

11179

LBS 1005585

043
140

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARIA GENERAL

Que la registra esta Tesis Doctoral
al folio 2 número 31 del libro
correspondiente.

Sevilla, 27 OCT. 1988



El Jefe del Negocio de Tesis,

Alvaro de la Torre

BORDISMO SECCIONAL DE FIBRADOS Y SUBMERSIONES

Por

Juan José ARRABAL PARRILLA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Depositado en

de la

de esta Universidad desde el día 3

hasta el día 24 de Noviembre de 1988

Sevilla 3 de Noviembre

de 1988

EL DIRECTOR DE

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS
BIBLIOTECA

V.º B.º A DIRECTOR
DEL DEPARTAMENTO

Ped. Vicente

Memoria presentada para la obtención del
grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Dirigida por:

Eladio DOMINGUEZ (Univ. de Zaragoza)

Antonio QUINTERO (Univ. de Sevilla)



E. Dominguez

A. Quintero

INDICE

	<u>Pag.</u>
INTRODUCCION	1
PRIMERA PARTE: SEUDOBORDISMO SECCIONAL DE FUNCIONES CONTINUAS	8
Capítulo 0. Propiedades de las pseudovarietades.....	9
Capítulo I. Grupos de pseudobordismo seccional.....	14
Capítulo II. Propiedades de homología.....	26
Capítulo III. Relación con los complejos de cadenas.....	38
Capítulo IV. Pseudobordismo seccional no orientado.	
Pseudobordismo seccional infinito.....	59
Capítulo V. Grupos de pseudobordismo casi-inyectivo.....	71
Capítulo VI. Grado seccional de una función continua.....	90
Capítulo VII. Grado seccional local.....	104
Capítulo VIII. Nota sobre cohomología.....	118
SEGUNDA PARTE: SEUDOBORDISMO SECCIONAL DIFERENCIABLE.....	124
Capítulo IX. Pseudobordismo de inmersiones difeomorfas (plongements). Definiciones y propiedades.....	125
Capítulo X. Pseudobordismo de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^n_+	130

Capítulo XI.	Seudobordismo de las variedades diferenciales.	138
Capítulo XII.	Seudobordismo seccional diferenciable.	
	Definiciones y propiedades.....	145
Capítulo XIII.	Seudobordismo seccional diferenciable de los fibrados y las submersiones.....	152
Capítulo XIV.	Grupos de pseudobordismo seccional reducido. Isomorfismo de Thom.....	157
Capítulo XV.	Grupos de pseudobordismo seccional infinito diferenciable.....	170
Capítulo XVI.	Grado seccional diferenciable. Obstrucciones a la extensión de secciones y al problema de Cauchy en derivadas parciales.....	186
AGRADECIMIENTOS.....		199
BIBLIOGRAFIA.....		201

INTRODUCCION

El objeto de este trabajo es sistematizar una técnica que intenta atacar el problema de existencia de secciones de funciones continuas o funciones diferenciables, y el problema de triangulación de una variedad topológica. El antecedente directo de esta técnica está en la teoría de homología seccional introducida por Weishu Shih, [47] y [48], para el estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales.

Dada una aplicación continua

$$f : X \longrightarrow B$$

entre espacios topológicos X y B , Shih consideró el conjunto simplicial $K(f)$ construido como sigue: Los q -símplices son las parejas (σ, γ) , donde $\sigma: \Delta_q \rightarrow B$ es una aplicación inyectiva continua del q -símplice estándar $\Delta_q = \{(x_0, x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$ en B , y γ es una función continua $\gamma: \Delta_q \rightarrow X$ tal que $\sigma = f \circ \gamma$. Los operadores cara se definen de una manera natural. Cuando X, B son variedades diferenciales, f es un morfismo diferenciable y $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, se define el subconjunto simplicial $K(f)_k$ de $K(f)$ formado por las (σ, γ) diferenciables de clase C^k , con σ inmersión difeomorfa (fr. "plongement"). Entonces definió ([47]) el grupo de homología

seccional con soportes propios de f , designado por $H_*(f)_s$, como el grupo de homología de las cadenas localmente finitas del conjunto simplicial $K(f)$ con coeficientes enteros. De la misma manera definió los grupos seccionales $H_*(f)_{s,k}$. Considerando sólo las cadenas finitas en $K(f)$ y $K(f)_k$ se obtienen los respectivos grupos de homología seccional con soportes compactos de f .

El homomorfismo natural de la homología seccional de $f: X \rightarrow B$ en la homología singular de B con cadenas localmente finitas

$$p_n: H_n(f)_s \rightarrow H_n^{II}(B)$$

le permitió definir el grado seccional de la función f , denotado $\deg(f)$, cuando B es una variedad orientada de dimensión n por la fórmula

$$\deg(f) = \text{card} (H_n^{II}(B) / \text{Im } p_n) - 1.$$

En el caso en que X , B y f sean de clase C^∞ , se puede utilizar el grupo de homología seccional k -veces derivable $H_n(f)_{s,k}$ en lugar de $H_n(f)_s$, y obtener el grado k -veces derivable de f : $\deg^k(f)$.

Estas nociones le permitieron probar que la anulación de $\deg(f)$ es necesaria para que f admita una sección continua y, en el caso diferenciable, que $\deg^k(f) = 0$ es necesario para que f tenga una sección de clase C^k .

Redefiniendo los grupos de homología con soportes compactos de f , Shih [55] obtiene nuevos grados (ver el capítulo VIII de esta tesis), que coinciden con los anteriores cuando la variedad B es compacta, y demuestra un teorema de caracterización del nuevo grado seccional continuo de $f: Y \rightarrow X$, con la condición de que f sea un espacio fibrado localmente trivial cuya base X sea una variedad topológica conexa orientada de dimensión n y cuya fibra sea un CW-complejo finito conexo.

Shih no presenta demostraciones ni propiedades de las homología, ni indica la categoría explícitamente. Lo hace François Lalonde, quien ha dedicado su tesis [33] a estudiar sistemáticamente la homología seccional con soportes compactos. Ha demostrado que cumple los axiomas de Eilenberg-Steenrod, excepto el de escisión, en una categoría adecuada y que los grupos correspondientes no son invariantes de homotopía continua. Esto último es un inconveniente para el cálculo, pero es fundamental para poder aplicar ésta teoría a los problemas de ecuaciones en derivadas parciales o integrales pues éstos problemas no son invariantes por homotopía. La Thèse d'Etat de Lalonde [37] está dedicada a calcular la homología seccional diferenciable de clase C^k de las funciones diferenciables $f: X_2 \rightarrow X_1$ que localmente son de la forma $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Estas funciones, que se llaman k-submersiones, engloban a los fibrados localmente triviales y a las submersiones en el sentido ordinario. El resultado que obtiene, para lo cual introduce nuevas teorías de homología que llama homología de p-campos transversos y homología de "plongements", es el siguiente:

TEOREMA S. Sea $f: X_2 \rightarrow X_1$ una k_0 -submersion ($2 \leq k_0 \leq \omega$). Cualquiera que sea $1 \leq k \leq k_0$, el morfismo inyectivo $p_2: C(f)_k \rightarrow C(X_2)$ del grupo de cadenas seccionales finitas de clase C^k de f en el grupo de cadenas singulares finitas del espacio X_2 , dado por la proyección $(\Delta_q, \sigma, \gamma) \rightarrow (\Delta_q, \gamma)$, induce un isomorfismo p_{2*} sobre los grupos de homología en las dimensiones inferiores a $n = \dim X_2$ y un epimorfismo en dimensión n (los grupos de homología seccional de f son nulos en las dimensiones $> n$).

Aquí vamos a presentar una teoría de homología más simple que las anteriores, que es una teoría de Eilenberg-Steenrod (es decir, que cumple escisión) y que la definición de grado coincide con las anteriores. El método adoptado consiste en construir una apropiada teoría de bordismo tomando como modelos las pseudovariedades. Los ciclos geométricos asociados a una función continua $f: Y \rightarrow X$ son cuaternas $(P, \sigma, \gamma; \mathcal{P})$ donde P es una pseudovariiedad, σ y γ son funciones continuas tales que $\sigma = f \circ \gamma$ y \mathcal{P} es un recubrimiento por subpoliedros compactos de P , de forma que σ es "casi inyectiva" en cada subpoliedro $P_i \in \mathcal{P}$. Decimos que una función $\sigma: P_i \rightarrow X$ definida en un poliedro P_i es "casi inyectiva" si existe un poliedro Q , un p.l.-epimorfismo $\pi: P_i \rightarrow Q$ y una función continua inyectiva $u: Q \rightarrow X$ tales que $\sigma = u \circ \pi$. El usar funciones "casi inyectivas" es para que sea posible la construcción "cilindro de un ciclo" que permite hacer bordante un ciclo a sí mismo (como se sabe, ésto es esencial en toda teoría de bordismo). En nuestro caso el cilindro del ciclo $(P, \sigma, \gamma; \mathcal{P})$ es $(P \times I, \sigma \circ pr_1, \gamma \circ pr_1; \mathcal{P} \times I)$, donde I es el intervalo cerrado $[0, 1]$, pr_1 es la proyección canónica sobre el primer factor y $\mathcal{P} \times I = \{P_i \times I \mid P_i \in \mathcal{P}\}$; es evidente que $\sigma \circ pr_1$ no puede ser inyectiva, ni siquiera "inyectiva a trozos". Una posible desventaja de este procedimiento de representar los ciclos seccionales frente a otros procedimientos que se imaginen, es que estamos obligados a estudiar si las funciones σ son o no inyectivas en cada $P_i \in \mathcal{P}$. La solución que tenemos es que en cada clase de pseudobordismo hay al menos un ciclo $(P, \sigma, \gamma; \mathcal{P})$ en el cual σ es inyectiva en cada $P_i \in \mathcal{P}$. Una característica positiva del bordismo aquí presentado es que hay una equivalencia natural con la homología de un apropiado complejo de cadenas que llamamos

homología seccional casi-inyectiva, lo cual nos permite compararlo directamente con la homología singular y demostrar que el grado definido con nuestra homología coincide con el de Shih.

También se da el seudobordismo seccional diferenciable de clase C^k . Su estudio se basa en un caso particular, el seudobordismo de casi-inmersiones difeomorfas de clase C^k , de forma análoga a lo que ocurre con la homología seccional diferenciable y la homología de "plongements", pero sin necesitar nada parecido a la homología de p-campos transversos, lo cual, junto al uso de las técnicas de aproximación de inmersiones difeomorfas originarias del problema de triangulación de variedades diferenciales ([45], [62]), produce una teoría mucho más sencilla que la dada por Lalonde [37]. Los ciclos seccionales diferenciables de clase C^k $(P, \sigma, \gamma; \mathcal{P})_k$ asociados a una función $f: Y \rightarrow X$ de clase C^k son ciclos seccionales con funciones σ y γ continuas que cumplen ciertas condiciones de diferenciability respecto a las variedades $cX = X \cup_{\partial X} \partial X \times [0, 1)$ y $cY = Y \cup_{\partial Y} \partial Y \times [0, 1)$, que se obtienen pegando a X y a Y sendos collares diferenciables. La razón de esto es haber observado que los simplices $(\Delta_n, \sigma, \gamma)_k$ de la homología seccional diferencial de Shih son, por definición, tales que σ se prolonga a una inmersión difeomorfa $s: U \rightarrow X$ siendo U un entorno abierto de Δ_n en el espacio euclideo generado por Δ_n . Por lo tanto, si $\dim X = n$ resulta que $\sigma \Delta_n \cap \partial X = \emptyset$ y, en consecuencia ninguna de las cadenas de dimensión igual a la de X que se forme con éstos simplices puede tener como borde una cadena cuyo soporte en X esté enteramente sobre ∂X , con lo cual no tiene sentido tratar con dicha homología seccional el problema de extender una sección definida en ∂X a todo X , ni tampoco tiene

sentido tratar con ellas el problema de Dirichlet para una ecuación diferencial.

Con dicha teoría de homología, los resultados que presentamos y consideramos más sobresalientes son:

(1) Se da un tratamiento unificado de una teoría del grado de Shih utilizando, tanto en el caso compacto como en el no compacto, una teoría de bordismo seccional que es una teoría de homología ordinaria, en el sentido de Eilenberg-Steenrod, que permite un tratamiento más simple que en el realizado por Lalonde.

(2) Demostar que dichos grados nos permite:

2a) Caracterizar las variedades triangulables;

2b) Caracterizar la existencia de secciones de funciones continuas y de funciones diferenciables.

Por otro lado, sobresale el haber extendido el "Teorema S" de LALONDE [37] al caso de homología con soportes propios.

Hay que observar que los cálculos con éstas homologías son difíciles, lo cual corresponde a la dificultad de los problemas que pretende tratar. Este trabajo, por tanto, no pretende mas que sentar las bases de un nuevo método para el futuro estudio de dichos problemas.

La memoria se presenta organizada en dos partes, cada una de las cuales consta a su vez de varios capítulos. La primera parte está dedicada a la homología seccional de funciones continuas y al grado seccional continuo. En la segunda parte se trata el caso diferenciable, con especial énfasis en los fibrados localmente

triviales y las submersiones. La extensión de algunos capítulos es reducida porque, para facilitar la lectura, se han suprimido las demostraciones que se pudieran obtener con fáciles pero laboriosas adaptaciones de demostraciones anteriores, y porque se ha querido facilitar la localización de los resultados, renunciando por ello a refundirlos con otros.

A lo largo de esta memoria, y también en esta introducción, las referencias bibliográficas aparecen entre corchetes, mientras que las referencias internas a las definiciones, notas y resultados de este trabajo se hace colocando entre paréntesis las dos cifras con las cuales están ordenados lexicográficamente, la primera de las cuales indica el capítulo en que está situado y la segunda el lugar dentro de él. Así, la cita "(2.4)" se refiere al ítem cuarto del capítulo segundo.

PRIMERA PARTE

SEUDOBOARDISMO SECCIONAL DE FUNCIONES CONTINUAS

CAPITULO 0

PROPIEDADES DE LAS SEUDOVARIEDADES.

0.1. Todos los poliedros que consideremos serán euclideos. Por $P=|K|$ indicaremos que K es una triangulación de P y que P es el espacio subyacente de K , i.e., que K es un complejo simplicial (localmente finito) y P es la unión de todos los simplices de K . Es de notar que si Q es un subpoliedro de P , no existen necesariamente triangulaciones compatibles de ambos poliedros, es decir, triangulaciones $Q=|L|$ y $P=|K|$ tales que L sea subcomplejo de K ; para que existan tales triangulaciones compatibles es suficiente que Q sea cerrado en P , mas aún, si $\mathcal{A}=\{Q_\alpha\}$ es una familia localmente finita de subpoliedros compactos de P , siempre existen triangulaciones compatibles para (P, \mathcal{A}) , (ver [31], teorema 3.6). Si $f:|K| \rightarrow |L|$ es una p.l.-aplicación entre poliedros compactos, existen subdivisiones simpliciales K' de K y L' de L tales que $f:K' \rightarrow L'$ es simplicial.

Sea Q un subpoliedro cerrado de P , un entorno regular de Q en P es un subpoliedro N de P para el que existen triangulaciones

compatibles $Q=|L|$ y $P=|K|$ tales que L es un subcomplejo lleno de K y $N=|N(L,K')|$, siendo K' un primer derivado de K cerca de L y $N(L,K')$ el entorno simplicial de L en K' , es decir, el complejo simplicial determinado por los simplices de K' que tienen intersección no vacía con L . Por N' representaremos el conjunto de los simplices de $N(L,K')$ que no cortan a L ; N' es la frontera topológica de N en P .

Un entorno regular de un subespacio cerrado X de un poliedro P será un entorno regular N de algún subpoliedro cerrado Q de P tal que X se encuentra en el interior de N . Se tiene que si X e Y son subespacios cerrados de P tales que $X \cap Y = \emptyset$, existe un entorno regular N de X que es disjunto con Y , ([17], §0).

0.2. Sea $n \geq 0$. Una n -seudovariiedad cerrada es un poliedro euclideo P que admite una triangulación K cumpliendo las siguientes condiciones:

- 1) K es n -principal. Es decir, todo simplex de K es cara de un n -simplex de K .
- 2) Todo $(n-1)$ -simplex de K es cara de dos n -simplices de K exactamente.

Sea $n \geq 0$. Una n -seudovariiedad con borde es un poliedro euclideo P que admite una triangulación K , cumpliendo:

- 1') K es n -principal.
- 2') Todo $(n-1)$ -simplex de K es cara de dos n -simplices de K como máximo.
- 3') El conjunto de los $(n-1)$ -simplices que son cara de un sólo n -simplex, constituyen una $(n-1)$ -seudovariiedad cerrada. Dicho

complejo lo denotaremos por ∂K y a $\partial P = |\partial K|$ lo llamaremos el borde de P .

0.3. TEOREMA: Un n -poliedro euclideo P es una n -seudovariiedad cerrada si y solo si existe un subpoliedro cerrado SP , $\dim SP \leq n-2$, cumpliendo las siguientes condiciones:

- 1) $Cl(P-SP) = P$, donde $Cl()$ representa la clausura topológica.
- 2) $P-SP$ es una n -variedad p.l. sin borde.

En estas condiciones diremos que SP es el conjunto singular de P .

Un n -poliedro euclideo es una n -seudovariiedad con borde ∂P si y solo si existe un subpoliedro SP , $\dim SP \leq n-2$, cumpliendo:

- 1') $P = Cl(P-SP)$.
- 2') $P-SP$ es una n -variedad con borde $\partial P - SP$.
- 3') ∂P es una $(n-1)$ -seudovariiedad cerrada cuyo conjunto singular es $SP \cap \partial P$.

Demostración: Es como la de los teoremas 2 y 3 de [15].

0.4. NOTA. Consideramos el concepto de orientación sobre las seudovariiedades en el sentido ordinario. Una n -seudovariiedad con borde es orientable si existe una triangulación con los simplices orientados compatiblemente, i.e. de forma que las orientaciones de dos n -simplices que tengan en común una $(n-1)$ -cara inducen en ésta orientaciones opuestas. Una n -seudovariiedad con borde está orientada si se ha elegido una orientación compatible en el conjunto de sus n -simplices. Una n -seudovariiedad P con una triangulación K es orientable si y sólo si $H_n^{II}(|K|, |\partial K|) = \mathbb{Z}$ (ver

p.e. [3], p.30), donde $H_n^{\mathbb{Z}}$ representa la homología de segunda especie. De lo anterior se deduce que el que P sea o no sea orientable es independiente de la triangulación K . Se tiene el siguiente resultado: Si K es una triangulación de una n -seudovariiedad orientada con borde no vacío y sobre cada $(n-1)$ -símplice de ∂K se considera la orientación inducida por la del único n -símplice que lo contiene como cara, entonces dichas orientaciones definen una orientación compatible sobre ∂K (ver p.e. [1], §3).

Si P es una n -seudovariiedad orientada con borde, por $-P$ representaremos la seudovariiedad con la orientación opuesta, es decir, sobre los n -símplices de una triangulación K de P consideramos las orientaciones opuestas a las dadas.

0.5. PROPOSICION. Se verifican las siguientes propiedades:

a) Pegamiento: Sean P_1 y P_2 n -seudovariiedades orientadas con borde $\partial P_1 = Q_1 \cup T_1$, $\partial P_2 = Q_2 \cup T_2$ de forma que:

- 1) Q_1 y T_1 son $(n-1)$ -seudovariiedades con borde tales que $\partial Q_1 = \partial T_1$.
- 2) T_1 y T_2 son p.l.-isomorfas.
- 3) La orientación que induce P_1 sobre T_1 transformada por el p.l.-isomorfismo anterior, es opuesta a la que induce P_2 sobre T_2 .

Entonces el pegamiento de P_1 y P_2 mediante el p.l.-isomorfismo indicado, es una n -seudovariiedad con borde $Q_1 \cup Q_2$ que admite una orientación canónica inducida por las dadas.

b) Cilindro: Sea P una n -seudovariiedad orientada, $\partial P = Q$, entonces $P \times I$ es una $(n+1)$ -seudovariiedad orientable con borde

$$Q \times I \cup P \times 0 \cup P \times 1.$$

Además, admite una orientación canónica de modo que las inducidas sobre $P \times 0$ y $P \times 1$ coinciden con las de P y $-P$.

c) Cono: El cono $c * P$, de vértice un punto c y base una n -seudovariiedad P orientada con borde ∂P , es una $(n+1)$ -seudovariiedad orientable con borde $PU c * \partial P$. Además, $c * P$ admite una orientación canónica que induce sobre P la orientación dada.

d) Entorno regular: Sea X un subpoliedro cerrado de una n -seudovariiedad P orientada con borde. Entonces, todo entorno regular N de X en P es una n -seudovariiedad orientable con borde $N' \cup (N \cap \partial P)$, que admite una triangulación canónica inducida por la de P (donde N' es el conjunto de simplices de la triangulación de N que no cortan a X).

Demostración: Ver [15].

0.6 NOTA. Todas las seudovariiedades que consideremos se supondrán orientadas y todos los poliedros serán compactos, salvo mención expresa de lo contrario. La función vacío \emptyset se considerará inyectiva. Las inmersiones se representarán con flechas como la siguiente:

$$A \hookrightarrow B.$$

CAPITULO I

GRUPOS DE SEUDOBORDISMO SECCIONAL

Se presenta la categoría definida por LALONDE para la construcción de la teoría de homología seccional de SHIH y se construye nuestra teoría de bordismo, utilizando pseudovarietades compactas.

1.1. LA CATEGORIA SECCIONAL.

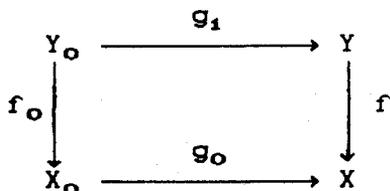
Denotemos por ξ la categoría cuyos objetos son funciones continuas $f: Y \rightarrow X$, de un espacio topológico en otro, y cuyos morfismos son los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{h_Y} & Y' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ X & \xrightarrow{h_X} & X' \end{array}$$

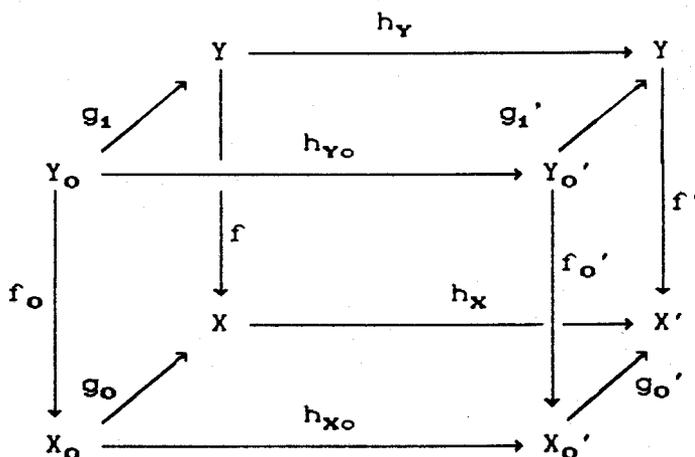
de funciones continuas con h_X inyectiva. Un tal diagrama lo

designaremos por (h_x, h_y) o simplemente por h .

Sea \mathcal{D} la categoría cuyos objetos son los diagramas conmutativos de funciones continuas



con g_0 inyectiva, objetos que designaremos por $(f, f_0; g_0, g_1)$ o $(f, f_0; g)$, (donde $g=(g_0, g_1)$), y cuyos morfismos son diagramas conmutativos de funciones continuas



donde h_x, h_{x_0} son inyectivas y que designaremos por $(h_x, h_y; h_{x_0}, h_{y_0})$ o h simplemente.

Podemos asociar al objeto $f:Y \rightarrow X$ de ξ el diagrama $(f, \emptyset; \emptyset, \emptyset)$ de \mathcal{D} , y al morfismo (h_x, h_y) de ξ el morfismo $(h_x, h_y; \emptyset, \emptyset)$, obteniéndose así una transformación natural $\xi \rightarrow \mathcal{D}$ mediante la cual podemos considerar que ξ es una subcategoría plena de \mathcal{D} .

En esta categoría \mathcal{D} , un punto es un objeto $1_P: P \rightarrow P$, donde P consta de un sólo elemento. Una homotopía entre dos morfismos

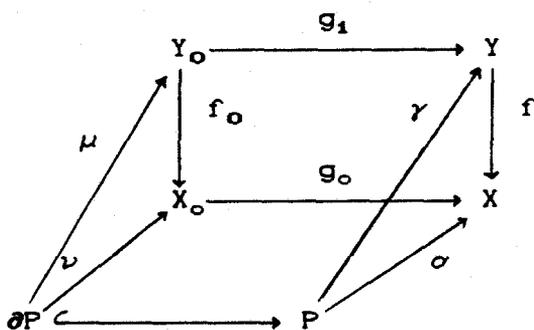
$$h_0, h_1 : (f, f_0; g) \longrightarrow (f', f'_0; g')$$

es un morfismo

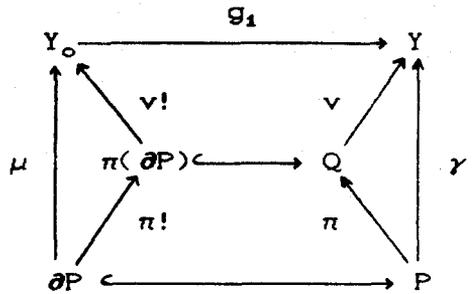
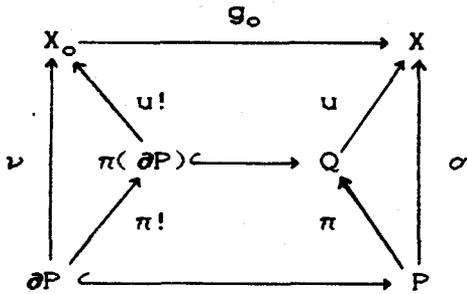
$$F = (F_{X \times I}, F_{Y \times I}; F_{X_0 \times I}, F_{Y_0 \times I}) : (f, f_0; g) \times I \longrightarrow (f, f'_0; g')$$

tal que $F_{j_0} = h_0$ y $F_{j_1} = h_1$, donde $(f, f_0; g) \times I$ designa el diagrama $(f \times I, f_0 \times I; g \times I)$ y donde, para $t \in I$, $j_t : (f, f_0; g) \longrightarrow (f, f_0; g) \times I$ es el morfismo definido por la identificación de $(f, f_0; g)$ a $(f, f_0; g) \times I_t$.

1.2. DEFINICION. Un n-ciclo seccional en el objeto $(f, f_0; g)$ es $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P})$, formada por una n-seudovariedad orientada P con borde ∂P , una familia finita $\mathcal{P} = \{P_i\}$ de subpoliedros compactos de P de dimensión n tales que $P_i \cap P_j$ no tiene puntos interiores ni de P_i ni de P_j si $i \neq j$ y $P = \bigcup_i P_i$, y cuatro funciones continuas σ, γ, ν, μ de forma que el siguiente diagrama es conmutativo



y existe alguna pareja de diagramas conmutativos de la forma



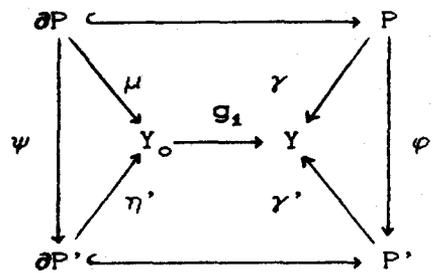
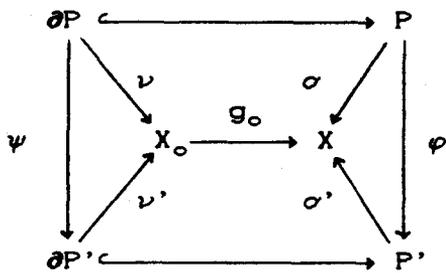
siendo Q un poliedro, π p.l.-epimorfismo, $\pi!$ la restricción de π a ∂P , $u, u!, v$ y $v!$ funciones continuas tales que $u=f \circ v$, $u!=f_0 \circ v!$ y $u|_{\pi(P_i)}$ inyectiva para cada P_i . Obsérvese que $u!=g_0^{-1}u|_{\pi(\partial P)}$ y que $v|_{\pi(P_i)}$, $u!|_{\pi(P_i \cap \partial P)}$ y $v!|_{\pi(P_i \cap \partial P)}$ también resultan inyectivas para cada P_i . A \mathcal{P} le llamaremos descomposición canónica y a la pareja de diagramas, factorización canónica del ciclo.

Si $M=(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P})$ es un ciclo, P será llamado el espacio subyacente a M y será designado abreviadamente por $|M|$.

Por convenio, $\emptyset=(\emptyset, \emptyset, \emptyset; \emptyset, \emptyset, \emptyset)$ es un n -ciclo en $(f, f_0; g)$.

Cuando $\partial P=\emptyset$, se escribirá simplemente $(P, \sigma, \gamma; \mathcal{P})$ y se llamará ciclo absoluto.

1.3. DEFINICION. Dados dos n -ciclos seccionales en $(f, f_0; g)$, $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P})$ y $(P', \sigma', \gamma'; \partial P', \nu', \mu'; \mathcal{P}')$, un morfismo del primero en el segundo es un par (φ, ψ) de aplicaciones p.l. tales que conmutan los diagramas



y se conserva la descomposición, i.e. si $\mathcal{P}=\langle P_i \rangle$ y $\mathcal{P}'=\langle P_j' \rangle$, para cada P_i existe un P_j' tal que $\varphi(P_i) \subseteq P_j'$. El morfismo será una inmersión si lo es la aplicación φ . Es obvio que con la ley de composición evidente y $(1_f, 1_{f_0})$ como identidad en $(P, \partial P)$, tenemos una categoría $\mathcal{Z}(f, f_0; g)$ de ciclos en $(f, f_0; g)$. Dos ciclos en $(f, f_0; g)$ son iguales si son isomorfos en dicha categoría.

1.4. PROPOSICION. Un morfismo (φ, ψ) en $\mathcal{Z}(f, f_0; g)$ es un isomorfismo si y sólo si φ y ψ son p.l.-isomorfismos. Además, si (φ, ψ) va del ciclo M al ciclo M' , siendo $\mathcal{P}=\langle P_i \rangle$ y $\mathcal{P}'=\langle P_j' \rangle$ las descomposiciones canónicas respectivas, entonces φ establece una biyección $\rho_\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ por la fórmula $\rho_\varphi(P_i) = \varphi P_i$.

Demostración: Sea $M=(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P})$, $M'=(P', \sigma', \gamma'; \partial P', \nu', \mu'; \mathcal{P}')$. Si $(\varphi, \psi): M \rightarrow M'$ es un isomorfismo, entonces existe un morfismo $(\varphi', \psi'): M' \rightarrow M$ en $\mathcal{Z}(f, f_0; g)$ tal que $(\varphi, \psi)(\varphi', \psi') = 1_M$, y $(\varphi', \psi')(\varphi, \psi) = 1_{M'}$. Luego $\varphi\varphi' = \varphi'\varphi = 1_P$, $\psi\psi' = \psi'\psi = 1_{\partial P}$ y ambas φ, ψ son p.l.-isomorfismos.

Recíprocamente, si φ y ψ son p.l.-isomorfismos, está claro que $(\varphi^{-1}, \psi^{-1}) = (\varphi, \psi)^{-1}$.

Si $P_j' \supseteq \varphi P_i$, entonces $\varphi^{-1} P_j' \cap P_i$ tiene puntos interiores de P_i , luego $\varphi^{-1} P_j' \subseteq P_i$; por tanto $\varphi P_i = P_j'$. Está claro también que

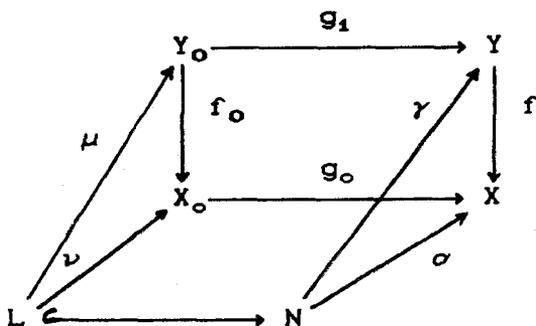
$\varphi P_i \neq \varphi P_k$ si $i \neq k$. En consecuencia, la fórmula $\rho_\varphi(P_i) = \varphi P_i$ define una biyección $\rho_\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$.

1.5. DEFINICION. La suma de dos n-ciclos seccionales en $(f, f_0; g)$, $(P_1, \sigma_1, \gamma_1; \partial P_1, \nu_1, \mu_1; \mathcal{P}_1)$ y $(P_2, \sigma_2, \gamma_2; \partial P_2, \nu_2, \mu_2; \mathcal{P}_2)$, es el n-ciclo seccional en $(f, f_0; g)$

$$(P_1, \sigma_1, \gamma_1; \partial P_1, \nu_1, \mu_1; \mathcal{P}_1) + (P_2, \sigma_2, \gamma_2; \partial P_2, \nu_2, \mu_2; \mathcal{P}_2) = \\ = (P_1 + P_2, \sigma_1 \cup \sigma_2, \gamma_1 \cup \gamma_2; \partial P_1 + \partial P_2, \nu_1 \cup \nu_2, \mu_1 \cup \mu_2; \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)$$

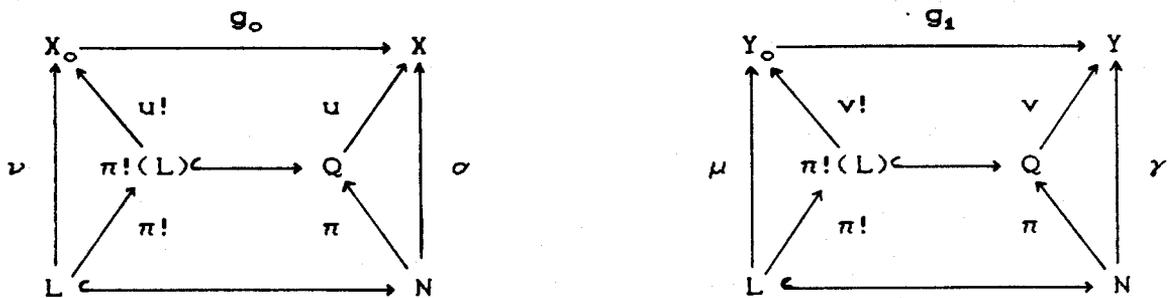
inducido por la unión disjunta $P_1 + P_2$.

1.6. DEFINICION. Una (n+1)-cadena seccional en $(f, f_0; g)$ es $(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{M})$ formada por una (n+1)-seudovariiedad orientada N con borde, una n-seudovariiedad orientada $L \subseteq \partial N$ con borde, una familia finita $\mathcal{M} = \{N_i\}$ de subpoliedros compactos de N de dimensión n+1, tales que $N = \bigcup_i N_i$ e $\text{int } N_i \cap \text{int } N_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y cuatro funciones continuas σ, γ, ν y μ que hacen conmutativo el siguiente diagrama



y tales que existe alguna pareja de diagramas conmutativos de

la forma



siendo Q un poliedro, π p.l.-epimorfismo, $\pi!$ la restricción de π a L , u , v , $u!$ y $v!$ son funciones continuas tales que $u=f \cdot v$, $u!=f_0 \cdot v!$ y $u|_{\pi(N_i)}$ es inyectiva para cada N_i . Nótese que $u!=g_0^{-1} \cdot u|_{\pi(L)}$ y que también resultan $v|_{\pi(N_i)}$, $u!|_{\pi(N_i \cap L)}$ y $v!|_{\pi(N_i \cap L)}$ inyectivas para cada N_i . \mathcal{N} se llamará la descomposición canónica de la cadena y la pareja de diagramas su factorización canónica.

El borde de $(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{N})$ es el n -ciclo seccional en $(f, f_0; g)$

$$\partial(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{N}) = (N_0, \sigma|_{N_0}, \gamma|_{N_0}; -\partial L, \nu|_{\partial L}, \mu|_{\partial L}; \mathcal{N}_0),$$

donde N_0 es la n -seudovariedad tal que $\partial N = L \cup N_0$ y $\mathcal{N}_0 = \langle N_0 \cap N_i \rangle$.

1.7. DEFINICION. El cilindro del ciclo $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P})$ en $(f, f_0; g)$ es la cadena en $(f, f_0; g)$

$$(P \times I, \sigma \circ pr_1, \gamma \circ pr_1; \partial P \times I, \nu \circ pr_1, \mu \circ pr_1; \mathcal{P} \times I),$$

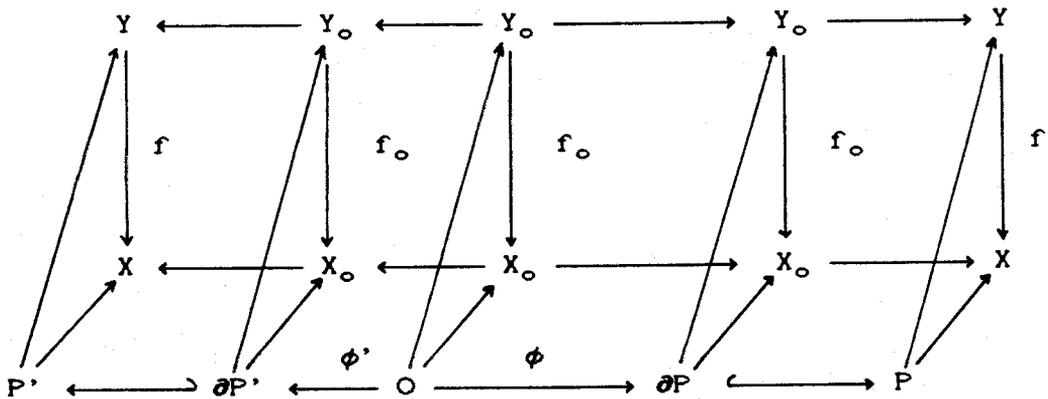
donde pr_1 es la proyección sobre el primer factor en los productos cartesianos $P \times I$ y $\partial P \times I$, y $\mathcal{P} \times I = \langle P_i \times I | P_i \in \mathcal{P} \rangle$. La designaremos por la notación

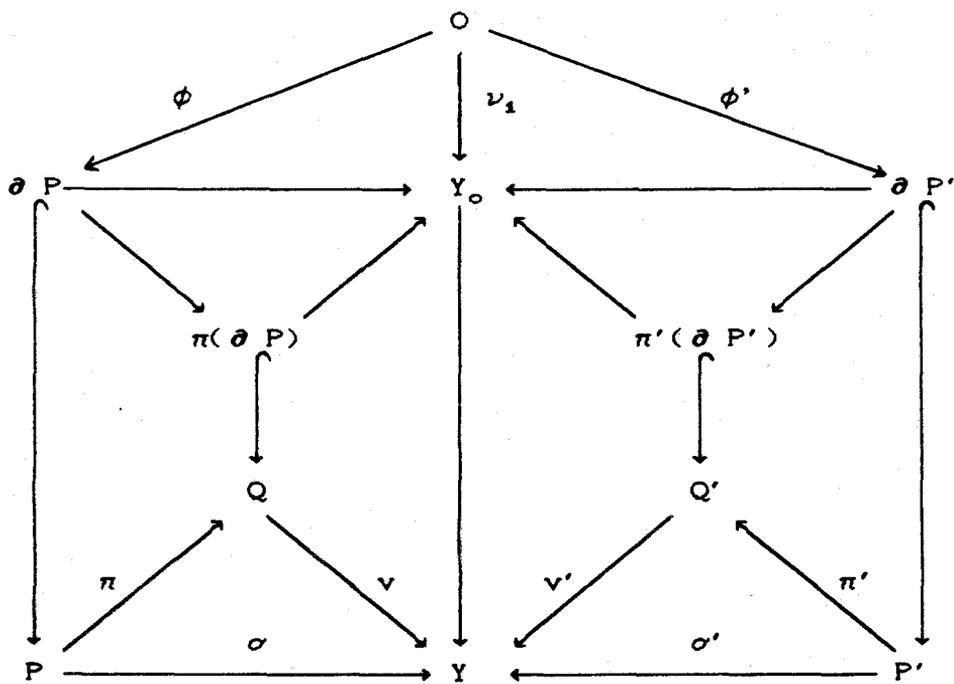
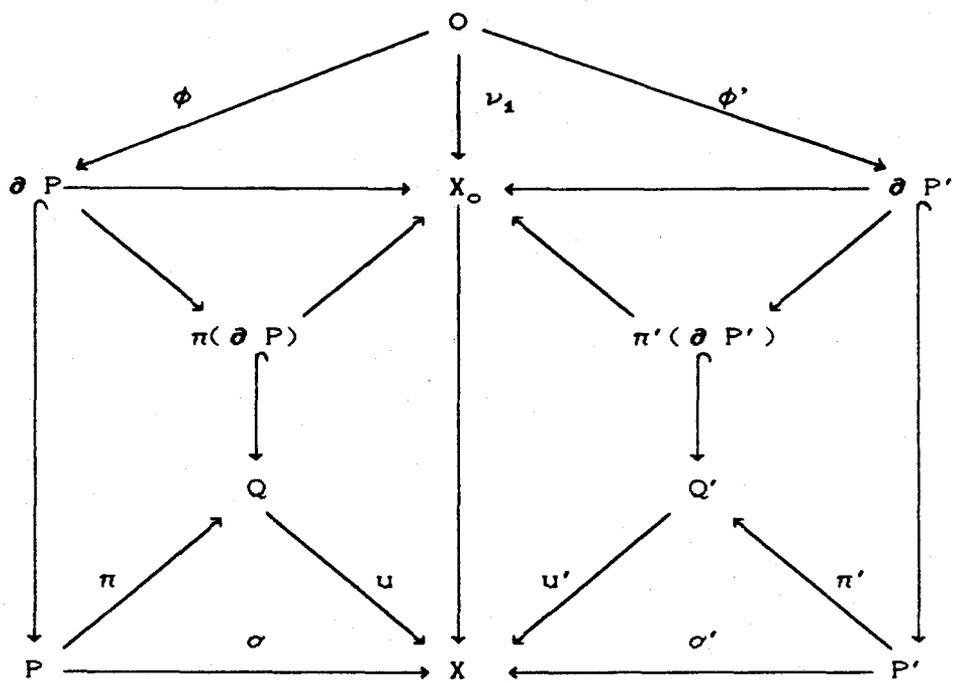
$$(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P}) \times I.$$

1.8. DEFINICION. El funtor $\theta: \mathcal{E}(f, f_0; g) \rightarrow \mathcal{E}(f, f_0; g)$, tal que $\theta(\phi) = \phi$ y $\theta(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P}) = (-P, \sigma, \gamma; -\partial P, \nu, \mu; \mathcal{P})$, donde $-P$ y $-\partial P$ son respectivamente las pseudovarietades P y ∂P con las orientaciones opuestas a las dadas, será llamado functor orientación. Está claro que $\theta^2 = 1$, $\partial\theta = \theta\partial$ y $\theta(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P}) \neq (P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P})$.

1.9. DEFINICION. Un ciclo absoluto $N = (O, \nu_1, \mu_1; \emptyset)$ en f_0 es cara de un ciclo $M = (P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P})$ en $(f, f_0; g)$ si hay una inmersión de N en ∂M .

Sean $M = (P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P})$ y $M' = (P', \sigma', \gamma'; \partial P', \nu, \mu'; \mathcal{P}')$ dos ciclos en $(f, f_0; g)$ de forma que N es cara de M y θN es cara de M' . Entonces, combinando los diagramas que da la definición (1.2) para los ciclos M y M' , tenemos los siguientes diagramas conmutativos





donde ϕ y ϕ' son inmersiones. Si se pegan P y P' a través de O , i.e. si se identifica $\phi(O)$ con $\phi'(O)$, se obtiene una n -seudovariedad PU_0P' con borde $\partial(PU_0P') = \partial P \cup \partial P'$. Así, definimos

el pegamiento de dos n -ciclos M y M' a través de la cara N como

$$M \cup_N M' = (PU_0P', \sigma \cup \sigma', \gamma \cup \gamma'; \partial(PU_0P'), \nu \cup \nu', \mu \cup \mu'; \mathcal{P} \cup \mathcal{P}').$$

De los diagramas anteriores se deduce sin dificultad que $M \cup_N M'$ es un n -ciclo seccional en $(f, f_0; g)$.

Un n -ciclo $M = (P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P})$ en $(f, f_0; g_0)$ es cara de la $(n+1)$ -cadena $C_1 = (N_1, \sigma_1, \gamma_1; L_1, \nu_1, \mu_1; \mathcal{N}_1)$ si hay una inmersión de M en ∂C_1 . Si $C_2 = (N_2, \sigma_2, \gamma_2; L_2, \nu_2, \mu_2; \mathcal{N}_2)$ es otra $(n+1)$ -cadena tal que ∂M es cara de C_2 , entonces se puede definir el pegamiento de dos cadenas C_1 y C_2 a través de la cara M , análogamente a como se definió el pegamiento de dos ciclos: es la $(n+1)$ -cadena

$$C_1 \cup_M C_2 = (N_1 \cup_P N_2, \sigma_1 \cup \sigma_2, \gamma_1 \cup \gamma_2; L_1 \cup_P L_2, \nu_1 \cup \nu_2, \mu_1 \cup \mu_2; \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2)$$

en $(f, f_0; g)$.

1.10. DEFINICION. Dos n -ciclos seccionales en $(f, f_0; g)$, $(P_1, \sigma_1, \gamma_1; \partial P_1, \nu_1, \mu_1; \mathcal{P}_1)$ y $(P_2, \sigma_2, \gamma_2; \partial P_2, \nu_2, \mu_2; \mathcal{P}_2)$, son seudobordantes si existe una $(n+1)$ -cadena seccional en $(f, f_0; g)$, $(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{N})$ tal que

$$\partial(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{N}) = \theta(P_1, \sigma_1, \gamma_1; \partial P_1, \nu_1, \mu_1; \mathcal{P}_1) + \theta(P_2, \sigma_2, \gamma_2; \partial P_2, \nu_2, \mu_2; \mathcal{P}_2).$$

1.11. NOTA. a) La relación "ser seudobordantes" entre ciclos es de equivalencia. La propiedad reflexiva es debida a la cadena cilindro del ciclo $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P})$.

La propiedad simétrica se obtiene cambiando la orientación de

las pseudovarietades de la cadena que da la relación .

La propiedad transitiva se obtiene por pegamiento de las cadenas que dan las relaciones a través del término intermedio: si

$$\alpha(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{N}) = M_1 + \theta M_2$$

y

$$\alpha(N', \sigma', \gamma'; L', \nu', \mu'; \mathcal{N}') = M_2 + \theta M_3,$$

entonces

$$\alpha(NUN', \sigma\nu\sigma', \gamma\nu\gamma'; LUL', \nu\nu\nu', \mu\mu\mu'; \mathcal{N}\mathcal{U}\mathcal{N}') = M_1 + \theta M_3$$

b) El conjunto $S\Omega_n(f, f_0; g)_g$ de las clases de n-ciclos seccionales en $(f, f_0; g)$ admite estructura de grupo conmutativo con la operación +, inducida por la suma de n-ciclos seccionales.

El elemento neutro será la clase de n-ciclos seccionales que son borde de una (n+1)-cadena seccional. El elemento opuesto de $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P})$ es $\theta(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P})$ pues

$$\alpha((P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P}) \times I) = (P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P}) + \theta(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P}).$$

A $S\Omega_n(f, f_0; g)_g$ lo llamaremos el n-grupo de pseudobordismo seccional en $(f, f_0; g)$. Para el caso de objetos $f: Y \rightarrow X$ de ξ , usaremos la notación más condensada $S\Omega(f)_g$.

c) La clase de pseudobordismo no depende de la descomposición del modelo; i.e., si $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P})$ y $(P', \sigma', \gamma'; \partial P', \nu', \mu'; \mathcal{P}')$ son n-ciclos en $(f, f_0; g)$ que sólo difieren en las descomposiciones $\mathcal{P} = \langle P_i \rangle$, $\mathcal{P}' = \langle P'_i \rangle$ de la pseudovarietad $P = P'$, entonces son pseudobordantes. En efecto, démosle a $P \times I$ la descomposición

$$\mathcal{N} = \langle P_i \times [0, 1/2] \rangle \cup \langle P'_i \times [1/2, 1] \rangle,$$

entonces la cadena $(P \times I, \sigma \circ pr_1, \gamma \circ pr_1; \partial P \times I, \nu \circ pr_1, \mu \circ pr_1; \mathcal{N})$ da el pseudobordismo.

Por lo anterior, en lo sucesivo será frecuente que simplifiquemos la notación de ciclos y cadenas no haciendo constar

una descomposición canónica particular.

d) En las definiciones anteriores, podemos exigir que todas las pseudovarietades sean con borde admitiendo collar, ya que, si designamos por $S\Omega'_n(f, f_0; g)_s$ el correspondiente grupo del objeto $(f, f_0; g)$ en dimensión n , el homomorfismo

$$i_n: S\Omega'_n(f, f_0; g)_s \longrightarrow S\Omega_n(f, f_0; g)_s$$

dado por $i_n[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] = [P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu]$ es un isomorfismo. En efecto, dado un ciclo seccional $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu)$ en $(f, f_0; g)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \partial(P \cup_{\partial P = \partial P \times 0} \partial P \times I, \alpha \cup \sigma \circ pr_1, \gamma \cup \gamma \circ pr_1; \partial P, \nu, \mu) \times I = \\ (P \cup_{\partial P = \partial P \times 0} \partial P \times I, \alpha \cup \sigma \circ pr_1, \gamma \cup \gamma \circ pr_1; \partial P, \nu, \mu) - (P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu), \end{aligned}$$

donde $pr_1: \partial P \times I \rightarrow \partial P$ es la proyección canónica; como $\partial(P \cup \partial P \times I) = \partial P$ tiene un collar en $P \cup \partial P \times I$, $i_n[P \cup \partial P \times I, \alpha \cup \sigma \circ pr_1, \gamma \cup \gamma \circ pr_1; \partial P, \nu, \mu] = [P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu]$, luego i_n es epimorfismo.

Supongamos que $i_n[P', \sigma', \gamma'; \partial P', \nu', \mu'] = i_n[P'', \sigma'', \gamma''; \partial P'', \nu'', \mu'']$, siendo $C = (N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu)$ una cadena tal que

$$\partial C = (P', \sigma', \gamma'; \partial P', \nu', \mu') - (P'', \sigma'', \gamma''; \partial P'', \nu'', \mu'').$$

Entonces, la cadena

$$C \cup \partial C \times I = (N \cup \partial N \times I, \alpha \cup \sigma \circ pr_1, \gamma \cup \gamma \circ pr_1; L \cup \partial L \times I, \nu \cup \nu \circ pr_1, \mu \cup \mu \circ pr_1),$$

que se obtiene pegando C con $\partial C \times I$, es tal que

$$\partial(C \cup \partial C \times I) = (P', \sigma', \gamma'; \partial P', \nu', \mu') - (P'', \sigma'', \gamma''; \partial P'', \nu'', \mu'')$$

y $N \cup \partial N \times I$, $L \cup \partial L \times I$ son pseudovarietades con borde que admite collar, luego $[P', \sigma', \gamma'; \partial P', \nu', \mu'] = [P'', \sigma'', \gamma''; \partial P'', \nu'', \mu'']$. Esto demuestra que i_n es monomorfismo.

CAPITULO II

PROPIEDADES DE HOMOLOGIA

Se prueba que la teoría de pseudobordismo seccional cumple los axiomas de Eilenberg-Steenrod sobre la categoría \mathcal{D} .

Dado un morfismo en \mathcal{D}

$$(h_X, h_Y; h_{X_0}, h_{Y_0}) : (f, f_0; g) \longrightarrow (f', f_0'; g')$$

definimos un morfismo

$$(h_X, h_Y; h_{X_0}, h_{Y_0})_* : S\Omega_*(f, f_0; g)_* \longrightarrow S\Omega_*(f', f_0'; g')_*$$

por la fórmula

$$(h_X, h_Y; h_{X_0}, h_{Y_0})_* [P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] = [P, h_X \sigma, h_Y \gamma; \partial P, h_{X_0} \nu, h_{Y_0} \mu].$$

En el caso absoluto pondremos la fórmula

$$(h_X, h_Y)_* [P, \sigma, \gamma] = [P, h_X \sigma, h_Y \gamma].$$

Por tanto, se tiene fácilmente :

2.1. PROPOSICION: $S\Omega_*(\quad)_*$ y $S\Omega_*(\quad; \quad)_*$ definen un functor covariante de la categoría \mathcal{D} en la categoría de los grupos

abelianos.

2.2. DEFINICION. MORFISMO DE CONEXION

$$\partial_* : S\Omega_n(f, f_0; g)_s \longrightarrow S\Omega_{n-1}(f_0)_s$$

es el morfismo definido por

$$\partial_*[(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu)] = [(\partial P, \nu, \mu)].$$

2.3. TEOREMA DE EXACTITUD. La sucesión

$$\dots \rightarrow S\Omega_n(f_0)_s \xrightarrow{g_*} S\Omega_n(f)_s \xrightarrow{j_*} S\Omega_n(f, f_0; g)_s \xrightarrow{\partial_*} S\Omega_{n-1}(f_0)_s \rightarrow \dots$$

donde g_* es el morfismo $(g_0, g_1)_*$ y j_* es $(1_X, 1_Y; \theta, \theta)_*$, es exacta.

Demostración:

1) Exactitud en $S\Omega_n(f)_s$. Sea $[P, \sigma, \gamma] \in S\Omega_n(f_0)_s$, entonces $j_* g_* [P, \sigma, \gamma] = [P, 1_X g_0 \sigma, 1_Y g_1 \gamma; \theta, \theta, \theta] = 0$. Basta considerar la relación $(P \times I, g_0 \circ \sigma \circ pr_1, g_1 \circ \gamma \circ pr_1; \theta P \times (1), \sigma \circ pr_1, \gamma \circ pr_1)$ definida en $(f, f_0; g)$.

Sea $[P, \sigma, \gamma] \in S\Omega_n(f)_s$ tal que $j_* [P, \sigma, \gamma] = 0$. Entonces existe una $(n+1)$ -cadena $R = (N, \sigma', \gamma'; L, \nu', \mu')$ tal que $\partial R = (P, \sigma, \gamma; \theta, \theta, \theta)$, lo que implica en particular que $\partial L = \theta$, y también que el borde de la $(n+1)$ -cadena $(N, \sigma', \gamma', \theta, \theta, \theta)$ es $(P, \sigma, \gamma) - (L, g_0 \nu', g_1 \mu')$, por lo cual $[P, \sigma, \gamma] \in \text{Im } g_*$.

2) Exactitud en $S\Omega_n(f, f_0; g)_s$. Si $[P, \sigma, \gamma] \in S\Omega_n(f)_s$, entonces $\partial(P, \sigma, \gamma) = (\theta, \theta, \theta)$ y por tanto $\partial_* j_* [P, \sigma, \gamma] = \partial_* [P, \sigma, \gamma; \theta, \theta, \theta] = 0$. Sea $R = [P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] \in S\Omega_n(f, f_0; g)_s$ tal que $\partial_* R = [\partial P, \nu, \mu] = 0$. Entonces existe una n -cadena (N, ν', μ') en f_0 tal que $\partial(N, \nu', \mu') = (\partial P, \nu, \mu)$. Formemos el n -ciclo seccional en f

$$C = (P \cup N, \sigma \cup g_0 \nu', \gamma \cup g_1 \mu'),$$

donde P y $-N$ se pegan a través de ∂P entonces la $(n+1)$ -cadena seccional en (f, f_0, g)

$$((\partial P \cup N) \times I, (\alpha \cup \nu') \circ pr_1, (\gamma \cup g_1 \mu') \circ pr_1; N, \nu', \mu')$$

demuestra que $[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] = j_*[C]$.

3) Exactitud en $SQ_n(f_0)_*$. Si $R = [P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] \in SQ_{n+1}(f, f_0; g)_*$, $g_* \partial_* R = 0$ ya que $g_* \partial_* R = [\partial P, g_0 \nu, g_1 \mu]$ y $(\partial P, g_0 \nu, g_1 \mu) = (\partial P, \sigma |_{\partial P}, \gamma |_{\partial P})$, que es el borde de la n -cadena seccional (P, σ, γ) en f .

Sea $[P, \nu, \mu] \in SQ_n(f_0)_*$ tal que $g_*[P, \nu, \mu] = [P, g_0 \nu, g_1 \mu] = 0$. Entonces existe una $(n+1)$ -cadena seccional en f , (N, σ, γ) tal que $\partial(N, \sigma, \gamma) = (P, g_0 \nu, g_1 \mu)$, luego $[P, g_0 \nu, g_1 \mu] = \partial_*[N, \sigma, \gamma; P, \nu, \mu]$.

2.4. TEOREMA DE HOMOTOPIA.

Sean $(f, f_0; g)$, $(f', f_0'; g')$ objetos de la categoría \mathcal{D} y

$$h_0, h_1: (f, f_0; g) \longrightarrow (f', f_0'; g')$$

morfismos entre los cuales hay una homotopía

$$F = (F_{X \times I}, F_{Y \times I}; F_{X_0 \times I}, F_{Y_0 \times I}): (f, f_0; g) \times 1_I \longrightarrow (f', f_0'; g').$$

Entonces $h_{0*} = h_{1*}$.

Demostración: Dado $R = [P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] \in SQ(f, f_0; g)_*$, la cadena

$$(P \times I, F_{X \times I} \circ (\sigma \times 1_I), F_{Y \times I} \circ (\gamma \times 1_I); \partial P \times I, F_{X_0 \times I} \circ (\nu \times 1_I), F_{Y_0 \times I} \circ (\mu \times 1_I))$$

demuestra la igualdad $h_{0*}(R) = h_{1*}(R)$.

2.5. NOTA IMPORTANTE. Se demostrará más adelante, en (5.9), que $SQ_n(f)_*$ no es en general invariante de la clase de homotopía topológica de f .

2.6. TEOREMA DE ESCISION. Sea $(f, f_0; g)$ el objeto

$$\begin{array}{ccc} Y_0 & \xrightarrow{g_1} & Y \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f \\ X_0 & \xrightarrow{g_0} & X \end{array}$$

donde las flechas horizontales son las inclusiones $X_0 \subseteq X$, $Y_0 \subseteq Y$ y por tanto $f_0 = f|_{Y_0}$. Sea U un abierto de X tal que $\text{cl}(U) \subseteq \text{int}(X_0)$ (en X) y $f_0^{-1}(\text{cl}(U)) \subseteq \text{int}(Y_0)$ (en Y). Consideremos el objeto

$$\begin{array}{ccc} Y_0 - f_0^{-1}(U) & \longrightarrow & Y - f^{-1}(U) \\ f_{0U} \downarrow & & \downarrow f_U \\ X_0 - U & \longrightarrow & X - U \end{array}$$

donde f_U y f_{0U} son las restricciones de f y f_0 respectivamente y que designaremos por $(f_U, f_{0U}; g_U)$. Entonces el morfismo

$$i: (f_U, f_{0U}; g_U) \rightarrow (f, f_0; g)$$

determinado por las inclusiones $X - U \subseteq X$, etc., induce un isomorfismo

$$i_*: S\Omega(f_U, f_{0U}; g_U)_* \rightarrow S\Omega(f, f_0; g)_*.$$

Demostración: Sean $[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] \in S\Omega_n(f, f_0; g)$, $A = \sigma^{-1}(\text{cl}(X - X_0))$ y $U' = \sigma^{-1}(\text{cl}(U))$. Puesto que A y U' son subconjuntos cerrados de P disjuntos entre si, existe un entorno regular N de A tal que $N \cap U' = \emptyset$. Así pues, N es una n -seudovariiedad con borde $N' \cup (N \cap \partial NP)$ y $[N, \sigma|_N, \gamma|_N; \partial N, \nu|_{\partial N}, \mu|_{\partial N}] \in S\Omega_n(f_U, f_{0U}; g_U)_*$. Llamando N_0 a la pseudovariiedad que cumple $\partial(P \times I) = (P + (-N)) \cup N_0$, tenemos que la cadena

$$(P \times I, \sigma \times 1_I, \gamma \times 1_I; N_0, \sigma \times 1_I|_{N_0}, \gamma \times 1_I|_{N_0})$$

determina la igualdad

$$[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] = i_*[N, \sigma|_N, \gamma|_N; \partial N, \nu|_{\partial N}, \mu|_{\partial N}];$$

es decir, i_* es epimorfismo.

Supongamos que $[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] \in \Omega_n(f_U, f_{0U}; g_U)_e$ es tal que $i_*[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] = 0$. Entonces existe una $(n+1)$ -cadena $(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu)$ tal que $\partial(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu) = (P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu)$. Tomando $U' = \sigma'^{-1}(\text{cl}(U))$ y $A' = \sigma'^{-1}(\text{cl}(X - X_0))$, son subconjuntos cerrados de N disjuntos entre si y por tanto podemos encontrar un entorno regular M de A en N disjunto con U' , de forma que, si M' es la n -seudovariedad tal que $\partial M = (P \cap \partial M) \cup M'$, $(M, \sigma' |_{M'}; \gamma' |_{M'}; \nu' |_{M'}, \mu' |_{M'})$ es una $(n+1)$ -cadena en $(f_U, f_{0U}; g_U)$ cuyo borde es

$$(P \cap \partial M, \sigma |_{P \cap \partial M}; \gamma |_{P \cap \partial M}; \nu |_{\partial P \cap \partial M}, \mu |_{\partial P \cap \partial M}).$$

Ahora bién, este ciclo es pseudobordante con $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu)$ según muestra la cadena

$$(P \times I, \sigma \times 1_I, \gamma \times 1_I; Q, \sigma \times 1_I |_Q, \gamma \times 1_I |_Q),$$

en la cual Q es la n -seudovariedad tal que $\partial(P \times I) = (P + (-P \cap \partial M)) \cup Q$.

En consecuencia $[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] = 0$.

2.7. TEOREMA DE LA DIMENSION.

a) $\Omega_n(\text{punto})_e = 0$, para $n > 0$

b) $\Omega_0(\text{punto})_e = \mathbb{Z}$.

Demostración: Sea $1_X: X \longrightarrow X$ un punto, i.e. $\text{card.}(X) = 1$.

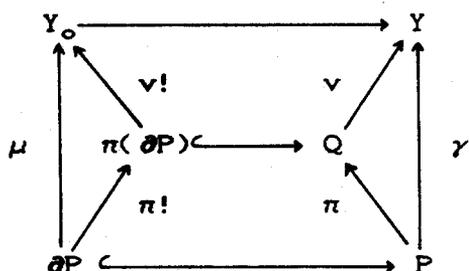
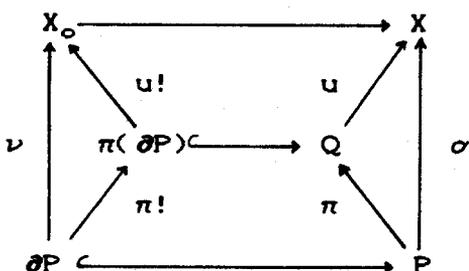
a) Si (P, σ, σ) es n -ciclo en 1_X , entonces (cono P , cono σ , cono σ) es una $(n+1)$ -cadena en el punto 1_X cuyo borde es (P, σ, σ) .

b) Observamos que dos 0-ciclos (P, σ, σ) , (P', σ', σ') en 1_X tales que P y P' tienen un sólo punto con la misma orientación, son ciclos iguales.

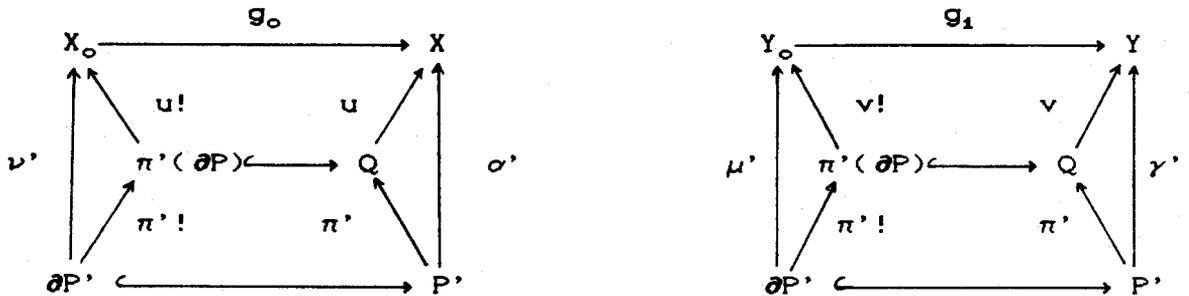
2.8. COROLARIO. Sea $(X, \sigma; \gamma)$ y ∂ definen una teoría de homología ordinaria con coeficientes en \mathbb{Z} , sobre la subcategoría plena \mathcal{D}' de \mathcal{D} formada por los diagramas $(f, f_0; g_0, g_1)$ tales que g_0 y g_1 son inclusiones.

En las factorizaciones canónicas de un n -ciclo (ver def.1.2), la aplicación $\pi: P \rightarrow Q$ es p.l-epimorfismo y con triangulaciones adecuadas de P y Q se hace simplicial, transformando simplices en simplices, pero no por ello tiene que conservarse la dimensión de dichos simplices: π puede ser degenerada. Sin embargo, a continuación se demuestra que es pseudobordante con \emptyset o hay otro n -ciclo, pseudobordante con el anterior, tal que tiene una descomposición canónica en la cual, la aplicación π correspondiente no es degenerada. En especial, si $\dim Q < \dim P$, entonces el ciclo es pseudobordante con \emptyset . Como corolario se obtiene después que los grupos de pseudobordismo seccional de $f: Y \rightarrow X$ son nulos en las dimensiones mayores que la del espacio X .

2.9. PROPOSICION. Sea $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu)$ un n -ciclo en $(f, f_0; g)$ que admite una factorización canónica



1) Si $\dim Q = \dim P$, hay otro n -ciclo $(P', \sigma', \gamma'; \partial P', \nu', \mu')$ en $(f, f_0; g)$ que factoriza canónicamente



con π' p.l.-epimorfismo no degenerado, tal que

$$[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] = [P', \sigma', \gamma'; \partial P', \nu', \mu'],$$

o bien, $[P, \sigma, \gamma; \partial L, \nu, \mu] = 0$.

2) Si $\dim Q < \dim P$, entonces $[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] = 0$.

Demostración: Sean K_1, K_0 , triangulaciones de P y Q respectivamente, tales que $\pi: K_1 \rightarrow K_0$ es simplicial.

Si π es degenerada, hay un 1-símplice $(x_{n-1}, x_n) \in K_1$ cuya imagen por π es un vértice de K_0 . Sean t_1, \dots, t_s los n -símplices de K_1 que tienen (x_{n-1}, x_n) como cara, y sean t_{s+1}, \dots, t_k los otros n -símplices de K_1 , todos considerados con la orientación inducida por la de P .

$K_1 \times I$ es un complejo celular de dimensión $n+1$, cuyas células de dimensión máxima son los cilindros $t \times I$, de base un n -símplice $t \in K_1$. $K_1 \times I$ puede ser triangulado sin introducir nuevos vértices, aparte de los de $K_1 \times 0$ y $K_1 \times 1$, dependiendo esta triangulación de una buena ordenación de los vértices de $K_1 \times 0$ y $K_1 \times 1$, elegida arbitrariamente ([46], proposición 2.9). Nosotros supondremos elegida una buena ordenación en $K_1 \times 0$ tal que $(x_{n-1}, 0) \leq (x_n, 0)$ y ambos posteriores a los otros vértices $(x, 0)$ y en $K_1 \times 1$ supondremos

la buena ordenación de los vértices análoga a la de $K_1 \times 0$. Con estas hipótesis, para cada célula $t \times I = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \times I$ de $K_1 \times I$, con los vértices numerados en sentido creciente según el orden elegido, la descomposición inducida por la arriba mencionada, se puede explicitar de la forma siguiente: Los $(n+1)$ -símplices son de la forma

$$((y_0, 1), \dots, (y_i, 1), (y_i, 0), \dots, (y_n, 0)) \quad (i=0, 1, \dots, n).$$

Los n -símplices son de las formas siguientes:

$$(A) \equiv ((y_0, 1), \dots, (y_j, 1), \dots, (y_i, 1), (y_i, 0), \dots, (y_n, 0)) \quad (j=1, \dots, n-1; i=1, \dots, n)$$

$$((y_0, 1), \dots, (y_i, 1), (y_i, 0), \dots, (y_j, 0), \dots, (y_n, 0)) \quad (j=i+1, \dots, n; i=0, \dots, n-1).$$

$$(B) \equiv ((y_0, 1), \dots, (y_i, 1), (y_{i+1}, 0), \dots, (y_n, 0)) \quad (i=0, \dots, n-1)$$

$$((y_0, 1), \dots, (y_{i-1}, 1), (y_i, 0), \dots, (y_n, 0)) \quad (i=1, \dots, n).$$

Los de la forma (A) constituyen la subdivisión simplicial de $t \times I \cup t \times 0 \cup t \times I$.

Sobre los símplices de esta descomposición de $K_1 \times I$ consideremos las orientaciones inducidas por la de $P \times I$ y que están pegadas entre sí para formar laseudovariedad $P \times I$. Sea C el complejo simplicial obtenido con los $(n+1)$ -símplices de la descomposición de $K_1 \times I$, que no son de la forma

$$(\dots, (x_{n-1}, 1), (x_n, 1), (x_n, 0)).$$

Observemos que $D = |C|$ es una $(n+1)$ -seudovariedad de $P \times I$ con la orientación inducida.

Para cada $(n+1)$ -símplice $s = (\dots, (x_{n-1}, 1), (x_n, 1), (x_n, 0))$ perteneciente a $K_1 \times I$ pero no a C , la n -cara de s

$$c_1(s) = ((x_0, 1), \dots, (x_{n-1}, 1), (x_n, 1), (x_n, 0))$$

no está en el borde de laseudovariedad $P \times I$, luego pertenece a

otro $(n+1)$ -símplice $s_1 \in K_1 \times I$ que, por no contener el vértice $(x_{n-1}, 1)$, pertenece a C ; análogamente, la n -cara de s

$$c_2(s) = ((x_0, 1), \dots, (x_{n-1}, 1), (x_n, 1), (x_n, 0))$$

pertenece a otro $(n+1)$ -símplice $s_2 \in C$. Las orientaciones que s induce en $c_1(s)$ y $c_2(s)$ son $(-1)^{n-1}c_1(s)$ y $(-1)^n c_2(s)$ respectivamente, luego la aplicación simplicial $c_1(s) \rightarrow c_2(s)$ que transforma $(x_n, 1)$ en $(x_{n-1}, 1)$ y los demás vértices en sí mismos, invierte la orientación; por tanto, si pegamos s_1 con s_2 por dicha aplicación simplicial, el espacio cociente obtenido de $D = |C|$ es una $(n+1)$ -seudovariiedad con borde orientada. Por cada $(n+1)$ -símplice de $K_1 \times I - C$ se puede hacer un pegamiento como el anterior. Una fácil inducción muestra que si hacemos dichos pegamientos simultaneamente resulta una $(n+1)$ -seudovariiedad orientada N con borde ∂N que es de una de las formas siguientes:

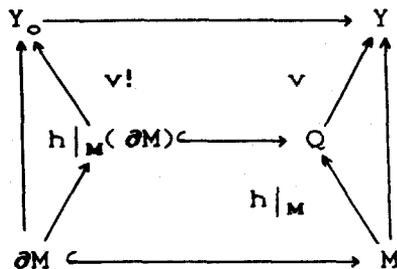
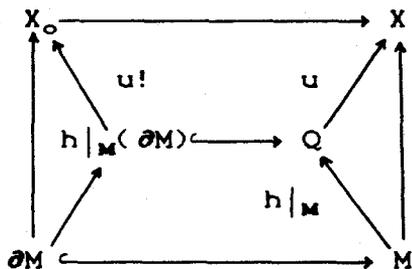
$$a) \partial N = (P \times 0) \cup L \quad \text{o} \quad b) \partial N = ((P \times 0) + (-M)) \cup L$$

donde L y M son n -seudovariiedades orientadas y L es cociente de $\partial P \times I$.

Por la construcción realizada, la aplicación simplicial $\pi \circ \text{pr}_1: K_1 \times I \rightarrow K_2$ factoriza a través de N como producto de dos p.l-epimorfismos, el cociente $K_1 \times I \rightarrow N$ y el inducido en N $h: N \rightarrow Q$, que es tal que $h|_P = \pi$ y $h(L) \subseteq \pi(\partial P)$. Está claro entonces que $(N, u \circ h, v \circ h; L, u! \circ h|_L, v! \circ h|_L)$ es una $(n+1)$ -cadena seccional en $(f, f_0; g)$ cuyo borde es $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu)$ en el caso a) para el borde de N , luego $[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] = 0$, o es

$$(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu) - (M, u \circ h|_M, v \circ h|_M; \partial M, u! \circ h|_{\partial M}, v! \circ h|_{\partial M})$$

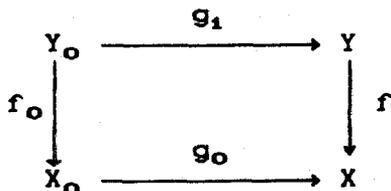
y además M tiene una triangulación K_2 con un vértice menos que K_1 . $h|_M: K_2 \rightarrow K_0$ es simplicial y se tiene la factorización canónica



Razonando análogamente a partir de $K_2 \rightarrow K_0$ y siguiendo así varias veces, llegamos al fin a un n -ciclo $(P', \sigma', \gamma'; \partial P', \nu', \mu')$ que verifica el enunciado de la proposición o a que $[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] = 0$. Este último resultado siempre se obtiene con el procedimiento descrito si se parte de que $\dim(Q) < \dim(P)$, pues no hay ninguna p.l.-aplicación epiyectiva $P' \rightarrow Q$ si $\dim(Q) < \dim(P')$.

2.10. NOTA. En los espacios metrizables, en especial en los poliedros, las dimensiones Ind y dim coinciden (ver [24]).

2.11. COROLARIO. Sea X un espacio T_4 de dimensión inductiva larga $\text{Ind } X = n$ o de dimensión por recubrimientos $\text{dim } X = n$. Sea $(f, f_0; g_0)$ el objeto



Entonces $SQ_p(f, f_0; g_0)_e = 0$ para todo $p > n$.

Demostración: Si $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu)$ es un p -ciclo en $(f, f_0; g_0)$, $p > n$, entonces dimensión de $P >$ dimensión de X y por tanto, cualquier descomposición canónica de dicho ciclo tiene que hacerse a través de un poliedro Q de dimensión menor que la de P . Según la proposición anterior, $[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] = 0$.

En la definición de los n -ciclos $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu)$ en un objeto $(f, f_0; g) \in \mathcal{D}$ se han utilizado pseudovariedades P consideradas en sentido amplio, o sea, sin que se les suponga una triangulación fuertemente conexa (que es una triangulación K tal que para dos n -simplices t_1, t_2 de K cualesquiera existe una sucesión finita de n -simplices de K

$$t'_1, t'_2, \dots, t'_s \quad (1)$$

con $t'_1 = t_1$, $t'_s = t_2$ y $t'_j \cap t'_{j-1}$ es $(n-1)$ -cara de t'_j y t'_{j-1} para $j=2, \dots, s$). Sin embargo, probaremos a continuación que en cada clase de $S\Omega_n(f, f_0; g)_s$, hay ciclos tales que cada componente conexa de P tiene una triangulación con la propiedad citada.

2.12. PROPOSICION: Supongamos que P tiene una triangulación K con dos componentes fuertemente conexas, i. e. $K = K_1 \cup K_2$, donde cada K_i ($i=1, 2$) es fuertemente conexo y ningún n -simplex t_1 de K_1 puede ser conectado con algún n -simplex t_2 de K_2 por una sucesión del tipo (1). Entonces $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu)$ es pseudobordante a

$$(|K_1|, \sigma_1, \gamma_1; \partial |K_1|, \nu_1, \mu_1) + (|K_2|, \sigma_2, \gamma_2; \partial |K_2|, \nu_2, \mu_2),$$

donde las nuevas funciones son las restricciones respectivas.

Demostración: $\dim K_1 \cap K_2 \leq n-2$ de modo trivial y se cumple también de

modo trivial que $|K_1|$ y $|K_2|$ son pseudovarietades con borde de modo que $\partial P = \partial|K_1| \cup \partial|K_2|$, por lo cual $(|K_1|, \sigma_1, \gamma_1; \partial|K_1|, \nu_1, \mu_1)$ y $(|K_2|, \sigma_2, \gamma_2; \partial|K_2|, \nu_2, \mu_2)$ son n-ciclos en $(f, f_0; g)$. Por pegamiento se obtienen la $(n+1)$ - pseudovarietad

$$N = \begin{array}{c} |K_1| \times I \cup P \times I \cup |K_2| \times I \\ |K_1| \times 1 \quad |K_2| \times 1 \end{array}$$

la n-pseudovarietad

$$L = \begin{array}{c} \partial|K_1| \times I \cup \partial P \times I \cup \partial|K_2| \times I \\ \partial|K_1| \times 1 \quad \partial|K_2| \times 1 \end{array}$$

y las funciones inducidas

$$\begin{aligned} g_1 &= (\sigma_1 \circ pr_1) \cup (\sigma \circ pr_1) \cup (\sigma_2 \circ pr_1), & g_2 &= (\gamma_1 \circ pr_1) \cup (\gamma \circ pr_1) \cup (\gamma_2 \circ pr_1), \\ g_3 &= (\nu_1 \circ pr_1) \cup (\nu \circ pr_1) \cup (\nu_2 \circ pr_1), & g_4 &= (\mu_1 \circ pr_1) \cup (\mu \circ pr_1) \cup (\mu_2 \circ pr_1). \end{aligned}$$

La cadena $(N, g_1, g_2; L, g_3, g_4)$ relaciona $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu)$ con

$$(|K_1|, \sigma_1, \gamma_1; \partial|K_1|, \nu_1, \mu_1) + (|K_2|, \sigma_2, \gamma_2; \partial|K_2|, \nu_2, \mu_2)$$

2.13. PROPOSICION: Si $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu)$ es un n-ciclo seccional en $(f, f_0; g)$ y K es una triangulación de P que tiene s componentes fuertemente conexas $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_s$, entonces $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu)$ es pseudobordante a

$$(|K_1|, \sigma_1, \gamma_1; \partial|K_1|, \nu_1, \mu_1) + \dots + (|K_s|, \sigma_s, \gamma_s; \partial|K_s|, \nu_s, \mu_s),$$

donde las nuevas funciones son las inducidas respectivas.

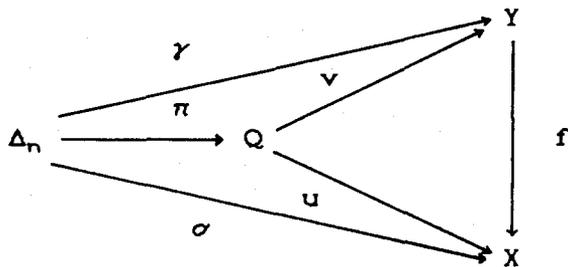
Demostración: Se deduce de modo inmediato de la proposición anterior.

CAPITULO III

RELACION CON LOS COMPLEJOS DE CADENAS.

Se prueba que la teoría de pseudobordismo seccional es naturalmente isomorfa con la homología de un adecuado complejo de cadenas.

3.1.DEFINICION. Sea Δ_n el n -símplice canónico. Sea $f:Y \rightarrow X$ una aplicación continua. Llamamos n -símplice seccional casi-inyectivo en f , a todo $(\Delta_n, \sigma, \gamma; \mathcal{P})$ tal que $\sigma: \Delta_n \rightarrow X$, $\sigma: \Delta_n \rightarrow Y$ son funciones continuas tales que $\sigma = f \circ \gamma$ y $\mathcal{P} = \{P_i\}$ (llamada descomposición canónica) es una familia finita de subpoliedros compactos de Δ_n de dimensión n tal que $\Delta_n = \bigcup_i P_i$ e $\text{int } P_i \cap \text{int } P_j = \emptyset$ si $i \neq j$, de modo que existen $\pi: \Delta_n \rightarrow Q$ p.l.-epimorfismo sobre un poliedro Q , $u: Q \rightarrow X$ y $v: Q \rightarrow Y$ funciones continuas tales que conmuta el diagrama



y $u|_{\pi(P_i)}$ es inyectiva para cada P_i^1 .

3.2. Designamos por $CI_n(f)_s$ el grupo libre generado por los n -simplices seccionales casi-inyectivos de f . Las aplicaciones cara de Δ_n , $F^{(k)}: \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$, permiten definir un homomorfismo $\partial_n: CI_n(f)_s \rightarrow CI_{n-1}(f)_s$ por su efecto sobre los generadores :

$$\partial_n(\Delta_n, \sigma, \gamma; \mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k (\Delta_{n-1}, \sigma \circ F^{(k)}, \gamma \circ F^{(k)}; \mathcal{P}_k)$$

donde $\mathcal{P}_k = \langle P_i \cap F^{(k)} \Delta_{n-1} \mid P_i \in \mathcal{P} \rangle$. Es fácil ver que $\partial \partial = 0$. Los grupos de homología seccional casi-inyectiva de f son los grupos de homología del complejo $\langle CI_n(f)_s, \partial_n \rangle$,

$$HCI_n(f)_s = \text{Ker } \partial_n / I_m \partial_{n+1} .$$

Sea $(f, f_0, g) \in \mathcal{D}$, $g = (g_0, g_1)$. Si $(\Delta_n, \sigma, \gamma)$ es un n -simplex seccional casi-inyectivo en f_0 , entonces $(\Delta_n, g_0 \sigma, g_1 \gamma)$ es n -simplex seccional en f , ya que $g_0 \sigma$ es inyectiva y $f(g_1 \gamma) = g_0 f_0 \gamma = g_0 \sigma$. Por tanto $g = (g_0, g_1)$ induce un morfismo de cadenas $g.: CI.(f_0)_s \rightarrow CI.(f)_s$. Consideremos el "mapping cone" C_g de $g.$, definimos el n -ésimo grupo de homología seccional casi-inyectiva de $(f, f_0; g)$ por

$$HCI_n(f, f_0; g) = H_n(C_g.)$$

¹Para simplificar, omitiremos la \mathcal{P} en la notación de éstos simplices si no hay confusión posible.

3.3 Los n-simplices seccionales casi-inyectivos pueden ser pegados entre sí, de forma que de un n-ciclo seccional algebraico se obtiene un n-ciclo seccional geométrico y a ciclos homólogos corresponden ciclos de pseudobordismo relacionados entre sí.

Sea $w = (\sum_i \delta_i(\Delta_n, \sigma_i, \gamma_i), \sum_j \delta'_j(\Delta_{n-1}, \nu_j, \mu_j))$, con $\delta'_i, \delta'_j = +1$ ó -1 , un n-ciclo seccional casi-inyectivo en $(f, f_0; g)$, $g = (g_0, g_1)$.

Consideremos la suma

$$\sum_{i,k} (-1)^k \delta_i(\Delta_{n-1}, \sigma_i \circ F^{(k)}, \gamma_i \circ F^{(k)}) \quad (1)$$

que representa $\partial(\sum_i \delta_i(\Delta_n, \sigma_i, \gamma_i))$, siendo $F^{(k)}: \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$ la cara k-ésima de Δ_n . Sea R un conjunto de sumandos de (1) que cumpla: 1º) el número de veces que aparece en R un (n-1)-simplex casi-inyectivo con el signo +, es igual al número de veces que aparece en R con el signo menos; 2º) todo subconjunto de sumandos de (1) que cumpla la anterior condición tiene cardinal menor o igual que el cardinal de R. Sea R^+ el subconjunto de R formado por los sumandos de signo más y R^- el formado con los que tienen signo menos. Por definición de R, R^+ y R^- tienen el mismo número de elementos. Consideremos el conjunto S de sumandos de (1) que no están en R y, tomándolos con el signo con que aparecen en (1), formamos la suma $\Sigma(S)$, que teniendo en cuenta la igualdad

$$\sum_j \delta'_j(\Delta_{n-1}, g_0 \nu_j, g_1 \mu_j) = -\sum_{i,k} (-1)^k \delta_i(\Delta_{n-1}, \sigma_i \circ F^{(k)}, \gamma_i \circ F^{(k)}),$$

y la definición de R, podemos representar en la forma

$$\Sigma(S) = -\sum_j \delta'_j(\Delta_{n-1}, \sigma'_j, \gamma'_j) \quad (\sigma'_j = g_0 \nu_j, \gamma'_j = g_1 \mu_j) \quad (2)$$

Consideremos ordenaciones arbitrarias sobre R^+ y R^- :

$$R^+ = \langle \tau_1, \dots, \tau_r \rangle, \quad R^- = \langle \tau'_1, \dots, \tau'_r \rangle.$$

Definimos por recurrencia una función biyectiva $\Phi: R^+ \rightarrow R^-$, que llamamos función de apareamiento, de la siguiente forma:

1) $\Phi(\tau_1) = \tau'_h$ si $\tau_1 = \tau'_h$ y $\tau_1 \neq \tau'_l$ para todo $l < h$.

2) Supongamos que hemos definido la imagen de $\langle \tau_1, \dots, \tau_l \rangle$. Entonces $\Phi(\tau_{l+1}) = \tau'_i$ si $\tau_{l+1} = \tau'_i$, τ'_i no pertenece a $\Phi\langle \tau_1, \dots, \tau_l \rangle$ y para todo $j < i$, si τ'_j no pertenece a $\Phi\langle \tau_1, \dots, \tau_l \rangle$, entonces $\tau_{l+1} \neq \tau'_j$.

Consideremos un conjunto $\langle \Delta_n^i \rangle$ de n -símplices geométricos canónicos en correspondencia biyectiva con los símplices seccionales casi-inyectivos de $\Sigma_i \delta_i(\Delta_n, \sigma_i, \gamma_i)$, con orientación positiva o negativa según que el correspondiente $(\Delta_n, \sigma_i, \gamma_i)$ tenga signo positivo ó negativo. Sea K^i el complejo simplicial asociado a Δ_n^i y sea ∂K^i el subcomplejo asociado al borde $\partial \Delta_n^i$, considerado con la orientación inducida por la de Δ_n^i . Observemos que el conjunto M de los $(n-1)$ -símplices geométricos del complejo simplicial $\cup_i \partial K^i$, está en correspondencia biyectiva con la unión disjunta $R^+ \cup R^- \cup S$. Emparejamos cada $(n-1)$ -símplice de M que corresponde a un elemento de R^+ con el $(n-1)$ -símplice correspondiente al elemento de R^- imagen por Φ del anterior. Como cada símplice de M es cara de algún n -símplice canónico, podemos identificarlo canónicamente con Δ_{n-1} , deduciéndose de esto que, entre cada dos símplices de M que hayan sido emparejados entre sí, podemos considerar un p.l.-homeomorfismo canónico. Entonces, el pegamiento de los complejos K^i por los anteriores p.l.-homeomorfismos, define un poliedro $P^{\Phi v}$ que es una n -seudovariedad con borde orientada, ya que los pegamientos son compatibles con las orientaciones.

Por otra parte, está claro que las funciones continuas $\sigma_i: \Delta_n^i \rightarrow X$, definen funciones continuas

$$\sigma^{\Phi v}: P^{\Phi v} \rightarrow X, \quad \gamma^{\Phi v}: P^{\Phi v} \rightarrow Y$$

tales que $f \circ \gamma^{\Phi v} = \sigma^{\Phi v}$.

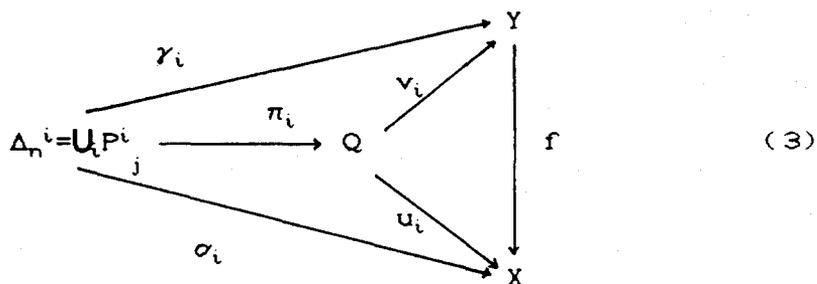
También se ve que $\partial P^{\Phi v}$ tiene una triangulación canónica,

cuyos $(n-1)$ -símplices están en correspondencia biyectiva con el conjunto S , por lo cual las funciones $\gamma_j: \Delta_{n-1} \rightarrow X_0$, $\mu_j: \Delta_{n-1} \rightarrow Y_0$ inducen funciones continuas

$$\nu^{\Phi_v}: \partial P^{\Phi_v} \longrightarrow X_0, \quad \mu^{\Phi_v}: \partial P^{\Phi_v} \longrightarrow Y_0.$$

tales que $f_0 \circ \mu^{\Phi_v} = \nu^{\Phi_v}$.

Para cada $(\Delta_n^i, \sigma_i, \gamma_i)$ se tiene un diagrama conmutativo



donde π_i es p.l.-epimorfismo, u_i, v_i continuas y para cada P_j^i , $u_i|_{\pi_i(P_j^i)}$ es inyectiva. Por esto, al conjunto $\{\Delta_n^i\}$ antes definido, podemos asociar un conjunto $\{L^i\}$ de complejos simpliciales tales que para cada Q_i , hay un complejo L^i que lo triangula, si $(\Delta_n^i, \sigma_i, \gamma_i) = (\Delta_n^j, \sigma_j, \gamma_j)$ entonces $L^i = L^j$, para ciertas subdivisiones $(K^i)'$ todas las aplicaciones $\pi_i: (K^i)' \rightarrow L^i$ son simpliciales y tales que para cada n -símplice $t \in (K^i)'$, $u_i|_{\pi_i(t)}$ es inyectiva.

Puesto que estamos considerando un sistema finito de n -símplices Δ_n^i , podemos suponer los $(K^i)'$ compatibles con los pegamientos antes realizados sobre los complejos K^i , de forma que si dos $(n-1)$ -símplices $t \in K^i$ y $t' \in K^j$ se han identificado, los complejos inducidos sobre ellos por dichas subdivisiones son isomorfos. Está claro entonces que, si identificamos los complejos $(K^i)'$ módulo estos isomorfismos, obtenemos otra vez el poliedro

P^{Φ_v} . Sea ahora N el conjunto de simplices de $U_i L^i$ que son imagen por algún π_i de un $(n-1)$ -simplex de $U_i(K^i)$, e identifiquemos dos simplices de N si ha habido alguna identificación entre los correspondientes $(n-1)$ -simplices de $U_i(K^i)$ para formar P^{Φ_v} . En estas condiciones, está claro que de $U_i L^i$ se obtiene un poliedro Q^{Φ_v} y que las aplicaciones π_i, u_i, v_i son compatibles con las identificaciones realizadas, por lo cual dan lugar a un p.l.-epimorfismo

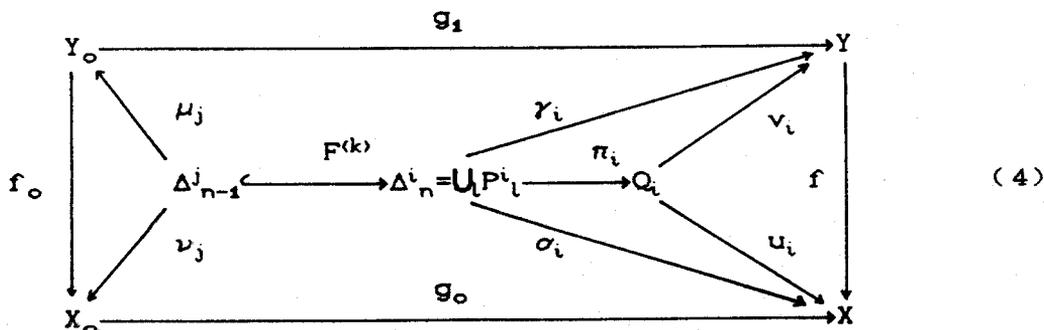
$$\pi^{\Phi_v} : P^{\Phi_v} \longrightarrow Q^{\Phi_v}$$

que es simplicial con triangulaciones de P^{Φ_v} y Q^{Φ_v} , obtenidas de $U_i(K^i)$ y $U_i L^i$ respectivamente, y también dan lugar a las aplicaciones continuas

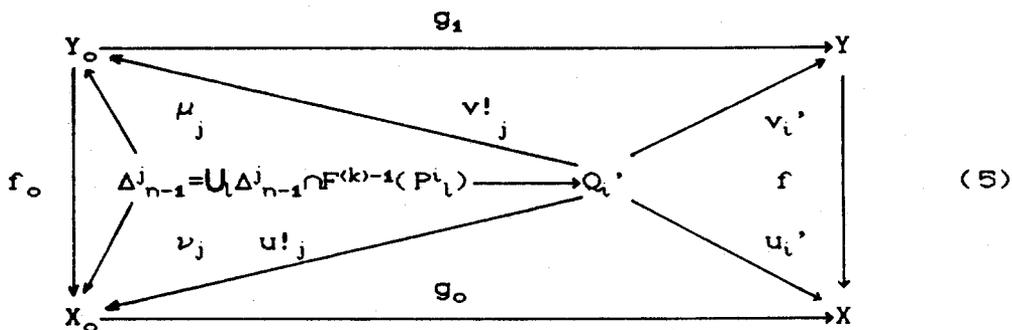
$$u^{\Phi_v} : Q^{\Phi_v} \longrightarrow X \quad , \quad v^{\Phi_v} : Q^{\Phi_v} \longrightarrow Y$$

tales que $u^{\Phi_v} = f \cdot v^{\Phi_v}$ y para cada n -simplex t de la triangulación de P^{Φ_v} , $u^{\Phi_v}|_{\pi^{\Phi_v}(t)}$ es inyectiva.

Ya que $\sum_j \delta'_j (\Delta_{n-1}^j, g_0 \nu_j, g_1 \mu_j) = -\partial \sum_i \delta_i (\Delta_n^i, \sigma_i, \gamma_i)$, para cada $(\Delta_n^j, \nu_j, \mu_j)$ hay un $(\Delta_n^i, \sigma_i, \gamma_i)$ tal que, el diagrama (3) se completa dando el siguiente diagrama conmutativo



donde $F^{(k)}$ es una aplicación cara adecuada. De él obtenemos el diagrama conmutativo

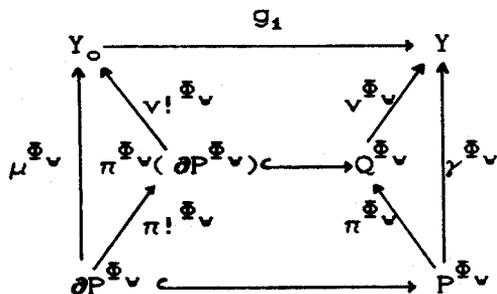
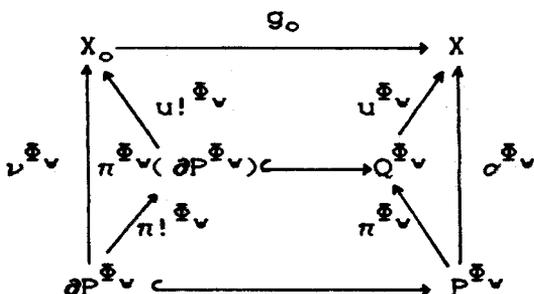


en el cual $\pi'_i = \pi_i \circ F^{(k)}$ es p.l., $Q'_i = \text{Im } \pi'_i$, u'_i, v'_i son las restricciones de u_i, v_i respectivamente y $u!_j, v!_j$ son nuevas funciones continuas definidas por $u!_j(x) = \nu_j(\pi'^{-1}_1(x))$, $v!_j(x) = \mu_j(\pi'^{-1}_1(x))$, ya que el diagrama (4) y la inyectividad de $u_i|_{\pi_i(P^i_l)}$ y $v_i|_{\pi_i(P^i_l)}$ implican que las imágenes del conjunto $\pi'^{-1}_1(x)$ por ν_j y μ_j se reducen en ambos casos a un punto.

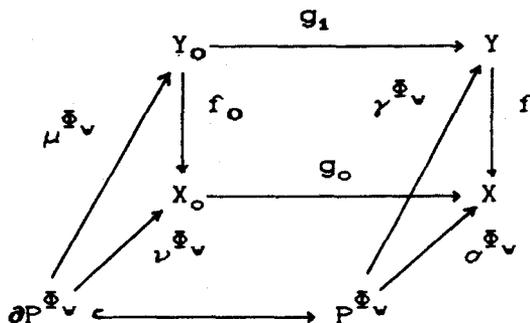
Dichas funciones $\pi'_j, u!_j, v!_j$ son compatibles con las identificaciones realizadas sobre $U_i(K^i)$ para formar P^{Φ_v} , por lo cual, las aplicaciones $\nu_j, \mu_j, u!_j, v!_j$ definen respectivamente aplicaciones continuas

$$\begin{aligned} \nu^{\Phi_v} : \partial P^{\Phi_v} &\longrightarrow X_0 & \mu^{\Phi_v} : \partial P^{\Phi_v} &\longrightarrow Y_0 \\ u!^{\Phi_v} : \pi(\partial P^{\Phi_v}) &\longrightarrow X_0 & v!^{\Phi_v} : \pi(\partial P^{\Phi_v}) &\longrightarrow Y_0 \end{aligned}$$

tales que los diagramas siguientes son conmutativos:



(6)



por lo cual

$$C^{\Phi}(w) = (P^{\Phi_\nu}, \sigma^{\Phi_\nu}, \gamma^{\Phi_\nu}; \partial P^{\Phi_\nu}, \nu^{\Phi_\nu}, \mu^{\Phi_\nu})$$

es un n -ciclo seccional en $(f, f_0; g)$.

3.4. PROPOSICION. La clase $[C^{\Phi}(w)] \in \Omega_n(f, f_0; g)$ no depende de la función Φ de apareamiento ni del conjunto R utilizado en su construcción.

Demostración: Sea $w = (\sum_i \delta_i(\Delta_n, \sigma_i, \gamma_i), \sum_j \delta'_j(\Delta_{n-1}, \nu_j, \mu_j))$. Supongamos que para un R dado, se han formado dos funciones de apareamiento Φ y Ψ distintas. Mostremos que los n -ciclos seccionales $C^{\Phi}(w)$ y $C^{\Psi}(w)$ son pseudobordantes en $(f, f_0; g)$.

$P^{\Psi_\nu} \times I$ es una $(n+1)$ -seudovariedad orientada con borde

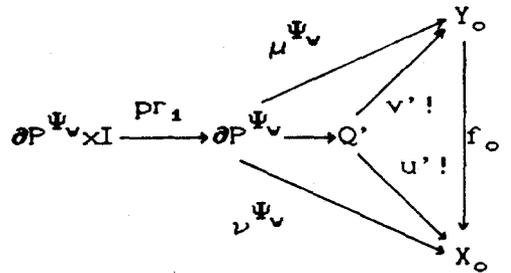
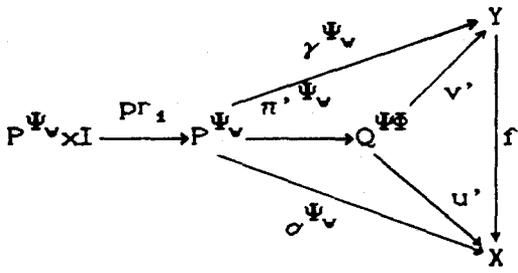
$$P^{\Psi_\nu} \times 0 \cup (-P^{\Psi_\nu}) \times 1 \cup \partial P^{\Psi_\nu} \times I.$$

Si identificamos los $(n-1)$ -simplices de $P^{\Psi_\nu} \times 1$ según indica la función Φ , obtenemos una $(n+1)$ -seudovariedad H^{Ψ} con frontera

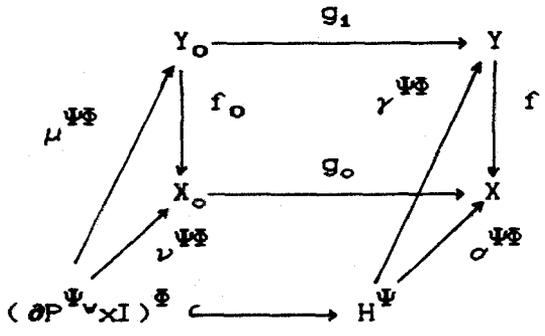
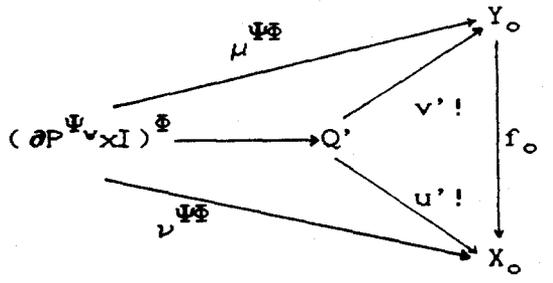
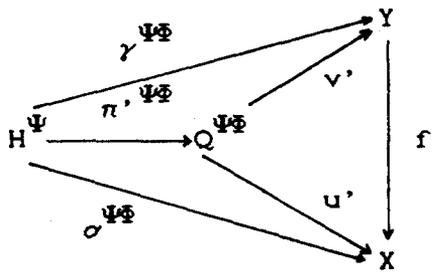
$$P^{\Psi_\nu} \times 0 \cup (-P^{\Psi_\nu}) \times 1 \cup (\partial P^{\Psi_\nu} \times I)^{\Phi},$$

donde $(-P^{\Psi_\nu}) \times 1$ y $(\partial P^{\Psi_\nu} \times I)^{\Phi}$ representan, respectivamente, los espacios cocientes de $(-P^{\Psi_\nu}) \times 1$ y $\partial P^{\Psi_\nu} \times 1$ módulo la anterior identificación. También dicha identificación induce sobre el

poliedro Q^Ψ un poliedro cociente $Q^{\Psi\Phi}$ tal que se tienen los diagramas conmutativos



donde $Q' = \pi^{\Psi\nu}(\partial P^{\Psi\nu})$ y $u', v', u'!, v'!$ están inducidas por $u^{\Psi\nu}, v^{\Psi\nu}, u!^{\Psi\nu}$ y $v!^{\Psi\nu}$ respectivamente. De aquí se deduce que, al formar H^Ψ , las aplicaciones de los anteriores diagramas definen por cociente las aplicaciones de los siguientes diagramas conmutativos



También, la triangulación canónica de P^{Ψ} induce una descomposición canónica de H^{Ψ} en subpoliedros H^{Ψ}_l tales que $u' |_{\pi^{-1}\Psi(H^{\Psi}_l)}$ y $u'! |_{\pi^{-1}\Psi(H^{\Psi}_l) \cap Q'}$ son inyectivas.

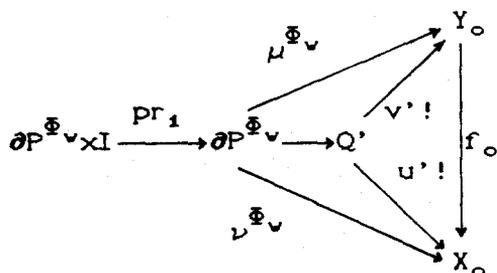
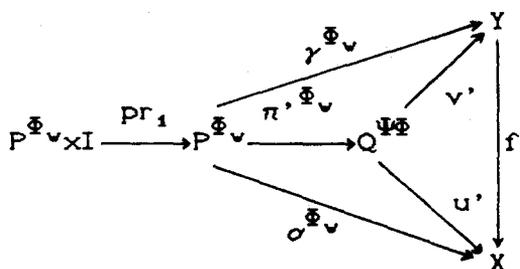
Por otro lado, P^{Φ} es $(n+1)$ -seudovariiedad orientada con borde

$$P^{\Phi} \times 0 \cup (-P^{\Phi}) \times 1 \cup \partial P^{\Phi} \times I.$$

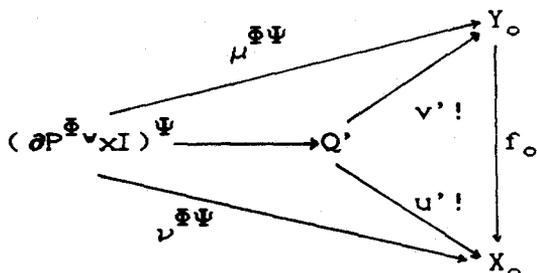
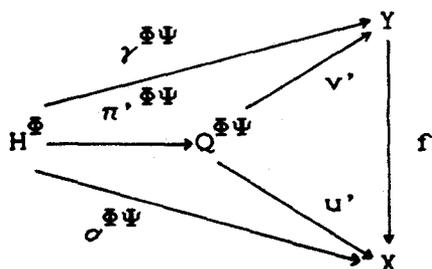
Si identificamos los $(n-1)$ -símplices de $P^{\Phi} \times 0$ según indica la función Ψ , obtenemos una $(n+1)$ -seudovariiedad H^{Φ} con frontera

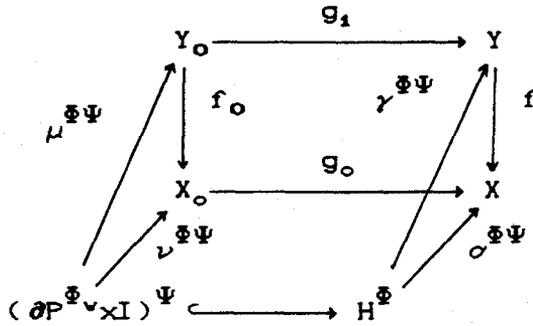
$$P^{\Phi\Psi} \times 0 \cup (-P^{\Phi}) \times 1 \cup (\partial P^{\Phi} \times I)^{\Psi}$$

donde $P^{\Phi\Psi} \times 0$ y $(P^{\Phi} \times I)^{\Psi}$ representan respectivamente los cocientes de $P^{\Phi} \times 0$ y $\partial P^{\Phi} \times I$, módulo la anterior identificación. Es obvio que $P^{\Phi\Psi} = P^{\Psi\Phi}$ y que se tienen los diagramas conmutativos



donde π^{Φ} es p.l.epimorfismo y $\partial P^{\Phi} \rightarrow Q'$ es la restricción de π^{Φ} . Al formar H^{Φ} , se obtienen también las aplicaciones que hacen conmutativos los siguientes diagramas





Identificando $P^{\Phi \Psi} \times 0$ con $P^{\Psi \Phi} \times 1$, obtenemos la $(n+1)$ -cadena

$$(H^{\Psi} \cup H^{\Phi}, \sigma^{\Psi \Phi} \cup \sigma^{\Phi \Psi}, \gamma^{\Psi \Phi} \cup \gamma^{\Phi \Psi}; (\partial P^{\Psi \nu} \times I)^{\Phi} \cup (\partial P^{\Phi \nu} \times I)^{\Psi}, \nu^{\Psi \Phi} \cup \nu^{\Phi \Psi}, \mu^{\Psi \Phi} \cup \mu^{\Phi \Psi})$$

cuyo borde es $C^{\Psi}(w) - C^{\Phi}(w)$.

Por último, observemos que entre dos conjuntos R_1, R_2 hay siempre una correspondencia biyectiva compatible con las descomposiciones $R_1 = R_1^+ U R_1^-$, $R_2 = R_2^+ U R_2^-$, por lo cual, a una función de apareamiento Φ de R_1 corresponde una función de apareamiento Ψ en R_2 , de forma tal que $C^{\Phi}(w) = C^{\Psi}(w)$.

Así pues, a todo n -ciclo seccional casi-inyectivo en $(f, f_0; g)$ le hemos asociado unívocamente la clase

$$[C^{\Phi}(w)] = [P^{\Phi \nu}, \sigma^{\Phi \nu}, \gamma^{\Phi \nu}; \partial P^{\Phi \nu}, \nu^{\Phi \nu}, \mu^{\Phi \nu}] \in \Omega_n(f, f_0; g)_\Phi$$

3.5. PROPOSICION. Si $[w'] = [w'']$, entonces $[C(w')] = [C(w'')]$.

Demostración: Hay una $(n+1)$ -cadena seccional casi-inyectiva c tal que $\partial c = w' - w''$ y w', w'' y c tienen la presentación siguiente

$$w' = (\sum \delta'_i (\Delta_n, \sigma'_i, \gamma'_i), \sum \beta'_j (\Delta_{n-1}, \nu'_j, \mu'_j)),$$

$$w'' = (\sum \delta''_i (\Delta_n, \sigma''_i, \gamma''_i), \sum \beta''_j (\Delta_{n-1}, \nu''_j, \mu''_j)) \tag{1}$$

$$c = (\sum \delta_i (\Delta_{n+1}, \sigma_i, \gamma_i), \sum \beta_j (\Delta_n, \nu_j, \mu_j)), \tag{2}$$

donde, $\delta'_i, \beta'_j, \delta''_i, \beta''_j, \delta_i, \beta_j = +1$ ó -1 . Por definición del

borde en el "mapping cone" de los complejos, la igualdad $\partial c = w' - w''$ es equivalente a las igualdades

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_k (-1)^k \delta_i(\Delta_n, \sigma_i F^{(k)}, \gamma_i F^{(k)}) = \\ = -\sum \beta_j(\Delta_n, g_0 \nu_j, g_1 \mu_j) + \sum \delta'_i(\Delta_n, \sigma'_i, \gamma'_i) - \sum \delta''_i(\Delta_n, \sigma''_i, \gamma''_i) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_k (-1)^k \beta_j(\Delta_{n-1}, \nu_j F^{(k)}, \mu_j F^{(k)}) = \\ = \sum \beta'_j(\Delta_{n-1}, \nu'_j, \mu'_j) - \sum \beta''_j(\Delta_{n-1}, \nu''_j, \mu''_j) \end{aligned} \quad (4)$$

donde $F^{(k)}$ designa la aplicación cara k -ésima $\Delta_p \rightarrow \Delta_{p+1}$ ($p = n-1, n$).

Suponemos que (1) y (2) son tales que las expresiones de los miembros derechos de las igualdades (3) y (4) ocurren en el miembro izquierdo de su respectiva igualdad.

Sea $\langle \Delta^i_{n+1} \rangle$ un conjunto de $(n+1)$ -símplices canónicos en correspondencia biyectiva con los sumandos $\delta_i(\Delta_{n+1} \sigma_i, \gamma_i)$ que aparecen en la expresión de c . Démosle a cada Δ^i_{n+1} la orientación positiva o negativa según que $\delta_i = 1$ ó $\delta_i = -1$ respectivamente.

El conjunto $\Sigma \langle \Delta^i_{n+1} \rangle$, unión disjunta de todas las n -caras de los Δ^i_{n+1} , está en correspondencia biyectiva, inducida por la anterior, con los sumandos $(-1)^k \delta_i(\Delta_n \sigma_i F^{(k)}, \gamma_i F^{(k)})$ de (3). Demos a cada n -cara la orientación del mismo signo que el sumando correspondiente. La igualdad (3) determina en $\Sigma \langle \Delta^i_{n+1} \rangle$ una partición en cuatro clases

$$\Sigma \langle \Delta^i_{n+1} \rangle = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup R,$$

formadas respectivamente por los n -símplices que corresponden a los términos del primer, segundo, tercer sumatorio del segundo miembro de (3) y a los sumandos del primer miembro de (3) que no están en el segundo miembro.

Sean I_1, I_2, I_3 los conjuntos de todas las $(n-1)$ -caras de los n -símplices de S_1, S_2, S_3 respectivamente, tomadas con las orientaciones inducidas. Obsérvese que la correspondencia anterior

induce una correspondencia biyectiva entre T_1 y los sumandos del primer miembro de (4), asociando simplices orientados negativamente con sumandos de signo positivo y simplices orientados positivamente con sumandos positivos. También establece correspondencias biyectivas entre T_2 y los sumandos de

$$\partial(\Sigma \delta'_i(\Delta_n, \sigma'_i, \gamma'_i)) = -\Sigma_i \Sigma_k (-1)^k \delta''_i(\Delta_{n-1}, \sigma'_i F^{(k)}, \gamma'_i F^{(k)}) \quad (5)$$

y entre T_3 y los sumandos de

$$\partial(\Sigma \delta''_i(\Delta_n, \sigma''_i, \gamma''_i)) = \Sigma_i \Sigma_k (-1)^k \delta''_i(\Delta_{n-1}, \sigma''_i F^{(k)}, \gamma''_i F^{(k)}) \quad (6)$$

con la misma correlación entre orientaciones y signos.

Se pueden hacer particiones

$$T_1 = B_1 \cup R_1, \quad T_2 = B_2 \cup R_2, \quad T_3 = B_3 \cup R_3,$$

donde B_1 , B_2 y B_3 son los simplices correspondientes a los términos del segundo miembro de (4), a los sumandos de $-\Sigma_i \beta'_j(\Delta_{n-1}, g_0 \nu'_j, g_1 \mu'_j)$, a los sumandos de $\Sigma \beta''_j(\Delta_{n-1}, g_0 \nu''_j, g_1 \mu''_j)$ respectivamente (suponemos que estos sumandos ocurren respectivamente en (5) y (6), lo cual sólo depende de elegir expresiones apropiadas en (1)).

Formamos, por el método de (3.3), tres funciones de apareamiento φ_1 en R_1 , φ_2 en R_2 y φ_3 en R_3 . Luego, extendemos $\varphi_1 \cup \varphi_2 \cup \varphi_3$ a una función de apareamiento φ en $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ emparejando el simple de B_1 correspondiente a $\beta'_j(\Delta_{n-1}, \nu'_j, \mu'_j)$ con el simple de B_2 correspondiente a $-\beta'_j(\Delta_{n-1}, g_0 \nu'_j, g_1 \mu'_j)$ y el correspondiente a $-\beta''_j(\Delta_{n-1}, \nu''_j, \mu''_j)$ con el simple de B_3 correspondiente a $\beta''_j(\Delta_{n-1}, g_0 \nu''_j, g_1 \mu''_j)$.

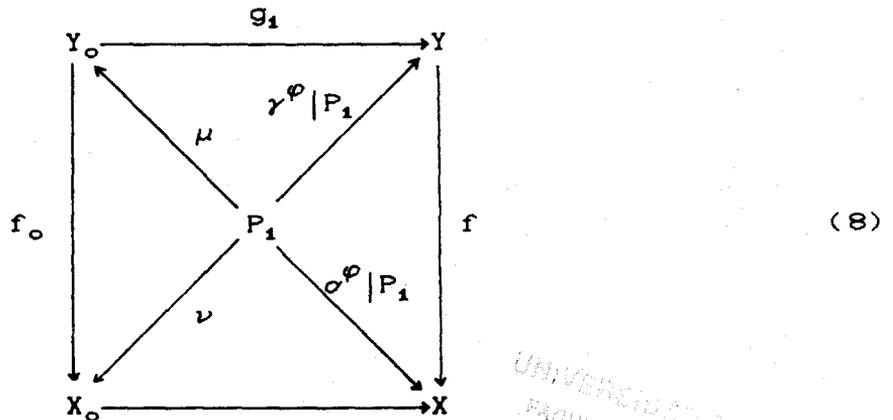
Con la función de apareamiento φ en $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ podemos formar un n-ciclo seccional en f

$$C^\varphi = (P^\varphi, \sigma^\varphi, \gamma^\varphi)$$

que representa el n-ciclo seccional casi-inyectivo

$$-\sum \beta_j (\Delta_n, g_0 \nu_j, g_1 \mu_j) + \sum \delta'_i (\Delta_n, \sigma'_i, \gamma'_i) - \sum \delta''_i (\Delta_n, \sigma''_i, \gamma''_i). \quad (7)$$

Para formar P^φ , los simplices de R_1 se identifican entre sí según φ_1 , los de R_2 según φ_2 y los de R_3 según φ_3 . Así se forman tres pseudovariedades P_1, P_2, P_3 con borde tales que $\partial P_1 = -\partial P_2 \cup \partial P_3$ y P^φ es el pegamiento $P^\varphi = P_1 \cup (P_2 \cup P_3)$. Además, $\sigma^\varphi|_{P_1}$ y $\gamma^\varphi|_{P_1}$ están inducidas por las aplicaciones $g_0 \nu_j$ y las $g_1 \mu_j$, $\sigma^\varphi|_{P_2}$ y $\gamma^\varphi|_{P_2}$ por las σ'_i y las γ'_i , $\sigma^\varphi|_{P_3}$ y $\gamma^\varphi|_{P_3}$ por las σ''_i y las γ''_i , respectivamente. Teniendo en cuenta esto, vemos que los conjuntos de aplicaciones $\langle \nu'_j \rangle, \langle \mu'_j \rangle$ inducen aplicaciones ν, μ tales que



es conmutativo y se cumple que

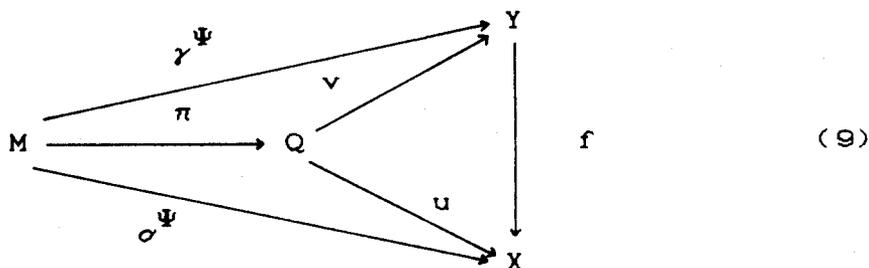
$$C^{\varphi_2}(w') = (P_2, \sigma^\varphi|_{P_2}, \gamma^\varphi|_{P_2}; \partial P_2, \nu|_{\partial P_2}, \mu|_{\partial P_2})$$

$$C^{\varphi_3}(w'') = (P_3, \sigma^\varphi|_{P_3}, \gamma^\varphi|_{P_3}; \partial P_3, \nu|_{\partial P_3}, \mu|_{\partial P_3})$$

son n -ciclos seccionales asociados a w' y w'' respectivamente

Consideremos ahora los conjuntos $\langle \Delta^i_{n+1} \rangle$ y $R \subseteq \sum \langle \Delta^i_{n+1} \rangle$ antes mencionados. La definición de R garantiza que se puede definir en él una función de apareamiento Ψ . Si identificamos los simplices de R según indica Ψ , obtenemos de $\langle \Delta^i_{n+1} \rangle$ una $(n+1)$ -seudovariedad orientada M , sobre la cual las aplicaciones σ_i por un lado y las γ_i por otro, inducen aplicaciones continuas $\sigma^\Psi: M \rightarrow X, \gamma^\Psi: M \rightarrow Y$,

tales que existe un diagrama conmutativo de la forma



donde Q es un poliedro, π es p.l.-epimorfismo, u y v son continuas tales que, para cada $(n+1)$ -símplice t de la triangulación de M inducida por $\langle \Delta_{n+1}^i \rangle$, $u|_{\pi(t)}$ es inyectiva.

∂M puede ser visto como obtenido a partir de $S_1US_2US_3$ por una función de apareamiento Ψ' inducida en $T_1UT_2UT_3$ por la formación de M . Entonces

$$C^{\Psi'} = (\partial M, \sigma^{\Psi'} |_{\partial M}, \gamma^{\Psi'} |_{\partial M})$$

es, como C^φ , un n -ciclo seccional en f que representa el n -ciclo seccional casi-inyectivo (7).

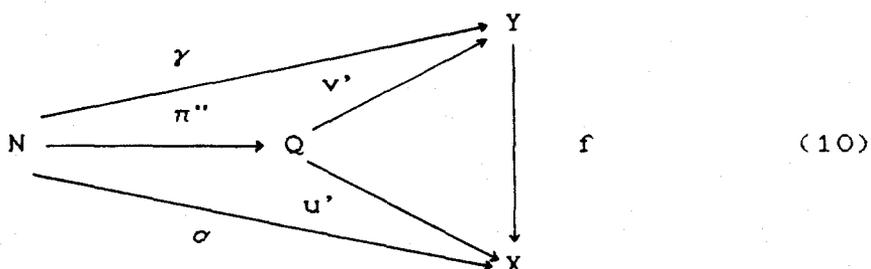
∂M y P tienen triangulaciones canónicas inducidas por el complejo $S_1US_2US_3$ y las funciones de apareamiento Ψ' y φ respectivamente. $\partial M \times I$ y $P \times I$ tienen triangulaciones K_1, K_2 que coinciden con las anteriores en $\partial M \times 0, \partial M \times 1$ y $P \times 0, P \times 1$, respectivamente, sin que tengan nuevos vértices. Si identificamos en $\partial M \times 1$ los n -símplices según la función de apareamiento φ y en $P \times 0$ según Ψ' , obtenemos de $\partial M \times I$ y $P \times I$ espacios cociente $(\partial M \times I)^\varphi$ y $(P \times I)^{\Psi'}$, que son $(n+1)$ -seudovariedades orientadas con la n -cara $(\partial M \times 1)^\varphi = (P \times 0)^{\Psi'}$ común. Las funciones $(\sigma^{\Psi'} |_{\partial M}) \circ pr_1, (\gamma^{\Psi'} |_{\partial M}) \circ pr_1, \sigma^\varphi \circ pr_1, \gamma^\varphi \circ pr_1$ inducen aplicaciones continuas $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, que

cumplen $\alpha_1 = f \circ \beta_1$ y $\alpha_2 = f \circ \beta_2$. Sea H la $(n+1)$ -seudovariedad

$$H = (\partial M \times I)^\varphi \cup_{(\partial M \times I)^\varphi} (P \times I)^\Psi$$

y $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$, $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ las correspondientes aplicaciones inducidas por el pegamiento. Sean $N = M \cup_{\partial M} H$, $\sigma = \sigma^\Psi \cup \alpha$ y $\gamma = \gamma^\Psi \cup \beta$, entonces se tiene

un diagrama conmutativo



que se obtiene de (9) así: Tomamos como Q' el cociente de Q por identificación de las imágenes de cada dos n -ímplices de ∂M que proceden de n -símplices de $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ que estén asociados a n -símplices seccionales casi-inyectivos de (3) iguales entre sí; u' y v' son las aplicaciones cocientes de u y v ; π'' es igual en M al cociente π' de π y en H se define de la siguiente forma. Cada $(n+1)$ -símplice t de $K_1 \times I$ (de $K_2 \times I$) es del tipo ([16], prop. 7)

$$t = ((x_0, 1), \dots, (x_i, 1), (x_i, 0), \dots, (x_n, 0))$$

siendo (x_0, x_1, \dots, x_n) un n -símplice de K_1 (de K_2), que procede de un n -símplice $s = (x'_0, x'_1, \dots, x'_n)$ de $S_1 \cup S_2 \cup S_3$; la realización de K_1 y luego la aplicación π' transforman S en el n -símplice $(y_0, y_1, \dots, y_n) \subseteq Q'$; si para cada t ponemos que $\gamma|_t$ es la aplicación afín $t \rightarrow (y_1, y_1, \dots, y_n)$ que asocia $(x_j, \delta) \rightarrow y_j$ ($\delta = 1, 0$; $j = 0, \dots, n$), entonces las definiciones de Q' , u' y v' garantizan que hay una p.l.-aplicación $r: K_1 \times I \cup K_2 \times I \rightarrow Q'$, tal que $u' \circ r = (\gamma^\Psi|_{\partial M}) \circ pr_1 \cup \sigma^\varphi \circ pr_1$ y

$v \circ r = (\gamma^\psi|_{\partial M}) \circ pr_1 \cup \gamma^\psi \circ pr_2$; $\pi'|_H$ es la aplicación inducida por r sobre H .

Sigue de las construcciones realizadas que

$$(N, \sigma, \gamma; P_1, \nu, \mu)$$

es una $(n+1)$ -cadena seccional en $(f, f_0; g)$ cuyo borde es $C^{\varphi_2}(w'') - C^{\varphi_1}(w')$, por lo cual $[C(w'')] = [C(w')]$, c. q. d.

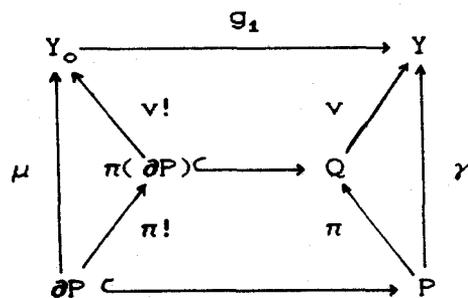
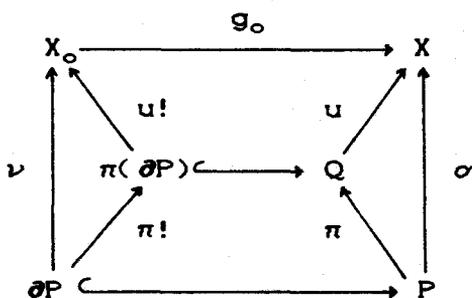
3.6. TEOREMA. La asignación

$$\Psi : HCl_n(f, f_0; g)_s \longrightarrow S\Omega_n(f, f_0; g)_s$$

definida por $\Psi[w] = [C(w)]$ es un isomorfismo functorial.

Demostración: Según las proposiciones (3.4) y (3.5), dicha asignación está bien definida. Por (3.4), escogiendo una ordenación conveniente de los símlices seccionales casi-inyectivos de $w+w'$, se deduce que es un morfismo.

Si $[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] \in S\Omega_n(f, f_0; g)_s$, entonces P es una pseudovariedad orientada con borde que tiene una descomposición localmente finita en subpoliedros compactos de dimensión n , $P = \bigcup_i P_i$, de forma que para un poliedro Q se tienen unos diagramas conmutativos



con π p.l.-epimorfismo y $u|_{P_i}, v|_{P_i}$ inyectivas para cada P_i . Por ser P orientada podemos encontrar una triangulación orientada K de

P que además triangule los subpoliedros P_i y una triangulación L de Q , tales que $\pi:K \rightarrow L$ sea simplicial. Los n -símplices orientados t_j de K definen un n -ciclo simplicial $z = \sum_j \sigma_j$ en $(P, \partial P)$; los n -símplices orientados s_i de $K_1 \subseteq K$, tal que $|K_1| = \partial P$, definen un $(n-1)$ -ciclo simplicial $y = \sum_i \nu_i$ en ∂P tal que $\partial z = y$, siendo $\sigma_j: \Delta_n \rightarrow t_j$, $\nu_i: \Delta_{n-1} \rightarrow s_i$ aplicaciones simpliciales que conservan la orientación. Está claro entonces que

$$w = (\sum_j (\Delta_n, u \circ \pi \circ \sigma_j, v \circ \pi \circ \sigma_j), -\sum_i (\Delta_{n-1}, u! \circ \pi! \circ \nu_i, v! \circ \pi! \circ \nu_i))$$

es un n -ciclo seccional casi-inyectivo en $(f, f_0; g)$ y que $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu) = C(w)$; en consecuencia, Ψ es epimorfismo.

Veamos que Ψ es monomorfismo. Sea w un n -ciclo seccional casi-inyectivo en $f: Y \rightarrow X$, tal que $\Psi(w) = (P^\varphi, \sigma^\varphi, \gamma^\varphi)$ es el borde de una $(n+1)$ -cadena seccional (N, σ, γ) . Podremos suponer que N está triangulado por un complejo simplicial K que induce en $P = \partial N$ la triangulación L determinada por w y φ ya que, si $K_1 \subseteq K$ triangula P , entonces tomando sobre $P \times I$ una triangulación que sobre $P \times 0$ sea K_1 , sobre $P \times 1/2$ sea una subdivisión común a K_1 y a L , sobre $P \times 1$ sea L y no tenga más vértices que los situados en $P \times 0 \cup (P \times 1/2) \cup P \times 1$, se verifica que la $(n+1)$ -cadena seccional

$$(N \cup P \times I, \alpha \cup (\sigma|_P) \circ pr_1, \gamma \cup (\gamma|_P) \circ pr_1)$$

obtenida por pegamiento a través de la cara $(P, \sigma|_P, \gamma|_P)$, cumple las condiciones antes supuestas para (N, σ, γ) . Los complejos K y L determinan en N una cadena simplicial $z = \sum_i \sigma_i$ y un ciclo simplicial $y = \sum_j \nu_j$ respectivamente, tales que $\partial z = y$, $w = \sum_j (\Delta_n, \sigma \circ \nu_j, \gamma \circ \nu_j)$. Entonces w es el borde de la $(n+1)$ -cadena seccional casi-inyectiva $v = \sum (\Delta_{n+1}, \sigma \circ \sigma_i, \gamma \circ \gamma_i)$, por lo cual $[w] = 0$. En consecuencia tenemos el siguiente diagrama conmutativo con las filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\rightarrow \text{HCI}_n(f_0)_s & \rightarrow \text{HCI}_n(f)_s & \rightarrow \text{HCI}_n(f, f_0; g)_s & \rightarrow \text{HCI}_{n-1}(f_0)_s & \rightarrow \text{HCI}_{n-1}(f)_s & \rightarrow \dots \\
\cong \downarrow \Psi & \cong \downarrow \Psi & \downarrow \Psi & \cong \downarrow \Psi & \cong \downarrow \Psi & \\
\rightarrow \text{SQ}_n(f_0)_s & \rightarrow \text{SQ}_n(f)_s & \rightarrow \text{SQ}_n(f, f_0; g)_s & \rightarrow \text{SQ}_{n-1}(f_0)_s & \rightarrow \text{SQ}_{n-1}(f)_s & \rightarrow \dots
\end{array}$$

luego $\Psi: \text{HCI}_n(f, f_0; g)_s \rightarrow \text{SQ}_n(f, f_0; g)_s$ es isomorfismo.

3.7. Los n -símplices seccionales casi-inyectivos $(\Delta_n, \sigma, \gamma; \mathcal{P})$ en f tales que σ es inyectiva y $\mathcal{P} = \langle \Delta_n \rangle$, generan un subcomplejo $I.(f) \subseteq \text{CI}.(f)$ para todo $f \in \mathcal{D}$.

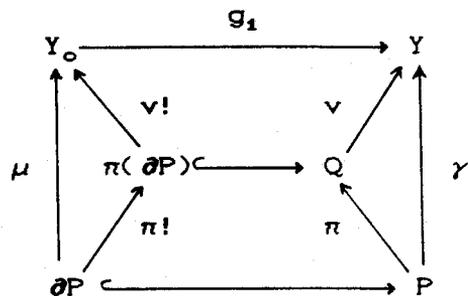
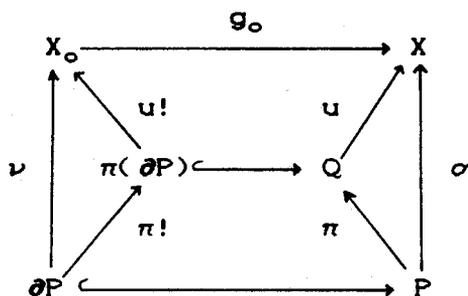
Los grupos $\text{HI}_n(f)_s$ de homología del complejo $(I_n(f), \partial_n)$ serán llamados grupos de homología seccional inyectiva de $f \in \mathcal{D}$. Los grupos $\text{HI}_n(f, f_0; g)_s$ de homología seccional inyectiva de $(f, f_0; g) \in \mathcal{D}$ son los grupos de homología del "mapping cone" de $g: I.(f_0) \rightarrow I.(f)$. Para ellos tenemos la sucesión exacta de homología

$$\dots \rightarrow \text{HI}_n(f_0)_s \rightarrow \text{HI}_n(f)_s \rightarrow \text{HI}_n(f, f_0; g)_s \rightarrow \text{HI}_{n-1}(f_0)_s \rightarrow \dots$$

y los morfismos $\varphi_*: \text{HI}_*(f_0)_s \rightarrow \text{HCI}_*(f_0)_s$, $\varphi_*: \text{HI}_*(f)_s \rightarrow \text{HCI}_*(f)_s$ y $\varphi_*: \text{HI}_*(f, f_0; g)_s \rightarrow \text{HCI}_*(f, f_0; g)_s$ inducidos por las inclusiones a nivel de cadenas.

3.8. PROPOSICION. φ_* es epimorfismo functorial.

Demostración: Basta demostrar que todo n -ciclo $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu) = C(w)$ para algún n -ciclo seccional inyectivo en $(f, f_0; g)$. Por la proposición (2.9), podemos suponer para $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu)$ una factorización canónica



con π no degenerada. Tomemos sobre P y Q triangulaciones K y L tales que π sea simplicial y para cada $t \in K$, $u|_t$ sea inyectiva. Sea $c = \sum_i \sigma_i$ el n -ciclo simplicial en $(P, \partial P)$ definido por los n -simplices orientados de K y $c' = \sum_j \nu_j$ el $(n-1)$ -ciclo simplicial en ∂P definido por la triangulación de ∂P inducida por K . Entonces $\partial c = c'$ y

$$w = (\sum_i (\Delta_n, u \circ \sigma_i, v \circ \sigma_i) - \sum_j (\Delta_{n-1}, u! \circ \nu_j, v! \circ \nu_j))$$

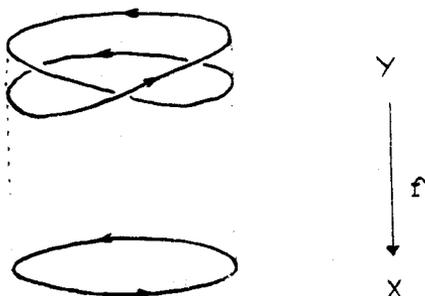
es un n -ciclo seccional inyectivo en $(f, f_0; g)$ tal que

$$C(w) = (P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu).$$

3.9. NOTA. Dada una función $f: Y \rightarrow X$, donde X o Y son de dimensión finita, sea $n = \min \langle \dim X, \dim Y \rangle$. Entonces el conjunto de $(n+1)$ -simplices seccionales inyectivos en f es vacío. Por esto, cada clase de homología seccional de f consta de un sólo ciclo. No ocurre lo mismo con la homología seccional casi inyectiva, tal como vemos a continuación.

3.10. EJEMPLO. Sea Y el subespacio de la superficie de Riemann de la función $w = z^2$ formado por los puntos que tienen valor absoluto 1. Sea X la circunferencia de radio 1 y $f: Y \rightarrow X$ definida por

$f(z^2)=z$. Sean $P=\partial\Delta_2$, $b\in P$ el baricentro del 1-simplíce $(e_0, e_1)\subseteq P$, $\gamma:P\rightarrow Y$ un homeomorfismo y $\sigma=f\circ\gamma$.



Entonces, (P, σ, γ) es un ciclo seccional en f que representa cada una de las cadenas seccionales inyectivas siguientes

$$c_1 = (\Delta_1, \alpha(e_0, e_1), \gamma(e_0, e_1)) + (\Delta_1, \alpha(e_1, e_2), \gamma(e_1, e_2)) + (\Delta_1, \alpha(e_2, e_0), \gamma(e_2, e_0))$$

$$c_2 = (\Delta_1, \alpha(e_0, b), \gamma(e_0, b)) + (\Delta_1, \alpha(b, e_1), \gamma(b, e_1)) + (\Delta_1, \alpha(e_1, e_2), \gamma(e_1, e_2)) + (\Delta_1, \alpha(e_2, e_0), \gamma(e_2, e_0)).$$

Por tanto, $[c_1]=[c_2]\in HCl_1(f)_s$ pero $[c_1]\neq[c_2]$ en $HI_1(f)_s$ ya que $c_1\neq c_2$.

CAPITULO IV

SEUDOBORDISMO SECCIONAL NO ORIENTADO.

SEUDOBORDISMO SECCIONAL INFINITO.

Todo lo de los capítulos anteriores, puede hacerse con pseudovariedades compactas \mathbb{Z}_2 -orientadas y también con pseudovariedades no necesariamente compactas. A continuación se indican los cambios que son pertinentes para ello.

4.1 NOTA: Los grupos de seudobordismo seccional no orientado en $(f, f_0; g)$, que designamos por $S\eta_n(f, f_0; g)_*$ ($n \geq 0$), se obtienen como los $S\Omega_n(f, f_0; g)_*$ sin más que tomar pseudovariedades \mathbb{Z}_2 -orientadas en el capítulo I. Con este cambio tenemos que $\theta(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu) = (P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu)$ y también que son válidos en este caso todas las proposiciones del capítulo II, con los cambios de notación evidentes, salvo que, por la igualdad de cada ciclo con su opuesto, $S\eta_0(\text{punto})_* = \mathbb{Z}_2$. En especial se tiene:

4.2. TEOREMA. $S\eta_*(\ , ;)_e$, $(\ ,)_*$ y ∂ definen una teoría de homología ordinaria con grupo de coeficientes Z_2 sobre la categoría \mathcal{D} .

4.3. NOTA. a) Como se hizo en el capítulo III, pero partiendo de los complejos $CI_n(\cdot)_e \otimes Z_2$ e $I_n(\cdot)_e \otimes Z_2$ y los homomorfismo borde $\partial \otimes 1$ inducidos, se definen los n-grupos de homología seccional casi-inyectiva no orientada y los n-grupos de homología seccional inyectiva no orientada en $f \in \mathcal{D}$ y $(f, f_0; g) \in \mathcal{D}$, que designamos con las notaciones $HCI_n(f; Z_2)_e$, $HCI_n(f, f_0; g; Z_2)_e$, $HI_n(f; Z_2)_e$ y $HI_n(f, f_0; g; Z_2)_e$ respectivamente.

b) Un n-ciclo seccional casi-inyectivo no orientado z en $(f, f_0; g)$ puede ser representado por una cadena $z = (\Sigma_i(\Delta_n, \sigma_i, \gamma_i), x)$ con $gx = \partial \Sigma_i(\Delta_n, \sigma_i, \gamma_i) = \Sigma_{ik}(\Delta_{n-1}, \sigma_i \circ F^{(k)}, \gamma_i \circ F^{(k)})$. Sea R un conjunto maximal entre los conjuntos de simplices de $\Sigma_{ik}(\Delta_{n-1}, \sigma_i \circ F^{(k)}, \gamma_i \circ F^{(k)})$ en los cuales, cada simplece aparece un número par de veces y $R = R^+ \cup R^-$ una partición de R tal que, cada simplece aparece en R^+ y en R^- el mismo número de veces. Entonces, con este conjunto R y prescindiendo de las orientaciones en los razonamientos del apartado (3.3), obtenemos un procedimiento para asociar a z un n-ciclo C^{ϕ_z} de pseudobordismo seccional no orientado.

c) Las proposiciones (3.4)-(3.10) se generalizan también a los grupos de homología seccional casi-inyectiva e inyectiva y los grupos de pseudobordismo seccional no orientados, siendo las demostraciones en este caso como las dadas, pero prescindiendo de las orientaciones, tomando los coeficientes en Z_2 y teniendo en

cuenta la parte a) de esta nota al definir las funciones de apareamiento.

d) Partiendo de los complejos $CI_n(\cdot)_G$ e $I_n(\cdot)_G$, donde G es un grupo abeliano, se obtiene los grupos de homología seccional casi-inyectiva e inyectiva con coeficientes en G , $HCI_n(\cdot; G)$ y $HI_n(\cdot; G)$, a los cuales, sin embargo, no se puede generalizar los resultados anteriores, al menos con las demostraciones dadas.

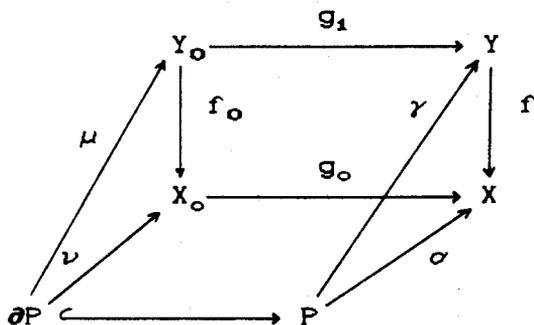
También puede definirse el pseudobordismo seccional con pseudovariedades generales, no necesariamente compactas. Para ello hay que restringir la categoría. En lo que sigue, una función continua es propia si la imagen inversa de todo compacto cerrado es compacta.

4.4. DEFINICION. Sea \mathcal{DP} la subcategoría de la categoría seccional \mathcal{D} formada por los objetos $(f, f_0; g_0, g_1)$ con g_0 propia y por los morfismos $(h_x, h_y; h_{x_0}, h_{y_0})$ donde h_x y h_{x_0} son funciones propias.

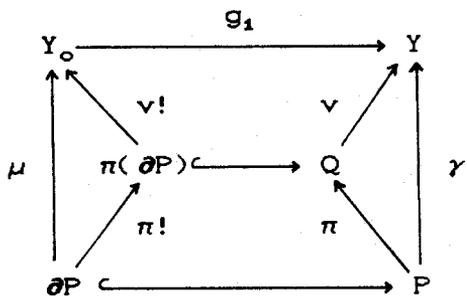
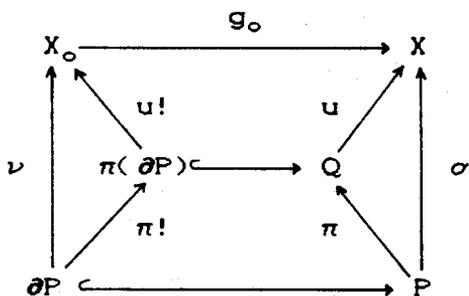
También deben ser propias algunas de las funciones que entran en la definición de ciclos y cadenas.

4.5. DEFINICION. Un n-ciclo seccional infinito en el objeto $(f, f_0; g) \in \mathcal{DP}$ es $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P})$, formada por una n-pseudovariedad orientada P , no necesariamente compacta, con borde ∂P , una familia

$\mathcal{P}=\{P_i\}$ de subpoliedros compactos de P localmente finita, tal que cada P_i es de dimensión n , $\text{int } P_i \cap \text{int } P_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $P = \bigcup P_i$, y cuatro funciones continuas σ, γ, ν, μ , siendo propias σ y ν , que hacen conmutativo el siguiente diagrama

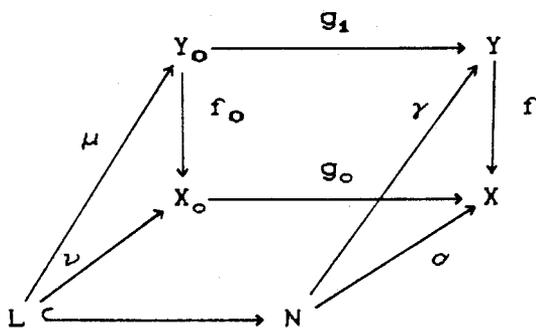


y tales que existe alguna pareja de diagramas conmutativos de la forma

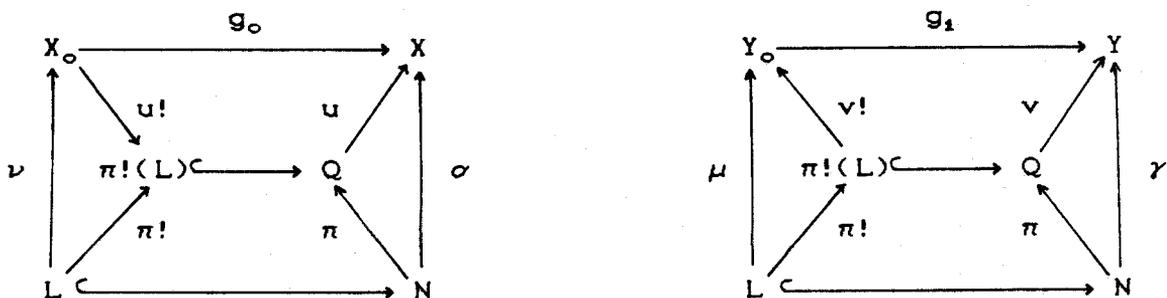


siendo Q un poliedro, π p.l.-epimorfismo, $\pi!$ la restricción de π a ∂P , $u, u!, v$ y $v!$ funciones propias tales que $u=f \circ v$, $u!=f_0 \circ v!$ y $u|_{\pi(P_i)}$ inyectiva para cada P_i . Obsérvese que $u!=g_0^{-1}u|_{\pi(\partial P)}$, y que $v|_{\pi(P_i)}$, $u|_{\pi(P_i \cap \partial P)}$ y $v|_{\pi(P_i \cap \partial P)}$ son inyectivas para cada P_i . A \mathcal{P} le llamaremos descomposición canónica y a la pareja de diagramas, factorización canónica del ciclo.

4.6. DEFINICION. Una (n+1)-cadena seccional infinita en el objeto $(f, f_0; g) \in \mathcal{DP}$ es $(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{N})$ formada por una (n+1)-seudovariiedad N con borde ∂N , una n-seudovariiedad $L \subseteq \partial N$ con borde (ambas N y L orientadas y posiblemente no compactas), una familia localmente finita $\mathcal{N} = \{N_i\}$ de subpoliedros compactos de N de dimensi3n n+1, tales que $\text{int } N_i \cap \text{int } N_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $N = \bigcup_i N_i$, y cuatro funciones continuas σ, γ, ν y μ (σ y ν propias) tales que hacen conmutativo el siguiente diagrama



y tales que existe alguna pareja de diagramas conmutativos de la forma



Siendo Q un poliedro, π p.l.-epimorfismo; $\pi!$ la restricci3n de π a L , $u, v, u!$ y $v!$ funciones propias tales que $u = f \circ v$, $u! = f_0 \circ v!$ y $u|_{\pi(N_i)}$ inyectiva para cada N_i . N3tese que $u! = g_0^{-1} \circ u|_{\pi(L)}$ y que

también $v|_{\pi(N_i)}$, $u|_{\pi(N_i \cap L)}$ y $v|_{\pi(N_i \cap L)}$ son inyectivas para cada N_i .

Su borde es el n -ciclo seccional en $(f, f_0; g)$

$$\partial(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{N}) = (N_0, \sigma|_{N_0}, \gamma|_{N_0}; -\partial L, \nu|_{\partial L}, \mu|_{\partial L}; \mathcal{N}_0),$$

donde N_0 es la n -seudovariedad tal que $\partial N = L \cup N_0$ y $\mathcal{N}_0 = \langle N_0 \cap N_i \rangle$.

4.7. DEFINICION. Dos n -ciclos seccionales infinitos en $(f, f_0; g) \in \mathcal{DP}$,

$$(P_1, \sigma_1, \gamma_1; \partial P_1, \nu_1, \mu_1; \mathcal{P}_1) \text{ y } (P_2, \sigma_2, \gamma_2; \partial P_2, \nu_2, \mu_2; \mathcal{P}_2),$$

son seudobordantes si existe una $(n+1)$ -cadena seccional infinita en $(f, f_0; g)$, $(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{N})$ tal que

$$\partial(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{N}) = (P_1, \sigma_1, \gamma_1; \partial P_1, \nu_1, \mu_1; \mathcal{P}_1) + (-P_2, \sigma_2, \gamma_2; -\partial P_2, \nu_2, \mu_2; \mathcal{P}_2)$$

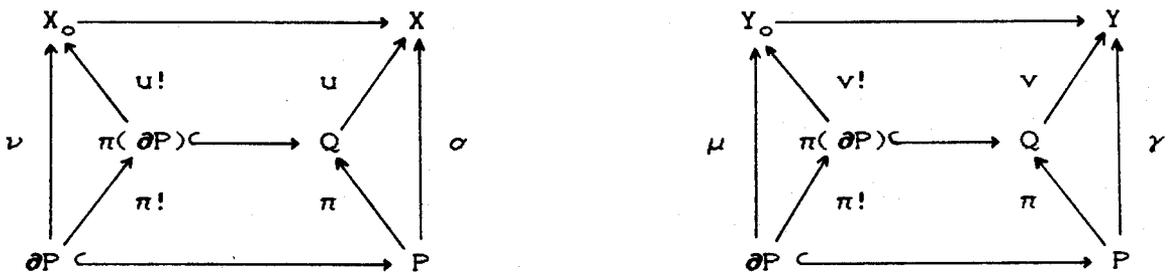
donde $-P_2$, $-\partial P_2$ son las seudovariedades P_2 , ∂P_2 con la orientación opuesta a la dada.

4.8. NOTA. Las tres últimas definiciones pueden darse también con seudovariedades generales \mathbb{Z}_2 -orientadas. Formando las clases de equivalencia por la relación de seudobordismo, obtenemos grupos de seudobordismo con la suma inducida por la unión disjunta de seudovariedades, que llamamos grupos de seudobordismo infinito seccional orientado casi-inyectivo (si es sólo con seudovariedades orientadas) y grupos de seudobordismo infinito seccional no orientado casi-inyectivo (si es con seudovariedades \mathbb{Z}_2 -orientadas) y que representamos por $S\Omega_n^\infty(f, f_0; g)_s$ y $S\eta_n^\infty(f, f_0; g)_s$, respectivamente. Como en el caso en que se usan sólo seudovariedades compactas, dos ciclos que sólo difieran en la

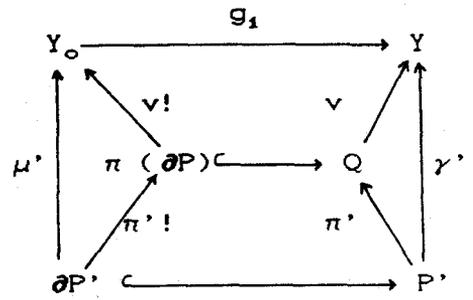
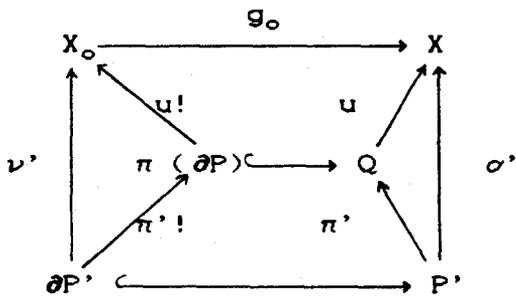
descomposición canónica son pseudobordantes, por lo cual podemos simplificar la notación representando los ciclos y cadenas por $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu)$ y $(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu)$ respectivamente. Para estos grupos son válidas las propiedades de homología dadas en (2.1)-(2.7), con demostraciones análogas, teniendo en cuenta que $S\eta^0_0(\text{punto})_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2$. Así tenemos el siguiente resultado.

4.9. TEOREMA. Los funtores $S\Omega^0_*(, ;)_{\mathbb{Z}}$ y $S\eta^0_*(, ;)_{\mathbb{Z}}$, junto con ∂_* , definen teorías de homología ordinaria con coeficientes en \mathbb{Z} y \mathbb{Z}_2 respectivamente, sobre la categoría \mathcal{DP} .

4.10. PROPOSICION. Sea $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P})$, $\mathcal{P} = \{P_i\}$, un n-ciclo seccional infinito en $(f, f_0; g) \in \mathcal{DP}$ que admite una factorización canónica



1) Si $\dim Q = \dim P$, hay otro n-ciclo $(P', \sigma', \gamma'; \partial P', \nu', \mu')$ en $(f, f_0; g)$ que factoriza canónicamente



con π' p.l.-epimorfismo no degenerado, tal que

$$[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] = [P', \sigma', \gamma'; \partial P', \nu', \mu'],$$

o bien, $[P, \sigma, \gamma; \partial L, \nu, \mu] = 0$.

2) Si $\dim Q < \dim P$, entonces $[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] = 0$.

Demostración: Sea $P = |K|$ una triangulación de P tal que cada $P_i = |K_i|$, con K_i subcomplejo finito de K , y tal que $\pi: |K| \rightarrow |L| = Q$ es simplicial. Supongamos bien ordenados el conjunto \mathcal{V} de vértices de K y el conjunto J de índices de la familia $\{P_i\}$. Sea $\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{V}$ el conjunto de vértices de K_i , $i \in J$. Subdividiendo los P_i si fuese necesario, podemos suponer que $a = \max_i \{\text{card } \mathcal{V}_i\}$ es finito. Sea

$$A_i = \{x \in \mathcal{V}_i \mid \exists y_i \in \text{St}(x, K) \cap \mathcal{V}_i, \pi(y_i) = \pi(x)\} \subseteq \mathcal{V}_i.$$

Para cada i , elijamos un $x_i \in \mathcal{V}_i$ con la condición: si $A_i \neq \emptyset$, entonces x_i es el primer elemento de A_i y si $A_i = \emptyset$, entonces x_i es el primer elemento de \mathcal{V}_i . Definimos por inducción $\varphi_a: \langle x_i \rangle \rightarrow \mathcal{V}$: si $\varphi_a(x_k)$ está definida para $k < i$, entonces

$$\varphi_a(x_i) = \begin{cases} \text{1º elemento de } \langle y \mid y \in \text{St}(x_i, K), y \neq x_i, \pi(y) = \pi(x_i) \rangle \cap \mathcal{V}_i, & \text{si } A_i \neq \emptyset \\ x_i & \text{, si } A_i = \emptyset. \end{cases}$$

Sea KxI la triangulación de PxI obtenida extendiendo, sin introducir nuevos vértices, la triangulación inducida por K sobre $PxO \cup Px1$ a todo KxI (ver la demostración de (2.9) y tener en cuenta que el número de vértices puede ser infinito). Sea J' un segmento inicial de J . Por "identificar x_j con $\varphi_a(x_j)$ en KxI para $j \in J'$ "

entendemos la siguiente operación definida inductivamente:

Si $(KxI)^j$ es el complejo simplicial geométrico que resulta de identificar x_k con $\varphi_\alpha(x_k)$ en KxI para todo $k < j$ y $|(KxI)^j|$ es una $(n+1)$ -seudovariación orientada, entonces, la identificación de x_j con $\varphi_\alpha(x_j)$ en KxI consiste en formar el complejo $(KxI)_j$ tal que $|(KxI)_j|$ es una $(n+1)$ -seudovariación orientada, a partir de $(KxI)^j$ en los dos pasos sucesivos siguientes:

1) Suprimir cada $(n+1)$ -símplice que tenga los dos vértices $(x_j, 1)$ y $(\varphi_\alpha(x_j), 1)$.

2) Para cada $(n+1)$ -símplice s suprimido, existen s_1 y s_2 , dos $(n+1)$ -símplices que tienen en común con s las n -caras

$$(\dots, (x_j, 1), (\varphi_\alpha(x_j), 1), \dots) \text{ y } (\dots, (x_j, 1), (\varphi_\alpha(x_j), 1), \dots)$$

respectivamente. Entonces se pega s_1 con s_2 a través de dichas n -caras, mediante la biyección afín

$$(\dots, (x_j, 1), (\varphi_\alpha(x_j), 1), \dots) \rightarrow (\dots, (x_j, 1), (\varphi_\alpha(x_j), 1), \dots),$$

definida asociando $(x_j, 1)$ a $(\varphi_\alpha(x_j), 1)$ y todo otro vértice a sí mismo.

Si $|(KxI)^j|$ es $(n+1)$ -seudovariación orientada, es fácil ver, que $(KxI)_j$ cumple las condiciones para triangular una seudovariación y que el pegamiento de cada s_1 con el s_2 asociado, es compatible con la orientación dada, por lo cual, $|(KxI)_j|$ resulta ser también $(n+1)$ -seudovariación orientada con la orientación inducida por la de $|(KxI)^j|$.

Está claro que toda aplicación simplicial $(KxI)^j \rightarrow L$ factoriza canónicamente a través de $(KxI)_j$ como producto de dos epiyecciones simpliciales, por lo cual, si para la aplicación simplicial $\pi \circ pr_1: KxI \rightarrow L$ se tiene $\pi \circ pr_1 = h^j \circ f^j$, donde $h^j: (KxI)^j \rightarrow L$ y f^j son simpliciales y sobre, entonces, también $\pi \circ pr_1 = h_j \circ f_j$ con

$h_j: (KxI)_j \rightarrow L$ y f_j epiyecciones simpliciales.

Según lo anterior, por inducción transfinita, existen una $(n+1)$ -seudovariiedad orientada $N_1 = |(KxI)_1|$ (donde $(KxI)_1$ denota el resultado de identificar x_i con $\varphi_\alpha(x_i)$ en KxI para todo $i \in J$.) y epiyecciones simpliciales $f_1: PxI \rightarrow N_1$, $h_1: N_1 \rightarrow Q$ tales que $\pi \circ pr_1 = h_1 \circ f_1$. Sea R_1 el subpoliedro de N_1 cociente de PxI ; si $n > \dim R_1$, entonces con la n -seudovariiedad M_1 tal que $\partial N_1 = PxI \cup M_1$, $h_1(M_1) \subseteq \pi(\partial P) \subseteq Q$, se cumple que

$$\partial(N_1, u \circ h_1, v \circ h_1; M_1, u! \circ h_1|_{M_1}, v! \circ h_1|_{M_1}) = (P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu),$$

por lo cual, $[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] = 0$. Si $n = \dim R_1$, entonces existe $P_1 \subseteq R_1$ tal que $\partial N_1 = (P + (-P_1)) \cup M_1$, donde M_1 es la n -seudovariiedad cociente de ∂PxI , luego P_1 es n -seudovariiedad orientada y

$$\partial(N_1, u \circ h_1, v \circ h_1; M_1, u! \circ h_1|_{M_1}, v! \circ h_1|_{M_1}) =$$

$$(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu) - (P_1, u \circ h_1|_{P_1}, v \circ h_1|_{P_1}; \partial P_1, u! \circ h_1|_{\partial P_1}, v! \circ h_1|_{\partial P_1}),$$

$$\text{por lo cual, } [P_1, u \circ h_1|_{P_1}, v \circ h_1|_{P_1}; \partial P_1, u! \circ h_1|_{\partial P_1}, v! \circ h_1|_{\partial P_1}] =$$

$$[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu]. \text{ Además, la descomposición } \mathcal{P} = \langle P_i \rangle \text{ induce } \mathcal{P}_1 = \langle P_{1i} \rangle,$$

con P_{1i} cociente de P_i para cada $i \in J$, y el complejo K induce el

complejo K_1 tal que $P_1 = |K_1|$, $P_{1i} = |K_{1i}|$ con K_{1i} subcomplejo finito

de K_1 para todo $i \in J$, y tal que $h_1|_{P_1}: |K_1| \rightarrow |L| = Q$ es simplicial;

además, llamando \mathcal{V}_{1i} al conjunto de vértices de K_{1i} para cada $i \in J$,

tenemos que $\max_i \{\text{card } \mathcal{V}_{1i}\}$ es finito (pues siempre es $\text{card } \mathcal{V}_{1i} \leq$

$\text{card } \mathcal{V}_i$) y si

$$A_{1i} = \{x \in \mathcal{V}_{1i} \mid \exists y_i \in \text{St}(x, K_1) \cap \mathcal{V}_{1i}, h_1|_{P_1}(y_i) = h_1|_{P_1}(x)\} \subseteq \mathcal{V}_{1i},$$

para cada $i \in J$ es $\text{card } A_{1i} = 0$ ó $< \text{card } A_i$. Por tanto, efectuando la

construcción anterior a partir del ciclo

$$(P_1, u \circ h_1|_{P_1}, v \circ h_1|_{P_1}; \partial P_1, u! \circ h_1|_{\partial P_1}, v! \circ h_1|_{\partial P_1}),$$

y así sucesivamente, llegamos en un número finito de pasos al

ciclo $(P', \sigma', \gamma'; \partial P', \nu', \mu')$ buscado o a que $[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu] = 0$.

4.11. COROLARIO. Sea X un espacio T_4 de dimensión inductiva larga $\text{Ind } X = n$ o de dimensión por recubrimientos $\text{dim } X = n$. Sea $(f, f_0; g)$ un objeto, con $f: Y \rightarrow X$. Entonces $S\Omega_p^\infty(f, f_0; g)_s$ y $S\eta_p^\infty(f, f_0; g)_s$ son nulos para todo $p > n$.

Demostración: La misma que en (2.11).

4.12. NOTA. a) Para cualquier $f \in \mathcal{DP}$ designemos por $CI_n^\infty(f)_s$ el conjunto de todas las sumas formales finitas o infinitas $\sum m_i(\Delta_n, \sigma_i, \gamma_i)$, donde $m_i \in \mathbb{Z}$, $(\Delta_n, \sigma_i, \gamma_i)$ es un n -simplex seccional casi-inyectivo en f y sean localmente finitas en el sentido de que $\langle \sigma_i(\Delta_n) \mid m_i \neq 0 \rangle$ es un sistema localmente finito². Con los homomorfismos borde evidentes, tenemos para cualesquiera $f, (f, f_0; g)_s \in \mathcal{DP}$ los grupos

$$HCI_n^\infty(f)_s = H_n(CI_n^\infty(f)_s, \partial) \text{ y } HCI_n^\infty(f, f_0; g)_s = H_n(Cg.)$$

que llamamos n -grupos de homología seccional infinita casi-inyectiva. Designando por $CI_n^\infty(f; \mathbb{Z}_2)$ el conjunto de sumas como las anteriores pero con los $m_i \in \mathbb{Z}_2$ tenemos, como antes, los n -grupos de homología seccional infinita casi-inyectiva no-orientada.

$$HCI_n^\infty(f; \mathbb{Z}_2)_s \text{ y } HCI_n^\infty(f, f_0; g; \mathbb{Z}_2)_s.$$

Si partimos de las sumas formales localmente finitas de simplices inyectivos con coeficientes en \mathbb{Z} o \mathbb{Z}_2 , tenemos los n -grupos de homología seccional infinita inyectiva orientada³ y

² Siempre que se diga de una cadena seccional que es localmente finita, entenderemos el término "localmente finita" en este sentido.

³ Estos son los grupos de homología seccional definidos por SHIH en 1977 [47].

los de homología seccional infinita inyectiva no-orientada, que designamos por $HI_n^\infty(f)_e$, $HI_n^\infty(f, f_0; g)_e$, $HI_n^\infty(f; \mathbb{Z}_2)_e$ y $HI_n^\infty(f, f_0; g; \mathbb{Z}_2)_e$ respectivamente.

b) Si $[z] \in HCI_n^\infty(f, f_0; g)_e$ y z está representado por la cadena localmente finita (y, x) tal que $y = \sum \delta_i (\Delta_n, \sigma_i, \gamma_i)$, $\delta_i = 1, -1$ y $-g_0 x = \partial y = \sum_{ik} (-1)^{(k)} \delta_i (\Delta_{n-1}, \sigma_i^{(k)}, \gamma_i^{(k)})$ ($\sigma_i^{(k)}$ y $\gamma_i^{(k)}$ son las caras k -ésimas), fijándonos en un $(n-1)$ -símplice $\tau \in CI_n^\infty(f)_e$, si

$$\langle (\Delta_{n-1}, \sigma_{i_1}^{(k_1)}, \gamma_{i_1}^{(k_1)}), \dots, (\Delta_{n-1}, \sigma_{i_r}^{(k_r)}, \gamma_{i_r}^{(k_r)}) \rangle$$

es el conjunto de símplices de $\langle (\Delta_{n-1}, \sigma_i^{(k)}, \gamma_i^{(k)}) \rangle$ que son iguales a τ , dicho conjunto es finito y además

$$\sum_{t=1}^r (-1)^{(k_t)} \delta_{i_t} (\Delta_{n-1}, \sigma_{i_t}^{(k_t)}, \gamma_{i_t}^{(k_t)}) \in g \cdot CI_{n-1}(f_0)_e$$

por lo cual, hay una partición suya $R_\tau^+ \cup R_\tau^- \cup S_\tau$ tal que, hay una función biyectiva $\phi_\tau: R_\tau^+ \rightarrow R_\tau^-$ y S_τ tiene a lo más un elemento. Si $R^+ = \cup R_\tau^+$, $R^- = \cup R_\tau^-$, $R = R^+ \cup R^-$, entonces $\phi = \cup \phi_\tau: R^+ \rightarrow R^-$ es biyectiva. Como en el capítulo III, se obtiene entonces un n -ciclo $C^\phi(z)$ de pseudobordismo seccional infinito en $(f, f_0; g)$ asociado a z .

c) Reduciendo módulo \mathbb{Z}_2 los coeficientes de las cadenas anteriores, tenemos como antes que, para cada n -ciclo seccional casi-inyectivo infinito no-orientado z , se puede definir una función ϕ con la cual asociar a z por pegamiento un n -ciclo $C^\phi(z)$ de pseudobordismo seccional no-orientado en $(f, f_0; g)$.

d) Las proposiciones (3.4)-(3.9) se pueden enunciar también para los grupos de homología y de pseudobordismo seccionales infinitos anteriores, con demostraciones como las dadas, haciendo los cambios evidentes.

CAPITULO V

GRUPOS DE SEUDOBORDISMO CASI-INYECTIVO.

Sea TOPI la categoría cuyos objetos son las ternas $(X, X_0; g_0)$ formadas por espacios topológicos X , X_0 y una función continua $g_0: X_0 \rightarrow X$ inyectiva, y cuyos morfismos son los pares (h, h_0) de funciones inyectivas continuas tales que

$$\begin{array}{ccc}
 X_0 & \xrightarrow{g_0} & X \\
 h_0 \downarrow & & \downarrow h \\
 Y_0 & \xrightarrow{f_0} & Y
 \end{array}$$

conmuta.

Sea \mathcal{D} id la subcategoría plena de la categoría \mathcal{D} de diagramas, formada por los objetos de la forma $(1_X, 1_{X_0}; g)$. Es evidente que la transformación

$$(X, X_0; g_0) \rightarrow (1_X, 1_{X_0}; g), \quad g = (g_0, g_0),$$

define una equivalencia natural $T: \text{TOPI} \cong \mathcal{D}$ id, que traslada el functor SQ_* a la categoría TOPI. Designaremos éste functor por

SNI_* y a $SNI_n(X, X_0; g_0)$ lo llamaremos el n-ésimo grupo de pseudobordismo orientado casi-inyectivo de $(X, X_0; g_0)$. También se trasladan los funtores $(,)_*$ y ∂_* , con lo cual tenemos el siguiente resultado.

5.1. TEOREMA. SNI_* , $(,)_*$ y ∂_* definen una teoría de homología ordinaria con coeficientes en \mathbb{Z} sobre la categoría TOPI.

5.2. NOTACION. En vez de la notación $(P, \sigma, \sigma; \partial P, \nu, \nu)$ y $(N, \sigma, \sigma; L, \nu, \nu)$ para ciclos y cadenas en TOPI de acuerdo con el criterio seguido en \mathcal{D} , éstos serán designados por $(P, \sigma; \partial P, \nu)$ y $(N, \sigma; L, \nu)$ respectivamente.

En TOPI valen las propiedades (2.9)-(2.13) establecidas anteriormente y además la siguiente propiedad de escisión más fuerte que la (2.6).

5.3. TEOREMA DE ESCISION. Dado $(X, X_0; g_0)$, sean U un abierto de X tal que $cl(U) \subseteq int(g_0(X_0))$ (donde $cl(U)$ es la clausura de U en X e $int(g_0(X_0))$ es el interior de $g_0(X_0)$ en X .) y $V = g_0^{-1}(U)$. Entonces el morfismo

$$i: (X-U, X_0-V; g_0|_{X_0-V}) \longrightarrow (X, X_0; g_0)$$

determinado por las inclusiones $i_1: X-U \hookrightarrow X$ e $i_0: X_0-V \hookrightarrow X_0$, induce un isomorfismo

$$i_*: SNI_*(X-U, X_0-V; g_0|_{X_0-V}) \longrightarrow SNI_*(X, X_0; g_0).$$

Demostración: Sean $[P, \sigma; \partial P, \nu] \in SNI_n(X, X_0; g_0)$, $A = \sigma^{-1}(X - int(g_0 X_0))$ y

$U' = \sigma^{-1}(\text{cl}(U))$. Puesto que A y U' son subconjuntos cerrados de P , disjuntos entre sí, dada una triangulación K de P , podemos encontrar una subdivisión derivada $K^{(r)}$ de K , de forma que el entorno simplicial M de A en $K^{(r)}$ no corta U' .

Si N es el entorno regular triangulado por M , entonces $N \cap U' = \emptyset$. Así pues, N es una n -seudovariiedad con borde $\partial N = N' \cup (N \cap \partial P)$ y $\alpha(\partial N) \subseteq \text{int}(g_0 X_0)$ por construcción. Por tanto, $(N, \sigma|_N; \partial N, g_0^{-1} \cdot \sigma|_{\partial N})$ es un ciclo en $(X-U, X_0-V; g_0|_{X_0-V})$. Llamando N_0 a la seudovariiedad que cumple $\partial(P \times I) = (P-N) \cup N_0$, tenemos que la $(n+1)$ -cadena

$$(P \times I, \alpha x_{1I}; N_0, (g_0 x_{1I})^{-1} \cdot (\alpha x_{1I})|_{N_0})$$

determina la igualdad

$$[P, \sigma; \partial P, \nu] = i_* [N, \sigma|_N; \partial N, g_0^{-1} \cdot \sigma|_{\partial N}],$$

es decir, i_* es un epimorfismo.

Sea $[P, \sigma; \partial P, \nu] \in \text{S}\Omega_n(X-U, X_0-V; g_0|_{X_0-V})$ tal que $i_* [P, \sigma; \partial P, \nu] = 0$. Entonces existe una $(n+1)$ -cadena $(N, \sigma'; L, \nu')$ en $(X, X_0; g_0)$ tal que $\partial(N, \sigma'; L, \nu') = (P, i_{1*} \sigma; \partial P, i_{0*} \nu)$. $U'' = \sigma'^{-1}(U)$ y $A'' = \sigma'^{-1}(X - \text{int}(g_0(X_0)))$ son subconjuntos cerrados de N disjuntos entre sí y por tanto, podemos encontrar un entorno regular M de A'' en N , disjunto de U'' y de forma que, si M' es la seudovariiedad tal que $\partial M = (P \cap \partial M) \cup M'$, entonces $(M, \sigma'|_M; M', \nu'|_{M'})$ es una $(n+1)$ -cadena en $(X-U, X_0-V; g_0|_{X_0-V})$ cuyo borde es el n -ciclo

$$(P \cap \partial M, \sigma|_{P \cap \partial M}; \partial P \cap \partial M, \nu|_{\partial P \cap \partial M})$$

que es seudobordante a $(P, \sigma; \partial P, \nu)$ según muestra la cadena

$$(P \times I, \alpha x_{1I}; Q, (g_0^{-1} x_{1I})|_Q),$$

en la cual Q es la n -seudovariiedad tal que $\partial(P \times I) = (P + (-(P \cap \partial M))) \cup Q$.

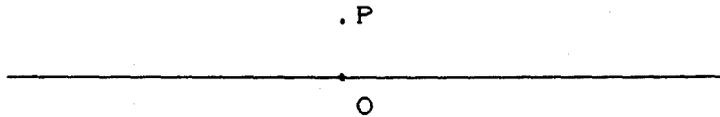
En consecuencia, $[P, \sigma; \partial P, \nu] = 0$.

5.4. Para un espacio cualquiera X , dos 0-ciclos (P_1, σ_1) y (P_2, σ_2) (donde P_1 y P_2 constan de un sólo punto con orientación positiva) son pseudobordantes si y solo si existe un camino $g: I \rightarrow X$ que une $\sigma_1(P_1)$ con $\sigma_2(P_2)$ y es inyectivo a trozos, en el sentido de que hay una partición finita, $x_0=0 < x_1 < \dots < x_s=1$, de I tal que $g|_{[x_i, x_{i+1}]}$ es siempre inyectiva. Si definimos las componentes "camino inyectivo a trozos" de X diciendo que dos puntos están en la misma componente si y solo si, hay un camino inyectivo a trozos $g: I \rightarrow X$ que los une, resulta una partición $J(X)$ de X en clases, de forma que se tiene evidentemente

$$\text{SQI}_0(X) = \bigoplus_{\alpha \in J(X)} Z_{\alpha} \quad (Z_{\alpha} = \mathbb{Z} \text{ para todo } \alpha).$$

5.5. NOTA: Es conocido ([41], prop. XII.7.2, p.97) que en un espacio T_2 la conexión por caminos es equivalente a la conexión por arcos (i.e., por caminos que son inmersiones), luego, en espacios T_2 , las componentes conexas por caminos inyectivos a trozos son precisamente las componentes conexas por caminos. Sin embargo, no siempre es así en espacios que no son T_2 . Para mostrar esto, damos a continuación un ejemplo de espacio T_1 conexo por caminos inyectivos a trozos pero no conexo por arcos y luego un ejemplo de espacio conexo por caminos pero no por caminos inyectivos a trozos, de lo que resulta que los grupos de pseudobordismo casi-inyectivo difieren en general de los grupos de homología singular.

5.6. EJEMPLO: Sea $X = \mathbb{R} \cup \{P\}$ (P es un punto) la recta con dos orígenes



donde todo punto de \mathbb{R} tiene el habitual sistema fundamental de entornos y P tiene como tal la familia $\{P \cup (-\varepsilon, \varepsilon) - \{0\}\}$. Dos puntos cualesquiera de \mathbb{R} están conectados por un arco evidente, pero para ir de P a 0 , hay que ir primero con un camino hasta un punto de $\mathbb{R} - \{0\}$ y luego con otro camino hasta 0 , de forma que, aunque ambos pueden ser arcos, el camino total no es inyectivo. En consecuencia X tiene una sola componente por caminos inyectivos a trozos y dos componentes por arcos.

5.7. EJEMPLO: Sea X el espacio $I / \langle 1/n \rangle$ cociente de $I = [0, 1]$ identificando todos los puntos de la sucesión $\langle 1/n \rangle_{n \in \mathbb{Z}^+}$. Los puntos 0 y $[1] \in I / \langle 1/n \rangle$ están en la misma componente conexa por caminos evidentemente, pero están en distinta componente por caminos inyectivos a trozos, ya que todo camino $f: I \rightarrow I / \langle 1/n \rangle$ tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = [1]$ aplica en $[1]$ al menos un conjunto numerable de puntos. En efecto, dado un entorno Y de 0 en X , $f^{-1}(Y)$ es un entorno de 0 en I , y ya que en $Y - [1]$ hay una cantidad numerable de conjuntos de la forma $(1/n+1, 1/n)$, cada uno de los cuales es componente conexa de $X - [1]$, tenemos que en $f^{-1}(Y - [1]) = f^{-1}(Y) - f^{-1}[1]$ hay una cantidad numerable de componentes conexas;

ésto sólo es posible si $f^{-1}[1]$ es al menos numerable.

5.8. LEMA. Sean X un poliedro, $\dim X = 1$, (P, σ) un 1-ciclo en X que tiene una factorización canónica

$$\begin{array}{ccc}
 P = \bigcup P_i & \xrightarrow{\sigma} & X \\
 \pi' \searrow & & \nearrow u' \\
 & Q' &
 \end{array}$$

tal que π' es no degenerada y $[P, \sigma] = 0$. Entonces P está triangulado por un número par de 1-símplices que pueden ser emparejados con la condición de que en ellos σ describa arcos opuestos.

Demostración: Ya que $[P, \sigma] = 0$, hay una 2-cadena (N, g) en X que tiene una factorización canónica

$$\begin{array}{ccc}
 N = \bigcup N_i & \xrightarrow{g} & X \\
 \pi \searrow & & \nearrow u \\
 & Q &
 \end{array}$$

tal que $\partial(N, g) = (P, \sigma)$, luego $\partial N = P$ y $\sigma = g|_P$. Triangulemos N y Q , para hacer π simplicial y u inyectiva en cada símplex de dimensión máxima de Q . Está claro que esta hipótesis sobre u implica $\dim(Q) = 1$, y por tanto cada 2-símplex de la triangulación de N es aplicado simplicialmente por π en un 1-símplex o en un vértice. Según esto, si s_0 es un 1-símplex de la triangulación inducida sobre ∂N , entonces hay una cadena finita t_1, t_2, \dots, t_k de 2-símplices de N tales que s_0 es cara de t_1 , $t_i \cap t_{i+1}$ es una 1-cara de ambos y $\pi(t_i \cap t_{i+1}) = \pi(s_0)$ para cada $i = 1, \dots, k-1$, y t_k tiene una 1-cara s_1 que está en ∂N y que cumple $\pi(s_1) = \pi(s_0)$. Según esto,

$\partial N = P$ está triangulado por un número par de 1-símplices que pueden ser emparejados con la condición de que en ellos σ describa arcos opuestos.

5.9. PROPOSICION. Los grupos SQI_* no son invariantes de homotopía.

Demostración: Para ello probaremos que SQI_1 del poliedro euclideo $I = [0,1]$ es distinto de cero.

Tomemos dos ejemplares I_1 e I_2 de $[0,1]$ y sea P el espacio cociente obtenido identificando los dos ceros por un lado y los dos unos por otro. Definimos $\sigma: P \rightarrow I$ poniendo

$$\sigma(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in I_1 \\ 1-x^2 & \text{si } x \in I_2. \end{cases}$$

Está claro entonces que (P, σ) es un 1-ciclo sobre I que tiene una factorización

$$\begin{array}{ccc} P = I_1 \cup I_2 & \xrightarrow{\sigma} & I \\ & \searrow \text{id} & \nearrow \sigma \\ & P & \end{array}$$

que es canónica y con la flecha de la izquierda no degenerada. Ya que ningún cambio lineal de variables transforma el polinomio x en el polinomio $1-x^2$, no hay en P dos subconjuntos homeomorfos a I tales que las restricciones de σ a ellos sean arcos opuestos sobre I . Entonces, según el lema anterior, $[P, \sigma] \neq 0$. En consecuencia, $SQI_1([0,1]) \neq 0$

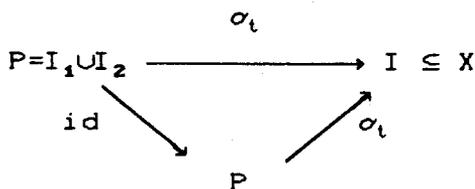
5.10. PROPOSICION: Para todo 1-poliedro X , el cardinal de $SQI_1(X)$ es el cardinal del continuo.

Demostración: Veamos que $S\Omega_1(X)$ tiene cardinal igual ó mayor que el cardinal del continuo. En efecto, destaquemos en X un subpoliedro I p.l.-isomorfo a $[0,1]$. Para cada $t \in (0,1)$, sea (P, σ_t) el ciclo siguiente:

Tomemos dos ejemplares I_1, I_2 de $[0,1]$ y sea P el espacio cociente obtenido identificando los dos ceros por un lado y los dos unos por otro. Definimos $\sigma_t: P \rightarrow I$ poniendo

$$\sigma_t(x) = \begin{cases} tx & \text{si } x \in I_1 \\ t(1-x)^2 & \text{si } x \in I_2. \end{cases}$$

Está claro entonces que (P, σ) es un 1-ciclo sobre X que tiene una factorización canónica

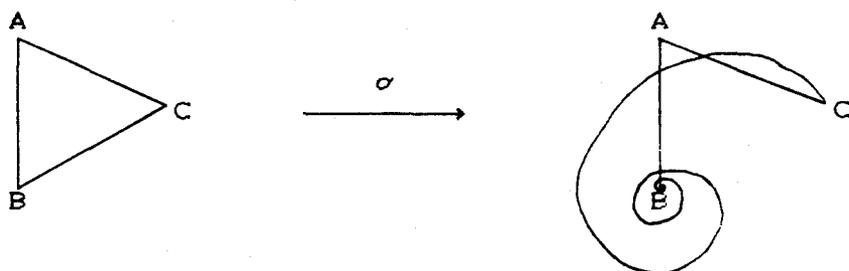


Como en el caso de la proposición anterior se tiene que $[P, \sigma_t] \neq 0$. Además, si $0 < \lambda < \mu < 1$, entonces $[P, \sigma_\lambda] \neq [P, \sigma_\mu]$ ya que ningún cambio lineal de la variable x transforma uno en otro dos de los polinomios $\lambda x, \mu x, \lambda(1-x^2), \mu(1-x^2)$.

Demostremos que el cardinal de $S\Omega_1(X)$ es \leq el cardinal del continuo, verificándose por tanto la igualdad. Es bien conocido que el conjunto de aplicaciones continuas entre dos espacios 2° numerable tiene cardinal $\leq \text{card}(\mathbb{R})$; ahora bien, todo 1-ciclo en X es una aplicación continua $S^1 \rightarrow X$, luego $\text{card}(\langle 1\text{-ciclos en } X \rangle) \leq \text{card}(\langle S^1 \rightarrow X \text{ continua} \rangle) \leq \text{card}(\mathbb{R})$. Como $S\Omega_1(X)$ es un conjunto de clases de equivalencia de 1-ciclos en X , $\text{card}(S\Omega_1(X)) \leq \text{card}(\langle 1\text{-ciclos en } X \rangle) \leq \text{card}(\mathbb{R})$.

5.11. PROPOSICION: $S\Omega_1(\mathbb{R}^2) \neq 0$.

Demostración: Consideremos el 1-ciclo (P, σ) , donde $P = \partial\Delta_2$ es el borde de un 2-símplice (ABC) y $\sigma: P \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la aplicación



que deja fijos los lados (A,B) , (A,C) y transforma el lado (C,B) en una espiral infinita que empieza en C y termina en B (tomando un sistema de coordenadas cartesianas tal que el segmento BC sea el intervalo $[0,1]$ del eje de abscisas, esta espiral puede ser descrita por la función $\phi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(0)=0$ y $\phi(t) = (t \cos(-2\pi/t), t \sin(-2\pi/t))$). Si fuese $S\Omega_1(\mathbb{R}^2) = 0$, entonces $[P, \sigma] = 0$, por lo cual existiría una 2-seudovariiedad Q con borde $\partial Q = P$ y una función continua $h: Q \rightarrow \mathbb{R}^2$ tales que (Q, h) es una 2-cadena orientada casi-inyectiva y $h|_{\partial Q} = h|_P = \sigma$.

Puesto que $\partial Q = P$ es conexo, podemos suponer que Q es fuertemente conexo, en el sentido de que tiene una triangulación K de pseudovariiedad de forma que para dos 2-símplices $t_1, t_2 \in K$, hay una cadena de 2-símplices de K

$$t_1 = t'_1, t'_2, \dots, t'_k = t_2$$

cada uno de los cuales tiene con el anterior una 1-cara en común.

Consideremos el 2-ciclo relativo $Z = (Q, h; P, \sigma)$ en $(\mathbb{R}^2, \sigma P; i)$, donde i es la inclusión $\sigma P \subseteq \mathbb{R}^2$. Si Z fuese un ciclo nulo, ya que $\partial_*[Z] = [P, \sigma]$, también sería nulo en σP el 1-ciclo (P, σ) ; si $r: \sigma P \rightarrow S^1$ es la retracción sobre la 1-esfera S^1 inmersa en σP a la

cual pertenece el punto C, (N, f) es una 2-cadena en σP tal que $\partial(N, f) = (P, \sigma)$ y t es la cadena simplicial suma de todos los 2-simplices de una triangulación $|K_1| = N$, entonces tenemos que el ciclo singular r.o. (∂t) en S^1 es nulo y a la vez representa la clase fundamental de S^1 , lo cual es imposible. Por tanto, la proposición (2.9) nos permite asumir que Z factoriza canónicamente con un p.l.-epimorfismo π no degenerado. En consecuencia, podemos suponer que la función h es inyectiva en cada simplece de K .

Sea t_1 un 2-simplece de K tal que contiene el punto B y tiene una 1-cara k_1 sobre el lado (A, B) de P , t_2 un 2-simplece que contiene el punto B y tiene una 1-cara k_2 sobre el lado (B, C) de P . Estos son los únicos 2-simplices de K que contienen el punto B y tienen una 1-cara en ∂Q . Toda 2-seudovariiedad es una superficie con un número finito de puntos identificados, por lo cual la estrella de B es un cono sobre un número finito de circunferencias y segmentos; en consecuencia hay una sola componente conexa L de $|lk(B, K)|$ cuyo borde es no vacío. Sea V el subcomplejo de K que triangula el cono $B * L$. Está claro que $B * L$ es una 2-bola, por lo cual hay una cadena de 2-simplices de V

$$t_1 = t'_1, t'_2, \dots, t'_k = t_2$$

tal que para cada $i > 1$, $t'_i \cap t'_{i-1}$ es una 1-cara común que contiene el vértice B .

La intersección de $h(t'_k \cap t'_{k-1})$ y $h(k_2)$ es el punto B porque $h|_{t'_k}$ es inyectiva. Por tanto $h(t'_k \cap t'_{k-1})$ es, como $h(k_2)$, una espiral infinita. Razonando igual para los simplices $t'_{k-1}, t'_{k-2}, \dots, t'_1 = t_1$, se obtiene que $h(k_1)$ es también una espiral infinita. Esto contradice el hecho de que esta imagen está contenida en el segmento AB . Por tanto $[P, \sigma] \neq 0$ y $S\Omega_1(\mathbb{R}^2) \neq 0$.

5.12. PROPOSICION: Para cualquier superficie V^2 , $S\Omega_1(V^2)$ tiene el cardinal del continuo.

Demostración: Sea (P, σ) el 1-ciclo de la proposición anterior. Dado cualquier homeomorfismo de coordenadas $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow U \subseteq V^2$, razonando como en (5.11) se prueba que el ciclo $(P, \alpha\sigma)$ es no nulo. Si (P', γ) es otro 1-ciclo en V^2 tal que $\gamma(P') \cap \alpha(P) = \emptyset$, entonces $(P, \alpha\sigma)$ y (P', γ) no son pseudobordantes. En efecto, supongamos que $\partial(Q, h) = (P, \alpha\sigma) - (P', \gamma)$. Se tiene que $\partial Q = P + (-P')$; si P y P' están en distinta componente fuertemente conexa de Q , restringiendo h a la componente en que está P , esto implica que el ciclo $(P, \alpha\sigma)$ es nulo, en contra de lo dicho antes; por tanto, podemos suponer que Q tiene una sola componente fuertemente conexa. Consideremos el 2-ciclo $(Q, h; P + (-P'), \alpha\sigma + \gamma)$ en $(V^2, h(\partial Q); i)$, donde i está dada por la inclusión; razonando como se hizo en (5.11) con el ciclo que se designó allí $(Q, h; P, \sigma)$, se llega a que (Q, h) tiene una factorización canónica con π no degenerada. El resto de la demostración de (5.11), aplicado aquí, muestra que es imposible la relación $\partial(Q, h) = (P, \alpha\sigma) - (P', \gamma)$. Luego, $\text{card}(S\Omega_1(V^2)) \geq \text{card}(\mathbb{R})$.

Por otro lado, es cierto siempre que si X y X' son dos espacios 2° numerable, el conjunto $\mathcal{C}(X, X') = \{f: X \rightarrow X' \text{ continua}\}$ tiene cardinal $\leq \text{card}(\mathbb{R}) = c$; en particular, $\text{card } \mathcal{C}(S^1, V^2) \leq c$. De donde se deduce obviamente que $\text{card}(S\Omega_1(V^2)) \leq c$.

5.13. PROPOSICION. Para cualquier superficie cerrada orientada V^2 , $S\Omega_2(V^2)$ tiene el cardinal del continuo.

Demostración: Sea $t: |K| \rightarrow V^2$ una triangulación de V^2 (suponemos $|K|$ euclideo), b un vértice de K , $St(b; K) = \{xb + (1-x)y \mid 0 \leq x \leq 1\}$,

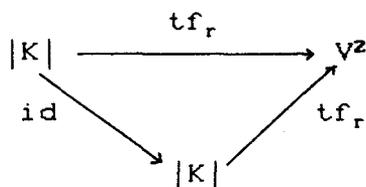
$y \in Lk(b;K)$). Sea $\phi_r: St(b;K) \rightarrow St(b;K)$, $r \geq 1$, la función

$$\phi_r(xb + (1-x)y) = x^r b + (1-x^r)y.$$

Entonces, la función $f_r: |K| \rightarrow |K|$ dada por

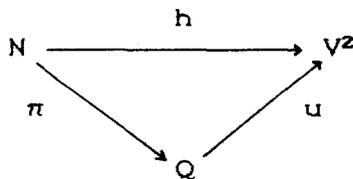
$$f_r(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \notin St(b;K) \\ \phi_r(z) & \text{si } z \in St(b;K) \end{cases}$$

es un homeomorfismo. Por tanto, para todo $r \geq 1$, tenemos un 2-ciclo inyectivo $C_r = (|K|, tf_r)$ en V^2 que tiene la factorización canónica



Es evidente que C_r y C_k no son isomorfos si $r \neq k$. Mostremos que tampoco son pseudobordantes.

Supongamos que existe una 3-cadena (N, h) en V^2 tal que $\partial(N, h) = (|K|, tf_r) - (|K|, tf_k)$. Sea



una factorización canónica de (N, h) , y supongamos dadas triangulaciones $|K_1| = Q$, $|K_2| = Q$ tales que π sea simplicial. En ∂N hay dos componentes conexas L_1 y L_2 , cada una p.l.-isomorfa a la pseudovariación $|K|$. Sea s_1 un 2-símplice de K_1 que está en L_1 ; ya que π es degenerada y h es inyectiva en s_1 , s_1 es cara de un

3-símplice $S_1 \in K_1$ tal que $h(S_1) = h(s_1)$, y en S_1 hay otra 2-cara $s_2 \neq s_1$ tal que $\pi(s_2) = \pi(s_1)$; análogamente, s_2 es cara de un 3-símplice $S_2 \in K$ tal que $h(S_2) = h(s_2) = h(s_1)$ y en S_2 hay una 2-cara $s_3 \notin \langle s_1, s_2 \rangle$ tal que $\pi(s_3) = \pi(s_2) = \pi(s_1)$; es evidente que este procedimiento nos lleva en un número finito de pasos a un único 2-símplice $s_p \in L_2$ tal que $\pi(s_p) = \pi(s_1)$. Por tanto, a cada 2-símplice $s \in K_1$ contenido en L_1 , corresponde un 2-símplice $s' \in K_1$ contenido en L_2 tal que $h(s) = h(s')$. Es evidente que esta correspondencia es biyectiva, luego $h(L_1) = h(L_2)$ y $(|K|, \text{tf}_r) = (|K|, \text{tf}_k)$. En consecuencia, $\text{card}(\Omega_2(V^2)) = \text{card}(\mathbb{R}) = c$.

Ya que sólo hay una cantidad finita de 2-seudovariedades P y, para cada una de ellas, el conjunto $\mathcal{C}(P, V^2) = \{f: P \rightarrow V^2 \text{ continua}\}$ tiene el cardinal c , sigue que $\text{card}(\Omega_2(V^2)) \leq c$.

5.14. PROPOSICION. Si P es una pseudovariedad de dimensión finita n , compacta, orientada y sin borde, entonces $\text{card}(\Omega_n(P)) = c$.

Demostración: Es fácil ver que la demostración anterior es válida en cualquier dimensión.

5.15. NOTA: Todo lo de este capítulo se puede hacer considerando pseudovariedades compactas arbitrarias (es decir, \mathbb{Z}_2 -orientadas). Se obtiene así nociones y resultados análogos a los anteriores. El correspondiente grupo de bordismo se denomina n -ésimo grupo de pseudobordismo no orientado casi-inyectivo en $(X, X_0; g_0)$, designado por $S\eta I_n(X, X_0; g_0)$. Aquí, $-(P, \sigma; \partial P, \nu) = (P, \sigma; \partial P, \nu)$. En este caso son válidas las proposiciones (5.1)-(5.14), con los cambios de

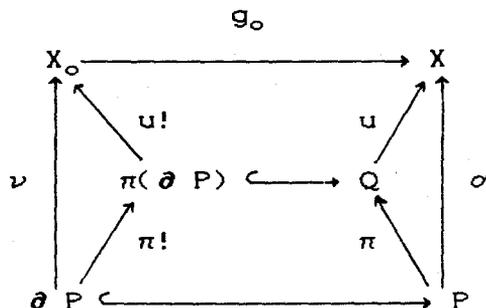
notación evidentes, salvo que, por la igualdad de cada ciclo con su opuesto, $S\eta I_0(\text{un punto}) = \mathbb{Z}_2$. Destacamos el siguiente resultado.

5.16. TEOREMA. $S\eta I_*(, ;)$, $(,)_*$ y ∂ definen una teoría de homología ordinaria con grupo de coeficientes \mathbb{Z}_2 sobre la categoría TOPI.

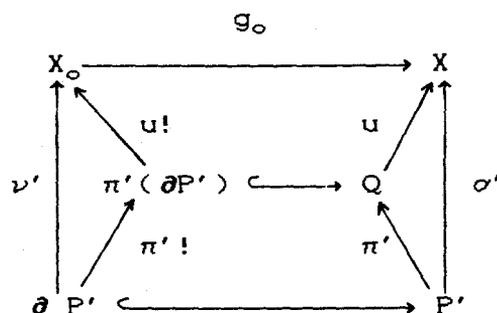
5.17. NOTA. También podemos considerar pseudovarietades en general, compactas o no, orientadas o \mathbb{Z}_2 -orientadas. Obtenemos así grupos de pseudobordismo, que llamamos grupos de pseudobordismo infinito orientado inyectivo a trozos (si se usan sólo pseudovarietades orientadas) y grupos de pseudobordismo infinito no orientado inyectivo a trozos (si es con pseudovarietades \mathbb{Z}_2 -orientadas), y que representamos por $S\eta I_n^\infty(X, X_0; g_0)$ y $S\eta I_n^\infty(X, X_0; g_0)$, respectivamente. Ya que estos grupos son un caso particular de los definidos en (4.8), las proposiciones (4.9)-(4.11) nos dan los tres siguientes resultados.

5.18. TEOREMA. Los funtores $S\eta I_*^\infty(, ;)$ y $S\eta I_*^\infty(, ;)$, junto con $(,)_*$, ∂_* , definen teorías de homología ordinaria con coeficientes en \mathbb{Z} y \mathbb{Z}_2 respectivamente, sobre la subcategoría TOPIP de TOPI formada por los objetos $(X, X_0; g_0)$ y los morfismos (h, h_0) tales que g_0, h, h_0 son aplicaciones propias.

5.19. PROPOSICION. Sea $(P, \sigma; \partial P, \nu; \mathcal{P})$ un n -ciclo (infinito) en $(X, X_0; g_0)$, $\mathcal{P} = \langle P_i \rangle$,



una factorización canónica de dicho ciclo. Si $\dim Q < \dim P$, entonces $[P, \sigma; \partial P, \nu] = 0 \in \text{S}\Omega_n^\infty(X, X_0; g_0)$ ($\text{S}\eta\text{I}_n^\infty(X, X_0; g_0)$). Si $\dim Q = \dim P$, entonces $[P, \sigma; \partial P, \nu] = 0$ o hay otro n -ciclo $(P', \sigma'; \partial P', \nu')$ en $(X, X_0; g_0)$ que factoriza canónicamente



con π' p.l.-epimorfismo no degenerado, tal que

$$[P, \sigma; \partial P, \nu] = [P', \sigma'; \partial P', \nu']$$

5.20. PROPOSICION. Sea X un espacio T_4 de dimensión por recubrimientos $\dim X = n$ ó dimensión inductiva larga $\text{Ind } X = n$. Sea $g_0: X_0 \rightarrow X$ una inmersión continua propia. Entonces $\text{S}\Omega_p^\infty(X, X_0; g_0)$ y $\text{S}\Omega_p^\infty(X, X_0; g_0)$ son nulos, para todo $p > n$.

A continuación se explicita la relación que tienen estos grupos con los complejos de cadenas.

5.21. DEFINICION. Sea Δ_n el n -símplece canónico. Llamamos n -símplece casi-inyectivo en el espacio X a $(\Delta_n, f; \mathcal{P})$ si $(\Delta_n, f, f; \mathcal{P})$ es un n -símplece seccional casi-inyectivo en 1_X . Designamos por $CI_n(X)$ el grupo libre generado por todos los n -símpleces casi-inyectivos en X . Las aplicaciones cara de Δ_n , $F^{(k)}: \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$, permiten definir un homomorfismo borde

$$\partial_n: CI_n(X) \longrightarrow CI_{n-1}(X)$$

mediante la fórmula

$$\partial_n(\Delta_n, f; \mathcal{P}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k (\Delta_{n-1}, f F^{(k)}; \mathcal{P}_k),$$

donde $\mathcal{P}_k = \langle P_i \cap F^{(k)} \Delta_{n-1} \mid P_i \in \mathcal{P} \rangle$. Está claro que se tiene $\partial^2 = 0$. Ahora definimos los grupos de homología casi-inyectiva de un espacio X como

$$HCI_n(X) = \text{Ker } \partial_n / I_m \partial_{n+1}$$

Sea $g_0: X_0 \rightarrow X$ una función continua inyectiva. Esta función induce un morfismo de cadenas

$$g_0: CI_n(X_0) \longrightarrow CI_n(X), \quad g_{0n}(\Delta_n, f; \mathcal{P}) = (\Delta_n, g_0 f; \mathcal{P}).$$

El "mapping cone" de g_0 es un complejo Cg_0 definido como sigue

$$(Cg_0)_n = CI_n(X) \oplus CI_{n-1}(X_0), \quad \partial(y, x) = (\partial y + g_0 x, -\partial x).$$

Es fácil verificar que $\partial \partial = 0$:

$$\partial \partial(y, x) = \partial(\partial y + g_0 x, -\partial x) = (\partial \partial y + \partial g_0 x - g_0 \partial x, \partial \partial x) = (0, 0).$$

Definimos el n -grupo de homología casi inyectiva de $(X, X_0; g_0) \in \text{TOPI}$ por

$$HCI_n(X, X_0; g_0) = H_n(Cg_0)$$

Obsérvese que $HCI_n(X, \phi; \phi)$ es isomorfo canónicamente a $HCI_n(X)$.

5.22. NOTA: a) Tenemos una sucesión exacta corta de morfismos de cadenas

$$0 \rightarrow CI_*(X) \xrightarrow{i} (Cg_0) \xrightarrow{\pi} CI_*(X_0) \rightarrow 0 \quad (1)$$

donde $CI_*(X_0)$ está dado por $CI_n^+(X_0) = CI_{n-1}(X_0)$ y $\partial^+ = -\partial$, i y π están definidos por $i(y) = (y, 0)$, $\pi(y, x) = x$. Usando las identidades evidentes $HCI_{n-1}(X_0) = H_n^+(CI_*(X_0))$, la sucesión de homología de (1) da la sucesión exacta de homología casi-inyectiva

$$\dots \rightarrow HCI_n(X_0) \rightarrow HCI_n(X) \rightarrow HCI_n(X, X_0; g_0) \rightarrow HCI_{n-1}(X_0) \rightarrow \dots$$

b) Los isomorfismos canónicos $CI_*(X) \cong CI_*(1_X)_s$, $CI_*(X, X_0; g_0) \cong CI_*(1_X, 1_{X_0}; g_0, g_0)_s$ dados por $(\Delta, f) \rightarrow (\Delta, f, f)$, determinan isomorfismos functoriales canónicos

$$HCI_*(X) \cong HCI_*(1_X)_s, \quad HCI_*(X, X_0; g_0) \cong HCI_*(1_X, 1_{X_0}; g_0, g_0)_s.$$

c) Teniendo en cuenta lo anterior, es fácil ver que (3.3)-(3.5) nos dice cómo pegar entre sí los simplices de un ciclo casi-inyectivo z para obtener unívocamente un ciclo de pseudobordismo orientado casi-inyectivo $C(z)$ de forma compatible con las relaciones de homología y pseudobordismo.

5.23. TEOREMA: La asignación

$$\Psi : HCI_n(X, X_0; g_0) \longrightarrow S\Omega_n(X, X_0; g_0)$$

definida por $\Psi[z] = [C(z)]$ es un isomorfismo functorial.

Demostración: Sigue de (3.6).

5.24. DEFINICION. Sea Δ_n el n -simplex canónico. Llamamos n -simplex inyectivo en el espacio X a todo n -simplex casi-inyectivo $(\Delta_n, f; \mathcal{P})$ en X tal que f sea inyectiva y $\mathcal{P} = \langle \Delta_n \rangle$.

Designamos por $I_n(X)$ el grupo libre generado por todos los n -símplices inyectivos en X . Está claro que $I_n(X) \subseteq CI_n(X)$ y que la diferencial ∂_n de $CI_n(X)$ aplica $I_n(X)$ en $I_{n-1}(X)$ para todo n ; así, $\langle I_n(X), \partial_n \rangle$ es un subcomplejo de cadenas de $\langle CI_n(X), \partial_n \rangle$. Definimos los grupos de homología inyectiva de un espacio X como

$$HI_n(X) = H_n \langle I_n(X), \partial_n \rangle \quad (n=0,1,\dots)$$

Si $(X, X_0; g_0) \in \text{TOPI}$, entonces el n -ésimo grupo de cadenas inyectivas relativas es $I_n(X, X_0; g_0) = I_n(X) \oplus I_{n-1}(X_0)$. El homomorfismo borde $\partial_n: I_n(X, X_0; g_0) \rightarrow I_{n-1}(X, X_0; g_0)$ está definido por $\partial(y, x) = (\partial y + g_0 x, -\partial x)$. El n -ésimo grupo de homología inyectiva de $(X, X_0; g_0)$ es

$$HI_n(X, X_0; g_0) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1} \quad (n=0,1,\dots)$$

Estos son los grupos del "mapping cone" de $g_0: I_*(X_0) \rightarrow I_*(X)$, luego tenemos la sucesión exacta de homología

$$\dots \rightarrow HI_n(X) \rightarrow HI_n(X) \rightarrow HI_n(X, X_0, g_0) \rightarrow HI_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

Además, las inclusiones $I_n(X) \subseteq CI_n(X)$, $I_n(X_0) \subseteq CI_n(X_0)$ inducen morfismos

$$\varphi_* : HI_*(X) \rightarrow HCI_*(X), \quad \varphi_* : HI_*(X, X_0; g_0) \rightarrow HCI_*(X, X_0; g_0)$$

para todo $X \in \text{TOPI}$ y todo $(X, X_0; g_0) \in \text{TOPI}$.

5.25. PROPOSICION: φ_* es epimorfismo functorial.

Demostración: Es un caso particular de (3.8).

5.26. NOTA. a) Como se hizo en (5.21) y (5.24), pero partiendo de los complejos $CI_n(\cdot) \otimes \mathbb{Z}_2$ e $I_n(\cdot) \otimes \mathbb{Z}_2$ y los homomorfismo borde $\partial \otimes 1$ inducidos, se definen los n -grupos de homología casi-inyectiva no

orientada y los n-grupos de homología inyectiva no orientada en $X \in \text{TOPI}$ y $(X, X_0; g_0) \in \text{TOPI}$, que designamos con las notaciones $\text{HCI}_n(X; \mathbb{Z}_2)$ $\text{HCI}_n(X, X_0; g_0; \mathbb{Z}_2)$, $\text{HI}_n(X; \mathbb{Z}_2)$ y $\text{HI}_n(X, X_0; g_0; \mathbb{Z}_2)$ respectivamente.

Si designamos por $\text{CI}_n^\infty(X)$ el conjunto de todas las sumas formales finitas o infinitas $\sum m_i (\Delta_n, f_i)$, donde $m_i \in \mathbb{Z}$, (Δ_n, f_i) es un n-símplice casi-inyectivo en el espacio X y $\langle f_i(\Delta_n) \mid m_i \neq 0 \rangle$ es un sistema localmente finito, con los homomorfismos borde evidentes, tenemos para cualesquiera $X, (X, X_0; g_0) \in \text{TOPIP}$ los grupos

$$\text{HCI}_n^\infty(X) = H_n(\text{CI}_n^\infty(X), \partial) \text{ y } \text{HCI}_n^\infty(X, X_0; g_0) = H_n(Cg_0)$$

que llamamos n-grupos de homología infinita casi-inyectiva. Designando por $\text{CI}_n^\infty(X; \mathbb{Z}_2)$ el conjunto de sumas como las anteriores pero con los $m_i \in \mathbb{Z}_2$ tenemos, como antes, los n-grupos de homología infinita casi-inyectiva no-orientada.

$$\text{HCI}_n^\infty(X; \mathbb{Z}_2) \text{ y } \text{HCI}_n^\infty(X, X_0; g_0; \mathbb{Z}_2).$$

Si partimos de las sumas formales localmente finitas de simplices inyectivos con coeficientes en \mathbb{Z} o \mathbb{Z}_2 , tenemos los n-grupos de homología infinita inyectiva orientada y los de homología infinita inyectiva no-orientada, que designamos por $\text{HI}_n^\infty(X)$, $\text{HI}_n^\infty(X, X_0; g_0)$, $\text{HI}_n^\infty(X; \mathbb{Z}_2)$ y $\text{HI}_n^\infty(X, X_0; g_0; \mathbb{Z}_2)$ respectivamente.

b) Generalizando la nota (5.22.b) de la forma evidente, y aplicando (4.3) y (4.12), se obtiene sin dificultad la generalización de (5.23) y (5.25) a las homologías anteriores y sus respectivos pseudobordismos.

CAPITULO VI

GRADO SECCIONAL DE UNA FUNCION CONTINUA

Se trata la teoría del grado de SHIH, demostrando que dicho grado nos permite caracterizar las variedades triangulables y la existencia de secciones de funciones continuas.

6.1. Sean $f: Y \rightarrow X$ una función continua. El homomorfismo de cadenas $CI.(f)_s \rightarrow S.(X)$ que a la cadena seccional casi-inyectiva $\Sigma u_i(\Delta_n, \sigma_i, \gamma_i)$ en f le asocia la cadena singular $\Sigma u_i(\Delta_n, \sigma_i)$ en X , define un homomorfismo

$$p_n : HCI_n(f)_s \longrightarrow H_n(X) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

entre los correspondientes grupos de homología. La composición

$$q_n : SQ_n(f)_s \cong HCI_n(f)_s \longrightarrow H_n(X)$$

de dichos homomorfismos con los isomorfismos establecidos en el teorema (3.6), nos permiten definir el grado seccional de f .

DEFINICION. Sea $f:Y \rightarrow X$ una función continua. Llamamos grado seccional de f en dimensión n al número

$$\text{grado}_n(f)_s = \text{cardinal}(\text{coker } q_n) - 1 .$$

Este grado generaliza el grado de f definido por SHIH en 1984 [55], como demostramos a continuación.

6.2. SHIH parte del complejo de cadenas que hemos designado por $I.(f)_s$ en (3.7) y considera luego el complejo de cadenas $C.(f)$ cociente del anterior por la relación de equivalencia de subdivisión baricéntrica. La definición precisa del complejo $C.(f)$ es la siguiente:

Designamos por Sd al conocido homomorfismo de subdivisión definido en los complejos de cadenas singulares $S.(X)$ y $S.(Y)$. Supongamos que para el q -símplice $\gamma:\Delta_q \rightarrow Y$ se tiene $Sd \gamma = \sum \delta_i \gamma_i$ ($\delta_i = +1$ ó -1). Si $\sigma:\Delta_n \rightarrow X$ es tal que $\sigma = f\gamma$, se tiene entonces que $Sd \sigma = Sd f\gamma = \sum \delta_i f\gamma_i$. Definimos el homomorfismo de subdivisión baricéntrica $Sd.$ en $I.(f)_s$ dando su efecto sobre los generadores

$$Sd.(\Delta_q, \sigma, \gamma) = \sum \delta_i (\Delta_q, f\gamma_i, \gamma_i) .$$

Las proyecciones $(\Delta_q, \sigma, \gamma) \rightarrow (\Delta_q, \sigma)$ y $(\Delta_q, \sigma, \gamma) \rightarrow (\Delta_q, \gamma)$ definen homomorfismos h_1 y h_2 entre complejos de cadenas que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & I.(f)_s & \\
 h_1 \swarrow & & \searrow h_2 \\
 S.(X) & \xleftarrow{f} & S.(Y)
 \end{array} \tag{1}$$

Es evidente que, si $c \in I_*(f)_s$, $h_1 \cdot Sd(c) = Sd h_2(c)$ y $h_2 \cdot Sd(c) = Sd h_1(c)$. Como en la teoría de homología singular, se prueba que el homomorfismo Sd definido en $I_*(f)_s$ conmuta con la diferencial: $Sd_{q-1} \partial_q = \partial_q Sd_q$.

Consideremos los grupos cociente

$$C_q(f) = \frac{I_q(f)}{\text{Ker}(Sd_q)}$$

Si $a-b \in \text{Ker } Sd_q$, entonces $Sd_q(a-b)=0$. De aquí $0 = \partial(a-b) = \partial Sd(a-b) = Sd \partial(a-b) = Sd(\partial a - \partial b)$; i.e., $a-b \in \text{Ker } Sd_q$ implica $\partial a - \partial b \in \text{Ker } Sd_{q-1}$. En consecuencia, ∂ induce en $C_*(f)$ un homomorfismo de grado -1 , que seguiremos designando ∂ y que cumple $\partial \partial = 0$. Los grupos de homología $H_*(f)$ del complejo $\langle C_*(f), \partial \rangle$ son los llamados grupos de homología seccional de f por SHIH [55].

Un ciclo de $C(f)$ está representado por una cadena $c \in I(f)_s$ tal que $\partial c \in \text{Ker } Sd$; i.e. tal que $Sd \partial(c) = 0$.

Si c, c' son representantes de $z \in C(f)_s$, entonces $Sd(c) = Sd(c')$ y $h_1 Sd(c) = h_1 Sd(c')$, donde h_i ($i=1,2$) son las proyecciones definidas en el diagrama (1). Por tanto, las aplicaciones $h_1': C_q(f) \rightarrow S_q(X)$ y $h_2': C_q(f) \rightarrow S_q(Y)$ dadas por $h_1'(z) = h_1 Sd(c)$ y $h_2'(z) = h_2 \cdot Sd(c)$, son morfismos de cadenas e inducen homomorfismos entre los respectivos grupos de homología que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & H_q(f)_s & \\
 h_1' \cdot * \swarrow & & \searrow h_2' \cdot * \\
 H_q(X) & \xleftarrow{f_*} & H_q(Y)
 \end{array} \tag{2}$$

6.3. El grado de $f:Y \rightarrow X$, $\text{deg } f$, siendo X una variedad cerrada conexa orientada de dimensión n , es definido por SHIH de la manera siguiente. Es el número de elementos del grupo cociente

$$H_n(X) / \text{Im } h_{1*} \cong \mathbb{Z} / \text{Im } h'_*$$

menos uno, donde $h_{1*}: H_n(f)_s \rightarrow H_n(X)$ es la proyección canónica definida antes, i.e.

$$\text{deg } f = \text{cardinal } \langle \text{coker } h'_*: H_n(f)_s \rightarrow H_n(X) \rangle - 1.$$

6.4. PROPOSICION. Sea X una variedad cerrada orientada conexa de dimensión n , Y un espacio topológico y $f:Y \rightarrow X$ una función continua. Entonces

$$\text{grado}_n(f)_s = \text{deg } (f) .$$

Demostración: Basta ver que la imagen $h_{1*}: H_n(f)_s \rightarrow H_n(X)$ y la de $q_n: S\Omega_n(f)_s \rightarrow H_n(X, \mathbb{Z})$ coinciden, o lo que es lo mismo que la imagen de h_{1*} es igual a la imagen de $p_{1n}: HCl_n(f)_s \rightarrow H_n(X)$.

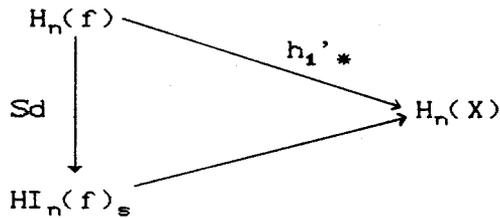
Si $c, c' \in I_n(f)$ representan el mismo ciclo de $C_n(f)$, entonces $Sd(c) = Sd(c')$ y $\partial Sd(c) = Sd\partial(c) = 0$, luego $Sd(c)$ es un ciclo de la homología seccional inyectiva $HI_*(f)_s$. Recíprocamente, si c es un ciclo de $HI_*(f)_s$, entonces $\partial c = 0$ y a fortiori, $Sd\partial c = 0$, luego c es también un ciclo de $C_n(f)$. Por tanto el homomorfismo Sd induce un epimorfismo

$$Sd : ZC_n(f) \rightarrow ZI_n(f)$$

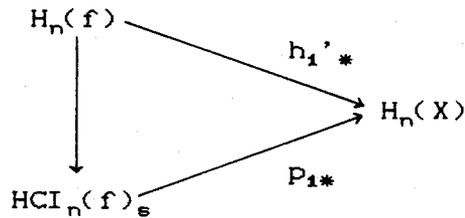
entre los grupos de n -ciclos de $C_n(f)$ y de $I_n(f)$; teniendo en cuenta que $I_{n+1}(f) = 0$ (por ser $\dim X = n$) y que $C_{n+1}(f)$ es un cociente de $I_{n+1}(f)$, luego también es nulo, tenemos en realidad un epimorfismo

$$Sd : H_n(f)_s \rightarrow HI_n(f)_s.$$

Ya que por definicion $h_1([c])=h_1(Sd(c))$, tenemos el diagrama conmutativo

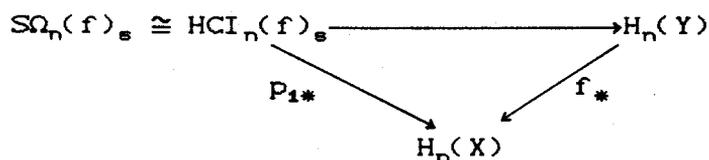


Teniendo en cuenta el epimorfismo $HI_n(f) \rightarrow HCI_n(f)$ de (3.8), obtenemos del anterior el siguiente diagrama conmutativo



en el cual la flecha vertical es un epimorfismo. Luego $H_n(f) \rightarrow H_n(X)$ y $HCI_n(f)_s \rightarrow H_n(X)$ tienen la misma imagen, c.q.d.

6.5. En el caso de que Y sea una variedad conexa de la misma dimension n que X , entonces está definido el grado clásico de f , $\text{grado}_c(f)$. El diagrama conmutativo

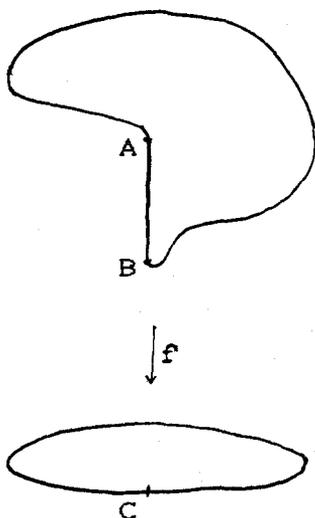


muestra que

$$\text{grado}_c(f) \leq \text{grado}_n(f)_s + 1.$$

Pero el ejemplo siguiente muestra que ambos grados pueden ser diferentes, luego, $\text{grado}_n(f)_s = 0$ es una condición más fuerte que $\text{grado}_c(f) = 1$.

6.6. EJEMPLO (SHIH [55]): Sea f la proyección de una circunferencia sobre otra, tal que f proyecta el segmento AB en un solo punto C , y el resto de los puntos los proyecta uno a uno.



Entonces el grado clásico es 1, pero $\text{grado}_1(f)_s$ es infinito.

Este ejemplo muestra al mismo tiempo que el grado seccional no es un invariante homotópico de f y por tanto los grupos de pseudobordismo seccional tampoco son un invariante homotópico de f .

6.7. DEFINICION. Si $f:Y \rightarrow X$ es continua y $\text{grado}_n(f)_s=0$, llamamos grado seccional fuerte de f en dimensión n a

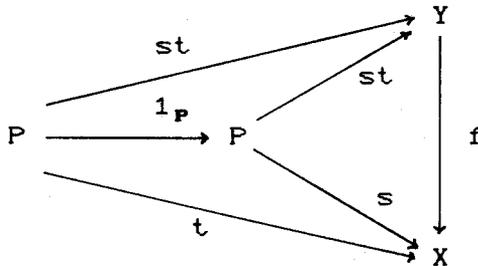
$$\text{grado}_n'(f)_s = \inf_{(P, \sigma, \gamma; \mathcal{P})} (\text{card } \mathcal{P}) - 1 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$$

donde $(P, \sigma, \gamma; \mathcal{P})$ recorre el conjunto de todos los n -ciclos seccionales en f , tales que el morfismo canónico $S\Omega_n(f)_s \rightarrow H_n(X)$ aplica su clase en una clase de homología singular de X no nula.

6.8. TEOREMA. Sea X una variedad de homología conexa, cerrada, orientada y de dimensión n . Sea $f:Y \rightarrow X$ una función continua. Entonces, existe una sección de f , i.e. una función continua $s:X \rightarrow Y$ tal que $fs=1_X$, si y solo si

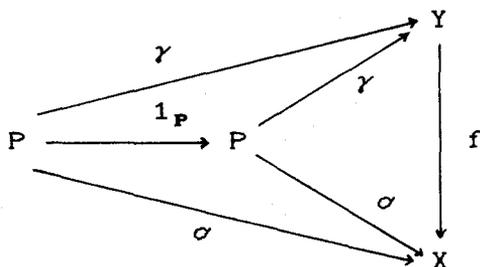
$$\text{grado}_n(f)_s=0 \text{ y } \text{grado}_n'(f)_s=0.$$

Demostración: Sea $s:X \rightarrow Y$ una sección de f . Sea $t:P \rightarrow X$ una triangulación simplicial de X , entonces P es una n -seudovariedad sin borde y t una función inyectiva continua, cumpliéndose que $f(st)=(fs)t=1_X t=t$. Por tanto, (P, t, st) es un n -ciclo seccional en f . Es evidente que $q_n[P, t, st]$ es la clase fundamental de X , por lo cual $\text{grado}_n(f)_s=0$. También, (P, t, st) tiene la descomposición $\mathcal{P}=\langle P \rangle$ y la factorización canónica



por lo cual $\text{grado}_n'(f)_s=0$.

Recíprocamente, supongamos que $\text{grado}_n(f)_s = \text{grado}_n'(f)_s = 0$, entonces se tiene un n -ciclo seccional (P, σ, γ) en f y un diagrama conmutativo



donde σ es biyectiva, continua y abierta localmente, luego es un homeomorfismo. Entonces $s = \gamma \sigma^{-1}: X \rightarrow Y$ cumple que $fs = f\gamma \sigma^{-1} = \sigma \sigma^{-1} = 1_X$, es decir, f tiene una sección.

6.9. EJEMPLO. Sea $f: S^1 \rightarrow S^1$ la aplicación entre dos 1-esferas (p.l.) dada por $f(\cos \varphi, \text{sen } \varphi) = (\cos n\varphi, \text{sen } n\varphi)$.

Sea (P, σ, γ) un 1-ciclo seccional en f tal que $q_*[P, \sigma, \gamma]$ es un generador de $q_*\Omega_1(f)_s$. Entonces $\sigma(P) = S^1$, por lo cual, también $\gamma(P) = S^1$. Pero $f^{-1}(x)$ es un conjunto de n puntos, luego $\sigma: P \rightarrow S^1$ recubre S^1 n veces, por lo cual $q_*[P, \sigma, \gamma]$ es n veces la clase fundamental de S^1 . Por tanto,

$$\text{grado}_1(f)_s > 0.$$

Ya que $(S^1, f, 1_{S^1})$ es un ciclo seccional en f y $q_*[S^1, f, 1_{S^1}] = n[S^1]$, sigue que $\text{grado}_1(f)_s = n-1$.

6.10. EJEMPLO. Sea Y el subespacio de la superficie de Riemann de la función $w = z^n$, formado por los puntos que tienen valor absoluto

1. Sea X la circunferencia de radio 1 y $f:Y \rightarrow X$ definida por $f(z^n)=z$. Entonces $(S^1, 1_{S^1}, g)$, donde $g(z)=z^n$, es un 1-ciclo seccional en f tal que $q_*[S^1, 1_{S^1}, g]$ genera $H_1(S^1)$. luego $\text{grado}_1(f)_s=0$. Ya que 1_{S^1} es inyectiva, también $\text{grado}_1'(f)_s=0$.

En el caso de que la función f sea la identidad en un espacio X , los grados seccional y seccional fuerte de f coinciden con los invariantes topológicos de X que definimos a continuación.

Sea $\langle S_n(X), \partial_n \rangle$ el complejo de cadenas singulares en el espacio X . Las inclusiones $I_n(X) \subseteq CI_n(X)$ y los homomorfismos $CI_n(X) \rightarrow S_n(X)$, dados por $(\Delta_n, \sigma; \mathcal{P}) \rightarrow (\Delta_n, \sigma)$, definen morfismos

$$t_n: HI_n(X) \longrightarrow H_n(X) \quad \text{y} \quad p_n: HCI_n(X) \longrightarrow H_n(X)$$

de los correspondientes grupos de homología. Por (5.25), tenemos que $t_n = p_n \circ \phi_n$.

6.11. DEFINICION: El grado primario del espacio X en dimensión n es el número

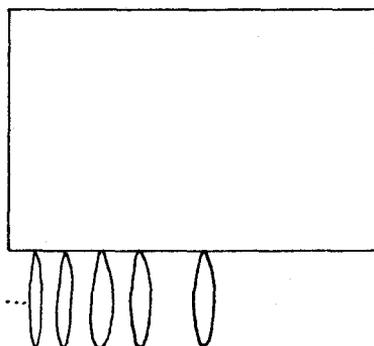
$$\rho_1(X)_n = \text{cardinal} (\text{Coker } t_n) - 1 = \text{cardinal} (\text{Coker } p_n) - 1.$$

Si $\rho_1(X)_n = 0$ entonces todo n -ciclo singular es homólogo a un ciclo inyectivo y puede ser representado geoméricamente por un n -ciclo casi-inyectivo (P, σ) en X . Está claro que el recíproco también es cierto.

6.12. PROPOSICION: Para todo poliedro X , $\rho_1(X)_n=0$ cualquiera que sea la dimensión n .

Demostración: Sea $X=|K|$ una triangulación de X . Cualquier n -ciclo singular z en X es homólogo a un ciclo z' simplicial en alguna subdivisión de K ; z' es trivialmente casi-inyectivo, luego $\rho_1(X)_n=0$.

6.13. EJEMPLO: Sea X el espacio cociente de la 1-esfera $\partial I^2 = \partial[0,1]^2$, obtenido identificando el punto $(1/2n, 0)$ con $(1/2n+1, 0)$, $n=0,1,\dots$



Sea $\alpha: \partial I^2 \rightarrow X$ la función cociente y $[\partial I^2]$ la clase fundamental de ∂I^2 . Supongamos que el 1-ciclo (P, σ) representa $\alpha_*[\partial I^2]$. Entonces $\alpha(P)=X$ y hay en P una infinidad numerable de puntos que tienen dos a dos la misma imagen, cada uno de los puntos obtenidos por la identificación, por lo cual es imposible factorizar canónicamente (P, σ) en contra de la hipótesis, luego $\rho_1(X)_1 \neq 0$. Análogamente llegamos a una contradicción si suponemos que (P, σ) representa un múltiplo de $[X]$, luego

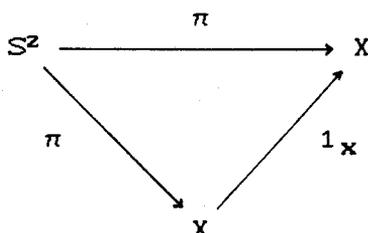
$$\rho_1(X)_1 = \infty .$$

6.14. DEFINICION: Si X es un espacio topológico de homología singular no trivial en dimensión n y $\rho_1(X)_n = 0$, el grado secundario del espacio X en dimensión n es el número

$$\rho_2(X)_n = \inf_{(P, \sigma; \mathcal{P})} \langle \text{card } \mathcal{P} \rangle$$

donde el ínfimo se toma respecto al conjunto de todos los n -ciclos $(P, \sigma; \mathcal{P})$ tales que el morfismo $S\Omega_n(X) \cong HCl_n(X) \rightarrow H_n(X)$ aplica $[P, \sigma]$ en una clase no nula de $H_n(X)$.

6.15. EJEMPLO. Identifiquemos en la 2-esfera S^2 dos 1-símplices disjuntos. Sean X el espacio resultante y $\pi: S^2 \rightarrow X$ la aplicación cociente. Entonces el diagrama



muestra que $\rho_2(X)_2 = 0$.

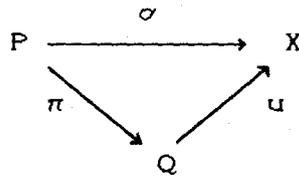
Está claro que $\rho_2(X)_n$ es un número finito. El significado más fuerte de $\rho_2(X)_n$ lo da el siguiente resultado.

6.16. TEOREMA: Sea X una variedad conexa, cerrada, orientada y de dimensión n . Entonces X es triangulable si y solo si $\rho_2(X)_n = 0$.

Demostración: Ya que $H_n(X) = \mathbb{Z}$, si $f: |K| \rightarrow X$ es una triangulación

de X , entonces $H_n(|K|) = \mathbb{Z}$ y hay un ciclo simplicial en K , $\Sigma\sigma_i$, tal que $\Sigma f\sigma_i$ es la clase fundamental de X . Ahora bien, $\Sigma f\sigma_i$ es un ciclo casi-inyectivo, luego $\rho_1(X)_n = 0$. Entonces, como $f: |K| \rightarrow X$ es inyectiva con $|K|$ una n -seudovariedad, resulta que $\rho_2(X)_n = 0$.

Recíprocamente, si $\rho_2(X)_n = 0$, entonces existe un n -ciclo casi-inyectivo (P, σ) con una factorización canónica



con u inyectiva. Por la hipótesis de la definición de $\rho_2(X)_n$ el morfismo

$$S\Omega_n(X) \cong HCl_n(X) \rightarrow H_n(X)$$

aplica $[P, \sigma]$ en un múltiplo de la clase fundamental. Luego σ es epiyectiva y por tanto $u: Q \rightarrow X$ es un homeomorfismo de X con un poliedro Q .

La definición de los grados puede hacerse también con cadenas localmente finitas y pseudobordismos infinitos.

6.18 DEFINICION. Sean X una variedad cerrada conexa de dimensión n . Y un espacio topológico y $f: Y \rightarrow X$ una función continua. Sea $q_n: S\Omega_n^\infty(f)_s \cong HCl_n^\infty(f)_s \rightarrow H_n^{II}(X)$ el homomorfismo inducido por $\Sigma_i(\Delta_n, \sigma_i, \gamma_i) \rightarrow \Sigma_i(\Delta_n, \sigma_i)$. Llamamos grado seccional infinito de f en dimensión n al número

$$\infty\text{-grado}_n(f)_s = \text{cardinal}(\text{coker } q_n) - 1.$$

Si este grado es nulo, llamamos grado seccional infinito

fuerte de f en dimensión n a

$$\omega\text{-grado}'_n(f)_s = \inf_{(P, \sigma, \gamma; \mathcal{P})} (\text{card } \mathcal{P}) - 1 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{+\infty\}$$

donde $(P, \sigma, \gamma; \mathcal{P})$ recorre el conjunto de todos los n -ciclos seccionales en f tales que el morfismo canónico $S\Omega_n^{\infty}(f)_s \rightarrow H^{II}_n(X)$ aplica su clase de pseudobordismo en una clase no nula.

6.19. NOTA. a) Si X es una variedad conexa orientada de dimensión n y $f: Y \rightarrow X$ es continua, $\omega\text{-grado}'_n(f)_s$ coincide con el grado seccional de f , "deg f ", definido por SHIH en 1977 [47]. En efecto, sea t_n el homomorfismo $HI_n^{\infty}(f)_s \rightarrow H^{II}_n(X)$ definido por $(\Delta_n, \sigma, \gamma) \rightarrow (\Delta_n, \sigma)$. "deg f " es, por definición, el orden del grupo $\mathbb{Z}/\text{Im } t_n \cong H^{II}_n(X)/\text{Im } t_n$. Por (5.12), $\text{Im } t_n = \text{Im } q_n$. Luego

$$\text{deg } f = \omega\text{-grado}'_n(f)_s.$$

b) Si X es compacto, entonces los grados seccionales infinitos coinciden con los grados seccionales definidos con cadenas finitas.

6.19. DEFINICION: Sean $t_n: HI_n^{\infty}(X) \rightarrow H^{II}_n(X)$ y $p_n: HCI_n^{\infty}(X) \rightarrow H^{II}_n(X)$ los homomorfismos inducidos por el morfismo de cadenas definido por $(\Delta_n, \sigma; \mathcal{P}) \rightarrow (\Delta_n, \sigma)$. El grado primario infinito del espacio X en dimensión n es el número

$$\rho_1^{\infty}(X)_n = \text{cardinal}(\text{Coker } t_n) - 1 = \text{cardinal}(\text{Coker } p_n) - 1.$$

Si $H^{II}_n(X) \neq 0$, y $\rho_1^{\infty}(X)_n = 0$, el grado secundario infinito del espacio X en dimensión n es el número

$$\rho_2^{\infty}(X)_n = \inf_{(P, \sigma; \mathcal{P})} (\text{card } \mathcal{P}) - 1$$

donde el ínfimo se toma respecto al conjunto de todos las descomposiciones canónicas \mathcal{P} de los n -ciclos $(P, \sigma; \mathcal{P})$ tales que el morfismo $SQI_n^\infty(X) \cong HCl_n^\infty(X) \rightarrow H^{II}_n(X)$ aplica $[P, \sigma]$ en una clase no nula de $H^{II}_n(X)$.

Los teoremas (6.8) y (6.16) también son válidas para los grados infinitos.

6.20. TEOREMA. Sea X una variedad de homología, conexa, orientada, de borde vacío y de dimensión n . Sea $f: Y \rightarrow X$ una función continua. Entonces, existe una sección de f si y solo si

$$\omega\text{-grado}_n(f)_s = 0 \text{ y } \omega\text{-grado}'_n(f)_s = 0 .$$

6.21. TEOREMA: Sea X una variedad conexa, de borde vacío, orientada y de dimensión n . Entonces X es triangulable si y solo si $\omega\text{-}\rho_2(X)_n = 0$.

6.22. NOTA. También se pueden usar cadenas con coeficientes en \mathbb{Z}_2 y pseudovariedades sin orientar, en la definición de los grados seccionales de una función continua $f: Y \rightarrow X$ y en la definición de los grados primarios y secundarios de un espacio, obteniéndose entonces (6.8), (6.16), (6.20) y (6.21) con X no orientada.

CAPITULO VII

GRADO SECCIONAL LOCAL.

Sea $f: Y \rightarrow X$ una función continua, X una variedad de dimensión n . En este capítulo vamos a construir un haz sobre X con los simplices seccionales casi-inyectivos en f , a partir del cual, definiremos en cada punto $x \in X$, un invariante numérico que llamamos grado seccional local de f en x y cuya anulación en todo X es necesaria para que se anule el grado seccional de f en dimensión n .

7.1. DEFINICION. Dado un abierto $A \subseteq X$, sean

$$E_{\mathbb{Z}}.(A) = CI.(f)_s / CI.(f|_{f^{-1}(X-A)})_s,$$

$$E_{\mathbb{Z}}^{\infty}.(A) = CI^{\infty}.(f)_s / CI^{\infty}.(f|_{f^{-1}(X-A)})_s.$$

Si $B \subseteq A$, hay homomorfismos restricción obvios

$$E_{\mathbb{Z}}.(B) \rightarrow E_{\mathbb{Z}}.(A), \quad E_{\mathbb{Z}}^{\infty}.(B) \rightarrow E_{\mathbb{Z}}^{\infty}.(A).$$

Por tanto, $E_{\mathbb{Z}}.$ y $E_{\mathbb{Z}}^{\infty}.$ son prehaces sobre el espacio X . El borde $\partial.$ en $CI.(f)_s$ ($CI^{\infty}.(f)_s$) induce en $E_{\mathbb{Z}}.$ ($E_{\mathbb{Z}}^{\infty}.$) un homomorfismo

diferencial de grado -1 que también designamos por ∂ . y que hace de $E_{\mathbb{Z}} \cdot (E_{\mathbb{Z}}^{\infty})$ un haz diferencial. Análogamente podemos considerar cadenas con coeficientes en \mathbb{Z}_2 y obtenemos entonces los prehaces $E_{\mathbb{Z}_2}$ y $E_{\mathbb{Z}_2}^{\infty}$ sobre X .

En lo sucesivo, escribiremos E_M ($M = \mathbb{Z}$ o \mathbb{Z}_2) cuando la propiedad de que se trate sea cierta para cualquiera de los dos anillos de coeficientes.

7.2. PROPOSICION. Sean $\mathcal{E}_M, \mathcal{E}_M^{\infty}$ los haces generados por los prehaces E_M, E_M^{∞} . Entonces, los homomorfismos canónicos

$$\varphi: E_M(X) \longrightarrow \Gamma_c(X, \mathcal{E}_M) \quad \psi: E_M^{\infty}(X) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{E}_M^{\infty})$$

son isomorfismos. (Γ_c y Γ indican secciones de soporte compacto y cerrado respectivamente.)

Demostración: Para la inyectividad de φ (resp. ψ), es suficiente mostrar que para cada abierto $U \subseteq X$, $E_M(U)$ ($E_M^{\infty}(U)$) no tiene elementos localmente cero no triviales, i.e. elementos s tales que $\varphi(s)$ (resp. $\psi(s)$) sea cero. Sea $c = \sum m_i(\Delta_i, \gamma_i)$ un representante de un elemento s localmente cero de $E_M(U)$ (de $E_M^{\infty}(U)$). Supóngase que $\alpha_i(\Delta_i) \cap U \neq \emptyset$. Entonces hay un punto $x \in U \cap \alpha_i(\Delta_i)$. Ya que s es localmente cero, hay un entorno N_x de x tal que $s|_{N_x} = 0$, pero c representa también $s|_{N_x}$, luego m_i debe ser cero. En consecuencia $c \in \text{CI}_M \cdot (f|_{f^{-1}(X-U)})_s$ ($c \in \text{CI}_M^{\infty} \cdot (f|_{f^{-1}(X-U)})_s$) y por tanto s es cero en $E_M(U)$ (en $E_M^{\infty}(U)$).

Mostremos ahora que son epimorfismos. Sea t una sección de \mathcal{E}_M (\mathcal{E}_M^{∞}) de soporte $|t|$ compacto (cerrado). Para cada $x \in X$, hay un entorno N_x y un elemento $s_x \in E_M(N_x)$ ($s_x \in E_M^{\infty}(N_x)$) tales que $\varphi(s_x) = t|_{N_x}$ ($\psi(s_x) = t|_{N_x}$). Si $x \notin |t|$, podemos considerar $N_x = X - |t|$ y

$s_x = 0$. Los N_x recubren $|t|$ y con $X - |t|$ dan un recubrimiento de X .
 Entonces, por la compacidad de $|t|$ (por la paracompacidad de X),
 hay un recubrimiento abierto finito (localmente finito) $\{U_\alpha\}$ de X
 más fino que el anterior y secciones $s_\alpha \in E_M(U_\alpha)$ (resp.
 $s_\alpha \in E_M^{\text{oo}}(U_\alpha)$), tales que $\varphi(s_\alpha) = t|_{U_\alpha}$. Esta última condición implica
 que las diferencias $\varphi(s_\alpha) - \varphi(s_\beta) = \varphi(s_\alpha - s_\beta)$ son cero en $\Gamma_c(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{Z}_M)$
 (en $\Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{Z}_M^{\text{oo}})$) y por tanto, cada diferencia $s_\alpha - s_\beta$ es
 localmente cero en $E_M(U_\alpha \cap U_\beta)$ (en $E_M^{\text{oo}}(U_\alpha \cap U_\beta)$), luego es trivial.
 Se cumple pues, la siguiente condición de compatibilidad:

$$s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

para todo α, β . Representemos cada s_α por una cadena c_α formada con
 simplices (Δ, σ, γ) tales que $\sigma(\Delta) \cap U_\alpha \neq \emptyset$. Por la compatibilidad
 señalada, cada simplece (Δ, σ, γ) de c_α tal que $\sigma(\Delta) \cap U_\beta \neq \emptyset$, es un
 simplece de la cadena c_β con el mismo coeficiente que en c_α . Ya
 que $\{U_\alpha\}$ es finito (resp. loc. finito), el conjunto de simplices
 casi-inyectivos que pertenecen a alguna cadena c_α es finito (resp.
 loc. finito). Sea $c = \sum m_i (\Delta, \sigma_i, \gamma_i)$ la cadena formada con dichos
 simplices que pertenecen a alguna c_α , tomado con el coeficiente
 con que aparece en c_α . Entonces, está claro que c representa un
 elemento $s \in E_M(X)$ ($s \in E_M^{\text{oo}}(X)$), tal que $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$ para cada α y por
 tanto, $\varphi(s) = t$ ($\psi(s) = t$).

7.3. LEMA. La inclusión $E_M \rightarrow E_M^{\text{oo}}$ induce un isomorfismo $\mathcal{Z}_M \rightarrow \mathcal{Z}_M^{\text{oo}}$.

Demostración: Ya que la inclusión es monomorfismo, induce un
 monomorfismo de haces. Sea $y \in (\mathcal{Z}_M^{\text{oo}})_x$. Elijase un representante $s =$
 $\sum m_i (\Delta, \sigma_i, \gamma_i) \in E_M^{\text{oo}}(N_x)$, N_x un entorno de x . Ya que s es
 localmente finita, hay un entorno $U_x \subseteq N_x$ que corta sólo un número

finito de los $\gamma_i(\Delta.)$ con $m_i \neq 0$. Por tanto, $s|_{U_x} \in E_M.(U_x)$, pero este elemento también representa y , luego $\mathcal{E}_M \rightarrow \mathcal{E}_M^{\infty}$ es epimorfismo.

7.4. LEMA. Sea $A \subseteq Y$ cerrado. Sea $L = \{U_\alpha\}$ una colección de subconjuntos de X cuyos interiores recubren X . Sean $CI_L(f)_s$ y $CI_L(f|_A)_s$ los grupos de cadenas seccionales casi-inyectivas en f y $f|_A$ respectivamente, que contienen sólo simplices $(\Delta., \alpha_i, \gamma_i)$ para los cuales $\alpha_i(\Delta.)$ está contenido en algún conjunto de L . Sea

$$\mu: CI_L(f)_s / CI_L(f|_A)_s \longrightarrow CI(f)_s / CI(f|_A)_s$$

el morfismo inducido por la inclusión $CI_L(f)_s \subseteq CI(f)_s$. Entonces, hay un morfismo

$$\pi: CI(f)_s / CI(f|_A)_s \longrightarrow CI_L(f)_s / CI_L(f|_A)_s$$

y una homotopía $D: CI(f)_s / CI(f|_A)_s \longrightarrow CI(f)_s / CI(f|_A)_s$ tales que

a) $\pi\mu = \text{id.}$,

b) $\text{id.} - \mu\pi = \partial D + D\partial$, y

c) $\pi(CI_q(f|_A)) \subseteq CI_{Lq}(f|_A)$, $D(CI_q(f|_A)) \subseteq CI_{q+1}(f|_A)$.

Demostración: La construcción de los morfismos π y D requiere definir antes la subdivisión de cadenas seccionales.

Dado un r -simplex lineal $t = (v^0, \dots, v^r)$ en Δ_q , el baricentro b_t de t es el punto $b_t = (1/r+1)v^0 + \dots + (1/r+1)v^r$. Si $v \in \Delta_q$, el "joint" vt es el $(q+1)$ -simplex lineal (v, v^0, \dots, v^r) . Con v fijo, esta operación sobre generadores se extiende unívocamente a un homomorfismo $c \rightarrow vc$ de grado $+1$ en el complejo $C.(Q(\Delta_q))$ de simplices lineales en Δ_q , tal que $\partial(vc) = c - v(\partial c)$.

Se definen ([23], p.197) dos sucesiones de morfismos

$$Sd: C_r(Q(\Delta_q)) \longrightarrow C_r(Q(\Delta_q)) \dots y \dots R: C_r(Q(\Delta_q)) \longrightarrow C_{r+1}(Q(\Delta_q))$$

por inducción como sigue: Si $r=0$, entonces Sd es el morfismo

identidad y $R=0$. Para cada r -símplice lineal t en Δ_q con $r>0$, se define usando la operación "joint":

$$Sdt=b_t Sd\partial t, \dots R_t=b_t(t-Sdt-R\partial t). \quad (1)$$

Por inducción se demuestra que

$$\partial Sdc=Sd\partial c, \quad \partial Rc=c-Sdc-R\partial c \quad (2)$$

para cada r -cadena lineal c en Δ_q .

Sea $W=(\Delta_q, \sigma, \gamma)$ un q -símplice seccional casi-inyectivo en $f:Y \rightarrow X$. Definimos un morfismo

$$W_s: C.(\mathcal{Q}(\Delta_q)) \rightarrow C.(f)_s$$

dando su efecto sobre los generadores: $W_s(t)=(\Delta_q, \sigma, \gamma t)$.

Comprobemos que verifica la condición $\partial_r W_s = W_s \partial_r$:

$$\begin{aligned} \partial_r W_s(t) &= \partial_r(\Delta_q, \sigma, \gamma t) = \sum_i (-1)^i (\Delta_{q-1}, \sigma, \gamma t F^{(i)}) = \\ &= W_s \sum_i (-1)^i (\Delta_{q-1}, t F^{(i)}) = W_s \partial_r(t). \end{aligned}$$

Definimos las cadenas seccionales casi-inyectivas SdW y RW por $SdW=W_s Sd1_{\Delta_q}$ y $RW=W_s R1_{\Delta_q}$. Estas operaciones definidas sobre los elementos de la base se extienden unívocamente a morfismos

$$Sd: CI_q(f)_s \rightarrow CI_q(f)_s, \quad R: CI_q(f)_s \rightarrow CI_{q+1}(f)_s$$

Es fácil ver que las fórmulas (2) siguen siendo válidas para cualquier q -cadena seccional casi-inyectiva c en $f:Y \rightarrow X$. Podemos definir las iteradas Sd^n de Sd poniendo $Sd^0 c=c$, $Sd^n c=Sd Sd^{n-1} c$ para $n>0$. Las fórmulas (2) dan entonces

$$\partial Sd^n c = Sd^n \partial c, \quad (4)$$

$$\partial \sum_{0 \leq i \leq n-1} R Sd^i c = c - Sd^n c - \sum_{0 \leq i \leq n-1} R Sd^i \partial c. \quad (5)$$

Si L es una familia de subconjuntos de X (de Y) tal que cada punto de X (de Y) está al menos en el interior de un subconjunto de L y c es una cadena en el complejo $CI_L(f)_s$, entonces Sdc y Rc están ambos en $CI_L(f)_s$, es evidente. Para cada símplice seccional casi-inyectivo $W=(\Delta_q, \sigma, \gamma)$ hay un entero n tal que $Sd^n W \in CI_L(f)_s$. En

efecto, sea $L_\sigma (L_\gamma)$ la familia de subconjuntos de Δ_q de la forma $\sigma^{-1}(B)$ ($\gamma^{-1}(B)$) para $B \in L$. Ya que cada punto $x \in X$ ($y \in Y$) está en el interior de uno de los $B \in L$, sigue que cada punto $v \in \Delta_q$ está en el interior de uno de los conjuntos de L_σ (de L_γ). Ya que el conjunto Δ_q es compacto, existe un número $\varepsilon > 0$ tal que cada subconjunto de Δ_q de diámetro $\varepsilon < 0$ está en uno de los conjuntos de L_σ (L_γ). Basta pues, encontrar n tal que $Sd^{n-1} \Delta_q$ esté formado por simplices de diámetro $< \varepsilon$, lo que siempre es posible (ver p.e. [23] p.63).

Para un q -simplex seccional casi-inyectivo W en $f: Y \rightarrow X$, sea $\langle W_\alpha \rangle$ la familia de simplices seccionales casi-inyectivos consistente en W , sus caras, las caras de estas, etc. Sea $n(W)$ el menor entero tal que $Sd^{n(W)}(W_\alpha)$ está en $CI_L(f)_\varepsilon$ para cada $W_\alpha \in \langle W_\alpha \rangle$. Este entero siempre existe y tiene las siguientes propiedades:

$$n(W^{(i)}) \leq n(W)$$

$$Sd^{n(W)} W \in CI_L(f)_\varepsilon$$

$$\text{Si } W \in CI_L(f)_\varepsilon, \text{ entonces } n(W) = 0$$

$(W^{(i)})$ es la cara i -ésima de $W = (\Delta_q, \sigma, \gamma)$, $W^{(i)} = (\Delta_{q-1}, \sigma F^{(i)}, \gamma F^{(i)})$.

Ahora podemos definir π y D :

$$\pi W = Sd^{n(W)} W + \sum_{i=0}^q (-1)^i \sum_{j=n(W^{(i)})}^{n(W)-1} R Sd^j(W^{(i)}) \quad (6)$$

$$D W = \sum_{j=0}^{n(W)-1} R Sd^j W \quad (7)$$

Observamos que πW es una q -cadena en $CI_L(f)_\varepsilon$ y DW es una $(q+1)$ -cadena en $CI(f)_\varepsilon$. Así se obtienen los morfismos

$$\pi: CI_q(f)_\varepsilon \rightarrow CI_{Lq}(f)_\varepsilon, \quad D: CI_q(f)_\varepsilon \rightarrow CI_{q+1}(f)_\varepsilon$$

Además

$$\pi(CI_q(f|_A)) \subseteq CI_{Lq}(f|_A), \quad D(CI_q(f|_A)) \subseteq CI_{q+1}(f|_A). \quad (8)$$

A partir de (5) y (7) deducimos

$$\partial DW = W - Sd^{n(W)}W - \sum_{i=0}^q (-1)^i \sum_{j=0}^{n(W)-1} R Sd^j W^{(i)},$$

$$D\partial W = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sum_{j=0}^{n(W)^{(i)}-1} R Sd^j W^{(i)}$$

sumando estas dos fórmulas y comparando con (6), encontramos

$$\partial DW + D\partial W = W - \pi W$$

De aquí que, para cada $c \in CI_q(f)_s$,

$$\partial Dc = c - \pi c - D\partial c. \quad (9)$$

Esto implica

$$\partial \pi c = \partial(c - \partial Dc - D\partial c) = \partial c - \partial \partial Dc - \partial D\partial c = \partial c - \partial c + \pi \partial c + D\partial \partial c = \pi \partial c,$$

lo que demuestra que π es un morfismo de cadenas. Por (8), tenemos que define un morfismo de cadenas relativas

$$\pi: CI_*(f)_s / CI_*(f|_A)_s \longrightarrow CI_{L*}(f_s) / CI_{L*}(f|_A)_s$$

y, si μ es el morfismo

$$\mu: CI_{L*}(f)_s / CI_{L*}(f|_A)_s \longrightarrow CI_*(f_s) / CI_*(f|_A)_s$$

inducido por la inclusión, entonces $\pi\mu$ es el morfismo identidad de

$$CI_{L*}(f)_s / CI_{L*}(f|_A)$$

Por otro lado, $\mu\pi c = \pi c$, por lo cual la fórmula (9) da

$$\partial Dc + D\partial c = c - \mu\pi c.$$

Recordemos que un haz diferencial \mathcal{A} es "fine" homotópicamente si para cada recubrimiento localmente finito $\{U_\alpha\}$ de X , podemos encontrar endomorfismos h_α y D de \mathcal{A} tales que

(a) $|h_\alpha| \subseteq U_\alpha$, y

(b) $\Sigma h_\alpha = \text{id} - \partial D - D\partial$.

7.5. PROPOSICION. El haz \mathfrak{E}_Z es "fine" homotópicamente.

Demostración: Dado un recubrimiento localmente finito $L = \langle U_\alpha \rangle$ de X tenemos un prehaz diferencial E_L definido por

$$E_L(U) = \text{CI}_L(f) / \text{CI}_L(f|_{f^{-1}(X-U)})$$

para todo abierto U de X . Sea \mathfrak{E}_L el haz generado por E_L . Ya que E_L es subprehaz diferencial de E_Z , \mathfrak{E}_L es subhaz diferencial de \mathfrak{E}_Z . Por el lema anterior, hay homomorfismos de prehaces $\mu: E_L \rightarrow E_Z$, $\pi: E_Z \rightarrow E_L$ y $D: E_Z \rightarrow E_Z$ tales que $\pi\mu = \text{id}_{F_L}$ y $\text{id}_F - \mu\pi = \partial D + D\partial$. El homomorfismo D induce un homomorfismo de haces $D: \mathfrak{E}_Z \rightarrow \mathfrak{E}_Z$.

Definimos $h'_\alpha: E_L(U) \rightarrow E_L(U)$ como sigue: Sea (Δ, σ, γ) un simplece seccional casi-inyectivo tal que $T_\sigma = \text{Im } \sigma$ está contenido en algún U_{α_0} . Elijamos un α_0 tal y sea $h'_{\alpha_0}((\Delta, \sigma, \gamma)) = (\Delta, \sigma, \gamma)$ y $h'_\alpha((\Delta, \sigma, \gamma)) = 0$ para $\alpha \neq \alpha_0$.

Entonces, tenemos $|h'_\alpha(s)| \subseteq U_\alpha$ para todo s y $\Sigma h'_\alpha = \text{id}$.

Definamos $h''_\alpha: E_Z(U) \rightarrow E_Z(U)$ por $h''_\alpha = \mu h'_\alpha \pi$. Entonces, $|h''_\alpha(s)| \subseteq U_\alpha$ para todo s y $\Sigma h''_\alpha = \mu(\Sigma h'_\alpha)\pi = \mu\pi = \text{id} - \partial D - D\partial$.

Si $x \notin U_{\alpha_0}$, entonces hay un entorno N_x de x disjunto de U_{α_0} . Si $s \in E_Z(N_x)$, entonces tenemos que $h''_{\alpha_0}(s) = 0$, porque $|h''_{\alpha_0}(s)| \subseteq N_x$ y por tanto $|h''_{\alpha_0}(s)| = \emptyset$. Llamando h_α al endomorfismo de \mathfrak{E}_Z generado por h''_α , tenemos entonces que h_α es cero sobre la fibra de \mathfrak{E}_Z en x . Esto muestra que $|h_\alpha| \subseteq U_\alpha$.

Para cualquier $x \in X$, hay un entorno N_x que corta solo un número finito de abiertos U_α . Por tanto, todos salvo un número finito de los h''_α son cero en $E_Z(N_x)$. Ya que $\Sigma h''_\alpha = \text{id} - \partial D - D\partial$, sigue

que los h_α tienen la misma propiedad.

7.6. COROLARIO. $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}_2}$ es "fine" homotópicamente.

Demostración: $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}_2} = \mathcal{E}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}_2$, ya que $E_{\mathbb{Z}_2} \cdot (U) = E_{\mathbb{Z}} \cdot (U) \otimes \mathbb{Z}_2$ porque $E_{\mathbb{Z}} \cdot (U)$ es un módulo libre. Por tanto, si los h_α y D son los endomorfismos de la proposición anterior, entonces los $h_\alpha \otimes 1$ y $D \otimes 1$ son los morfismos que hacen $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}_2}$ "fine" homotópicamente.

7.7. Sea $f: Y \rightarrow X$ continua, X un espacio topológico completamente paracompacto (i.e., tal que cada abierto de X es paracompacto) y ϕ una familia paracompactificante de soportes de X . Supongamos que la dimensión cohomológica de X es finita, $\dim_{\mathbb{Z}} X = k$. (Estas condiciones se cumplen si X es una variedad de dimensión finita). Sea \mathcal{L}' el haz diferencial definido por $\mathcal{L}^q = (\mathcal{E}_M)_{-q}$. Sea $C'(\mathcal{L}^q)$ la resolución canónica de \mathcal{L}^q por haces "flasques". Sea

$$Z^{k+1}(\mathcal{L}^q) = \text{Imagen}(C^k(\mathcal{L}^q) \rightarrow C^{k+1}(\mathcal{L}^q)).$$

Sea $T'(\mathcal{L}^q)$ la resolución finita

$$0 \rightarrow \mathcal{L}^q \rightarrow C^0(\mathcal{L}^q) \rightarrow C^1(\mathcal{L}^q) \rightarrow \dots \rightarrow C^k(\mathcal{L}^q) \rightarrow Z^{k+1}(\mathcal{L}^q) \rightarrow 0,$$

que es un functor exacto de \mathcal{L}^q . Sean $K^{p,q} = \Gamma_\phi(X, T^p(\mathcal{L}^q))$ y $K' = \sum K^{p,q}$.

Tomamos $d': K^{p,q} \rightarrow K^{p+1,q}$, el morfismo inducido por la diferencial del complejo $\Gamma_\phi(X, T'(\mathcal{L}^q))$ y $(-1)^p d'' = K^{p,q} \rightarrow K^{p,q+1}$ el morfismo inducido por $\mathcal{L}^q \rightarrow \mathcal{L}^{q+1}$. Sea $d = d' + d''$ la diferencial total y K' el complejo total, con $K^n = \sum_{p+q=n} K^{p,q}$.

Asociada a la primera filtración de K' , hay una sucesión espectral convergente (ver [7])

$${}^p E_2^{p,q} = H_\phi^p(X, \mathcal{L}^q(\mathcal{L})) \Rightarrow H^{p+q}(K'),$$

donde $\mathcal{K}'(\mathcal{L})$ es el haz derivado de \mathcal{L} y que coincide con el haz engendrado por el prehaz $U \rightarrow \text{HCl}((f, f|_{f^{-1}(X-U)})_s$ (tomando los coeficientes en $M = \mathbb{Z}$ o \mathbb{Z}_2 , según sea el caso).

Asociada a la segunda filtración de K' , hay una sucesión espectral

$${}''E_2^{pq} = \text{HP}(H_\phi^q(X, \mathcal{L}'))$$

en la cual, ${}''E_2^{pq} = 0$ para todo $q > 0$ ya que \mathcal{L}' es homotópicamente "fine" (por serlo \mathcal{E}_M). Por tanto, el homomorfismo

$$\text{HP}(\Gamma_\phi(X, \mathcal{L}')) = {}''E_2^{p0} \rightarrow \text{HP}(K')$$

(inducido por la inclusión de complejos $\Gamma_\phi(X, C^0(\mathcal{L}')) \rightarrow K'$), es un isomorfismo ([7], p.132). En consecuencia,

$${}'E_2^{pq} = H_\phi^p(X; \mathcal{K}_{-q}(\mathcal{L})) \Rightarrow \text{HP}^{p+q}(K) \cong \text{HP}^{p+q}(\Gamma_\phi(X, \mathcal{L}')) = H_{-p-q}(\Gamma_\phi(X, \mathcal{E}_M)).$$

Teniendo en cuenta (3.6), (4.3), (4.12) y (7.2), (7.3), obtenemos el siguiente resultado

TEOREMA. Sea $f: Y \rightarrow X$ continua, X un espacio completamente paracompacto de dimensión cohomológica $\dim_{\mathbb{Z}} X$ finita. Entonces hay sucesiones espectrales convergentes

$$E_2^{pq} = H_c^p(X; \mathcal{K}_{-q}(\mathcal{E}_{\mathbb{Z}})) \Rightarrow \text{HCl}_{-p-q}(f)_s = S\Omega_{-p-q}(f)_s,$$

$$E_2^{pq} = \text{HP}(X; \mathcal{K}_{-q}(\mathcal{E}_{\mathbb{Z}})) \Rightarrow \text{HCl}_{-p-q}^\infty(f)_s = S\Omega_{-p-q}^\infty(f)_s,$$

con $\mathcal{K}(\mathcal{E}_{\mathbb{Z}})$ el haz generado por el prehaz $U \rightarrow \text{HCl}((f, f|_{f^{-1}(X-U)})_s$, y

$$E_2^{pq} = H_c^p(X; \mathcal{K}_{-q}(\mathcal{E}_{\mathbb{Z}_2})) \Rightarrow \text{HCl}_{-p-q}(f; \mathbb{Z}_2)_s = S\eta_{-p-q}(f)_s,$$

$$E_2^{pq} = \text{HP}(X; \mathcal{K}_{-q}(\mathcal{E}_{\mathbb{Z}_2})) \Rightarrow \text{HCl}_{-p-q}^\infty(f; \mathbb{Z}_2)_s = S\eta_{-p-q}^\infty(f)_s,$$

con $\mathcal{K}(\mathcal{E}_{\mathbb{Z}_2})$ el haz generado por el prehaz $U \rightarrow \text{HCl}((f, f|_{Y-U}; \mathbb{Z}_2)_s$.

7.8. COROLARIO. Sean X una variedad de dimensión n , $f: Y \rightarrow X$ una función continua. Entonces hay isomorfismos

$$\begin{aligned} S\Omega_n(f)_s &\cong \Gamma_c(X; \mathcal{X}_n(\delta_Z)), & S\Omega_n^0(f)_s &\cong \Gamma(X; \mathcal{X}_n(\delta_Z)), \\ S\eta_n(f)_s &\cong \Gamma_c(X; \mathcal{X}_n(\delta_Z)), & S\eta_n^0(f)_s &\cong \Gamma(X; \mathcal{X}_n(\delta_Z)) \end{aligned}$$

Demostración: Mostramos sólo la existencia del primer isomorfismo, la demostración para los demás es análoga.

Partimos del complejo K^{pq} con el que se establece la primera sucesión espectral de (7.7). Este es nulo si $p < 0$, luego $'K_0 = K$ y $'F_0 H^q(K) = H^q(K)$ para todo q . También $K^{pq} = 0$ si $p > n+1$ ya que $\dim_{\mathbb{Z}} X = \dim X = n$, luego $'K_p = 0$ y $'F_p H^{p+q}(K) = 0$ si $p > n+1$. En especial, $'F_{n+2} H^{-n}(K) = 0$.

En la sucesión espectral $'E_2^{pq} = H_c^p(X, \mathcal{X}_{-q}(\delta_Z))$ tenemos que $'E_2^{pq} = 0$ si $p < 0$, $p > n+1$. También $'E^{pq} = 0$ si $q < -n$, ya que entonces $H^1_{-q}(f, f|_{f^{-1}(X-U)})_s = 0$ implica que $\mathcal{X}_{-q}(\delta_Z) = 0$. En consecuencia,

$$'E_2^{0(-n)} \cong 'E_3^{0(-n)} \cong \dots \cong 'E_{\infty}^{0(-n)} = 'F_0 H^{-n}(K) / 'F_1 H^{-n}(K) = H^{-n} / 'F_1 H^{-n}(K)$$

y, para $p > 0$,

$$0 = 'E_{\infty}^{p, -(p+n)} = 'F_p H^{-n}(K) / 'F_{p+1} H^{-n}(K),$$

de donde

$$'F_1 H^{-n}(K) = 'F_{n+2} H^{-n}(K).$$

Teniendo en cuenta (3.6), (7.2) y (7.7), $S\Omega_n(f)_s \cong H_n \Gamma_c(X, \delta_Z) \cong H^{-n}(K')$. Entonces obtenemos que

$$S\Omega_n(f)_s \cong 'E_2^{0(-n)} = H_c^0(X, \mathcal{X}_n(\delta_Z)) = \Gamma_c(X, \mathcal{X}_n(\delta_Z)).$$

En el resto del apartado supondremos que X es una variedad de dimensión n .

7.9. Sea \mathcal{O} el haz engendrado por el prehaz $U \rightarrow H_n(X, X-U)$. Es bien conocido ([28], cap. 22) que $H_n(X) = \Gamma_c(X, \mathcal{O})$ y que la fibra de \mathcal{O} en $x \in X$ es $\mathcal{O}_x = H_n(X, X-x) \cong \mathbb{Z}$. Dada una función continua $f: Y \rightarrow X$, el

homomorfismo

$$HCl_n(f, f|_{f^{-1}(X-U)})_s \rightarrow H_n(X, X-U)$$

de los prehaces sobre X $U \rightarrow HCl_n(f, f|_{f^{-1}(X-U)})_s$ y $U \rightarrow H_n(X, X-U)$, inducido por la proyección de cadenas $(\Delta_n, \sigma, \gamma) \rightarrow (\Delta_n, \sigma)$, define por paso al límite un morfismo

$$\pi : \mathcal{X}_n(\mathcal{E}_Z) \rightarrow \mathcal{O}$$

entre los haces generados.

DEFINICION. El grado seccional local de $f: Y \rightarrow X$ en el punto $x \in X$ es el número

$$\text{grado}_x(f)_s = \text{card}(\text{coker } \pi_x) - 1,$$

donde π_x es el homomorfismo $\mathcal{X}_n(\mathcal{E}_Z)_x \rightarrow \mathcal{O}_x$ inducido por π sobre las fibras en x .

A continuación, obtenemos la relación entre el grado seccional local y el grado seccional de una función continua.

7.10. PROPOSICION. Si $\omega\text{-grado}_n(f)_s = 0$, entonces $\text{grado}_x(f)_s = 0$ en todo $x \in X$.

Demostración: Si $\omega\text{-grado}_n(f)_s = 0$, entonces $q_n: S\Omega_n(f)_s \rightarrow H^{II}(X)$ es sobre, luego también lo es $\pi: \Gamma(X, \mathcal{X}_n(\mathcal{E}_Z)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O})$ y, particularizando en x , se tiene que $(\mathcal{E}_Z)_x \rightarrow \mathcal{O}_x \rightarrow 0$ es exacta.

7.11. Supongamos que $\text{grado}_x(f)_s = 0$ en todo $x \in X$. Esto es equivalente a que exista la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}_n(\mathcal{E}_Z) \xrightarrow{\pi} 0 \longrightarrow 0,$$

donde $\mathcal{K} = \text{Ker}(\pi)$. Sea

$$0 \longrightarrow \Gamma_c(X, \mathcal{K}) \longrightarrow \Gamma_c(X, \mathcal{K}_n(\mathcal{E}_Z)) \longrightarrow \Gamma_c(X, 0) \xrightarrow{\delta^1} H_c^1(X, \mathcal{K}) \longrightarrow \dots$$

su sucesión de cohomología con soportes compactos. Entonces se tiene:

PROPOSICION. Si $\text{grado}_x(f)_s = 0$ en todo x , entonces $\text{grado}_n(f)_s = 0$ si y sólo si $\delta^1 = 0$.

Demostración: $\delta^1 = 0$ si y sólo si $\Gamma_c(X, \mathcal{K}_n(\mathcal{E}_Z)) \longrightarrow \Gamma_c(X, 0)$ es epimorfismo. Teniendo en cuenta que $H_n(X) = \Gamma_c(X, 0)$ y que, por (7.8), $S\Omega_n(f)_s = \Gamma_c(X, \mathcal{K}_n(\mathcal{E}_Z))$, lo anterior equivale a que $q_n: S\Omega_n(f)_s \rightarrow H_n(X)$ sea epimorfismo y por tanto, a que $\text{grado}_n(f)_s = 0$.

Análogamente, se tiene el resultado siguiente

7.12. PROPOSICION. Si $\text{grado}_x(f)_s = 0$ en todo $x \in X$, entonces $\omega\text{-grado}(f)_s = 0$ si y si es nulo el homomorfismo δ^1 de la sucesión de cohomología

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}_n(\mathcal{E}_Z)) \longrightarrow \Gamma(X, 0) \xrightarrow{\delta^1} H^1(X, \mathcal{K}) \longrightarrow \dots$$

Partiendo de la homología con coeficientes en \mathbb{Z}_2 , se obtiene la noción de grado local no orientado.

7.13. DEFINICION. Sea \mathcal{N} el haz de fibra \mathbb{Z}_2 generado por $U \rightarrow H(X, X-U; \mathbb{Z}_2)$. El grado local no orientado de $f: Y \rightarrow X$ en el punto $x \in X$ es el número

$$\mathbb{Z}_2\text{-grado}_x(f)_s = \text{card}(\text{coker } \pi'_x) - 1,$$

donde π'_x es el homomorfismo inducido sobre las fibras en x por el homomorfismo canónico $\pi': \mathcal{K}_n(\mathcal{E}_{\mathbb{Z}_2}) \rightarrow \mathcal{N}$.

7.14. NOTA: Es evidente que (7.10)-(7.12) se generalizan sin dificultad a los grados seccionales no orientados, globales y local, de f .

CAPITULO VIII

NOTA SOBRE COHOMOLOGIA.

A continuación, se emplea el método habitual de construcción de la cohomología singular para definir los grupos de cohomología seccional casi-inyectiva. Obtenemos para estos algunas de las propiedades fundamentales de aquellos de forma casi inmediata.

8.1. Para cualquier $(f, f_0; g) \in \mathcal{D}$ y cualquier grupo abeliano G , definimos

$$CI^n(f, f_0; g; G)_s = \text{Hom}(CI_n(f, f_0; g)_s, G)$$

y

$$\delta^n: CI^n(f, f_0; g; G)_s \longrightarrow CI^{n+1}(f, f_0; g; G)_s$$

por $\delta^n = \text{Hom}(\partial_{n+1}, 1_G)$. Entonces

$$CI^*(f, f_0; g; G)_s = \langle CI^n(f, f_0; g; G)_s, \delta^n \rangle$$

es un complejo de cocadenas. Definimos el n -ésimo grupo de cohomología casi-inyectiva de $(f, f_0; g)$ con coeficientes en el

grupo G como el n -ésimo grupo de cohomología asociado a dicho complejo:

$$HCI^n(f, f_0; g; G)_s = H^n(CI^*(f, f_0; g; G)_s) = \text{Ker } \delta^n |_{I_m \delta^{n-1}}, \quad (n \geq 0)$$

8.2. Sea $h: (f, f_0; g) \rightarrow (f', f_0'; g')$ un morfismo, entonces tenemos el mapa de cadenas inducido

$$h.: CI.(f, f_0; g)_s \longrightarrow CI.(f', f_0'; g')_s$$

que de lugar a un mapa de cadenas

$$h' = \text{Hom}(h., 1) : CI'(f', f_0'; g'; G)_s \longrightarrow CI'(f, f_0; g; G)_s$$

y por tanto a un homomorfismo inducido de grupos de cohomología

$$f^* : HCI^n(f', f_0'; g'; G)_s \longrightarrow HCI^n(f, f_0; g; G)_s$$

para todo $n=0, 1, \dots$

8.3. Para cualquier $(f, f_0; g) \in \mathcal{D}$ hay una sucesión exacta escindible de complejos de cadenas

$$0 \longrightarrow CI.(f_0)_s \longrightarrow CI.(f)_s \longrightarrow CI.(f, f_0; g)_s \longrightarrow 0$$

y aplicando el functor $\text{Hom}(_, G)$, obtenemos la sucesión exacta de complejos de cocadenas

$$0 \longleftarrow CI'(f_0; G)_s \longleftarrow CI'(f; G)_s \longleftarrow CI'(f, f_0; g; G)_s \longleftarrow 0$$

para cualquier grupo abeliano G . Sigue de aquí que hay una sucesión exacta de grupos de cohomología:

$$\longleftarrow HCI^n(f_0; G)_s \longleftarrow HCI^n(f; G)_s \longleftarrow HCI^n(f, f_0; g; G)_s \longleftarrow HCI^{n-1}(f_0; G)_s \longleftarrow$$

8.4. Si P es un espacio consistente en un solo punto, entonces $CI_n(1_P)_s$ tiene un solo generador para todo $n=0, 1, \dots$, por lo cual,

$\delta^{2n} = 0$, δ^{2n+1} es sobre y en consecuencia $\text{Ker } \delta^0 \cong G$, $\text{Ker } \delta^{2n} = \delta^{2n-1}$ y $\text{Ker } \delta^{2n-1} = 0$ para $n=1,2,\dots$. Por tanto, tenemos que la cohomología casi-inyectiva de un punto es

$$\text{HCI}^n(1_P; G) = \begin{cases} G & , \text{ si } n=0 \\ 0 & , \text{ si } n>0. \end{cases}$$

Ya que para cualquier $(f, f_0; g) \in \mathcal{D}$, el complejo de cadenas $\text{CI} \cdot (f, f_0; g)_s$ es un complejo de grupos abelianos libres, tenemos la validez del siguiente teorema de coeficientes universales

8.5. TEOREMA: Para cualquier $(f, f_0; g) \in \mathcal{D}$ y cualquier grupo abeliano G existe una sucesión exacta corta escindible:

$$0 \rightarrow \text{Ext}(\text{HCI}_{n-1}(f, f_0; g)_s, G) \xrightarrow{\alpha} \text{HCI}^n(f, f_0; g; G)_s \xrightarrow{\beta} \text{Hom}(\text{HCI}_n(f, f_0; g)_s, G) \rightarrow 0$$

Los homomorfismos α y β son naturales respecto a homomorfismos inducidos por aplicaciones continuas inyectivas y homomorfismos de coeficientes.

8.6. Sea $(f, f_0; g) \in \mathcal{D}$, con $f: Y \rightarrow X$, $f_0: Y_0 \rightarrow X_0$ y $g = (g_0, g_1)$ formado por inclusiones. Sea U abierto de X contenido en X_0 . Tenemos la siguiente sucesión exacta escindible de complejos de cadenas:

$$0 \rightarrow \text{CI}(f|_{Y-f^{-1}(U)}, f_0|_{Y_0-f_0^{-1}(U)}; g')_s \xrightarrow{i} \text{CI}(f, f_0; g)_s \rightarrow \text{Coker } i \rightarrow 0$$

siendo g' la restricción de g correspondiente. Pasando a la sucesión exacta de homología, vemos que

$$i_*: \text{HCI}_n(f|_{Y-f^{-1}(U)}, f_o|_{Y_o-f_o^{-1}(U)}; g')_s \rightarrow \text{HCI}_n(f, f_o; g)_s$$

es un isomorfismo para todo n si y solo si $H_n(\text{Coker } i_*) = 0$ para todo n . Teniendo en cuenta los isomorfismos

$$\begin{aligned} \text{HCI}_n(f|_{Y-f^{-1}(U)}, f_o|_{Y_o-f_o^{-1}(U)}; g')_s &\cong \\ &\cong \text{SQ}_n(f|_{Y-f^{-1}(U)}, f_o|_{Y_o-f_o^{-1}(U)}; g')_s \text{ y} \\ \text{HCI}_n(f, f_o; g)_s &\cong \text{SQ}_n(f, f_o; g)_s \end{aligned}$$

y que el teorema de excisión vale para $\text{SQ}_*()_s$, podemos concluir que el morfismo i_* anterior es un isomorfismo si U es un abierto tal que $\text{clausura de } U \subseteq \text{int } X_o$ y $\text{clausura de } f_o^{-1}(U) \subseteq \text{int } Y_o$.

Los isomorfismos i_* y el teorema anterior nos permiten establecer el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas,

donde $f' = f|_{Y-f^{-1}(U)}$ y $f_o' = f_o|_{Y_o-f_o^{-1}(U)}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \text{Ext}(\text{HCI}_{n-1}(f', f_o'; g')_s; G) & \rightarrow & \text{HCI}^n(f', f_o'; g'; G)_s & \rightarrow & 0 \\ & \cong \uparrow \text{Ext}(i_*, 1) & & \uparrow i_* & \\ 0 \rightarrow \text{Ext}(\text{HCI}_{n-1}(f, f_o; g)_s; G) & \rightarrow & \text{HCI}^n(f, f_o; g; G)_s & \rightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \rightarrow \text{Hom}(\text{HCI}_n(f', f_o'; g')_s; G) & \rightarrow & 0 \\ & \cong \uparrow \text{Hom}(i_*, 1) & \\ \rightarrow \text{Hom}(\text{HCI}_n(f, f_o; g)_s; G) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

que según el lema de los cinco, implica que i_* es un isomorfismo. Tenemos pues, la siguiente propiedad de escisión para cohomología:

Sea $(f, f_o; g) \in \mathcal{D}$, con $f: Y \rightarrow X$, $f_o: Y_o \rightarrow X_o$ y $g = (g_o, g_1)$ formado por inclusiones. Sea U abierto de X tal que $\text{clausura de } U \subseteq \text{int } X_o$ y $\text{clausura de } f_o^{-1}(U) \subseteq \text{int } Y_o$. Sea $f' = f|_{Y-f^{-1}(U)}$, $f_o' = f_o|_{Y_o-f_o^{-1}(U)}$

y g' la restricción correspondiente de g . Entonces

$$i^* : \text{HCI}^n(f, f_0; g; G)_s \longrightarrow \text{HCI}^n(f', f_0'; g'; G)_s$$

es un isomorfismo para todo n .

8.7. Sean $f_0, f_1: (f, f_0; g) \longrightarrow (f', f_0'; g')$ morfismos homotópicos en \mathcal{D} . Está demostrado que f_0 y f_1 inducen el mismo homomorfismo de grupos

$$S\Omega_n(f, f_0; g)_s \longrightarrow S\Omega_n(f', f_0'; g')_s$$

para todo n . Por los isomorfismos $S\Omega_n(f, f_0; g)_s \cong \text{HCI}_n(f, f_0; g)_s$ y $S\Omega_n(f', f_0'; g')_s \cong \text{HCI}_n(f', f_0'; g')_s$, tenemos entonces la siguiente igualdad de homomorfismos

$$f_{0*} = f_{1*} : \text{HCI}_n(f, f_0; g)_s \longrightarrow \text{HCI}_n(f', f_0'; g')_s .$$

Podemos usar el teorema de coeficientes universales para establecer el siguiente diagrama conmutativo con las filas exactas y escindibles:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow \text{Ext}(\text{HCI}_{n-1}(f', f_0'; g')_s; G) & \longrightarrow & \text{HCI}^n(f', f_0'; g'; G)_s & \longrightarrow & & & \\ & & \downarrow f_{0*} - f_{1*} & & & & \\ 0 \longrightarrow \text{Ext}(\text{HCI}_{n-1}(f, f_0; g)_s; G) & \longrightarrow & \text{HCI}^n(f, f_0; g; G)_s & \longrightarrow & & & \\ & & \longrightarrow \text{Hom}(\text{HCI}_n(f', f_0'; g')_s, G) & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow h & & & & \\ & & \longrightarrow \text{Hom}(\text{HCI}_n(f, f_0; g)_s; G) & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

donde $g = \text{Ext}(f_{0*} - f_{1*}, 1)$ y $h = \text{Hom}(f_{0*} - f_{1*}, 1)$. Ya que $f_{0*} = f_{1*}$ sigue que $f_{0*} = f_{1*}$; es decir, tenemos la siguiente propiedad de homotopía:

Si $f_0, f_1: (f, f_0; g) \longrightarrow (f', f_0'; g')$ son morfismos homotópicos en \mathcal{D} , entonces los homomorfismos de cohomología inducidos son iguales:

$$f_0^* = f_1^* : \text{HCI}^n(f', f_0'; g'; G)_s \longrightarrow \text{HCI}^n(f, f_0; g; G)_s.$$

En resumen, es cierto lo siguiente:

8.8. TEOREMA: $\text{HCI}^*(; G)_s$ y δ^* definen una teoría de cohomología con coeficientes en el grupo abeliano G sobre la categoría \mathcal{D} .

SEGUNDA PARTE

SEUDOBORDISMO SECCIONAL DIFERENCIABLE

CAPITULO IX

SEUDOBORDISMO DE INMERSIONES DIFEOMORFAS (PLONGEMENTS).

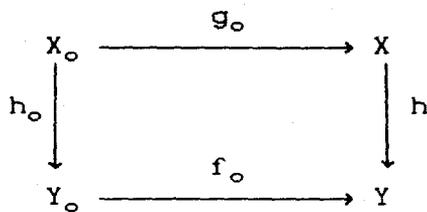
DEFINICIONES Y PROPIEDADES.

Si X es una variedad de clase C^∞ , designaremos por cX la variedad de clase C^∞

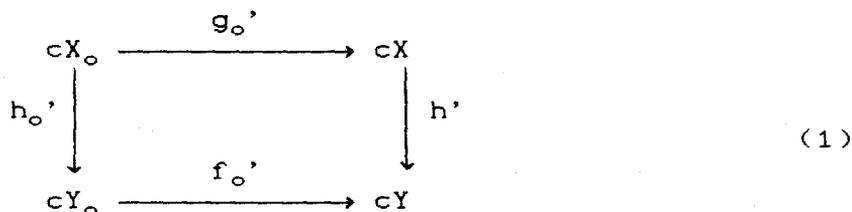
$$X \cup [0,1) \times \partial X$$

obtenida pegando X con $[0,1) \times \partial X$ según la inmersión canónica $\partial X \rightarrow 0 \times \partial X$.

Sea $IDIF_k$ ($k \geq 1$) la categoría siguiente. Los objetos de $IDIF_k$ son las ternas $(X, X_0; g_0)_k$ formadas por dos variedades X, X_0 de clase C^∞ y una inmersión difeomorfa (plongement) $g_0: X_0 \rightarrow X$ de clase C^k que es la restricción a X_0 de una inmersión difeomorfa de clase C^k $g_0': cX_0 \rightarrow cX$. Los morfismos de $(X, X_0; g_0)_k$ en $(Y, Y_0; f_0)_k$ son pares $(h, h_0)_k$ de inmersiones difeomorfas de clase C^k que hacen conmutativo el diagrama

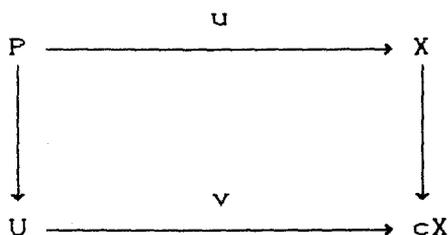


de forma que h , h_0 , f_0 y g_0 tienen extensiones h' , h_0' , f_0' y g_0' que son inmersiones difeomorfas de clase C^k y hacen conmutativo el diagrama



Está claro que $IDIF_k$ es subcategoría de la categoría TOPI definida en el capítulo V y por tanto, qué debe entenderse por una homotopía o un punto de $IDIF_k$.

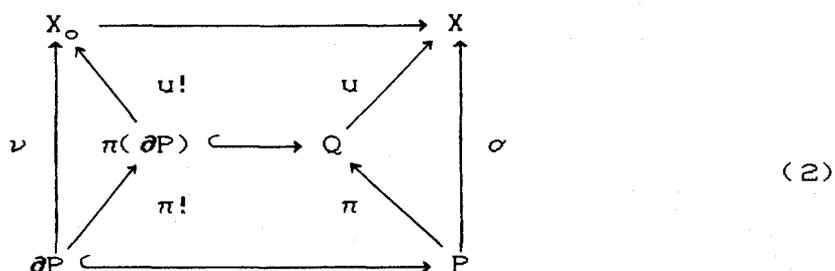
Si P es un poliedro euclideo de dimensión n , $u: P \rightarrow X$ una función continua y $X \in IDIF_k$, diremos que u es inmersión difeomorfa plana de clase C^k si existe un entorno regular abierto U de P en \mathbb{R}^n y un diagrama conmutativo de la forma



siendo v una inmersión difeomorfa de clase C^k . La aplicación vacía

\emptyset también se considerará inmersión difeomorfa de clase C^k en cualquier variedad.

9.1.DEFINICION. Un n-ciclo de clase C^k en $(X, X_0; g_0)_{k \in \text{IDIF}_k}$ es $(P, \sigma; \partial P, \nu; \mathcal{P})_k$ formada por una n-seudovariedad P con borde ∂P , una familia finita $\mathcal{P} = \{P_i\}$ de subpoliedros compactos de P de dimensión n tales que $P = \bigcup_i P_i$ e $\text{int } P_i \cap \text{int } P_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y dos funciones diferenciables σ, ν de clase C^k tales que existe un diagrama conmutativo



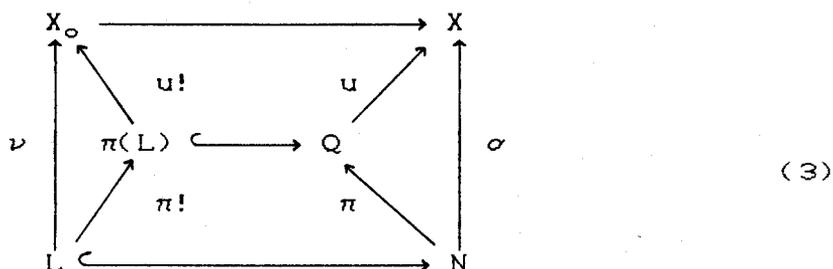
siendo Q un poliedro, π un p.l.-epimorfismo, u y $u!$ diferenciables de clase C^k , tales que para cada $P_i \in \mathcal{P}$, $u|_{\pi(P_i)}$ y $u!|_{\pi(P_i \cap \partial P)}$ son inmersiones difeomorfas planas de clase C^k en X y X_0 respectivamente.

Por convenio, \emptyset también es un n-ciclo de clase C^∞ en $(X, X_0; g_0)_k$.

Es evidente que $(P, \sigma; \partial P, \nu; \mathcal{P})_k$ es un n-ciclo casi-inyectivo en $(X, X_0; g_0)_k$. Dos n-ciclos son iguales si son iguales como n-ciclos casi-inyectivos.

\mathcal{P} se llamará descomposición canónica y el diagrama (2) se llamará factorización canónica del ciclo.

9.2. DEFINICION. Una (n+1)-cadena de clase C^k en $(X, X_0; g_0)_k$ es $(N, \sigma; L, \nu; \mathcal{N})_k$, formado por una (n+1)-seudovariiedad N con borde, una n-seudovariiedad $L \subseteq \partial N$ con borde, una familia finita $\mathcal{N} = \{N_i\}$ de subpoliedros compactos de N de dimensi3n n+1 tal que $\text{int } N_i \cap \text{int } N_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $N = \bigcup_i N_i$, y dos funciones diferenciables σ y ν de clase C^k tales que existe un diagrama conmutativo de la forma siguiente



donde Q es un poliedro, π un p.l.-epimorfismo, u y $u!$ diferenciables de clase C^k tales que para cada $N_i \in \mathcal{N}$, $u|_{\pi(N_i)}$ y $u|_{\pi(N_i \cap \partial N - L)}$ son inmersiones difeomorfas planas de clase C^k en X y $u!|_{\pi(N_i \cap L)}$ y $u!|_{\pi(N_i \cap \partial L)}$ son inmersiones difeomorfas planas de clase C^k en X_0 .

\mathcal{N} se llamará descomposici3n can3nica y el diagrama (3) se llamará factorizaci3n can3nica de la cadena.

Es inmediato que $(N, \sigma; L, \nu; \mathcal{N})_k$ es una (n+1)-cadena casi-inyectiva en $(X, X_0; g_0)_k$ y que su borde $\partial(N, \sigma; L, \nu)_k$ es un n-ciclo de clase C^k en $(X, X_0; g_0)_k$.

Por lo general, la clase C^k de ciclos y cadenas ser3 denotada s3lo por el sub3ndice k.

9.3. NOTA. Puesto que las cadenas y ciclos de clase C^k en $(X, X_0; g_0)_k$ son un caso particular de cadenas y ciclos casi-inyectivos en $(X, X_0; g_0)_k$, se traslada fácilmente al caso diferenciable las nociones de functor orientación, cara de una cadena, etc. dadas en el capítulo I. En particular, decimos que dos n -ciclos $(P_1, \sigma_1; \partial P_1, \nu_1; \mathcal{P}_1)_k$ y $(P_2, \sigma_2; \partial P_2, \nu_2; \mathcal{P}_2)_k$ en $(X, X_0; g_0)_k$ son pseudobordantes si hay una $(n+1)$ -cadena $(N, \sigma; L, \nu; \mathcal{N})_k$ tal que

$$\partial(N, \sigma; L, \nu; \mathcal{N})_k = (P_1, \sigma_1; \partial P_1, \nu_1; \mathcal{P}_1)_k + \Theta(P_2, \sigma_2; \partial P_2, \nu_2; \mathcal{P}_2)_k .$$

Esta relación entre n -ciclos en $(X, X_0; g_0)_k$ es de equivalencia. Al conjunto de clases de equivalencia por dicha relación lo designamos por $SQID_n(X, X_0; g_0)_k$; es un grupo conmutativo con la operación $+$ inducida por la suma de n -ciclos en $(X, X_0; g_0)_k$ y lo llamaremos el n -ésimo grupo de pseudobordismo de inmersiones difeomorfas de $(X, X_0; g_0)_k$. Es fácil demostrar que cambiar la descomposición canónica de un ciclo no altera su clase de pseudobordismo, por lo cual en adelante prescindiremos de indicar dichas descomposiciones en la notación.

Todas las propiedades generales enunciadas en el capítulo V para SQI_* y la categoría TOPI tienen su análoga evidente para $SQID_*$ y la categoría IDIF $_k$. En particular $SQID_*$ y ∂_* , definido por $\partial_*[P, \sigma; \partial P, \nu]_k = [\partial(P, \sigma; \partial P, \nu)]_k$, definen una teoría de homología ordinaria con coeficientes en \mathbb{Z} sobre la categoría IDIF $_k$. Las demostraciones son como las dadas entonces, por lo cual no hace falta repetirlas ahora.

CAPITULO X

SEUDOBORDISMO DE \mathbb{R}^n Y \mathbb{R}^n_+

Aquí se demuestra que los grupos de pseudobordismo de inmersiones difeomorfas del espacio y del semiespacio euclideo de dimensión n , son isomorfos a los respectivos grupos de homología singular en las dimensiones $\neq n$. Este es el caso particular básico para extender el isomorfismo a cualquier variedad diferenciable, tal como se hará en el capítulo siguiente.

10.1. DEFINICION. Sea s un q -símplice contenido en algún \mathbb{R}^m ($m > q$), $\lambda: s \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua, b un punto de \mathbb{R}^m situado fuera del subespacio afín engendrado por s y sea $p \in \mathbb{R}^n$. Se denota $C_p \lambda: bs \rightarrow \mathbb{R}^n$ (bs es el "joint" de s con b) el cono de vértice p y base λ :

$$C_p \lambda(x) = t\lambda(y) + (1-t)p$$

con $x = tV_0(y) + (1-t)b$ donde $V_0: s \rightarrow bs$ es la inyección canónica y $t \in [0, 1]$.

10.2. DEFINICION. Sea $s=(a_0, a_1, \dots, a_q)$ un q -símplice, $\lambda: s \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Entonces

$$\lambda_L : s \rightarrow \mathbb{R}^n$$

designa el símplice lineal afín definido por $\lambda_L(a_k) = \lambda(a_k)$ cualquiera que sea $0 \leq k \leq q$. A esta función λ_L se le llama la función secante inducida por λ .

10.3. DEFINICION. Se llama función regularizadora a la función $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $r(t) = e^{1-1/t^2}$, si $t \neq 0$, y $r(0) = \lim_{t \rightarrow 0} e^{1-1/t^2}$. Es fácil ver que es de clase C^∞ y que dicha función y todas sus derivadas son nulas en $t=0$. Observemos además que se tienen las acotaciones $|r(t)| \leq 1$ y $|r'(t)| \leq 3$, para todo $t \in \mathbb{R}$, que serán usadas más adelante.

10.4. DEFINICION. (LALONDE [33], p.127): Sean $s=(a_0, a_1, \dots, a_q)$ un q -símplice contenido en algún \mathbb{R}^m ($m > q$), $\lambda: s \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua, b un punto de \mathbb{R}^m situado fuera del subespacio afín engendrado por s y $p \in \mathbb{R}^n$. Se denota por $\hat{C}_p \lambda: bs \rightarrow \mathbb{R}^n$ el cono tildado de vértice p y base λ definido por

$$\hat{C}_p \lambda(x) = \hat{C}_p \lambda(tV_0(y) + (1-t)b) = r(t)C_p \lambda(x) + (1-r(t))C_p(\lambda_L)(x)$$

10.5. LEMA: Con la notación de la definición anterior, si λ se prolonga a una función diferenciable de clase C^k , $\lambda_\varepsilon: s_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde s_ε es un q -símplice que contiene a s en su interior, entonces $\hat{C}_p \lambda$ se extiende también a una función diferenciable

$F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^k , donde A es el subespacio afín engendrado por el $(q+1)$ -símplice bs .

Demostración: (Según LALONDE [33] p. 128):

Basta demostrarlo para $s=(e_1, \dots, e_{q+1}) \subseteq \mathbb{R}^{q+1}$, $b=0 \in \mathbb{R}^{q+1}$ y $p=0 \in \mathbb{R}^n$.

Entonces para $x \in 0s$, $x=ty$ (yes, $0 \leq t \leq 1$), se tiene

$$\begin{aligned} \wedge C_0 \lambda(x) &= r(t)C_0 \lambda(x) + (1-r(t))C_0(\lambda_L)(x) \\ &= tr(t)\lambda(y) + t(1-r(t))\lambda_L(y) \\ &= t(r(t)\lambda(y) + (1-r(t))\lambda_L(y)) . \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ y un símplice $\Delta \subseteq \mathbb{R}^{q+1}$ designamos por ${}_\varepsilon \Delta$ el símplice abierto obtenido por una homotopía que deja fijo el baricentro de Δ y tiene como coeficiente de dilatación $1+\varepsilon$. Por hipótesis, existe $\varepsilon > 0$ y $\lambda_\varepsilon: {}_\varepsilon s \rightarrow \mathbb{R}^n$ (${}_\varepsilon s \subseteq \mathbb{R}^{q+1}$) de clase C^k tal que $\lambda_\varepsilon|_s = \lambda$. Utilizando, si fuese necesario, una función $\varphi: {}_\varepsilon s \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ , de soporte contenida en ${}_{\varepsilon/2} s$ y que valga 1 en s , se puede suponer que la extensión λ_ε satisface

$$\lambda_\varepsilon|_{{}_\varepsilon s - {}_{\varepsilon/2} s} = L((e_1, \lambda(e_1)), \dots, (e_{q+1}, \lambda(e_{q+1}))),$$

donde $L((e_1, \lambda(e_1)), \dots, (e_{q+1}, \lambda(e_{q+1})))$ es lá función lineal definida en el subespacio afín de \mathbb{R}^{q+1} engendrado por s , por la asignación $e_p \rightarrow \lambda(e_p)$, $1 \leq p \leq q+1$, que coincide con λ_L sobre s y que toma sus valores en \mathbb{R}^n .

Pongamos

$$\begin{aligned} \text{Cono}_0(\lambda_\varepsilon)(x) &= \\ &= t(r(t)\lambda_\varepsilon(t) + (1-r(t))L((e_1, \lambda(e_1)), \dots, (e_{q+1}, \lambda(e_{q+1}))))(y) \end{aligned}$$

Así $\text{Cono}_0(\lambda_\varepsilon)$ está definido sobre el cono abierto

$$V = \{x=(y, t) : y \in {}_\varepsilon s, t > 0\} .$$

Extendamos $\text{Cono}_0(\lambda_\varepsilon)$ a una función $F: A = \mathbb{R}^{q+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$F(x) = \begin{cases} \text{Cono}_0(\lambda_\varepsilon)(x) & , \text{ si } x \in V . \\ L((0, 0), (e_1, \lambda(e_1)), \dots, (e_{q+1}, \lambda(e_{q+1}))) (x) & , \text{ si } x \notin V . \end{cases}$$

Claramente, F es una extensión de $\hat{C}_0\lambda$. Mostremos que F es de clase C^k . Sea $y=(y_\mu)_{1\leq\mu\leq q}$ un sistema de coordenadas de $\varepsilon_s\subseteq\mathbb{R}^{q+1}$. Entonces (y,t) , $0<t$, es sistema de coordenadas de un entorno abierto del punto $x_0=(y_0,t_0)\in V\subseteq\mathbb{R}^{q+1}$. Ya que λ_ε es de clase C^k en y_0 ,

$$\text{Cono}_0(\lambda_\varepsilon)(x)=t(r(t)\lambda_\varepsilon(y)+(1-r(t))L(y))$$

es también de clase C^k en $x_0=(y_0,t_0)\in V$. Por tanto F es de clase C^k en V . Por la elección de λ_ε y de F , es evidente entonces que F es de clase C^k en todo $x\in\mathbb{R}^{q+1}$, $x\neq 0$. Por último, ya que r y todas sus derivadas tienden hacia 0 cuando t tiende hacia 0, F y todas sus derivadas tienden a $L((0,0),(e_1,\lambda(e_1)),\dots,(e_{q+1},\lambda(e_{q+1})))$ y sus derivadas respectivas cuando x tiende a 0. Por tanto, F es de clase C^k en todo $A=\mathbb{R}^{q+1}$.

10.6. LEMA. Sea $(P,\sigma)_k$ un p -ciclo de \mathbb{R}^n ($0\leq p<n$), K una triangulación de P tal que para cada p -símplice $s\in K$, $\sigma|_s$ es una función lineal afín no degenerada. Entonces existe $u\in\mathbb{R}^n$, a distancia al menos 1 de la bola de \mathbb{R}^n más pequeña que contiene $\sigma(P)$, tal que para todo p -símplice $s\in K$ se cumple

- a) $C_u(\sigma|_s)$ es no degenerado y
- b) $T(u,\sigma|_s)>0$,

donde

$$T(u,\sigma|_s) = \inf_{y\in s} T([u-(\sigma|_s)(y)]_\alpha, [Im\sigma|_s])$$

y $T([u-(\sigma|_s)(y)]_\alpha, [Im\sigma|_s])$ es el valor absoluto del ángulo entre la recta afín $[u-(\sigma|_s)(y)]_\alpha$ (engendrada por $u-(\sigma|_s)(y)$) y el subespacio afín $[Im\sigma|_s]_\alpha$ de \mathbb{R}^n engendrado por $Im\sigma|_s$.

Demostración: Sea A un subespacio afín de \mathbb{R}^n que contenga los subespacios $[\text{Im } \sigma|_s]_\alpha$ para todo p -símplice $s \in K$. Supongamos que $\dim A \geq p+1$. Sean A_V el subespacio vectorial de \mathbb{R}^n congruente con A y sea V_s el subespacio de A_V congruente con $[\text{Im } \sigma|_s]_\alpha$ para cada $s \in K$ de dimensión p .

Sea $S(A_V)$ la esfera unidad de A y de centro 0 . Definamos $h: S(A_V) \rightarrow [0,1]$ por

$$h(v) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } p=0 \\ \min_{\substack{s \in K \\ \dim s=p}} \inf_{y \in V_s} T([\nu - (\sigma|_s)(y)]_\alpha, V_s) & , \text{ si } p > 0 \end{cases}$$

donde $T([\nu - (\sigma|_s)(y)]_\alpha, V_s)$ es el valor absoluto del ángulo entre la recta $[\nu - (\sigma|_s)(y)]_\alpha$ y V_s . Esta función es continua. Ya que $\dim A_V \geq p+1$ y $\dim V_s = p$, esta función es casi por doquier estrictamente positiva. Por tanto, $\sup_{v \in S(A_V)} h(v) > 0$. Designemos por $P \in S(A_V)$ un punto en el cual h alcanza su máximo.

Por la elección de P , el subespacio vectorial $[P]_V$ engendrado por P es transverso a los espacios V_s . Por tanto, para $u \in [P]_V$ suficientemente alejado del 0 , los espacios afines $[[\text{Im } \sigma|_s]_\alpha, u]_\alpha$ son de dimensión $p+1$, cualquiera que sea $s \in K$ de dimensión p . Es evidente que basta elegir $u \neq 0$ a distancia mayor que 1 de la bola más pequeña que contenga todos las $\text{Im}(\sigma|_s)$ ($s \in K$), para que se cumplan las condiciones del lema.

10.7. TEOREMA. $\text{SQID}_p(\mathbb{R}^n)_k = \text{SQID}_p(\mathbb{R}^n_+)_k = 0$, si $p \neq n, 0$.

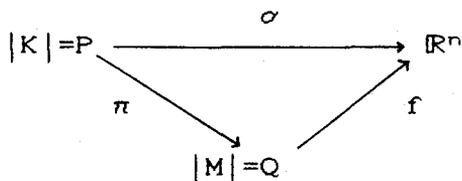
$$\text{SQID}_0(\mathbb{R}^n)_k = \text{SQID}_0(\mathbb{R}^n_+)_k = \mathbb{Z}.$$

Demostración: Si $(P_1, \sigma_1)_k$ y $(P_2, \sigma_2)_k$ son 0 -ciclos en \mathbb{R}^n o \mathbb{R}^n_+ , con

P_1 y P_2 formados por un sólo punto con orientación positiva, ambos son pseudobordantes por la 1-cadena $([0,1], \gamma)_k$ donde γ es la función lineal dada por $0 \rightarrow \sigma_1(P_1)$, $1 \rightarrow \sigma_2(P_2)$. Todo 0-ciclo en \mathbb{R}^n o \mathbb{R}^n_+ es suma algebraica finita de 0-ciclos como los anteriores, luego

$$\text{SND}_0(\mathbb{R}^n)_k = \text{SND}_0(\mathbb{R}^n_+)_k = \mathbb{Z}.$$

Sea $(P, \sigma)_k$ un p -ciclo en \mathbb{R}^n ($0 < p < n$). Por (9.3) y (2.9), existen una triangulación K de P , un poliedro Q de dimensión p y una triangulación M de Q tales que σ factoriza en la forma



donde $\pi: K \rightarrow M$ es epimorfismo simplicial no degenerado y $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua tales que para cada p -símplice $s \in K$ y $t = \pi(s)$, hay un p.l.-epimorfismo $\pi'_s: \varepsilon_s \rightarrow \varepsilon_t$ extensión de π y una extensión $f'_s: \varepsilon_t \rightarrow \mathbb{R}^n$ de $f|_t$ que es una inmersión difeomorfa.

Por ([45], teorema 8.8), la triangulación K puede ser elegida tal que $(|K|, \sigma_L)$, donde $\sigma_L: |K| \rightarrow \mathbb{R}^n$ se define por $\sigma_L|_s = (\sigma|_s)_L$ para $s \in K$, es un p -ciclo de inmersiones difeomorfas de \mathbb{R}^n de clase C^k . Según el lema (10.6), hay un punto $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $C_u(\sigma_L|_s)$ es no degenerado para cada p -símplice $s \in K$. Por esto, es evidente que existe $(bP, C_u \sigma_L)_k$, donde $C_u \sigma_L: bP \rightarrow \mathbb{R}^n$ está definida por $C_u \sigma_L|_s = C_u(\sigma_L|_s)$, que es una $(p+1)$ -cadena de inmersiones difeomorfas en \mathbb{R}^n de clase C^k .

Consideremos ahora la $(p+1)$ -cadena $(bP, \hat{C}_u \sigma)_k$, donde $\hat{C}_u \sigma: bP \rightarrow \mathbb{R}^n$ está definida por $\hat{C}_u \sigma|_s = \hat{C}_u(\sigma|_s)$ para cada

p-símplice seK y mostramos que es una (p+1)-cadena de inmersiones difeomorfas en \mathbb{R}^n de clase C^k .

Sea $\eta > 0$. Por ([45], teorema 9.7), se puede suponer $\|\alpha(y) - \sigma_L(y)\| < \eta$, $\|d\alpha(y) - d\sigma_L(y)\| < \eta \|dy\|$ para cada $y \in |K|$ y cada sistema de coordenadas $y = \langle y_\mu \rangle$ en $|K|$. Entonces tenemos para cada seK y cada $x = (y, t) \in bs$:

$$\begin{aligned} \|\wedge C_u \alpha(x) - C_u \sigma_L(x)\| &= \|r(t)C_u \alpha(x) + (1-r(t))C_u \sigma_L(x) - C_u \sigma_L(x)\| \\ &= \|r(t)(C_u \alpha(x) - C_u \sigma_L(x))\| \\ &= \|r(t)(t\alpha(y) + (1-t)u - t\sigma_L(y) - (1-t)u)\| \\ &= \|tr(t)(\alpha(y) - \sigma_L(y))\| \\ &\leq \|\alpha(y) - \sigma_L(y)\| < \eta \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \|d(\wedge C_u \alpha(x) - C_u \sigma_L(x))\| &= \\ &= \|\text{tr}(t) \sum_j D(\alpha(y) - \sigma_L(y)) dy^j + (r(t) + \text{tr}'(t))(\alpha(y) - \sigma_L(y)) dt\| \\ &\leq |\text{tr}(t)| \|\sum_j D(\alpha(y) - \sigma_L(y)) dy^j\| + |r(t) + \text{tr}'(t)| \|\alpha(y) - \sigma_L(y)\| |dt| \\ &\leq \|d\alpha(y) - d\sigma_L(y)\| + 4\|\alpha(y) - \sigma_L(y)\| |dt| \\ &\leq \eta \|dy\| + 4\eta |dt| \leq 5\eta \|dx\| \end{aligned} \tag{2}$$

De ([45], teorema 8.8) y las desigualdades (1) y (2), se deduce que hay un $\delta > 0$ tal que si $6\eta < \delta$, entonces $(bP, \wedge C_u \sigma)_k$ es una (p+1)-cadena de inmersiones difeomorfas de \mathbb{R}^n de clase C^k . Además es evidente que $\alpha(bP, \wedge C_u \sigma)_k = (P, \sigma)_k$. Luego $[P, \sigma] = 0$.

Por otro lado, se deduce de (9.3) y (2.11) que $SQID_p(\mathbb{R}^n)_k = 0$ si $p > n$. En consecuencia tenemos que $SQID_p(\mathbb{R}^n)_k = 0$ para $p \neq n, 0$.

Sea ahora $(P, \sigma)_k$ un p-ciclo de \mathbb{R}^n_+ . Ya que $c\mathbb{R}^n_+ \cong_{\text{dif}} \mathbb{R}^n$, la inclusión canónica $\mathbb{R}^n_+ \subseteq \mathbb{R}^n$ nos permite aplicar el razonamiento anterior a este ciclo $(P, \sigma)_k$. Obsérvese que $\sigma_L(P) \subseteq \mathbb{R}^n_+$ pues \mathbb{R}^n_+ es convexo. Nótese también que el punto u dado en (10.6) puede elegirse en \mathbb{R}^n_+ pues, en la demostración de dicho lema, u es sólo un punto de una recta que pasa por el origen de coordenadas y que

está bastante lejos de $\sigma_L(P)$. En consecuencia $\text{Im } \hat{C}_u \sigma \subseteq \mathbb{R}^n_+$, luego $(bP, \hat{C}_u \sigma)_k$ es una cadena en \mathbb{R}^n_+ y $[P, \sigma]_k = 0$ en \mathbb{R}^n_+ . En consecuencia, tenemos que $\text{SQID}_p(\mathbb{R}^n)_k = 0$ para $0 < p < n$. El caso $p > n$ es, como antes, consecuencia de (2.11).

CAPITULO XI

SEUDOBOARDISMO DE LAS VARIEDADES DIFERENCIALES.

En este capítulo se caracteriza el pseudobordismo de inmersiones difeomorfas de las variedades diferenciales, en las dimensiones inferiores a la de la variedad, demostrándose que es isomorfo a la homología singular.

En lo que sigue, V^n será una variedad diferencial de dimensión n , $i_*: \text{SQID}_*()_k \rightarrow H_*()$ el homomorfismo canónico obtenido asociando a la clase $[P, \sigma]_k$ la clase de pseudobordismo casi-inyectivo $[P, \sigma]$, componiendo luego con el isomorfismo $\text{SQI}_* \cong \text{HCI}_*$ de (5.23) y con el homomorfismo $\text{HCI}_*() \rightarrow H_*()$ inducido por el morfismo de cadenas $\text{CI}_*() \rightarrow \text{S}_*()$ dado por $(\Delta_n, \sigma; \mathcal{P}) \rightarrow (\Delta_n, \sigma)$.

Es fácil obtener el siguiente resultado.

11.1. PROPOSICION. Sea $\langle U_j \rangle_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión numerable de abiertos encajados de V^n tal que $V^n = \bigcup_j U_j$. Si $i_p: \text{SOLID}_p(U_j)_k \rightarrow H_p(U_j)$ es un isomorfismo para todo $j \in \mathbb{N}$, $p \neq n$, entonces también

$$i_p: \text{SOLID}_p(V^n)_k \rightarrow H_p(V^n) \quad (p \neq n)$$

es un isomorfismo

11.2. PROPOSICION. Sea C un rectángulo n -dimensional de \mathbb{R}^n de cualquiera de estos dos tipos:

$$\langle (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i \rangle,$$

$$\langle (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 < b_1, a_i < x_i < b_i \text{ si } i > 1 \rangle.$$

Entonces

$$i_p : \text{SOLID}_p(C)_k \longrightarrow H_p(C)$$

es un isomorfismo para todo $p \neq n$.

Demostración: Es consecuencia de (10.7) por el hecho de que dichos rectángulos son C^k -difeomorfos a \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^n_+ respectivamente.

$$\begin{array}{ccc} \text{SOLID}_p(C)_k & \xrightarrow{i_p} & H_p(C) \\ \cong \downarrow & & \uparrow \cong \\ \text{SOLID}_p(\mathbb{R}^n)_k & \xrightarrow{\cong} & H_p(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

11.3. PROPOSICION. Sean U_1 y U_2 dos abiertos de V^n que recubren V^n y $p \neq n$. Si $i_p: \text{SOLID}_p(X)_k \rightarrow H_p(X)$ es un isomorfismo para $X=U_1, U_2, U_1 \cap U_2$, entonces también es un isomorfismo para $X=V^n$.

Demostración: Es consecuencia directa de la correspondiente sucesión de Mayer-Vietoris y del lema de los cinco.

11.4. PROPOSICION. Sea U un abierto cualquiera de \mathbb{R}^n o de \mathbb{R}_+^n . Entonces,

$$i_p : \text{SQID}_p(U)_k \longrightarrow H_p(U)$$

es un isomorfismo para todo $p \neq n$.

Demostración: Todo abierto U de \mathbb{R}^n se expresa como unión numerable de rectángulos abiertos $\{(x_1, \dots, x_n) \mid a_i < x_i < b_i\} \subseteq \mathbb{R}^n$ y todo abierto U de \mathbb{R}_+^n se expresa como unión numerable de rectángulos abiertos y rectángulos $\{(x_1, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_1 < b_1, a_i < x_i < b_i \text{ si } i > 1\}$.

Sea U abierto de \mathbb{R}^n , $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$. Pongamos $U_j = \bigcup_{1 \leq i \leq j} C_i$. El conjunto $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto de U por abiertos encajados. Por la proposición (11.1), basta mostrar que, si $p \neq n$, $i_p : \text{SQID}_p(U_j)_k \rightarrow H_p(U_j)$ es un isomorfismo cualquiera que sea $j \in \mathbb{N}$. Se procede por inducción en j para demostrar que si O_j es un abierto de \mathbb{R}^n que se expresa como unión numerable de rectángulos abiertos, entonces $i_p : \text{SQID}_p(O_j)_k \rightarrow H_p(O_j)$ es un isomorfismo.

El caso $j=1$ sale de la proposición (11.2). Sean $j > 1$, $p \neq n$ y supongamos que $i_p : \text{SQID}_p(O_{j-1}) \rightarrow H_p(O_{j-1})$ es isomorfismo para todo abierto O_{j-1} unión de $j-1$ rectángulos abiertos de \mathbb{R}^n . Si O_j es unión de j rectángulos abiertos, entonces $O_j = O_{j-1} \cup O_1$ e $i_p : \text{SQID}_p(O_1)_k \rightarrow H_p(O_1)$, $i_p : \text{SQID}_p(O_{j-1}) \rightarrow H_p(O_{j-1})$ ($p \neq n$) son isomorfismos por hipótesis de inducción. $O_{j-1} \cap O_1$ se expresa como unión de $j-1$ rectángulos abiertos, de donde tenemos que $i_p : \text{SQID}_p(O_{j-1} \cap O_1)_k \rightarrow H_p(O_{j-1} \cap O_1)$ es un isomorfismo y la proposición (11.3) da el resultado.

Si U es un abierto de \mathbb{R}_+^n , la demostración es la misma, pero admitiendo que los C_j pueden ser del tipo

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_1 < b_1, a_i < x_i < b_i, i > 1\}.$$

11.5. TEOREMA. Para toda variedad diferencial V^n de clase C^∞ y dimensión n , con o sin borde,

$$i_p : \text{S\Omega ID}_p(V^n)_k \longrightarrow H_p(V^n)$$

es un isomorfismo si $p \neq n$ y es epimorfismo si $p = n$.

Demostración: Sea \mathcal{U} un recubrimiento abierto de V^n formado con abiertos U C^k -difeomorfos a un abierto de \mathbb{R}^n o a un abierto de \mathbb{R}_+^n . Por (11.4), cualquiera que sea $U \in \mathcal{U}$, $i_p : \text{S\Omega ID}_p(U)_k \rightarrow H_p(U)$ es un isomorfismo si $p \neq n$. Según (11.1) y el lema de Zorn, existe un abierto no vacío U_0 de V^n tal que $i_p : \text{S\Omega ID}_p(U_0)_k \rightarrow H_p(U_0)$ sea un isomorfismo para $p \neq n$ y U_0 sea maximal entre todos los abiertos U de V^n para los cuales $i_p : \text{S\Omega ID}_p(U)_k \rightarrow H_p(U)$ es un isomorfismo si $p \neq n$. Si $U_0 \neq V^n$, sea $U_1 \in \mathcal{U}$ tal que $U_1 \not\subseteq U_0$. Ya que $U_0 \cap U_1$ es C^k -difeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n o a un abierto de \mathbb{R}_+^n , por la restricción del C^k -difeomorfismo cuyo dominio es U_1 , los abiertos U_0, U_1 y $U_0 \cap U_1$ cumplen las condiciones de la proposición (11.3), luego $i_p : \text{S\Omega ID}_p(U_0 \cup U_1) \rightarrow H_p(U_0 \cup U_1)$ es un isomorfismo para todo $p \neq n$. Esto contradice el carácter maximal de U_0 . Por tanto, $U_0 = V$.

Si V^n es una variedad no compacta, no orientable o con borde no vacío, entonces $H_n(V^n) = 0$, luego en estos casos $i_n : \text{S\Omega ID}_n(V^n) \rightarrow H_n(V^n)$ es epimorfismo trivialmente. Si V^n es compacta, orientada y de borde vacío, entonces $H_n(V^n) = \mathbb{Z}$. Sea (P, σ) una C^k -triangulación de V^n , entonces $(P, \sigma)_k$ es un n -ciclo de clase C^k en V^n e $i_n [P, \sigma]_k$ es un generador de $H_n(V^n)$. Luego $i_n : \text{S\Omega ID}_n(V^n) \rightarrow H_n(V^n)$ es epimorfismo también en este caso.

11.6. COROLARIO. Sean Y^m, X^n ($m \leq n$) variedades diferenciales de clase C^∞ , con o sin borde. Sea $g_0 : Y^m \rightarrow X^n$ una inmersión difeomorfa

de clase C^k . Designamos por $H_p(X^n, Y^m; g_0)$ el p -ésimo grupo de homología del "mapping cone" del morfismo de cadenas $g_0: S.(Y^m) \rightarrow S.(X^n)$ inducido por g_0 entre los complejos de cadenas singulares en Y^m y X^n . Sea $i_*: \text{SQID}_*(X, Y; g_0)_k \rightarrow H_*(X, Y; g_0)$ el homomorfismo obtenido asociando a la clase $[P, \sigma; \partial P, \nu]_k$ la clase $[P, \gamma; \partial P, \nu] \in \text{SQI}_*(X, Y; g_0)$, componiendo con el isomorfismo $\text{SQI}_*(X, Y; g_0) \rightarrow \text{HCI}_*(X, Y; g_0)$, y luego con el homomorfismo $\text{HCI}_*(X, Y; g_0) \rightarrow H_*(X, Y; g_0)$ inducido por el morfismo de cadenas $\text{CI.} \rightarrow S.$ dado por $(\Delta_n, \sigma; \mathcal{P}) \rightarrow (\Delta_n, \sigma)$. Entonces:

- a) Si $m < n$, $i_p: \text{SQID}_p(X^n, Y^m; g_0)_k \rightarrow H_p(X^n, Y^m; g_0)$ es isomorfismo cuando $p \neq n, m+1$ y es epimorfismo cuando $p = n$ ó $p = m+1$.
- b) Si $m = n$, $i_p: \text{SQID}_p(X^n, Y^m; g_0)_k \rightarrow H_p(X^n, Y^m; g_0)$ es isomorfismo para todo $p \neq n$ y es epimorfismo para $p = n$.

Demostración. Basta aplicar el lema de los cinco al siguiente diagrama conmutativo con las filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \text{SQID}_p(Y)_k & \xrightarrow{g_{0*}} & \text{SQID}_p(X)_k & \longrightarrow & \text{SQID}_p(X, Y; g_0)_k \longrightarrow \text{SQID}_{p-1}(Y)_k \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow i_p & & \downarrow i_p & & \downarrow i_p & & \downarrow i_{p-1} \\
 \dots & \longrightarrow & H_p(Y) & \longrightarrow & H_p(X) & \longrightarrow & H_p(X, Y; g_0) & \longrightarrow & H_{p-1}(Y) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

y tener en cuenta que $\text{SQID}_p(X^n, Y; g_0)_k = 0$ si $p > n$ por (9.3) y (2.11).

11.7. NOTA. El teorema (11.5) dice para el pseudobordismo de inmersiones difeomorfas de una variedad V^n de borde vacío, lo mismo que dice el "teorema P" de ([37] p.2) sobre la homología de "plongements" de clase C^k en V^n . Esta homología se define como sigue ([37], p.10): Sea X una variedad paracompacta real de clase

C^∞ , $\sigma: \Delta_p \rightarrow X$ una función continua del p -símplice estandar $\Delta_p \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$ en X y sea H_p el hiperplano de \mathbb{R}^{p+1} que contiene a Δ_p ; σ es un p -símplice "plongement" de clase C^k si existe un entorno abierto U de Δ_p en H_p tal que σ se prolonga en U a un "plongement" de clase C^k ; la homología de cadenas finitas de éstos símlices con coeficientes enteros, con el homomorfismo ∂ evidente, es la homología de "plongements" de clase C^k en X .

Para demostrar el "teorema P" hay dos dificultades importantes: la primera es demostrar que la homología de "plongements" es invariante por subdivisiones lineales, en especial la subdivisión baricéntrica, para lo cual se introduce otra homología llamada homología de p -campos transversos; la segunda dificultad consiste en demostrar, en el caso $X = \mathbb{R}^n$, la nulidad de las homologías de "plongements" y de p -campos transversos.

El hecho de que la clase de pseudobordismo de un ciclo $(P, \sigma; \partial P, \nu)_k$ no dependa de la triangulación que se le de a la pseudovariiedad P , no considerándose por tanto nada parecido a la homología de p -campos transversos, ha permitido que la demostración de (11.5) sea apreciablemente más corta que la del "teorema P". Además (11.5) es válido para variedades con borde, lo que no ocurre con la homología de inmersiones difeomorfas. Veamos un ejemplo de esto.

Si (K, σ) es una C^k -triangulación de una bola cerrada plana D , entonces $L = (\partial |K|, \sigma|_{\partial |K|})_k$ es un 1-ciclo de clase de pseudobordismo nula en D , porque $\partial(|K|, \sigma)_k = L$. Sin embargo, no hay ninguna 2-cadena de símlices "plongement" de clase C^k que pueda anular el 1-ciclo determinado por la triangulación de ∂D inducida por (K, σ) .

Esto es debido a que un 2-símplice inmersión difeomorfa $s:\Delta_2\rightarrow D$ es por definición la restricción de algún "plongement" de variedades diferenciales $s':U\rightarrow D$, con $\Delta_2\subseteq \text{int } U$, y por tanto, $s(\partial\Delta_2)\cap\partial D=\emptyset$. Hemos encontrado un 1-ciclo en la 2-variedad con borde D , que no es nulo en la homología de inmersiones difeomorfas de clase C^k , pero sí es nulo en la homología singular.

CAPITULO XII

SEUDOBORDISMO SECCIONAL DIFERENCIABLE .

DEFINICIONES Y PROPIEDADES.

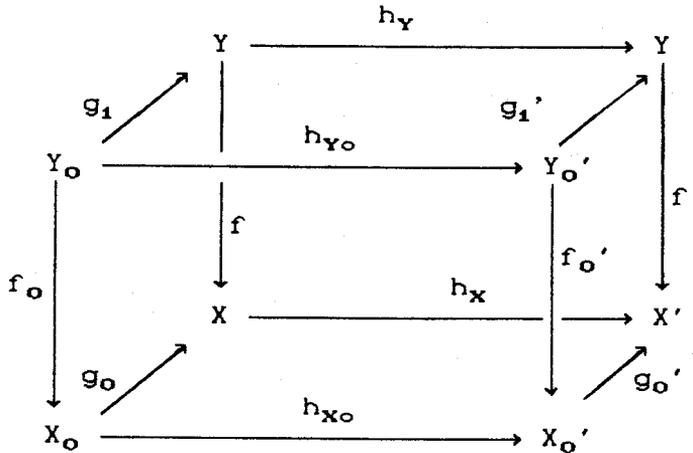
12.1. Sea $k \in \mathbb{Z}_+, \infty$. Si X es una variedad diferencial de clase C^k , designamos por cX la variedad $X \cup (\partial X \times [0, 1))$.

Sean X, X_0, Y, Y_0 variedades diferenciales de clase C^k y f, f_0, g_0, g_1 funciones de clase C^k tales que el diagrama siguiente sea conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Y_0 & \xrightarrow{g_1} & Y \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f \\ X_0 & \xrightarrow{g_0} & X \end{array}$$

y que g_0 sea la restricción de una inmersión difeomorfa (plongement) de clase C^k $g_0': cX_0 \rightarrow cX$. Designamos por g el par ordenado (g_0, g_1) . Un diagrama tal será llamado un k -diagrama y designado por $(f, f_0; g_0, g_1)_k$ o simplemente por $(f, f_0; g)_k$. El

k -diagrama $(f, \emptyset; \emptyset, \emptyset)_k$ será designado por f . Un k -morfismo entre k -diagramas es un diagrama conmutativo de la forma

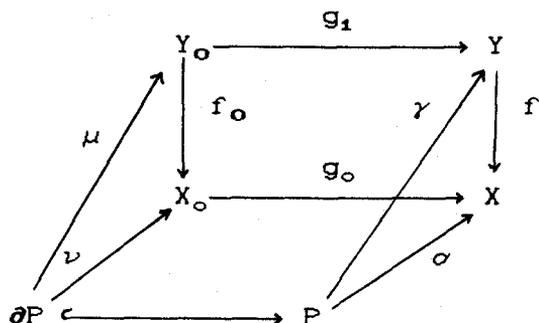


donde $(f, f_0; g_0, g_1)_k$ y $(f', f_0'; g_0', g_1')_k$ son k -diagramas, $(h_X, h_{X_0})_k$ es un k -morfismo de $IDIF_k$ y h_Y, h_{Y_0} son funciones de clase C^k . Un k -morfismo será designado por $(h_X, h_{Y_0}; h_{X_0}, h_{Y_0})_k$ o, abreviadamente, por h_k . Si $h_{X_0} = h_{Y_0} = \emptyset$, será designado simplemente por $(h_X, h_Y)_k$.

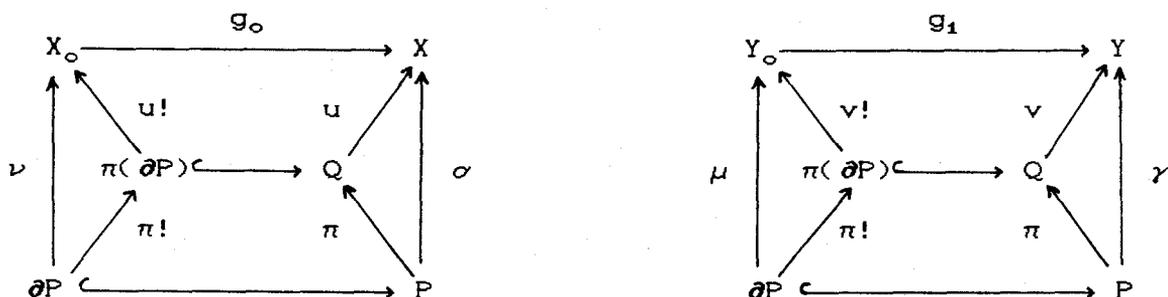
\mathcal{D}_k es la categoría cuyos objetos son k -diagramas y cuyos morfismos son los k -morfismos entre k -diagramas. Está claro que \mathcal{D}_k es subcategoría de la categoría \mathcal{D} de diagramas definida en el capítulo I. Los puntos en \mathcal{D} son también los puntos en \mathcal{D}_k , las homotopías de \mathcal{D}_k son los k -morfismos que son a la vez homotopías en \mathcal{D} .

12.2. DEFINICION. Un n -ciclo seccional de clase C^k en $(f, f_0; g_0, g_1)_k$ es $(P, \alpha, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P})$, formada por una n -seudovariedad orientada P con borde ∂P , una familia finita $\mathcal{P} = \{P_i\}$ de subpoliedros compactos de P de dimensión n tales que $P_i \cap P_j$ no tiene puntos interiores ni de P_i ni de P_j si $i \neq j$ y $P = \bigcup_i P_i$, y cuatro funciones diferenciables

σ, γ, ν y μ , de clase C^k de forma que el siguiente diagrama es conmutativo



y existe alguna pareja de diagramas conmutativos de la forma



siendo Q un poliedro, π p.l.-epimorfismo, $\pi!$ la restricción de π a ∂P , $u, u!, v$ y $v!$ funciones diferenciables de clase C^k tales que $u=f \circ v$, $u!=f_0 \circ v!$ y para cada P_i , $u|_{\pi(P_i)}$, $v|_{\pi(P_i)}$, $u!|_{\pi(P_i \cap \partial P)}$ y $v!|_{\pi(P_i \cap \partial P)}$ son inmersiones difeomorfas planas de clase C^k . Obsérvese que $u!=g_0^{-1}u|_{\pi(\partial P)}$. A \mathcal{P} le llamaremos descomposición canónica y a la pareja de diagramas, factorización canónica del ciclo.

Por convenio, también \emptyset es un n -ciclo seccional de clase C^k en $(f, f_0; g_0, g_1)_k$.

Es evidente que un n -ciclo seccional de clase C^k es también un n -ciclo seccional. Diremos que dos n -ciclos seccionales de clase C^k son iguales si son n -ciclos seccionales iguales.

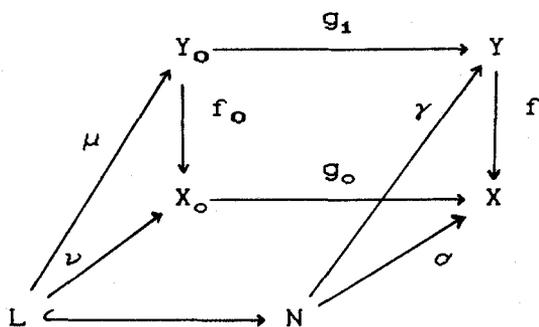
Cuando $\partial P = \emptyset$, se escribirá simplemente $(P, \sigma, \gamma)_k$.

12.3. DEFINICION. La suma de dos n -ciclos seccionales de clase C^k en $(f, f_0; g)_k$, $(P_1, \sigma_1, \gamma_1; \partial P_1, \nu_1, \mu_1; \mathcal{P}_1)_k$ y $(P_2, \sigma_2, \gamma_2; \partial P_2, \nu_2, \mu_2; \mathcal{P}_2)_k$, es el n -ciclo seccional de clase C^k en $(f, f_0; g)_k$

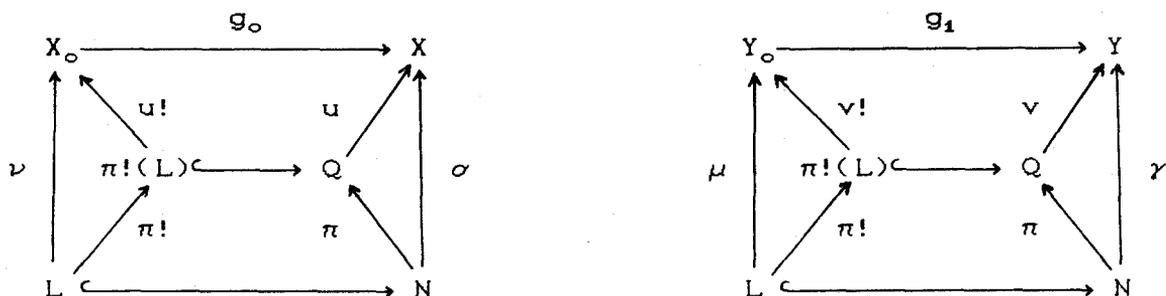
$$(P_1, \sigma_1, \gamma_1; \partial P_1, \nu_1, \mu_1; \mathcal{P}_1)_k + (P_2, \sigma_2, \gamma_2; \partial P_2, \nu_2, \mu_2; \mathcal{P}_2)_k = (P_1 + P_2, \sigma_1 \cup \sigma_2, \gamma_1 \cup \gamma_2; \partial P_1 + \partial P_2, \nu_1 \cup \nu_2, \mu_1 \cup \mu_2; \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)_k,$$

dado por la unión disjunta $P_1 + P_2$.

12.4. DEFINICION. Una $(n+1)$ -cadena seccional de clase C^k en $(f, f_0; g_0, g_1)_k$ es $(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{N})_k$, formada por una $(n+1)$ -seudovariiedad orientada N con borde, una n -seudovariiedad orientada $L \subseteq \partial N$ con borde, una familia finita $\mathcal{N} = \{N_i\}$ de subpoliedros compactos de N de dimensión $n+1$, tales que $N = \bigcup_i N_i$ e $\text{int } N_i \cap \text{int } N_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y cuatro funciones diferenciables σ , γ , ν y μ , de clase C^k que hacen conmutativo el siguiente diagrama



y tales que existe alguna pareja de diagramas conmutativos de la forma



siendo Q un poliedro, π p.l.-epimorfismo, $\pi!$ la restricción de π a L , $u, v, u!$ y $v!$ son funciones continuas tales que $u=f \circ v$, $u!=f_0 \circ v!$ y $u|_{\pi(N_i)}$, $v|_{\pi(N_i)}$, $u|_{\pi(N_i \cap (\partial N - L))}$, $v|_{\pi(N_i \cap (\partial N - L))}$, $u!|_{\pi(N_i \cap L)}$, $v!|_{\pi(N_i \cap L)}$, $u!|_{\pi(N_i \cap \partial L)}$ y $v!|_{\pi(N_i \cap \partial L)}$ son inmersiones difeomorfas de clase C^k para cada N_i . Nótese que $u!=g_0^{-1} \circ u|_{\pi(L)}$. \mathcal{A} se llamará la descomposición canónica de la cadena, y la pareja de diagramas su factorización canónica.

12.5. DEFINICION. El borde de la $(n+1)$ -cadena seccional $(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{A})_k$ en $(f, f_0; g)_k$, es el n -ciclo seccional en $(f, f_0; g)_k$

$$\partial(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{A})_k = (N_0, \sigma|_{N_0}, \gamma|_{N_0}; -\partial L, \nu|_{\partial L}, \mu|_{\partial L}; \mathcal{A}_0)_k,$$

donde N_0 es la n -seudovariedad tal que $\partial N = L \cup N_0$, $\mathcal{A}_0 = \langle N_i \cap N_0 | N_i \in \mathcal{A} \rangle$.

12.6. DEFINICION. Dos n -ciclos seccionales de clase C^k en $(f, f_0; g)_k$, $(P_1, \sigma_1, \gamma_1; \partial P_1, \nu_1, \mu_1; \mathcal{P}_1)_k$ y $(P_2, \sigma_2, \gamma_2; \partial P_2, \nu_2, \mu_2; \mathcal{P}_2)_k$, son seudobordantes si existe una $(n+1)$ -cadena seccional

$(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{N})_k$ en $(f, f_0; g)_k$ tal que

$$\partial(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{N})_k = (P_1, \sigma_1, \gamma_1; \partial P_1, \nu_1, \mu_1; \mathcal{P}_1) + (-P_2, \sigma_2, \gamma_2; -\partial P_2, \nu_2, \mu_2; \mathcal{P}_2),$$

donde $-P_2$ es la pseudovariiedad P_2 con la orientación opuesta a la dada.

12.7. NOTA. "Ser pseudobordantes" es una relación de equivalencia. Se comprueba como se hizo en el capítulo I para los n -ciclos seccionales continuos. El conjunto $S\Omega_n(f, f_0; g)_{k\mathbb{S}}$ de las clases de equivalencia de n -ciclos seccionales de clase C^k en $(f, f_0; g)_k$ admite estructura de grupo conmutativo con la operación $+$, inducida por la suma de n -ciclos seccionales. A dicho grupo lo llamaremos n -ésimo grupo de pseudobordismo seccional diferenciable de clase C^k . Es fácil comprobar que cambiar la descomposición canónica de un ciclo seccional no altera su clase de pseudobordismo, por lo cual dejaremos de señalarla explícitamente en la notación.

Todas las propiedades de homología enunciadas en el capítulo II para $S\Omega_*(, ;)_{\mathbb{S}}$ y la categoría \mathcal{D} , tienen su análoga evidente para $S\Omega_*(, ;)_{k\mathbb{S}}$ y la categoría \mathcal{D}_k . Las demostraciones son como las dadas entonces, por lo cual no se repiten ahora. En resumen, es cierta la proposición siguiente:

12.8. PROPOSICION. $S\Omega_*(, ;)_{k\mathbb{S}}$ y ∂_* , dado éste por

$$\partial_*[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu]_{k\mathbb{S}} = [\partial P, \nu, \mu]_{k\mathbb{S}},$$

definen una teoría de homología ordinaria con coeficientes en \mathbb{Z}

sobre la subcategoría plena \mathcal{D}'_k de la categoría \mathcal{D}_k , formada por los objetos $(f, f_0; g_0, g_1)_k$ tales que g_0 y g_1 son inclusiones.

12.9. NOTA. Es evidente que la transformación

$$(X, X_0; g_0)_k \longrightarrow (1_X, 1_{X_0}; g_0, g_0)_{k_0}$$

nos permite considerar $IDIF_k$ como subcategoría de \mathcal{D}_k y el functor $SND_*(.)_k$ como la restricción de $SX(.)_{k_0}$ a dicha subcategoría.

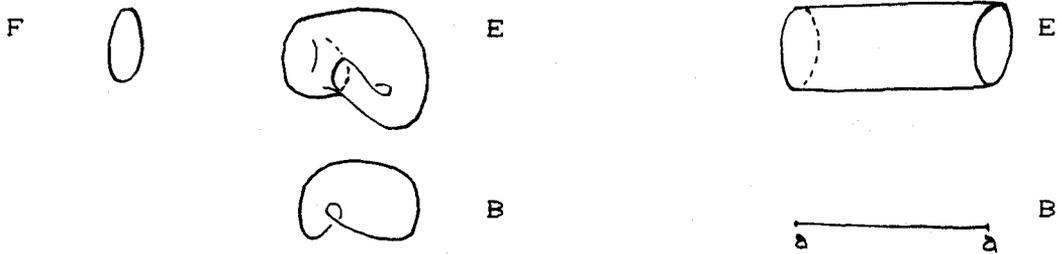
UNIVERSIDAD DE CALDAS
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
BIBLIOTECA

CAPITULO XIII

SEUDOBORDISMO SECCIONAL DIFERENCIABLE DE LOS FIBRADOS Y LAS SUBMERSIONES.

Sean $f \in \mathcal{D}_k$, $f: Y \rightarrow X$, $m = \dim Y$, $n = \dim X$, $m > n$. Diremos que f es una k -submersión si es localmente isomorfa, en la categoría \mathcal{D}_k , a una aplicación del tipo $\text{pr}_1: V \times W \rightarrow V$ donde V y W son abiertos no vacíos de \mathbb{R}^n (o \mathbb{R}^n_+ si $\partial X \neq \emptyset$) y \mathbb{R}^{m-n} respectivamente y pr_1 la proyección sobre el primer factor. Los fibrados y las submersiones en el sentido usual son k -submersiones para algún k . Así, por ejemplo, son k -submersiones las siguientes funciones:

- a) El fibrado trivial $f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = \text{pr}_1$.
- b) La proyección $f: T \rightarrow S^1$ del toro $T = S^1 \times S^1$ sobre uno de los meridianos, $f(x, y) = x$.
- c) El fibrado sobre S^1 de fibra $F = S^1$ construido con la botella de Klein $E = S^1 \times I / \langle S^1 \times 0 = -S^1 \times 1 \rangle$, $f[s, t] = [t] \in I / \langle 0 \rangle = \langle 1 \rangle$.



d) La función $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - e^{x_3} \cos x_4, x_2 - e^{x_3} \sin x_4),$$

que es una submersión en el sentido normal ya que $\text{rango}(df_x) = 2$.

e) También es submersión la función $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3^2 - x_4^2, x_2 + 2x_3x_4)$$

ya que siempre $\text{rango}(df_x) = 2$.

Si $(f, f'; g)_k$ es un k -diagrama, diremos que $(f, f'; g)_k$ es una k -submersión si f y f' son k -submersiones.

Este capítulo tiene por fin principal establecer que el pseudobordismo seccional diferenciable de una k -submersión $f: Y \rightarrow X$ es isomorfo a la homología singular de la variedad Y en dimensiones inferiores a la dimensión de X , epimorfo a la homología singular de Y en la dimensión de X y nulo en dimensiones superiores. Después extenderemos este resultado al caso relativo.

Si $f \in \mathcal{D}_k$, $f: Y \rightarrow X$, para cada $q \geq 0$, $p_{2q}: \text{SQ}(f)_{sk} \rightarrow H_q(Y)$ es el homomorfismo definido por $p_{2q}[P, \sigma, \gamma]_k = i_q[P, \gamma]_k$, donde

$$i_q: \text{SQID}_q(Y)_k \rightarrow H_q(Y)$$

es el homomorfismo definido en (11.5).

13.1 PROPOSICION. Para la k -submersión $\text{pr}_1: V \times W \rightarrow V$, donde W es un rectángulo abierto de \mathbb{R}^{m-n} y V es un rectángulo abierto de \mathbb{R}^n o un

rectángulo semiabierto de \mathbb{R}^n del tipo

$$\langle (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 < b_1, a_i < x_i < b_i, \text{ si } i > 1 \rangle,$$

se cumple que $p_{2q}: S\Omega_q(\text{pr}_1)_{sk} \rightarrow H_q(V \times W)$ es un isomorfismo si $q \neq n$ y es epimorfismo si $q = n$.

Demostración: Puesto que $H_q(V \times W) = 0$ para todo q , basta demostrar que $S\Omega_q(\text{pr}_1)_{sk} = 0$ para $q \neq n$. $\text{pr}_1: V \times W \rightarrow V$ es equivalente en \mathcal{D}_k a $\text{pr}_1: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ o a $\text{pr}_1: \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ según V sea abierto o semiabierto. Demostremos que $S\Omega_q(\text{pr}_1)_{sk} = 0$ si $q \neq n$ para $\text{pr}_1: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Sea $[P, \sigma, \nu]_k \in S\Omega_q(\text{pr}_1)_{sk}$. Entonces $[P, \sigma]_k \in S\Omega D_q(\mathbb{R}^n)_k$. Según la demostración del teorema (10.7.) existen puntos $a \in P$, $u \in \mathbb{R}^n$ tales que $(aP, \wedge C_u \sigma)_k$ es una $(q+1)$ -cadena de clase C^k en \mathbb{R}^n tal que $\partial(aP, \wedge C_u \sigma)_k = (P, \sigma)_k$. Tomemos $v = ux0$. Entonces está claro que $\text{pr}_1 \circ \wedge C_v \nu = \wedge C_u \sigma$, por lo cual $(aP, \wedge C_u \sigma, \wedge C_v \nu)_k$ es $(p+1)$ -cadena seccional en $\text{pr}_1: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\partial(aP, \wedge C_u \sigma, \wedge C_v \nu)_k = (P, \sigma, \nu)_k$.

Analogamente se demuestra para $\text{pr}_1: \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}_+^n$.

Las tres siguientes proposiciones se obtienen de forma parecida a (11.2)-(11.4).

13.2. PROPOSICION. Sea $f: Y \rightarrow X$ una k -submersión y $\langle U_j \rangle_{j \in \mathbb{N}}$ un recubrimiento de Y por abiertos encajados. Si para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$p_{2q}: S\Omega_q(f|U_j)_{sk} \rightarrow H_q(U_j)$$

es isomorfismo cuando $q < n$ y epimorfismo cuando $q = n$, entonces la misma propiedad la tiene $p_{2*}: S\Omega_*(f)_{sk} \rightarrow H_*(Y)$.

13.3. PROPOSICION. Sea $f: Y \rightarrow X^n$ una k -submersión y U_1, U_2 dos abiertos que recubren Y . Si para $U=U_1, U_2, U_1 \cap U_2$, $P_{2q}: S\Omega_q(f|U)_{sk} \rightarrow H_q(U)$ es isomorfismo cuando $q < n$ y epimorfismo cuando $q = n$, entonces lo mismo es cierto para $U=Y$.

13.4. PROPOSICION. Sea V un abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ o de $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^{m-n}$, y $pr_1: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la proyección sobre el primer factor, con lo cual $pr_1|V: V \rightarrow W=pr_1(V)$ es un k -diagrama. Entonces

$$P_{2q}: S\Omega_q(pr_1|V)_{sk} \rightarrow H_q(V)$$

es isomorfismo si $q < n$ y epimorfismo si $q = n$.

13.5. TEOREMA. Sean Y^m, X^n variedades diferenciables, $m < n$ (posiblemente $\partial X \neq \emptyset$) y $f: Y^m \rightarrow X^n$ una k -submersión. Entonces:

$$P_{2q}: S\Omega_q(f)_{sk} \longrightarrow H_q(Y)$$

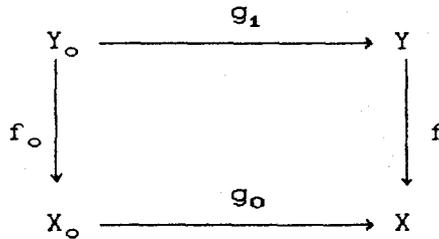
es isomorfismo si $q < n$, epimorfismo si $q = n$ y nulo si $q > n$.

Demostración: Sea $q \leq n$. Sea \mathcal{U} un recubrimiento abierto de Y^m tal que para cada $U \in \mathcal{U}$, $f|U$ sea isomorfa en \mathcal{D}_k a la proyección sobre el primer factor de un conjunto $V \times W$, donde V es un abierto de \mathbb{R}^n o de \mathbb{R}^n_+ y W es un conjunto abierto de \mathbb{R}^{m-n} . Por (13.4), para todo $U \in \mathcal{U}$, $P_{2q}: S\Omega_q(f|U)_{sk} \rightarrow H_q(U)$ es isomorfismo si $q < n$ y epimorfismo si $q = n$. Según (13.2) y el lema de Zorn, existe un abierto U_0 no vacío de Y que es maximal entre todos los abiertos U de Y para los cuales $P_{2q}: S\Omega_q(f|U)_{sk} \rightarrow H_q(U)$ es isomorfismo cuando $q < n$ y es epimorfismo cuando $q = n$. Si $U_0 \neq Y^m$, sea $U_1 \in \mathcal{U}$ tal que U_1 no esté contenido en U_0 . Por la hipótesis sobre \mathcal{U} , $f|U_0 \cap U_1$ es isomorfo en \mathcal{D}_k a la restricción a un abierto de la proyección $pr: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces, por (13.4), los conjuntos U_0, U_1 y $U_0 \cap U_1$ cumplen las

hipótesis de (13.3), por lo cual $p_{2q}: S\Omega_q(f|_{U_0 \cup U_1})_{sk} \rightarrow H_q(U_0 \cup U_1)$ es isomorfismo cuando $q < n$ y epimorfismo cuando $q = n$, en contra del carácter maximal de U_0 . Luego $U_0 = Y$.

Si $q > n$, la nota (12.7) y (2.11) dan que $S\Omega_q(f)_{sk} = 0$.

13.6. TEOREMA. (Caso relativo). Sea $(f, f_0; g)_k$ la k -submersión



$n = \dim X$ y $t = \dim X_0$. Sea $p_{2q}: S\Omega_q(f, f_0; g)_{ks} \rightarrow H_q(Y, Y_0; g_1)$ ($q \geq 0$) el homomorfismo definido por la composición

$$[P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu]_{ks} \rightarrow [P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu]_s \rightarrow r_{2q} \Psi^{-1} [P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu]_s$$

donde Ψ es el isomorfismo de (3.6) y $r_{2q}: HCl_q(f, f_0; g)_s \rightarrow H_q(Y)$ es el homomorfismo definido por $(\Delta_q, \sigma, \gamma) \rightarrow (\Delta_q, \gamma)$.

a) Si $t = n$, entonces p_{2q} es isomorfismo cuando $q < t$, epimorfismo cuando $q = t$ y nulo si $q > t$.

b) Si $t < n$, entonces p_{2q} es isomorfismo cuando $q \leq t$, epimorfismo cuando $q = t + 1$. Para $q > t + 1$, $S\Omega_q(f)_k$ es isomorfo a $S\Omega_q(f, f_0; g)_k$.

Demostración: Resulta del teorema (13.5) y del lema de los cinco aplicado al siguiente diagrama de sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \rightarrow & S\Omega_q(f)_{sk} & \rightarrow & S\Omega_q(f, f_0; g)_{sk} & \rightarrow & S\Omega_{q-1}(f_0)_{sk} & \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow P_{2q} & & \downarrow P_{2q} & & \downarrow P_{2, q-1} & \\
 \dots & \rightarrow & H_q(Y) & \rightarrow & H_q(Y, Y_0; g_1) & \rightarrow & H_{q-1}(Y_0) & \rightarrow \dots
 \end{array}$$

CAPITULO XIV

GRUPOS DE SEUDOBORDISMO SECCIONAL REDUCIDO.

ISOMORFISMO DE THOM.

Aquí se definen los grupos de pseudobordismo seccional reducido a partir de los definidos en el capítulo XII. También se obtiene el isomorfismo de Thom que aplicaremos más adelante.

14.1. DEFINICION. Los grupos de pseudobordismo seccional reducido diferenciable de clase C^k de $f \in \mathcal{D}_k$ ($k \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$), denotados $S\Omega_{*r}(f)_{ks}$, son los siguientes:

$$S\Omega_{*r}(f)_{ks} = \text{Im}(S\Omega_*(f)_{ks} \longrightarrow S\Omega_*(f \times 1_{\mathbb{R}})_{ks}),$$

donde $j_0 = (j_{0x}, j_{0y})$ viene del diagrama conmutativo

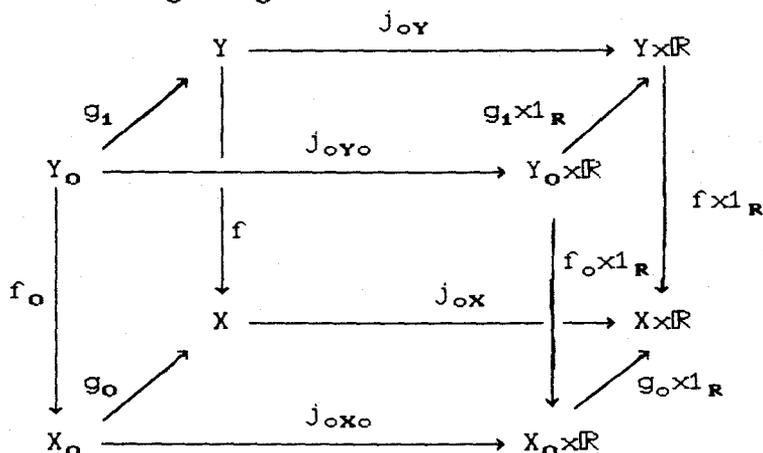
$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{j_{0y}} & Y \times \mathbb{R} \\
 \downarrow f & & \downarrow f \times 1_{\mathbb{R}} \\
 X & \xrightarrow{j_{0x}} & X \times \mathbb{R}
 \end{array}$$

donde j_{0X} y j_{0Y} designan las identificaciones de X a $X \times \langle 0 \rangle$ y de Y a $Y \times \langle 0 \rangle$ respectivamente.

Los grupos de seudobordismo seccional reducido de clase C^k de $(f, f_0; g)_{k \in \mathcal{D}_k}$ son

$$S\Omega_{*r}(f, f_0; g)_{ks} = \text{Im}(S\Omega_*(f, f_0; g)_{ks} \longrightarrow S\Omega_*(f \times 1_{\mathbb{R}}, f_0 \times 1_{\mathbb{R}}; g \times 1_{\mathbb{R}})_{ks})$$

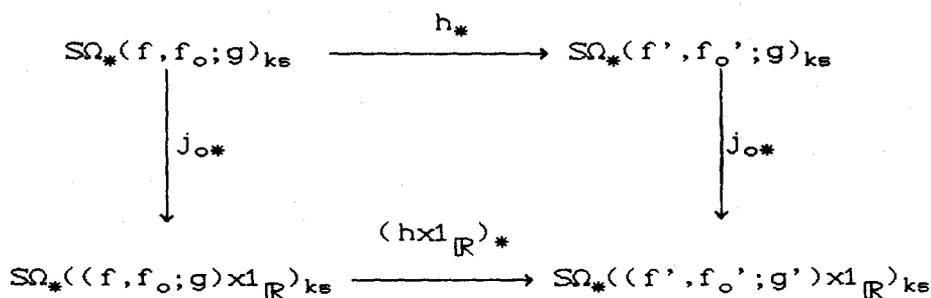
donde $j_0 = (j_{0X}, j_{0Y}; j_{0X_0}, j_{0Y_0})$ viene del diagrama conmutativo



Aquí $g = (g_0; g_1)$ y $g \times 1_{\mathbb{R}} = (g_0; g_1) \times 1_{\mathbb{R}} = (g_0 \times 1_{\mathbb{R}}; g_1 \times 1_{\mathbb{R}})$.

14.2. PROPOSICION. $S\Omega_{*r}$ induce un functor covariante entre \mathcal{D}_k y la categoría de los grupos abelianos.

Demostración: Sea $h: (f, f_0; g)_{ks} \rightarrow (f', f'_0; g')_{ks}$ un k -morfismo. El diagrama siguiente es conmutativo



Por tanto, $\text{Im}(S\Omega_*(f, f_0; g)_{ks} \longrightarrow S\Omega_*((f, f_0; g) \times 1_{\mathbb{R}})_{ks})$ es aplicado por $(h \times 1_{\mathbb{R}})_*$ sobre $\text{Im}(S\Omega_*(f', f'_0; g)_{ks} \longrightarrow S\Omega_*((f', f'_0; g') \times 1_{\mathbb{R}})_{ks})$. Se define entonces h_{*r} por la restricción de $(h \times 1_{\mathbb{R}})_*$ a $S\Omega_{*r}(f, f_0; g)_{ks}$ y la functorialidad de $S\Omega_{*r}$ resulta directamente de la de $S\Omega_*$.

14.3. La sucesión larga de homología para el pseudobordismo seccional reducido existe pero no es siempre exacta. En efecto, sean $(f, f'; g)_k \in \mathcal{D}_k$ y $j_0: (f, f_0; g)_k \rightarrow (f, f_0; g)_k \times 1_{\mathbb{R}}$ definido de la forma usual. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow S\Omega_q(f_0)_{ks} & \xrightarrow{g_*} & S\Omega_q(f)_{ks} & \xrightarrow{j_*} & S\Omega_q(f, f_0; g)_{ks} & \xrightarrow{\partial_*} & S\Omega_{q-1}(f_0)_{ks} \rightarrow \\
 \downarrow j_{0*} & & \downarrow j_{0*} & & \downarrow j_{0*} & & \downarrow j_{0*} \quad (1) \\
 \rightarrow S\Omega_q(f_0 \times 1_{\mathbb{R}})_{ks} & \rightarrow & S\Omega_q(f \times 1_{\mathbb{R}})_{ks} & \rightarrow & S\Omega_q((f, f_0; g) \times 1_{\mathbb{R}})_{ks} & \rightarrow & S\Omega_{q-1}(f_0 \times 1_{\mathbb{R}})_{ks} \rightarrow
 \end{array}$$

Por tanto, los homomorfismos de la sucesión exacta inferior aplican las diversas imágenes de j_{0*} unas en otras. Se puede pues, definir g_{*r} , j_{*r} y ∂_{*r} por las restricciones de $(g \times 1_{\mathbb{R}})_*$, $(j \times 1_{\mathbb{R}})_*$ y ∂_* a $S\Omega_{*r}(f_0)_{ks}$, $S\Omega_{*r}(f_0)_{ks}$ y $S\Omega_{*r}(f, f_0; g)_{ks}$ respectivamente. Se obtiene así la sucesión larga de homología para el pseudobordismo seccional reducido.

Ya que en el diagrama anterior, la sucesión inferior es exacta, la composición de dos homomorfismos sucesivos es nulo. En consecuencia, pasa lo mismo en la sucesión del pseudobordismo

seccional reducido, pero en ésta no está asegurado en general que el núcleo de un homomorfismo esté incluido en la imagen del homomorfismo precedente.

Se puede formular un criterio simple suficiente para la exactitud de la sucesión de homología del pseudobordismo seccional reducido de $(f, f_0; g)_k$ en un grupo cualquiera G_r de esta sucesión. Designemos por G el grupo correspondiente en pseudobordismo seccional diferenciable no reducido. Para que la sucesión de homología del pseudobordismo seccional reducido de $(f, f_0; g)_k$ sea exacta en G_r , es suficiente que en el diagrama (1), el homomorfismo j_{0*} cuyo dominio es el grupo inmediatamente precedente a G sea sobreyectivo y que el homomorfismo j_{0*} cuyo dominio es el grupo inmediatamente a continuación de G sea inyectivo. La demostración de este criterio se hace por consideraciones elementales sobre las sucesiones exactas.

14.4. TEOREMA. Sean Y^m, X^n variedades diferenciables (∂X puede ser $\neq \emptyset$), $m > n$ y $f: Y^m \rightarrow X^n$ una k -submersión. Entonces $S\Omega_{qr}(f)_{sk}$ es isomorfo a $H_q(Y)$ si $q \leq n$ y es nulo si $q > n$.

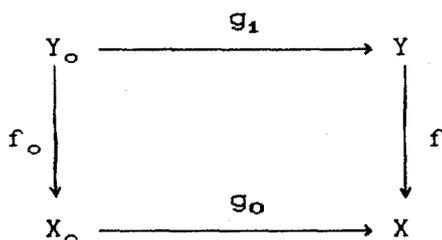
Demostración: Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 S\Omega_q(f)_{ks} & \xrightarrow{P_{2q}} & H_q(Y) \\
 \downarrow j_{0*} & & \cong \downarrow j_{0Y*} \\
 S\Omega_q(f \times 1_{\mathbb{R}})_{ks} & \xrightarrow{P_{2q}} & H_q(Y \times \mathbb{R})
 \end{array}$$

donde los homomorfismos p_{2q} , son los del teorema (13.5). Según este resultado ambos p_{2q} son isomorfismos cuando $q < n$ y el superior es epimorfismo y el inferior isomorfismo cuando $p = n$. Por tanto, $p_{2qr} = j_{0yp}^{-1} \circ (p_{2q} | \text{Im } j_{0p})$ es el isomorfismo $S\Omega_{qr}(f)_{sk} \cong H_q(Y)$, si $q \leq n$.

Ya que $S\Omega_q(f)_{ks} = 0$ cuando $q > n$, también $S\Omega_{qr}(f)_{sk} = 0$.

14.5. TEOREMA. Sea $(f, f_0; g)_k$ la k -submersión



$n = \dim X$, $m = \dim X_0$.

a) Si $m = n$, entonces $S\Omega_{qr}(f, f_0; g)_{ks} \cong H_q(Y, Y_0; g_1)$ si $q \leq n$ y nulo si $q > n$.

b) Si $m < n$, entonces $S\Omega_{qr}(f, f_0; g)_{ks} \cong H_q(Y, Y_0; g_1)$ si $q \leq m+1$,

$S\Omega_{qr}(f, f_0; g)_{ks} \cong H_q(Y)$ si $m+1 < q \leq n$ y es nulo si $q > n$.

Demostración: Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 S\Omega_q(f, f_0; g)_{ks} & \xrightarrow{p_{2q}} & H_q(Y, Y_0; g_1) \\
 \downarrow j_{0*} & & \cong \downarrow j_{0q} \\
 S\Omega_q((f, f_0; g) \times 1_{\mathbb{R}})_{ks} & \xrightarrow{p_{2q}} & H_q(Y \times \mathbb{R}, Y_0 \times \mathbb{R}; g_1 \times 1_{\mathbb{R}})
 \end{array} \quad (2)$$

donde los p_{2q} son los homomorfismos de (13.6). Definimos

$$P_{2qr}: S\Omega_{qr}(f, f_0; g)_{ks} \longrightarrow H_q(Y, Y_0; g_1)$$

por $P_{2qr} = j_{0q}^{-1} \circ p_{2q} | S\Omega_{qr}(f, f_0; g)_{ks}$.

a) Si $m=n$, entonces las dos flechas horizontales de (2) son isomorfismos cuando $q < n$ y cuando $q=n$, la superior es epimorfismo y la inferior es isomorfismo. En consecuencia, P_{2qr} es isomorfismo para $q \leq n$. Cuando $q > n$, $S\Omega_q(f, f_0; g)_{ks} = 0$, luego también $S\Omega_{qr}(f, f_0; g)_{ks} = 0$.

Si $m < n$, razonando como antes, tenemos que P_{2qr} es isomorfismo para $q \leq m+1$, entonces $S\Omega_q(f, f_0; g)_{ks} = 0$ cuando $q > n$ y (14.4) da la caracterización.

14.6. COROLARIO. Sea $(f, f_0; g)_k$ la k -submersión

$$\begin{array}{ccc}
 Y_0 & \xrightarrow{g_1} & Y \\
 f_0 \downarrow & & \downarrow f \\
 X_0 & \xrightarrow{g_0} & X
 \end{array}$$

$n = \dim X$, $t = \dim X_0$. Consideremos la sucesión de homología del pseudobordismo seccional reducido asociada a $(f, f_0; g)_k$

$$\dots \rightarrow S\Omega_{qr}(f_0)_{ks} \xrightarrow{g_{*r}} S\Omega_{qr}(f)_{ks} \xrightarrow{j_{*r}} S\Omega_{qr}(f, f_0; g)_{ks} \xrightarrow{\partial_{*r}} S\Omega_{(q-1)r}(f_0)_{ks} \rightarrow \dots \quad (3)$$

a) Si $n > t$, dicha sucesión es siempre exacta en todos los grupos distintos de $S\Omega_{(t+1)r}(f)_{ks}$. Es exacta en $S\Omega_{(t+1)r}(f)_{ks}$ si y solo si $g_{1*}(H_{t+1}(Y_0)) = 0$ en la sucesión exacta singular asociada a

$(Y, Y_0; g_1)$.

b) Si $n=t$, la sucesión (3) es exacta en todos los grupos, salvo quizá en $S\Omega_{nr}(f_0)_{ks}$, donde es exacta si y solo si $\partial_*(H_{n+1}(Y, Y_0; g_1))=0$ en la sucesión exacta singular asociada a $(Y, Y_0; g_1)$

Demostración: a) Sea $n>t$. $S\Omega_{qr}(f, f_0; g)_{ks} \cong S\Omega_{qr}(f)_{ks}$ para $q>t+1$, $S\Omega_{qr}(f_0)_{ks}=0$ para todo $q>t$. En consecuencia la sucesión (3) se presenta, en las dimensiones $q>t+1$, de la siguiente forma

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{g_{*r}} S\Omega_{qr}(f)_{ks} \xrightarrow{\cong} S\Omega_{qr}(f, f_0; g)_{ks} \xrightarrow{\partial_{*r}} 0 \rightarrow \dots$$

luego es exacta en $q>t+1$. Para $q \leq t+1$, se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow 0 & \xrightarrow{g_{*r}} & S\Omega_{t+1,r}(f)_{ks} & \xrightarrow{j_{*r}} & S\Omega_{t+1,r}(f, f_0; g)_{ks} & \xrightarrow{\partial_{*r}} & S\Omega_{tr}(f_0)_{ks} \rightarrow \\ & \downarrow P_{2*r} & \cong \downarrow P_{2*r} & & \cong \downarrow j_{2*r} & & \cong \downarrow P_{2*r} \\ \rightarrow H_{t+1}(Y_0) & \xrightarrow{g_{1*}} & H_{t+1}(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_{t+1}(Y, Y_0; g_1) & \xrightarrow{\partial_*} & H_t(Y_0) \rightarrow \end{array}$$

Ya que $S\Omega_{(t+1)r}(f_0)_{ks}$ es nulo, la sucesión es exacta en este grupo. Siendo isomorfismos el segundo P_{2*r} y siguientes, la sucesión de arriba es exacta en el tercer grupo y grupos de orden inferior, porque la sucesión inferior es exacta. En $S\Omega_{(t+1)r}(f)_{ks}$, es exacta si y solo si $j_{(t+1)r}$ es monomorfismo, lo cual equivale a que $j_{(t+1)}$ es monomorfismo, lo que a su vez equivale a que $g_{1*}(H_{t+1}(Y_0))=0$.

b) Sea $n=t$. Todos los grupos de la sucesión (3) son nulos en las dimensiones superiores a n . Se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
\rightarrow 0 & \longrightarrow & \mathcal{S}\Omega_{nr}(f_0)_{ks} & \longrightarrow & \mathcal{S}\Omega_{nr}(f)_{ks} & \longrightarrow & \mathcal{S}\Omega_{nr}(f, f_0; g)_{ks} \longrightarrow \\
\downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
\rightarrow H_n(Y, Y_0; g_1) & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(Y_0) & \longrightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y, Y_0; g_1) \longrightarrow
\end{array}$$

donde todas las flechas verticales, a partir de la segunda, son isomorfismos. Entonces, la sucesión (3) es exacta en todos los grupos salvo quizá en $\mathcal{S}\Omega_{nr}(f_0)_{ks}$, donde es exacta si y solo si $\partial_*(H_{n+1}(Y, Y_0; g_1))=0$.

La transformación $IDIF_k \rightarrow \mathcal{D}_k$ dada por

$$(X, X_0; g_0)_k \rightarrow (1_X, 1_{X_0}; g_0, g_0)_k$$

permite considerar $IDIF_k$ como subcategoría en \mathcal{D} y el functor $\mathcal{S}\Omega ID_*(.)_k$ como la restricción de $\mathcal{S}\Omega_*(.)_{ks}$. En esta subcategoría, $\mathcal{S}\Omega_{*r}(.)_{ks}$ se puede definir como sigue.

14.7. DEFINICION. Sea $(X, X_0; g_0)_k \in IDIF_k$ ($1 \leq k \leq \infty$). Definimos los grupos $\mathcal{S}\Omega ID_{*r}(X, X_0; g_0)_k$ de pseudobordismo de inmersiones difeomorfas de clase C^k reducido por

$$\mathcal{S}\Omega ID_{*r}(X, X_0; g_0)_k = \text{Im}(j_{o*}: \mathcal{S}\Omega ID_*(X, X_0; g_0)_k \rightarrow \mathcal{S}\Omega ID_*(X \times \mathbb{R}, X_0 \times \mathbb{R}; g_0 \times 1_{\mathbb{R}})_k)$$

donde $j_o = (j_{oX}, j_{oX_0})$, siendo j_{oX} y j_{oX_0} las identificaciones de X a $X \times \langle 0 \rangle$ y de X_0 a $X_0 \times \langle 0 \rangle$ respectivamente. Para el caso absoluto se usará la notación $\mathcal{S}\Omega ID_{*r}(X)_k$.

Aplicando (13.5) y (13.6), se obtiene fácilmente el siguiente resultado .

14.8. TEOREMA: $\text{SQID}_{*r}(X)_k \cong H_*(X)$ y $\text{SQID}_{*r}(X, X_0; g_0)_k \cong H_*(X, X_0; g_0)$.

14.9. COROLARIO. SQID_* y H_* son ∂ -functores equivalentes sobre IDIF_k .

14.10. Sean $f: Y \rightarrow X^n$ una función de clase C^k y X_0^m una subvariedad de X de codimensión $t=n-m>0$, que es subespacio cerrado de X . El fibrado normal ν_1 de X_0 en X se define por la sucesión exacta

$$0 \rightarrow T(X_0) \rightarrow T(X)|_{X_0} \rightarrow \nu_1 \rightarrow 0,$$

donde $T(X_0)$ y $T(X)$ designan los fibrados tangente de X_0 y X respectivamente. Se supone que ν_1 es orientado y que f es transversa a X_0 , i.e. que para cada $y \in f^{-1}(X_0)$ la composición

$$T_y(Y) \xrightarrow{Df_y} T_x(X) \longrightarrow T_x(X)/T_x(X_0)$$

del espacio tangente en y en el espacio normal a $x=f(y)$ es sobreyectiva. Entonces, usando el Teorema de la Función Implícita, se verifica que $Y_0=f^{-1}(X_0)$ es una subvariedad cerrada de clase C^k de Y de codimensión t (supuesto que $Y_0 \neq \emptyset$). Poniendo $f'=f|_{Y_0}$ y $f''=f|_{Y-Y_0}$, hay dos k -diagramas $(f, f'; i')$ _k, $(f, f''; i'')$ _k con i' , i'' inclusiones que dan el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 Y-Y_0 & \longrightarrow & Y & \longleftarrow & Y_0 \\
 \downarrow f'' & & \downarrow f & & \downarrow f' \\
 X-X_0 & \longrightarrow & X & \longleftarrow & X_0
 \end{array}$$

Estas hipótesis se resumen diciendo que (f, f') es un k-diagrama normal. Designando por ν_2 el fibrado normal de Y_0 en Y , existe un morfismo canónico $f_\nu: \nu_2 \rightarrow \nu_1$ de fibrados vectoriales. Así la orientación de ν_1 induce, por f_ν , una orientación de ν_2 ([33], pag.95). En efecto, consideremos el diagrama conmutativo con las filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & T(Y_0) & \longrightarrow & T(Y)|_{Y_0} & \longrightarrow & \nu_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow Df' & & \downarrow (Df)|_{Y_0} & & & & \\
 0 & \longrightarrow & T(X_0) & \longrightarrow & T(X)|_{X_0} & \longrightarrow & \nu_1 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Este define, pasando al cociente, una función de clase C^{k-1} $f_\nu: \nu_2 \rightarrow \nu_1$ cuya restricción a cada fibra de ν_2 es una función lineal entre espacios vectoriales de dimensión t . Ya que f es transversa a X_0 , esta restricción es sobreyectiva, luego es un isomorfismo. Así f_ν es un morfismo de fibrados vectoriales. En consecuencia, la orientación de ν_1 induce, por f_ν , una orientación de ν_2 .

14.11. Al k-diagrama normal (f, f') corresponden dos isomorfismos de Thom

$$\phi_1: H_{q+t}(X, X-X_0) \longrightarrow H_q(X_0) \text{ y } \phi_2: H_{q+t}(Y, Y-Y_0) \longrightarrow H_q(Y_0) \text{ (} q \in \mathbb{Z} \text{)}$$

que hacen conmutativo el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc}
 H_{q+t}(Y, Y-Y_0) & \xrightarrow{\phi_2} & H_q(Y_0) \\
 \downarrow (f, f'')_* & & \downarrow f'_* \\
 H_{q+t}(X, X-X_0) & \xrightarrow{\phi_1} & H_q(X_0)
 \end{array} \quad (4)$$

([33], pag.96). En efecto, para $i=1,2$, a la orientación de ν_i corresponde un solo elemento $u_i \in H^t(E_i, E_i - E_i^0)$ cuya restricción a cada fibra de ν_i da la orientación inducida sobre esta fibra por la de ν_i ([44] teorema 10.4) (aquí E_i es el espacio total de ν_i y E_i^0 la imagen de la sección nula). El producto cap por u_i establece un isomorfismo $H_{q+t}(E_i, E_i - E_i^0) \longrightarrow H_q(E_i)$ ([44], corolario 10.7). Designando por f_ν'' la restricción de f_ν a $E_2 - E_2^0$, está claro que $(f_\nu, f_\nu'')_*(u_1) = u_2$ y que en consecuencia el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 H_{q+t}(E_2, E_2 - E_2^0) & \xrightarrow{\cap u_2} & H_q(E_2) \\
 \downarrow (f_\nu, f_\nu'')_* & & \downarrow f_\nu^* \\
 H_{q+t}(E_1, E_1 - E_1^0) & \xrightarrow{\cap u_1} & H_q(E_1)
 \end{array} \quad (5)$$

pues $((f_\nu, f_\nu'')_*(h) \cap u_1 = f_\nu^*(h \cap (f_\nu, f_\nu'')_*(u_1))$ ([29], proposición 4.4.8). Ahora bien, siendo Y_0 cerrado en Y , existe ([44], corolario 11.2 y nota siguiente, pags.117 y 118) un isomorfismo canónico.

$$H_*(Y, Y-Y_0) \longrightarrow H_*(E_2, E_2-E_2^0),$$

que se define de la siguiente forma: Se toma una estructura de espacio de Riemann para Y ; entonces la "aplicación exponencial"

$$\text{Exp} : E_2(\varepsilon) \longrightarrow Y$$

que asigna a cada $(y, v) \in E_2$ con $|v| < \varepsilon$ siendo ε suficientemente pequeño ($E_2(\varepsilon) = \{(y, v) \in E_2 \mid |v| < \varepsilon\}$) el punto extremo $\gamma(1)$ del arco geodésico parametrizado

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow Y$$

de longitud $|v|$, con punto inicial $\gamma(0) = x$ y vector velocidad inicial $d\gamma/dt|_{t=0} = v$, aplica el abierto $E_2(\varepsilon)$ difeomórficamente sobre un conjunto abierto $N_\varepsilon \subseteq Y$; otra aplicación exponencial como la anterior definida usando otra métrica riemanniana para Y , es homotópica a la anterior, por lo cual la composición de isomorfismos

$$\begin{aligned} H_*(Y, Y-Y_0) &\cong H_*(N_\varepsilon, N_\varepsilon - Y_0) \xrightarrow{\text{Exp}^{-1}_*} H_*(E_2(\varepsilon), E_2(\varepsilon) - E_2(\varepsilon) - E_2(\varepsilon) \cap E_2^0) \cong \\ &\cong H_*(E_2, E_2 - E_2^0), \end{aligned}$$

donde el primero y el último son isomorfismos de escisión, es independiente de la estructura riemanniana de Y usada; el isomorfismo $H_*(Y, Y-Y_0) \longrightarrow H_*(E_2, E_2-E_2^0)$ mencionado es dicha composición. Ya que Y_0 es retracto de E_2 , se puede definir el isomorfismo de Thom en homología singular por la composición de isomorfismos

$$\phi_2 : H_{q+t}(Y, Y-Y_0) \longrightarrow H_{q+t}(E_2, E_2-E_2^0) \xrightarrow{\cap u_2} H_q(E_2) \longrightarrow H_q(Y_0).$$

Se define $\phi_1 : H_{q+t}(X, X-X_0) \longrightarrow H_q(X_0)$ de forma análoga. Que (4) sea conmutativo resulta inmediatamente de que lo sea (5).

14.12. PROPOSICION. Si f y f' son submersiones tales que (f, f') es un k -diagrama normal, entonces el homomorfismo

$$\phi : S\Omega_{(q+t)r}(f, f'')_{ks} \longrightarrow S\Omega_{qr}(f')_{ks}$$

definido como igual a la composición

$$S\Omega_{(q+t)r}(f, f'')_{ks} \xrightarrow{P_{2*r}} H_{q+t}(Y, Y-Y_0) \xrightarrow{\phi_2} H_q(Y_0) \xrightarrow{P_{2*r}^{-1}} S\Omega_{qr}(f')_{ks}$$

cuando $q \leq m$ e igual al morfismo nulo si $q > m$, es un isomorfismo. A ϕ_* lo llamaremos isomorfismo de Thom.

Demostración: Cuando f y f' son k -submersiones, también lo es f'' . Entonces $P_{2*r} : S\Omega_{(q+t)r}(f, f''; i'')_{ks} \longrightarrow H_{q+t}(Y, Y-Y_0)$ es, por el teorema (14.5), un isomorfismo para $q+t \leq n$ o equivalentemente, para $q \leq m$ ($t=n-m$) y nulo si $q > m$. Por otro lado, $P_{2*r} : S\Omega_{qr}(f')_{ks} \longrightarrow H_q(Y_0)$ es, por el teorema (14.4), un isomorfismo para $q \leq m$ y nulo en los demás casos. Por último, es conocido que $H_{q+t}(Y, Y-Y_0)$ y $H_q(Y_0)$ son nulos si $q > m$.

CAPITULO XV

GRUPOS DE SEUDOBORDISMO SECCIONAL INFINITO DIFERENCIABLE.

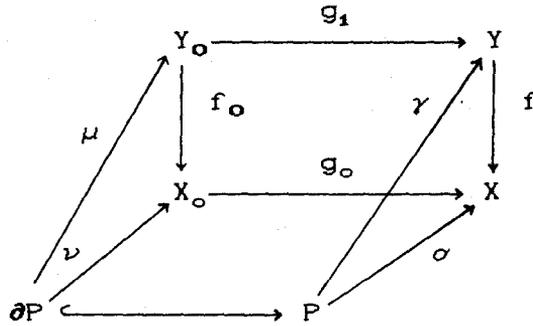
Se extiende el teorema (13.5) (que es análogo al "Teorema S" de LALONDE [37],) al bordismo definido conseudovariedades no necesariamente compactas, que corresponde a la homología seccional definida con cadenas localmente finitas.

Sea \mathcal{DP}_k la subcategoría de \mathcal{D}_k formada por los objetos $(f, f_0; g_0, g_1)_k$ en los cuales g_0, g_1 son propias¹, y por los morfismos $(h_X, h_Y; h_{X_0}, h_{Y_0})_k$ en que todas las funciones son propias.

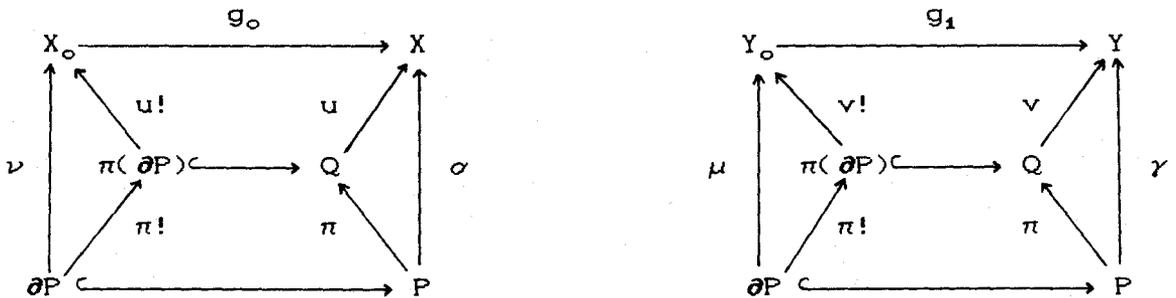
15.1. DEFINICION. Un n-ciclo seccional infinito de clase C^k en el objeto $(f, f_0; g)_k \in \mathcal{DP}_k$ es $(P, \sigma, \gamma; \partial P, \nu, \mu; \mathcal{P})_k$, formado por una n-seudovariedad orientada P , no necesariamente compacta, con borde ∂P , una familia $\mathcal{P} = \{P_i\}$ de subpoliedros compactos de P localmente

¹Decimos que una función $f: Y \rightarrow X$ es propia si es continua y para todo cerrado compacto $A \subseteq X$, $f^{-1}(A)$ es compacto.

finita, tal que cada P_i es de dimensión n , $\text{int } P_i \cap \text{int } P_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $P = \bigcup_i P_i$, y cuatro funciones propias diferenciables σ , γ , ν y μ de clase C^k que hacen conmutativo el siguiente diagrama



y tales que existe alguna pareja de diagramas conmutativos de la forma



siendo Q un poliedro, π p.l.-epimorfismo, $\pi!$ la restricción de π a ∂P , u , $u!$, v y $v!$ funciones propias diferenciables de clase C^k tales que $u=f \circ v$, $u!=f_0 \circ v!$ y $u|_{\pi(P_i)}$, $v|_{\pi(P_i)}$, $u!|_{\pi(P_i \cap \partial P)}$ y $v!|_{\pi(P_i \cap \partial P)}$ son inmersiones difeomorfas planas de clase C^k para cada P_i . Obsérvese que $u!=g_0^{-1}u|_{\pi(\partial P)}$. La familia \mathcal{P} se llamará descomposición canónica y la pareja de diagramas, factorización

canónica del ciclo.

Por convenio, también \emptyset es un n -ciclo seccional de clase C^k en $(f, f_0; g_0, g_1)_k$.

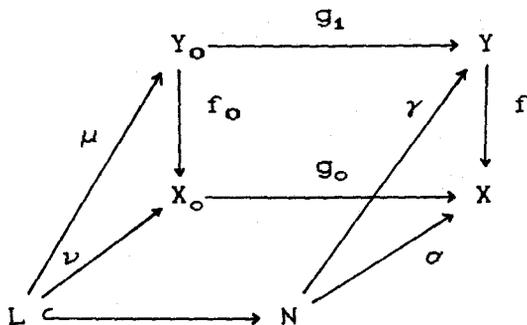
La suma de dos n -ciclos seccionales infinitos de clase C^k en $(f, f_0; g)_k$, $(P_1, \sigma_1, \gamma_1; \partial P_1, \nu_1, \mu_1; \mathcal{P}_1)_k$ y $(P_2, \sigma_2, \gamma_2; \partial P_2, \nu_2, \mu_2; \mathcal{P}_2)_k$, es el n -ciclo seccional infinito de clase C^k en $(f, f_0; g)_k$

$$\begin{aligned} & (P_1, \sigma_1, \gamma_1; \partial P_1, \nu_1, \mu_1; \mathcal{P}_1)_k + (P_2, \sigma_2, \gamma_2; \partial P_2, \nu_2, \mu_2; \mathcal{P}_2)_k = \\ & = (P_1 + P_2, \sigma_1 \cup \sigma_2, \gamma_1 \cup \gamma_2; \partial P_1 + \partial P_2, \nu_1 \cup \nu_2, \mu_1 \cup \mu_2; \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)_k, \end{aligned}$$

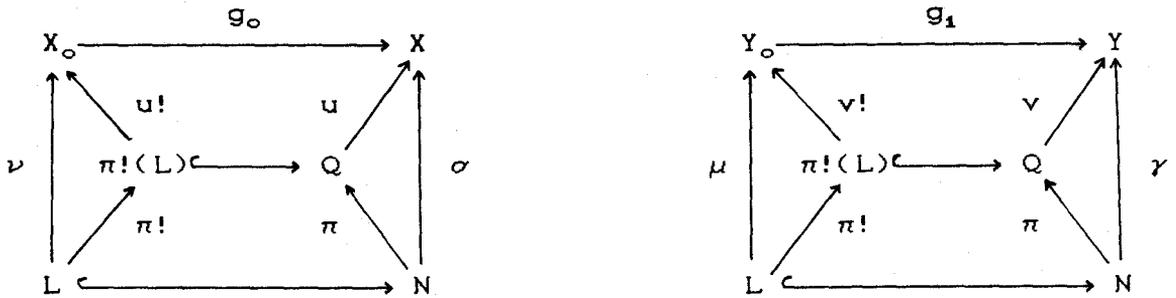
dado por la unión disjunta $P_1 + P_2$.

Dos de estos n -ciclos son iguales si lo son como n -ciclos seccionales infinitos (continuos).

15.2. DEFINICION. Una $(n+1)$ -cadena seccional infinita de clase C^k en el objeto $(f, f_0; g)_k \in \mathcal{DP}_k$ es $(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{N})_k$ formada por una $(n+1)$ -seudovariedad N con borde ∂N , una n -seudovariedad $L \subseteq \partial N$ con borde (ambas N y L orientadas y posiblemente no compactas), una familia localmente finita $\mathcal{N} = \{N_i\}$ de subpoliedros compactos de N de dimensión $n+1$, tales que $\text{int } N_i \cap \text{int } N_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $N = \bigcup_i N_i$, y cuatro funciones propias σ, γ, ν y μ de clase C^k tales que hacen conmutativo el siguiente diagrama



y tales que existe alguna pareja de diagramas conmutativos de la forma



Siendo Q un poliedro, π p.l.-epimorfismo; $\pi!$ la restricción de π a L , $u, v, u!$ y $v!$ funciones propias tales que $u=f \circ v$, $u!=f_0 \circ v!$ y $u|_{\pi(N_i)}$, $u|_{\pi(N_i \cap (\partial N - L))}$, $v|_{\pi(N_i)}$, $v|_{\pi(N_i \cap (\partial N - L))}$, $u!|_{\pi(N_i \cap L)}$, $u!|_{\pi(N_i \cap \partial L)}$, $v!|_{\pi(N_i \cap L)}$ y $v!|_{\pi(N_i \cap \partial L)}$ son inmersiones difeomorfas planas de clase C^k para cada N_i . Nótese que $u!=g_0^{-1} \circ u|_{\pi(L)}$.

Su borde es el n -ciclo seccional infinito de clase C^k en $(f, f_0; g)_k$

$$\partial(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{N})_k = (N_0, \sigma|_{N_0}, \gamma|_{N_0}; -\partial L, \nu|_{\partial L}, \mu|_{\partial L}; \mathcal{N}_0)_k,$$

donde N_0 es la n -seudovariedad tal que $\partial N = L \cup N_0$ y $\mathcal{N}_0 = (N_0 \cap N_i)$.

15.3. DEFINICION. Dos n -ciclos seccionales infinitos de clase C^k en $(f, f_0; g)_k \in \mathcal{DP}_k$,

$$(P_1, \sigma_1, \gamma_1; \partial P_1, \nu_1, \mu_1; \mathcal{P}_1)_k \text{ y } (P_2, \sigma_2, \gamma_2; \partial P_2, \nu_2, \mu_2; \mathcal{P}_2)_k,$$

son seudobordantes si existe una $(n+1)$ -cadena seccional infinita de clase C^k $(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{N})_k$ en $(f, f_0; g)_k$ tal que

$$\partial(N, \sigma, \gamma; L, \nu, \mu; \mathcal{N})_k =$$

$$=(P_1, \sigma_1, \gamma_1; \partial P_1, \nu_1, \mu_1; \mathcal{P}_1)_k + (-P_2, \sigma_2, \gamma_2; -\partial P_2, \nu_2, \mu_2; \mathcal{P}_2)_k$$

donde $-P_2$, $-\partial P_2$ son las pseudovarietades P_2 , ∂P_2 con la orientación opuesta a la dada.

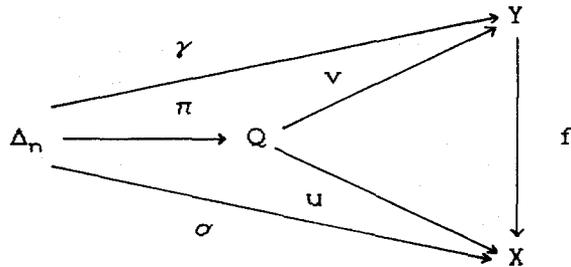
15.4. NOTA. Como en el capítulo I, "ser pseudobordantes" es una relación de equivalencia. El conjunto $S\Omega_n^{\infty}(f, f_0; g)_{k\mathbb{S}}$ de las clases de equivalencia de n -ciclos seccionales infinitos de clase C^k en $(f, f_0; g)_k$ admite estructura de grupo conmutativo con la operación $+$, inducida por la suma de n -ciclos seccionales infinitos. A dicho grupo lo llamaremos n -ésimo grupo de pseudobordismo seccional infinito diferenciable de clase C^k .

Todas las propiedades de homología enunciadas en el capítulo IV para $S\Omega_*^{\infty}(, ;)_{\mathbb{S}}$ y la categoría \mathcal{DP} , tienen su análoga evidente para $S\Omega_*^{\infty}(, ;)_{k\mathbb{S}}$ y la categoría \mathcal{DP}_k . Las demostraciones son análogas.

A continuación, representamos los grupos de pseudobordismo seccional diferenciable como grupos de homología de complejos de cadenas.

15.5. DEFINICION. Sea Δ_n el n -símplice canónico. Sea $f: Y \rightarrow X$ un objeto de la categoría \mathcal{D}_k . Llamamos n -símplice seccional casi-inmersión difeomorfa de clase C^k en f , a todo $(\Delta_n, \sigma, \gamma; \mathcal{P})$, en la cual $\sigma: \Delta_n \rightarrow X$, $\gamma: \Delta_n \rightarrow Y$ son funciones diferenciables de clase C^k , tales que $\sigma = f \circ \gamma$ y $\mathcal{P} = \{P_i\}$ es una familia finita de subpoliedros

compactos de dimensión n de Δ_n tales que $\Delta_n = \bigcup_i P_i$ y $\text{int } P_i \cap \text{int } P_j = \emptyset$ si $i \neq j$, de modo que existen $\pi: \Delta_n \rightarrow Q$ p.l.-epimorfismo sobre un poliedro Q , $u: Q \rightarrow X$ y $v: Q \rightarrow Y$ funciones diferenciables de clase C^k , tales que conmuta el diagrama



y para cada $P_i \in \mathcal{P}$, las funciones $u|_{\pi(P_i)}$, $u|_{\pi(P_i \cap \partial \Delta_n)}$, $v|_{\pi(P_i)}$ y $v|_{\pi(P_i \cap \partial \Delta_n)}$ son inmersiones difeomorfas planas de clase C^k .

15.6.. Designamos por $CID_n(f)_{ks}$ el grupo libre generado por los n -símplices seccionales casi-inmersión difeomorfa de clase C^k en f . Las aplicaciones cara de Δ_n , $F^{(k)}: \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$, permiten definir un homomorfismo $\partial_n: CID_n(f)_{ks} \rightarrow CID_{n-1}(f)_{ks}$ por su efecto sobre los generadores :

$$\partial_n(\Delta_n, \sigma, \gamma; \mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k (\Delta_{n-1}, \sigma \circ F^{(k)}, \gamma \circ F^{(k)}; \mathcal{P}_k),$$

donde $\mathcal{P}_k = \langle P_i \cap F^{(k)} \Delta_{n-1} \mid P_i \in \mathcal{P} \rangle$. Es fácil ver que $\partial \partial = 0$. Los grupos de homología seccional casi-inmersión difeomorfa de clase C^k de f son los grupos de homología del complejo $\langle CID_n(f)_{ks}, \partial_n \rangle$,

$$HCID_n(f)_{ks} = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}.$$

Sea $(f, f_0, g) \in \mathcal{D}_k$, $g = (g_0, g_1)$. Si $(\Delta_n, \sigma, \gamma; \mathcal{P})$ es un n -símplice seccional casi-inmersión difeomorfa de clase C^k en f_0 , entonces $(\Delta_n, g_0 \sigma, g_1 \gamma; \mathcal{P}) \in CID_n(f)_{ks}$. Por tanto $g = (g_0, g_1)$ induce un morfismo de cadenas $g.: CID.(f_0)_{ks} \rightarrow CID.(f)_{ks}$. Consideremos el "mapping

cone" Cg . de g ., definimos el n -ésimo grupo de homología seccional casi-inmersión difeomorfa de clase C^k de $(f, f_0; g)$ por

$$HCID_n(f, f_0; g)_{ks} = H_n(Cg.)$$

15.7. DEFINICION. Dado el objeto $f: Y \rightarrow X$ de la categoría \mathcal{D}_k , sea $CID_n^{\infty}(f)_{ks}$ el conjunto de todas las sumas formales $\sum m_i(\Delta_n, \sigma_i, \gamma_i; \mathcal{P})_k$, donde $m_i \in \mathbb{Z}$ y $\langle \sigma_i(\Delta_n) \mid m_i \neq 0 \rangle$ es localmente finito. Sea $\partial.: CID_n^{\infty}(f)_{ks} \rightarrow CID_{n-1}^{\infty}(f)_{ks}$ el homomorfismo borde evidente. El n -ésimo grupo de homología seccional infinita de casi-inmersiones difeomorfas de clase C^k de f es

$$HCID_n^{\infty}(f)_{ks} = H_n(CID_n^{\infty}(f)_{ks}, \partial.).$$

Sean $(f, f_0; g)_{k \in \mathcal{D}_k}$, Cg el "mapping cone" del homomorfismo $g: CID^{\infty}(f_0)_{ks} \rightarrow CID^{\infty}(f)_{ks}$ inducido por g . El n -ésimo grupo de homología seccional infinita de casi-inmersiones difeomorfas de clase C^k de $(f, f_0; g)_k$ es

$$HCID_n^{\infty}(f, f_0; g)_{ks} = H_n(Cg)$$

15.8. NOTA. Como los n -símplices seccionales casi-inyectivos, los n -símplices casi-inmersión difeomorfa de clase C^k pueden ser pegados entre sí, de forma que de un n -ciclo seccional algebraico se obtiene un n -ciclo seccional geométrico y a ciclos homólogos corresponden ciclos seudobordantes. El método a seguir es el mismo que en los capítulos III y IV, por lo cual no lo repetimos aquí. Destacamos el siguiente resultado:

15.9. PROPOSICION. La asignación $[z] \rightarrow [C^{\Phi}(z)]$ define isomorfismos

$$\Psi: \text{HCID}_n(f, f_0; g)_{ks} \rightarrow S\Omega_n(f, f_0; g)_{ks} \quad \text{y}$$

$$\Psi^{\infty}: \text{HCID}_n^{\infty}(f, f_0; g)_{ks} \rightarrow S\Omega_n^{\infty}(f, f_0; g)_{ks}$$

En el resto del apartado, sea $f: Y \rightarrow X$ un objeto de la categoría \mathcal{D}_k . Con los simplices seccionales casi-inmersión difeomorfa de clase C^k en f , podemos definir ciertos haces sobre X , gracias a los cuales generalizaremos (13.5) relacionando $S\Omega_*^{\infty}(f)_{ks}$ con los grupos de homología de cierto haz diferencial.

15.10. DEFINICION. Dado un abierto $A \subseteq X$, sean

$$\text{ED.}(A) = \text{CID.}(f)_{ks} / \text{CID.}(f|_{f^{-1}(X-A)})_{ks},$$

$$\text{ED.}^{\infty}(A) = \text{CID}^{\infty}(f)_{ks} / \text{CID}^{\infty}(f|_{f^{-1}(X-A)})_{ks}.$$

Si $B \subseteq A$, hay homomorfismos restricción obvios

$$\text{ED.}(B) \rightarrow \text{ED.}(A), \quad \text{ED}^{\infty}(B) \rightarrow \text{ED}^{\infty}(A).$$

Por tanto, ED. y ED^{∞} son prehaces sobre el espacio X . El borde ∂ en $\text{CID.}(f)_{ks}$ ($\text{CID}^{\infty}(f)_{ks}$) induce en ED. (ED^{∞}) un homomorfismo diferencial de grado -1 que también designamos por ∂ . y que hace de ED. (ED^{∞}) un haz diferencial.

15.11. DEFINICION. Dado $W \subseteq Y$, sea $\text{CS}_n(W)$ el grupo libre engendrado por el conjunto $\langle (\Delta_n, f \circ \gamma, \gamma) \mid (\Delta_n, \gamma) \text{ es } n\text{-simplex singular en } W \rangle$, y sea $\text{CS}_n^{\infty}(W)$ el conjunto de todas las sumas formales $\sum m_i (\Delta_n, f \circ \gamma_i, \gamma_i)$, donde $m_i \in \mathbb{Z}$ y $\langle f \circ \gamma_i(\Delta_n) \mid m_i \neq 0 \rangle$ es localmente finito en X . Sean $\partial: \text{CS}_n^{\infty}(W) \rightarrow \text{CS}_{n-1}^{\infty}(W)$ y $\partial': \text{CS}_n(W) \rightarrow \text{CS}(W)$ los

homomorfismos borde dados por

$$\partial_n(\Delta_n, f \circ \gamma, \gamma) = \partial_n'(\Delta_n, f \circ \gamma, \gamma) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k (\Delta_{n-1}, f \circ \gamma \circ F^{(k)}, \gamma \circ F^{(k)}).$$

Dado un abierto $A \subseteq X$, sean

$$ES.(A) = CS.(Y) / CS.(f^{-1}(X-A)),$$

$$ES^{\infty}.(A) = CS^{\infty}.(Y) / CS^{\infty}.(f^{-1}(X-A)).$$

Si $B \subseteq A$, hay homomorfismos restricción $ES.(B) \rightarrow ES.(A)$ y $ES^{\infty}.(B) \rightarrow ES^{\infty}.(A)$ evidentes. Por tanto, $ES.$ y $ES^{\infty}.$ son prehaces sobre el espacio X . Los homomorfismos ∂_n' y ∂_n inducen homomorfismos diferenciales de grado -1 en dichos haces.

15.12. PROPOSICION. Sean $\mathcal{E}D$, $\mathcal{E}D^{\infty}$, $\mathcal{E}S$, $\mathcal{E}S^{\infty}$ los haces generados por los prehaces ED , ED^{∞} , ES , ES^{∞} respectivamente. Entonces, los homomorfismos canónicos

$$\varphi.: ED.(X) \rightarrow \Gamma_c(X, \mathcal{E}D.) \quad , \quad \psi.: ED^{\infty}.(X) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{E}D^{\infty}.)$$

$$\varphi_1.: ES.(X) \rightarrow \Gamma_c(X, \mathcal{E}S.) \quad , \quad \psi_1.: ES^{\infty}.(X) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{E}S^{\infty}.)$$

son isomorfismos. (Γ_c y Γ indican secciones de soporte compacto y cerrado, respectivamente. Obsérvese que la proyección $(\Delta_n, f \circ \gamma, \gamma) \rightarrow (\Delta_n, \gamma)$ induce un isomorfismo canónico $\Gamma_c(X, \mathcal{E}S) \rightarrow \Gamma_c(Y, \mathcal{S})$, siendo \mathcal{S} el haz de cadenas singulares sobre Y .)

Demostración: Es como en (7.2).

15.13. LEMA. Las inclusiones $ED \rightarrow ED^{\infty}$, $ES \rightarrow ES^{\infty}$ inducen isomorfismos $\mathcal{E}D. \rightarrow \mathcal{E}D^{\infty}.$, $\mathcal{E}S. \rightarrow \mathcal{E}S^{\infty}.$

Demostración: Ver (7.3).

15.14. PROPOSICION. Los haces \mathcal{D} . y \mathcal{P} . son homotópicamente "fine".

Demostración: Ver (7.5). Nótese que el lema (7.4) y su demostración son válidos para los complejos CID y CS, con los cambios evidentes.

15.15. Sean ϕ una familia paracompactificante de soportes en X y $k = \dim X$. Sea \mathcal{L}' el haz diferencial definido por $\mathcal{L}'^q = (\mathcal{X})_{-q}$ ($\mathcal{X} = \mathcal{D}, \mathcal{P}$). Sea $C'(\mathcal{L}'^q)$ la resolución canónica de \mathcal{L}'^q por haces "flasques". Sea

$$Z^{k+1}(\mathcal{L}'^q) = \text{Imagen } (C^k(\mathcal{L}'^q) \rightarrow C^{k+1}(\mathcal{L}'^q)).$$

Sea $T'(\mathcal{L}'^q)$ la resolución finita

$$0 \rightarrow \mathcal{L}'^q \rightarrow C^0(\mathcal{L}'^q) \rightarrow C^1(\mathcal{L}'^q) \rightarrow \dots \rightarrow C^k(\mathcal{L}'^q) \rightarrow Z^{k+1}(\mathcal{L}'^q) \rightarrow 0,$$

que es un functor exacto de \mathcal{L}'^q . Sean $K^{p,q} = \Gamma_{\phi}(X, T^p(\mathcal{L}'^q))$ y $K' = \Sigma K^{p,q}$.

Sea $d': K^{p,q} \rightarrow K^{p+1,q}$, el morfismo inducido por la diferencial del complejo $\Gamma_{\phi}(X, T'(\mathcal{L}'^q))$ y $(-1)^p d'' = K^{p,q} \rightarrow K^{p,q+1}$ el morfismo inducido por $\mathcal{L}'^q \rightarrow \mathcal{L}'^{q+1}$. Sea $d = d' + d''$ la diferencial total y K' el complejo total, $K^n = \Sigma_{p+q=n} K^{p,q}$.

Asociada a la primera filtración de K' , hay una sucesión espectral convergente (ver [7])

$${}^p E_2^{p,q} = H_{\phi}^p(X, \mathcal{X}^q(\mathcal{L}')) \Rightarrow H^{p+q}(K'),$$

donde $\mathcal{X}'(\mathcal{L}')$ es el haz derivado de \mathcal{L}' .

En la segunda sucesión espectral de K'

$${}^p E_2^{p,q} = H^p(H_{\phi}^q(X, \mathcal{L}'))$$

se tiene ${}^p E_2^{p,q} = 0$ para todo $q > 0$ ya que \mathcal{L}' es homotópicamente "fine" (por serlo \mathcal{D} . y \mathcal{P} .). Por tanto, el homomorfismo canónico

$$H^p(\Gamma_{\phi}(X, \mathcal{L}')) = {}^p E_2^{p,0} \rightarrow H^p(K')$$

inducido por la inclusión de complejos $\Gamma_{\phi}(X, C^0(\mathcal{L}')) \rightarrow K'$, es un

isomorfismo ([7], p.132). En consecuencia,

$$E_2^{p,q} = H_{\phi}^p(X; \mathcal{K}_{-q}(\mathcal{L})) \Rightarrow H^{p+q}(K) \cong H^{p+q}(\Gamma_{\phi}(X, \mathcal{L}'))$$

Teniendo en cuenta (15.9) y (15.12), (15.13), obtenemos lo siguiente

TEOREMA. Sea $f: Y \rightarrow X$ un objeto en \mathcal{D}_k . Entonces hay sucesiones espectrales convergentes

$$E_2^{p,q} = H_c^p(X; \mathcal{K}_{-q}(\mathcal{D})) \Rightarrow \text{HCID}_{-p-q}(f)_{ks} = S\Omega_{-p-q}(f)_{ks},$$

$$E_2^{p,q} = H^p(X; \mathcal{K}_{-q}(\mathcal{D})) \Rightarrow \text{HCID}_{-p-q}^{\infty}(f)_{ks} = S\Omega_{-p-q}^{\infty}(f)_{ks},$$

$$E_2^{p,q} = H_c^p(X; \mathcal{K}_{-q}(\mathcal{S})) \Rightarrow \text{HCS}_{-p-q}(Y),$$

donde $\mathcal{K}_{-q}(\mathcal{D})$ y $\mathcal{K}_{-q}(\mathcal{S})$ son los haces derivados de \mathcal{D} y \mathcal{S} y $\text{HCS}_{-p-q}(Y)$ es la homología del complejo $\langle \text{CS}_{-p-q}(Y), \partial \rangle$.

15.16. LEMA. En cualquier punto $x \in X$, las fibras $\mathcal{K}_q(\mathcal{D})_x$ y $\mathcal{K}_q(\mathcal{S})_x$ son nulas si $q \neq n = \dim X$.

Demostración: Sea $\Sigma m_i(\Delta_q, \sigma_i, \gamma_i; \mathcal{P})$ un representante de un elemento z de $\mathcal{K}_q(\mathcal{D})_x \cong H_q(f, f|_{f^{-1}(X-x)}; i)_{ks}$. Ya que la suma es finita y cada $\gamma_i(\Delta_q)$ es compacto y se cumplen las condiciones de inyectividad señaladas en la definición (15.5), $\bigcup_i \gamma_i(\Delta_q) \cap f^{-1}(x)$ tiene sólo un número finito de elementos $\{y_1, \dots, y_s\}$. Por tanto, podemos representar el germen z por una suma finita de cadenas $c_j = \Sigma m_j(\Delta_q, \sigma_j, \gamma_j; \mathcal{P}_j)$ tales que $\bigcup_j \gamma_j(\Delta_q) \cap f^{-1}(x)$ sea un sólo punto. Demostramos que cada una de estas cadenas es homológicamente nula. En efecto, por la definición de k -submersión, la función f tiene la forma $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ en ciertos entornos de x y $\bigcup_j \gamma_j(\Delta_q) \cap f^{-1}(x)$. Entonces c_j es una cadena en $(g, g|_{g^{-1}(\mathbb{R}^n-x)}; i)_{ks}$ de clase nula ya que

$$H_q(g, g|_{g^{-1}(\mathbb{R}^n-x)}; i)_{ks} \cong S\Omega_q(g, g|_{g^{-1}(\mathbb{R}^n-x)}; i)_{ks} \cong$$

$$\cong H_q(\mathbb{R}^{n+m}, (x) \times \mathbb{R}^m) = 0,$$

si $q \neq n$.

Si $A \subseteq Y$, sea $C(A)$ el grupo de cadenas singulares en A . Según la definición (15.11), la proyección $(\Delta_n, f \circ \gamma, \gamma) \rightarrow (\Delta_n, \gamma)$ induce un isomorfismo $CS(X)/CS(X-U) \cong S(Y)/S(Y-f^{-1}(U))$ entre grupos de cadenas relativas, luego

$$H_q(\mathcal{S})_x = \lim_{U \ni x} H_q(ES(U)) = \lim_{U \ni x} H_q(CS(X)/CS(X-U)) \cong H_q(Y, Y-f^{-1}(x)).$$

Por (13.6), se tiene

$$\mathcal{H}_q(\mathcal{S})_x \cong \mathcal{H}_q(\mathcal{D})_x = 0$$

cuando $q \neq n = \dim X$.

15.17. COROLARIO. Sea $f: Y \rightarrow X$ una k -submersión, $m = \dim Y$, $n = \dim X$.

Entonces hay isomorfismos canónicos ($p \geq 0$)

$$S\Omega_p(f)_{ks} \cong H^{n-p}_c(X; \mathcal{H}_n(\mathcal{D})), \quad S\Omega_p^{\text{oo}}(f)_{ks} \cong H^{n-p}(X; \mathcal{H}_n(\mathcal{D})),$$

$$HCS_p(Y) \cong H^{n-p}_c(X; \mathcal{H}_n(\mathcal{S})),$$

Demostración: Mostremos la existencia del primer isomorfismo. El complejo K^{pq} de (15.15) es nulo si $p < 0$. También $K^{pq} = 0$ si $p > n+1$ ya que $\dim X = n$. En la segunda sucesión espectral, ${}^n E^{pq} = 0$ si $q \neq 0$ ya que \mathcal{D} es homotópicamente "fine". En la sucesión espectral ${}^n E_2^{pq} = H_c^p(X, \mathcal{H}_q(\mathcal{D}))$, tenemos ${}^n E_2^{pq} = 0$ si $q \neq -n$, por (15.16). Se cumplen pues, las hipótesis de ([60], prop. IX.5, p.120) y en consecuencia, se tiene

$${}^n E_2^{n-p, -n} \cong {}^n E_3^{n-p, -n} \cong \dots \cong {}^n E_{\infty}^{n-p, -n} = H^{-p}(K) \cong S\Omega_p(f)_{ks}.$$

El resto de la demostración es análogo.

15.18. NOTA. El morfismo de prehaces $ED \rightarrow ES$ determinado por la proyección de cadenas $(\Delta, f \circ \gamma, \gamma) \rightarrow (\Delta, f, \gamma)$, define un morfismo $i: \mathcal{E}D \rightarrow \mathcal{E}S$ de los haces inducidos que da lugar a morfismos de las sucesiones espectrales

$$i: E_2^{pq} = H_{\phi}^p(X, \mathcal{X}_{-q}(\mathcal{E}D)) \rightarrow E_2^{pq} = H_{\phi}^p(X, \mathcal{X}_{-q}(\mathcal{E}S))$$

(ϕ es cualquier familia paracompactificante de soportes en X), y también, morfismos de los términos límite respectivos. Por (15.17), tenemos así los homomorfismos

$$i_p: S\Omega_p^{\infty}(f)_{ks} \rightarrow H^{n-p}(X, \mathcal{X}_n(\mathcal{E}S))$$

que generaliza el homomorfismo de (13.5), y un morfismo

$$i: \mathcal{X}_n(\mathcal{E}D) \rightarrow \mathcal{X}_n(\mathcal{E}S)$$

entre los haces derivados.

En el resto del apartado, seguimos suponiendo que $f: Y \rightarrow X$ es una k -submersión.

15.19. LEMA. Sea $A \subseteq X$ cerrado. Entonces

$$i_*: H_c^p(A; \mathcal{X}_n(\mathcal{E}D) | A) \rightarrow H_c^p(A; \mathcal{X}_n(\mathcal{E}S) | A)$$

es epimorfismo si $p=0$, y es isomorfismo si $p \neq 0$.

Demostración: Sean $\mathcal{I} = \mathcal{X}_n(\mathcal{E}D)$, $\mathcal{O} = \mathcal{X}_n(\mathcal{E}S)$ y $U = X - A$. Si ϕ es una familia de soportes paracompactificante en X y \mathcal{A} es un haz sobre X , entonces la sucesión exacta $0 \rightarrow \mathcal{A}_U \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_A \rightarrow 0$ da una sucesión exacta de cohomología

$$\dots \rightarrow H_{\phi|U}^p(U; \mathcal{A}|U) \rightarrow H_{\phi}^p(X; \mathcal{A}) \rightarrow H_{\phi|A}^p(A; \mathcal{A}|A) \rightarrow \dots$$

(ver [7] p.52), donde $\phi|L = \langle F \in \phi \text{ y } F \subseteq L \rangle$ ($L=U, A$). Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
\rightarrow H_c^p(U; \mathcal{J} | U) & \rightarrow & H_c^p(X; \mathcal{J}) & \rightarrow & H_c^p(A; \mathcal{J} | A) & \rightarrow & H_c^{p+1}(U; \mathcal{J} | U) & \rightarrow & H_c^{p+1}(X; \mathcal{J}) & \rightarrow \\
\downarrow i_* & & \downarrow i_* & & \downarrow i_* & & \downarrow i_* & & \downarrow i_* & \\
\rightarrow H_c^p(U; \mathcal{O} | U) & \rightarrow & H_c^p(X; \mathcal{O}) & \rightarrow & H_c^p(A; \mathcal{O} | A) & \rightarrow & H_c^{p+1}(U; \mathcal{O} | U) & \rightarrow & H_c^{p+1}(X; \mathcal{O}) & \rightarrow
\end{array}$$

Por (15.17), (15.18) y (13.5), los cuatro i_p laterales son isomorfismos si $p \neq 0$, y son epimorfismos si $p = n$. Aplicando el lema de los cinco, se termina la demostración.

15.20. TEOREMA. Sea $f: Y \rightarrow X$ una k -submersión, $n = \dim X$. El homomorfismo

$$i_q: S\Omega_q^{\infty}(X)_{k\mathbb{E}} \rightarrow H^{n-q}(X, \mathcal{K}_n(\mathcal{J}))$$

es epimorfismo si $q = n$ y es isomorfismo si $q \neq n$.

Demostración: Por ser X paracompacta, puede ser recubierta por una familia numerable $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ localmente finita de cerrados A_i , cada uno compacto contenido en un entorno de coordenadas. Todo cerrado $B_i \subseteq A_i$ es compacto, por lo cual $H_c^p(B_i, \mathcal{J} | B_i) = HP(B_i, \mathcal{J} | B_i)$ y $H_c^p(B_i, \mathcal{O} | B_i) = HP(B_i, \mathcal{O} | B_i)$, donde $\mathcal{J} = \mathcal{K}_n(\mathcal{J})$ y $\mathcal{O} = \mathcal{K}_n(\mathcal{O})$.

Aplicando la sucesión de Mayer-Vietoris en cohomología de haces ([32] p. 54)

$$\rightarrow HP^{-1}(X_1 \cap X_2, \mathcal{A}) \rightarrow HP(X_1 \cup X_2, \mathcal{A}) \rightarrow HP(X_1, \mathcal{A}) \oplus HP(X_2, \mathcal{A}) \rightarrow HP(X_1 \cap X_2, \mathcal{A}) \rightarrow$$

con $X_1 = A_k$, $X_2 = \bigcup_{i < k} A_i$ a los haces \mathcal{J} y \mathcal{O} , tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
\rightarrow \text{HP}^{-1}(X_1 \cap X_2, \mathcal{T}) \rightarrow \text{HP}(X_1 \cup X_2, \mathcal{T}) \rightarrow \text{HP}(X_1, \mathcal{T}) \oplus \text{HP}(X_2, \mathcal{T}) \rightarrow \text{HP}(X_1 \cap X_2, \mathcal{T}) \rightarrow \\
\downarrow i_* \qquad \qquad \downarrow i_* \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow i_* \\
\rightarrow \text{HP}^{-1}(X_1 \cap X_2, \emptyset) \rightarrow \text{HP}(X_1 \cup X_2, \emptyset) \rightarrow \text{HP}(X_1, \emptyset) \oplus \text{HP}(X_2, \emptyset) \rightarrow \text{HP}(X_1 \cap X_2, \emptyset) \rightarrow
\end{array}$$

Con el lema de los cinco y (15.19) (para un cerrado $A \subseteq X$, $H^*(A, \mathcal{A}) = H^*(A, \mathcal{A}|_A)$ por definición), obtenemos por inducción que $i_p: \text{HP}(X, \mathcal{T}) \rightarrow \text{HP}(X, \emptyset)$ es epimorfismo si $p=0$, y es isomorfismo si $p \neq 0$. Según (15.17), esto termina la demostración.

15.21. NOTA. Sea IDIFP_k la subcategoría de IDIF_k , formada por los objetos $(X, X_0; g_0)_k$ en los cuales g_0 es propia y por los morfismos (h, h_0) con ambas h, h_0 funciones propias. La transformación natural $\text{IDIFP}_k \rightarrow \mathcal{DP}_k$ definida por $(X, X_0; g_0)_k \rightarrow (1_X, 1_{X_0}; g_0, g_0)_k$ permite considerar IDIFP_k como subcategoría de \mathcal{DP}_k . Los ciclos y cadenas infinitas de clase C^k en $(X, X_0; g_0)_k \in \text{IDIFP}_k$ los definimos por las siguientes condiciones: a) $(P, \sigma; \partial P, \nu)_k$ es un ciclo infinito si $(P, \sigma, \sigma; \partial P, \nu, \nu)_k$ es un ciclo seccional infinito de clase C^k ; b) $(N, \sigma; L, \nu)_k$ es una cadena infinita si $(N, \sigma, \sigma; L, \nu, \nu)_k$ es una cadena seccional infinita. Análogamente, se tienen las nociones de suma, borde y relación de pseudobordismo. El conjunto de las clases de n -ciclos infinitos de clase C^k pseudobordantes en un objeto $(X, X_0; g_0)_k \in \text{IDIFP}_k$ tiene estructura de grupo; lo representaremos por $\text{SQID}_n^{\infty}(X, X_0; g_0)_k$ y lo llamaremos n -ésimo grupo de pseudobordismo infinito de inmersiones difeomorfas de clase C^k . El functor $\text{SQID}_*^{\infty}(\cdot)_k$ es naturalmente equivalente al $\text{SQ}_*(\cdot)_{sk}$ en IDIFP_k , y por tanto cumple las mismas propiedades de homología que éste. Además cumple la propiedad de escisión más fuerte dada en

(5.3) (se demuestra igual que ésta). Así se tiene lo siguiente.

15.22. PROPOSICION. $SQID_*^{\infty}$ y ∂_* definen una teoría de homología ordinaria con coeficientes enteros en la categoría $IDIFP_k$.

(15.15) da el siguiente corolario.

15.23. COROLARIO. Sea X una variedad diferencial de dimensión n , \mathcal{D} el haz sobre X de cadenas seccionales de clase C^k en 1_X . Entonces hay isomorfismos canónicos ($p \geq 0$)

$$SQID_p(X)_k \cong H^{n-p}_c(X; \mathcal{R}_n(\mathcal{D})), \quad SQID_p^{\infty}(X)_k \cong H^{n-p}(X; \mathcal{R}_n(\mathcal{D})).$$

Demostración: Por (13.6), $\mathcal{R}_p(\mathcal{D})_x = 0$ si $p \neq n$ en todo $x \in X$.

Ya que el haz \mathcal{D} asociado a la función 1_X es isomorfo al haz \mathcal{S} de cadenas singulares en X , es fácil establecer en este caso el lema (15.19) y, como en (15.20), obtener la siguiente generalización de (11.5).

15.24. TEOREMA. Sea $X \in IDIF_k$ de dimensión n . El homomorfismo

$$i_q: SQID_q^{\infty}(X)_k \rightarrow H^{II}_q(X)$$

es epimorfismo si $q = n$ y es isomorfismo si $q \neq n$.

15.25. NOTA. Todo lo realizado en este capítulo puede hacerse con pseudovariedades \mathbb{Z}_2 -orientadas y cadenas con coeficientes en \mathbb{Z}_2 con sencillas adaptaciones de las demostraciones.

CAPITULO XVI

GRADO SECCIONAL DIFERENCIABLE. OBSTRUCCIONES A LA EXTENSION DE SECCIONES Y AL PROBLEMA DE CAUCHY EN DERIVADAS PARCIALES.

Sea $f: Y \rightarrow X$ un objeto de la categoría \mathcal{D}_k , $n = \dim X$. El homomorfismo de cadenas $CID.(f)_{ks} \rightarrow S.(X)$ que a la cadena seccional casi-inmersión difeomorfa de clase $C^k \Sigma U_i(\Delta_n, \alpha_i, \gamma_i)$ en f le asocia la cadena singular $\Sigma U_i(\Delta_n, \alpha_i)$ en X , define un homomorfismo

$$p_1 : HCID_n(f)_{ks} \longrightarrow H_n(X) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

entre los correspondientes grupos de homología. La composición

$$q_n : S\Omega_n(f)_{ks} \cong HCID_n(f)_{ks} \longrightarrow H_n(X)$$

con el isomorfismo de (15.9), nos permite definir el grado seccional de clase C^k de f .

16.1. DEFINICION. Llamamos grado seccional de clase C^k de f al número

$$\text{grado}(f)_{ks} = \text{cardinal}(\text{coker } q_n) - 1 .$$

16.2. DEFINICION. Si $\text{grado}(f)_{\mathbb{S}}=0$, llamamos grado seccional fuerte de clase C^k de f a

$$\text{grado}'(f)_{k\mathbb{S}} = \inf_{(P, \sigma, \gamma; \mathcal{P})} \{\text{card } \mathcal{P}\} - 1 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{+\infty\}$$

donde $(P, \sigma, \gamma; \mathcal{P})$ recorre el conjunto de todos los n -ciclos seccionales de clase C^k en f , tales que el morfismo canónico $S\Omega_n(f)_{k\mathbb{S}} \rightarrow H_n(X)$, aplica su clase en una clase de homología singular de X no nula.

16.3. PROPOSICION. Sea $f: Y \rightarrow X$ un objeto de \mathcal{D}_k , donde X es conexa, orientable y cerrada. Entonces existe una sección de f de clase C^k , i.e. una función $s: X \rightarrow Y$ de clase C^k tal que $fs=1_X$, si y solo si

$$\text{grado}(f)_{k\mathbb{S}}=0 \text{ y } \text{grado}'(f)_{k\mathbb{S}}=0 .$$

Demostración: Es la misma que en (6.8).

16.4. TEOREMA. Sea $f: Y \rightarrow X$ una k -submersión donde X conexa, orientada y de dimensión n . Entonces, $\text{grado}(f)_{k\mathbb{S}}$ es el menor entero $m \geq 0$ tal que

$$(m+1)[X] \in \text{Im} \langle f_n: H_n(Y) \rightarrow H_n(X) \rangle,$$

donde $[X]$ es la clase fundamental de X .

Demostración: Se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & & H_n(Y) \\
 & \nearrow P_2 & \downarrow f_* \\
 S\Omega_n(f)_{k\mathbb{S}} \cong HCID_n(f)_{k\mathbb{S}} & & H_n(X) \\
 & \searrow P_1 &
 \end{array}$$

donde p_2 es epimorfismo por (13.5). Luego $\text{Im } f = \text{Im } p_2$.

16.5. COROLARIO. El grado seccional de clase C^k de una k -submersión f es un invariante homotópico.

16.6. NOTA. El anterior teorema es más general que el caso diferenciable demostrado por THOM y SULLIVAN (en [55] se afirma que dicha demostración existe) del teorema sobre el grado seccional continuo dado por SHIH en [55]. Posiblemente, la demostración dada aquí sea mucho más corta que la obtenida por los citados autores.

16.7. EJEMPLO. Ya que $H_2(S^3)=0$, el teorema anterior implica que el grado seccional de clase C^k del fibrado de Hopf $f:S^3 \rightarrow S^2$ es infinito.

Sean $f:Y \rightarrow X$ una k -submersión, X_0 una subvariedad de X , ambas orientadas y cerradas. Damos a continuación una condición necesaria para que dada una sección $s:X_0 \rightarrow Y$ de clase C^k de f , exista una sección de f de la misma clase que extienda s a todo X .

16.8. PROPOSICION. Sea $Y_0=f^{-1}(X_0)$, $f_1=f|_{Y_0}$ y $f_2=f|_{Y-Y_0}$. La sucesión

$$\rightarrow \Omega_{nr}(f_2)_{ks} \rightarrow \Omega_{nr}(f)_{ks} \rightarrow \Omega_{nr}(f, f_2; i)_{ks} \rightarrow \Omega_{(n-1)r}(f_2)_{ks} \rightarrow$$

asociada a la k -submersión $(f, f_2; i)_k$ que aparece en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 Y - Y_0 & \longrightarrow & Y & \longleftarrow & Y_0 \\
 \downarrow f_2 & & \downarrow f & & \downarrow f_1 \\
 X - X_0 & \longrightarrow & X & \longleftarrow & X_0
 \end{array}$$

es exacta en $S\Omega_{nr}(f, f_2; i)_{ks}$ según (14.6), y el isomorfismo de Thom $S\Omega_{qr}(f_1)_{ks} \rightarrow S\Omega_{(q+n-m)r}(f, f_2; i)_{ks}$ asociado a la orientación O_1 de ν_1 (14.12) permite definir la sucesión de Gysin-Thom

$$\dots \rightarrow S\Omega_{nr}(f_2)_{ks} \rightarrow S\Omega_{nr}(f)_{ks} \xrightarrow{\Delta_{*r}} S\Omega_{mr}(f_1)_{ks} \xrightarrow{\theta_{*r}} S\Omega_{(n-1)r}(f_2)_{ks} \rightarrow \dots$$

en pseudobordismo seccional reducido, exacta en $S\Omega_{mr}(f_1)_{ks}$. Sea μ_{X_0} la imagen de la clase fundamental de X_0 por el isomorfismo $H_m(X_0) \rightarrow S\Omega_{mr}(1_{X_0})$. Sea $E(f, X_0, s)_k$ la clase de $S\Omega_{(n-1)r}(f_2)_{ks}$ definida por

$$E(f, X_0, s)_k = \theta_{mr} [(1_{X_0}, s)_{*r} (\mu_{X_0})].$$

Entonces, si existe $g: X \rightarrow Y$ de clase C^k tal que $f \circ g = 1_X$ y $g|_{X_0} = s$, se cumple que $E(f, X_0, s) = 0$.

Demostración: Basta mostrar que existe $\rho \in S\Omega_{nr}(f)_k$ tal que $\Delta_{*r}(\rho) = (1_{X_0}, s)_{*r}(\mu_{X_0}) \in S\Omega_{mr}(f_1)_{ks}$.

Siendo $X \supseteq X_0$ compactas, el par (X, X_0) puede ser triangulado diferenciablemente, i.e. hay un C^k -difeomorfismo $t: K \rightarrow X$ de una pseudovariiedad orientada K en X que aplica un subpoliedro L sobre X_0 (ver [45]), siendo por tanto L una pseudovariiedad orientada de la misma dimensión que X_0 . Entonces $\rho = (K, t, g \circ t)_k$ es un n -ciclo seccional de f y vamos a mostrar que cumple las condiciones requeridas.

El homomorfismo $\Delta_{*r}: S\Omega_{nr}(f)_{ks} \rightarrow S\Omega_{mr}(f_1)_{ks}$ es la composición

$S\Omega_{nr}(f)_{ks} \rightarrow S\Omega_{nr}(f, f_2)_{ks} \rightarrow S\Omega_{mr}(f_1)_{ks}$ del homomorfismo inducido por la k -inmersión $l: f \rightarrow (f, f_2)$ con el isomorfismo de Thom ϕ definido en (14.12) como la composición de isomorfismos

$$\begin{array}{ccccccc}
 S\Omega_{nr}(f, f_2)_{ks} & \xrightarrow{P_{2*r}} & H_n(Y, Y-Y_0) & \xrightarrow{Esc} & H_n(N_\varepsilon, N_\varepsilon-Y_0) & \xrightarrow{Exp^{-1}} & H_n(E_2(\varepsilon), E_2(\varepsilon)-E_2^0) \\
 \text{Inm} & & \cap u_2 & \text{Ret} & P_{2*r}^{-1} & & \\
 \rightarrow H_n(E_2, E_2-E_2^0) & \rightarrow & H_m(E_2) & \rightarrow & H_m(Y_0) & \rightarrow & S\Omega_{mr}(f_1)_{ks}
 \end{array}$$

donde N_ε es cierto entorno tubular de Y_0 en Y , E_2 es el espacio total del fibrado normal ν_2 de Y_0 en Y , E_2^0 es la imagen de la sección nula de dicho fibrado, $E_2(\varepsilon)$ un entorno apropiado de E_2^0 en E_2 tal que $Exp: E_2(\varepsilon) \rightarrow N_\varepsilon$ es un isomorfismo, $u_2 \in H^{n-m}(E_2, E_2-E_2^0)$ es la clase de homología asociada a la orientación de ν_2 inducida por la orientación del fibrado normal ν_1 de X_0 en X , Esc es una escisión, Inm es la inmersión canónica y Ret es una retracción.

A continuación describimos geoméricamente el efecto de Δ_{*r} sobre la clase $\rho = [K, t, g \cdot t]_k$, usando el teorema de isomorfismo (14.8).

La clase ρ se transforma, por $p_{2*r} \cdot l$, en la clase correspondiente a $[K, g \cdot t] \in S\Omega_{nr}(Y, Y-Y_0)_k$. Según la interpretación de los isomorfismos de escisión dada en (5.3), ρ se transforma después de $Exp^{-1} \cdot Esc$ en la clase $\gamma \in H_n(E_2, E_2-E_2^0)$ correspondiente a $[M_\varepsilon, exp^{-1} \cdot g \cdot t]_{M_\varepsilon} \in S\Omega_{nr}(E_2, E_2-E_2^0)$, siendo M_ε un entorno regular de L en K ; si llamamos μ_ε a la cadena singular determinada por la triangulación de M_ε , la clase γ puede ser descrita entonces por la igualdad $\gamma = h_*[\mu_\varepsilon]$, donde $h = Exp^{-1} \cdot g \cdot t|_{M_\varepsilon}$; la clase γ se transforma en $Ret(\gamma u_2) = Ret(h_*[\mu_\varepsilon] \cap u_2) = Ret \cdot h_*([\mu_\varepsilon] \cap h^* u_2)$, que es transformada por p_{2*r}^{-1} en $[L, g \cdot t]_L \in S\Omega_{mr}(f_1)_{ks}$.

SHIH introdujo en 1977 [47] dos clases de obstrucción, en los grupos de homología "sectionelle", para el problema de Cauchy global. Éste fué el inicio de una nueva vía para estudiar las ecuaciones en derivadas parciales no lineales, que ha incrementado su interés con el anuncio de nuevos resultados en los años siguientes. Aunque SHIH no ha publicado los detalles, LALONDE determinó la construcción de dichas obstrucciones en el capítulo V de su primera tesis dirigida por SHIH ([33]). A continuación construimos en el pseudobordismo seccional las obstrucciones de LALONDE para que exista solución de un problema de Cauchy global.

16.9. INTRODUCCIÓN. FORMULACION DEL PROBLEMA.

Sean $f_1, f_2: M^m \rightarrow N^n$ aplicaciones diferenciables de variedades diferenciables. Se dice que son tangentes de orden k o que son k -tangentes en $x \in M$, si

$$\rho_N(f_1(y), f_2(y)) = o(\rho_M^k(x, y)) \text{ para } y \rightarrow x,$$

donde ρ designa una métrica riemanniana cualquiera. Es fácil ver que "ser k -tangentes en x " es una relación de equivalencia que no depende de las métricas ρ_M y ρ_N elegidas.

Se llama k -jet en un punto x de una aplicación diferenciable f a la clase $j_x^k(f)$ de aplicaciones k -tangentes a f en x . El punto x se llama fuelle, el punto $f(x)$ se llama fin de este jet. Fijando sistemas de coordenadas en los puntos x y $f(x)$, el k -jet de f en x se puede identificar con una colección de coeficientes de un polinomio de Taylor de grado k , ya que ser k -tangentes implica que todas las derivadas en x coinciden hasta el orden k inclusive.

Se designa por $J^k(M,N)$ al espacio de todos los k -jet de aplicaciones de M en N . Este conjunto tiene una estructura natural de variedad diferencial. En efecto, eligiendo sistemas de coordenadas en los puntos x y $f(x)$, el k -jet $j^k_y(f)$ de f en todo punto y y cercano a x está determinado por las coordenadas de y , $f(y)$ y los coeficientes del polinomio de Taylor en el punto y . La aplicación $J^k(M,N) \rightarrow M$ que a cada jet asocia su fuente, se llama aplicación fuente de $J^k(M,N)$. Una función $g: M \rightarrow J^k(M,N)$ se llama holónoma si existe otra función $f: M \rightarrow N$ tal que $g(x) = j^k_x(f)$, para todo $x \in M$, también se dice que g es la extensión a los k -jets de f y se designa por $j^k(f)$.

Sea X una variedad de clase C^∞ conexa, compacta y orientada de dimensión n , Z una variedad de la misma clase y X_0 una sub-variedad de X de clase C^∞ conexa, compacta y orientada de dimensión m , $m < n$. Designemos por O_X y O_{X_0} las orientaciones de X y X_0 y por O_1 la orientación del fibrado normal ν_1 de X_0 en X , inducida por O_X y O_{X_0} .

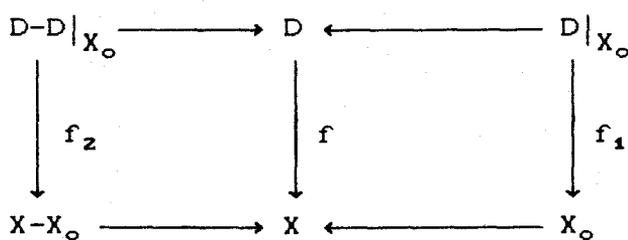
Sea $k_1 \in \mathbb{N}$ y designemos por $s: J^{k_1}(X,Z) \rightarrow X$ la aplicación fuente del espacio de los k_1 -jets de X en Z . Según Ehresmann ([21]), dar un sistema de ecuaciones en derivadas parciales equivale a dar un subespacio D de $J^{k_1}(X,Z)$. Sea D_0 una subvariedad de $J^{k_0}(X,Z)|_{X_0}$, donde $k_0 \leq k_1$. Se da una función (condición inicial) $\rho_0: X_0 \rightarrow D_0$ tal que la compuesta de ρ_0 con la aplicación canónica $J^{k_0}(X,Z)|_{X_0} \rightarrow J^{k_0}(X_0,Z)$ sea una sección holónoma de la aplicación fuente de $J^{k_0}(X_0,Z)$. Entonces el problema de Cauchy global consiste en buscar una sección holónoma $\rho: X \rightarrow D$ de la fibración $s|_D: D \rightarrow X$, tal que la compuesta de $\rho|_{X_0}$ con la proyección canónica

$\alpha: J^{k_1}(X, Z)|_{X_0} \rightarrow J^{k_0}(X, Z)|_{X_0}$ sea igual a ρ_0 .

Una solución de clase $C^{k'}$ ($k' \geq k_1$) corresponde a una sección holónoma ρ de clase $C^{k'-k_1}$ (i.e. una aplicación $\rho: X \rightarrow D \subseteq J^k(X, Z)$ de clase $C^{k'-k_1}$ tal que $\exists g: X \rightarrow Z$ de clase $C^{k'}$ con $j^{k_1}g = \rho$).

16.10. DEFINICION DE LAS OBSTRUCCIONES DE LALONDE.

Sea $k = k' - k_1$ ($0 \leq k \leq \infty$). Se van a definir dos obstrucciones a la existencia de una sección holónoma ρ de clase C^k en los grupos de pseudobordismo seccional reducido diferenciable de clase C^k . Se supone que D es una subvariedad de $J^{k_1}(X, Z)$, que las restricciones de la aplicación fuente s , $f: D \rightarrow X$, $f_0: D_0 \rightarrow X_0$ y $f_0': D|_{X_0} \cap \alpha^{-1}(D_0) \rightarrow X_0$ son submersiones ($D|_{X_0} = f^{-1}(X_0)$). Así, designando por $f_1: D|_{X_0} \rightarrow X_0$ la restricción de f a $D|_{X_0}$ y $f_2: D - D|_{X_0} \rightarrow X - X_0$ la restricción de f a $D - D|_{X_0}$, se tiene el diagrama conmutativo



y (f, f_1) es un diagrama normal con f y f_1 k -submersiones

Para que el problema de Cauchy tenga sentido, la sección ρ_0 debe corresponder a una aplicación de X_0 en Z de clase $C^{k'}$, lo que significa que ρ_0 debe ser de clase $C^{k'-k_0}$. Ya que $k_0 \leq k_1$, $k' - k_0 \geq k' - k_1$, luego ρ_0 es de clase C^k . El diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X_0 & \xrightarrow{\rho_0} & D_0 \\
 \downarrow 1_{X_0} & & \downarrow f_0 \\
 X_0 & \xrightarrow{1_{X_0}} & X_0
 \end{array}$$

induce el morfismo $(1_{X_0}, \rho_0)_{*r}: \mathcal{S}\Omega_{*r}(1_{X_0})_{ks} \rightarrow \mathcal{S}\Omega_{*r}(f_0)_{ks}$. El isomorfismo $H_*(X_0) \rightarrow \mathcal{S}\Omega D_{*r}(X_0)_k$ (teorema (14.8)), compuesto con el isomorfismo $\mathcal{S}\Omega D_{*r}(X_0)_k \rightarrow \mathcal{S}\Omega_{*r}(1_{X_0})_{ks}$ definido por $[P, \sigma] \rightarrow [P, \sigma, \sigma]$ y compuesto con el morfismo $(1_{X_0}, \rho_0)_{*r}$, dan un morfismo $H_*(X_0) \rightarrow \mathcal{S}\Omega_{*r}(f_0)_{ks}$. Sea $(\rho_0')_k \in \mathcal{S}\Omega_{*r}(f_0)_{ks}$ la imagen por este morfismo de la clase fundamental $\mu_{X_0} \in H_m(X_0)$. Consideremos entonces la sucesión larga de homología del pseudobordismo seccional reducido

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & \mathcal{S}\Omega_{(m+1)r}(f_0, f'_0; (1_{X_0}, \alpha))_{ks} & \xrightarrow{\partial_{*r}} & \mathcal{S}\Omega_{mr}(f'_0)_{ks} & \xrightarrow{(1_{X_0}, \alpha)_{*r}} & & \\
 & & & & & & \\
 & \mathcal{S}\Omega_{mr}(f_0)_{ks} & \xrightarrow{j_{*r}} & \mathcal{S}\Omega_{mr}(f_0, f'_0; (1_{X_0}, \alpha))_{ks} & \longrightarrow & \dots & (1)
 \end{array}$$

asociada a la k -submersión

$$\begin{array}{ccc}
 D|_{X_0} \cap \alpha^{-1}(D_0) & \xrightarrow{\alpha} & D_0 \\
 \downarrow f_0' & & \downarrow f_0 \\
 X_0 & \xrightarrow{1_{X_0}} & X_0
 \end{array}$$

Según el corolario (14.6), esta sucesión es exacta en $\mathcal{S}\Omega_{mr}(f_0)_{ks}$.

DEFINICION. El morfismo j_{*r} define un elemento

$$(\rho_1')_k = j_{*r}((\rho_0')_k) \in S\Omega_{mr}(f_0, f'_0; (1_{X_0}, \alpha))_{ks}$$

que llamamos primera obstrucción al problema de Cauchy.

Consideremos ahora la sucesión

$$\rightarrow S\Omega_{nr}(f_2)_{ks} \rightarrow S\Omega_{nr}(f)_{ks} \rightarrow S\Omega_{nr}(f, f_2; i)_{ks} \rightarrow S\Omega_{(n-1)r}(f_2)_{ks} \rightarrow \quad (2)$$

asociada a la k -submersión $(f, f_2; i)_k$ que aparece en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} D-D|_{X_0} & \longrightarrow & D & \longleftarrow & D|_{X_0} \\ \downarrow f_2 & & \downarrow f & & \downarrow f_1 \\ X-X_0 & \longrightarrow & X & \longleftarrow & X_0 \end{array}$$

Dicha sucesión es exacta en $S\Omega_{nr}(f, f_2; i)_{ks}$ según (14.6), y el isomorfismo de Thom $S\Omega_{qr}(f_1)_{ks} \rightarrow S\Omega_{(q+n-m)r}(f, f_2; i)_{ks}$ asociado a la orientación O_1 de ν_1 (14.12) permite definir la sucesión de Gysin-Thom

$$\dots \rightarrow S\Omega_{nr}(f_2)_{ks} \rightarrow S\Omega_{nr}(f)_{ks} \xrightarrow{\Delta_{*r}} S\Omega_{mr}(f_1)_{ks} \xrightarrow{\theta_{*r}} S\Omega_{(n-1)r}(f_2)_{ks} \rightarrow \dots (3)$$

en pseudobordismo seccional reducido, exacta en $S\Omega_{mr}(f_1)_{ks}$. Sea entonces ψ el homomorfismo

$$\psi : S\Omega_{mr}(f_0)_{ks} \xrightarrow{(1_{X_0}, i)_{mr}} S\Omega_{mr}(f_1)_k \xrightarrow{\theta_{mr}} S\Omega_{(n-1)r}(f_2)_{ks}$$

donde $(1_{X_0}, i)$ es la inclusión

$$\begin{array}{ccc}
 D|_{X_0} \cap \alpha^{-1}(D_0) & \xrightarrow{i} & D_0|_{X_0} \\
 \downarrow f_0' & & \downarrow f_1 \\
 X_0 & \xrightarrow{1_{X_0}} & X_0
 \end{array}$$

y sea $\ker(1_{X_0}, \alpha)_{mr}$ el núcleo de $(1_{X_0}, \alpha)_{mr}$ en la sucesión (1).

Designemos

$$q: \Omega_{(n-1)r}(f_2)_{ks} \longrightarrow \Omega_{(n-1)r}(f_2)_{ks} / \psi(\ker(1_{X_0}, \alpha)_{mr})$$

la proyección canónica.

DEFINICION. Si la primera obstrucción $(\rho_1')_k$ es nula, llamamos segunda obstrucción a la clase

$$(\rho_2)_k \in \Omega_{(n-1)r}(f_2)_{ks} / \psi(\ker(1_{X_0}, \alpha)_{mr})$$

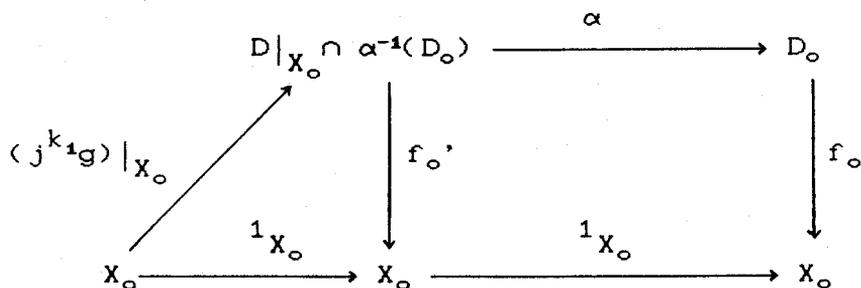
definida como sigue: se elige un elemento $\rho_1'' \in \Omega_{mr}(f_0')_k$ tal que $(1_{X_0}, \alpha)_{mr}(\rho_1'') = (\rho_0')_k$ y se pone $(\rho_2')_k = q \cdot \psi(\rho_1'')$. Para otro $\rho_1^{\wedge} \in \Omega_{mr}(f_0')_k$ tal que $(1_{X_0}, \alpha)_{mr}(\rho_1^{\wedge}) = (\rho_0')_k$, $q \cdot \psi(\rho_1^{\wedge}) = (\rho_2')_k$ ya que $\psi(\rho_1'')$, $\psi(\rho_1^{\wedge}) \in \ker(1_{X_0}, \alpha)_{mr}$.

16.11. TEOREMA: Para cualquier $0 \leq k \leq \infty$, las clases de pseudobordismo seccional reducido $(\rho_1')_k$ y $(\rho_2')_k$ constituyen obstrucciones a la existencia de una solución de clase C^{k+k_1} al problema de Cauchy global.

Demostración: Debemos mostrar que la anulacion de $(\rho_1')_k$ y $(\rho_2')_k$ es necesaria a la existencia de una solución de clase C^{k+k_1} .

Supongamos que existe una solución tal de clase C^{k+k_1} que designamos por $g: X \rightarrow Z$. Es decir, que $j^{k+k_1}g: X \rightarrow j^{k+k_1}(X, Z)$ es de clase C^k y su imagen está contenida en D . Ya que g satisface la

condición inicial, se tiene $\alpha \circ (j^{k_1}g)|_{X_0} = \rho_0$. Así $\text{Im } \alpha \circ (j^{k_1}g)|_{X_0} \subseteq D_0$, de donde $\text{Im } (j^{k_1}g)|_{X_0} \subseteq D|_{X_0} \cap \alpha^{-1}(D_0)$. Por tanto, $(j^{k_1}g)|_{X_0}$ es una sección de clase C^k de $f'_0: D|_{X_0} \cap \alpha^{-1} \rightarrow X_0$ cuya imagen por α es ρ_0 .

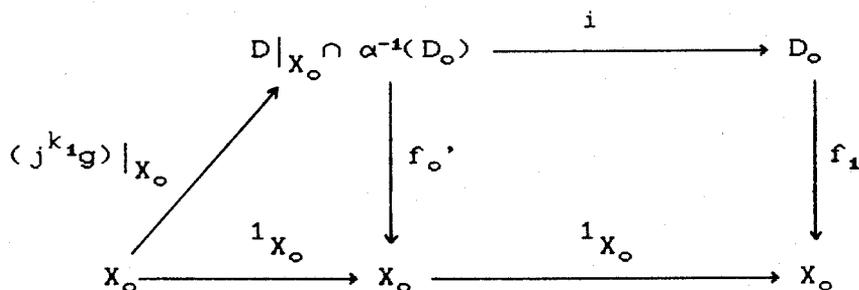


Sea entonces $\rho_1'' = (1_{X_0}, (j^{k_1}g)|_{X_0})_{*r}(\mu'_{X_0}) \in \Omega_{mr}(f'_0)_{ks}$, donde μ'_{X_0} es la imagen de la clase fundamental $\mu_{X_0} \in H_m(X_0)$ por el isomorfismo $H_m(X_0) \rightarrow \text{SID}_{mr}(X_0)_k \rightarrow \Omega_{mr}(1_{X_0})_{ks}$. Se tiene

$$\begin{aligned}
 (1_{X_0}, \alpha)_{*r}(\rho_1'') &= ((1_{X_0}, \alpha)(1_{X_0}, (j^{k_1}g)|_{X_0}))_{*r}(\mu'_{X_0}) = \\
 &= (1_{X_0}, \rho_0)_{*r}(\mu'_{X_0}) = (\rho_0')_k.
 \end{aligned}$$

Por tanto, $(\rho_0')_k \in \text{Im } (1_{X_0}, \alpha)_{mr}$, lo que permite concluir que $(\rho_1')_k = j_{*r}((\rho_0')_k) = 0$ porque la sucesión (1) exacta en $\Omega_{mr}(f_0)_{ks}$.

Mostremos ahora que $(\rho_2')_k = 0$. Basta ver que $e_{*r}(1_{X_0}, i)_{*r}(\rho_1'') = 0$, es decir que $(1_{X_0}, i)_{*r}(\rho_1'') \in \text{Im } \Delta_{*r}$ pues la sucesión (3) es exacta en $\Omega_{mr}(f_1)_{ks}$. En el diagrama conmutativo



$(1_{X_0}, i)$ es una inclusión y se puede por tanto designar sin confusión $(f^{k_1}g)|_{X_0}$ a la composición $(f^{k_1}g)|_{X_0} \circ i: X_0 \rightarrow D|_{X_0}$. Entonces es evidente que el morfismo $(1_{X_0}, i)_{*r}$ aplica ρ_1'' en $(1_{X_0}, (j^{k_1}g)|_{X_0})_{*r}(\mu'_{X_0}) \in \Omega_{nr}(f_1)_{ks}$. Por tanto hay que mostrar que existe $\rho_2'' \in \Omega_{nr}(f)_k$ tal que

$$\Delta_{*r}(\rho_2'') = (1_{X_0}, i)_{*r}(\rho_1'') = (1_{X_0}, (j^{k_1}g)|_{X_0})_{*r}(\mu'_{X_0}) \in \Omega_r(f_1)_{ks}$$

Pero esto es lo mismo que mostrar que $E(f, X_0, j^{k_1}g) = 0$. El resultado sigue entonces de (16.8).

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar a Eladio Domínguez, que me dió el tema de este trabajo y cuyo apoyo me ha permitido realizarlo. No podría olvidar su ayuda amiga e inestimable, así como las múltiples discusiones que hemos tenido juntos. Mi agradecimiento va igualmente para Antonio Quintero. Su experiencia y el entusiasmo que ha tenido desde el principio me han sostenido en los momentos en que encontraba mayores dificultades. Ellos han asumido conjuntamente la dirección de esta tesis.

Estoy particularmente reconocido con Rafael Ayala por su amistad y por las discusiones de algunos temas difíciles relacionados con este trabajo. Sus observaciones y críticas siempre pertinentes me han posibilitado hacer más claras algunas de las demostraciones.

M. François Lalonde fué muy amable conmigo enviándome sendos ejemplares de sus tesis. La influencia de sus trabajos es fácilmente reconocible en la segunda parte de éste. Igualmente estoy agradecido con M. Weishu Shih, quien supo de que este trabajo estaba realizandose y lo calificó como "trés interessant et importante" para el desarrollo de la teoría de homología seccional.

Mi sincero agradecimiento a D. Francisco Echarte por el

interés demostrado para que esta tesis se realizara en su Departamento de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Sevilla.

Julio Rubio y Mario Lopez me han dado hospitalidad y amistad durante mis visitas a la Universidad de Zaragoza.

Este trabajo se mecanografió finalmente con los medios técnicos del Laboratorio Informático TECNODEVI.

Para terminar, recordar especialmente a mi esposa, Elisabeth, y a mis hijas Carmen y Liesel, por los ánimos que me han dado y la paciencia que han tenido conmigo.

BIBLIOGRAFIA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS
RECTORIA

- [1] ALEXANDROV, P. S. Combinatorial Topology, Vol. 2. Graylock Press. 1975.
- [2] ARNOLD, V. Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires. Ed MIR Moscú 1984.
- [3] ARRABAL, J. J. Orientación en la Topología. Tesina Univ. de Sevilla. 1984.
- [4] ARRABAL, J. J. "Teoría de pseudobordismo orientado inyectivo a trozos". Actas de la I reunión del Grupo de Geometría y Topología de Zaragoza, Sevilla y Logroño, p. 1-11. Serv. Pub. Colegio Universitario de la Rioja. Logroño 1986.
- [5] ARRABAL, J. J. "Seudobordismo seccional". Actas de la II reunión del Grupo de Geometría y Topología de Zaragoza, Sevilla y Logroño, p. 1-4. Serv. Publicaciones de la Universidad de Zaragoza. 1987.
- [6] AYALA, R. -DOMINGUEZ, E. -QUINTERO, A. "Approximation axiomatique à la théorie du bordisme". (Por aparecer en Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle)
- [7] BREDON, G. E. Sheaf Theory. Ed. McGraw Hill. New York. 1967.
- [8] BRÖCKER, TH. -LANDER, L. Differentiable Germs and Catastrophes. Cambridge Univ. Press. 1975.

- [9] CARTAN, E. Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques. Ed. Hermann. 1971. (1^a edición de 1945)
- [10] CARTAN, H. Séminaire Henri Cartan. 1948-1949. Paris.
- [11] CARTAN, H. -EILENBERG, S. Homological Algebra. Princeton University Press. 1956.
- [12] CHOU C. C. "Quelques Exemples d'Homologies Sectionnaires de SHIH". Chinese Journal of Mathematics. Vol. 10, N°1. 1982.
- [13] DEMATTE J. P. Une interprétation géométrique de la théorie d'homologie bivariant. Tesis 3^{er} ciclo. Univ. Lille I. 1983.
- [14] DIEUDONNÉ, J. Elements d'Analyse IV. Gauthier-Villars 1971.
- [15] DOMINGUEZ, E. "Grupos de pseudobordismo". Rev. Acad. Ciencias Zaragoza 31 (1975) 145-149.
- [16] DOMINGUEZ, E. "Interpretación geométrica de la homología singular" Rev. Real Acad. Ciencias Madrid 69 (1975), 149-156.
- [17] DOMINGUEZ, E. "Bordismo infinito". Preprint Univ. Zaragoza. 1983.
- [18] DOMINGUEZ, E. "Bordisme infini". Seminar on Foliations, Edit K. Shibata and R. Wolak, Kraków 1983.
- [19] DOMINGUEZ, E. Geometrical introduction to bordism theory. Pub. Seminario Matemático García de Galdeano, Sec. 3 n°4. Universidad de Zaragoza. 1985.
- [20] EHRESMANN, C. "Structures locales et structures infinitésimales" C. R. Acad. Sc. Paris, 234 (1952). 587-589.

- [21] EHRESMANN, C. "Extension du calcul des jets aux jets non holonomes". C.R. Acad. Sc. Paris, 239(1954) 1762-1764.
- [22] EILENBERG, S. "Singular homology in differentiable manifolds" Ann. of Math., 48(1947), 670-681.
- [23] EILENBERG, S. -STEENROD, N. Foundations of algebraic topology. Princeton University Press, 1952.
- [24] ENGELKING, R. Dimension Theory. Nort-Holland. Amsterdam, 1978.
- [25] FUČIK, S. -KUFNER, A. Nonlinear differential equations. Elsevier Sc. Publishing Company. Amsterdam. 1980.
- [26] GODEMENT, R. Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Ed. Hermann, Paris. 1973.
- [27] GREENBERG, M. J. Lectures on algebraic topology. Ed. Benjamin New York. 1967.
- [28] GROTHENDIECK, A. Seminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1961-62 (SGA 2), exposé I. North-Holland Pub. Comp. Amsterdam 1968.
- [29] HILTON, P. J. -WYLIE, S. Homology Theory. Cambridge Univ. Press, 1965
- [30] HU, S. T. "On singular homology in differentiable spaces" Ann. of Math., 50(1949), 266-269.
- [31] HUDSON, J. F. P. Piecewise Linear Topology. Ed. Benjamin. 1969.
- [32] IVERSEN, B. Cohomology of sheaves. Lecture Notes Series N°55. Aarhus Universitet. 1984.
- [33] LALONDE, F. Homologie de Shih et applications au problème de Cauchy global, Tesis Ph. Dr. Universidad de Montreal. 1983.

- [34] LALONDE, F. "Homologie de plongements dans les espaces euclidiens" C.R Acad. Sc. Paris 297 (1983) s.I 659-662.
- [35] LALONDE, F. "Homologie de plongements dans les variétés différentiables" C.R. Acad. Sc. Paris, 299(1984) série I, 987-990.
- [36] LALONDE, F. "Homologie de Shih d'une submersion" C.R. Acad. Sc. Paris 299(1984), série I, 1025-1028.
- [37] LALONDE, F. Homologies non-singulières d'une variété et homologie sectionnelle d'une submersion. Thèse d'Etat. Univ. Paris-Sud (Orsay). 1985
- [38] LALONDE, F. "Homologies de Shih: définition et propriétés". Can. J. Math. Vol. XXXIX, N° 3 (1987), 748-768.
- [39] LALONDE, F. Homologie de Shih d'une submersion. (Homologies non singulières des variétés feuilletées). Bull. Soc. Math. France. 1987. Memoire n° 30.
- [40] MANERO, S. Propiedades de la homología de segunda especie. Pub. Seminario Matemático García de Galdeano. Univ. de Zaragoza. 1986.
- [41] MARGALEF, J. -OUTERELO, E. -PINILLA, J. L. Topología, t. V. Ed. Alhambra. Madrid. 1982.
- [42] MASSEY, W. S. Singular homology theory. Springer-Verlag. New York. 1980.
- [43] MAUNDER, C. R. F. Algebraic topology. Van Nostran. Londres. 1970
- [44] MILNOR, J. W. -STASHEFF, J. D. Characteristic Classes. Princeton Univ. Press. 1974.
- [45] MUNKRES, J. R. Elementary differential topology. Princeton Univ. Press. 1966.

- [46] ROURKE, C. P. - SANDERSON, B. J. Introduction to Piecewise-Linear Topology. Springer-Verlag. Berlin. 1972.
- [47] SHIH, W. "Un invariant algébrique associé à une application continue et le problème de Cauchy global" C.R. Acad. Sc. Paris, 285(1977), série A 333-336.
- [48] SHIH, W. "Une remarque sur les équations aux dérivées partielles". C.R. Acad. Sc. Paris. 286(1978) série A, 823-825.
- [49] SHIH, W. "Une remarque sur les équations du type de Boltzmann". C.R. Acad. Sc. Paris, 290(1980) 1073-1076.
- [50] SHIH, W. "Une remarque sur le degré d'une application continue et les équations aux dérivées partielles avec condition intégrale". C.R. Acad. Sc. Paris, 292(1981), série I, 825-828.
- [51] SHIH, W. "Quelques notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles". C.R. Acad. Sc. Paris, 292(1981) série I, 901-904.
- [52] SHIH, W. "Sur l'équation intégralo-différentielle non-linéaire et la topologie algébrique". Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle. Vol. XXIII-2 (1982), 157-163.
- [53] SHIH, W. "Quelques notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles (II)". C.R. Acad. Sc. Paris, 299(1984), Série I, 331-334.

- [54] SHIH, W. "Quelques exemples d'applications de l'homologie sectionnaire à l'étude des équations aux dérivées partielles" C.R. Acad. Sc. Paris, 299(1984), Série I, 427-430.
- [55] SHIH, W. "Un invariant algébrique associé à une application continue". Preprint del IHES, Bures-sur-Yvette (Francia) 1984 y Diagrammes 15, Paris, 1986.
- [56] SHIH, W. "Une méthode élémentaire pour l'étude des équations aux dérivées partielles". Diagrammes 16, Paris, 1986.
- [57] SHIH, W. H. "Sur l'équation d'Euler". C.R. Acad. Sc. Paris, t. 297, Série I, 1983, 591-594.
- [58] SPANIER, E. H. Algebraic topology. McGraw-Hill. New-York 1966.
- [59] STALLING, J. Lectures on Polyhedral Topology. Tata Institute Bombay. 1968.
- [60] SWAN, R. G. The Theory of Sheaves. University of Chicago Press. 1964.
- [61] THOM, R. "Remarques sur les problèmes comportant des inéquations différentielles globales". Bull. Soc. Math. France, 87 (1959), 455-461.
- [62] WHITEHEAD, J. H. C. "On C^1 -complexes". Ann. of Math., 41(1940), 809-824.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de
D. Juan José ARRABAL PARRILLA

titulada BORDISNO SECCIONAL DE FIBRADOS Y
SUBMERSIONES

acordó otorgarle la calificación de APTO CUM LAUDE

Sevilla, 16 de Diciembre 1988

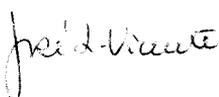
El Vocal,



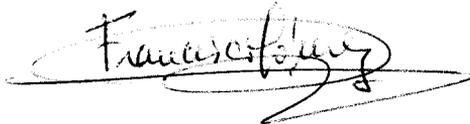
El Presidente



El Vocal,



El Secretario,



El Vocal,



El Doctorado,

