EL TEOREMA DE LA SUSTITUCION

Por Emilio Díaz-Estévez

Además de los sistemas axiomáticos de lógica de primer orden con un conjunto infinito de axiomas, existen sistemas formales de lógica de primer orden con un número finito de axiomas.

Contra lo que a primera vista pudiera parecer, éstos últimos no son más económicos y, desde luego, resultan menos elegantes; ya que requieren una regla de inferencia, de sustitución de letras predicativas por fórmulas, que carece de contrapartida semántica.

La regla citada de sustitución no es necesaria en los sistemas formales con infinitos axiomas. En éstos se exige a lo sumo la definición de una operación de sustitución de variables por términos, si se pretende una rigurosa expresión de los esquemas axiomáticos de instanciación universal y de cuantificación existencial.

Sin embargo, cuando nos encontramos en la metateoría de los sistemas formales, también de la primera especie, la definición de una operación de sustitución de letras predicativas por fórmulas y la fundamentación de los metateoremas correspondientes se hace también prácticamente imprescindible. Así por ejemplo, para demostrar que para toda fórmula α del cálculo de predicados de primer orden es posible hallar una fórmula β en forma normal de Skolem tal que α es demostrable en el cálculo si y sólo si lo es β, es conveniente la antedicha operación de sustitución y la demostración del correspondiente teorema, al que denominamos «teorema de sustitución».

Además, esta operación, así como el teorema correspondiente, resulta imprescindible cuando se pretende extender, con la mayor economía y eficacia, el lenguaje y el cálculo de primer orden para obtener un lenguaje y un cálculo de segundo orden. En particular, la operación de sustitución de variables predicativas por fórmulas es necesaria para la rigurosa expresión de los axiomas de instanciación universal de segundo orden y de cuantificación existencial también de segundo orden.

En *Introduction to Mathematical Logic* de A. Church[1] en donde el cálculo de primer orden viene presentado mediante un sistema con un número infinito de axiomas, aparece definida la operación de sustitución a que nos estamos refiriendo. Allí aparece también demostrado el teorema que establece que si α' es una fórmula que procede de α mediante dicha operación de sustitución y α es demostrable en el cálculo, α' también lo es; pero no aparece formulado siquiera el correspondiente teorema semántico.

El objetivo primero del presente trabajo es demostrar, tanto en la parte sintáctica como en la semántica, dicho teorema; es decir, además de lo ya demostrado por Church, demostrar que si Γ' es el conjunto de sentencias obtenido del conjunto Γ al realizar una misma operación de sustitución en todos sus miembros y α' es una sentencia obtenida a partir de la sentencia α mediante la misma operación de sustitución, entonces si α es consecuencia lógica de Γ, α' es también consecuencia lógica de Γ'. No obstante, de hecho, más que la obtención del teorema referido nos interesa desarrollar el aparato conceptual requerido y establecer ciertos resultados que serán aplicados en trabajos posteriores.

Comenzaremos exponiendo el lenguaje **L** al que nos vamos a referir y respecto del cual definiremos la oportuna operación de sustitución. En segundo lugar, aludiremos a la semántica de **L**. Posteriormente, presentaremos un cálculo formal de lógica de primer orden con el lenguaje **L** al objeto de poder demostrar la parte sintáctica del teorema de sustitución. Por último, demostraremos el teorema de sustitución en su doble vertiente sintáctica y semántica.

Sea **L** un lenguaje de primer orden en cuyo alfabeto **A** se incluyen, además de las seis constantes lógicas - $\neg$, $\vee$, $\wedge$ $\rightarrow$, $\bigvee$ y $\bigwedge$ - y los signos auxiliares paréntesis, un conjunto infinito de variables individuales, un conjunto, también infinito, de parámetros o constantes individuales y un conjunto infinito de letras predicativas *n*-ádicas para cada entero positivo *n*.

El lenguaje **L** consta, además, de un conjunto **T** de términos, definido a partir de **A** como el conjunto unión de las variables y constantes individuales, y de un conjunto **F** de las fórmulas de **L** definido por inducción a partir de **A** y de **T**.

Concretamente, **F** es el más pequeño conjunto que verifica los siguientes enunciados:

1°.- Si $\langle b_1, b_2, ..., b_n \rangle$ es una secuencia de *n* ocurrencias de términos cualesquiera de **L** y *P* es una letra predicativa *n*-ádica, entonces $Pb_1b_2...b_n$ pertenece a **F** (es una fórmula).

2°.- a) Si $\alpha \in$ **F**, entonces $\neg(\alpha) \in$ **F**;
b) Si $\alpha, \beta \in$ **F** entonces $(\alpha) \vee (\beta) \in$ **F**
c) Si $\alpha, \beta \in$ **F** entonces $(\alpha) \wedge (\beta) \in$ **F**
d) Si $\alpha, \beta \in$ **F** entonces $(\alpha) \rightarrow (\beta) \in$ **F**
e) Si x es una variable individual y $\alpha \in$ **F**, entonces $\bigvee x(\alpha) \in$ **F**
f) Si x es una variable individual y $\alpha \in$ **F**, entonces $\bigwedge x(\alpha) \in$ **F**

Como se sigue de la definición de **F**, toda fórmula ha de tener $n + 2.m$ pares de paréntesis, siendo *n* el número de negadores más el de los cuantificadores que ocurren en la fórmula y *m* el número de las ocurrencias de los restantes signos lógicos. Sin embargo, cuando hayamos de mencionar fórmulas determinadas o esquemas de fórmulas, no usaremos más paréntesis que los necesarios al objeto de disipar toda ambigüedad respecto del alcance de los signos lógicos en la fórmula o en el esquema de fórmulas.

A las fórmulas construidas exclusivamente mediante una aplicación de la cláusula 1ª de la definición de **F**, las denominamos *fórmulas atómicas*. A las restantes, las denominaremos *fórmulas moleculares*.

Si α y β son fórmulas necesariamente distintas tales que β es obtenida en el proceso de construcción de α, entonces y sólo entonces decimos que β es una subfórmula de α. Obviamente, dada esta definición, toda fórmula es subfórmula de sí misma.

Denominaremos *signo principal* de una fórmula al signo lógico correspondiente a la última aplicación de la clausula 2ª en el proceso de construcción de dicha fórmula. Naturalmente, las fórmulas atómicas carecen de signo principal.

El *alcance de un signo lógico* s *en una fórmula* α estará constituido por la subfórmula β o las subfórmulas η y δ de α tales que si *s* es el negador ($\neg$) o los cuantificadores ($\vee$, $\wedge$), β ocurre a la derecha de *s* entre paréntesis, en el primer caso, o a la derecha de la variable individual que aparece, a su vez, como sufijo a la derecha de s, en el segundo caso; y si *s* es cualquiera de los restantes signos lógicos, η y δ aparecen entre paréntesis una a la derecha y otra a la izquierda de *s*.

Una ocurrencia de un término *b* decimos que está ligada en una fórmula α si y sólo si *b* es una variable y además ocurre como sufijo de un cuantificador o cae bajo el alcance de un cuantificador en el que *b* ocurre como sufijo.

Una ocurrencia de un término *b* decimos que está *libre* en una fórmula α si y sólo si *b* no es una variable o no está ligada.

Si α es una fórmula y *b* y *c* son dos términos, decimos que c *está libre para* b *en* α si y sólo si *c* no es una variable o, en caso contrario, o *b* no es una variable o tiene al menos una ocurrencia libre en α ; y ninguna de dichas ocurrencias cae bajo el alcance de un cuantificador que tenga a *c* como sufijo.

Si α es una fórmula con al menos una variable libre *x*, y sólo entonces, decimos que $\vee x\ \alpha$ es la *particularización* de α respecto de *x* y que $\wedge x\ \alpha$ es la *clausura* de α respecto de *x*.

Si α es una fórmula y $x_1, x_2, ..., x_m$ son todas las variables libres de α , entonces y sólo entonces decimos que $\vee x_1,x_2...,x_m\ \alpha$ es la particularización de α y que $\wedge\ x_1, x_2, ..., {}_m\ \alpha$ es la *clausura* de α .

Finalmente, decimos que α es una *sentencia* si y sólo si en α no ocurre ninguna variable individual libre.

Nos interesa referirnos ahora a la operación de sustitución en fórmulas de **L** de variables individuales por términos. No obstante podemos ampliar la noción correspondiente de manera que abarque también a la sustitución de términos por términos, sean o no variables. Así, si reemplazamos en una fórmula α todas las ocurrencias libres de un término *b* por otro término *a*, obtenemos una fórmula $S^a_b\ \alpha$ o , más abreviadamente $\alpha\ (a/b)$, que definimos por inducción sobre la estructura de α de la siguiente manera[2].

Definición 1ª.

1°. Si α es atómica, $\alpha\ (a/b)$ es obtenida a partir de α al reemplazar todas las ocurrencias de *b* por *a*.

2°.- a) Si α es $\neg\ \beta$, $\alpha\ (a/b)$ es $\neg\ \beta\ (a/b)$.
b) Si α es $\beta \vee \delta$, $\alpha\ (a/b)$ es $\beta\ (a/b) \vee \delta (a/b)$
c) Si α es $\beta \wedge \delta$, $\alpha\ (a/b)$ es $\beta\ (a/b) \wedge \delta\ (a/b)$.
d) Si α es $\beta \rightarrow \delta$, $\alpha\ (a/b)$ es $\beta\ (a/b) \rightarrow \delta\ (a/b)$.
e) Si α es $\vee$ y β, entonces $\alpha\ (a/b)$ es α si *b* es *y* o *a* es *y* y, en caso contrario, $\alpha\ (a/b)$ es $\vee y\ \beta\ (a/b)$.
f) Si α es $\wedge\ y\ \beta$, entonces $\alpha\ (a/b)$ es α si *b* es *y* o *a* es *y* y, en caso contrario $\alpha\ (a/b)$ es $\wedge\ y\ \beta\ (a/b)$.

Obviamente, la operación de sustitución dada en la definición 1ª puede iterarse *n* veces. $S^{a^1}_{b_1}(S^{a^2}_{b_2}(...(S^{a^n}_{b_n}\ \alpha)...)$ puede escribirse $S^{a1,\ a2...a^n}_{b1,\ b2...b^n}\ \alpha$ o más abreviadamente $\alpha\ (a_1,a_2,...a_n/b_1,b_2,...,b_n)$.

Estamos ya en condiciones de referirnos a la operación de sustitución de letras predicativas por fórmulas cualesquiera.

Si α es cualquier fórmula de **L**, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una secuencia de n variables individuales distintas y P una letra predicativa n-ádica, $S^{\beta}_{Px_1 x_2 \ldots x_n}\alpha$, o, abreviadamente $\alpha(\beta//Px_1x_2 \ldots x_n)$ será la fórmula de **L** definida por inducción sobre la estructura de α de la siguiente manera[3].

Definición 2ª.

1°.- Si α es la fórmula $Q\, b_1\, b_2 \ldots b_n$ en donde Q es una letra predicativa n-ádica y $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle$ una secuencia de n ocurrencias de términos de **L**, entonces, si P no es Q o existe un entero positivo $i \leqslant n$ tal que b_i es una variable que no está libre para x_i en β, $\alpha(\beta//Px_1\, x_2 \ldots x_n)$ es α ; y si, por el contrario, P es Q y para todo entero positivo $i \leqslant n$, b_i o no es una variable o está libre para x_i en β, entonces $\alpha(\beta//Px_1\, x_2 \ldots x_n)$ es $\beta(b_1, b_2, \ldots, b_n/x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2°.- a) Si α es $\neg\eta$, entonces $\alpha(\beta//Px_1\, x_2 \ldots x_n)$ es $\neg\eta(\beta//Px_1\, x_2 \ldots x_n)$.

b) Si α es $\eta \vee \delta$, $\alpha(\beta//Px_1\, x_2 \ldots x_n)$ es $\eta(\beta//Px \quad x_2 \ldots x_n) \vee \delta(\beta//Px_1\, x_2 \ldots x_n)$.

c) Si α es $\eta \wedge \delta$, $\alpha(\beta//Px_1\, x_2 \ldots x_n)$ es $\eta(\beta//Px_1\, x_2 \ldots x_n) \wedge \delta(\beta//Px_1\, x_2 \ldots x_n)$.

d) Si α es $\eta \rightarrow \delta$, $\alpha(\beta//Px_1\, x_2 \ldots x_n)$ es $\eta(\beta//Px_1\, x_2 \ldots x_n) \rightarrow \delta(\beta//Px_1\, x_2 \ldots x_n)$.

e) Si α es $\bigvee y\, \eta$, entonces, si y no es una de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y ocurre libre en β, $\alpha(\beta//Px_1\, x_2 \ldots x_n)$ es α, y si y es una de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o no ocurre libre en β, entonces $\alpha(\beta//Px_1\, x_2 \ldots x_n)$ es $\bigvee y\, \eta(\beta//Px_1\, x_2 \ldots x_n)$.

f) Si α es $\bigwedge y\, \eta$, entonces, si y no es una de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y ocurre libre en β, $\alpha(\beta//Px_1\, x_2, \ldots, x_n)$ es α ; y, si y es una de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o no ocurre libre en β, entonces $\alpha(\beta//Px_1\, x_2 \ldots x_n)$ es $\bigwedge y\, \eta(\beta//Px_1\, x_2 \ldots x_n)$.

La primera noción relativa a la semántica de **L** es la noción de *interpretación* que damos a continuación.

Definición 3ª.

Una *interpretación* **I** de **L** es un par ordenado cuyo primer elemento **D** - al que denominamos *dominio* de la interpretación - es un conjunto no vacío, y cuyo segundo elemento es el conjunto $\{v, A\}$ en el que v - a la que denominamos *valoración* - es una aplicación del conjunto de los parámetros de **L** en **D** y donde A - a la que llamamos *asignación* - es una función que hace corresponder a cada letra predicativa n-ádica, cualquiera que sea el entero positivo n, de **L** un subconjunto de $\mathbf{D}^n$ [4].

Para indicar el elemento de **D** que la valoración v asigna a una dada constante individual a_i de **L** escribimos $v(a_i)$ o también $\mathbf{I}(a_i)$. De la misma manera, para indicar el subconjunto de $\mathbf{D}^n$ que la asignación A hace corresponder a una dada letra predicativa P n-ádica, escribimos $A(P)$ o también $\mathbf{I}(P)$.

El hecho de que v y v' sean dos valoraciones distintas a lo sumo respecto de un conjunto dado finito $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ de parámetros, lo simbolizamos en la forma $v \underset{b_1, b_2, \ldots, b_n}{=} v'$. De modo semejante, si $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ es un conjunto finito de letras predicativas distintas, cualquiera que sea el número ádico de cada una, $A \underset{P_1, P_2, \ldots, P_n}{=} A'$ indicará que para toda otra letra predicativa Q que no ocurra en el conjunto $P_1, P_2, \ldots, P_n$, $A(Q) = A'(Q)$. Obviamente, si $v \underset{b}{=} v'$ o $A \underset{P}{=} A'$ - hechos que pueden ser expresados también en la forma $\mathbf{I} \underset{b}{=} \mathbf{I}'$ e $\mathbf{I} \underset{P}{=} \mathbf{I}'$ - el dominio de v y v', A y A' o **I** e **I'** es el mismo.

La noción de interpretación nos permite definir la noción de *valor* de una sentencia α bajo una interpretación **I** o, más específicamente, bajo una determinada valoración y una dada asignación respecto de un mismo dominio, de la manera siguiente.

Definición 4ª.
Si **I** es una interpretación, v su valoración, A su asignación, y α es una sentencia de **L**, denominamos *valor de la sentencia* α *bajo la interpretación* **I** al elemento α_{I} -o, lo que es lo mismo, $\alpha_A(v)$- del dominio $\{1,0\}$ definido por inducción sobre la estructura de α del modo siguiente:

1°.- Si α es $Pb_1\, b_2 \ldots b_n$, donde $b_1, b_2, \ldots b_n$ *son parámetros,* $\alpha_{\mathrm{I}} = 1$ si $\langle v(b_1), v(b_2), \ldots, v(b_n)\rangle \in A(P)$ y $\alpha_{\mathrm{I}} = 0$ si $\langle v(b_1), (b_2), \ldots, v(b_n)\rangle \notin A(P)$.

2°.- a) Si α es $\neg\beta$ y β es una sentencia, $\alpha_{\mathrm{I}} = 1$ si $\beta_{\mathrm{I}} = 0$ y $\alpha_{\mathrm{I}} = 0$ si $\beta_{\mathrm{I}} = 1$.
b) Si α es $\beta \vee \gamma$ y β y γ son sentencias, $\alpha_{\mathrm{I}} = 1$ si $\beta_{\mathrm{I}} = 1$ ó $\gamma_{\mathrm{I}} = 1$ y $\alpha_{\mathrm{I}} = 0$ si $\beta_{\mathrm{L}} = 0$ y $\gamma_{\mathrm{I}} = 0$.
c) Si α es $\beta \wedge \gamma$ y β y γ son sentencias, $\alpha_{\mathrm{I}} = 1$, si $\beta_{\mathrm{I}} = 1$ y $\gamma_{\mathrm{I}} = 1$; y $\alpha_{\mathrm{I}} = 0$, si $\beta_{\mathrm{I}} \doteq 0$ ó $\gamma_{\mathrm{I}} = 0$. y
d) Si α es $\beta \rightarrow \gamma$ y β y γ son sentencias, $\alpha_{\mathrm{I}} = 1$ si $\beta_{\mathrm{I}} = 0$ ó $\gamma_{\mathrm{I}} = 1$ y $\alpha_{\mathrm{I}} = 0$ si $\beta_{\mathrm{I}} = 1$ y $\gamma_{\mathrm{I}} = 0$.
e) Si α es $\vee x\, \beta$ y, si b es un parámetro, $\beta(b/x)$ es una sentencia; $\alpha_{\mathrm{I}} = 1$, si existe una valoración y' tal que siendo a_i un parámetro que no ocurra en α, $v \underset{a_i}{=} v'$ y $\beta(a/x)_{\mathrm{A}}(v') = 1$; y $\alpha_{\mathrm{I}} = 0$ si, siendo a_i cualquier parámetro que no ocurra en α, para toda valoración v' tal que $v \underset{a_i}{=} v'$ $\beta(a_i/x)_A(v') = 0$.

f) Si α es $\wedge x\, \beta$ y $\beta(b/x)$ es una sentencia, $\alpha_{\mathrm{I}} = 1$ si, siendo a_i cualquier parámetro que no ocurra en α, para toda valoración v', si $v \underset{a_i}{=} v'$ entonces $\beta(a_i/x)_A(v') = 1$; y $\alpha_{\mathrm{I}} = 0$ si, siendo a_i un parámetro que no ocurra en α, existe al menos una valoración v' tal que $v \underset{a_i}{=} v'$ y $\beta(a_i/x)_A(V') = 0$.

Dada la definición de valor de una sentencia, resulta obvio que para toda fórmula α, con a lo sumo la variable x libre, y toda interpretación **I**, $\neg \vee x\ \alpha_{\mathrm{I}} = \wedge x \neg \alpha_{\mathrm{I}}$ y $\neg \wedge x\ \alpha_{\mathrm{I}} = \vee x \neg \alpha_{\mathrm{I}}$.

A partir de la definición de valor de una sentencia para una dada interpretación **I**, podemos definir la noción de interpretación de una dada fórmula β para una dada secuencia $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de variables distintas, siempre que en β no esté libre ninguna variable que no pertenezca a la secuencia dada. Esto que, de alguna manera, equivale a tratar a las fórmulas que reúnan dichos requisitos de modo semejante a como son tratadas las letras predicativas en la definición de interpretación, lo establecemos en la siguiente definición.

Definición 5ª.
Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una secuencia de n variables distintas, β es una fórmula de **L** para la que se verifica que toda variable libre en β pertenece a la secuencia de n variables dada, **I** es una interpretación de **L** cuyo dominio es **D**, su valoración es v y su asignación es A y $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ es una secuencia de n ocurrencias de parámetros de **L** que no ocurren en β, denominamos *interpretación de la fórmula* β *para las variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ al conjunto $\mathbf{I}(\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ de todas las n-plas ordenadas de elementos de **D**, $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$, para los que existe al menos una valoración v' tal que $v,_{b_1, b_2, \ldots, b_n}\!\!= v$, $v'(b_1) = \mathbf{a}_1$, $v'(b_2) = \mathbf{a}_2$, ..., $v'(b_n) = \mathbf{a}_n$ y $\beta(b_1, b_2, \ldots, b_n/x_1, x_2, \ldots, x_n)_A(v) = 1$ [5].

Las nociones de interpretación de **L** y de valor de una sentencia bajo una interpretación nos permiten establecer otras nociones semánticas; como son las de validez, satisfactibilidad, etc.

Si **I** es una interpretación de **L** con A y v como asignación y valoración y α es una sentencia de **L**, decimos que α es *válida bajo* **I**, o bajo A y v, si y sólo si $\alpha_{\mathbf{I}} = 1$ ó, lo que es lo mismo, si y sólo si $\alpha_A(v) = 1$.

Si α es una sentencia válida bajo **I**, y sólo en ese caso, decimos que **I** *satisface la sentencia* α. Abreviadamente, indicamos este hecho con la expresión **I** *sat* α. Obviamente, **I** *sat* α *sii* $\alpha_{\mathbf{I}} = 1$ de modo que si $\alpha_{\mathbf{I}} = 0$ entonces y sólo entonces **I** no satisface a α, lo que escribimos en la forma **I** $\overline{sat}$ α.

Una sentencia α decimos que es universalmente válida si y sólo si para toda interpretación **I**, **I** *sat* α. Decimos de α que es satisfactible si y sólo si existe una **I** tal que **I** *sat* α [6].

Dadas las nociones de satisfactibilidad y de universal validez, resulta obvio que para toda sentencia α, α es universalmente válida si y sólo si $\neg\alpha$ es no satisfactible y, paralelamente, α es no satisfactible si y sólo si $\neg\alpha$ es universalmente válida.

Finalmente, nos bastará definir la noción de *consecuencia lógica.*

Si Γ es un conjunto de sentencias de **L** y α es también una sentencia de **L**, decimos que α es *consecuencia lógica* de Γ - abreviadamente $\Gamma \models \alpha$ - si y sólo si, para toda interpretación **I**, si **I** satisface simultáneamente a cada una de las sentencias de Γ, **I** satisface también a α.

Cuando una sentencia α es universalmente válida, cualquiera que sea el conjunto de sentencias Γ, se verifica que $\Gamma \models \alpha$. Como el conjunto vacío es un caso de conjunto de sentencias, las sentencias universalmente válidas son consecuencia lógica del conjunto vacío de sentencias. Por esta razón, la universal validez de α puede ser notada en la forma $\models \alpha$.

Al objeto de poder demostrar el teorema de sustitución en su parte sintáctica, presentamos ahora un cálculo formal de lógica de primer orden con el lenguaje **L**.

Consideramos conocidas las nociones de *regla de inferencia*, de *antecedente* y de *consecuente* de una regla de inferencia, así como la de relación de *consecuencia inmediata*. También suponemos conocido que, en general, una *deducción a partir de un conjunto de sentencias* Γ, a las que denominamos *premisas* o *hipótesis de la deducción*, es una secuencia de fórmulas tal que toda fórmula de la secuencia que no sea consecuencia inmediata de fórmulas precedentes, o de secuencias de fórmulas precedentes, mediante alguna de las reglas de inferencia, es un elemento de Γ.

Nuestro cálculo, al que denominamos *CD*, constará, como los cálculos deductivos tipo Gentzen, de doce reglas de inferencia, dos para cada uno de los signos lógicos, una de eliminación y otra de introducción.

Las reglas *EN* (*Eliminación del Negador*), *IC* (*Introducción del Conjuntor*), *EC* (*Eliminación del Conjuntor*), *ID* (*Introducción del Disyuntor*) y *EI* (*Eliminación del Implicador*) son como las homónimas de Gentzen [7].

Las reglas *IE* (*Introducción del Cuantificador Existencial*), *EU* (*Eliminación del Cuantificador Universal*) e *IU* (*Introducción del Cuantificador Universal*) sólo difieren de las de Gentzen respecto del lenguaje usado. Las expresamos así:

$$IE\colon\ \frac{\alpha(b/x)}{\bigvee x\,\alpha}\ ;\quad EU\colon\ \frac{\bigwedge x\,\alpha}{\alpha\,(b/x)}\ ;\quad IU\colon\ \frac{\alpha}{\bigwedge x\,\alpha}\ *$$

En *IE* y *EU*, b es un término cualquiera de **L**, y, en *IU*, el asterisco indica que la variable x no ha de ocurrir libre en ninguna hipótesis no cancelada de la que α dependa.

Por último, las retantes reglas difieren de las correspondientes en los cálculos **NJ** o **NK** de Gentzen solamente en que, en vez de contener en sus antecedentes deducciones enteras, notadas mediante la hipótesis subsidiarias y las conclusiones, contienen solamente secuencias de fórmulas consecutivas expresadas en la forma $\langle \alpha, \ldots, \beta \rangle$, en donde α es la primera fórmula de la secuencia, y ha de ser una hipótesis subsidiaria, y β es la última de las fórmulas de la secuencia.

Estas reglas, a saber: *IN* (*Introducción del Negador*), *II* (*Introducción del Implicador*), *ED* (*Eliminación del Disyuntor*) y *EE* (*Eliminación del cuantificador Existencial*), las expresamos así:

$$IN: \frac{\langle \alpha, \ldots, \beta \wedge \neg \beta \rangle}{\neg \alpha} \; ; \; II: \frac{\langle \alpha, \ldots, \beta \rangle}{\alpha \rightarrow \beta}$$

$$ED: \frac{\alpha \vee \beta, \langle \alpha, \ldots, \gamma \rangle, \langle \beta, \ldots, \gamma \rangle}{\gamma} \; ; \; EE: \frac{\vee x \alpha, \langle \alpha, \ldots, \delta \rangle}{\delta} \, *$$

en donde el asterisco de *EE* indica que la variable x no ha de ocurrir libre ni en δ ni en ninguna hipótesis distinta de α de la que δ dependa.

Dadas estas reglas, necesitamos, previamente a la definición de deducción en **CD**, establecer ciertas nociones.

Definición 6ª.

Si Δ es una deducción de r fórmulas en **CD** a partir de Γ y β es la k-ésima fórmula de Δ, para $k < r$; decimos que β *está cancelada para la n-ésima línea o fórmula de* Δ, con $k < n \leqslant r$, si y sólo si existen enteros positivos i, j, q, tales que la i-ésima fórmula de Δ, para $i \leqslant k$, es la hipótesis subsidiaria γ; la secuencia Λ de todas las fórmulas de Δ, desde la primera a la j-ésima, para $i < j$ y $k \leqslant j$, es una deducción en **CD** a partir de $\Gamma \cup \Theta \cup \{ \gamma \}$, en donde Θ es un conjunto finito, eventualmente vacío, de hipótesis subsidiarias de Δ; y la q-ésima fórmula de Δ, para $j < q$ y $q \leqslant n$, es consecuencia inmediata, mediante una de las reglas de inferencia de **CD**, de la secuencia de fórmulas consecutivas de Λ desde la i-ésima hasta la última, o de ella y una fórmula no perteneciente a dicha secuencia, o de ella, de otra secuencia distinta a la primera, y de una fórmula, no cancelada, no perteneciente a ninguna de las anteriores secuencias.

Defínción 7ª.

Si Δ es una deducción en **CD**, α es la m-ésima fórmula de Δ y β es la n-ésima fórmula de Δ, decimos que β depende de α si y sólo si, $m \leqslant n$ y ambas fórmulas verifican:

1° β es α y $m = n$; o

2° Existe en Δ una ocurrencia de una fórmula γ que ocupa el lugar k-ésimo en Δ, con $k < n$ y $m \leqslant k$, tal que β es en Δ consecuencia inmediata de γ (además de, eventualmente, de otra fórmula o secuencias de fórmulas) y γ depende de α.

Definimos finalmente la noción de deducción en **CD**.

Definición 8ª.

Δ *es una deducción en* **CD** *a partir del conjunto* Γ, *eventualmente vacío, de fórmulas de* **L**, si y sólo si Δ es una secuencia de r fórmulas de **L** siendo r un entero positivo, tal que para todo entero positivo $n \leqslant r$, la n-ésima fórmula de Δ es una fórmula de Γ, una hipótesis subsidiaria, o una consecuencia inmediata de una o más fórmulas anteriores en Δ, no canceladas para la n-ésima línea, o de una o más secuencias, de fórmulas consecutivas en Δ, anteriores a la n-ésima cuyas primeras fórmulas son hipótesis subsidiarias, mediante una de las doce reglas de inferencia; y toda hipótesis subsidiaria de Δ está cancelada para la *r*-ésima y última línea de Δ.

Además de la noción de deducción, conviene tener en cuenta las siguientes nociones.

Decimos que Δ *es una deducción de* α *a partir de* Γ *en* **CD** si y sólo si Δ es una deducción en **CD** a partir de Γ y α es la fórmula que ocurre en la última línea de Δ.

Decimos que Δ es una *demostración en* **CD** si y sólo si Δ es una deducción en **CD** a partir del conjunto vacío Γ.

Decimos que la fórmula α *es deducible -o se deduce- del conjunto de premisas* Γ *en* **CD** si y sólo si existe una secuencia de fórmulas Δ tal que Δ es una deducción de α en *CD* a partir de Γ. La expresión $\Gamma \vdash \alpha$ indica que α se deduce de Γ o Γ deduce α.

Decimos que la fórmula α es demostrable en **CD** si y sólo si existe una demostración Δ en **CD** y α es la última fórmula en Δ. Dado que, si α es demostrable, es deducible del conjunto vacío de premisas, expresamos la demostrabilidad de α en la forma $\vdash \alpha$.

Respecto de la relación de deductividad entre fórmulas y conjuntos de fórmulas, enunciamos los siguientes teoremas, omitiendo las correspondientes demostraciones, por lo demás obvias.

Teorema 1°

Si Γ *es un conjunto de fórmulas tal que* $\alpha \in \Gamma$, *entonces* $\Gamma \vdash \alpha$.

Teorema 2°

Para todo par de conjuntos de fórmulas Γ *y* Θ *y toda fórmula* α, *si* $\Gamma \vdash \alpha$ *entonces* $\Gamma \cup \Theta \vdash \alpha$.

Previamente a la enunciación y demostración del teorema de sustitución necesitamos demostrar dos lemas, uno para la parte semántica y otro para la parte sintáctica.

Lema 1°.

Para toda sentencia α, *toda secuencia de* n *variables individuales*, $x_1, x_2, ..., x_n$, *distintas, en donde* n *es cualquier entero positivo, toda fórmula* β, *en la que no ocurra ninguna variable libre que no pertenezca a la secuencia dada, toda letra predicativa* P *n-ádica y todo par de interpretaciones* **I** *e* **I'** *con el mismo dominio* **D**, *la misma valoración* v *y asignaciones* A *para* **I**, *y* A', *para* **I'**, *tales que* A' (P) = **I** (β ($x_1, x_2, ..., x_n$)), *en donde* **I** (β ($x_1, x_2, ..., x_n$)) *es la interpretación* **I** *de* β *para las variables* $x_1, x_2, ..., x_n$ *y, para toda otra letra predicativa* m*-ádica* Q *distinta de* P, A'(Q) = A (Q), *se verifica que el valor de la fórmula* α (β //P x_1 x_2 ... x_n) *bajo la interpretación* **I** *es el mismo que el valor de la fórmula* α *para la interpretación* **I'**.

Demostración:

Demostraremos este lema por inducción sobre el grado lógico, o número de ocurrencias de signos lógicos, de α.

Sea, en primer lugar, α una sentencia atómica. Será entonces de la forma $Rb_1b_2 \dots b_n$, con R n-ádica, en donde $b_1, b_2, \dots, b_n$ es una secuencia de n ocurrencias de parámetros. Dada la cláusula 1ª de la definición 2ª y las condiciones del lema, se tendrá que $\alpha\ (\beta\ //Px_1\ x_2 \dots x_n)_{\mathbf{I}} = \alpha_{\mathbf{I'}}$, como afirma el lema, ya que si R no es P, $\alpha(\beta//Px_1\ x_2 \dots x_n)$ es α y $\alpha_{\mathbf{I}} = \alpha_{\mathbf{I'}}$ dada la definición de **I'** respecto de **I**; y, si R es P, entonces $\alpha\ (\beta//Px_1\ x_2 \dots x_n)$ será $\beta.(b_1, b_2, \dots, b_n/x_1, x_2, \dots, x_n)$ dada la definición 2ª, y el valor de esta sentencia para la interpretación **I** será 1 ó 0 según que la n-pla ordenada $\langle v(b_1), v(b_2), \dots, v(b_n)\rangle$ de elementos de **D** pertenezca o no a $\mathbf{I}\ (\beta\ (x_1, x_2, \dots, x_n))$. Ahora bien, como $\mathbf{I}\ (\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)) = A'\ (P)$, el valor de α bajo **I'** será 1 cuando $\alpha\ (\beta\ //Px_1, x_2 \dots x_n)_{\mathbf{I}} = 1$ y será 0 cuando $\alpha\ (\beta\ //Px_1\ x_2 \dots x_n)_{\mathbf{I}} = 0$.

Supongamos ahora que el enunciado del lema valga al menos para toda sentencia de grado lógico m, con $m \leqslant n$, cualesquiera que sean β, $P, x_1, x_2, \dots, x_n$ y cualquiera que sea la interpretación **I**. Consideremos ahora una sentencia α de grado lógico $n + 1$. Obviamente, α tendrá una de estas seis formas: 1°. $\neg\eta$, 2°. $\eta \vee \gamma$, 3°. $\eta \wedge \gamma$, 4°. $\eta \rightarrow \gamma$, 5°. $\bigvee y \eta$ y 6°. $\bigwedge y \eta$, y en los casos 1°, 5° y 6°, η tendrá el grado lógico n y en los restantes casos η y γ tendrán un grado lógico igual o menor que n. Probaremos entonces el lema recorriendo los seis casos. Para abreviar, en los cuatro primeros casos, α' será la fórmula $\alpha\ (\beta\ //Px_1\ x_2 \dots x_n)$, η' será la fórmula $\eta\ (\beta\ //Px_1\ x_2 \dots x_n)$ y γ' será la fórmula $\gamma\ (\beta\ //Px_1\ x_2 \dots x_n)$. Para los restantes casos, α' será como ya ha quedado indicado, η' será la sentencia $\eta\ (b/y)$, en donde b es un parámetro cualquiera que no ocurre en α, $\mathbf{I}_K$ será cualquier interpretación tal que $\mathbf{I}_K \underset{b}{=} \mathbf{I}$, $\mathbf{I}_K'$ será a $\mathbf{I}_K$ como **I'** a **I**, y η'' será la sentencia $\eta'\ (\beta\ //Px_1\ x_2 \dots, x_n)$.

Caso 1°. El grado de η es n y por hipótesis de la inducción el lema vale para η. Entonces, por evaluación del negador (*Def.* 4ª, 2ª, *a*) se verifica que η' tiene el valor inverso de α' bajo **I** y lo mismo bajo **I'**. En consecuencia, $\alpha'_{\mathbf{I}} = \neg\ \eta'_{\mathbf{I}} = \neg\ \eta'_{\mathbf{I'}} = \alpha_{\mathbf{I'}}$.

Caso 2° El grado de η y de γ es siempre menor o igual que n, de donde vale, para η y para γ, el lema. Por evaluación del disyuntor (*Def.* 4ª 2ª, *b*), $\alpha'_{\mathbf{I}} = 0$ si y sólo si se verifica que $\eta'_{\mathbf{I}} = 0$ y $\gamma'_{\mathbf{I}} = 0$ y, por consiguiente, $\alpha'_{\mathbf{I}} = 1$, en caso contrario. Pero como $\eta'_{\mathbf{I}} = \eta_{\mathbf{I'}}$ y $\gamma'_{\mathbf{I}} = \gamma_{\mathbf{I'}}$, por hipótesis de la inducción, $\alpha'_{\mathbf{I}} = (\eta' \vee \gamma')_{\mathbf{I}}' = (\eta \vee \gamma)\mathbf{I'} = \alpha_{\mathbf{I'}}$.

Caso 3°. El grado de η y de γ es menor o igual que n. Por evaluación del conjuntor (*Def.* 4ª, 2ª *c*), $\alpha'_{\mathbf{I}} = 1$, si $\eta'_{\mathbf{I}} = 1$, y $\gamma'_{\mathbf{I}} = 1$ y $\alpha'_{\mathbf{I}} = 0$, en caso contrario. Pero como, por hipótesis de la inducción, $\eta'_{\mathbf{I}} = \eta_{\mathbf{I'}}$ y $\gamma'_{\mathbf{I}} = \gamma_{\mathbf{I'}}$ $\alpha'_{\mathbf{I}} = \alpha_{\mathbf{I'}}$.

Caso 4°. El grado de η y de γ es menor o igual que n. Por evaluación del implicador (*Def.* 4ª, 2ª, *d*), $\alpha'_{\mathbf{I}} = 1$, si $\eta'_{\mathbf{I}} = 0$ ó $\gamma'_{\mathbf{I}} = 1$, y $\alpha'_{\mathbf{I}} = 0$, en caso contrario. Pero como por hipótesis de la inducción, $\eta'_{\mathbf{I}} = \eta_{\mathbf{I'}}$ y $\gamma'_{\mathbf{I}} = \gamma_{\mathbf{I'}}$, entonces $\alpha'_{\mathbf{I}} = \alpha_{\mathbf{I'}}$.

Caso 5°. El grado lógico de η y por consiguiente de η' es n y por tanto, para η' y para $\mathbf{I}_K$ vale el enunciado del lema. Por evaluación del cuantificador existencial (*Def.* 4ª, 2ª, *e*), $\alpha'_{\mathbf{I}} = 1$, si existe al menos una $\mathbf{I}_K$ tal que $\eta''_{\mathbf{I}_K} = 1$, y $\alpha'_{\mathbf{I}} = 0$, en caso contrario. Por hipótesis de la inducción $\eta''_{\mathbf{I}_K} = \eta'_{\mathbf{I'}_K}$. En consecuencia, $\alpha'_{\mathbf{I}} = 1$ si y sólo si, para alguna $\mathbf{I}_K, \eta''_{\mathbf{I}_K} = 1$. Pero $\eta''_{\mathbf{I}_K} = 1$ si y solo si $\eta'_{\mathbf{I'}_K} = 1$, como hemos visto. Pero, otra vez teniendo en cuenta la evaluación del cuantificador existencial, si para alguna $\mathbf{I'}_K$ $\eta'_{\mathbf{I'}_K} = 1$, entonces y sólo entonces $\alpha_{\mathbf{I'}} = 1$.

Caso 6°. El grado lógico de η y, por tanto, de η' es n. Por consiguiente, para

η' y para $\mathbf{I}_K$ vale el lema. Por evaluación del cuantificador universal (*Def.* 4ª, 2ª, *f*) α'_{I}= 1 si y sólo si para todo $\mathbf{I}_K$ η''_{I_K} = 1. Por hipótesis de la inducción η''_{I_K} = 1 si y sólo si $\eta'_{\mathrm{I}'_K}$, = 1. Pero, otra vez por evaluación del cuantificador universal, α_{I}' = 1 si y solo si para tηda $\mathbf{I}'_K$ $'_{\mathrm{I}'_K}$, = 1.

Lema 2°

Sea Δ *una deducción cualquiera en* **CD** *a partir de un conjunto* Γ *de premisas. Sea* r *la longitud, o número de líneas, de* Δ . *Entonces, para todo entero positivo* $n \leqslant$ r, *si* β *es la* n-*ésima fórmula de* Δ , *existe una deducción* Δ' *en* **CD** *de* β *a partir de* $\Gamma \cup \Theta$ - *en donde* Θ *es el conjunto de todas las hipótesis subsidiarias de* Δ *que ocurren con anterioridad a la línea* n + 1-*ésima y no están canceladas para la* n-*ésima línea que consta exactamente de las* n *primeras líneas de* Δ *y en su mismo orden.*

Demostraremos este lema por inducción, con base 1, sobre el entero positivo n a que alude el enunciado.

Sea, en primer lugar, $n = 1$. La primera fórmula β de Δ será necesariamente una hipótesis, previa o subsidiaria, en Δ. Sea Δ' la secuencia que contiene a β como único elemento. Entonces, dada la definición 8ª, Δ' es obviamente una deducción y, dados los teoremas 1° y 2°, una deducción de β a partir de $\Gamma \cup \Theta$, cualquiera que sea Γ y siendo Θ el conjunto vacío.

Supongamos ahora que el lema valga al menos para todo entero $m \leqslant k$ con $k < r$. Sea entonces Δ' la secuencia de las $k + 1$ primeras ocurrencias de fórmulas de Δ y Δ" la secuencia de las k primeras ocurrencias de fórmulas también de Δ. Por hipótesis de la inducción, Δ" es una deducción en **CD** a partir de $\Gamma \cup \Theta$, siendo Θ el conjunto de las hipótesis subsidiarias de Δ anteriores a la línea $(k + 1)$-ésima que no estén canceladas para la k-ésima línea, y siendo Γ el conjunto de premisas de Δ .

Dada la definición 8ª, la fórmula β que ocurre en la $(k + 1)$-ésima línea de Δ o, lo que es lo mismo, en la última línea de Δ': *a*) es un elemento de Γ ; *b*) es una hipótesis subsidiaria; o, finalmente, *c*) es una consecuencia inmediata de fórmulas precedentes no canceladas para la $(k + 1)$-ésima línea o de secuencias de fórmulas no precedentes.

Si se verifica el caso *a* tendremos, dado el teorema 1°, que $\Gamma \vdash \beta$ y, dado el teorema 2°, $\Gamma \cup \Theta \vdash \beta$, en donde Θ será el mismo conjunto que para Δ".

Si se verifica el caso *b*, tendremos, por el teorema 1°, $\{\beta\} \vdash \beta$ y, por el teorema 2°, $\Gamma \cup \Theta \cup \{\beta\} \vdash \beta$, siendo $\Theta \cup \{\beta\}$ efectivamente el conjunto de las hipótesis no canceladas para la línea $(k+ 1)$-ésima y anteriores en Δ a la línea $(k + 2)$-ésima.

Finalmente, si se verifica el caso *c*, como por hipótesis de la inducción Δ" era ya una deducción a partir de $\Gamma \cup \Theta$ y β procede de fórmulas o secuencias de fórmulas perteneciente a Δ", Δ' ha de ser también una deducción y una deducción a partir de $\Gamma \cup \Theta$, si β no procede de ninguna secuencia de fórmulas, o una deducción a partir de $\Gamma \cup \Theta - \{\gamma\}$, donde γ es un elemento de Θ, si β procede mediante *IN*, *II* o *EE* y γ es la hipótesis subsidiaria o primera fórmula de la secuencia de la que β es consecuencia inmediata, o, finalmente, una deducción a partir de $\Gamma \cup \Theta$-$\{\gamma, \delta\}$, si β procede mediante *ED* y γ y δ son respectivamente las primeras fórmulas de cada una de las secuencias de que β es consecuencia inmediata.

Demostrados los dos lemas, enunciamos el teorema de sustitución.

Teorema 3°

Sea Γ *un conjunto cualquiera* $\{\gamma_1, \gamma_2 ...\}$ *eventualmente vacío de fórmulas de* L. *Sean* $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ *una secuencia de* n *variables individuales distintas. Sea* β *una fórmula cualquiera de* L *y* P *una letra predicativa* n-*ádica cualquiera. Sea* Γ' *el conjunto* $\{\gamma'_1, \gamma'_2, ...\}$ *tal que, para todo entero positivo i,* $\gamma'_i = \gamma_i(\beta/Px_1\ x_2 ... x_n)$. *Entonces* (Parte semántica), *si todas las fórmulas de* Γ *son sentencias y todas variables libre en* β *pertenece a la dada secuencia de variables individuales, para toda sentencia* α, *si* $\Gamma \models \alpha$, *es decir, si* α *es consecuencia lógica de* Γ, *entonces* $\Gamma \models \alpha(\beta//Px_1\ x_2 ... x_n)$, *es decir,* $\alpha(\beta//Px_1\ x_2 ... x_n)$ *es consecuencia lógica del conjunto* Γ'. *Además* (Parte Sintáctica), *comoquiera que sean las fórmulas de* Γ *y la fórmula* β, *para toda fórmula* α, *si* $\Gamma \vdash \alpha$, *es decir, si* Γ *deduce* α, *entonces* $\Gamma' \vdash \alpha(\beta//Px_1\ x_2 ... x_n)$, *es decir,* Γ' *deduce la fórmula* $\alpha(\beta//Px_1\ x_2 ... x_n)$.

Demostración de la parte semántica

Supongamos que efectivamente α sea consecuencia lógica de Γ y que $\alpha(\beta//Px_1\ x_2 ... x_n)$ no sea consecuencia lógica de Γ'. De la segunda hipótesis se sigue que ha de existir al menos una interpretación **I** tal que **I** satisface simultáneamente a todas las sentencias de Γ' y no satisface a $\alpha(\beta//Px_1\ x_2 ... {}_n)$. Entonces, si **I'** es la interpretación tal que $\mathbf{I'} \underset{P}{=} \mathbf{I}$ e $\mathbf{I'}(P) = \mathbf{I}(\beta(x_1, x_2, ..., x_n))$, dado el lema 1°, se tendrá que **I'** satisface simultáneamente a todas las sentencias de Γ, dado que **I** satisface todas las sentencias de Γ', y al mismo tiempo $\alpha_{\mathbf{I'}} = 0$, puesto que $\alpha(\beta//Px_1\ x_2, ... x_n)_{\mathbf{I}} = 0$. Pero, en ese caso, tendríamos una interpretación **I'** tal que **I** satisface a todas las sentencias de Γ y no satisface a α, lo que contradice la primera de las hipótesis.

Demostración de la parte sintáctica

Demostramos esta parte del teorema por inducción, con base 1, sobre la longitud de la deducción Δ de α a partir de Γ.

Supongamos que Δ tenga una única ocurrencia de fórmula. Esta será obviamente la fórmula α, que al mismo tiempo será una o la única de las fórmulas de Γ. Entonces, de la misma manera que se tiene, por hipótesis, $\Gamma \vdash \alpha$, se habrá de tener $\Gamma' \vdash \alpha(\beta//Px_1\ x_2 ... x_n)$ en una deducción Δ' con una, o la única, fórmula $\alpha(\beta//Px_1 ... x_n)$ perteneciente a Γ'.

Sea ahora Δ una deducción de una fórmula α a partir de Γ y sea $r + 1$ la longitud de Δ. Por el lema 2°, eliminando la última línea de Δ, es decir, la que contiene a la fórmula α, obtenemos una deducción Λ de δ_r, siendo δ_r la r-ésima fórmula de Δ, a partir de $\Gamma \cup \Theta$, en donde Θ es un conjunto que contiene, a lo sumo, dos fórmulas, θ_1 y θ_2, puesto que con la $(r + 1)$-ésima fórmula de Δ deben quedar canceladas todas las hipótesis subsidiarias de Δ y en cada línea sólo pueden quedar a lo sumo canceladas dos hipótesis, que es lo que se verifica cuando la fórmula de la línea en cuestión procede mediante la regla *ED*.

Supongamos que el enunciado de la parte sintáctica del teorema vale para toda deducción de longitud menor o igual que r y, por tanto, para la deducción Λ. Tendremos entonces que, siendo $\delta'_r = \delta_r(\beta//Px_1\ x_2 ... x_n)$, $\Theta' = \{\theta_1', \theta_2'\}$, $\theta'_1 = \theta_1(\beta//Px_1\ x_2 ... x_n)$ y $\theta'_2 = \theta_2(\beta//Px_1\ x_2 ... x_n)$, caso de que en Θ haya dos fórmulas, $\Gamma' \cup \Theta' \vdash \delta'_r$ siendo Λ' la deducción de δ'_r a partir de $\Gamma' \cup \Theta'$. Supongamos, además, que si $\delta_1, \delta_2, \delta_3, ..., \delta_r$ son exactamente las r ocurrencias de fórmulas de Λ, la secuencia $\langle \delta'_1, \delta'_2, ..., \delta'_r \rangle$, en donde, para cada entero positivo $i \leqslant r$, $\delta'_i = \delta_i(\beta//Px_1\ x_2 ... x_n)$, constituya exactamente la deducción Λ' de δ_r a partir de $\Gamma' \cup \Theta'$.

Como α es la última fórmula de Δ, pueden darse exclusivamente los dos casos siguientes:

1er caso: α es una de las fórmulas de Γ. Entonces obviamente $\Gamma' \vdash \alpha'$, en donde $\alpha' = \alpha(\beta // Px_1\, x_2 \ldots x_n)$, dado el teorema 1° y el hecho de que $\alpha' \in \Gamma'$. Además, como Λ' es una deducción a partir de Γ' - Θ' será vacío en este caso-, con exactamente las fórmulas δ'_1, $\delta'_2, \ldots, \delta'_r$, habrá una de deducción Δ' partir de Γ' con exactamente las fórmulas δ'_1, $\delta'_2, \ldots, \delta'_{r,\alpha}$, y en el mismo orden.

2° caso: α es consecuencia inmediata de fórmulas no canceladas para la $(r + 1)$-ésima línea o de secuencias de fórmulas precedentes. Entonces, el paso de la inducción, y en consecuencia la parte sintáctica del teorema quedará demostrada recorriendo cada uno de los doce subcasos posibles, uno por cada una de las reglas de inferencia mediante las cuales puede proceder la fórmula α. Así, para el subcaso correspondiente a *EI*, la fórmula α en la línea $(r + 1)$-ésima será en Δ consecuencia inmediata de dos fórmulas anteriores respectivamente de la forma $\eta \rightarrow \alpha$ y η; en la deducción Λ' aparecerán en los lugares correspondientes a los de $\eta \rightarrow \alpha$ y η en Δ las fórmulas $\eta' \rightarrow \alpha'$ y η' con $\eta' = \eta(\beta // Px_1\, x_2 \ldots x_n)$ y α' como se ha dicho más arriba, puesto que por la definición 2ª, si λ es la fórmula $\eta \rightarrow \alpha$ y λ' es $\lambda(\beta // Px_1\, x_2 \ldots x_n)$, λ' es $\eta' \rightarrow \alpha'$; y, por tanto, añadiendo a Λ' la fórmula α' obtendremos la secuencia Δ' que será una deducción de α' a partir de Γ'; ya que Θ habrá de ser en este caso vacío y α' procede efectivamente en Δ' de $\eta' \rightarrow \alpha'$ y η' por *EI*. Por el contrario, en el subcaso correspondiente a *ED*, Λ será una deducción a partir de $\Gamma \cup \Theta$, con $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ y, por consiguiente la hipótesis de la inducción, Λ' será una deducción a partir de $\Gamma' \cup \Theta'$, con $\Theta' = \{\theta'_1\ \theta'_2\}$. La fórmula α, $(r + 1)$-ésima de Δ procederá exactamente de la fórmula $\theta_1 \vee \theta_2$, no cancelada para la $(r + 1)$-ésima línea, y de las secuencias $\langle \theta_1 \ldots \alpha \rangle$ y $\langle \theta_2 \ldots \alpha \rangle$ que sólo quedan canceladas en la $(r + 1)$-ésima línea. Entonces, añadiendo a Λ' como $(r + 1)$-ésima línea la fórmula α', obtendremos la deducción Δ' de α', puesto que en Λ' ocurre la fórmula $\theta_1' \vee \theta_2'$ en el mismo lugar que $\theta_1 \vee \theta_2$ en Δ y las secuencias $(\theta'_1, \ldots, \alpha')$ y $(\theta'_2, \ldots, \alpha')$ en los mismos lugares que las secuencias $(\theta_1, \ldots, \alpha)$ y $(\theta_2, \ldots, \alpha)$ en Δ.

De esta manera, queda demostrado el teorema de sustitución.

NOTAS

[1] A. Church; *Introducción to Mathematical Logic*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956, pp. 192-193.

[2] Seguimos exactamente el procedimiento empleado por Hans Hermes en *Enumerability. Decidability. Computability*; Springer-Verlag, Berlín, New York, 1969; pp. 161.

[3] La noción definida es la de Church, *op.; cit.*, pp. 192-193 y el procedimiento de la definición es el mismo que usa Hermes para la sustitución de variables por términos en *op. cit.* p. 161.

[4] Es decir, una relación n-ádica de elementos de *D*, un conjunto de *n*-plas ordenadas de elementos de *D*.

[5] La noción de interpretación de una fórmula β para una dada secuencia de *n* variables distintas, aunque equipara de alguna manera a las fórmulas con las letras predicativas n-ádicas, no exige que todas las variables de la secuencia estén libres en β. Es más, puede incluso darse que en β no ocurra libre ninguna de tales variables. En esos casos, β será una sentencia y si $\beta_{\mathbf{I}} = 1$, $\mathbf{I}(\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \mathbf{D}^n$ y si $\beta_{\mathbf{I}} = 0$, $\mathbf{I}(\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \phi$.

[6] La noción de valor y, por tanto, las de validez universal, satisfactibilidad y no satisfactibilidad, no son aplicables a las fórmulas con variables libres. Sin embargo, existe un procedimiento para equiparar de alguna manera las fórmulas con variables libres a las sentencias respecto de la validez universal, la satisfactibilidad y la no satisfactibilidad. En un sentido derivado, podemos decir que una fórmula con variables libres es universalmente válida si y sólo si lo es su clausura y que es satisfactible si y sólo si lo es su particularización.

[7] En particular, todas ellas, excepto *EN*, son como las homónimas de *NJ* de Gentzen (*Cfr.* M.E: Szabo,

The Collected Papers of Gerhard Gentzen, North-Holland p.c. Amsterdam, 1969, p. 77). La regla *EN* no es ni como la correspondiente de *NJ* ni como la de *NK*, pues *NK* lo construye Gentzen a partir del cálculo intuicionista *NJ* añadiéndolo el tercio excluso. *EN* es $\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$.