CONTROL DE CALIDAD MEDIANTE UN GRÁFICO *c* CONSTRUIDO CON TÉCNICA DE REMUESTREO

Ester Gutiérrez Moya
Dpto. Organización Industrial y Gestión de Empresas. Universidad de Sevilla, egm@platero.eup.us.es

Miguel Gutiérrez Moya
Dpto. Organización Industrial y Gestión de Empresas. Universidad de Sevilla, mguti@esi.us.es

Resumen

Este trabajo presenta un método para construir gráficos de control por atributos y, en particular el correspondiente al número de disconformidades de un proceso (en el ámbito industrial o de los servicios) de forma que tal gráfico tenga una interpretación frecuencista del que carecen las frecuentes extensiones arbitrarias de los tradicionales gráficos de Shewart cuando los datos a los que se aplican se alejan de la hipótesis de normalidad como es el caso que nos ocupa.

Palabras Clave : Gráficos de Control, Bootstrap.

1. Introducción.

En Control Estadístico de Calidad un *atributo* es una determinada característica de calidad respecto a la cual un determinado componente o producto se encuentra en una situación dicotómica: simplemente el producto la posee o no la pose, situaciones estas últimas a las que respectivamente, corresponde tradicionalmente la clasificación de la unidad como aceptable o defectuosa, aunque actualmente es más frecuente referirse a las unidades que se encuentran en estas respectivas situaciones como *conformes* y *disconformes* .

Es habitual distinguir entre los términos *defecto, defectuoso* y *disconformidad.* Por *defecto* se suele entender una desviación considerable de una característica de calidad, con respecto a un nivel o estado deseado, que origina como resultado un producto o servicio asociado que no satisface las exigencias de uso normales o razonablemente pronosticadas o esperadas.

Una unidad de fabricación o de servicio puede ser considerada como *defectuosa*, bien porque contiene, al menos, un defecto, o bien porque tiene varias imperfecciones que, combinadas, provocan que la unidad no cumpla con las exigencias de uso normales o razonablemente pronosticadas. Actualmente la palabra *defectuoso* se emplea con mayor frecuencia cuando la unidad de producto o servicio se evalúa en términos de utilización por el consumidor, en contraste con la significación exclusiva que tenía anteriormente de "conformidad con las especificaciones".

Por *disconformidad* o *defecto* suele entenderse una considerable desviación de una característica de calidad con respecto a un nivel o estado deseado que resulta en un producto o servicio asociado que no satisface un requisito de especificación.

En numerosos casos prácticos es preferible trabajar directamente con el número de defectos o disconformidades en vez de hacerlo con la fracción defectuosa. En los gráficos del número de conformidades se supone que la ocurrencia de disconformidades en muestras de tamaño constante puede modelarse mediante una distribución de Poisson, y es por ello por lo que suele requerirse que el número de oportunidades o lugares potenciales donde pueden tener lugar las disconformidades ha de ser infinitamente grande y que la probabilidad de ocurrencia de una disconformidad en cualquier lugar sea pequeña y constante.

Además se supone que la unidad de inspección tiene que ser la misma para cada muestra lo que equivale a decir que cada unidad de inspección tiene que representar un " area de oportunidad", idéntica para la ocurrencia de oportunidades.

Los datos correspondientes a atributos son frecuentes. Un indicador o calibre del tipo pasa-no pasa es un dispositivo al que tradicionalmente se ha recurrido para separar los productos conformes de los disconformes. En los servicios bancarios a los ingresos en efectivo se les considera como valor contable el del día en que se realizan si son efectuados antes de una determinada hora , pero no en caso contrario. En determinados medios de transporte público un usuario recibe una compensación económica si el retraso en la llegada y/o salida excede a un determinado intervalo de tiempo respecto al horario teórico o nominal, pero no en caso contrario. Los vehículos de reparto de una cadena de distribución, en un momento dado, simplemente se encuentran disponibles o indisponibles para el servicio.

Teniendo en cuenta que una unidad tiene muchas características de calidad, dicha unidad puede tener muchas disconformidades o defectos. A veces, una unidad puede contener varias disconformidades o defectos y, a pesar de ello, no ser clasificada como disconforme. Por ejemplo, una burbuja de pintura sobre la superficie de un automóvil recién fabricado es una disconformidad y, no obstante, el vehículo puede ser entregado como conforme.

En los procesos industriales muchas características de calidad no son variables medibles, pudiendo expresarse sólo como números discretos. Los dos casos más frecuentes de la situación anterior corresponden, bien a características de calidad dicotómicas, según las cuales, cada unidad producida queda clasificada como "aceptable" o "defectuosa", bien a características de calidad que sólo pueden expresarse mediante números enteros no-negativos que, muy frecuentemente representan el número de defectos presentes en una unidad de producto.

A fin de analizar tales datos discretos se utilizan en Control Estadístico de Calidad los gráficos *p, c, u*. En el caso de los últimos gráficos citados suele utilizarse el modelo de Poisson [3] y [4].

La proporción (el número) de unidades defectuosas se controla mediante el gráfico *p (np)*. El número de disconformidades se suele representar en un gráfico de control *c*, o, *u* según que el número de unidades de fabricación o de servicio que constituyen cada muestra inspeccionada sea constante o varie de unas muestras inspeccionadas a otras.

En el primero de dichos casos, desde el punto de vista estricto del gráfico de control *c*, es irrelevante que cada muestra o unidad de inspección conste de una sola unidad o de varias unidades. Pueden representarse de la misma forma el número de defectos de sucesivas muestras, cada una constituida por un solo televisor, que el de sucesivos lotes de televisores con tal que el tamaño de cada lote inspeccionado sea constante (por ejemplo, cinco televisores). El mismo tipo de gráfico sirve para controlar el absentismo de un empleado que el de la sección completa de la empresa a la que pertenece si es invariable la plantilla de dicha sección. El presente trabajo tiene por objeto la construcción del gráfico de control *c* utilizando un procedimiento de remuestro.

El gráfico *c* tradicional establece la Línea Central en la ordenadas $\overline{c} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$ y los Límites de Control en las ordenadas $\overline{c} = \pm 3\sqrt{\overline{c}}$ designado x_i número de defectos presentes en la i-sima muestra inspeccionada y habiendo representado por n el tamaño de la muestra extraída durante el proceso durante el proceso de fabricación [3] y [4].

Dos observaciones son necesarias en relación con el gráfico *c* tradicional. En primer lugar, la suposición de que el número de defectos sigue la distribución de Poisson no siempre refleja la realidad (como suelen evidenciar los datos obtenidos a través de las muestras inspeccionadas) lo cual es consecuencia, entre otras causas, de no ser de aplicación frecuentemente las hipótesis básicas que han de cumplirse para que un proceso pueda ser considerado tipo Poisson.

La segunda objeción seria a la utilización de los límites de control superior e inferior mencionados radica en la asimetría de los riesgos de error tipo I, por lo que, la zona comprendida entre los límites de intervención (región de aceptación en el test de hipótesis que, en definitiva, significa todo gráfico de control) dista mucho de ser la región donde se ubica el 95% de los puntos representados en el gráfico *c* correspondiente a un proceso que se encuentre bajo control estadístico.
De ahí la conveniencia de utilizar en la construcción del gráfico *c* métodos que proporcionen límites de intervención (y en su caso también límites de atención) tales que la zona comprendida entre los correspondientes límites tenga una interpretación frecuencialista válida .

La ventaja de aplicar procedimientos de remuestreo para establecer los límites de intervención y de atención radica en el hecho de que no es necesario formular ninguna hipótesis (que pudiera resultar gratuita) sobre la distribución de los datos y en la posibilidad de obtener resultados muy robustos aún utilizando muestras de reducido tamaño. Diversos tipos de intervalo de confianza son utilizados para disminuir la eventual dependencia de los resultados de la muestra inicial condensada en el proceso de *bootstrap* [1] y [2].

2. La metodología *bootstrap*

Desde que Efron en 1979 introdujo el concepto de *bootstrap* se han desarrollado numerosos trabajos que han tenido por objeto tanto estudiar las propiedades estadísticas del método como algunas de sus muchas aplicaciones prácticas en los campos más diversos.

Los métodos de remuestreo basados en el *bootstrap* son de fácil utilización, aunque con una fuerte dependencia de simulación en el ordenador. No en vano el *bootstrap* es uno de los métodos a los que se suele incluir dentro del grupo de *métodos intensivos de computación.*

La mayoría de los primeros usos de los métodos de *bootstrap* tuvieron por objeto estimar la desviación típica o la obtención de un intervalo de confianza de un estadístico de interés cuando no se tiene información sobre su distribución o aún cuando siendo ésta conocida los procedimientos analíticos que conducen a tales intervalos de confianza son sumamente complejos.

Aunque el método tuvo sus primeras aplicaciones en el caso de que las observaciones fuesen variables independientes e idénticamente distribuidas (*iid*), posteriormente se extendió para abordar problemas en regresión, discriminación y procesos estocásticos en los cuales la hipótesis *idd* ya no tiene por qué ser cierta.

La palabra *bootstrap* significa que los datos observados no se utilizan simplemente para estimar el parámetro en el que estemos interesados, sino también para generar nuevas muestras mediante las cuales se pueden obtener muchos estimadores análogos al que se podría obtener con la muestra original y, por consiguiente, se puede disponer de una estimación de la variabilidad del estimador del parámetro en cuestión.

Designemos por $\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un vector de observaciones *iid* que constituyen una muestra de tamaño *n* extraída de una población con función de distribución desconocida *F(x)*. Supongamos que deseamos estimar un parámetro T cuyo valor es real. Sea $\hat{T}$ un estimador de T, $F_n(x)$ la distribución empírica de *F(x)* correspondiente a la muestra $\vec{X}$ y $\vec{X}^* = (X^*_1\ X^*_2, ..., X^*_n)$ una muestra aleatoria simple *(m.a.s.)* extraída con reemplazamiento de la muestra original $\vec{X}$. A la m.a.s X* la designamos como la muestra *bootstrap*.

De lo expuesto anteriormente es inmediato concluir que remuestrear con la metodología *bootstrap* equivale a muestrear con reemplazamiento en la función de distribución empírica . Así pues, $X_i \approx F(x)$, $X^*_i \approx F_n(x)$.

Obviamente el número total de posibles m.a.s. X* extraídas con reemplazamientos a partir de $\vec{X}$ es n^n. En nuestro caso estas n^n muestras las utilizaríamos para calcular n^n valores de $\bar{c}$.

Como es fácil suponer, no es de interés práctico extraer las n^n posibles muestras debido a la gran cantidad de tiempo de cálculo requerido incluso por los modernos ordenadores actuales. Actualmente, incluso para muestras de tamaño pequeño procedentes de *F(x),* el tiempo de cálculo necesario para obtener la distribución completa *bootstrap* puede considerse prohibitivo. Así por ejemplo, para *n* = 10, tenemos $n^n = 10^{10} = 10^{9}$ valores de $\bar{c}^* = \sum X^*_i / n$, donde por $\bar{c}^*$, hemos deseado indicar que la media se obtiene de una muestra *bootstrap*.

Habitualmente sólo se obtiene una pequeña proporción (una muestra) de la distribución *bootstrap* completa, ya que numerosos trabajos empíricos muestran que alrededor de 1000 muestras *bootstrap* son necesarias (y con frecuencia suficientes) para que el procedimiento de cálculo alcance la deseable convergencia (Efron, 1982). Es por ello por lo que en el presente trabajo se extraen 1000 muestras para calcular los límites de control del grafico *c.*

La elección habitual de un estimador $\hat{T} = T(\vec{X})$ de un parámetro real , está basada generalmente no sólo en propiedades estadísticas que se considera deseable que $\hat{T}$ tenga, tales como la eficiencia, suficiencia, etc. , sino también en la simplicidad de cálculo del estimador. Sin embargo, la realización concreta de un estimador para un conjunto particular de datos tiene escaso valor a menos que sea posible disponer de un estadístico que exprese su exactitud. La medida habitual para evaluar la exactitud de un estimador es la desviación típica del estimador σ_t (T). La desviación típica, a su vez, tiene que ser estimada basándose en los datos experimentales. Designemos esta estimación por $\hat{\sigma}_t$(T). En nuestro caso, podemos sintetizar el algoritmo para calcular el estimador *bootstrap* de la desviación típica y de los límites de control en la forma siguiente:

1) Generamos *n observaciones* independientes de la distribución empírica F_n(x).

2) Repetimos el paso 1 anterior B veces. Se recomienda que $B \geq 200$ y habitualmente $B \geq 1000$.

3) Para cada muestra *b= 1,2,...........,B* calculamos el estimador *bootstrap* del estadístico de interés $\bar{c}$. Designamos un estimador genérico así obteniendo por $\bar{c}^*(b)$, (*b= 1,2,....B).*

$$\bar{c}^* = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} \bar{c}^*(b) \; ;$$

4) Como estimador *bootstrap* de la desviación típica de $\bar{c}$ consideramos s_B.

$$s_B = \sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{b=1}^{B} \left[\bar{c}^*(b) - \bar{c}^*\right]^2}$$

Una vez realizados los cálculos anteriores, establecemos los Límites de Control superior (LCS) e inferior (LCI) del gráfico de control *bootstrap* de la forma siguiente:

$$\text{LCS} = \bar{c}^* + 3\ s_B$$

$$\text{LCI} = \bar{c}^* - 3\ s_B$$

3. Ejemplo numérico.

En la Tabla 1 figura un ejemplo numérico simple y corresponde a los datos con los que H.M. Wadsworth et al [4]; ilustra la construcción del gráfico del número de defectos por el método tradicional.

Muestra número	Número de Defectos
1	4
2	2
3	8
4	10
5	9
6	16
7	2
8	6
9	9
10	4

Tabla 1: Número de defectos detectados en el control de calidad de 10 muestras

.

Para el gráfico *c* tradicional los límites de control son los siguientes:

Linea Central = LC = 7
Límite Superior de Control = LSC = 7 + 3 x 2.646 = 14.94
Límite Inferior de Control = LIC = Max (7 - 3 x 2.646;0) = 0

Los límites de control por el método *bootstrap* resultan ser:

Linea Central = LC = 7.2
Límite Superior de Control = LSC = 7.2 + 3 x 2.6833 = 15.25
Límite Inferior de Control = LIC = Max (7.2 -3 x 2.6833; 0) = 0

4. Conclusión.

La construcción de un gráfico de control del número de deméritos no sólo resulta fácil de realizar en el ordenador sino que, sobre todo, tiene la ventaja de no necesitar el establecimiento de hipótesis a priori sobre la distribución de los datos.

Referencias

[1] Efron, B., y Gong., (1983), "A Leisurely Look at the *Bootstrap*, the Jacknife and Cross-validation", *American Statistician*, 37, pp. 36-48

[2] Gunter, B. (1991-1992) "*Bootstrap*ping: How to Make Something From Almost Nothing and Get Statiscally Valid Answers". Quality Progress. Part 1: 24(12), pp. 97-103; Part 2: 25(2), pp. 82-86; Part 3. 25(4), pp. 119-122; Part 4: 25(6), pp. 79-83

[3] Oakland, J.S., 1999, *Statistical Process Control: A Practical Guide*, Butterworth-Heinemann, London.

[4] Wadsworth, H.M., Stephen, K.S. y Godfrey, A.B., 1986, *Modern Methods for Quality Control and Improvement*, John Wiley and Sons, New York