-1$ par rapport à $x_n$ pour tout $k \geqq 1$:

$$G_k(\underline{x}) = \sum_{j=0}^{d-1} G_{kj}(\underline{x}')\, x_n^j,$$

et $G\left(\underline{x}, \frac{1}{f(x)}\right) = 0$ pour tout $\underline{x} \in U - Y$, alors $G = 0$. Or, si $\underline{x}' \in \mathbb{C}^{n-1}$ avec $|x_i| < \varrho_i$ pour tout $i = 0, \ldots, n-1$ et $R > 0$ est suffisamment grand, on a

$$0 = \int_{|\zeta_n| = R} \zeta_n^j G\left(\underline{x}', \zeta_n, \frac{1}{f(\underline{x}', \zeta_n)}\right) d\zeta_n = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{|\zeta_n| = R} \frac{\zeta_n^j G_k(\underline{x}', \zeta_n)\, d\zeta_n}{f(\underline{x}', \zeta_n)^k}$$

pour tout $j \geqq 0$. Le premier terme de la somme s'annule car c'est l'intégrale d'une forme holomorphe par tout en $\zeta_n$.

Si $k \geqq 2$ et $0 \leqq j \leqq d-1$, la forme $\frac{\zeta_n^j G_k(\underline{x}', \zeta_n)}{f(\underline{x}', \zeta_n)^k}\, d\zeta_n$ n'a pas des singularités dans $|\zeta_n| > R$, y compris l'infini, et donc l'intégrale correspondante est nulle. Par conséquent, on a pour tout $j = 0, \ldots, d-1$

$$0 = \int_{|\zeta_n| = R} \frac{\zeta_n^j G_1(\underline{x}', \zeta_n)\, d\zeta_n}{f(\underline{x}', \zeta_n)} = \int_{|\zeta_n| = R} \frac{\zeta_n^j \left(G_{10}(\underline{x}') + \cdots + G_{1,d-1}(\underline{x}')\, \zeta_n^{d-1}\right) d\zeta_n}{f(\underline{x}', \zeta_n)},$$

et par un calcul de résidus à l'infini on montre que $G_{1,d-1}(\underline{x}') = \cdots = G_{10}(\underline{x}') = 0$, ce qui entraîne la nullité de $G_1$.

Si l'on remplace la fonction $G$ par $f^m G$, on montre de façon analogue que $G_{m+1} = 0$, pour tout $m \geqq 0$. On en déduit la nullité de $G_0$, d'où celle de $G$.

Supposons maintenant que la fonction $g \in \mathcal{O}_\Omega(U - Y)$ est méromorphe le long de $Y$. Il existe donc un entier $m \geqq 0$ tel que $f^m g = h$ est une fonction analytique au voisinage de l'origine, et d'après (14), les fonctions $G_{kj}$ sont nulles au voisinage de 0 dès que $k \geqq m+1$. Par prolongement analytique, $G_k = 0$ si $k \geqq m+1$, et la fonction $G$ est un polynôme par rapport à $t$. En particulier, ceci démontre que $h$ est analytique sur l'ouvert $U$ tout entier et que l'égalité $g = \frac{h}{f^m}$ est vraie sur $U - Y$. □

**Remarque 5.1.3.** La preuve du théorème 5.1.2 est une sorte de théorème de Laurent semi-local par rapport à la dernière variable, avec contrôle de la dépendence des $n-1$ premières variables.

**Corollaire 5.1.4.** *Sous les hypothèses du théorème* 5.1.2, *pour tout polycylindre ouvert $U$ de Weierstrass pour $f$, l'espace des fonctions analytiques sur $U$, $\mathcal{O}_\Omega(U)$, est un facteur direct topologique de l'espace des fonctions analytiques sur $U - Y$, $\mathcal{O}_\Omega(U - Y)$.*

**Corollaire 5.1.5.** *Sous les hypothèses du théorème* 5.1.2, *notons* $\mathcal{O}_\Omega[*Y]$ *le sous-faisceau de* $j_* j^{-1}\mathcal{O}_\Omega$ *des fonctions méromorphes le long de* $Y$. *Alors*, *pour tout polycylindre ouvert* $U$ *de Weierstrass pour* $f$ *on a*:

(1) $\mathcal{O}_\Omega(U-Y) = \Gamma(U, j_* j^{-1}\mathcal{O}_\Omega) = \overline{\Gamma(U, \mathcal{O}_\Omega[*Y])}$.

(2) $\Gamma(U, \mathcal{O}_\Omega[*Y]) = \mathcal{O}_\Omega(U)[f^{-1}]$.

(3) *La topologie induite par celle de* $\mathcal{O}_\Omega(U-Y)$ *dans l'espace* $\Gamma(U, \mathcal{O}_\Omega[*Y])$ *coïncide avec la topologie quotient par l'application*

$$p(U): \sum_{\text{finie}} G_k t^k \in \Gamma(U, \mathcal{O}_\Omega[t]) \mapsto \sum G_k f^{-k} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_\Omega[*Y]),$$

*où sur l'espace* $\Gamma(U, \mathcal{O}_\Omega[t]) = \mathcal{O}_\Omega(U)[t]$ *on considère la topologie induite par celle de* $\mathcal{O}_{\Omega\times\mathbb{C}}(U\times\mathbb{C}) = \mathcal{O}_\Omega(U)\,\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \mathcal{O}_\Omega(U)\,\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}[t]$. *Les projections* $p(U)$ *admettent une famille compatible des scissions continues*, *en particulier*, *l'espace* $\Gamma(U, \mathcal{O}_\Omega[*Y])$ *est un facteur directe topologique de* $\Gamma(U, \mathcal{O}_\Omega[t])$.

**5.2. Le critère topologique de la régularité.**

**5.2.1.** Soient $A$ une algèbre de Fréchet nucléaire et $E$, $F$ deux $A$-modules localement convexes métrisables nucléaires. On considère toujours sur le produit tensoriel $E\otimes_A F$ la topologie quotient définie par la suite exacte

$$E\otimes_{\mathbb{C}} A\otimes_{\mathbb{C}} F \xrightarrow{\beta} E\otimes_{\mathbb{C}} F \to E\otimes_A F \to 0,$$

où $\beta(e\otimes a\otimes f) = (ea)\otimes f - e\otimes(af)$.

On note $E\,\hat{\otimes}_A F$ l'espace défini par la suite exacte

$$E\,\hat{\otimes}_{\mathbb{C}} A\,\hat{\otimes}_{\mathbb{C}} F \xrightarrow{\hat{\beta}} E\,\hat{\otimes}_{\mathbb{C}} F \to E\,\hat{\otimes}_A F \to 0,$$

muni de la topologie quotient correspondante (cf. [Hu], déf. 5). Les topologies sur les produits tensoriels topologiques sur $\mathbb{C}$ sont bien définies en vertu de la nucléarité [PTT].

Notons que $E\,\hat{\otimes}_A F = \hat{E}\,\hat{\otimes}_A \hat{F}$ et qu'il existe un morphisme canonique continu $i: E\otimes_A F \to E\,\hat{\otimes}_A F$ d'image dense. De plus, si $E_0$ est un espace de Fréchet-nucléaire et $E = E_0\otimes_{\mathbb{C}} A$, alors l'isomorphisme algébrique $E\otimes_A F \simeq E_0\otimes_C F$ est un homéomorphisme.

**Lemme 5.2.2.** *Dans la situation de* 5.2.1, *si l'espace* $E\,\hat{\otimes}_A F$ *est séparé et* $E\otimes_A F$ *s'injecte dans* $E\,\hat{\otimes}_A F$, *alors le deuxième espace est le séparé complété du premier*. *En particulier*, *l'injection* $E\otimes_A F \hookrightarrow E\,\hat{\otimes}_A F$ *est une immersion topologique*.

*Preuve*. Remarquons d'abord que l'on a l'inclusion $\operatorname{Im}(\hat{\beta}) \subset \overline{\operatorname{Im}(\beta)}$. Si $E\otimes_A F$ s'injecte dans $E\,\hat{\otimes}_A F$, l'image de $\beta$ coïncide avec la trace dans $E\otimes_{\mathbb{C}} F$ de l'image de $\hat{\beta}$, et $\operatorname{Im}(\hat{\beta}) = \overline{\operatorname{Im}(\beta)}$, d'où:

$$E \,\hat{\otimes}_A F = (E \,\hat{\otimes}_{\mathbb{C}} F)/\operatorname{Im}(\hat{\beta}) = \big((E \otimes_C F)\,|\,\operatorname{Im}(\beta)\big)^{\wedge}$$

(cf. [Bo], IX. 26). $\square$

Notons $\mathscr{D}_\Omega[*Y]$ le sous-faisceau de $j_* j^{-1}\mathscr{D}_\Omega$ des opérateurs différentiels méromorphes le long de $Y$, muni de la topologie induite.

**Corollaire 5.2.3.** *Sous les hypothèses du théorème* 5.1.2, *pour tout polycylindre ouvert* $U$ *de Weierstrass pour* $f$ *on a*:

(1) $\Gamma(U, \mathscr{O}_\Omega[*Y]) \otimes_{\mathscr{O}_\Omega(U)} \mathscr{D}_\Omega(U) \simeq \Gamma(U, \mathscr{D}_\Omega[*Y])$.

(2) $\mathscr{O}_\Omega(U-Y) \,\hat{\otimes}_{\mathscr{O}(U)} \mathscr{D}_\Omega^\infty(U) \simeq \mathscr{D}_\Omega^\infty(U-Y) = \overline{\Gamma(U, \mathscr{D}_\Omega[*Y])}$.

*De plus*, *les isomorphismes précédents sont des homéomorphismes.*

*Preuve*. D'après la remarque 2.1.5 et les résultats de la section 2.2, on a un isomorphisme topologique (non canonique) de $\mathscr{O}_\Omega$-modules à gauche $\mathscr{D}_\Omega^\infty \simeq \pi_* \mathscr{O}_{\Omega \times \mathbb{C}^n}$ qui nous fournit des identifications topologiques:

(a) $\mathscr{D}_\Omega^\infty(U) = \mathscr{O}_\Omega(U) \,\hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}^n)$ comme $\mathscr{O}_\Omega(U)$-modules à gauche.

(b) $\mathscr{D}_\Omega(U) = \mathscr{O}_\Omega(U) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\underline{\xi}] \subset \mathscr{O}_\Omega(U) \,\hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}^n)$ comme $\mathscr{O}_\Omega(U)$-modules à gauche.

(c) $\mathscr{D}_\Omega^\infty(U-Y) = \mathscr{O}_\Omega(U-Y) \,\hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}^n)$ comme $\mathscr{O}_\Omega(U-Y)$-modules à gauche.

(d) $\Gamma(U, \mathscr{D}_\Omega[*Y]) = \Gamma(U, \mathscr{O}_\Omega[*Y]) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\underline{\xi}] \subset \mathscr{O}_\Omega(U-Y) \,\hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}^n)$ comme $\Gamma(U, \mathscr{O}_\Omega[*Y])$-modules à gauche.

Par conséquent, le morphisme naturel $\mathscr{O}_\Omega(U-Y) \,\hat{\otimes}_{\mathscr{O}(U)} \mathscr{D}_\Omega^\infty(U) \to \mathscr{D}_\Omega^\infty(U-Y)$ est un isomorphisme topologique. D'autre part, le morphisme naturel

$$\Gamma(U, \mathscr{O}_\Omega[*Y]) \otimes_{\mathscr{O}_\Omega(U)} \mathscr{D}_\Omega(U) \to \Gamma(U, \mathscr{D}_\Omega[*Y])$$

est un isomorphisme algébrique, et d'après le corollaire 5.1.5 et le lemme 5.2.2, c'est aussi un homéomorphisme. $\square$

Soient $L', L'' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux formes linéaires non nulles à coefficients non négatifs et $L = (L', L'') : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $L(\alpha, \beta) = L'(\alpha) + L''(\beta)$.

**Lemme 5.2.4.** *Soit* $f = x_n^d + a_1(\underline{x}')\, x_n^{d-1} + \cdots + a_d(\underline{x}')$ *un polynôme de Weierstrass par rapport à* $x_n$ *de degré* $d$ *et supposons que* $L'$ *est une forme linéaire telle que* $\exp_{<_{L'}}(f) = (0, \ldots, 0, d)$. *Alors dans toute* $L$-*base de voisinages ouverts de l'origine on peut extraire une base d'ouverts formée par des polycylindres ouverts de Weierstrass pour* $f$.

*Preuve*[3]). D'après la définition 3.2.1, si $\mathscr{B}$ est une $L$-base de voisinages ouverts de l'origine, il existe un ouvert effilé $\mathscr{U} \subset (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$ par rapport à $L$ tel que

[3]) Nous remerçions H. Hauser de nous avoir indiqué la preuve de ce lemme.

$$\mathscr{B} \supseteqq \{\overset{\circ}{K}_{\varrho'} \mid \exists \varrho'' \text{ avec } (\varrho', \varrho'') \in \mathscr{U}\} .$$

On peut supposer que $f$ est définie au voisinage de tous le $K_{\varrho'}$ avec $(\varrho', \varrho'') \in \mathscr{U}$. Prenons $\beta \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$, $C : \Lambda_\beta \to \mathbb{R}_+^*$ et $\mathscr{U}_{\beta,C}$ comme dans la définition 1.2.1.

Posons $f = \sum_{\alpha \in \mathscr{N}} a_\alpha \underline{x}^\alpha$, où $\mathscr{N}$ est le support de la série $f$, et $\mathscr{N}^* = \mathscr{N} - \{\alpha^0\}$, où $\alpha^0 = (0, \ldots, 0, d)$. Prenons $(\ell_1', \ldots, \ell_{2n}') \in \Lambda_\beta$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$ et assez proches aux coefficients de $L$ pour que $\exp_{<_{L'}}(f) = \exp_{<_{L_1'}}(f)$, $L_1' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ étant la forme linéaire de coefficients $(\ell_1', \ldots, \ell_n')$.

Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $L_1'(\alpha) \geqq \varepsilon|\alpha| + L_1'(\alpha^0)$ pour tout $\alpha \in \mathscr{N}^*$. Prenons un $\eta_0 \in ]0, 1]$ tel que

$$\sum_{\alpha \in \mathscr{N}^*} |a_\alpha| \eta_0^{\varepsilon|\alpha|} < 1 .$$

Pour $0 < \eta < C(\ell_1', \ldots, \ell_{2n}')$ et $\eta \leqq \eta_0$, les polycylindres $\overset{\circ}{K}_{\varrho'}$, avec $\varrho' = (\eta^{\ell_1'}, \ldots, \eta^{\ell_n'})$, appartiennent à $\mathscr{B}$. Or, si $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ est tel que $|x_n| = \eta^{\ell_n'}$ et $|x_i| \leqq \eta^{\ell_i'}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$, on a

$$\sum_{\alpha \in \mathscr{N}^*} |a_\alpha| \eta^{L_1'(\alpha)} \leqq \sum_{\alpha \in \mathscr{N}^*} |a_\alpha| \eta^{\varepsilon|\alpha| + L_1'(\alpha^0)}$$

$$\leqq \left( \sum_{\alpha \in \mathscr{N}^*} |a_\alpha| \eta_0^{\varepsilon|\alpha|} \right) \eta^{L_1'(\alpha^0)} < \eta^{L_1'(\alpha^0)} = \eta^{\ell_n' d} ,$$

d'où

$$|x_n^d|_{\varrho'} > \left| \sum_{\alpha \in \mathscr{N}^*} a_\alpha \underline{x}^\alpha \right|_{\varrho'} \quad \text{et} \quad f(x_1, \ldots, x_n) = x_n^d + \sum_{\alpha \in \mathscr{N}^*} a_\alpha \underline{x}^\alpha \neq 0 ,$$

ce qui démontre le lemme. □

**Proposition 5.2.5.** *Sous les hypothèses du théorème* 5.1.2 *et du lemme* 5.2.4, *si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_\Omega$-module cohérent tel que le localisé $\mathscr{M}[*Y]$ est aussi $\mathscr{D}_\Omega$-cohérent* (*par exemple, si $\mathscr{M}$ est holonome, ou plus généralement, spécialisable le long de $Y$*), *et si $\mathscr{B}$ est une $L$-base de voisinages ouverts de l'origine adaptée à $\mathscr{M}_0$ et à $\mathscr{M}[*Y]_0$, alors pour tout polycylindre $U \in \mathscr{B}$ qui soit de Weierstrass pour $f$ on a*:

1. *L'inclusion $\Gamma(U, \mathscr{M}[*Y]) \hookrightarrow \mathscr{M}^\infty(U - Y)$ est continue, et par conséquent le morphisme canonique $\mathscr{M}[*Y] \to j_* j^{-1} \mathscr{M}^\infty$ est continu.*

2. *Le morphisme naturel $\mathscr{O}_\Omega(U - Y) \hat{\otimes}_{\mathscr{O}_\Omega(U)} \mathscr{M}^\infty(U) \to \mathscr{M}^\infty(U - Y)$ est un isomorphisme topologique.*

3. *Le morphisme naturel $\alpha(U) : \Gamma(U, \mathscr{O}_\Omega[*Y]) \otimes_{\mathscr{O}_\Omega(U)} \mathscr{M}(U) \to \mathscr{M}^\infty(U - Y)$ est injectif, et son image coïncide avec $\Gamma(U, \mathscr{M}[*Y])$. En particulier, $\mathscr{M}[*Y]$ est dense dans $j_* j^{-1} \mathscr{M}^\infty$. De plus, $\alpha(U)$ est une immersion topologique.*

*Preuve.* Quitte à restreindre $\Omega$, on peut trouver deux présentations finies:

$$\mathscr{D}_\Omega^{r_1} \to \mathscr{D}_\Omega^{r_0} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{M} \to 0, \quad \mathscr{D}_\Omega^{s_1} \to \mathscr{D}_\Omega^{s_0} \xrightarrow{\psi} \mathscr{M}[*Y] \to 0$$

qui font partie des résolutions libres finies sur $\Omega$ comme dans la définition 4.2.3.

Il existe un morphisme $\mathscr{D}_\Omega$-linéaire $\beta : \mathscr{D}_\Omega^{s_0} \to (j_* j^{-1} \mathscr{D}_\Omega^\infty)^{r_0}$ tel que

$$i \circ \psi = (j_* j^{-1} \varphi^\infty) \circ \beta, \quad \text{où} \quad i : \mathscr{M}[*Y] \hookrightarrow j_* j^{-1} \mathscr{M}^\infty$$

est l'inclusion. Par conséquent, pour chaque $U \in \mathscr{B}$, comme $\beta(U)$ est continu et la topologie sur $\Gamma(U, \mathscr{M}[*Y])$ est la topologie quotient de $\psi(U)$, $i(U)$ est continue, ce qui démontre l'assertion 1.

D'après le corollaire 4.2.4, pour tout $U \in \mathscr{B}$ les suites

$$(\mathscr{D}_\Omega^\infty)^{r_1}(U) \to (\mathscr{D}_\Omega^\infty)^{r_0}(U) \xrightarrow{\varphi^\infty} \mathscr{M}^\infty(U) \to 0\,,$$

$$(\mathscr{D}_\Omega^\infty)^{r_1}(U-Y) \to (\mathscr{D}_\Omega^\infty)^{r_0}(U-Y) \xrightarrow{\varphi^\infty} \mathscr{M}^\infty(U-Y) \to 0\,.$$

sont exactes. Or, si $U$ est de Weierstrass pour $f$, d'après le corollaire 5.2.3 on a

$$\mathscr{O}_\Omega(U-Y)\,\hat{\otimes}_{\mathscr{O}(U)}\,\mathscr{D}_\Omega^\infty(U) \simeq \mathscr{D}_\Omega^\infty(U-Y)\,,$$

d'où en appliquant $\mathscr{O}_\Omega(U-Y)\,\hat{\otimes}_{\mathscr{O}(U)} -$ à la première suite on obtient l'assertion 2 (cf. [Hu], p. 36).

Voyons maintenant l'assertion 3. Quitte encore à restreindre $\Omega$, on peut supposer que $\psi$ est donnée par:

$$\psi(Q_1, \ldots, Q_{s_0}) = \sum_{j=1}^{s_0} Q_j \cdot (f^{-k} m_j)\,,$$

où les $m_j$ sont des sections de $\mathscr{M}$ sur $\Omega$.

Pour $U \in \mathscr{B}$ qui soit de Weierstrass pour $f$ et $m \in \mathscr{M}(U)$, si $\alpha(U)(f^{-l} \otimes m) = 0$ alors $m|_{U-Y} = 0$, mais $m$ est une section sur $U$ d'un sous-$\mathscr{O}_\Omega$-module cohérent de $\mathscr{M}$ (un des termes de la bonne filtration déterminée par $\varphi$), et donc il existe $p \geqq 0$ tel que $f^p m = 0$, d'où $f^{-l} \otimes m = f^{-(l+p)} \otimes (f^p m) = 0$, et $\alpha(U)$ est injective.

Pour la surjectivité, prenons une section $m'$ de $\mathscr{M}[*Y]$ sur $U$: ils existent $Q_1, \ldots, Q_{s_0} \in \mathscr{D}_\Omega(U)$ tels que $m' = \sum_j Q_j \cdot (f^{-k} m_j)$, et en commutant les $Q_j$ avec $f^{-k}$ on trouve:

$$m' = \cdots = \sum_j f^{-k'} (Q'_j \cdot m_j) = \alpha(U) \left( \sum_j f^{-k'} \otimes (Q'_j \cdot m_j) \right).$$

L'application $\alpha(U)$ est une immersion topologique d'après le lemme 5.2.2. □

**Définition 5.2.6.** Soit $X$ une variété analytique complexe lisse, $Y \subset X$ une hypersurface, $j: X - Y \hookrightarrow X$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent tel que $\mathcal{M}[*Y]$ est aussi $\mathcal{D}_X$-cohérent. On appelle *topologie induite*, et on note $\mathcal{T}_i(\mathcal{M}[*Y])$, la topologie induite par l'inclusion $\mathcal{M}[*Y] \hookrightarrow j_* j^{-1}\mathcal{M}^\infty$.

En vertu de l'assertion 1 de la proposition 5.2.5, la topologie quotient $\mathcal{T}_q(\mathcal{M}[*Y])$ est plus fine que la topologie induite $\mathcal{T}_i(\mathcal{M}[*Y])$. Par conséquent, et d'après le corollaire 4.2.7, le morphisme canonique

$$C_Y(\mathcal{M}): \qquad \mathcal{D}_X^\infty \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}[*Y] \to j_* j^{-1}\mathcal{M}^\infty$$

est continu et d'image dense (assertion 3 de loc. cit.).

Rappelons la notion de régularité pour les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes [$\mathrm{Me}_2$], II, §2.

**Définition 5.2.7.** Soient $X$ une variété analytique complexe lisse, $Y \subset X$ une hypersurface et $j: X - Y \hookrightarrow X$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire. On dira qu'un $\mathcal{D}_X$-module holonome (ou plus généralement, spécialisable le long de $Y$) $\mathcal{M}$ est régulier le long de $Y$ si le morphisme canonique

$$C_Y(\mathcal{M}): \qquad \mathcal{D}_X^\infty \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}[*Y] \to j_* j^{-1}\mathcal{M}^\infty$$

est un isomorphisme.

**Théorème 5.2.8** (Critère topologique de la régularité). *Soient $X$ une variété analytique complexe lisse, $Y \subset X$ une hypersurface, $j: X - Y \hookrightarrow X$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome (ou plus généralement, spécialisable le long de $Y$). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(a) *Le module $\mathcal{M}$ est régulier le long de $Y$.*

(b) *Les topologies $\mathcal{T}_q(\mathcal{M}[*Y])$ et $\mathcal{T}_i(\mathcal{M}[*Y])$ coïncident.*

*Preuve.* (a) $\Rightarrow$ (b) Soit $p \in Y$. Comme la question est locale, on peut supposer qu'on est dans la situation de la proposition 5.2.5 et que $p$ est l'origine. Soit $\mathcal{B}$ une $L$-base de voisinages ouverts de l'origine adaptée à $\mathcal{M}_0$ et à $\mathcal{M}[*Y]_0$. Comme $\mathcal{M}$ est régulier le long de $Y$, pour tout polycylindre $U \in \mathcal{B}$ on a un isomorphisme algébrique continu

$$\Gamma(U, \mathcal{D}_X^\infty \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}[*Y]) \simeq \Gamma(U, j_* j^{-1}\mathcal{M}^\infty) = \mathcal{M}^\infty(U - Y)$$

qui est un homéomorphisme d'après le théorème des homomorphismes de Banach, et comme le premier espace est le complété de $\Gamma(U, \mathcal{M}[*Y])$, on déduit que la topologie canonique sur ce dernier espace coïncide avec la topologie induite par celle de $\Gamma(U, j_* j^{-1}\mathcal{M}^\infty)$, d'où (b).

(b) $\Rightarrow$ (a) D'après l'assertion 3 de la proposition 5.2.5, $\mathcal{M}[*Y]$ est un sous-faisceau dense du faisceau de Fréchet $j_* j^{-1}\mathcal{M}^\infty$, mais le complété de $\mathcal{M}[*Y]$ ne rien d'autre que $\mathcal{D}_X^\infty \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}[*Y]$, d'où le morphisme canonique

$$\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}[*Y] \to j_* j^{-1} \mathscr{M}^\infty$$

est un isomorphisme, et $\mathscr{M}$ est régulier le long de $Y$. □

**5.3. Equations de Bernstein-Sato régulières et théorème de comparaison.** Nous allons utiliser le critère topologique 5.2.8 pour montrer qu'une équation fonctionnelle régulière entraîne le théorème de comparaison.

**Lemme 5.3.1.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert et pour chaque $i = 1, \ldots, l$ soit $P_i$ un opérateur différentiel sur $\Omega$ d'ordre $\leqq d_i$. Alors pour tout couple de compacts $K_0$, $K_0'$ de $\Omega$ tel que $K_0 \subset \mathring{K}_0'$, il existe une constante $L_0 > 0$ telle que*

$$|P_1 \cdots P_l|_{(K_0, L)} \leqq 2^{n(l-1)} \frac{(d_1 + \cdots + d_l)!}{d_1! \cdots d_l!} \left(\frac{L}{L_0}\right)^{d_1 + \cdots + d_l} |P_1|_{(K_0', L_0)} \cdots |P_l|_{(K_0', L_0)}$$

*pour toute constante $L \geqq L_0$.*

*Preuve.* Posons, pour chaque $i = 1, \ldots, l$:

$$P_i = \sum_{|\alpha| \leqq i} a_{i,\alpha} \Delta^{(\alpha)}.$$

Si $g$ est une fonction holomorphe sur $U$ et $\beta \in \mathbb{N}^n$, notons pour simplifier $g^{(\beta)} = \Delta^{(\beta)}(g)$. On a

$$P_1 \cdots P_l = \sum_{(\alpha^\bullet, \delta^\bullet) \in \Lambda} \left( \prod_{i=1}^{l} a_{i,\alpha^i}^{(\delta^{i-1} + \alpha^i - \delta^i)} \right) \left( \prod_{i=1}^{l} \binom{\delta^i}{\alpha^i} \right) \Delta^{(\delta^l)},$$

où

$$\Lambda = \{(\alpha^\bullet, \delta^\bullet) \in (\mathbb{N}^n)^l \times (\mathbb{N}^n)^l \,|\, |\alpha^i| \leqq d_i, \alpha^i \leqq \delta^i \leqq \delta^{i-1} + \alpha^i, \forall i = 1, \ldots, l\}$$

avec $\delta^0 = 0$.

Prenons un $\varepsilon \in ]0,1[$ tel que $(K_0)_\varepsilon \subset \mathring{K}_0'$, et soit $L > 0$. Posons $c_{i,\alpha^i} = |a_{i,\alpha^i}|_{K_0'}$. On a

$$\begin{aligned}
|P_1 \cdots P_l|_{(K_0, L)} &\leqq \sum_{\Lambda} \left( \prod_{i=1}^{l} \frac{c_{i,\alpha^i}}{\varepsilon^{|\delta^{i-1} + \alpha^i - \delta^i|}} \right) \left( \sum_{i=1}^{l} \binom{\delta^i}{\alpha^i} \right) L^{|\delta^l|} \\
&\leqq \sum_{\Lambda} \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha^1 + \cdots + \alpha^l - \delta^l|}} \left( \prod_{i=1}^{l} c_{i,\alpha^i} \right) \frac{(\alpha^1 + \cdots + \alpha^l)!}{\alpha^1! \cdots \alpha^l!} L^{|\delta^l|} \\
&\leqq \frac{(d_1 + \cdots + d_l)!}{d_1! \cdots d_l!} \sum_{\Lambda} \left( \prod_{i=1}^{l} c_{i,\alpha^i} L^{|\alpha^i|} \right) \frac{1}{(\varepsilon L)^{|\alpha^1 + \cdots + \alpha^l - \delta^l|}} \\
&= \frac{(d_1 + \cdots + d_l)!}{d_1! \cdots d_l!} \sum_{\substack{|\alpha^i \leqq d_i \\ 1 \leqq i \leqq l}} \left( \sum_{i=1}^{l} c_{i,\alpha^i} L^{|\alpha^i|} \right) \sum_{\substack{\alpha^i \leqq \delta^i \leqq \delta^{i-1} + \alpha_i \\ 1 \leqq i \leqq l}} \frac{1}{(\varepsilon L)^{|\alpha^1 + \cdots + \alpha^l - \delta^l|}}.
\end{aligned}$$

Posons $L_0 = \dfrac{2}{\varepsilon}$. Si $L \geqq L_0$ on a

$$\sum \frac{1}{(\varepsilon L)^{|\alpha^1 + \cdots + \alpha^l - \delta^l|}} \leqq \sum \frac{1}{2^{|\alpha^1 + \cdots + \alpha^l - \delta^l|}}$$

$$= \frac{1}{2^{|\alpha^1 + \cdots + \alpha^l|}} \sum_{\delta^1 = \alpha^1}^{\alpha^1} \sum_{\delta^2 = \alpha^2}^{\delta^1 + \alpha^2} \cdots \sum_{\delta^l = \alpha^l}^{\delta^{l-1} + \alpha^l} 2^{|\delta^l|} \leqq 2^{(l-1)n},$$

d'où

$$|P_1 \cdots P_l|_{(K_0, L)} \leqq \cdots \leqq 2^{(l-1)n} \frac{(d_1 + \cdots + d_l)!}{d_1! \cdots d_l!} \sum_{\substack{|\alpha^i| \leqq d_i \\ 1 \leqq i \leqq l}} \left( \prod_{i=1}^{l} c_{i, \alpha^i} L^{|\alpha^i|} \right)$$

$$= 2^{(l-1)n} \frac{(d_1 + \cdots + d_l)!}{d_1! \cdots d_l!} \prod_{i=1}^{l} |P_i|_{(K_0', L)}$$

$$\leqq 2^{(l-1)n} \frac{(d_1 + \cdots + d_l)!}{d_1! \cdots d_l!} \left( \frac{L}{L_0} \right)^{d_1 + \cdots + d_l} \prod_{i=1}^{l} |P_i|_{(K_0', L_0)} . \quad \square$$

**Corollaire 5.3.2.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et*

$$P(s) = \sum_{i=0}^{d} P_i s^{d-i} \in \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(\Omega)[s],$$

*où les $P_i$ sont d'ordre $\leqq i$ pour tout $i = 0, \ldots, d$. Alors pour tout couple de compacts $K_0$, $K_0'$ de $\Omega$ tel que $K_0 \subset \mathring{K}_0'$, il existe une constante $L_0 > 0$ telle que, pour tout $L \geqq L_0$, pour tout entier $s_0$ et pour tout entier $k \geqq 0$, on a*

$$|P(s_0 - k) P(s_0 - k + 1) \cdots P(s_0)|_{(K_0, L)}$$

$$\leqq 2^{nk} (k+1)^{d(k+1)} \left( \frac{L}{L_0} \right)^{d(k+1)} Q\left( \frac{|s_0| + k}{k+1} \right) \cdots Q\left( \frac{|s_0|}{k+1} \right),$$

*où $Q(t)$ est un polynôme à coefficients réels non négatifs de degré $\leqq d$.*

*Preuve.* D'après le lemme 5.3.1, on a

$$|P(s_0 - k) \cdots P(s_0)|_{(K_0, L)}$$

$$\leqq \sum_{i_1, \ldots, i_{k+1} = 0}^{d} |P_{i_1} \cdots P_{i_{k+1}}|_{(K_0, L)} |s_0 - k|^{d - i_1} \cdots |s_0|^{d - i_{k+1}}$$

$$\leqq 2^{nk} \sum_{i_1, \ldots, i_{k+1} = 0}^{d} \frac{(i_1 + \cdots + i_{k+1})!}{i_1! \cdots i_{k+1}!} \prod_{j=1}^{k+1} |P_{i_j}|_{(K_0', L)} \prod_{j=1}^{k+1} (|s_0| + k + 1 - j)^{d - i_j}$$

$$\leqq 2^{nk} \sum_{i_1, \ldots, i_{k+1} = 0}^{d} (k+1)^{i_1 + \cdots + i_{k+1}} \prod_{j=1}^{k+1} |P_{i_j}|_{(K_0', L)} \prod_{j=1}^{k+1} (|s_0| + k + 1 - j)^{d - i_j}$$

$$= 2^{nk}(k+1)^{d(k+1)} \sum_{i_1,\dots,i_{k+1}=0}^{d} \prod_{j=1}^{k+1} |P_{i_j}|_{(K_0',L)} \prod_{j=1}^{k+1} \left(\frac{|s_0|+k+1-j}{k+1}\right)^{d-i_j}$$

$$= 2^{nk}(k+1)^{d(k+1)} \left(\frac{L}{L_0}\right)^{d(k+1)} \prod_{j=0}^{k} Q\left(\frac{|s_0|+j}{k+1}\right),$$

avec

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{d} |P_i|_{(K_0',L_0)} t^{d-i}. \quad \square$$

**Lemme 5.3.3.** *Soient $Q(t)$ un polynôme de degré $\leqq d$ à coefficients réels non négatifs et $b(t)$ un polynôme non nul à coefficients complexes de degré $d$. Soit $s_0$ un entier négatif tel que $|s_0|-1$ est plus grande que la valeur absolue des racines de $b(t)$. Alors, il existe une constante $\mu > 0$ telle que, pour tout entier $k \geqq 0$, on a*

$$(k+1)^{d(k+1)} Q\left(\frac{|s_0|+k}{k+1}\right) \cdots Q\left(\frac{|s_0|}{k+1}\right) \leqq \mu^k |b(s_0-k)\cdots b(s_0)|.$$

*Preuve.* Soit $d' \leqq d$ le degré de $Q(t)$, $\lambda$ son coefficient principal et $\gamma_1,\dots,\gamma_{d'} \in \mathbb{C}$ ses racines. Soit $M$ une borne supérieure des $|\gamma_i|$ et posons $\sigma_0 = |s_0|$. On a

$$\left| Q\left(\frac{\sigma_0+k}{k+1}\right) \cdots Q\left(\frac{\sigma_0}{k+1}\right) \right| = \prod_{j=0}^{k} \lambda \prod_{i=1}^{d'} \left| \frac{\sigma_0+j}{k+1} - \gamma_i \right|$$

$$\leqq \lambda^{k+1} \prod_{j=0}^{k} \left(\frac{\sigma_0+j}{k+1} + M\right)^{d'} \leqq \big(\lambda(\sigma_0+M+1)\big)^{k+1} = N^{k+1}.$$

Or, si $\beta$ est le coefficient principal de $b(t)$ et $\beta_1,\dots,\beta_d \in \mathbb{C}$ ses racines, on a

$$\left| \prod_{j=0}^{k} b(s_0-j) \right| = |\beta|^{k+1} \prod_{j=0}^{k} \prod_{i=1}^{d} |s_0-j-\beta_i|$$

$$\geqq |\beta|^{k+1} \prod_{j=0}^{k} \prod_{i=1}^{d} (|\sigma_0+j-|\beta_i||) \geqq |\beta|^{k+1} \prod_{j=0}^{k} (j+1)^d = |\beta|^{k+1}\big((k+1)!\big)^d.$$

Par conséquent,

$$(k+1)^{d(k+1)} Q\left(\frac{|s_0|+k}{k+1}\right) \cdots Q\left(\frac{|s_0|}{k+1}\right)$$

$$\leqq \frac{N^{k+1}}{|\beta|^{k+1}} \cdot \frac{(k+1)^{d(k+1)}}{\big((k+1)!\big)^d} \cdot \left| \prod_{j=0}^{k} b(s_0-j) \right| \leqq \frac{N^{k+1} e^{d(k+1)}}{|\beta|^{k+1}} \cdot \left| \prod_{j=0}^{k} b(s_0-j) \right|,$$

d'où le lemme. $\square$

**Corollaire 5.3.4.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$,*

$$P(s) = \sum_{i=0}^{d} P_i s^{d-i} \in \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(\Omega)[s],$$

*où les $P_i$ sont d'ordre $\leqq i$ pour tout $i = 0, \ldots, d$, et $b(s)$ un polynôme non nul à coefficients complexes de degré $d$. Soit $s_0$ un entier négatif tel que $|s_0| - 1$ est plus grande que la valeur absolue des racines de $b(t)$. Alors, pour tout compact $K_0 \subset \Omega$ ils existent des constantes $L_0$, $\mu > 0$ telles que, pour tout entier $k \geqq 0$ et pour toute constante $L \geqq L_0$ on a*

$$\frac{|P(s_0 - k)\,P(s_0 - k + 1) \cdots P(s_0)|_{(K_0, L)}}{|b(s_0 - k) \cdots b(s_0)|} \leqq \mu^k \left(\frac{L}{L_0}\right)^{d(k+1)}.$$

*Preuve.* Il suffit de prendre un compact $K'_0 \subset \Omega$ tel que $K_0 \subset \mathring{K}'_0$ et d'appliquer le corollaire 5.3.2 et le lemme 5.3.3. □

**Proposition 5.3.5.** *Soit $f$ une fonction analytique sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{C}^n$. Pour chaque multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et pour chaque entier $k \geqq 0$ on a*

$$f^{-k} \Delta^{(\alpha)} = \sum_{l=0}^{|\alpha|} \mathscr{P}_{kl}(\Delta^{(\alpha)})\, f^{-(k+l)},$$

*où*

$$\mathscr{P}_{kl}(\Delta^{(\alpha)}) = \binom{k-1+l}{l} \sum_{\substack{\mu \in \mathbb{N}^n, \mu \leq \alpha \\ l \leq |\mu|}} \; \sum_{\substack{\alpha^i \in \mathbb{N}^n, \alpha^i \neq 0 \\ \alpha^i + \cdots + \alpha^i = \mu}} \left( \prod_{i=1}^{l} \Delta^{(\alpha^i)}(f) \right) \Delta^{(\alpha - \mu)}.$$

*Preuve.* On procède par récurrence sur $|\alpha|$. Les détails sont laissés au lecteur. □

Dans la situation de la proposition 5.3.5, si $Q = \sum_\alpha a_\alpha \Delta^{(\alpha)}$ est un opérateur différentiel sur $\Omega$, posons $\mathscr{P}_{kl}(Q) := \sum_\alpha a_\alpha \mathscr{P}_{kl}(\Delta^{(\alpha)})$. D'après la proposition précédente, on a

$$f^{-k} Q = \sum_{l=0}^{\mathrm{ord}(Q)} \mathscr{P}_{kl}(Q)\, f^{-(k+l)},$$

pour tout entier $k \geqq 0$.

**Lemme 5.3.6.** *Dans la situation de la proposition* 5.3.5, *pour tout ouvert $U$ relativement compact dont l'adhérence est contenue dans $\Omega$, pour compact $K \subset U$ et pour toutes les constantes $L$, $\sigma > 0$ il existe une constante $L' > 0$ telle que $|\mathscr{P}_{kl}(Q)|_{(K,L)} \leqq 2^k \sigma^l |Q|_{(K,L')}$ pour tout opérateur différentiel $Q \in \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(U)$ et pour tous $k$, $l \geqq 0$.*

*Preuve.* Pour chaque $l \geqq 0$ et chaque $\mu \in \mathbb{N}^n$ avec $l \leqq |\mu|$ posons

$$I_{l,\mu} = \{\alpha^\bullet \in (\mathbb{N}^n)^l \mid \alpha^1 + \cdots + \alpha^l = \mu, \alpha^i \neq 0\}.$$

Prenons un $\varepsilon \in ]0,1[$ tel que $K_\varepsilon \subset U$ et notons $M = |f|_{\bar{U}}$. Si $Q = \sum_\alpha q_\alpha \Delta^{(\alpha)}$ est un opérateur différentiel sur $U$ et $L_1 \geqq 1$ on a:

$$
\begin{aligned}
|\mathscr{P}_{kl}(Q)|_{(K,L_1)} &\leqq \sum_{\alpha} |q_\alpha|_K \binom{k-1+l}{l} \sum_{\substack{\mu \leqq \alpha \\ l \leqq |\mu|}} \sum_{\alpha^\bullet \in I_{l,\mu}} \prod_{i=1}^{l} |f^{(\alpha^i)}|_K L_1^{|\alpha-\mu|} \\
&\leqq \binom{k-1+l}{l} \sum_{\alpha} |q_\alpha|_K L_1^{\alpha} \sum_{\mu} \sum_{\alpha^\bullet \in I_{l,\mu}} \prod_{i=1}^{l} \frac{M}{\varepsilon^{|\alpha^i|}} L_1^{-|\mu|} \\
&\leqq 2^{k+l-1} M^l \sum_{\alpha} |q_\alpha|_K L_1^{|\alpha|} \sum_{\mu} \frac{1}{\varepsilon^{|\mu|}} \operatorname{card}(I_{l,\mu}) L_1^{-l} \\
&\leqq 2^{k+l-1} \left(\frac{M}{L_1}\right)^l \sum_{\alpha} |q_\alpha|_K L_1^{|\alpha|} \sum_{\mu} \frac{1}{\varepsilon^{|\mu|}} \prod_{j=1}^{n} \binom{\mu_j+l-1}{l-1} \\
&\leqq 2^{k+l-1} 2^{n(l-1)} \left(\frac{M}{L_1}\right)^l \sum_{\alpha} |q_\alpha|_K L_1^{|\alpha|} \sum_{\mu} \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{|\mu|} \\
&\leqq 2^{k-n-1} \left(\frac{2^{n+1}M}{L_1}\right)^l \frac{\lambda}{\lambda-1} \sum_{\alpha} |q_\alpha|_K L_1^{|\alpha|} \lambda^{|\alpha|} \leqq 2^k \left(\frac{2^{n+1}M}{L_1}\right)^l |Q|_{(K,\lambda L_1)},
\end{aligned}
$$

où $\lambda = \dfrac{2}{\varepsilon}$.

Pour $L, \sigma > 0$ des constantes arbitraires, prenons $L_1 \geqq 1$ tel que $\dfrac{2^{n+1}M}{L_1} \leqq \sigma$ et $L_1 \geqq L$. On aura

$$
|\mathscr{P}_{kl}(Q)|_{(K,L)} \leqq |\mathscr{P}_{kl}(Q)|_{(K,L_1)} \leqq \cdots \leqq 2^k \sigma^l |Q|_{(K,\lambda L1)},
$$

d'où le lemme. □

Dans [Me$_1$], § 8 on montre qu'une équation fonctionnelle régulière entraîne que le morphisme de comparaison $C_Y(\mathscr{O}_X)$ est surjectif et on conjecture l'existence d'une telle équation, ce qui est montré par des méthodes micro-différentielles dans [K-K]. On dispose aujourd'hui de nouvelles méthodes différentielles dans le contexte plus général et plus précis de l'irrégularité pour attaquer cette question. Nous allons montrer que l'existence d'une équation fonctionnelle régulière relative au générateur d'un $\mathscr{D}_X$-module cohérent cyclique $\mathscr{M}$ et à une hypersurface arbitraire $Y \subset X$ entraîne que le morphisme de comparaison $C_Y(\mathscr{M})$ est un isomorphisme. Le cas où $Y$ est lisse a été traité dans [L-M].

**Théorème 5.3.7.** *Sous les hypothèses du théorème* 5.1.2 *et du lemme* 5.2.4, *soit* $\mathscr{M}$ *un* $\mathscr{D}_\Omega$*-module cohérent spécialisable le long de* $Y$ *et engendré au voisinage de l'origine par une section locale* $m_0$. *Supposons qu'il existe une équation fonctionnelle de Bernstein-Sato*

$$
b(s) f^s m_0 = P(s) f^{s+1} m_0
$$

*qui est régulière, i.e.* $P(s) = \sum_{i=0}^{d} P_{d-i} s^i \in \mathscr{D}_{\Omega,0}[s]$, *avec*

$$
d = \deg\big(b(s)\big) \quad et \quad \operatorname{ord}(P_{d-i}) \leqq d-i, \quad \forall i = 0, \ldots, d.
$$

*Alors, la topologie quotient* $\mathcal{T}_q(\mathcal{M}[*Y])$ *coïncide avec la topologie induite* $\mathcal{T}_i(\mathcal{M}[*Y])$ *au voisinage de l'origine, et donc* $\mathcal{M}$ *est régulier le long de* $Y$ *au voisinage de l'origine.*

*Preuve.* Soit $\mathcal{B}$ une $L$-base de voisinages ouverts de l'origine adaptée à $\mathcal{M}_0$ et à $\mathcal{M}[*Y]_0$. Quitte à restreindre $\Omega$, nous pouvons supposer que l'équation fonctionnelle de Bernstein-Sato est définie sur $\Omega$ et que les morphismes

$$\mathcal{D}_\Omega \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M} \to 0, \quad \varphi(1) = m_0,$$

$$\mathcal{D}_\Omega \xrightarrow{\psi} \mathcal{M}[*Y] \to 0, \quad \psi(1) = f^{s_0+1} m_0$$

sont surjectifs, où $s_0$ est un entier $\leqq -2$ tel que $|s_0| - 1$ est plus grande que la valeur absolue des racines de $b(s)$.

D'après le lemme 5.2.4, l'ensemble $\mathcal{B}'$ d'ouverts de $\mathcal{B}$ qui sont des polycylindres de Weierstrass pour $f$ est une base de voisinages ouverts de l'origine. Prenons un $U \in \mathcal{B}'$ et notons pour simplifier

$$A = \mathcal{O}_\Omega(U), \quad E = \Gamma(U, \mathcal{O}_\Omega[*Y]), \quad F = \mathcal{M}(U), \quad G = \Gamma(U, \mathcal{M}[*Y]).$$

D'après le corollaire 5.1.5, le morphisme $p(U): \Gamma(U, \mathcal{O}_\Omega[t]) \to E$ est topologiquement scindé, d'où le morphisme $p(U) \otimes \mathrm{Id}: \mathcal{O}_\Omega(U)[t] \otimes_{\mathbb{C}} F \to E \otimes_{\mathbb{C}} F$ est aussi topologiquement scindé. A partir de 5.2.1, on déduit que le morphisme surjectif

$$p(U) \otimes \mathrm{Id}: \mathcal{O}_\Omega(U)[t] \otimes_A F \to E \otimes_A F$$

est ouvert. De façon analogue, vu que $\varphi(U): \mathcal{D}_\Omega(U) \to F$ est topologiquement scindé, on déduit que le morphisme surjectif $\mathrm{Id} \otimes \varphi(U): \mathcal{O}_\Omega(U)[t] \otimes_A \mathcal{D}_\Omega(U) \to \mathcal{O}_\Omega(U)[t] \otimes_A F$ est aussi ouvert. Par conséquent, le morphisme surjectif

$$p(U) \otimes \varphi(U): \mathcal{O}_\Omega(U)[t] \otimes_A \mathcal{D}_\Omega(U) \to E \otimes_A F$$

est ouvert, et la topologie de $E \otimes_A F$ est quotient de celle de

$$\mathcal{O}_\Omega(U)[t] \otimes_A \mathcal{D}_\Omega(U) = \mathbb{C}[t] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_\Omega(U) = \mathcal{D}_\Omega(U)[t],$$

qui est définie par les semi-normes

$$\left| \sum_i t^i \otimes Q_i \right|_{(K, L_1, L_2)} = \sum_i |Q_i|_{(K, L_1)} L_2^i,$$

où $K \subset U$ est un compact, et $L_1$, $L_2$ sont des constantes strictement positives.

Notons $G_{\mathrm{can}}$ (resp. $G_{\mathrm{ind}}$) l'espace $G$ muni de la topologie quotient $\psi(U): \mathcal{D}_\Omega(U) \to G$ (resp. de la topologie induite par celle de $\mathcal{M}^\infty(U - Y)$). D'après l'assertion 1 de la proposition 5.2.5, l'identité de $G_{\mathrm{can}}$ dans $G_{\mathrm{ind}}$ est continue. Or, l'assertion 3 de loc. cit. nous dit que l'application $\alpha(U): E \otimes_A F \to G_{\mathrm{ind}}$ est un isomorphisme topologique. Notre problème consiste à montrer la continuité de l'application $\alpha(U): E \otimes_A F \to G_{\mathrm{can}}$.

Considérons l'application linéaire $\eta(U):\mathscr{D}_\Omega(U)[t]\to\mathscr{D}_\Omega(U)$ définie par:

$$\eta(U)(t^i\otimes Q_i)=\sum_{l=i}^{-(s_0+1)}\mathscr{P}_{i,l-i}(Q_i)f^{-l-(s_0+1)}+\sum_{l\geqq -s_0}\mathscr{P}_{i,l-i}(Q_i)\frac{P(-l)\cdots P(s_0)}{b(-l)\cdots b(s_0)}.$$

D'après la proposition 5.3.5, $\psi(U)\circ\eta(U)=\alpha(U)\circ\big(p(U)\otimes\varphi(U)\big)$. On est donc réduit à montrer la continuité de $\eta(U)$, pour tout $U\in\mathscr{B}'$ assez petit.

Prenons un polycylindre compact d'intérieur non vide centré à l'origine $K_0\subset\Omega$.

D'après le corollaire 5.3.4, ils existent des constantes $L_0$, $\mu>0$ telles que, pour tout entier $k\geqq 0$ et pour toute constante $L\geqq L_0$ on a

$$\frac{|P(s_0-k)P(s_0-k+1)\cdots P(s_0)|_{(K_0,L)}}{|b(s_0-k)\cdots b(s_0)|}\leqq\mu^k\left(\frac{L}{L_0}\right)^{d(k+1)}.$$

Soit $U\in\mathscr{B}'$ avec $U\subset\mathring{K}_0$, et soient $K$, $K'$ deux compacts de $U$ tels que $K\subset\mathring{K}'$. Prenons un compact auxiliaire $K''\subset\mathring{K}'$ avec $K\subset\mathring{K}''$, et soit $L$ une constante arbitraire plus grande que $L_0$ et que la distance de $K$ (resp. de $K''$) au complémentaire de $\mathring{K}''$ (resp. de $\mathring{K}'$).

Si $Q(t)=\sum_i t^i\otimes Q_i$ est un élément arbitraire de $\mathscr{D}_\Omega(U)[t]$, on a

$$\begin{aligned}
p_{(K,K')}\big(\eta(U)\,Q(t)\big)&\leqq\sum_{i=0}^{-(s_0+1)}\sum_{l=i}^{-(s_0+1)}p_{(K,K')}\big(\mathscr{P}_{i,l-i}(Q_i)f^{-l-(s_0+1)}\big)\\
&\quad+\sum_{i\geqq 0}\sum_{l\geqq -s_0}p_{(K,K')}\left(\mathscr{P}_{i,l-i}(Q_i)\frac{P(-l)\cdots P(s_0)}{b(-l)\cdots b(s_0)}\right)\\
&\leqq\sum_{i=0}^{-(s_0+1)}\sum_{l=i}^{-(s_0+1)}p_{(K,K'')}\big(\mathscr{P}_{i,l-i}(Q_i)\big)|f|_{K_0}^{-l-(s_0+1)}\\
&\quad+\sum_{i\geqq 0}\sum_{l\geqq -s_0}p_{(K,K'')}\big(\mathscr{P}_{i,l-i}(Q_i)\big)p_{(K'',K')}\left(\frac{P(-l)\cdots P(s_0)}{b(-l)\cdots b(s_0)}\right)\\
&\leqq\sum_{i=0}^{-(s_0+1)}\sum_{l=i}^{-(s_0+1)}|\mathscr{P}_{i,l-i}(Q_i)|_{(K,L)}|f|_{K_0}^{-l-(s_0+1)}\\
&\quad+\sum_{i\geqq 0}\sum_{l\geqq -s_0}|\mathscr{P}_{i,l-i}(Q_i)|_{(K,L)}\frac{|P(-l)\cdots P(s_0)|_{(K_0,L)}}{|b(-l)\cdots b(s_0)|},
\end{aligned}$$

et d'après le lemme 5.3.6, pur $\sigma>0$ donné, il existe $L'>0$ telle que:

$$\begin{aligned}
&p_{(K,K')}\big(\eta(U)\big(Q(t)\big)\big)\leqq\cdots\\
&\leqq\sum_{i=0}^{-(s_0+1)}\sum_{l=i}^{-(s_0+1)}2^i\sigma^{l-i}|Q_i|_{(K,L')}|f|_{K_0}^{-l-(s_0+1)}
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{i \geqq 0} \sum_{l \geqq -s_0} 2^i \sigma^{l-i} |Q_i|_{(K,L)} \mu^{s_0+l} \left(\frac{L}{L_0}\right)^{d(s_0+l+1)}$$

$$= \frac{1}{|f|_{K_0}} \sum_{i=0}^{-(s_0+1)} \left(\frac{2}{\sigma}\right)^i |Q_i|_{(K,L')} \sum_{l=i}^{-(s_0+1)} \left(\frac{\sigma}{|f|_{K_0}}\right)^l$$

$$+ \mu^{s_0} \left(\frac{L}{L_0}\right)^{d(s_0+1)} \sum_{i \geqq 0} \left(\frac{2}{\sigma}\right)^i |Q_i|_{(K,L')} \sum_{l \geqq -s_0} \sigma^l \mu^l \left(\frac{L}{L_0}\right)^{dl}.$$

Pour conclure, il suffit de prendre $\sigma > 0$ telle que

$$\sigma \mu \left(\frac{L}{L_0}\right)^d < 1 \,.$$

On trouve une constante $C > 0$ telle que:

$$p_{(K,K')}\left(\eta(U)\left(\sum_i t^i Q_i\right)\right) \leqq \cdots \leqq C \sum_i \left(\frac{2}{\sigma}\right)^i |Q_i|_{(K,L')} = C \left|\sum_i t^i Q_i\right|_{\left(K,L',\frac{2}{\sigma}\right)},$$

d'où la continuité de $\eta(U)$.

Ceci démontre la régularité de $\mathscr{M}$ le long de $Y$ à l'origine. Or, le même argument permet de prouver la régularité aux points près de l'origine car l'équation fonctionnelle est valable dans un voisinage de 0. □

Le théorème 5.3.7 réprend les calculs de [Me$_1$], §8. D'autre part, il suggère de transposer ces méthodes au cas $p$-adique (cf. [M-N$_2$], 4.5).

Cependant la situation $p$-adique présente des différences très importantes. Si $\mathscr{X}^\dagger = (X_k, \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})$ est un schéma †-adique de Meredith [Mr] non singulier sur un anneau local complet de valuation discrète $(V, k, K)$ d'inégales caractéristiques $(0, p)$, et $\mathscr{Y}^\dagger = (Y_k, \mathscr{O}_{\mathscr{Y}^\dagger})$ est un sous-schéma de $\mathscr{X}^\dagger$ tel que $Y_k$ est une hypersurface de $X_k$, nous pouvons considérer le faisceau $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}[*\mathscr{Y}^\dagger]$ qui est un $\mathscr{D}_{\mathscr{X}^\dagger}$-module à gauche où $\mathscr{D}_{\mathscr{X}^\dagger}$ est le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini [M-N$_3$]. Soit $\mathscr{U}^\dagger = (U_k, \mathscr{O}_{\mathscr{U}^\dagger})$ le schéma induit sur l'ouvert $U_k$ complémentaire de $Y_k$ et $j$ l'inclusion canonique de $U_k$ dans $X_k$. On peut considérer le morphisme de comparaison

$$C_{Y_k}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) : \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger} \otimes_{\mathscr{D}_{\mathscr{X}^\dagger}} \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}[*\mathscr{Y}^\dagger] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to j_* \mathscr{O}_{\mathscr{U}^\dagger} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\,,$$

où $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}$ est le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre infini ([M-N$_2$], 4.2.1, [M-N$_3$], 4.4.5). Le morphisme de comparaison *n'est pas injectif* en général, ce qui montre que le cas $p$-adique est très différent du cas complexe. Cependant:

**Conjecture 5.3.8.** Le morphisme de comparaison $C_{Y_k}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ est *surjectif*.

Voir [M-$N_2$], [M-$N_4$] pour des généralisations à des fibrés plus généraux et à des exemples simples. On sait démontrer cette conjecture dans le cas d'une singularité isolée. Le théorème de structure 5.1.2 se transpose de façon évidente. Pour montrer la conjecture 5.3.8 par la méthode précédente, il faudrait comprendre la structure $p$-adique de l'équation fonctionnelle pour les relèvements de Teichmüller des équations de $Y_k$ qui semble mystérieuse. La situation est inverse au cas complexe: les bonnes équations du point de vue $p$-adique sont celles où le degré du polynôme $b(s)$ est plus petit que le degré de l'opérateur $P(s, \underline{x}, \underline{\partial})$. La conjecture 5.3.8 entraîne, en particulier, le théorème de finitude des nombres de Betti $p$-adiques d'une variété affine non singulière sur $k$ [M-$N_2$], p. 301, ce que l'on sait montrer aujourd'hui grâce au théorème de l'indice [C-M], [$Me_3$].

## Références


[A-H-V] *J.M. Aroca*, *H. Hironaka* et *J.L. Vicente*, The Theory of the Maximal Contact, Mem. Mat. Inst. "Jorge Juan" **29**, C.S.I.C., Madrid 1975.

[Bo] *N. Bourbaki*, Topologie Générale, Chapitres 5 à 10, Hermann, Paris 1974.

[B-M] *J. Briançon* et *Ph. Maisonobe*, Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variable, Enseign. Math. **30** (1984), 7–38.

[Bu] *L. Bungart*, Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas, Trans. Amer. Math. Soc. **110** (1964), 317–344.

[$Ca_1$] *F. Castro*, Calcul de la dimension et des multiplicités d'un $D$-module monogène, C.R.A.S. Paris **302** (1986), 487–490.

[$Ca_2$] *F. Castro*, Calculs effectifs pour les idéaux d'opérateurs différentiels, Travaux en cours **24**, Hermann, Paris (1987), 1–20.

[C-M] *G. Christol* et *Z. Mebkhout*, Sur le théorème de l'indice des équations différentielles $p$-adiques III, Ann. Math., à paraître.

[$Do_1$] *A. Douady*, Le théorème des images directes de Grauert (d'après Kiehl-Verdier), Astérisque **16** (1974), 49–62.

[$Do_2$] *R. Douady*, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Astérisque **16** (1974), 7–32.

[Ga] *A. Galligo*, Théorème de division et stabilité en Géométrie Analytique locale, Ann. Inst. Fourier **29** (1979), 107–184.

[Gr-Re] *H. Grauert* et *R. Remmert*, Analytische Stellenalgebren, Grundl. math. Wiss. **176**, Springer Verlag, Berlin 1971.

[Gro] *A. Grothendieck*, Crystals and the De Rham cohomology of schemes, in: Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North Holland, Amsterdam 1968.

[EVT] *A. Grothendieck*, Espaces Vectoriels Topologiques, São Paulo 1954.

[PTT] *A. Grothendieck*, Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc. **16**, A.M.S., Providence, R.I., 1955.

[SGA6] *A. Grothendieck*, *P. Berthelot* et *L. Illusie*, Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch, Lect. Notes Math. **225**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1971.

[Gu-Ro] *R.C. Gunning* et *H. Rossi*, Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[Hu] *J. Hubbard*, Transversalité, Astérisque **16** (1974), 33–48.

[$Is_1$] *R. Ishimura*, Homomorphismes du faisceau des germes de fonctions holomorphes dans lui même et opérateurs différentiels, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **32** (1978), 301–312.

[$Is_2$] *R. Ishimura*, Homomorphismes du faisceau des germes de fonctions holomorphes dans lui même et opérateurs différentiels, II, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **34** (1980), 131–145.

[Ka] *M. Kashiwara*, Algebraic study of systems of linear differential equations, Master's thesis, Kyoto Univ., 1971.

[K-K] *M. Kashiwara* et *T. Kawai*, Second microlocalisation and asymptotic expansions, Lect. Notes Phys. **126** (1980), 21–76.

[L-M] *Y. Laurent* et *T. Monteiro-Fernandes*, Systèmes différentiels fuchsiens le long d'une sous-variété, Publ. R.I.M.S. **24** (1988), 397–431.
[$Ma_2$] *B. Malgrange*, Filtration des modules holonomes, Travaux en cours **48**, Paris (1994), 35–41.
[$Ma_3$] *B. Malgrange*, Connexions méromorphes 2, Le réseau canonique, Invent. Math. **124** (1996), 367–387.
[$Ma_4$] *B. Malgrange*, On irregular holonomic $\mathscr{D}$-modules, C.I.M.P.A. Summer School on Differential Systems, Seville, Septembre 1996, to appear.
[$Me_1$] *Z. Mebkhout*, Cohomologie locale d'une hypersurface, Lect. Notes Math. **670** (1977), 89–119.
[$Me_2$] *Z. Mebkhout*, Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathscr{D}_X$-modules cohérents, Travaux en cours **35**, Hermann, Paris 1989.
[$Me_3$] *Z. Mebkhout*, Sur le théorème de finitude de la cohomologie $p$-adique d'une variété affine non singulière, Amer. J. Math. **119** (1997), 1027–1082.
[$M$-$N_1$] *Z. Mebkhout* et *L. Narváez Macarro*, Continuité de la division de Briançon-Maisonobe, Manuscrit 1987.
[$M$-$N_2$] *Z. Mebkhout* et *L. Narváez Macarro*, Sur les coefficients de De Rham-Grothendieck des variétés algébriques, Conference on $p$-adic analysis, Trento 1989, Lect. Notes Math. **1454** (1990), 267–308.
[$M$-$N_3$] *Z. Mebkhout* et *L. Narváez Macarro*, La théorie du polynôme de Bernstein-Sato pour les algèbres de Tate et de Dwork-Monsky-Washnitzer, Ann. Sci. E.N.S. **24** (1991), 227–256.
[$M$-$N_4$] *Z. Mebkhout* et *L. Narváez Macarro*, Sur les coefficients de De Rham-Grothendieck des variétés algébriques II, en préparation.
[Mr] *D. Meredith*, Weak formal schemes, Nagoya Math. J. **45** (1971), 1–38.
[Na] *L. Narváez Macarro*, Sobre algunas propiedades de finitud del anillo de los operadores differenciales de orden infinito, Preprint 1993.
[Pa] *V.P. Palamodov*, Homological methods in the theory of locally convex spaces, Russian Math. Surv. **26** (1971), 1–64.
[$Pe_1$] *J. Peetre*, Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels, Math. Scand. **7** (1959), 211–218.
[$Pe_2$] *J. Peetre*, Réctification à l'article "Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels", Math. Scand. **8** (1960), 116–120.
[Sa] *M. Sato*, Hyperfunctions and partial differential equations, in: Proc. Int. Conf. on Functional Analysis, Tokyo 1969, Tokyo Univ. Press (1970), 91–96.
[S-K-K] *M. Sato*, *T. Kawai* and *M. Kashiwara*, Microfunctions and pseudo-differential equations, Lect. Notes Math. **287** (1973), 265–529.
[Sch] *L. Schwartz*, Théorie des noyaux, Int. Cong. Math., Cambridge 1950, Vol. I, p. 220–230.
[Seb] *J. Sebastião e Silva*, Su certe classi di spazii localmente convesii importanti per le aplicazioni, Rend. Mat. Univ. Roma **14** (1955), 388–410.
[Ser] *J.P. Serre*, Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique, Ann. Inst. Fourier **6** (1956), 1–42.
[Vo] *D. Vogt*, Regularity properties of (LF)-spaces, Progress in Functional Analysis, Math. Stud. **170**, North-Holland, Amsterdam (1992), 57–84.


---


U.F.R. Mathématiques, Université Paris VII, 2 place Jussieu, F-75251 Paris, Cedex 05
e-mail: mebkhout@math.jussieu.fr

Dep. de Algebra, Fac. de Matemáticas, Univ. de Sevilla, Ap. 1160, E-41080 Sevilla
e-mail: narvaez@atlas.us.es


Eingegangen 25. Juli 1997, in revidierter Fassung 30. März 1998