

Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Aplicaciones del método de MacCormack a diversos
problemas fluidomecánicos

Autor: Manuel Carreño Ruiz

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Aplicaciones del método de MacCormack a diversos problemas fluidomecánicos

Autor:

Manuel Carreño Ruiz

Tutor:

Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Profesor titular

Dep.Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016

Trabajo Fin de rado: Aplicaciones del método de MacCormack a diversos problemas fluidomecánicos

Autor: Manuel Carreño Ruiz

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2016

El Secretario del Tribunal

*A mi familia,
amigos y compañeros.*

Agradecimientos

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento a todos los docentes con los que he tenido el placer de recorrer este duro camino que ahora cierro con este documento, especialmente a Don Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor por el inestimable apoyo recibido durante estos meses de trabajo.

También me gustaría agradecer a mi familia y amigos el apoyo que me han brindado durante estos cuatro años, sin ningún asomo de duda sin ellos hoy no estaría aquí.

Por último, me gustaría agradecer a mis compañeros la ayuda recibida, especialmente a María Paz Luque Alcántara y Carmen Velarde López de Ayala, cuya compañía durante largos días de trabajo han hecho que todo sea mucho más sencillo y han contribuido de manera inigualable a mi formación tanto personal como universitaria.

Manuel Carreño Ruiz
Sevilla, 2016

Resumen

Estas memorias recogen unas instrucciones y pasos sencillos mediante los cuales el lector pueda ser capaz de tener una comprensión del método de MacCormack que le permitirá implementarlo en un software de cálculo numérico como MATLAB o similar para resolver diversos problemas fluidodinámicos.

Además de analizar la validez del método comparándolo con resultados de la literatura se procederá a analizar los resultados de problemas como el flujo alrededor de un cilindro cuadrado, la convección en una cavidad cuadrada llevada por la tapadera o el problema de convección natural de Rayleigh-Bénard.

Los dos problemas estudiados en más profundidad son la emisión de torbellinos que se produce a partir un número de Reynolds cuando una corriente rebordea un obstáculo, en este caso un cuadrado, y algunos aspectos relacionados con el problema de convección de Rayleigh-Benard, como el número de Reynolds crítico o la influencia de las condiciones de contorno en las paredes de la cavidad.

Como aspecto diferenciador a la mayoría de resultados de la bibliografía para el problema de Rayleigh-Bénard en esta memoria se contempla la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles, sin aplicar la aproximación de Boussinesq lo que nos permitirá comprobar la validez de esta.

Abstract

This document compiles simple and straightforward instructions which make the reader able to understand the explicit MacCormack's scheme and allow its implementation in a numerical calculus software such as MATLAB to solve several fluidomechanical problems.

Aswell as analyzing the method's validity by comparing with published results, several fluidomechanical problems will be solved, such as the compressible flow around a squared cylinder, lid-driven convection or Rayleigh-Bénard's natural convection problem.

Two of these problems will be studied in detail. These will be the vortex shedding phenomenon, which occur when the Reynold's number reaches a critical value as a uniform current flows over an object, and the Rayleigh-Bénard natural convection problem, in which we will study the critical Rayleigh's number and the influence of the boundary conditions.

As an innovation, in this document the compressible Navier-Stokes equations will be solved, without the necessity of using Boussinesq's approximation as it is generally done, making possible a comparison and therefore a validation of this approximation.

Índice

| | |
|---|------------|
| Agradecimientos | 8 |
| Resumen | 9 |
| Abstract | 10 |
| Índice | 11 |
| 1 Introducción | 13 |
| 1.1 <i>Convección Forzada. 'Vortex shedding'.</i> | 14 |
| 1.2 <i>Convección Natural. Problema de Rayleigh-Bénard.</i> | 15 |
| 2 Estructura del Trabajo | 17 |
| 3 Método de MacCormack | 18 |
| 3.1 <i>Elección del método</i> | 18 |
| 3.2 <i>Fundamento Teórico</i> | 18 |
| 3.3 <i>Aproximación numérica en mallas equiespaciadas</i> | 20 |
| 3.3 <i>Aplicación: Ecuación lineal de onda</i> | 26 |
| 3.4 <i>Aplicación: Cavidad cuadrada, con la tapadera desplazándose a velocidad constante.</i> | 33 |
| 4 Aplicación: flujo bidimensional alrededor de un cuadrado | 47 |
| 5 Aplicación: flujo bidimensional alrededor de un cuadrado con temperatura | 73 |
| 6 Aplicación: Cavidad rectangular con diferencia de temperatura en las tapas | 87 |
| 7 Conclusiones y desarrollos futuros | 105 |
| 8 Bibliografía | 107 |

1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años, debido en gran medida al avance continuo de la tecnología computacional, se ha producido un incremento en la tendencia al cálculo computacional que ha resultado en nuevos métodos y software de CFD (siglas en inglés de ‘Computational Fluid Dynamics’).

La mayoría de los problemas fluido-mecánicos no tienen solución analítica, y los que sí la tienen son casos tan sencillos que apenas tienen utilidad. Esto ha enturbiado durante muchos años la capacidad de comprensión y asimilación de los conceptos por parte de los alumnos de asignaturas de mecánica de fluidos, que se han visto obligados a ‘creerse’ complejas y engorrosas soluciones analíticas sin poder comprobar su veracidad.

Ahora esto ha cambiado, los alumnos pueden asistir a clases con su ordenador e implementar sencillos métodos, como los que se explican en este manual, comprobando que aquellas relaciones empíricas que antiguamente tenían que creerse se corresponden con un nivel de precisión muy alto a la solución numérica obtenida.

El objetivo principal de este trabajo es demostrar que esto es posible, que con unas nociones básicas de MATLAB u otro lenguaje similar aprendido en cursos anteriores es posible implementar métodos numéricos mas o menos sencillos que son capaces de resolver problemas fluidodinámicos útiles y que ayuden a mejorar la comprensión de los alumnos de las asignaturas de mecánica de fluidos.

Otro aspecto ventajoso es que se evita el uso de códigos comerciales de CFD que muchas veces actúan como caja negra, impidiendo así la total comprensión de la materia que se está abordando. Como dijo H.Lomax “you don’t understand the problem unless you can program it” cuya traducción al castellano quiere decir que no entiendes el problema si no puedes programarlo. Este comentario no puede ser más acertado ya que para implementar un código que resuelva un problema, debes entenderlo a la perfección si no jamás serás capaz de detectar los fallos que inevitablemente se dan al programar. Este método también ayuda a practicar y desarrollar las actividades de programación que hoy en día son imprescindibles en el mundo de la ingeniería además de darte una base y comprensión que pueda ayudar al utilizar programas de CFD avanzados cuando sea requerido para resolver problemas más complejos.

En este manual se ha querido dar una amplia variedad de problemas fluidodinámicos que se ordenan de menor a mayor complejidad, empezando por el estudio de la convección forzada en una cavidad cuadrada llevada por su tapadera, y terminando en el problema de convección natural de Rayleigh-Bénard.

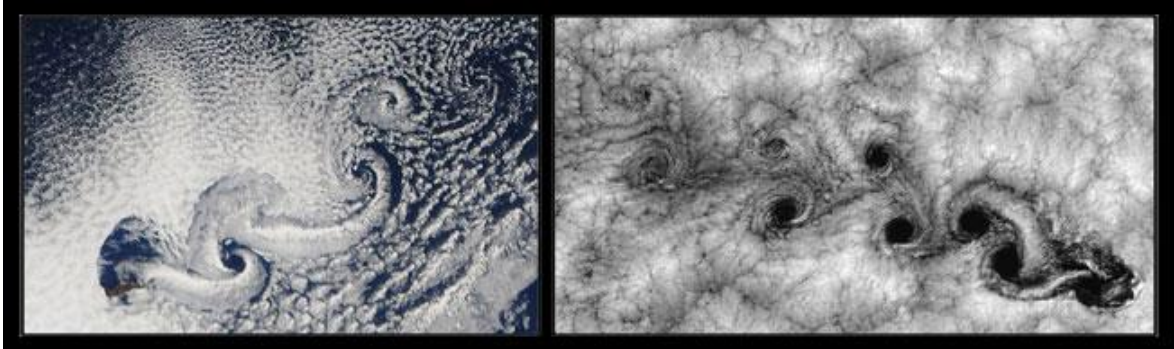
La convección se define como el movimiento de partículas fluidas mediante mecanismos de advectivos y difusivos. Se distinguen muchos tipos de convección, en este manual nos vamos a centrar como hemos mencionado previamente en la convección forzada y la convección natural.

En la convección forzada el movimiento del fluido está provocado por una fuerza externa, que puede ser una superficie en movimiento, un ventilador un compresor... Este tipo de convección suele ser utilizada para acelerar el proceso de intercambio de calor, un ejemplo claro es el radiador de un coche, que utiliza la velocidad del aire para acelerar el proceso de refrigeración.

La convección natural ocurre cuando existe una diferencia de temperaturas que induce una variación en la densidad. Debido a la existencia de gravedad la zona del fluido mas densa tiende a bajar y la zona del fluido menos densa tiende a subir, esto puede inducir patrones de flujo en el fluido como veremos en detalle mas adelante. A esta fuerza que tiende a desestabilizar el fluido, llamada flotabilidad, se le oponen otras dos fuerzas, las fuerzas de viscosidad que siempre se oponen al movimiento y los efectos de la conducción de calor que tienden a homogeneizar el campo de temperaturas del fluido impidiendo que la diferencia de densidades sea lo suficientemente fuerte como para iniciar la convección.

1.1 Convección Forzada. 'Vortex shedding'.

En esta sección vamos a introducir un fenómeno muy especial que ocurre cuando se fuerza a un fluido a rebordear un obstáculo. Este fenómeno ha sido ampliamente estudiado, y se produce en muchas situaciones en la naturaleza, la más significativa el patrón que se genera en las nubes cuando el viento rebordea un obstáculo geográfico como una isla.



Figura(1-1)

También recibe el nombre de calle de torbellinos de von Kármán. Ha sido estudiado en el caso de cilindros circulares infinitos, uno de los resultados mas interesantes es la frecuencia con la cual se desprenden los torbellinos. El físico checo Vincent Strouhal trabajo en este campo, y estudio la frecuencia adimensional con la cual estos torbellinos se desprenden, que adimensionalizando el tiempo con la velocidad de la corriente incidente partido una longitud característica del problema, se obtiene:

$$f^* = \frac{fD}{V} = St; \quad (1-1)$$

Este valor de frecuencia adimensional se conoce como Número de Strouhal que, como se verá, depende del Numero de Reynolds del movimiento y de la geometría del flujo.

Este fenómeno puede ser indeseado en la ingeniería ya que se producen oscilaciones en las fuerzas a las que se ven sometidas las estructuras, requiriendo un estudio de rotura por fatiga, que siempre es mas exigente que para cargas estáticas.

Por ejemplo, las chimeneas de refrigeración situadas en rascacielos, donde reciben una corriente uniforme, o en fábricas situadas a las afueras de una ciudad, poseen unas proyecciones en espiral para distorsionar el flujo y evitar la formación de estos torbellinos. Otra medida que se toma, principalmente en grandes edificios es añadir un estrechamiento, esto hace como podemos ver en la expresión 1-1 que la frecuencia sea diferente en cada punto del edificio impidiendo que todo el edificio vibrase al unisono a la misma frecuencia lo que podría tener efectos caóticos.

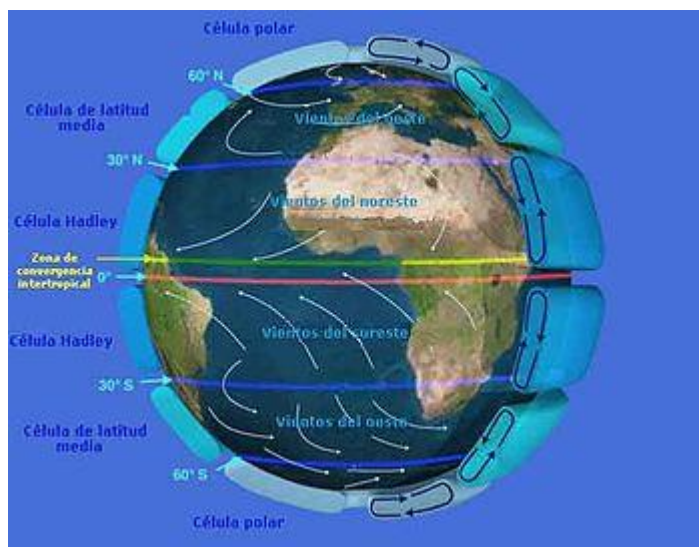
En 1965 este fenómeno provocó el colapso de tres torres de refrigeración de la central de Ferrybridge durante una ráfaga de vientos intensos.

No todos los efectos son negativos, se tiene constancia que algunos insectos aprovechan estos vórtices para hacer su vuelo mas eficiente, las abejas especialmente.

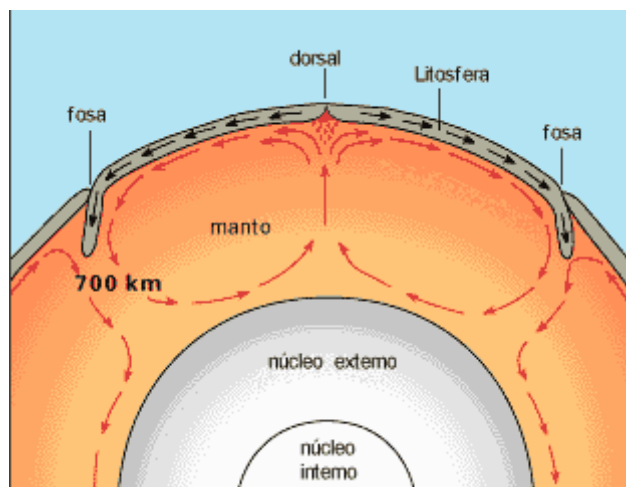
1.2 Convección Natural. Problema de Rayleigh-Bénard.

El fenómeno de convección natural está constituido por los movimientos generados en el seno de un fluido que se encuentran en presencia de un campo gravitatorio y en el que la distribución de densidades no es uniforme. Generalmente, estas variaciones de densidad se deben a diferencias de temperatura, aunque también son comunes las producidas por gradientes de concentración.

La convección de Rayleigh-Bénard se encuentra tanto en la naturaleza como en la ingeniería. Por ejemplo, en la naturaleza, es manifestado en los movimientos de masas de aire atmosférico que tienen lugar en las celdas de Hadley situadas en el entorno del ecuador y responsable de los vientos alisios, de Ferrell desarrolladas en latitudes medias, y por último la Polar. Por otro lado, este fenómeno es manifestado en el movimiento del manto terrestre, gobernada por las corrientes de convección natural debidas al gradiente de temperaturas existente entre el núcleo y la corteza de la Tierra.



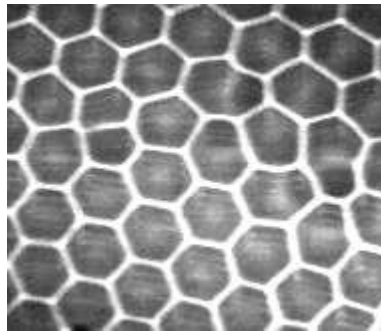
Figura(1-2)



Figura(1-3)

Henri Bénard llevó a cabo una serie de experimentos en capas de fluidos de elevada conductividad térmica calentadas desde abajo y cuya su superficie superior estaba expuesta al aire del ambiente, lo que dio comienzo al estudio de los fenómenos de convección natural.

Bénard pudo observar la existencia de un movimiento en el fluido que alcanzaba un régimen estacionario, tras un régimen transitorio inicial, donde se distinguía en la superficie una estructura similar a la de un panal de abejas de celdas hexagonales regulares como se observa en la figura 1-4. Realizó diversas investigaciones del flujo en el interior de la celda, las cuales revelaron que el fluido ascendía por el centro de la celda y descendía a lo largo del perímetro hexagonal.



Figura(1-4)

El primer investigador que desarrolló una teoría que ponía de manifiesto de forma clara los mecanismos físicos involucrados en el fenómeno de la convección natural, fue Lord Rayleigh.

Rayleigh, resaltó que además de las **fuerzas de flotabilidad**, deben tenerse en cuenta, cuando un fluido cuya densidad no es uniforme se encuentra en presencia de la gravedad; los mecanismos que tienden a contrarrestar su efecto: la fricción, originada por las **fuerzas de viscosidad**, y el de **conducción de calor**, que tiende a homogeneizar en el seno del fluido el campo de temperaturas y, por tanto, también el de densidades.

Rayleigh consideró una capa de fluido entre dos placas paralelas infinitas a diferente temperatura dispuestas perpendicularmente a la dirección de la gravedad, con la placa inferior a mayor temperatura. Rayleigh linealizó las ecuaciones de Navier-Stokes entorno a la situación de equilibrio, descubriendo así que en el sistema lineal de ecuaciones en derivadas parciales aparece el parámetro adimensional, denominado **número de Rayleigh**:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\nu\alpha} \quad (1-1)$$

donde β es el coeficiente de dilatación térmica, ν la viscosidad cinemática, α la difusividad térmica del fluido, g es la aceleración de la gravitatoria, H es una longitud característica del problema y ΔT es la diferencia de temperatura entre ambas placas.

El número de Rayleigh es el Número adimensional que mide la importancia relativa entre los efectos de las fuerzas de flotabilidad y los efectos viscosos y de conducción térmica. Existe un cierto valor umbral del número de Rayleigh a partir del cual los efectos de flotabilidad dominan sobre los de conducción de calor y los viscosos y se desarrolla la convección natural, este se denomina número de Rayleigh crítico. El valor teórico de $Ra_c = 1708$, que coincide muy bien con los valores medidos, alrededor de 1708 ± 50 , para el caso de dos placas infinitas.

Muchos investigadores realizaron mediciones de este número de Rayleigh Crítico para cavidades finitas con diferentes relaciones de aspecto y distintas condiciones de contorno en las paredes, por tanto, existe una gran variedad de bibliografía para comparar los resultados.

Finalmente comentar que recientemente se descubrió que los patrones convectivos observados por Bénard no eran debidos a la diferencia de tensión superficial que genera la diferencia de temperaturas, no obstante, este fenómeno sigue denominándose comúnmente como convección de Rayleigh-Bénard.

2 ESTRUCTURA DEL TRABAJO

En el presente trabajo se muestra un estudio del método numérico explícito de MacCormack desarrollado por R.W.MacCormack y su aplicación a diversos problemas fluidodinámicos para hacer posible su resolución mediante un programa MATLAB relativamente sencillo.

En el capítulo 3 analizaremos los fundamentos de dicho método, incluyendo estrategias que hacen que el método sea más estable. Se presentarán las ecuaciones de Navier-Stokes en forma conservativa, esta disposición de las ecuaciones es esencial para poder aplicar este esquema numérico de forma eficiente. Además se incluye una pequeña aplicación de un caso unidimensional para ayudar a entender como funciona la mecánica del método antes de comenzar a resolver problemas más complejos y un ejemplo de un problema bidimensional para comenzar a entender el método aplicado a las ecuaciones de Navier-Stokes. Un caso muy simple, una caja cuadrada llena de fluido cuya tapadera se desplaza con velocidad U constante. Se simplifican las ecuaciones de Navier-Stokes completas mostradas al comienzo del apartado y se aplican las condiciones de contorno correspondientes. Este ejemplo nos sirve como verificador del método ya que ha sido resuelto por muchos autores y nos permite comparar los resultados.

El capítulo 4, es una extensión del apartado 4 del capítulo 3, una cavidad rectangular alargada, que se puede asimilar a un conducto, con un cuadrado en medio que hace sus veces de obstáculo para el fluido. Se imponen las condiciones de contorno correspondientes tal que el problema sea equivalente al cuadrado viajando a velocidad constante en el conducto. El objetivo de esta aplicación será el cálculo de la resistencia generada por el cuadrado así como la sustentación si la hubiese. También vamos a estudiar la sensibilidad a la relación de aspecto de la cavidad. Una vez llevado a cabo este análisis podremos elegir una relación de aspecto de la cavidad de tal forma que el resultado se aproxime a el cuadrado inmerso en una corriente uniforme y entonces analizaremos el problema de 'Vortex shedding' que comentamos anteriormente, calculando la frecuencia con la que se emiten torbellinos aguas abajo.

En el capítulo 5 se contempla la resolución de un problema parecido al anterior pero en este caso vamos a incluir el problema térmico. El cuadrado estará a una temperatura superior a la del fluido por tanto el fluido actuará como refrigerante llevándose el calor que pudiese desprender el cuadrado. Se analizarán los perfiles de temperatura a distintos números de Prandtl.

El capítulo 6, recoge un estudio del fenómeno de inestabilidad térmica que se produce cuando una cavidad es calentada por su parte inferior en presencia de las fuerzas másicas. Esta inestabilidad produce la conocida como convección natural o convección de Rayleigh-Bénard. Este ejemplo es algo más complejo y por tanto se desarrollará un breve tratamiento teórico del problema. Se realizarán estudios en relación a las distintas celdas convectiva que se forman al variar la relación de aspecto y la influencia de los números adimensionales de nuestro problema en la aparición y vigorosidad de la convección obtenida. Estos análisis se han realizado sin hacer uso de la aproximación de Boussinesq, que es lo usual en la literatura. Esto permitirá ver el efecto de la compresibilidad en el régimen de convección natural.

3 MÉTODO DE MACCORMACK

3.1 Elección del método

Existen infinidad de métodos numéricos para resolver problemas en mecánica de fluidos, cada uno tiene sus ventajas y sus inconvenientes. Según R.W. MacCormack [28] todo principiante en CFD comienza utilizando métodos de diferencias finitas por la familiaridad con las ecuaciones diferenciales y después paulatinamente tienden a métodos basados en volúmenes finitos. Como el objetivo primordial de este documento es la aplicación de un método numérico a problemas de convección para que pueda ser utilizado por alumnos de asignaturas de mecánica de fluidos hemos creído más apropiado comenzar con un método de diferencias finitas. Existen muchos métodos de diferencias finitas como los métodos de Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff o MacCormack entre otros.

Hemos escogido el método de MacCormack por que además de proporcionar resultados más que satisfactorios para diversos problemas fluidodinámicos, es el más sencillo de programar y por tanto una muy buena elección para iniciarse en la mecánica de fluidos computacional.

También el Método de MacCormack admite una extensión a problemas tridimensionales bastante sencilla lo cual deja abierta una continuación de este trabajo para resolver problemas fluidodinámicos tridimensionales.

3.2 Fundamento Teórico

Este método consiste en dos etapas, una de predicción y otra correctora. La primera consiste en una aproximación de las derivadas espaciales mediante la diferencia progresiva y la segunda mediante la diferencia regresiva. Después se realiza una media aritmética entre ambas generando una aproximación de segundo orden equivalente a la diferencia central como se demostrará en el siguiente apartado. Las derivadas temporales se aproximan mediante la diferencia progresiva. Véase el siguiente esquema general:

$$\text{Ecuación: } \frac{\partial(U)}{\partial t} + \frac{\partial(F)}{\partial x} + \frac{\partial(G)}{\partial y} + S = 0 \quad (3-1)$$

$$\text{Predictor: } \widehat{U}_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \Delta t \left(\frac{F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n}{\Delta x} \right) - \Delta t \left(\frac{G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n}{\Delta y} \right) - \Delta t S \quad (3-2)$$

$$\text{Corrector: } U_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (\widehat{U}_{i,j}^{n+1} + U_{i,j}^n - \Delta t \left(\frac{F_{i,j}^{n+1} - F_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} \right) - \Delta t \left(\frac{G_{i,j}^{n+1} - G_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} \right) - \Delta t S) \quad (3-3)$$

Como se muestra en el esquema anterior la ecuación debe de transformarse en forma conservativa para la ejecución de este método. Se puede intercambiar el orden de las aproximaciones regresiva y progresiva en el esquema superior, es más, es recomendable intercambiarlos alternativamente para evitar direcciones espaciales preferentes. En la siguiente tabla se muestran las posibles combinaciones:

Tabla (3-1)

| Predictor | | Corrector | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Dirección-x | Dirección-y | Dirección-x | Dirección-y |
| DP | DP | DR | DR |
| DB | DR | DP | DP |
| DP | DR | DR | DP |
| DR | DP | DP | DR |

En muchos casos alternar estos ciclos de derivadas proporciona una mejora en la estabilidad numérica.

No existe una demostración para la convergencia del método en problemas bidimensionales, pero la siguiente condición se ha mostrado efectiva en la práctica como veremos más adelante:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + c \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}} \quad (3-4)$$

Se conoce como condición de Courant-Friedrich-Levy (CFL)

Es interesante notar que este método puede originar un falso estado Pseudo-transitorio al alcanzar la unidad de redondeo de la computadora y no terminar de converger debido a sus dos etapas.

Como se puede apreciar en la ecuación anterior, para la aplicación de este método es esencial que las ecuaciones estén en forma conservativa. A continuación se muestran las ecuaciones de Navier-Stokes completas para el problema bidimensional en esta forma:

$$\frac{\partial(U)}{\partial t} + \frac{\partial(F)}{\partial x} + \frac{\partial(G)}{\partial y} + S = 0 \quad (3-5)$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (E + p)u - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} + q_x \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ (E + p)v - u\tau_{xy} - v\tau_{yy} + q_y \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

El vector S, que no contiene derivadas espaciales ni temporales, se denomina término fuente y se reserva para las fuerzas externas que puedan aparecer en el fluido como pueden ser la gravedad o adición de calor. Por ejemplo:

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \\ \rho v g \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

Una vez calculados los valores de U se pueden ‘decodificar’ las variables primarias de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \rho &= U_1 \\ u &= \frac{U_2}{U_1} \\ v &= \frac{U_3}{U_1} \end{aligned} \quad (3-10)$$

$$e = \frac{U_4}{U_1} - \frac{\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 + \left(\frac{U_3}{U_1}\right)^2}{2} \quad (3-11)$$

Que junto a las ecuaciones de estado nos permitirán determinar todas las variables fluido-dinámicas. En este manual se considerará el caso de un gas perfecto:

$$\begin{aligned} e &= c_v T \\ p &= \rho R_g T \end{aligned} \quad (3-12)$$

3.3 Aproximación numérica en mallas equiespacias

El esquema de MacCormack consiste en utilizar una etapa de diferencia progresiva y otra etapa de diferencia regresiva y realizar una combinación entre ambas. Estas estimaciones son cada una de primer orden pero la combinación de ambas es equivalente a una diferencia central que cómo veremos a continuación es de Segundo orden.

Las aproximaciones más comunes para derivadas de primer orden son:

- Diferencia progresiva:

$$\frac{d\phi}{dx} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \quad (3-13)$$

- Diferencia regresiva:

$$\frac{d\phi}{dx} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \quad (3-14)$$

- Diferencia central:

$$\frac{d\phi}{dx} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (3-15)$$

Si se realiza una expansión en serie de Taylor de la función ϕ alrededor del punto x_i obtendremos:

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \Delta x \frac{d\phi}{dx_i} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2\phi}{dx^2_i} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3\phi}{dx^3_i} + \dots \quad (3-16)$$

$$\phi_i = \phi_i \quad (3-17)$$

$$\phi_{i+1} = \phi_i - \Delta x \frac{d\phi}{dx_i} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2\phi}{dx^2_i} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3\phi}{dx^3_i} + \dots \quad (3-18)$$

Substituyendo estos desarrollos en las aproximaciones anteriores tenemos que:

- Diferencia progresiva:

$$\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} = \frac{d\phi}{dx_i} + \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2\phi}{dx^2_i} + \dots \quad (3-19)$$

El error de truncamiento es de primer orden.

- Diferencia regresiva:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \quad (3-20)$$

$$\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} = \frac{d\phi}{dx_i} - \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2\phi}{dx^2_i} + \dots \quad (3-21)$$

El error de truncamiento es de primer orden.

- Diferencia central:

$$\frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{d\phi}{dx_i} - \frac{\Delta x^2}{6} \frac{d^3\phi}{dx^3_i} + \dots \quad (3-22)$$

El error de truncamiento de Segundo orden.

Es interesante comentar que si sumamos la diferencia progresiva y la diferencia regresiva y dividimos entre 2, que es esencialmente lo que hace el método de MacCormack, obtenemos la diferencia central que como se acaba de comprobar es de segundo orden.

Para actualizar las condiciones de contorno en algunos casos necesitaremos aplicar diferencias progresivas y regresivas de segundo orden:

- Diferencia progresiva:

$$\frac{d\phi}{dx_i} = -\frac{3\phi_i - 4\phi_{i+1} + \phi_{i+2}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3-23)$$

- Diferencia regresiva:

$$\frac{d\phi}{dx_i} = \frac{3\phi_i - 4\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3-24)$$

En algunos casos es necesario realizar aproximaciones de derivadas de orden superior, por ejemplo, para actualizar condiciones de contorno o para computar los términos correspondientes a efectos de viscosidad.

Las más relevantes son:

- Diferencia central:

$$\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (3-25)$$

- Diferencia progresiva:

$$\frac{\phi_{i+2} - 2\phi_{i+1} + \phi_i}{\Delta x^2} \quad (3-26)$$

- Diferencia regresiva:

$$\frac{\phi_i - 2\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{\Delta x^2} \quad (3-27)$$

Que con un procedimiento competente análogo al realizado en el apartado anterior se puede demostrar que la diferencia central es de segundo orden de precisión y las otras dos diferencias únicamente de primer orden.

En algunas ocasiones será preciso aproximar derivadas de segundo orden con precisión de orden dos lo que realizaremos de la siguiente forma:

- Diferencia progresiva:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2_i} = -\frac{2\phi_i - 5\phi_{i+1} + 4\phi_{i+2} - \phi_{i+3}}{\Delta x^2} \quad (3-28)$$

- Diferencia regresiva:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2_i} = \frac{2\phi_i - 5\phi_{i-1} + 4\phi_{i-2} - \phi_{i-3}}{\Delta x^2} \quad (3-29)$$

- Diferencia cruzada progresiva:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y_{i,j}} = -\frac{-(\phi_{i+2,j-1} - \phi_{i+2,j+1}) + 4(\phi_{i+1,j-1} - \phi_{i+1,j+1}) - 3(\phi_{i,j-1} - \phi_{i,j+1})}{4\Delta x\Delta y} + O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta x\Delta y) \quad (3-30)$$

- Diferencia cruzada regresiva:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y_{i,j}} = -\frac{-(\phi_{i-2,j+1} - \phi_{i-2,j-1}) + 4(\phi_{i-1,j+1} - \phi_{i-1,j-1}) - 3(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1})}{4\Delta x\Delta y} + O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta x\Delta y) \quad (3-31)$$

Con estas sencillas fórmulas podremos aplicar las condiciones de contorno y las aproximaciones que requieren las ecuaciones.

Las ecuaciones diferenciales que se muestran en el apartado anterior han de ser discretizadas para poder aplicar este método de diferencias finitas. Se ha escogido una malla de $(N_x + 1) \times (N_y + 1)$ nodos donde se evaluarán las magnitudes fluidodinámicas necesarias. La distancia entre cada nodo se denominará Δx en dirección x y Δy en dirección y.

Vamos a diferenciar entre nodos interiores y nodos frontera, los nodos interiores $(2: N_x) \times (2: N_y)$ que será donde se aplicarán y calcularán las magnitudes fluidodinámicas provenientes de las ecuaciones de Navier-Stokes y los nodos frontera donde será necesario imponer condiciones de contorno, como veremos más adelante.

Es fundamental aplicar las ecuaciones en forma compacta ya que la condición CFL nos limita mucho el intervalo temporal máximo que podemos escoger generando unos tiempos de computación considerablemente elevados. Por tanto la incorporación de bucles nos demoraría aún mas lo cual produciría tiempos de computación inabordables.

A continuación mostramos como se han de implementar las ecuaciones, utilizaremos la ecuación de continuidad a modo de ejemplo.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial\rho v}{\partial y} \quad (3-32)$$

Un aspecto clave que simplifica mucho la implementación es la definición de variables auxiliares sobre las cuales aplicamos directamente la derivada, por ejemplo, en la ecuación de continuidad estas variables serían ρu y ρv que pueden ser calculadas trivialmente a partir de la velocidad y la densidad.

En primer lugar vamos a considerar el término predictor, en esta etapa utilizábamos diferencia progresiva. Recordemos que tanto la densidad como el resto de las variables fluidodinámicas dependen del tiempo y de la posición en el espacio, por tanto los términos de la ecuación quedarían como sigue.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cong \frac{\rho_{i,j}^{t+1} - \rho_{i,j}^t}{\Delta t} \quad (3-33)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} \cong \frac{\rho u_{i+1,j}^t - \rho u_{i,j}^t}{\Delta x} \quad (3-34)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial y} \cong \frac{\rho v_{i,j+1}^t - \rho v_{i,j}^t}{\Delta y} \quad (3-35)$$

Quedando la ecuación:

$$\frac{\rho_{i,j}^{t+1} - \rho_{i,j}^t}{\Delta t} = - \frac{\rho u_{i+1,j}^t - \rho u_{i,j}^t}{\Delta x} - \frac{\rho v_{i,j+1}^t - \rho v_{i,j}^t}{\Delta y} \quad (3-36)$$

En la cual observamos que todos los valores son conocidos en el instante t siendo la única incognita la densidad en el instante $t+1$ que podemos calcular como:

$$\rho_{i,j}^{t+1} = \rho_{i,j}^t - \Delta t \frac{\rho u_{i+1,j}^t - \rho u_{i,j}^t}{\Delta x} - \Delta t \frac{\rho v_{i,j+1}^t - \rho v_{i,j}^t}{\Delta y} \quad (3-37)$$

Que en forma matricial se puede expresar como:

$$\begin{aligned} & \rho(2: N_x, 2: N_y)^{t+1} \\ &= \rho(2: N_x, 2: N_y)^t - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\rho u(3: N_x + 1, 2: N_x)^t - \rho u(2: N_x, 2: N_x)^t) \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\rho v(2: N_x, 3: N_x + 1)^t - \rho v(2: N_x, 2: N_x)^t) \end{aligned} \quad (3-38)$$

A este valor lo renombraremos como $\overline{\rho_{i,j}^{t+1}}$ por ser el término predictor. Ahora realizaremos la misma operación pero para el término corrector, en el que recordemos que se aproximaban sus términos mediante la diferencia regresiva.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cong \frac{\rho_{i,j}^{t+1} - \rho_{i,j}^{\overline{t+1}}}{\Delta t} \quad (3-39)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} \cong \frac{\rho u_{i,j}^{\bar{t}+1} - \rho u_{i-1,j}^{\bar{t}+1}}{\Delta x} \quad (3-40)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial y} \cong \frac{\rho v_{i,j}^{\bar{t}+1} - \rho v_{i-1,j}^{\bar{t}+1}}{\Delta y} \quad (3-41)$$

Quedando la ecuación:

$$\frac{\rho_{i,j}^{t+1} - \rho_{i,j}^{\bar{t}+1}}{\Delta t} = - \frac{\rho u_{i,j}^{\bar{t}+1} - \rho u_{i-1,j}^{\bar{t}+1}}{\Delta x} - \frac{\rho v_{i,j}^{\bar{t}+1} - \rho v_{i-1,j}^{\bar{t}+1}}{\Delta y} \quad (3-42)$$

En la cual observamos que todos los valores son conocidos en el instante $\bar{t} + 1$ siendo la única incógnita la densidad en el instante $t+1$ que podemos calcular como:

$$\rho_{i,j}^{t+1} = \rho_{i,j}^{\bar{t}+1} - \Delta t \frac{\rho u_{i,j}^{\bar{t}+1} - \rho u_{i-1,j}^{\bar{t}+1}}{\Delta x} - \Delta t \frac{\rho v_{i,j}^{\bar{t}+1} - \rho v_{i-1,j}^{\bar{t}+1}}{\Delta y} \quad (3-43)$$

A este valor de la densidad lo renombraremos como $\rho_{i,j}^{t+1*}$ por ser el corrector.

$$\rho_{i,j}^{t+1} = \frac{\rho_{i,j}^{t+1*} + \rho_{i,j}^t}{2} \quad (3-44)$$

Que en forma matricial se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \rho(2: N_x, 2: N_y)^{t+1} &= 0.5 \left(\rho(2: N_x, 2: N_y)^t + \rho(2: N_x, 2: N_y)^{\bar{t}+1} \right. \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\rho u(2: N_x, 2: N_x)^{\bar{t}+1} - \rho u(1: N_x - 1, 2: N_x)^{\bar{t}+1}) \\ &\quad \left. - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\rho v(2: N_x, 2: N_x)^{\bar{t}+1} - \rho v(2: N_x, 1: N_x - 1)^{\bar{t}+1}) \right) \end{aligned} \quad (3-45)$$

Aquí únicamente se ha mostrado el desarrollo de la ecuación de continuidad por ser común en todos los ejemplos, en cada aplicación encontrarán un código MATLAB con todas las ecuaciones implementadas. Antes de comenzar problemas más complejos es conveniente ver un ejemplo unidimensional para captar la esencia del método.

3.3 Aplicación: Ecuación lineal de onda

Vamos a aplicar el método de MacCormack a la ecuación lineal de onda de primer orden para ilustrar el funcionamiento del método.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad c > 0 \quad (3-46)$$

$$u(x, 0) = \sin(x) \quad (3-47)$$

Problema para el cual se conoce la siguiente solución analítica:

$$u(x, t) = \sin(x - ct) \quad (3-48)$$

Observamos como la ecuación se puede transformar trivialmente a forma conservativa:

$$\frac{\partial(u)}{\partial t} + \frac{\partial(cu)}{\partial x} = 0 \quad c > 0 \quad (3-49)$$

Aplicamos el esquema de MacCormack:

1. Etapa de predicción (Diferencia Progresiva).

$$\widehat{u}_i^{n+1} = u_i^n - \frac{cDt}{Dx} (u_{i+1}^n - u_i^n) \quad i = 2: nx(\text{nodos interiores}) \quad (3-50)$$

2. Condiciones de contorno.(Diferencia progresiva)

$$\widehat{u}_1^{n+1} = u_1^n - \frac{cDt}{2Dx} (-u_3^n + 4u_2^n - 3u_1^n) \quad (3-51)$$

$$\widehat{u}_{nx+1}^{n+1} = u_{nx+1}^n + \frac{cDt}{2Dx} (-u_{nx-1}^n + 4u_{nx}^n - 3u_{nx+1}^n) \quad (3-52)$$

3. Etapa de corrección (Diferencia regresiva).

$$2u_i^{n+1} = \widehat{u}_i^{n+1} + u_i^n - \frac{cDt}{Dx} (\widehat{u}_i^{n+1} - \widehat{u}_{i-1}^{n+1}) \quad i = 2: nx(\text{nodos interiores}) \quad (3-53)$$

4. Condiciones de contorno.

$$2u_1^{n+1} = u_1^n + \widehat{u}_1^{n+1} - \frac{cDt}{2Dx} (-\widehat{u}_3^{n+1} + 4\widehat{u}_2^{n+1} - 3\widehat{u}_1^{n+1}) \quad (3-54)$$

$$2u_{nx+1}^{n+1} = u_{nx+1}^n + \widehat{u}_{nx+1}^{n+1} + \frac{cDt}{2Dx} (-\widehat{u}_{nx-1}^{n+1} + 4\widehat{u}_{nx}^{n+1} - 3\widehat{u}_{nx+1}^{n+1}) \quad (3-55)$$

5. Repetimos el proceso hasta alcanzar el tiempo deseado.

Es importante notar que la elección de la partición temporal y espacial no es trivial ya que se verá comprometida la estabilidad del método. Antes hemos mostrado una condición aproximada de estabilidad para un problema bidimensional. En el caso unidimensional existe una condición exacta (CFL):

$$\Delta t \leq \Delta x \left| \frac{dU}{dF} \right| \quad (3-56)$$

En nuestro caso no es difícil comprobar que la condición se trata:

$$\Delta t \leq \frac{1}{c} \Delta x \quad (3-57)$$

Se suele incorporar un factor de seguridad $\sigma = 0.9$ de forma que la condición quedaría:

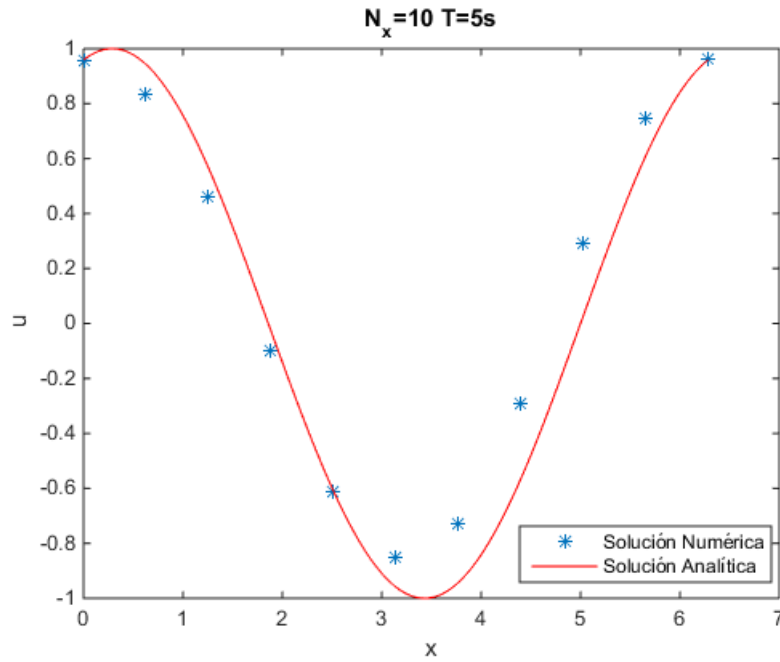
$$\Delta t \leq \frac{0.9}{c} \Delta x \quad (3-58)$$

A continuación, mostramos los resultados correspondientes a $c = 1$, $\Delta t = \Delta t_{max}$ y $T = 5s$.

Refiriendonos con Δt_{max} al incremento de tiempo máximo que permite que el método sea estable y factor del tiempo final en este caso 5s. En el primer caso analizado $N_x = 10$ como estamos resolviendo entre 0 y 2π tendremos un $D_x = \frac{2\pi}{N_x} = 0.628$

Por tanto $\Delta t_{max} = 0.5654$ escogeremos por tanto $\Delta t_{max} = 0.5$

1. $N_x = 10$

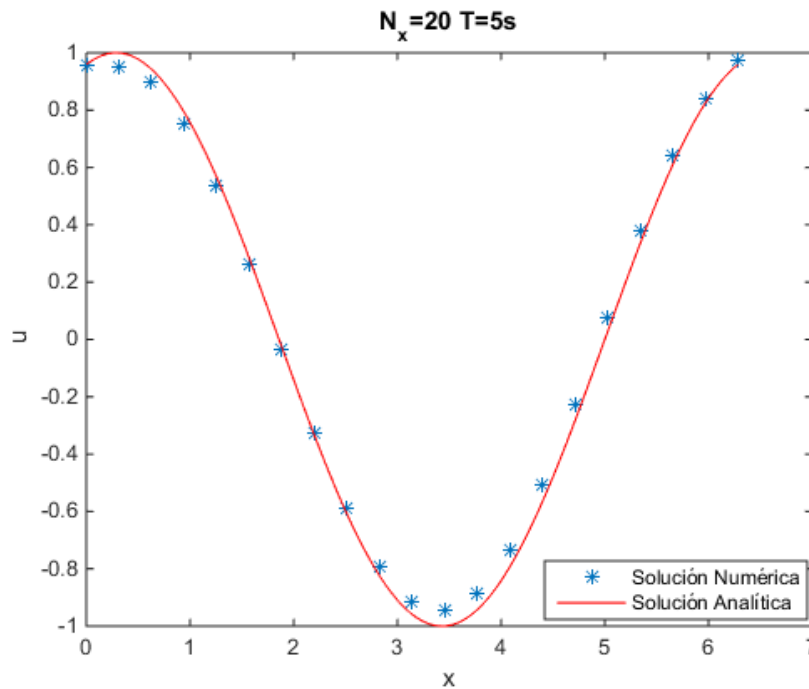


Figura(3-1)_ $N_x = 10$

2. $N_x = 20$

En este caso $N_x = 20$ como estamos resolviendo entre 0 y 2π tendremos un $D_x = \frac{2\pi}{N_x} = 0.314$

Por tanto $\Delta t_{max} = 0.2827$ escogeremos por tanto $\Delta t_{max} = 0.25$

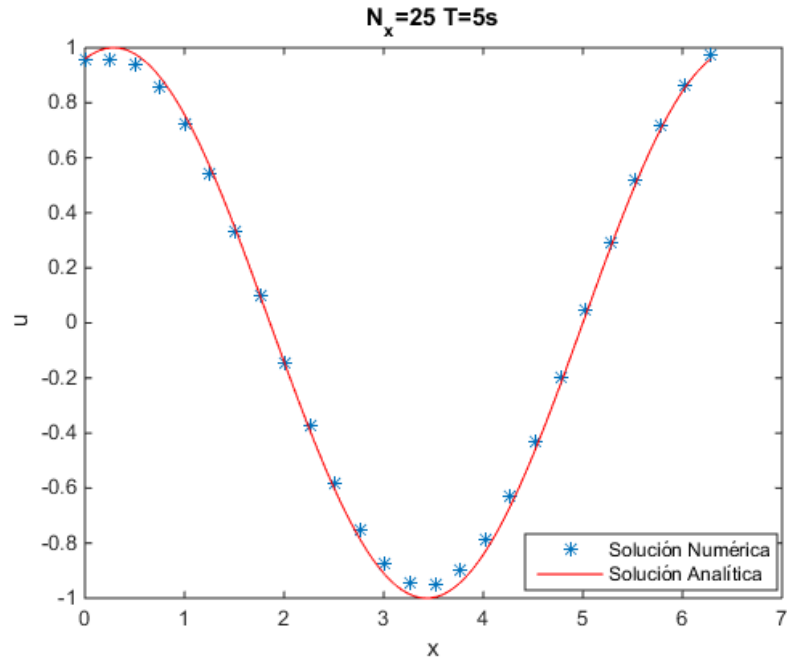


Figura(3-2)_ $N_x = 20$

3. $N_x = 25$

En este caso $N_x = 25$ como estamos resolviendo entre 0 y 2π tendremos un $D_x = \frac{2\pi}{N_x} = 0.2513$

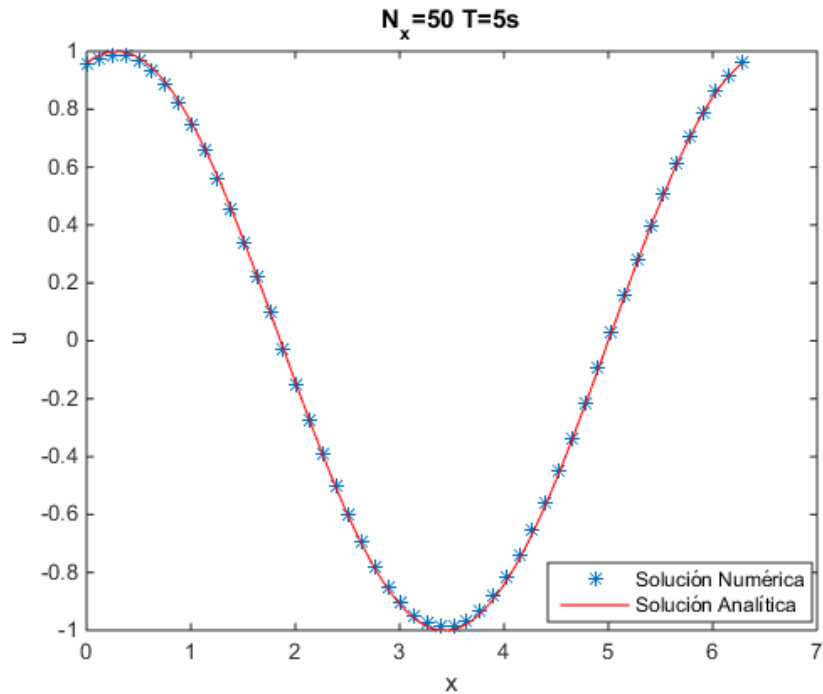
Por tanto $\Delta t_{max} = 0.2262$ escogeremos por tanto $\Delta t_{max} = 0.2$



Figura(3-3)_ $N_x = 25$

4. $N_x = 50$

En este último caso $N_x = 50$ como estamos resolviendo entre 0 y 2π tendremos un $D_x = \frac{2\pi}{N_x} = 0.1257$
 Por tanto $\Delta t_{max} = 0.1131$ escogeremos por tanto $\Delta t_{max} = 0.1$



Figura(3-4)_ $N_x = 50$

Se ve observa claramente como al aumentar el número de puntos la solución numérica converge cada vez más a la real. No obstante hay que tener en cuenta que aumentar el número de punto aumenta el tiempo de computación considerablemente ya que además de aumentar el tamaño de las matrices la condición CFL se

vuelve más restrictiva al refinar la malla por lo que se requieren más iteraciones para llegar a un mismo tiempo.

Al ser un método de segundo orden en el tiempo y en el espacio debería de ser capaz de aproximar una recta sin problema empezando a tener dificultades con las fórmulas de grado tres por tanto vamos a resolver otra vez la ecuación de onda para comprobar esto. Los problemas de contorno a resolver serán:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad c > 0 \quad (3-59)$$

$$u(x, 0) = x \quad (3-60)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad c > 0 \quad (3-61)$$

$$u(x, 0) = x^3 \quad (3-62)$$

Cuyas soluciones son:

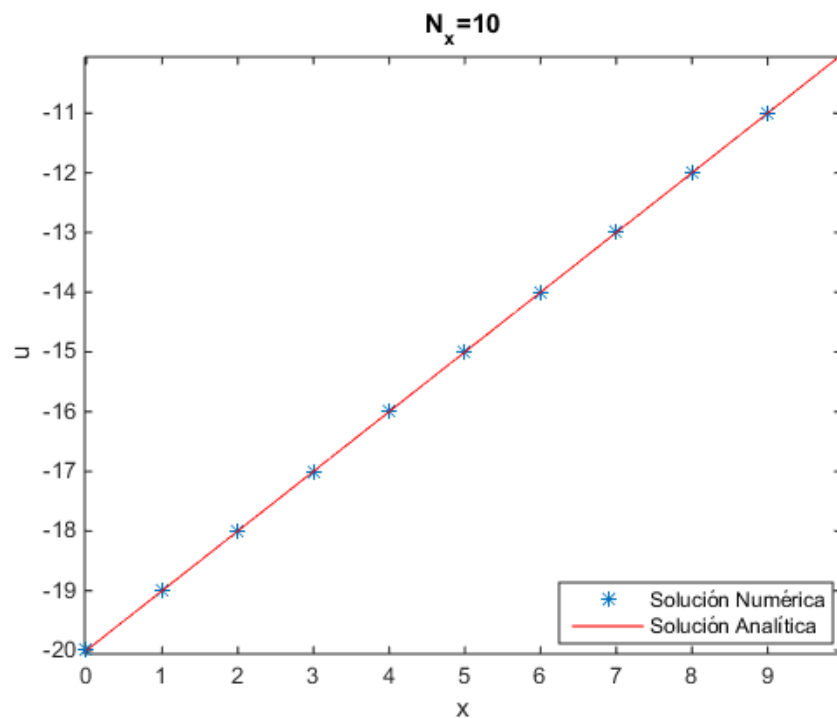
$$u(x, t) = x - t \quad (3-63)$$

$$u(x, t) = (x - t)^3 \quad (3-64)$$

Respectivamente.

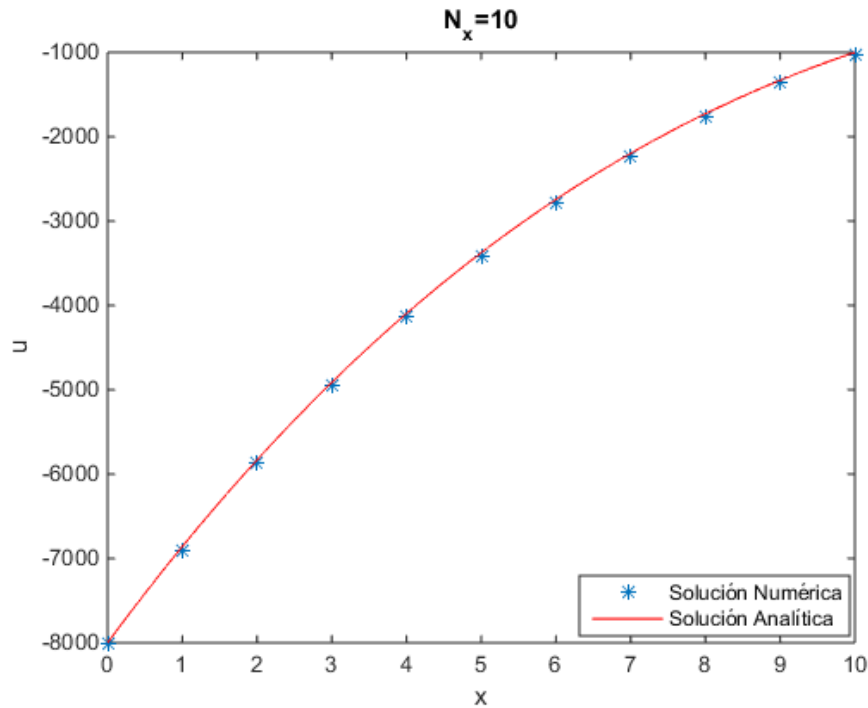
Obteniendo los siguientes resultados en el intervalo [0,10] para una partición de 10 intervalos y un tiempo T=50s.

1. Recta.



Figura(3-5)

2. Cúbica.



Figura(3-6)

Se observa como los puntos de la solución numérica correspondiente a la recta están perfectamente solapados con la solución analítica mientras que en la cúbica comienzan a aparecer ligeras discrepancias, esto se debe al grado de precisión del método. Recordemos el apartado anterior, donde se explicaban las aproximaciones utilizadas que en este caso corresponderían a diferencia progresiva y diferencia regresiva. Si se calcula la pendiente de una recta con esas diferencias la solución ya no sería una aproximación, ya que el error será cero.

Quizás es más difícil de observar, pero lo mismo ocurre con una parábola, en el apartado anterior se dedujo que un paso de diferencia progresiva más un paso de diferencia regresiva y hacer la media se corresponde con la diferencia central. La aproximación de diferencia central aplicada a una parábola también aproxima la pendiente de esta con error nulo.

Los problemas resueltos en este apartado no tienden a una solución estacionaria, siempre varían en el tiempo por tanto para obtener una representación precisa de la solución el incremento de tiempo debe ser pequeño lo que conlleva tiempos de computación elevados, en los próximos apartados se considerarán problemas que tienden a una solución estacionaria, o no estacionaria pero que no se requiera excesiva precisión en el tiempo y por tanto podamos utilizar el máximo incremento temporal. Es para estos casos donde el método de MacCormack es eficaz.

En la siguiente página mostramos el código MATLAB utilizado para la resolución de estos problemas.

```

%=====ECUACIÓN DE ONDA=====
%LAS VARIABLES P_ SE CORRESPONDEN A LOS TÉRMINOS DEL PREDICTOR%
%=====
close all;clear all;

nx=0;%NÚMERO DE INTERVALOS DE LA PARTICIÓN
T=5;%%TIEMPO TRANSCURRIDO
c=1;%%CONSTANTE DE LA ECUACIÓN DE ONDA
Dx=2*pi/nx;%%NORMA DE LA PARTICIÓN ESPACIAL
Dt=0.1;%1/c*Dx*0.9;%%NORMA DE LA PARTICIÓN TEMPORAL

u(1:nx+1)=sin(0:Dx:2*pi);%CONDICIÓN INICIAL
P_u(1:nx+1)=sin(0:Dx:2*pi);%CONDICIÓN INICIAL

%=====BUCLE TEMPORAL=====
for t=1:T/Dt

P_u(2:nx)=u(2:nx)-(Dt/Dx)*c*(u(3:nx+1)-u(2:nx));%%PREDICTOR

P_u(1)=u(1)-(Dt/2/Dx)*c*(-P_u(3)+4*P_u(2)-3*P_u(1));%%C.C x=0

P_u(nx+1)=u(nx+1)+(Dt/2/Dx)*c*(-u(nx-1)+4*u(nx)-3*u(nx+1));%%C.C x=2PI

u(2:nx)=(u(2:nx)+P_u(2:nx)-(Dt/Dx)*c*(P_u(2:nx)-P_u(1:nx-1)))*0.5;%%CORRECTOR

u(1)=-sin(t*Dt);%%C.C x=0

u(nx+1)=(u(nx+1)+P_u(nx+1)+(Dt/2/Dx)*c*(-P_u(nx-1)+4*P_u(nx)-3*P_u(nx+1)))*0.5;%%C.C x=2PI

end

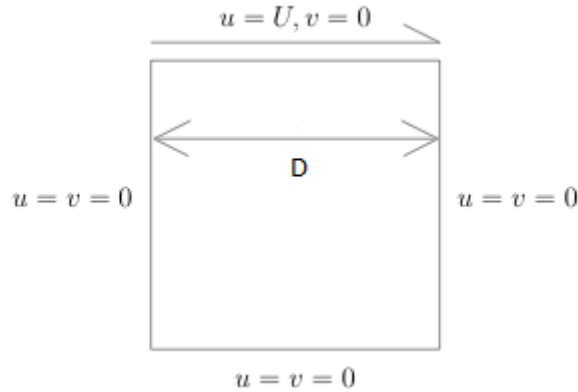
plot(linspace(0,2*pi,length(u)),u,'*')%%PLOT SOLUCIÓN NUMÉRICA
hold on
p=sin(-t*Dt*c:2*pi/1000:2*pi-t*Dt*c);%%SOLUCIÓN ANALÍTICA
plot((linspace(0,2*pi,length(p))),p,'r');%%PLOT SOLUCIÓN ANALÍTICA
legend('Solución Numérica','Solución Analítica')
title('N_x=50 T=5s')
xlabel('x')
ylabel('u')

%=====

```


3.4 Aplicación: Cavity cuadrada, con la tapadera desplazándose a velocidad constante.

Una vez analizado y comprendido el problema unidimensional vamos a extender el método a dos dimensiones. El problema que se muestra a continuación viene siendo usado como validación de códigos de CFD ya que posee una geometría simple, las condiciones de contorno también lo son y lo más importante, ha sido reproducido por varios autores y existe bibliografía con la que comparar.



Figura(3-7)

A continuación, se muestran las ecuaciones de Navier-Stokes en las que se han suprimido los términos correspondientes a las fuerzas másicas debido a que estas son despreciables frente a las fuerzas de inercia para los casos analizados:

$$Fr^2 = \frac{U^2}{gD} \gg 1 \quad (3-65)$$

También vamos a considerar que como el fluido se encuentra inicialmente a temperatura constante y todas las paredes se encuentran a esa temperatura, las variaciones de temperatura serán muy pequeñas si las velocidades son pequeñas, como veremos a continuación pudiendo considerar el caso isoterma, realizando estimaciones de órdenes de magnitud en la ecuación de la entalpía:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \vec{v} \cdot \nabla T = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \bar{\tau}' : \nabla \vec{v} \quad (3-66)$$

Si se introducen los siguientes números adimensionales:

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad M = \frac{u}{\gamma R_g T_0} \quad (3-67)$$

Se obtiene:

- Incrementos de temperatura debido a variaciones de presión.

$$\frac{\Delta T_p}{T_0} \sim \frac{U^2}{C_p T_0} \sim M^2 \quad (3-68)$$

Donde se ha tenido en cuenta que:

$$\Delta p \sim \frac{U^2}{D}$$

- Incrementos de temperatura debido a conducción de calor.

$$\frac{\Delta T_q}{T_0} \sim \frac{T_1 - T_2}{T_0 Pr Re} \quad (3-69)$$

- Incrementos de temperatura debido a disipación viscosa.

$$\frac{\Delta T_{dis}}{T_0} \sim \frac{U^2}{C_p T_0 Re} \sim \frac{M^2}{Re} \quad (3-70)$$

En estas tres expresiones apreciamos como si el número de Mach es pequeño, las temperaturas de las paredes son aproximadamente iguales y el número de Reynolds no es pequeño, la aproximación por el caso isoterma es muy adecuada.

Por tanto, las ecuaciones de Navier-Stokes bidimensionales se pueden expresar como:

$$\text{Continuidad: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3-71)$$

$$\text{Cantidad de movimiento } x: \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho u^2 + p - \frac{4\mu}{3} \frac{du}{dx} - \frac{\mu}{3} \frac{dv}{dy}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho uv - \mu \frac{du}{dy}\right)}{\partial y} = 0 \quad (3-72)$$

$$\text{Cantidad de movimiento } y: \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho uv - \mu \frac{dv}{dx}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho v^2 + p - \frac{4\mu}{3} \frac{dv}{dy} - \frac{\mu}{3} \frac{du}{dx}\right)}{\partial y} = 0 \quad (3-73)$$

$$\text{ecuación de estado: } p = R_g T_0 \rho \quad (3-74)$$

Siendo c la velocidad del sonido en el medio.

Como hemos visto anteriormente a bajas velocidades la temperatura debería ser aproximadamente constante por tanto estas ecuaciones aproximan el límite isoterma.

Es conveniente introducir las siguientes variables adimensionales:

$$x^* = \frac{x}{D}, y^* = \frac{y}{D}, u^* = \frac{u}{U}, v^* = \frac{v}{U}, t^* = \frac{U}{D}t, \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, p^* = \frac{p}{\rho_0 U^2} \quad (3-75)$$

Siendo D un lado de la cavidad, U la velocidad de la tapa y ρ_0 una densidad de referencia.

A partir de ahora se suprimirá el asterisco de las variables adimensionales por simplicidad. Las ecuaciones resultantes son:

$$\text{Continuidad: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3-76)$$

$$\text{Cantidad de movimiento } x: \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho u^2 + p - \frac{4}{3Re} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3Re} \frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial x} + \frac{d\left(\rho uv - \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} = 0 \quad (3-77)$$

$$\text{Cantidad de movimiento } y: \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{d\left(\rho uv - \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho v^2 + p - \frac{4}{3Re} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3Re} \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = 0 \quad (3-78)$$

$$\text{ecuación de estado: } p = \frac{\rho}{\gamma M^2} \quad (3-79)$$

Sujeto a las condiciones de contorno:

$$u(0, y) = 0 \quad v(0, y) = 0 \quad u(1, y) = 0 \quad v(1, y) = 0 \quad (3-80)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad v(x, 0) = 0 \quad u(x, 1) = 1 \quad v(x, 1) = 0 \quad (3-81)$$

Un factor importante a la hora de implementar satisfactoriamente el método es imponer correctamente las condiciones de contorno en densidad o equivalentemente en presión. Vamos a realizar esto utilizando la ecuación de continuidad:

$$\text{Tapa inferior: } \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \quad (3-82)$$

$$\text{Tapa superior: } \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \quad (3-83)$$

$$\text{Tapa izquierda: } \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \quad (3-84)$$

$$\text{Tapa derecha: } \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \quad (3-85)$$

Las ecuaciones de Navier Stokes se encuentran discretizadas en el apartado 2, únicamente tendremos que despreciar las fuerzas másicas y al considerar el caso isoterma podremos obviar la ecuación de la energía. Vamos a analizar en más detalle la discretización de las condiciones de contorno en densidad que son algo más complejas.

A partir de estas expresiones podemos calcular la densidad en el contorno de la caja mediante las siguientes aproximaciones numéricas que vimos en el segundo apartado. Para la derivada temporal podremos utilizar la diferencia progresiva.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cong \frac{\rho_{i,j}^{t+1} - \rho_{i,j}^t}{\Delta t} \quad (3-86)$$

Sin embargo no se puede utilizar la diferencia progresiva/regresiva indistintamente para una misma etapa ya que al estar en la frontera estas diferencias requerirían nodos fuera del dominio computacional considerado, en otras palabras excederíamos la dimensión de la matriz. Puesto que no se puede seguir el guión general del método, el cual le confiere una precisión de segundo orden en el tiempo y en el espacio, y queremos mantener dicha precisión debemos aplicar aproximaciones de segundo orden. La diferencia central no se puede utilizar ya que excederíamos nuevamente la dimensión de la matriz por tanto elegiremos la diferencia progresiva o regresiva de tal forma que siempre nos mantengamos dentro del dominio computacional. Los valores de la densidad en las esquinas se corresponderán con los valores extremos de las tapas laterales lo cual nos permite aproximar la derivada espacial de la densidad que aparece en la tapa superior mediante la diferencia central.

$$\text{Tapa izquierda: } \frac{\partial \rho u}{\partial x}_{i,j} \cong \frac{3\rho u_{i,j} - 4\rho u_{i+1,j} + \rho u_{i+2,j}}{2\Delta x} \quad (3-87)$$

$$\text{Tapa derecha: } \frac{\partial \rho u}{\partial x}_{i,j} \cong -\frac{3\rho u_{i,j} - 4\rho u_{i-1,j} + \rho u_{i-2,j}}{2\Delta x} \quad (3-88)$$

$$\text{Tapa inferior: } \frac{\partial \rho v}{\partial y}_{i,j} \cong \frac{3\rho v_{i,j} - 4\rho v_{i,j+1} + \rho v_{i,j+2}}{2\Delta x} \quad (3-89)$$

$$\text{Tapa superior: } \frac{\partial \rho v}{\partial y}_{i,j} \cong -\frac{3\rho v_{i,j} - 4\rho v_{i,j-1} + \rho v_{i,j-2}}{2\Delta x} \quad (3-90)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}_{i,j} \cong \frac{\rho_{i+1,j} - \rho_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (3-91)$$

Con estas expresiones no es difícil calcular los valores de la densidad en el instante $\bar{t} + 1$ (correspondiente al predictor) en la frontera del dominio.

$$\text{Tapa izquierda: } \rho_{i,j}^{\bar{t}+1} = \rho_{i,j}^t - \Delta t \frac{3\rho u_{i,j}^t - 4\rho u_{i+1,j}^t + \rho u_{i+2,j}^t}{2\Delta x} \quad (3-92)$$

$$\text{Tapa derecha: } \rho_{i,j}^{\bar{t}+1} = \rho_{i,j}^t + \Delta t \frac{3\rho u_{i,j} - 4\rho u_{i-1,j} + \rho u_{i-2,j}}{2\Delta x} \quad (3-93)$$

$$\text{Tapa inferior: } \rho_{i,j}^{\bar{t}+1} = \rho_{i,j}^t - \Delta t \frac{3\rho v_{i,j} - 4\rho v_{i,j+1} + \rho v_{i,j+2}}{2\Delta x} \quad (3-94)$$

$$\begin{aligned} \text{Tapa superior: } \rho_{i,j}^{\bar{t}+1} \\ = \rho_{i,j}^t + \Delta t \frac{3\rho v_{i,j} - 4\rho v_{i,j-1} + \rho v_{i,j-2}}{2\Delta x} - \frac{\rho_{i+1,j} - \rho_{i-1,j}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (3-95)$$

Quedando las densidades en el instante $t+1$ (corrector) como:

$$\text{Tapa izquierda: } \rho_{i,j}^{t+1} = 0.5 \left(\rho_{i,j}^t + \rho_{i,j}^{\bar{t}+1} - \Delta t \frac{3\rho u_{i,j}^{\bar{t}+1} - 4\rho u_{i+1,j}^{\bar{t}+1} + \rho u_{i+2,j}^{\bar{t}+1}}{2\Delta x} \right) \quad (3-96)$$

$$\text{Tapa derecha: } \rho_{i,j}^{t+1} = 0.5 \left(\rho_{i,j}^t + \rho_{i,j}^{\bar{t}+1} + \Delta t \frac{3\rho u_{i,j}^{\bar{t}+1} - 4\rho u_{i+1,j}^{\bar{t}+1} + \rho u_{i+2,j}^{\bar{t}+1}}{2\Delta x} \right) \quad (3-97)$$

$$\text{Tapa inferior: } \rho_{i,j}^{t+1} = 0.5 \left(\rho_{i,j}^t + \rho_{i,j}^{\bar{t}+1} - \Delta t \frac{3\rho v_{i,j}^{\bar{t}+1} - 4\rho v_{i+1,j}^{\bar{t}+1} + \rho v_{i+2,j}^{\bar{t}+1}}{2\Delta x} \right) \quad (3-98)$$

Tapa superior:

$$\rho_{i,j}^{t+1} = 0.5 \left(\rho_{i,j}^t + \rho_{i,j}^{\bar{t}+1} + \Delta t \frac{3\rho v_{i,j}^{\bar{t}+1} - 4\rho v_{i+1,j}^{\bar{t}+1} + \rho v_{i+2,j}^{\bar{t}+1}}{2\Delta x} - \frac{\rho_{i+1,j}^{\bar{t}+1} - \rho_{i-1,j}^{\bar{t}+1}}{2\Delta x} \right) \quad (3-99)$$

Aplicamos el esquema de MacCormack:

1. Etapa de predicción (Diferencia Progresiva)

En esta fase calculamos las variables $\rho^{\bar{t}+1}$, $\rho u^{\bar{t}+1}$ y $\rho v^{\bar{t}+1}$ mediante las ecuaciones discretizadas de continuidad y de cantidad de movimiento.

2. Decodificación de variables

Se calcula u y v a partir de las variables que obtenemos de las ecuaciones.

3. Condiciones de contorno.

Ahora aplicaremos las condiciones de contorno en velocidad y en densidad, como se acaba de explicar.

4. Actualización de variables

Es importante actualizar nuestras variables auxiliares

$\rho u^{\bar{t}+1}$, $\rho v^{\bar{t}+1}$, $\rho u^{2\bar{t}+1}$, $\rho v^{2\bar{t}+1}$ y $\rho uv^{\bar{t}+1}$ después de aplicar las condiciones de contorno.

5. Etapa de corrección (Diferencia regresiva).

En esta fase calculamos las variables ρ^{t+1} , ρu^{t+1} y ρv^{t+1} mediante las ecuaciones discretizadas de continuidad y de cantidad de movimiento.

6. Decodificación de variables

Se calcula u y v a partir de las variables que obtenemos de las ecuaciones.

7. Condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno de esta etapa se realizan siguiendo el esquema anterior

8. Actualización de variables

Es importante actualizar nuestras variables auxiliares

ρu^{t+1} , ρv^{t+1} , ρu^{2t+1} , ρv^{2t+1} y ρuv^{t+1} después de aplicar las condiciones de contorno.

9. Repetimos el proceso hasta alcanzar el tiempo deseado.

Un aspecto que aun no hemos analizado es el incremento de tiempo que vamos a seleccionar. Hemos comentado en el primer apartado que, a pesar de no existir una demostración de una condición de estabilidad para problemas multidimensionales, la condición de Courant-Friedrich-Levy funciona considerablemente bien en la práctica, la recordamos:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + c \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}} \quad (3-100)$$

Incluso mejor, para problemas que conciernen a la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes, Tannehill et al., nos propone la siguiente fórmula empírica.

$$\Delta t^* \leq \frac{\sigma \Delta t}{1 + 2/Re_\Delta} \quad (3-101)$$

Donde Re_Δ es el número de Reynolds basado en el mínimo de Δx y Δy y $\sigma = 0.9$, es un factor de seguridad. Observamos que para valores elevados del Número de Reynolds basado en Δ las condiciones son similares, siendo la segunda algo más restrictiva.

Volviendo a la condición CFL observamos que la podemos simplificar si tenemos en cuenta que Δx ha sido elegido igual a Δy y que el valor máximo de u y v será del mismo orden de magnitud.

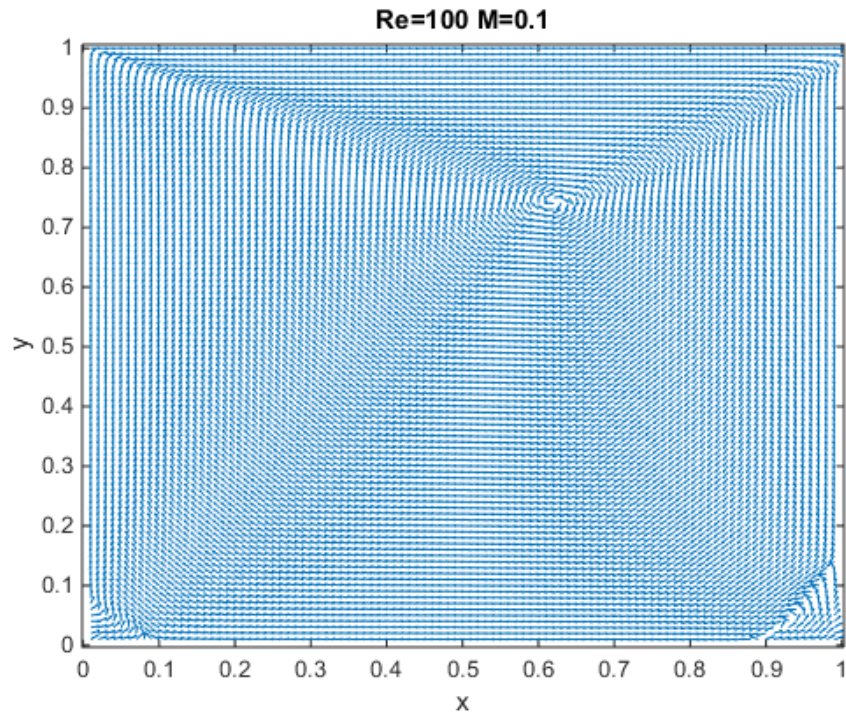
$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2|u| + c\sqrt{2}} \quad (3-102)$$

Que observamos que es más exigente que la que obteníamos en una variable.

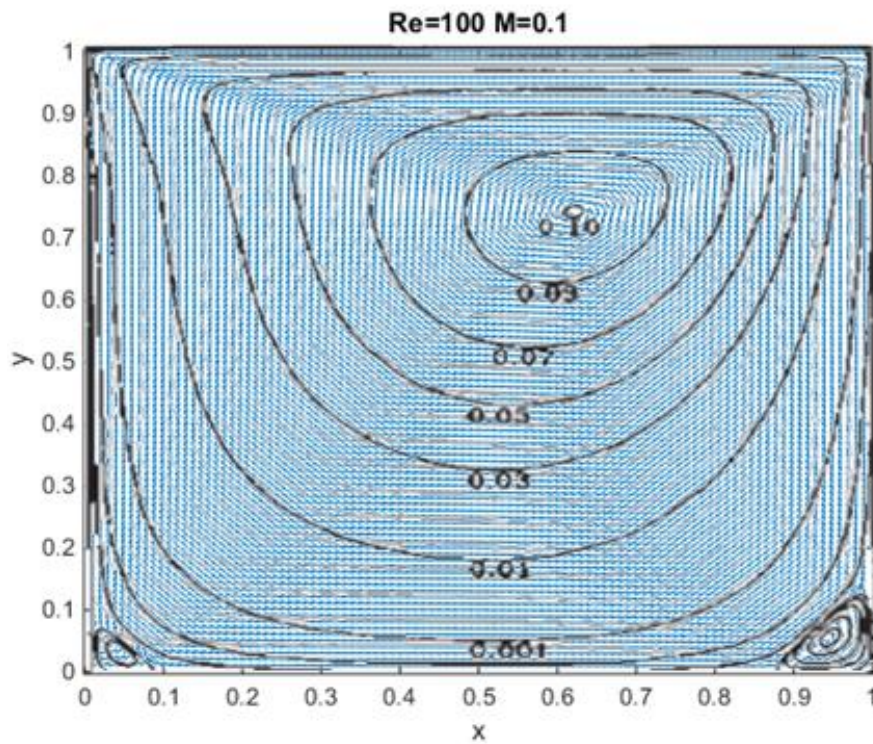
$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|u| + c} \quad (3-103)$$

A modo de anotación y por si se quisiese optimizar el código R.W. MacCormack hizo una revisión de su método en el que divide su esquema en etapas unidimensionales, lo que como acabamos de ver reduce las restricciones de tiempo y mejora aún más si contemplamos mallas en las que Δx y Δy sean muy diferentes ya que se podría avanzar en cada dirección con el incremento de tiempo máximo permitido. No obstante, vamos a aplicar el esquema original por su simplicidad y buenos resultados.

Vamos a analizar los casos de $Re = 100$ y $Re = 400$ para $M = 0.05$ para mantenernos siempre en el límite incompresible.

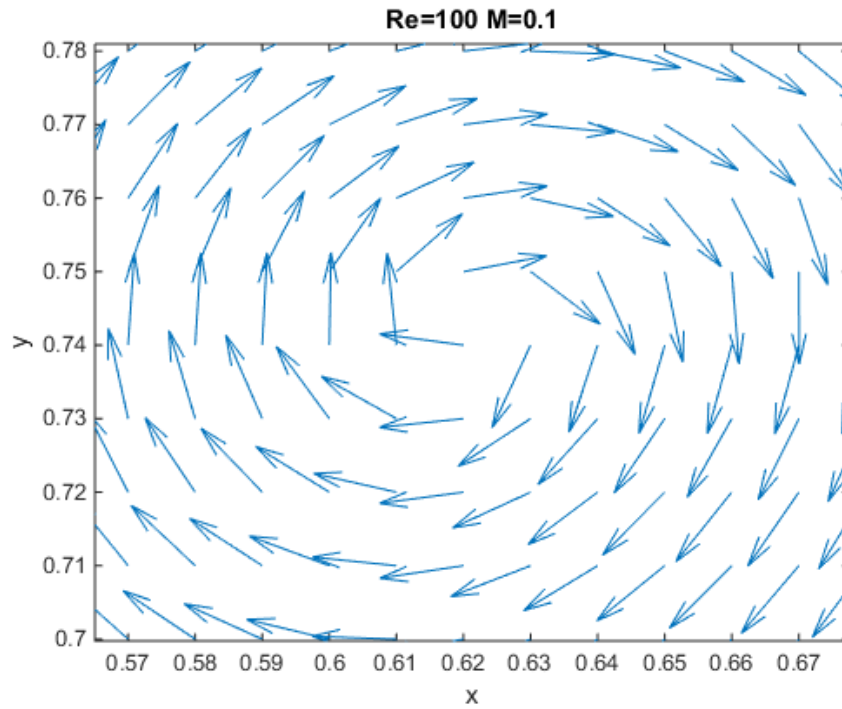


Figura(3-8)



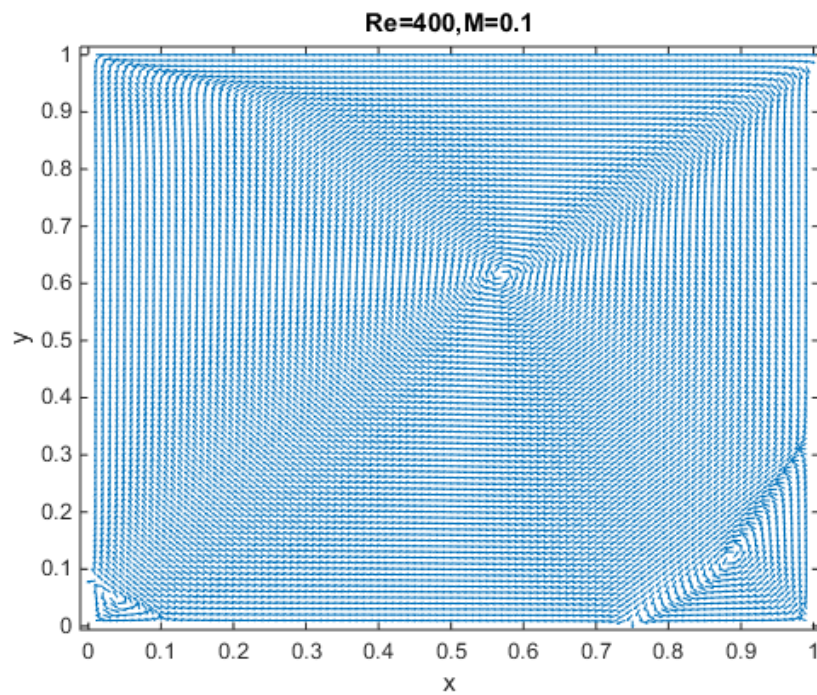
Figura(3-9)

Podemos observar como la tapa 'arrastra' al fluido generando la rotación y formando el remolino tan característico. Las líneas de corriente más oscuras corresponden a los resultados de Hou y el campo vectorial de velocidades gris claro al obtenido por Kundu, Cohen & Dowling.

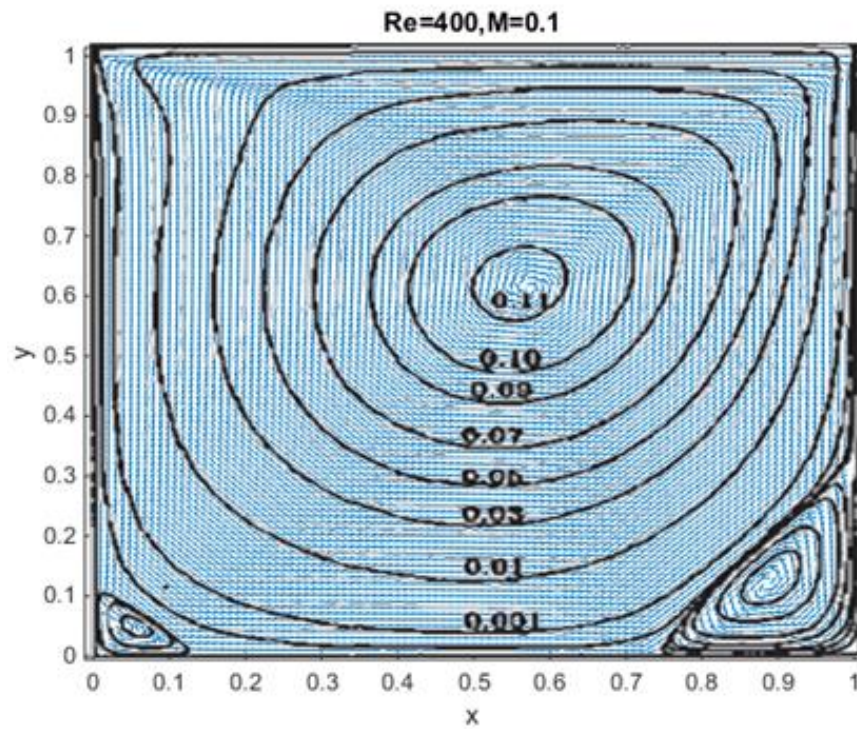


Figura(3-10)

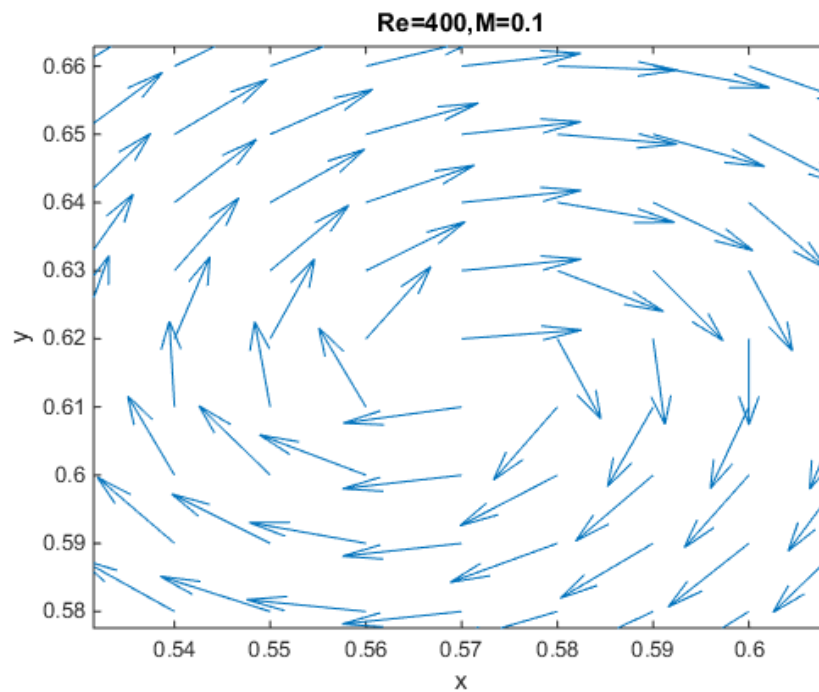
En el detalle de la imagen se aprecia como el centro de la celda convectiva se encuentra en [0,62 0,74] que son muy próximos a los valores obtenidos por Hou et al.(1995) ,realizados mediante el método latticeBoltzman, que acordaban que el centro se encontraba en [0,6196 0,7373].



Figura(3-11)



Figura(3-12)

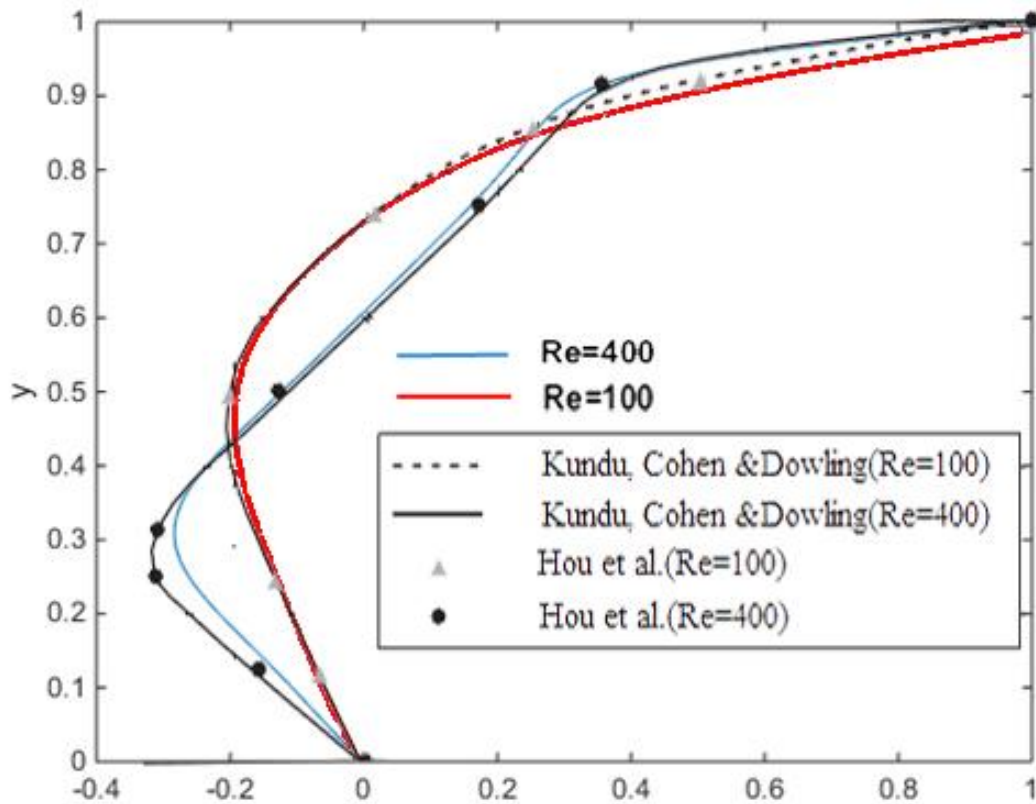


Figura(3-13)

En este caso el centro de la celda de convección primaria se encuentra en $[0,57 \ 0,615]$ mientras que el centro que predice Hou es $[0,5608 \ 0,6078]$.

Para realizar una comparación más precisa vamos a representar el perfil de velocidades horizontales en la

sección $x=0.5$ frente a y .



Figura(3-14)

Observamos como los resultados son reproducidos perfectamente. Por tanto el Método se demuestra adecuado y preciso para este tipo de problemas.

En la siguiente página mostramos el código MATLAB utilizado para la resolución de estos problemas.

```

%=====CAVIDAD CON TAPA MÓVIL=====
%LAS VARIABLES P_ SE CORRESPONDEN AL TÉRMINO PREDICTOR
%=====
close all;clear all;

nx=50;%intervalos de partición en x
ny=50;%intervalos de partición en y
nt=50000;%intervalos de partición en t
D=1; %ancho cavidad
Dt=0.005; %incremento temporal
Dx=D/nx; %incremento eje x
Dy=D/ny; %incremento eje y
U=1; %velocidad tapa
%=====NÚMEROS ADIMENSIONALES=====
Re=100; %numero de Reynolds
M=0.1; %numero de Mach

%=====PARÁMETROS=====
a1=Dt/Dx;
a2=Dt/Dy;
a3=Dt/(Dx*M^2);
a4=Dt/(Dy*M^2);
a5=4*Dt/(3*Re*Dx^2);
a6=Dt/(Re*Dy^2);
a7=Dt/(Re*Dx^2);
a8=4*Dt/(3*Re*Dy^2);
a9=Dt/(12*Re*Dx*Dy);
a10=2*(a5+a6);
a11=2*(a7+a8);

%=====CONDICIONES INICIALES=====
P_u=zeros(nx+1,ny+1);%velocidad x en los puntos del mallado
P_v=zeros(nx+1,ny+1);%velocidad y en los puntos del mallado
P_rho=ones(nx+1,ny+1);% densidad en los puntos del mallado
P_rhou=zeros(nx+1,ny+1);% densidad*u en los puntos del mallado
P_rhov=zeros(nx+1,ny+1);%densidad*v en los puntos del mallado
P_rhou2=zeros(nx+1,ny+1);% densidad*u^2 en los puntos del mallado
P_rhov2=zeros(nx+1,ny+1);%densidad*v^2 en los puntos del mallado
P_rhouv=zeros(nx+1,ny+1);%densidad*uv en los puntos del mallado

u=zeros(nx+1,ny+1);%velocidad x en los puntos del mallado
v=zeros(nx+1,ny+1);%velocidad y en los puntos del mallado
rho=ones(nx+1,ny+1);% densidad en los puntos del mallado
rhou=zeros(nx+1,ny+1);% densidad*u en los puntos del mallado
rhov=zeros(nx+1,ny+1);%densidad*v en los puntos del mallado
rhou2=rhou.*u(:,:);% densidad*u^2 en los puntos del mallado
rhov2=zeros(nx+1,ny+1);%densidad*v^2 en los puntos del mallado
rhouv=zeros(nx+1,ny+1);%densidad*uv en los puntos del mallado

%=====BUCLE TEMPORAL=====

for q=1:nt

    %=====PREDICTOR=====
    P_rho(2:nx,2:ny)=rho(2:nx,2:ny)-a1*(rhou(3:nx+1,2:ny)-rhou(2:nx,2:ny))-
a2*(rhov(2:nx,3:ny+1)-rhov(2:nx,2:ny)); %ecuación de continuidad

    P_rhou(2:nx,2:ny)=rhou(2:nx,2:ny)-a3*(rho(3:nx+1,2:ny)-rho(2:nx,2:ny))-
a1*(rhou2(3:nx+1,2:ny)-rhou2(2:nx,2:ny))-a2*(rhouv(2:nx,3:ny+1)-

```

```
rhov(2:nx,2:ny))-a10*u(2:nx,2:ny)+a5*(u(3:nx+1,2:ny)+u(1:nx-
1,2:ny))+a6*(u(2:nx,3:ny+1)+u(2:nx,1:ny-1))+a9*(v(3:nx+1,3:ny+1)+v(1:nx-
1,1:ny-1)-v(1:nx-1,3:ny+1)-v(3:nx+1,1:ny-1)); %ecuación de cantidad de
movimiento dirección x
```

```
P_rhov(2:nx,2:ny)=rhov(2:nx,2:ny)-a4*(rho(2:nx,3:ny+1)-rho(2:nx,2:ny))-
a1*((rhov(3:nx+1,2:ny))-(rhov(2:nx,2:ny)))-a2*(rhov2(2:nx,3:ny+1)-
rhov2(2:nx,2:ny))-a11*v(2:nx,2:ny)+a7*(v(3:nx+1,2:ny)+v(1:nx-
1,2:ny))+a8*(v(2:nx,3:ny+1)+v(2:nx,1:ny-1))+a9*(u(3:nx+1,3:ny+1)+u(1:nx-
1,1:ny-1)-u(1:nx-1,3:ny+1)-u(3:nx+1,1:ny-1)); %ecuación de cantidad de
movimiento dirección y
```

```
%=====DECODIFICAR VARIABLES=====%
```

```
P_u=P_rhou./P_rho;
P_v=P_rhov./P_rho;
```

```
%=====C.C PREDICTOR=====%
```

```
P_rho(1,1:ny+1)=rho(1,1:ny+1)-(a1/2)*(-rhov(3,1:ny+1)+4*rhov(2,1:ny+1)-
3*rhov(1,1:ny+1));%%%x=0 densidad
```

```
P_rho(nx+1,1:ny+1)=rho(nx+1,1:ny+1)+(a1/2)*(-rhov(nx-
1,1:ny+1)+4*rhov(nx,1:ny+1)-3*rhov(nx+1,1:ny+1));%%%x=d densidad
```

```
P_rho(2:nx,1)=rho(2:nx,1)-(a2/2)*(-rhov(2:nx,3)+4*rhov(2:nx,2)-
3*rhov(2:nx,1));%%%y=0 densidad
```

```
P_rho(2:nx,ny+1)=rho(2:nx,ny+1)+a2/2*(-rhov(2:nx,ny-1)+4*rhov(2:nx,ny)-
3*rhov(2:nx,ny+1))-(a1*U/2)*(rho(3:nx+1,ny+1)-rho(1:nx-1,ny+1));%%%y=d
densidad
```

```
P_u(2:nx,ny+1)=1;%%%velocidad u y=d
P_v(2:nx,ny+1)=0;%%%velocidad v y=d
P_u(2:nx,1)=0;%%%velocidad u y=0
P_v(2:nx,1)=0;%%%velocidad v y=0
P_u(nx+1,:)=0;%%%velocidad u x=d
P_v(nx+1,:)=0;%%%velocidad v x=d
P_u(1,:)=0;%%%velocidad u x=0
P_v(1,:)=0;%%%velocidad v x=
```

```
%=====ACTUALIZACIÓN DE VARIABLES=====%
```

```
P_rhou=P_rho.*P_u;
P_rhov=P_rho.*P_v
P_rhou2=P_rhou.*P_u;
P_rhouv=P_rhou.*P_v;
P_rhov2=P_rhov.*P_v;
```

```
%=====CORRECTOR=====%
```

```
rho(2:nx,2:ny)=(rho(2:nx,2:ny)+P_rho(2:nx,2:ny)-a1*(P_rhou(2:nx,2:ny)-
P_rhou(1:nx-1,2:ny))-a2*(P_rhov(2:nx,2:ny)-P_rhov(2:nx,1:ny-1)))*0.5;
%ecuación de continuidad
```

```
rhov(2:nx,2:ny)=0.5*(rhov(2:nx,2:ny)+P_rhov(2:nx,2:ny)-
a3*(P_rho(2:nx,2:ny)-P_rho(1:nx-1,2:ny))-a1*(P_rhou2(2:nx,2:ny)-
P_rhou2(1:nx-1,2:ny))-a2*(P_rhouv(2:nx,2:ny)-P_rhouv(2:nx,1:ny-1))-
a10*P_u(2:nx,2:ny)+a5*(P_u(3:nx+1,2:ny)+P_u(1:nx-
1,2:ny))+a6*(P_u(2:nx,3:ny+1)+P_u(2:nx,1:ny-
1))+a9*(P_v(3:nx+1,3:ny+1)+P_v(1:nx-1,1:ny-1)-P_v(1:nx-1,3:ny+1)-
P_v(3:nx+1,1:ny-1)); %ecuación de cantidad de movimiento dirección x
```

```

    rhov(2:nx,2:ny)= 0.5*(rhov(2:nx,2:ny)+P_rhov(2:nx,2:ny)-
a4*(P_rho(2:nx,2:ny)-P_rho(2:nx,1:ny-1))-a1*(P_rhov(2:nx,2:ny)-
P_rhov(1:nx-1,2:ny))-a2*(P_rhov2(2:nx,2:ny)-P_rhov2(2:nx,1:ny-1))-
a11*P_v(2:nx,2:ny)+a7*(P_v(3:nx+1,2:ny)+P_v(1:nx-
1,2:ny))+a8*(P_v(2:nx,3:ny+1)+P_v(2:nx,1:ny-
1))+a9*(P_u(3:nx+1,3:ny+1)+P_u(1:nx-1,1:ny-1)-P_u(1:nx-1,3:ny+1)-
P_u(3:nx+1,1:ny-1))); %ecuación de cantidad de movimiento dirección y

%=====DECODIFICAR VARIABLES=====
u=rhou./rho;
v=rhov./rho;

%=====C.C=====
rho(1,2:ny)=(P_rho(1,2:ny)+rho(1,2:ny)-a1/2*(-
P_rhov(3,2:ny)+4*P_rhov(2,2:ny)-3*P_rhov(1,2:ny)))*0.5;%%%x=0

rho(nx+1,2:ny)=(P_rho(nx+1,2:ny)+rho(1,2:ny)+a1/2*(-P_rhov(nx-
1,2:ny)+4*P_rhov(nx,2:ny)-3*P_rhov(nx+1,2:ny)))*0.5;%%%x=d

rho(2:nx,1)=(P_rho(2:nx,1)+rho(2:nx,1)-a2/2*(-
P_rhov(2:nx,3)+4*P_rhov(2:nx,2)-3*P_rhov(2:nx,1)))*0.5;%%%y=0

rho(2:nx,1+ny)=(P_rho(2:nx,1+ny)+rho(2:nx,1+ny)+a2/2*(-P_rhov(2:nx,ny-
1)+4*P_rhov(2:nx,ny)-3*P_rhov(2:nx,ny+1))-a1*U/2*(P_rho(3:nx+1,1)-
P_rho(1:nx-1,1)))*0.5;%%%y=d

u(2:nx,ny+1)=1;%%%velocidad u y=d
v(2:nx,ny+1)=0;%%%velocidad v y=d
u(2:nx,1)=0;%%%velocidad u y=0
v(2:nx,1)=0;%%%velocidad v y=0
u(nx+1,:)=0;%%%velocidad u x=d
v(nx+1,:)=0;%%%velocidad v x=d
u(1,:)=0;%%%velocidad u x=0
v(1,:)=0;%%%velocidad v x=

%=====ACTUALIZACIÓN DE VARIABLES=====

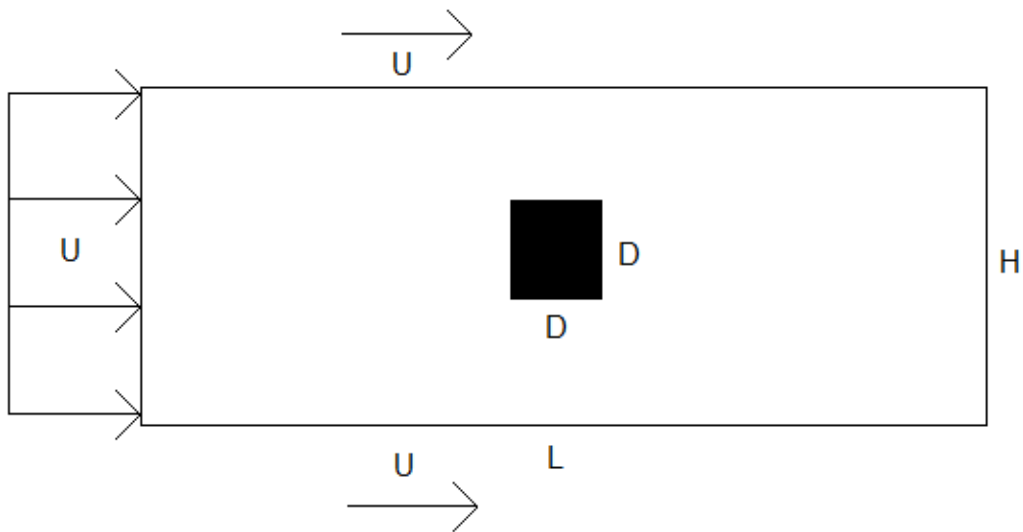
rhou=rho.*u;
rhov=rho.*v;
rhou2=rhou.*u;
rhov2=rhov.*v;

```

end

4 APLICACIÓN: FLUJO BIDIMENSIONAL ALREDEDOR DE UN CUADRADO

Este problema, ligeramente más complejo, se puede resolver de igual manera que el anterior. El objetivo de esta aplicación será describir el campo de velocidades en las proximidades del cuadrado para así poder calcular los coeficientes de resistencia y sustentación y su variación temporal si la hubiese.



Figura(4-1)

Observamos como esta formulación del problema es equivalente al cuadrado desplazándose hacia la izquierda con velocidad \$U\$. Las ecuaciones utilizadas serán las mismas que en la aplicación anterior volviendo a tener validez la suposición de caso isotermo. A las condiciones de contorno del problema anterior habría que añadir:

- Velocidad nula en las caras del cuadrado.
- Actualizar la densidad en las caras del cuadrado o bien a través de la ecuación de continuidad o a través de la ecuación de movimiento que algunas veces parece dar mejores resultados.

$$\text{Continuidad: } \frac{d\rho}{dt} + \frac{d(\rho u)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} = 0 \quad (4-1)$$

$$\text{Cantidad de movimiento } x: \frac{d(\rho u)}{dt} + \frac{d\left(\rho u^2 + p - \frac{4}{3Re} \frac{du}{dx} - \frac{1}{3Re} \frac{dv}{dy}\right)}{dx} + \frac{d\left(\rho uv - \frac{1}{Re} \frac{du}{dy}\right)}{dy} = 0 \quad (4-2)$$

$$\text{Cantidad de movimiento } y: \frac{d(\rho v)}{dt} + \frac{d\left(\rho uv - \frac{1}{Re} \frac{dv}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\rho v^2 + p - \frac{4}{3Re} \frac{dv}{dy} - \frac{1}{3Re} \frac{du}{dx}\right)}{dy} = 0 \quad (4-3)$$

$$\text{ecuación de estado: } p = \frac{\rho}{\gamma M^2} \quad (4-4)$$

En las próximas aplicaciones por simplicidad se escribirán las ecuaciones de Navier-Stokes en notación matricial.

El problema está sujeto a las condiciones de contorno:

$$u(0, y) = 1 \quad v(0, y) = 0 \quad u(1, y) = 0 \quad v(1, y) = 0 \quad (4-5)$$

$$u(x, 0) = 1 \quad v(x, 0) = 0 \quad u(x, 1) = 1 \quad v(x, 1) = 0 \quad (4-6)$$

$$u(x_{ci}, y_c) = 0 \quad v(x_{ci}, y_c) = 0 \quad u(x_{cf}, y_c) = 0 \quad v(x_{cf}, y_c) = 0 \quad (4-7)$$

$$u(x_c, y_{ci}) = 0 \quad v(x_c, y_{ci}) = 0 \quad u(x_c, y_{cf}) = 0 \quad v(x_c, y_{cf}) = 0 \quad (4-8)$$

Siendo x_{ci} la coordenada x del inicio del cuadrado, x_{cf} la coordenada x del final del cuadrado y para la coordenada y la nomenclatura es análoga.

Es necesario imponer condiciones de contorno en densidad (o presión). Vamos a realizar esto utilizando la ecuación de continuidad:

$$\text{Tapa inferior} \left(\frac{d(\rho u)}{dx} = \frac{d\rho}{dx} \right) \frac{d\rho}{dt} = -\frac{d\rho}{dx} - \frac{d(\rho v)}{dy} \quad (4-9)$$

$$\text{Tapa superior} \left(\frac{d(\rho u)}{dx} = \frac{d\rho}{dx} \right) \frac{d\rho}{dt} = -\frac{d\rho}{dx} - \frac{d(\rho v)}{dy} \quad (4-10)$$

$$\text{Tapa izquierda} \left(\frac{d(\rho v)}{dy} = 0 \right) \frac{d\rho}{dt} = -\frac{d(\rho u)}{dx} \quad (4-11)$$

$$\text{Tapa derecha} \left(\frac{d(\rho v)}{dy} = 0 \right) \frac{d\rho}{dt} = -\frac{d(\rho u)}{dx} \quad (4-12)$$

Que observamos que si aplicamos las diferencias progresivas, regresivas y centrales obtenidas en el apartado 3.2 podremos calcular las densidades en la frontera de nuestro canal.

Para las condiciones de densidad en el cuadrado, se puede actualizar o bien con la ecuación de continuidad:

$$\text{Lado inferior} \left(\frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \right) \frac{d\rho}{dt} = -\frac{d(\rho v)}{dy} \quad (4-13)$$

$$\text{Lado superior} \left(\frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \right) \frac{d\rho}{dt} = -\frac{d(\rho v)}{dy} \quad (4-14)$$

$$\text{Lado izquierdo} \left(\frac{d(\rho v)}{dy} = 0 \right) \frac{d\rho}{dt} = -\frac{d(\rho u)}{dx} \quad (4-15)$$

$$\text{Tapa derecho} \left(\frac{d(\rho v)}{dy} = 0 \right) \frac{d\rho}{dt} = -\frac{d(\rho u)}{dx} \quad (4-16)$$

O bien desde la ecuación de cantidad de movimiento, que es más compleja, pero en este caso parece dar mejores resultados:

$$\begin{aligned} \text{Lado inferior} \quad \frac{d\rho}{dy} &= M^2 \left(\frac{1}{Re} \left(\frac{4 d^2 v}{3 dy^2} + \frac{1 d^2 u}{3 dx dy} + \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - \frac{d(\rho uv)}{dx} - \frac{d(\rho v^2)}{dy} - \frac{d(\rho v)}{dt} \right) \\ &= \frac{M^2}{Re} \left(\frac{4 d^2 v}{3 dy^2} + \frac{1 d^2 u}{3 dx dy} \right) \end{aligned} \quad (4-17)$$

$$\begin{aligned} \text{Lado superior} \quad \frac{d\rho}{dy} &= M^2 \left(\frac{1}{Re} \left(\frac{4 d^2 v}{3 dy^2} + \frac{1 d^2 u}{3 dx dy} + \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - \frac{d(\rho uv)}{dx} - \frac{d(\rho v^2)}{dy} - \frac{d(\rho v)}{dt} \right) \\ &= \frac{M^2}{Re} \left(\frac{4 d^2 v}{3 dy^2} + \frac{1 d^2 u}{3 dx dy} \right) \end{aligned} \quad (4-18)$$

$$\begin{aligned} \text{Lado izquierdo} \quad \frac{d\rho}{dx} &= M^2 \left(\frac{1}{Re} \left(\frac{4 d^2 u}{3 dx^2} + \frac{1 d^2 v}{3 dx dy} + \frac{d^2 u}{dy^2} \right) - \frac{d(\rho u^2)}{dx} - \frac{d(\rho vu)}{dy} - \frac{d(\rho u)}{dt} \right) \\ &= \frac{M^2}{Re} \left(\frac{4 d^2 u}{3 dx^2} + \frac{1 d^2 v}{3 dx dy} \right) \end{aligned} \quad (4-19)$$

$$\begin{aligned} \text{Lado derecho} \quad \frac{d\rho}{dx} &= M^2 \left(\frac{1}{Re} \left(\frac{4 d^2 u}{3 dx^2} + \frac{1 d^2 v}{3 dx dy} + \frac{d^2 u}{dy^2} \right) - \frac{d(\rho u^2)}{dx} - \frac{d(\rho vu)}{dy} - \frac{d(\rho u)}{dt} \right) \\ &= \frac{M^2}{Re} \left(\frac{4 d^2 u}{3 dx^2} + \frac{1 d^2 v}{3 dx dy} \right) \end{aligned} \quad (4-20)$$

Aplicando las aproximaciones establecidas en el capítulo 3 se pueden despejar las variables en el contorno del cuadrado.

Para calcular los coeficientes de resistencia y sustentación vamos a utilizar las siguientes expresiones:

$$C_l = \frac{l}{\frac{1}{2} \rho U^2 D} = \frac{\int_{i_1}^{i_2} (P_{inf} - P_{sup}) dx + \int_{j_1}^{j_2} (f_{y_{izq}} + f_{y_{der}}) dy + \int_{i_1}^{i_2} (f_{y_{sup}} + f_{y_{inf}}) dx}{\frac{1}{2} \rho U^2 D} \quad (4-21)$$

Siendo f_y los esfuerzos tangenciales que obtenemos en las paredes:

$$f_{y_{izq}} = -\mu \frac{dv}{dx_{x=i_1}} \quad (4-22)$$

$$f_{y_{der}} = \mu \frac{dv}{dx_{x=i_2}} \quad (4-23)$$

$$f_{y_{der}} = \mu \frac{dv}{dx_{x=i_2}} \quad (4-24)$$

$$f_{y_{sup}} = 2\mu \frac{dv}{dy_{y=j_2}} \quad (4-25)$$

$$f_{y_{inf}} = -2\mu \frac{dv}{dy_{y=j_1}} \quad (4-26)$$

Convirtiendo a nuestras variables adimensionales:

$$\begin{aligned} C_l &= \frac{\rho U^2 D \int_{\frac{i_1}{D}}^{\frac{i_2}{D}} (P_{inf}^* - P_{sup}^*) dx^* + \mu U \int_{\frac{j_1}{D}}^{\frac{j_2}{D}} (f_{y_{izq}}^* + f_{y_{der}}^*) dy^* + \mu U \int_{\frac{j_1}{D}}^{\frac{j_2}{D}} (f_{y_{sup}}^* + f_{y_{inf}}^*) dx^*}{\frac{1}{2} \rho U^2 D} \\ &= 2 \int_{\frac{i_1}{D}}^{\frac{i_2}{D}} (P_{inf}^* - P_{sup}^*) dx^* + \frac{2}{Re} \int_{\frac{j_1}{D}}^{\frac{j_2}{D}} (f_{y_{izq}}^* + f_{y_{der}}^*) dy^* + \frac{2}{Re} \int_{\frac{j_1}{D}}^{\frac{j_2}{D}} (f_{y_{sup}}^* + f_{y_{inf}}^*) dx^* \end{aligned} \quad (4-27)$$

Lo cual tiene sentido físico ya que un aumento de la diferencia de presiones entre las caras superior e inferior contribuye positivamente a la sustentación. También es coherente que aumentar el número de Reynolds produzca una pérdida de importancia de las fuerzas de viscosidad.

Si tenemos en cuenta que $P^* = \frac{\rho^*}{M^2}$:

$$C_l = \frac{2}{M^2} \int_{\frac{i_1}{D}}^{\frac{i_2}{D}} (\rho_{inf}^* - \rho_{sup}^*) dx^* + \frac{2}{Re} \int_{\frac{j_1}{D}}^{\frac{j_2}{D}} (f_{y_{izq}}^* + f_{y_{der}}^*) dy^* + \frac{2}{Re} \int_{\frac{j_1}{D}}^{\frac{j_2}{D}} (f_{y_{sup}}^* + f_{y_{inf}}^*) dx^* \quad (4-28)$$

Análogamente para el coeficiente de resistencia:

$$C_d = \frac{d}{\frac{1}{2}\rho U^2 D} = \frac{\int_{j_1}^{j_2} (P_{izq} - P_{der}) dy + \int_{j_1}^{j_2} (f_{x_{izq}} + f_{x_{der}}) dy + \int_{i_1}^{i_2} (f_{x_{sup}} + f_{x_{inf}}) dx}{\frac{1}{2}\rho U^2 D} \quad (4-29)$$

Siendo f_x los esfuerzos tangenciales que obtenemos en las paredes:

$$f_{x_{izq}} = -2\mu \frac{du}{dx_{x=i_1}} \quad (4-30)$$

$$f_{x_{der}} = 2\mu \frac{du}{dx_{x=i_2}} \quad (4-31)$$

$$f_{x_{sup}} = \mu \frac{du}{dy_{y=j_2}} \quad (4-32)$$

$$f_{x_{inf}} = -\mu \frac{du}{dy_{y=j_1}} \quad (4-33)$$

Convirtiendo a nuestras variables adimensionales:

$$\begin{aligned} C_d &= \frac{\rho U^2 D \int_{\frac{j_1}{D}}^{\frac{j_2}{D}} (P_{izq}^* - P_{der}^*) dy^* + \mu U \int_{\frac{j_1}{D}}^{\frac{j_2}{D}} (f_{x_{izq}}^* + f_{x_{der}}^*) dy^* + \mu U \int_{\frac{i_1}{D}}^{\frac{i_2}{D}} (f_{x_{sup}}^* + f_{x_{inf}}^*) dx^*}{\frac{1}{2}\rho U^2 D} \\ &= 2 \int_{\frac{j_1}{D}}^{\frac{j_2}{D}} (P_{izq}^* - P_{der}^*) dy^* + \frac{2}{Re} \int_{\frac{j_1}{D}}^{\frac{j_2}{D}} (f_{x_{izq}}^* + f_{x_{der}}^*) dy^* + \frac{2}{Re} \int_{\frac{i_1}{D}}^{\frac{i_2}{D}} (f_{x_{sup}}^* + f_{x_{inf}}^*) dx^* \end{aligned} \quad (4-34)$$

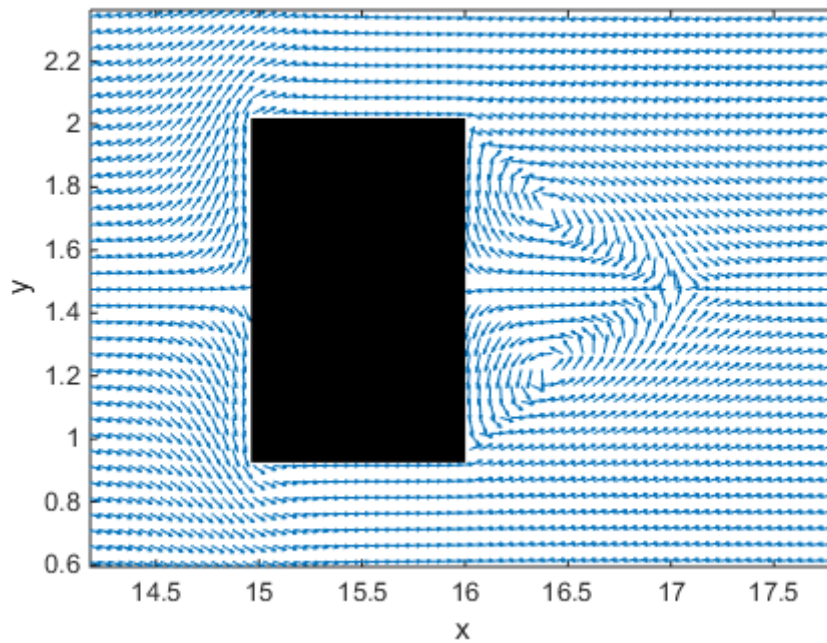
Lo cual tiene sentido físico ya que un aumento de la diferencia de presiones entre las caras izquierda y derecha contribuye positivamente a la resistencia. También es coherente que aumentar el número de Reynolds produzca una pérdida de importancia de las fuerzas de viscosidad.

Si tenemos en cuenta que $P^* = \frac{\rho^*}{M^2}$:

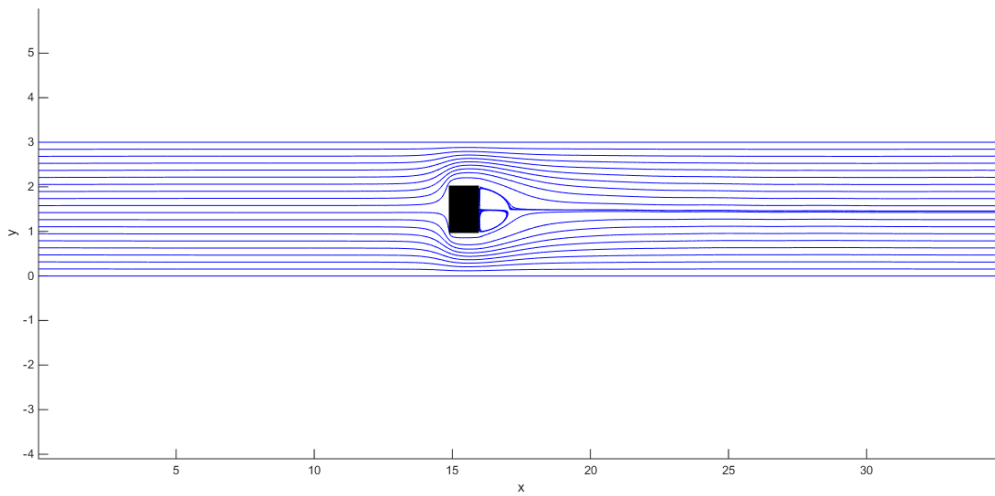
$$C_d = \frac{2}{M^2} \int_{\frac{j_1}{D}}^{\frac{j_2}{D}} (\rho_{izq}^* - \rho_{der}^*) dy^* + \frac{2}{Re} \int_{\frac{j_1}{D}}^{\frac{j_2}{D}} (f_{x_{izq}}^* + f_{x_{der}}^*) dy^* + \frac{2}{Re} \int_{\frac{i_1}{D}}^{\frac{i_2}{D}} (f_{x_{sup}}^* + f_{x_{inf}}^*) dx^* \quad (4-35)$$

Comenzaremos analizando el flujo alrededor del cuadrado para $Re = 20$ y $M = 0.05$

Antes de analizar los coeficientes de resistencia y sustentación vamos a analizar el patrón de flujo que se obtiene entorno a la caja y que le ocurre a la corriente al rebordear a esta.



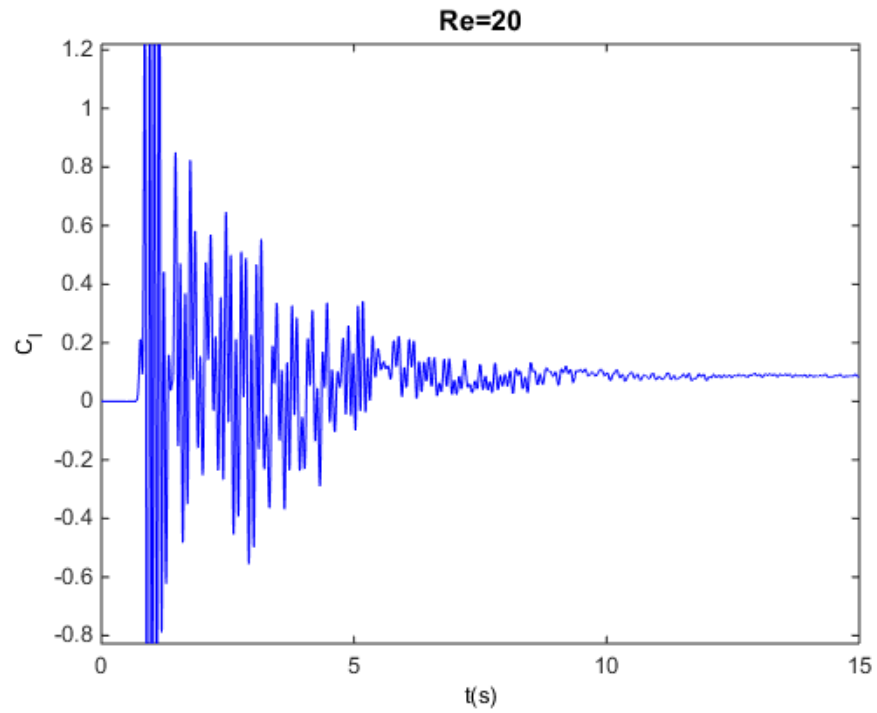
Figura(4-2)



Figura(4-3)

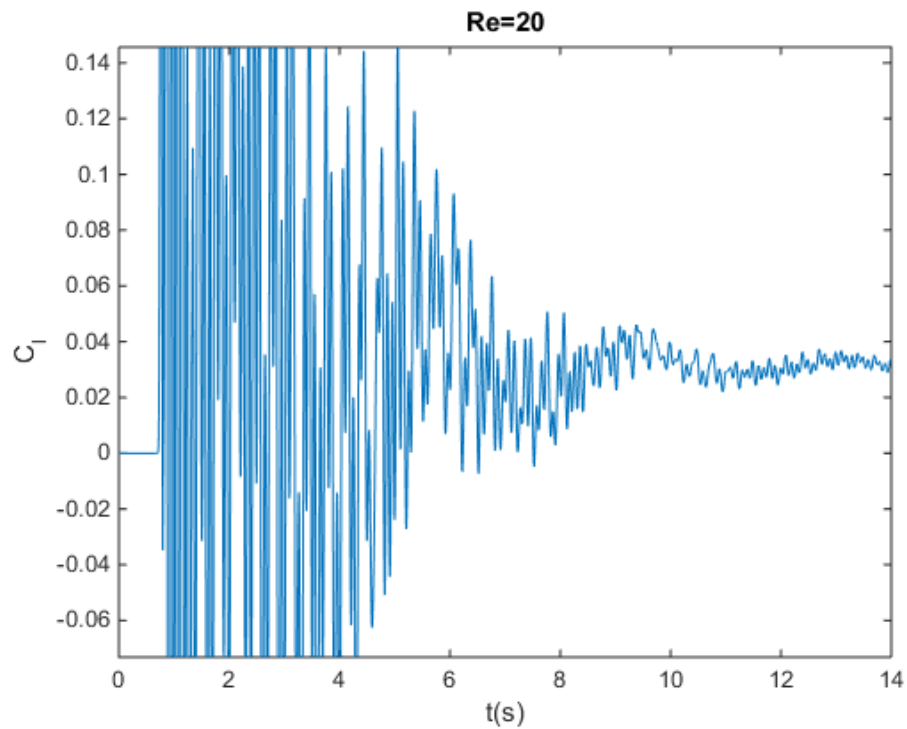
Observamos como inmediatamente después de bordear la caja se forman dos torbellinos que permanecen adheridos, y observamos como en ningún caso se produce oscilación en la estela, obteniendo un régimen estacionario.

Vamos a representar ahora los coeficientes de resistencia y sustentación.



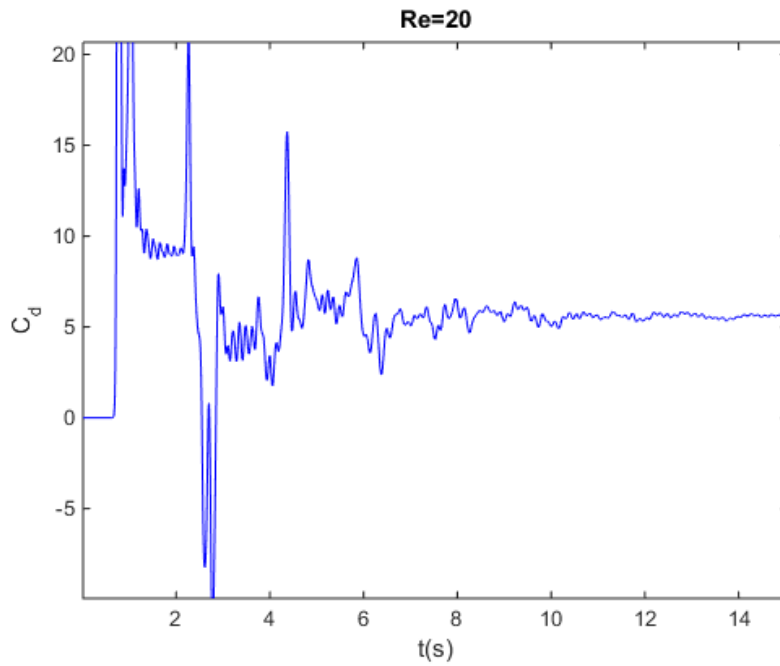
Figura(4-4)

Observamos como el valor no es idénticamente nulo, esto se debe a asimetrías en la malla, no obstante, se puede observar que si refinamos la malla este valor va disminuyendo hasta aproximarse mucho a 0.



Figura(4-5)

Percibimos con esta imagen como estas asimetrías se han reducido considerablemente hasta un valor de 0.03, ya muy próximo a sustentación nula que era el comportamiento esperado.

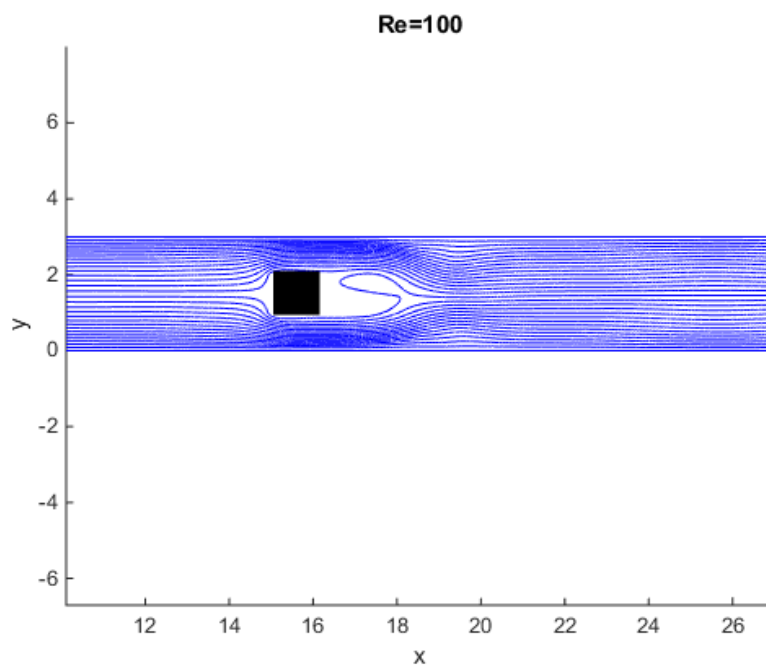


Figura(4-6)

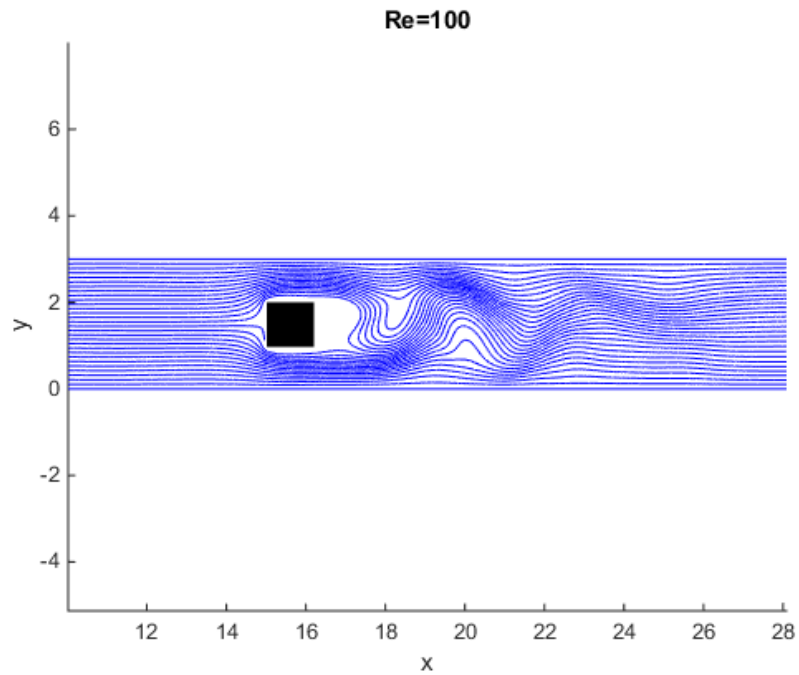
En la figura 4-6 observamos como el valor del C_d no es residual como ocurría con el C_l en este caso como era de esperar existe una resistencia importante al movimiento ya que la corriente se desprende, provocando las burbujas de recirculación en sotavento produciendo una importante resistencia.

Otro aspecto significativo es el hecho de que para este número de Reynolds aparezca un régimen estacionario, algo que no será verdad para cualquier número de Reynolds como veremos a continuación.

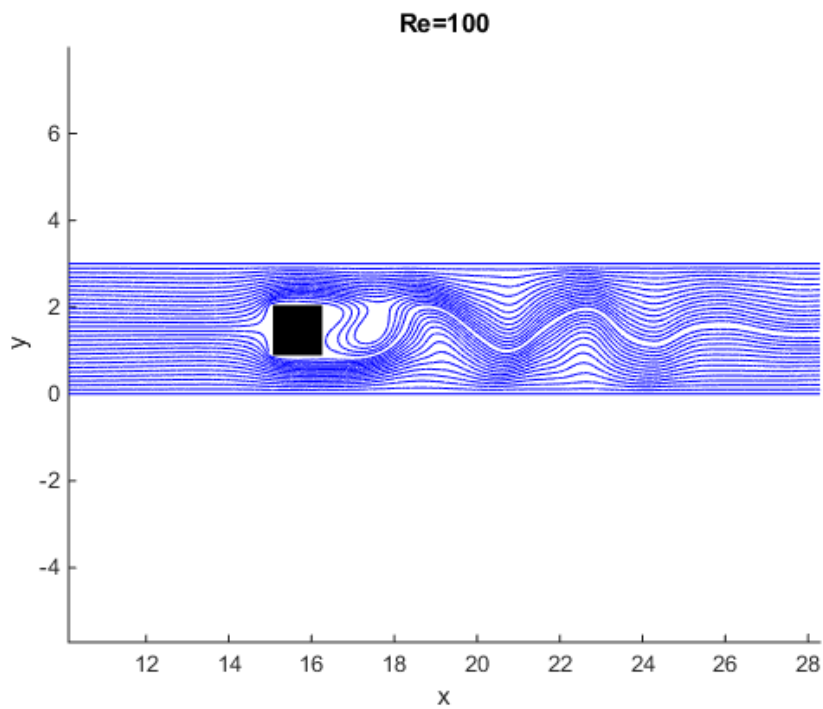
Re=100.



Figura(4-7)

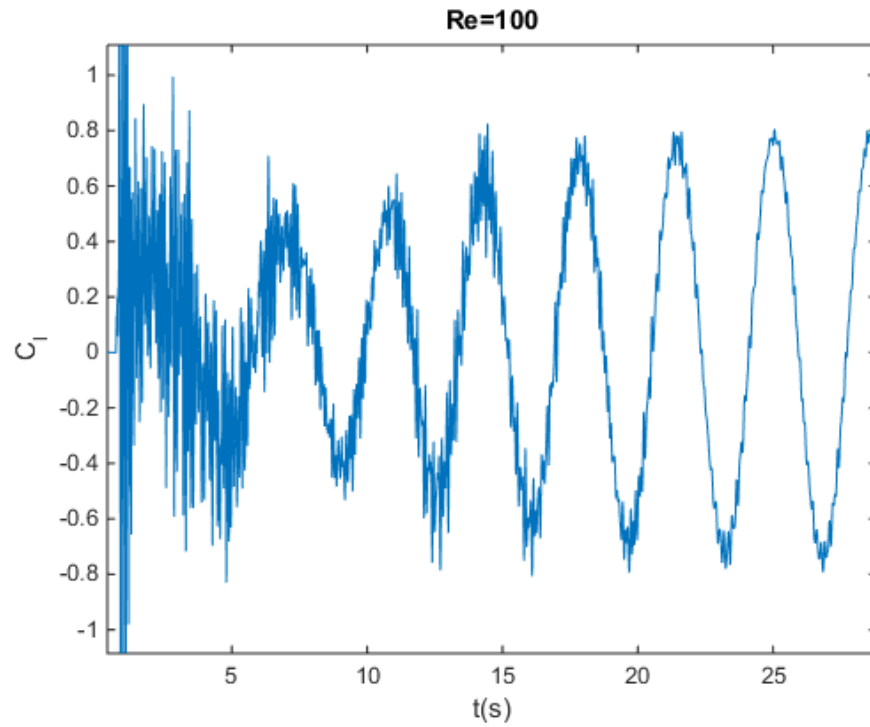


Figura(4-8)



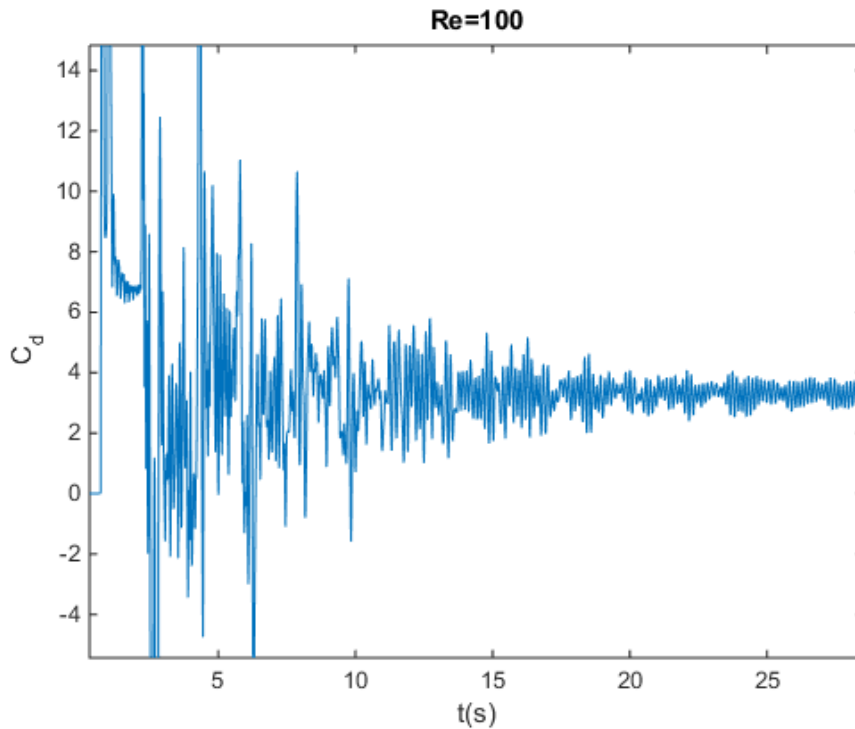
Figura(4-9)

En la secuencia de imágenes anterior, ordenadas temporalmente, se muestra como el fluido comienza a rotar al rebordear la caja formándose un torbellino que se va convectando aguas abajo haciendo que la estela oscile lo que como veremos a continuación provocará variaciones temporales en los coeficientes de resistencia y de sustentación.



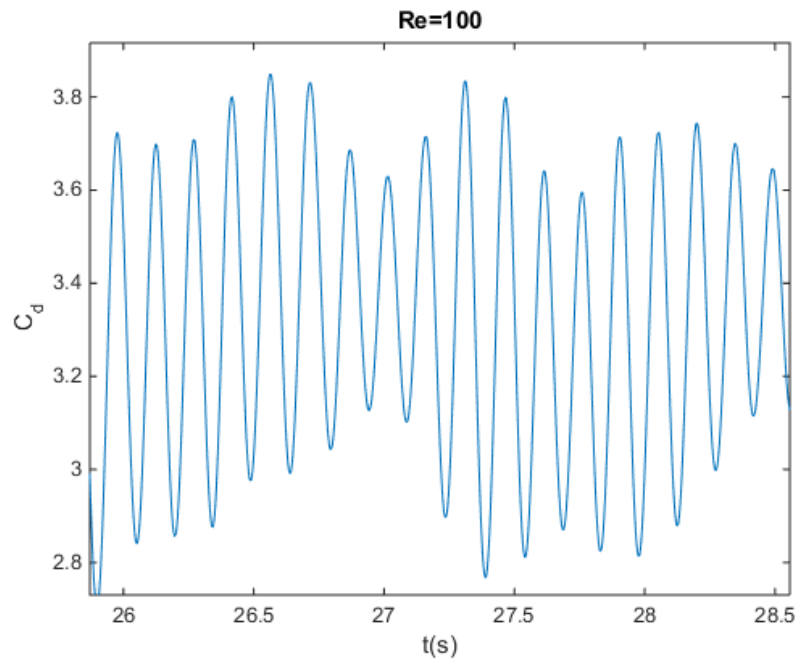
Figura(4-10)

Como comentábamos antes, obtenemos una oscilación en el coeficiente de sustentación, esto se debe a la oscilación de la estela como se ha mostrado anteriormente, aunque si que observamos que debido a la simetría del problema esta oscilación es simétrica respecto a la horizontal de una amplitud aproximadamente 0.8, muy similar a la obtenida por Kundu, Cohen & Dowling, que obtenían un valor de 0.77.



Figura(4-11)

Observamos que como era de esperar la oscilación de la estela produce una variación de la resistencia, no obstante, esta es mucho más reducida en amplitud y de frecuencia mucho más alta, observamos como su valor medio este entorno a los 3.4, en la siguiente imagen se aprecia con más claridad. De nuevo un valor muy similar al predicho por Kundu, Cohen & Dowling que obtenían un valor medio de 3.35.



Figura(4-12)

Es interesante comparar este valor medio obtenido con el del apartado anterior y observar que se ha reducido prácticamente a la mitad, lo cual tiene sentido físico ya que al aumentar el número de Reynolds disminuye la importancia relativa de las fuerzas de viscosidad y por tanto de la resistencia.

Vamos a realizar un análisis de sensibilidad de la relación de aspecto de la cavidad respecto del cuadrado para un valor del número de Reynolds de 20 y después de un tiempo adimensional de 15, cuando ya se ha alcanzado el régimen estacionario, en relación al coeficiente de resistencia. La posición relativa del cuadrado se ha mantenido constante.

Tabla (4-1)

| L/D | H/D | C_d |
|-------|-------|--------|
| 35 | 3 | 5.5703 |
| 100 | 3 | 6.0650 |

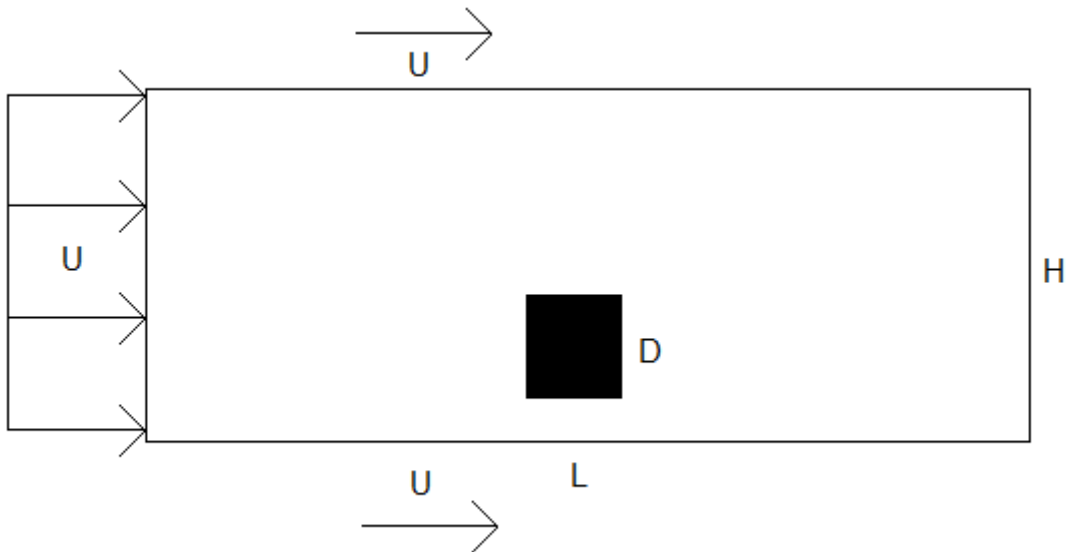
La condición de contorno que se ha puesto en la salida del conducto es de velocidad uniforme igual a velocidad de entrada, por tanto, al aumentar la longitud de la cavidad se tiende al caso real ya que los efectos perturbadores producto de rebordar el objeto ya son despreciables. En cambio si reducimos la longitud de la cavidad obligamos a los efectos perturbadores de la estela a amortiguarse antes de lo que lo harían en un caso real.

Tabla (4-2)

| L/D | H/D | C_d |
|-------|-------|--------|
| 35 | 3 | 5.6463 |
| 35 | 6 | 2.4673 |
| 35 | 9 | 1.9691 |

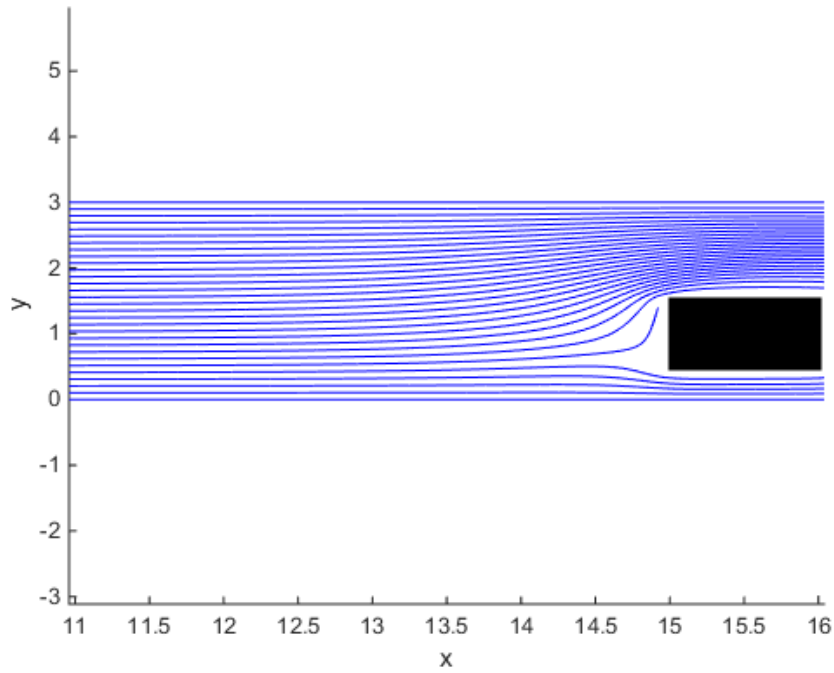
Observamos como el coeficiente de resistencia disminuye conforme aumentamos la altitud de la cavidad. Al ampliar el margen entre el lado superior del cuadrado que tiene velocidad nula y la parte superior del conducto obtenemos gradientes de velocidades más suaves que por tanto disminuyen las fuerzas viscosas y por ende la resistencia. El otro origen de disminución de la resistencia es que la sobrepresión requerida en la cara frontal es menor ya que el flujo se acelera menos en el entorno del cilindro. Es interesante observar como los dos últimos casos se asimilan bien a una corriente uniforme incidiendo sobre el obstáculo, ya que el coeficiente de resistencia es muy similar al proporcionado por [27] que nos da un valor de $C_d \cong 2$ para un cuadrado.

Otro aspecto que se puede analizar es que ocurre si desplazamos el obstáculo hacia arriba o hacia abajo rompiendo así la simetría del problema.



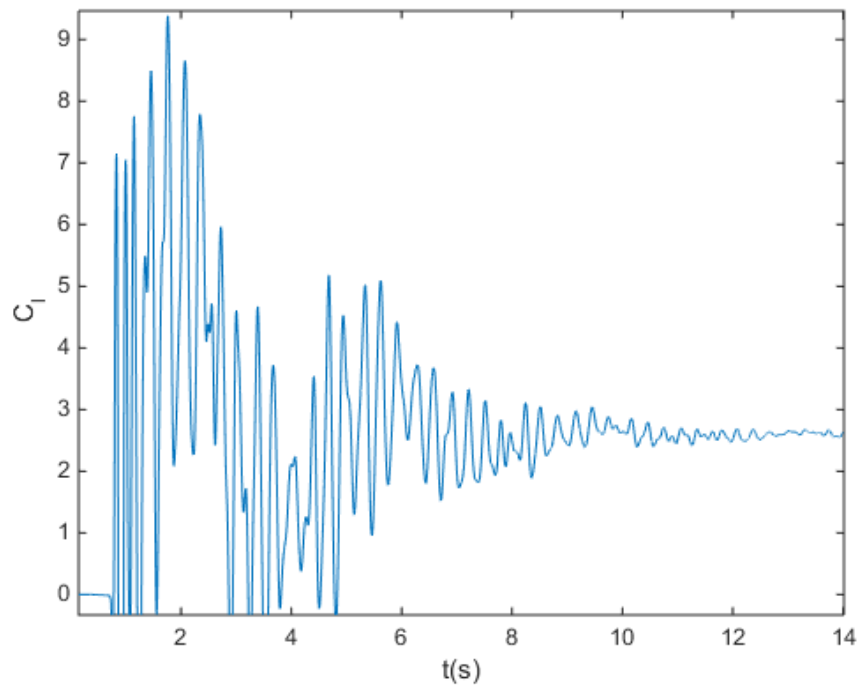
Figura(4-13)

Al romper la simetría del problema, por el efecto de las paredes del conducto vamos a obtener ahora una componente de sustentación en la fuerza ejercida por el fluido. En la figura 4-12 observamos como se disponen las líneas de corriente.



Figura(4-14)

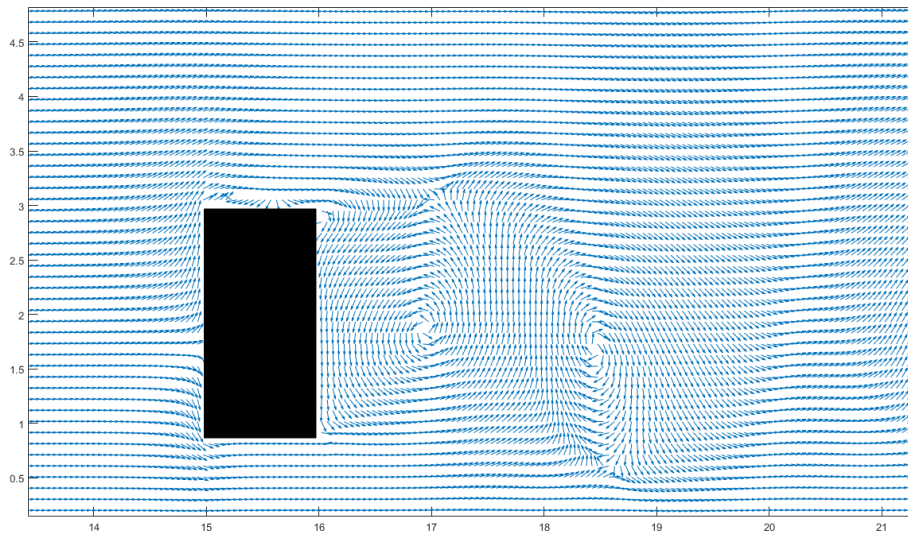
Donde se aprecia que el punto de remanso se encuentra mas próximo a la cara inferior que a la cara superior lo que implica que debe existir una fuerza de sustentación provocada por la succión que crea el fluido al rebordear la esquina superior izquierda del cuadrado.



Figura(4-15)

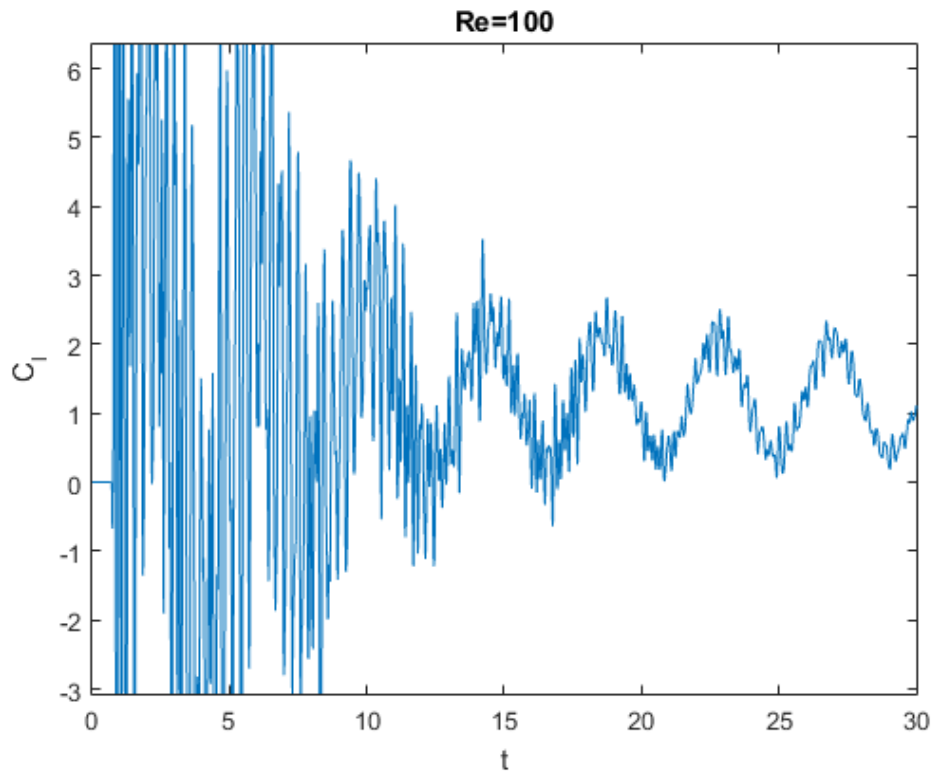
Después de un régimen transitorio abrupto, como era de esperar obtenemos un coeficiente de sustentación distinto de cero y en este caso ya no es residual por asimetrías en la malla como en el caso anterior.

Si aumentamos el numero de Reynolds es intuitivo que los efectos deberían de solaparse, obteniendo un coeficiente de sustentación que presente una oscilación, pero entorno a un valor distinto de zero.



Figura(4-16)

En la imagen se aprecia especialmente bien como la emisión de torbellinos genera la oscilación de la estela, y también apreciamos como el punto de remanso se encuentra desplazado hacia abajo lo que justifica la distribución de la sustentación que obtenemos.



Figura(4-17)

Es interesante observar como se produce una oscilación de una amplitud ligeramente mayor que en el caso centrado, $C_l = 1$, frente al valor 0,8 que obteníamos anteriormente. También observamos como el valor entorno al cual oscila, $C_l = 1.2$, ha disminuido respecto al caso correspondiente a $Re = 20$, para el que obteníamos un valor estacionario de $C_l = 2.6$. Esta disminución se debe a que aumentar el número de Reynolds implica una pérdida de importancia de las fuerzas de viscosidad y por tanto el efecto que produce estar más próximo a una pared del conducto se atenúa.

El fenómeno que se observa en las figuras 4-6,4-7 y 4-8 se denomina ‘vortex shedding’ y consiste en torbellinos emitidos desde sotavento generando la previamente citada oscilación en la estela. También recibe el nombre de calle de torbellinos de von Kármán. Ha sido ampliamente estudiado en el caso de cilindros circulares infinitos, uno de los resultados más estudiados es la frecuencia con la cual se desprenden los torbellinos. Recordemos como hemos comentado en la introducción la expresión de la frecuencia adimensional a la que los torbellinos son emitidos:

$$f^* = \frac{fD}{V} = St; \quad (4-36)$$

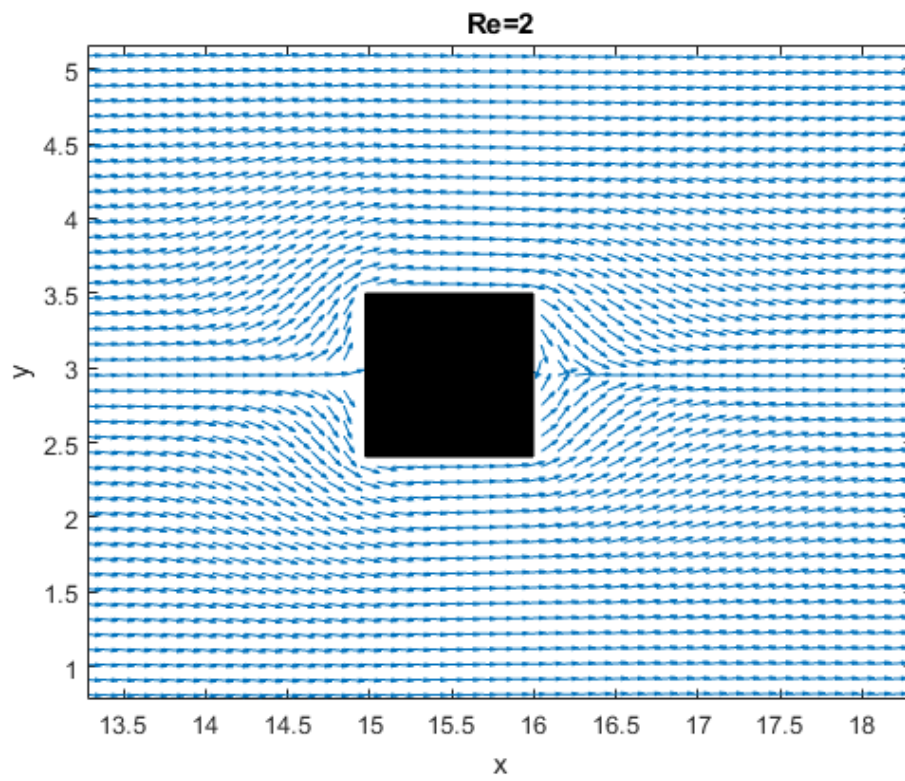
Este valor de frecuencia adimensional se conoce como Número de Strouhal.

El resultado más estudiado es la influencia del número de Reynolds en el número de Strouhal, para el cilindro circular infinito se obtiene fases muy distinguidas:

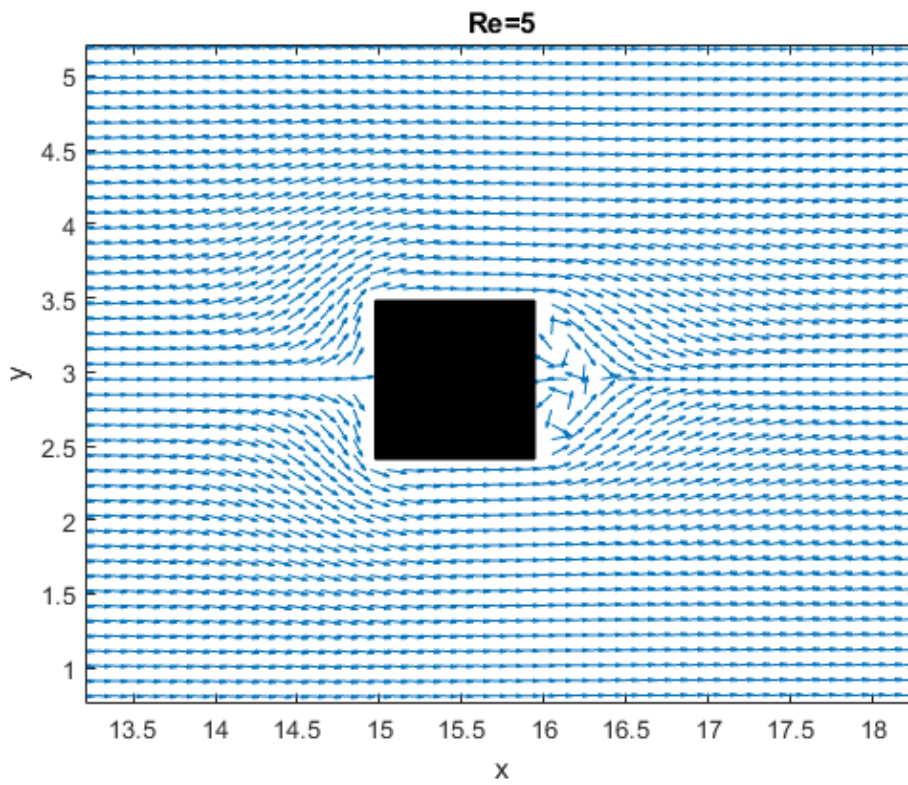
1. $Re < 5$: La corriente permanece completamente adherida.
2. $5 < Re < 40$: Se forman torbellinos, pero permanecen adheridos. La estela no oscila.
3. $40 < Re < 200.000$: Los torbellinos son emitidos produciendo la oscilación de la estela.
4. $Re > 200.000$: Estela completamente turbulenta.

Vamos a analizar los tres primeros casos para el caso de un cilindro de base cuadrada infinito, ya que no podemos operar en Números de Reynolds donde comience la turbulencia.

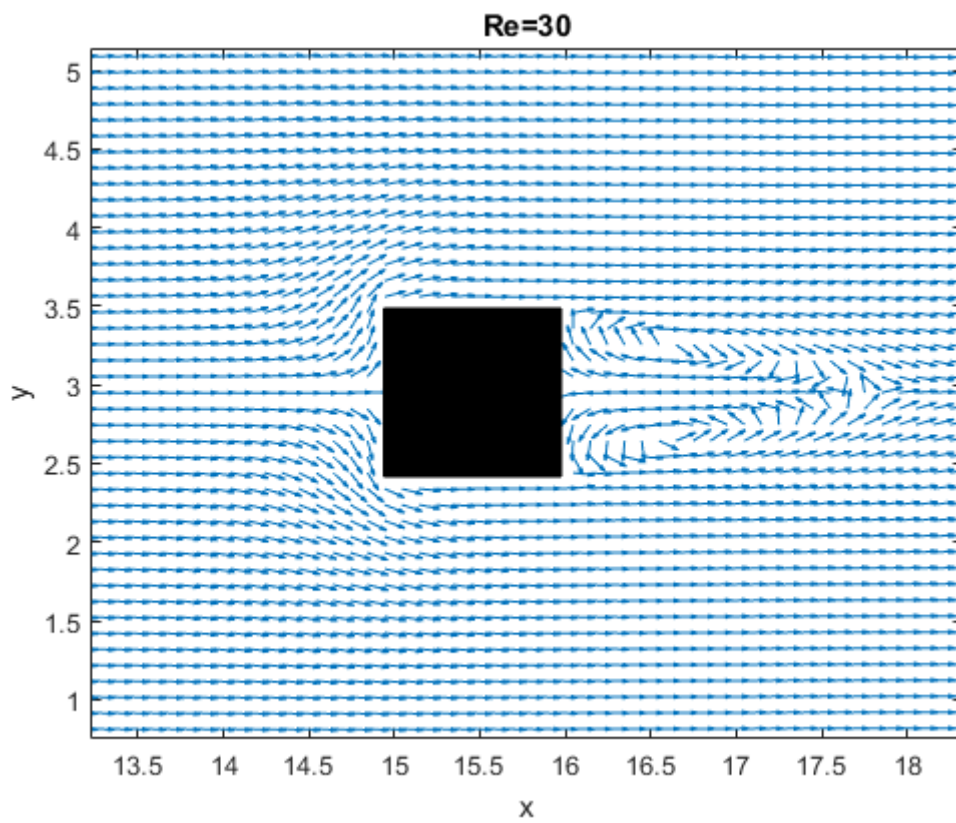
De la figura 4-15 a 4-19 se muestran los patrones de flujo alrededor del cilindro para distintos valores de Reynolds.



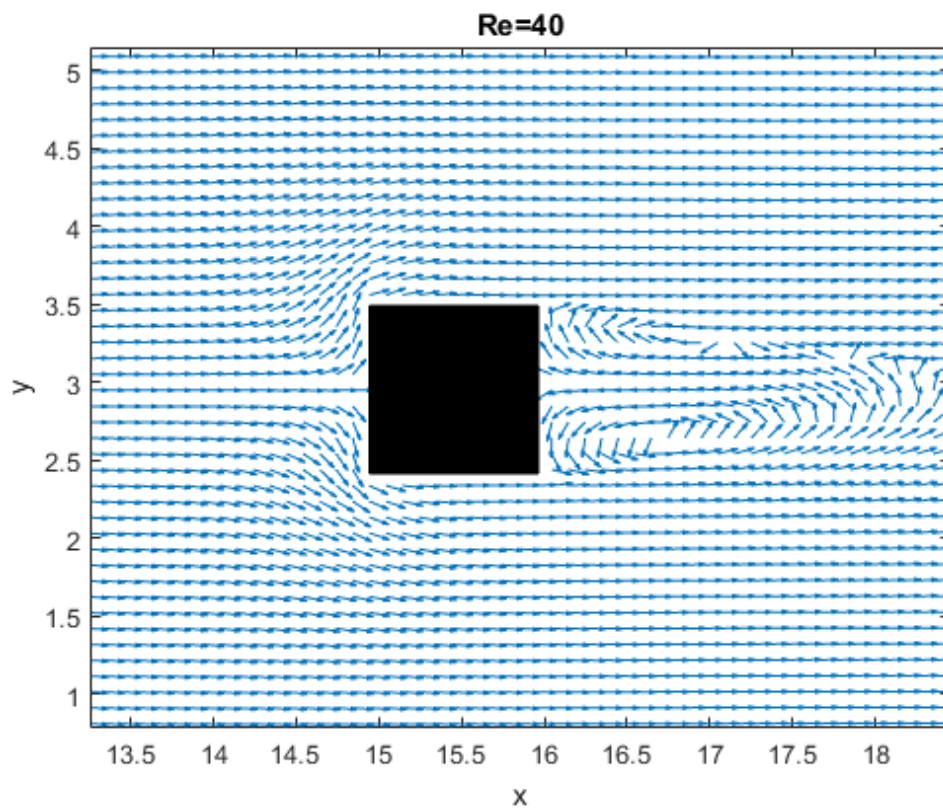
Figura(4-18)



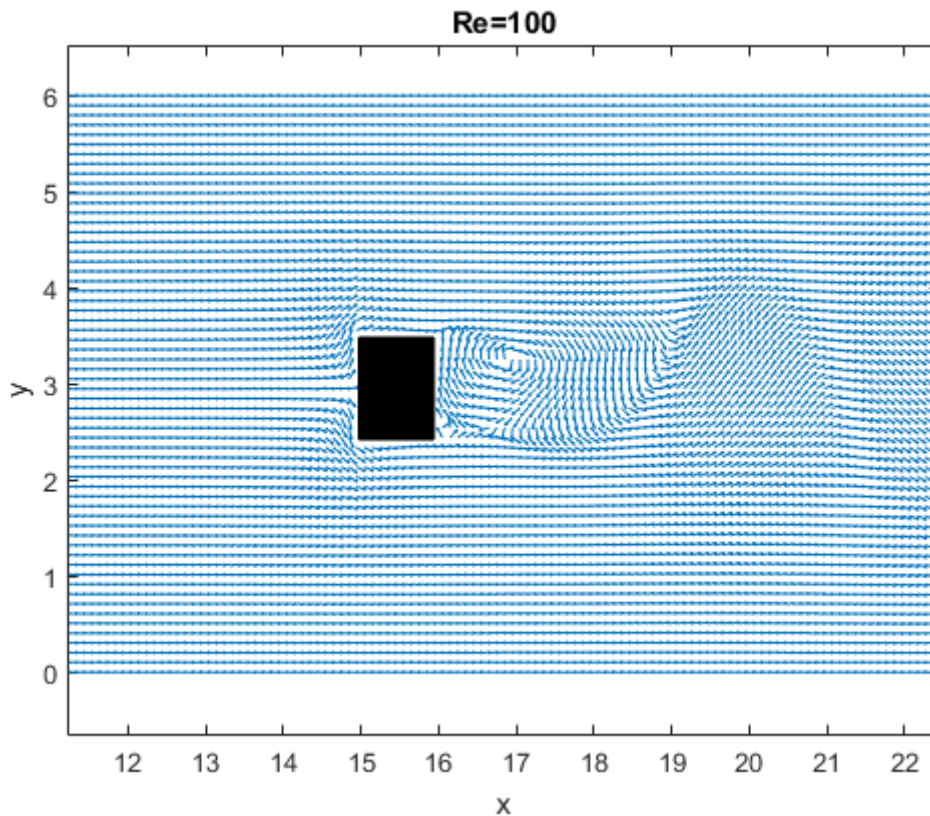
Figura(4-19)



Figura(4-20)



Figura(4-21)



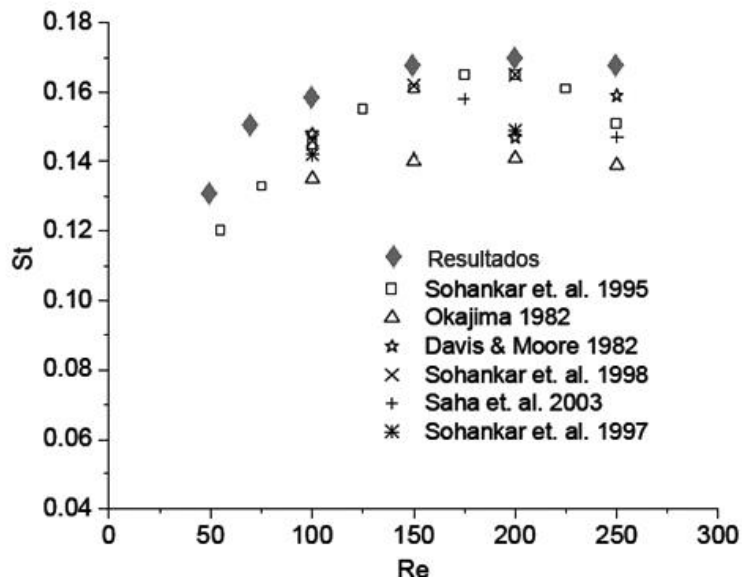
Figura(4-22)

Observamos como en la figura 4-15 correspondiente a $Re = 2$ la corriente permanece adherida, mientras que en la figura 4-16 correspondiente a $Re = 5$ esto ya no ocurre y se comienzan a formar torbellinos que se mantienen adheridos a sotavento, sin provocar la oscilación de la estela. En la figura 4-17 ya se observan los torbellinos de mayor intensidad pero se mantienen adheridos. En la figura 4-18 ya observamos como se comienza a romper la simetría y se comienza a emitir vorticidad aguas abajo, el valor del número de Reynolds crítico para el cual comienza la emisión de torbellinos será muy próximo pero ligeramente inferior a $Re = 40$. Finalmente en la figura 4-19 se aprecia muy claramente como se están emitiendo torbellinos aguas abajo provocando la oscilación de la estela que antes comentábamos.

Observamos como los resultados son muy parejos a los del cilindro circular infinito, probablemente en nuestro caso los umbrales sean ligeramente inferiores, debido a que los ángulos rectos en los que se unen las caras de nuestro cilindro facilitan el desprendimiento de la corriente.

Llegados a este punto nos surge la siguiente preocupación, ¿Con que frecuencia se desprenden torbellinos para distintos números de Reynolds? Como hemos visto anteriormente esto se puede estudiar mediante el número de Strouhal que es equivalente a una frecuencia adimensional. La adimensionalización que hemos realizado no puede ser más adecuada para el estudio de este fenómeno ya que para calcular la frecuencia adimensional y por ende el número de Strouhal únicamente debemos calcular el periodo adimensional e invertirlo, esto se puede hacer por ejemplo observando las oscilaciones del coeficiente de sustentación y obteniendo su periodo.

En la figura 4-22 observamos los resultados obtenidos mediante el esquema de MacCormack para una cavidad de relaciones de aspecto $\frac{L}{D} = 35$ y $\frac{H}{D} = 6$ los cuales deberían aproximar considerablemente bien a un cilindro inmerso en una corriente uniforme junto con los resultados de la bibliografía.

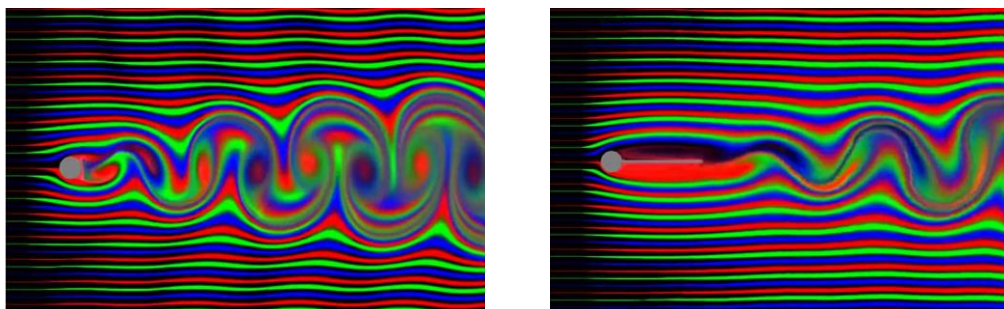


Figura(4-23)

Donde se observa como el acuerdo con los datos obtenidos de diversos autores es muy elevado. Para obtener una precisión incluso mayor podíamos ampliar el dominio computacional e imponer las condiciones de contorno más lejos del cilindro. Hemos optado por esta solución de compromiso porque proporcionaba resultados que se ajustaban a la bibliografía sin requerir un tiempo de computación excesivamente elevado.

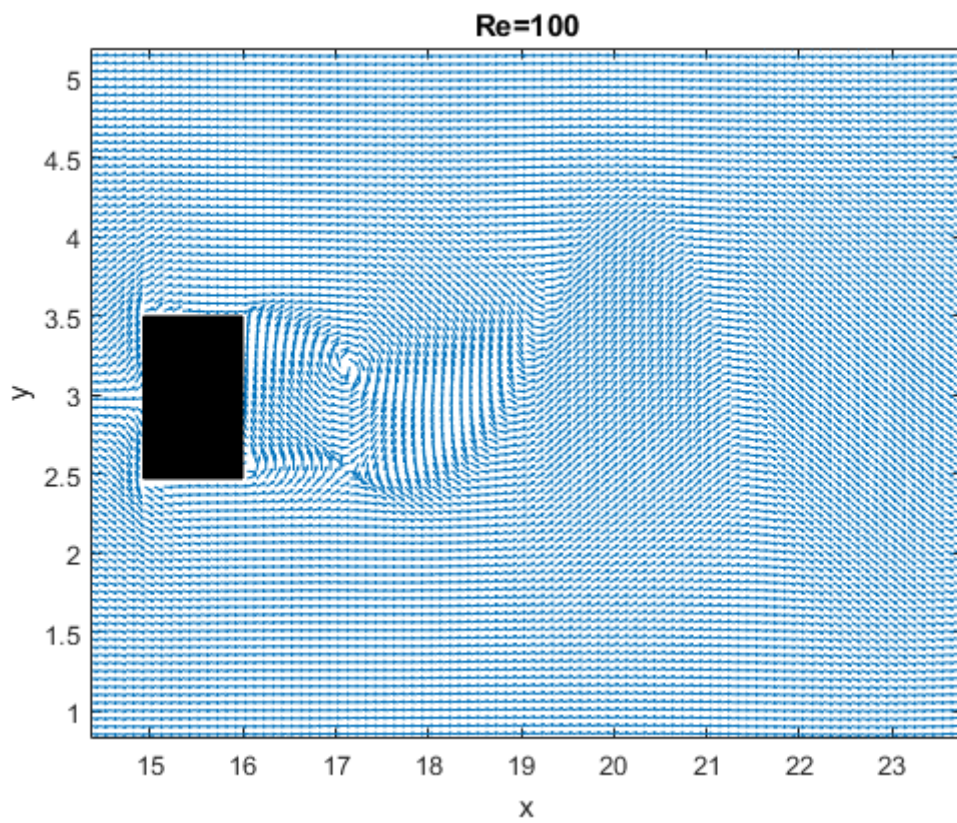
Como hemos comentado en la introducción en la ingeniería la variación de sustentación puede producir problemas estructurales en antenas de vehículos, torres de refrigeración, rascacielos, en definitiva estructuras que vean una corriente aproximadamente uniforme. Para evitar la rotura por fatiga de estos elementos suelen incluir aletas para tratar de reducir estas oscilaciones ya que si se evita que los torbellinos estén en contacto directo la inestabilidad se reduce considerablemente.

A continuación mostramos dos imágenes una correspondiente al flujo alrededor de un cilindro circular, y en la siguiente el cilindro incorpora una aleta para evitar la formación de vórtices.

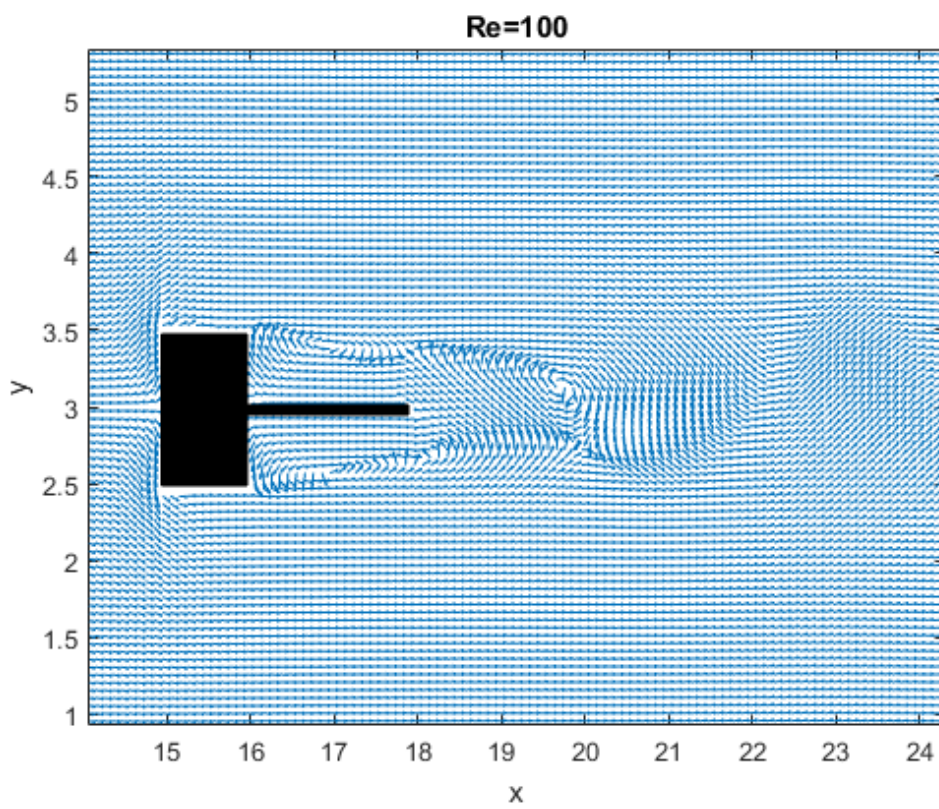


Figura(4-24)

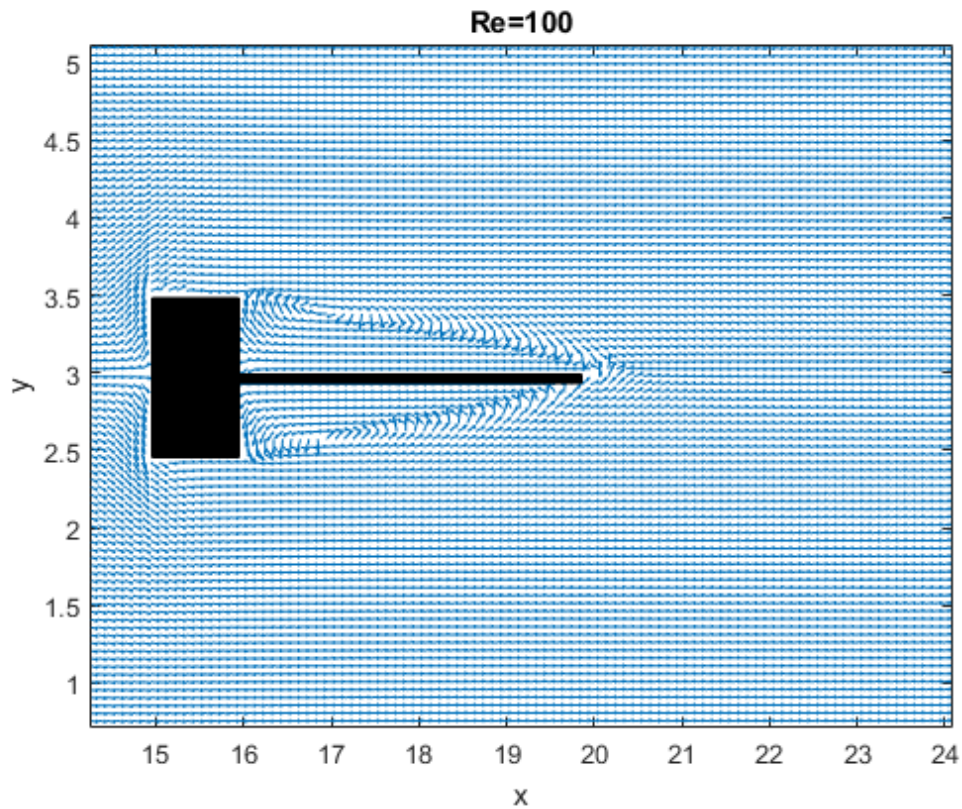
Se aprecia claramente la reducción en la oscilación de la estela. Vamos a mostrar el efecto para nuestro cuadrado.



Figura(4-25)



Figura(4-26)



Figura(4-27)

Se aprecia claramente como la inclusión de la aleta proporciona una estela mucho menos oscilante. En la aleta mas corta observamos como ambos vórtices se encuentran generando la oscilación de la estela pero con menor intensidad que en el caso sin aleta.

En el caso de la aleta mas larga, figura 4-26 observamos como los torbellinos apenas están en contacto generando una oscilación mínima de la estela.

En la siguiente página mostramos el código MATLAB utilizado para la resolución de estos problemas.

```

%=====FLUJO ALREDEDOR DE UN PRISMA DE SECCIÓN
CUADRADA=====
%=====PARÁMETROS=====
=====
close all;clear all;
nx=349;%intervalos de partición en x
ny=59;%intervalos de partición en y
nt=20000;%intervalos de partición en t
D=1; %ancho OBSTACULO
    Dt=0.002; %incremento temporal
Dx=35*D/(nx); %incremento eje x
Dy=6*D/(ny); %incremento eje y
U=1; %velocidad cavidad
%=====
%=====NODOS DEL OBSTACULO=====
i1=round(15/35*(nx+1));
i2=round(16/35*(nx+1));
j1=round(2.5/6*(ny+1));
j2=round(3.5/6*(ny+1));
%=====
%=====NUMEROS ADIMENSIONALES=====
Re=40; %numero de Reynolds
M=0.05; %numero de Mach
%=====COEFICIENTES=====
a1=Dt/Dx;
a2=Dt/Dy;
a3=Dt/(Dx*M^2);
a4=Dt/(Dy*M^2);
a5=4*Dt/(3*Re*Dx^2);
a6=Dt/(Re*Dy^2);
a7=Dt/(Re*Dx^2);
a8=4*Dt/(3*Re*Dy^2);
a9=Dt/(12*Re*Dx*Dy);
a10=2*(a5+a6);
a11=2*(a7+a8);
a12=8/9*M^2/Dx/Re;
a13=M^2/18/Dy/Re;

%=====CONDICIONES INICIALES=====
P_u=zeros(nx+1,ny+1);%velocidad x en los puntos del mallado
P_v=zeros(nx+1,ny+1);%velocidad y en los puntos del mallado
P_rho=ones(nx+1,ny+1);% densidad en los puntos del mallado
P_rhou=zeros(nx+1,ny+1);% densidad*u en los puntos del mallado
P_rhov=zeros(nx+1,ny+1);%densidad*v en los puntos del mallado
P_rhou2=zeros(nx+1,ny+1);% densidad*u^2 en los puntos del mallado
P_rhov2=zeros(nx+1,ny+1);%densidad*v^2 en los puntos del mallado
P_rhouv=zeros(nx+1,ny+1);%densidad*uv en los puntos del mallado
u=zeros(nx+1,ny+1);%velocidad x en los puntos del mallado
v=zeros(nx+1,ny+1);%velocidad y en los puntos del mallado
rho=ones(nx+1,ny+1);% densidad en los puntos del mallado
rhou=zeros(nx+1,ny+1);% densidad*u en los puntos del mallado
rhov=zeros(nx+1,ny+1);%densidad*v en los puntos del mallado
rhou2=rhou.*u(:,:);% densidad*u^2 en los puntos del mallado
rhov2=zeros(nx+1,ny+1);%densidad*v^2 en los puntos del mallado
rhouv=zeros(nx+1,ny+1);%densidad*uv en los puntos del mallado

%=====BUCLE TEMPORAL=====

cont=1;
k=0;
for q=1:nt

```

```

k=k+1;
q

%=====PREDICTOR=====
P_rho(2:nx,2:ny)=rho(2:nx,2:ny)-a1*(rhov(3:nx+1,2:ny)-rhov(2:nx,2:ny))-
a2*(rhov(2:nx,3:ny+1)-rhov(2:nx,2:ny));

P_rho(2:nx,2:ny)=rhov(2:nx,2:ny)-a3*(rho(3:nx+1,2:ny)-rho(2:nx,2:ny))-
a1*(rhov2(3:nx+1,2:ny)-rhov2(2:nx,2:ny))-a2*(rhov(2:nx,3:ny+1)-
rhov(2:nx,2:ny))-a10*u(2:nx,2:ny)+a5*(u(3:nx+1,2:ny)+u(1:nx-
1,2:ny))+a6*(u(2:nx,3:ny+1)+u(2:nx,1:ny-1))+a9*(v(3:nx+1,3:ny+1)+v(1:nx-
1,1:ny-1)-v(1:nx-1,3:ny+1)-v(3:nx+1,1:ny-1));

P_rho(2:nx,2:ny)=rhov(2:nx,2:ny)-a4*(rho(2:nx,3:ny+1)-rho(2:nx,2:ny))-
a1*((rhov(3:nx+1,2:ny)-(rhov(2:nx,2:ny)))-a2*(rhov2(2:nx,3:ny+1)-
rhov2(2:nx,2:ny))-a11*v(2:nx,2:ny)+a7*(v(3:nx+1,2:ny)+v(1:nx-
1,2:ny))+a8*(v(2:nx,3:ny+1)+v(2:nx,1:ny-1))+a9*(u(3:nx+1,3:ny+1)+u(1:nx-
1,1:ny-1)-u(1:nx-1,3:ny+1)-u(3:nx+1,1:ny-1)));

%=====DECODIFICACIÓN=====
P_u(2:nx,2:ny)=P_rho(2:nx,2:ny)./P_rho(2:nx,2:ny);

P_v(2:nx,2:ny)=P_rho(2:nx,2:ny)./P_rho(2:nx,2:ny);
%=====C.C=====
P_rho(1,1:ny+1)=rho(1,1:ny+1)-(a1/2)*(-rhov(3,1:ny+1)+4*rhov(2,1:ny+1)-
3*rhov(1,1:ny+1));%%%x=0 densidad

P_rho(nx+1,1:ny+1)=rho(nx+1,1:ny+1)+(a1/2)*(-rhov(nx-
1,1:ny+1)+4*rhov(nx,1:ny+1)-3*rhov(nx+1,1:ny+1));%%%x=d densidad

P_rho(2:nx,1)=rho(2:nx,1)-(a2/2)*(-rhov(2:nx,3)+4*rhov(2:nx,2)-
3*rhov(2:nx,1))-(a1*U/2)*(rho(3:nx+1,1)-rho(1:nx-1,1));%%%y=0 densidad

P_rho(2:nx,ny+1)=rho(2:nx,ny+1)+a2/2*(-rhov(2:nx,ny-1)+4*rhov(2:nx,ny)-
3*rhov(2:nx,ny+1))-(a1*U/2)*(rho(3:nx+1,ny+1)-rho(1:nx-1,ny+1));%%%y=d
densidad

P_rho(i1,j1:j2)=1/3*(4*rho(i1-1,j1:j2)-rho(i1-2,j1:j2))+a12*(-5*u(i1-
1,j1:j2)+4*u(i1-2,j1:j2)-u(i1-3,j1:j2))-a13*(-(v(i1-2,j1+1:j2+1)-v(i1,j1-
1:j2-1))+4*(v(i1-1,j1+1:j2+1)-v(i1-1,j1-1:j2-1))-3*(v(i1,j1+1:j2+1)-v(i1,j1-
1:j2-1)));%%%x=0 densidad cubo

P_rho(i2,j1:j2)=1/3*(4*rho(i2+1,j1:j2)-rho(i2+2,j1:j2))-a12*(-
5*u(i2+1,j1:j2)+4*u(i2+2,j1:j2)-u(i2+3,j1:j2))-a13*(-(v(i2+2,j1+1:j2+1)-
v(i2,j1-1:j2-1))+4*(v(i2+1,j1+1:j2+1)-v(i2+1,j1-1:j2-1))-3*(v(i2,j1+1:j2+1)-
v(i2,j1-1:j2-1)));%%%x=d densidad cubo

P_rho(i1:i2,j1)=1/3*(4*rho(i1:i2,j1-1)-rho(i1:i2,j1-2))+a12*(-
5*v(i1:i2,j1-1)+4*v(i1:i2,j1-2)-v(i1:i2,j1-3))-a13*(-(u(i1+1:i2+1,j1-2)-
u(i1-1:i2-1,j1-2))+4*(u(i1+1:i2+1,j1-1)-u(i1-1:i2-1,j1-1))-
3*(u(i1+1:i2+1,j1)-u(i1-1:i2-1,j1)));%%%y=0 densidad cubo

P_rho(i1:i2,j2)=1/3*(4*rho(i1:i2,j2+1)-rho(i1:i2,j2+2))-a12*(-
5*v(i1:i2,j2+1)+4*v(i1:i2,j2+2)-v(i1:i2,j2+3))-a13*(-(u(i1+1:i2+1,j2+2)-
u(i1-1:i2-1,j2+2))+4*(u(i1+1:i2+1,j2+1)-u(i1-1:i2-1,j2+1))-
3*(u(i1+1:i2+1,j2)-u(i1-1:i2-1,j2)));%%%y=d densidad cubo

```

```

P_u(2:nx,ny+1)=U;%%%velocidad u y=d
P_v(2:nx,ny+1)=0;%%%velocidad v y=d
P_u(2:nx,1)=U;%%%velocidad u y=0
P_v(2:nx,1)=0;%%%velocidad v y=0
P_u(nx+1,:)=U;%%%velocidad u x=d
P_v(nx+1,:)=0;%%%velocidad v x=d
P_u(1,:)=U;%%%velocidad u x=0
P_v(1,:)=0;%%%velocidad v x=0

P_u(i1:i2,j1:j2)=0;
P_v(i1:i2,j1:j2)=0;

%=====ACTUALIZACIÓN=====
P_rhou=P_rho.*P_u;
P_rhov=P_rho.*P_v;

P_rhou2=P_rhou.*P_u;
P_rhouv=P_rhou.*P_v;
P_rhov2=P_rhov.*P_v;

%=====CORRECTOR=====
rho(2:nx,2:ny)=(rho(2:nx,2:ny)+P_rho(2:nx,2:ny)-a1*(P_rhou(2:nx,2:ny)-
P_rhou(1:nx-1,2:ny))-a2*(P_rhov(2:nx,2:ny)-P_rhov(2:nx,1:ny-1)))*0.5;

rhou(2:nx,2:ny)=0.5*(rhou(2:nx,2:ny)+P_rhou(2:nx,2:ny)-
a3*(P_rho(2:nx,2:ny)-P_rho(1:nx-1,2:ny))-a1*(P_rhou2(2:nx,2:ny)-
P_rhou2(1:nx-1,2:ny))-a2*(P_rhouv(2:nx,2:ny)-P_rhouv(2:nx,1:ny-1))-
a10*P_u(2:nx,2:ny)+a5*(P_u(3:nx+1,2:ny)+P_u(1:nx-
1,2:ny))+a6*(P_u(2:nx,3:ny+1)+P_u(2:nx,1:ny-
1))+a9*(P_v(3:nx+1,3:ny+1)+P_v(1:nx-1,1:ny-1)-P_v(1:nx-1,3:ny+1)-
P_v(3:nx+1,1:ny-1)));

rhov(2:nx,2:ny)=0.5*(rhov(2:nx,2:ny)+P_rhov(2:nx,2:ny)-
a4*(P_rho(2:nx,2:ny)-P_rho(2:nx,1:ny-1))-a1*(P_rhouv(2:nx,2:ny)-
P_rhouv(1:nx-1,2:ny))-a2*(P_rhov2(2:nx,2:ny)-P_rhov2(2:nx,1:ny-1))-
a11*P_v(2:nx,2:ny)+a7*(P_v(3:nx+1,2:ny)+P_v(1:nx-
1,2:ny))+a8*(P_v(2:nx,3:ny+1)+P_v(2:nx,1:ny-
1))+a9*(P_u(3:nx+1,3:ny+1)+P_u(1:nx-1,1:ny-1)-P_u(1:nx-1,3:ny+1)-
P_u(3:nx+1,1:ny-1)));

%=====DECODIFICACIÓN=====
u=rhou./rho;
v=rhov./rho;

%=====C.C=====

rho(1,2:ny)=(P_rho(1,2:ny)+rho(1,2:ny)-a1/2*(-
P_rhou(3,2:ny)+4*P_rhou(2,2:ny)-3*P_rhou(1,2:ny)))*0.5;%%%x=0

rho(nx+1,2:ny)=(P_rho(nx+1,2:ny)+rho(1,2:ny)+a1/2*(-P_rhou(nx-
1,2:ny)+4*P_rhou(nx,2:ny)-3*P_rhou(nx+1,2:ny)))*0.5;%%%x=d

rho(2:nx,1)=(P_rho(2:nx,1)+rho(2:nx,1)-a2/2*(-
P_rhov(2:nx,3)+4*P_rhov(2:nx,2)-3*P_rhov(2:nx,1))-a1*U/2*(P_rho(3:nx+1,1)-
P_rho(1:nx-1,1)))*0.5;%%%y=0

rho(2:nx,1+ny)=(P_rho(2:nx,1+ny)+rho(2:nx,1+ny)+a2/2*(-P_rhov(2:nx,ny-
1)+4*P_rhov(2:nx,ny)-3*P_rhov(2:nx,ny+1))-a1*U/2*(P_rho(3:nx+1,ny+1)-
P_rho(1:nx-1,ny+1)))*0.5;%%%y=d

```

```

rho(i1,j1:j2)=(rho(i1,j1:j2)+1/3*(4*P_rho(i1-1,j1:j2)-P_rho(i1-
2,j1:j2))+a12*(-5*P_u(i1-1,j1:j2)+4*P_u(i1-2,j1:j2)-P_u(i1-3,j1:j2))-a13*(-
(P_v(i1-2,j1+1:j2+1)-P_v(i1,j1-1:j2-1))+4*(P_v(i1-1,j1+1:j2+1)-P_v(i1-1,j1-
1:j2-1)))-3*(P_v(i1,j1+1:j2+1)-P_v(i1,j1-1:j2-1))))*0.5;%%%x=0 densidad cubo

```

```

rho(i2,j1:j2)=(rho(i2,j1:j2)+1/3*(4*P_rho(i2+1,j1:j2)-
P_rho(i2+2,j1:j2))-a12*(-5*P_u(i2+1,j1:j2)+4*P_u(i2+2,j1:j2)-
P_u(i2+3,j1:j2))-a13*(-(P_v(i2+2,j1+1:j2+1)-P_v(i2,j1-1:j2-
1))+4*(P_v(i2+1,j1+1:j2+1)-P_v(i2+1,j1-1:j2-1)))-3*(P_v(i2,j1+1:j2+1)-
P_v(i2,j1-1:j2-1))))*0.5;%%%x=d densidad cubo

```

```

rho(i1:i2,j1)=(rho(i1:i2,j1)+1/3*(4*P_rho(i1:i2,j1-1)-P_rho(i1:i2,j1-
2))+a12*(-5*P_v(i1:i2,j1-1)+4*P_v(i1:i2,j1-2)-P_v(i1:i2,j1-3))-a13*(-
(P_u(i1+1:i2+1,j1-2)-P_u(i1-1:i2-1,j1-2))+4*(P_u(i1+1:i2+1,j1-1)-P_u(i1-
1:i2-1,j1-1)))-3*(P_u(i1+1:i2+1,j1)-P_u(i1-1:i2-1,j1))))*0.5;%%%y=0 densidad
cubo

```

```

rho(i1:i2,j2)=(rho(i1:i2,j2)+1/3*(4*P_rho(i1:i2,j2+1)-
P_rho(i1:i2,j2+2))-a12*(-5*P_v(i1:i2,j2+1)+4*P_v(i1:i2,j2+2)-
P_v(i1:i2,j2+3))-a13*(-(P_u(i1+1:i2+1,j2+2)-P_u(i1-1:i2-
1,j2+2))+4*(P_u(i1+1:i2+1,j2+1)-P_u(i1-1:i2-1,j2+1)))-3*(P_u(i1+1:i2+1,j2)-
P_u(i1-1:i2-1,j2))))*0.5;%%%y=d densidad cubo

```

```

u(2:nx,ny+1)=U;%%%velocidad u y=d
v(2:nx,ny+1)=0;%%%velocidad v y=d
u(2:nx,1)=U;%%%velocidad u y=0
v(2:nx,1)=0;%%%velocidad v y=0
u(nx+1,:)=U;%%%velocidad u x=d
v(nx+1,:)=0;%%%velocidad v x=d
u(1,:)=U;%%%velocidad u x=0
v(1,:)=0;%%%velocidad v x=0

```

```

u(i1:i2,j1:j2)=0;
v(i1:i2,j1:j2)=0;

```

```

%=====ACTUALIZACIÓN=====

```

```

rhou=rho.*u;
rhov=rho.*v;

```

```

rhou2=rhou.*u;
rhouv=rhou.*v;
rhov2=rhov.*v;

```

```

%=====REPRESENTACIÓN GRÁFICA=====

```

```

if k==100
pel(:, :, cont)=[u v];
k=0;

```

```

cont=cont+1;

```

```

end

```

```

%=====CÁLCULO DE COEFICIENTES=====

```

```

CL(q)=2*sum(rho(i1:i2,j1)-rho(i1:i2,j2))*Dx/M^2;
CD(q)=2*sum(rho(i1,j1:j2)-rho(i2,j1:j2))*Dy/M^2;

```

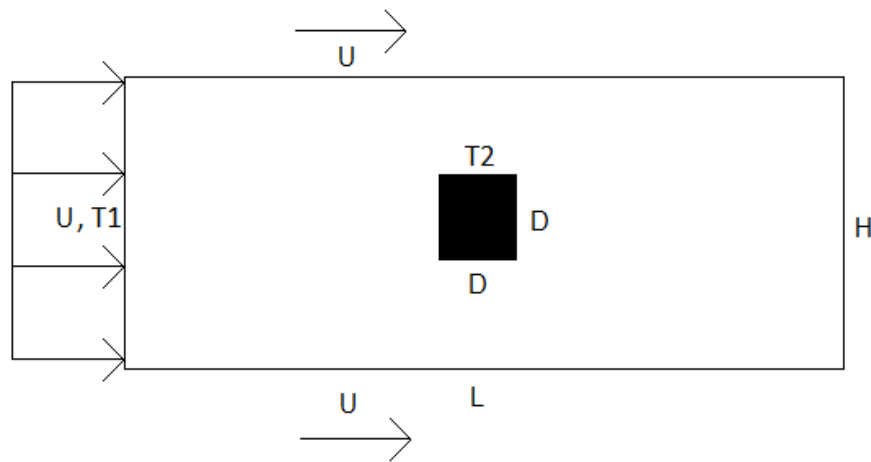
```
end
figure

T=sqrt(v'.^2+u'.^2);

    quiver(linspace(0,35,nx+1),linspace(0,6,ny+1),u'./T,v'./T)
t=Dt*nt
```


5 APLICACIÓN: FLUJO BIDIMENSIONAL ALREDEDOR DE UN CUADRADO CON TEMPERATURA

El esquema de esta aplicación es el mismo que la anterior, un cuadrado desplazándose hacia la izquierda en un canal, pero en este caso la temperatura del cuadrado será mayor a la temperatura ambiente permitiéndonos así estudiar las capas límite Térmicas que pudiesen generarse.



Figura(5-1)

Las ecuaciones en esta aplicación lógicamente deben de ser complementadas con la ecuación de la energía y condiciones de contorno en temperatura. A continuación se muestran las ecuaciones completas que expusimos en el apartado 3 de las que realizaremos algunas simplificaciones:

$$\frac{\partial(U)}{\partial t} + \frac{\partial(F)}{\partial x} + \frac{\partial(G)}{\partial y} + S = 0 \quad (5-1)$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (E + p)u - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} + q_x \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ (E + p)v - u\tau_{xy} - v\tau_{yy} + q_y \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \\ \rho vg \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

Los términos de fuerzas másicas se podrán despreciar ya que:

$$Fr^2 = \frac{U^2}{gL} \quad (5-6)$$

En los números de Mach en los que nos moveremos ($M = 0.05 - 0.2$) y para las longitudes características habituales ($L \sim 1m$) y teniendo en cuenta que estamos en la tierra, tenemos que:

$$Fr^2 \gg 1 \quad (5-7)$$

Por tanto despreciaremos es vector S.

Los términos de disipación viscosa comparados con los de convección térmica se pueden expresar como:

$$\frac{\overline{\tau}^T: \nabla \vec{v}}{\rho c_p \vec{v} \nabla T} \sim \frac{\frac{\mu U^2}{L^2}}{\rho c_p U \frac{T_2 - T_1}{L}} = \frac{\nu}{c_p L (T_2 - T_1)} \quad (5-8)$$

Que nuevamente para los casos considerados puede ser despreciado.

Por tanto las ecuaciones quedarán:

$$\frac{\partial(U)}{\partial t} + \frac{\partial(F)}{\partial x} + \frac{\partial(G)}{\partial y} + S = 0 \quad (5-9)$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} \quad (5-10)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (E + p)u + q_x \end{bmatrix} \quad (5-11)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ (E + p)v + q_y \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

Se introducen las siguientes variables adimensionales:

$$x^* = \frac{x}{D}, \quad y^* = \frac{y}{D}, \quad u^* = \frac{u}{a}, \quad t^* = \frac{a}{D}t, \quad v^* = \frac{v}{a}, \quad p^* = \frac{p}{p_0}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad T^* = \frac{TR\rho_0}{p_0} \quad (5-13)$$

Definimos los siguientes parámetros adimensionales:

$$Re = \frac{\rho_0 a H}{\mu} \quad Pr = \frac{\mu c_p}{k} \quad M = \frac{U}{a_0} \quad (5-14)$$

Números de Reynolds, Prandtl y Mach respectivamente.

Resultando las ecuaciones:

$$\frac{\partial(U)}{\partial t} + \frac{\partial(F)}{\partial x} + \frac{\partial(G)}{\partial y} + S = 0 \quad (5-15)$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} \quad (5-16)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \rho T - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (E + \rho T)u + q_x \end{bmatrix} \quad (5-17)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + \rho T - \tau_{yy} \\ (E + \rho T)v + q_y \end{bmatrix} \quad (5-18)$$

Siendo τ_{ij} el tensor de esfuerzos viscosos que en las nuevas variables se puede expresar como:

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3Re} \left(\frac{2\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3Re} \left(\frac{2\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \tau_{xy} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (5-19)$$

Y los términos de conducción de calor quedarían:

$$q_x = -\frac{1}{PrRe(\gamma - 1)} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad q_y = -\frac{1}{PrRe(\gamma - 1)} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (5-20)$$

Y finalmente la ecuación de estado para un gas ideal en estas variables quedaría:

$$p = \rho T \quad (5-21)$$

Las condiciones de contorno en velocidades serán idénticas al anterior apartado:

$$u(0, y) = M \quad v(0, y) = 0 \quad u(1, y) = M \quad v(1, y) = 0 \quad (5-22)$$

$$u(x, 0) = M \quad v(x, 0) = 0 \quad u(x, 1) = M \quad v(x, 1) = 0 \quad (5-23)$$

$$u(x_{ci}, y_c) = 0 \quad v(x_{ci}, y_c) = 0 \quad u(x_{cf}, y_c) = 0 \quad v(x_{cf}, y_c) = 0 \quad (5-24)$$

$$u(x_c, y_{ci}) = 0 \quad v(x_c, y_{ci}) = 0 \quad u(x_c, y_{cf}) = 0 \quad v(x_c, y_{cf}) = 0 \quad (5-25)$$

Siendo x_{ci} la coordenada x del inicio del cuadrado, x_{cf} la coordenada x del final del cuadrado y para la coordenada y la nomenclatura es análoga.

Es necesario imponer condiciones de contorno en densidad (o presión). Vamos a realizar esto utilizando la ecuación de continuidad:

$$\text{Tapa inferior} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \quad (5-26)$$

$$\text{Tapa superior} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \quad (5-27)$$

$$\text{Tapa izquierda} \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \quad (5-28)$$

$$\text{Tapa derecha} \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \quad (5-29)$$

Que observamos que si aplicamos las diferencias progresivas, regresivas y centrales obtenidas en el apartado 3.2 podremos calcular las densidades en la frontera de nuestro canal.

Para las condiciones de densidad en el cuadrado, se actualizarán con la ecuación de continuidad:

$$\text{Lado inferior} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \quad (5-30)$$

$$\text{Lado superior} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \quad (5-31)$$

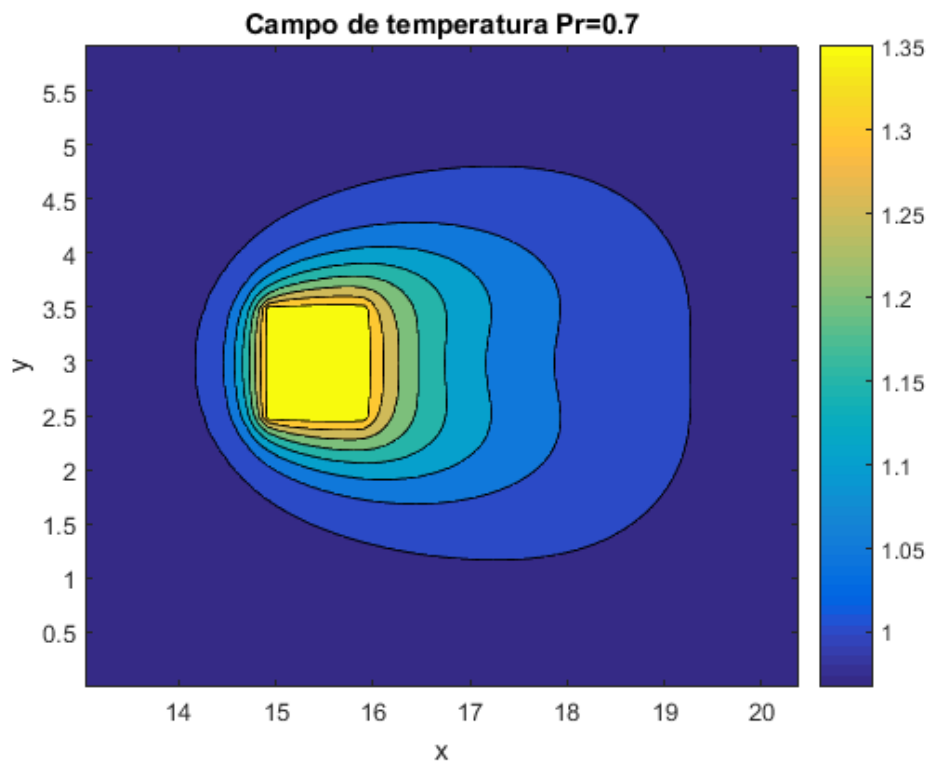
$$\text{Lado izquierdo} \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \quad (5-32)$$

$$\text{Tapa derecho} \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \quad (5-33)$$

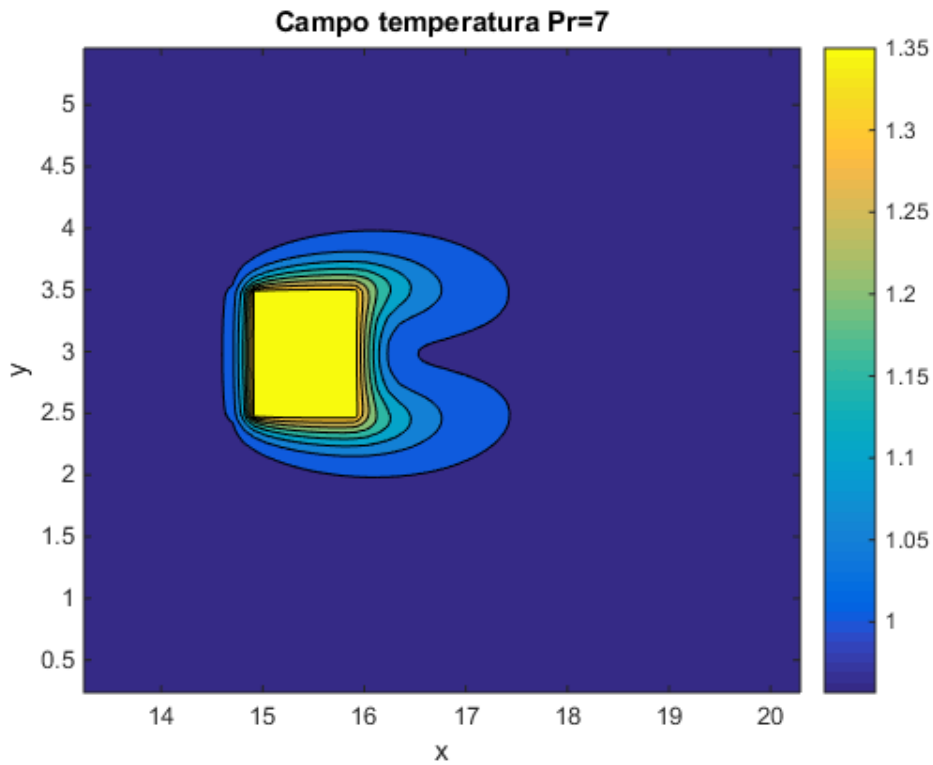
Las condiciones de contorno en temperatura serán las siguientes:

- La temperatura a la entrada del conducto será uniforme igual a la temperatura inicial del fluido, en nuestras variables adimensionales: $T_1 = 1$
- La condición de contorno en las paredes superior e inferior se calculará considerando que són adiabáticas: $\frac{dT}{dy} = 0$.
- La condición de contorno a la salida se calculará imponiendo que la variación de temperatura en la última celda sea lineal, con la pendiente calculada con los dos nodos anteriores.

Vamos a analizar el campo de temperaturas resultante en el entorno del cuadrado para distintos números de Prandtl, $Pr = 0.73$ y $Pr = 7$ transcurrido $t^* = 7.5$.



Figura(5-2)

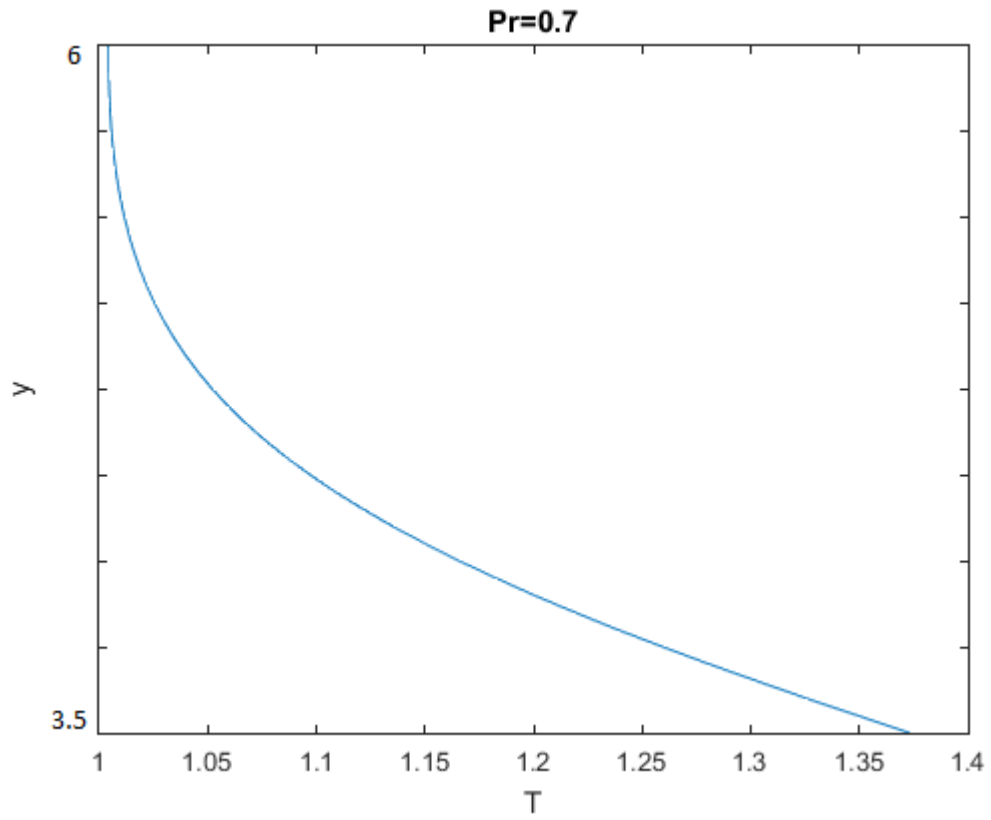


Figura(5-3)

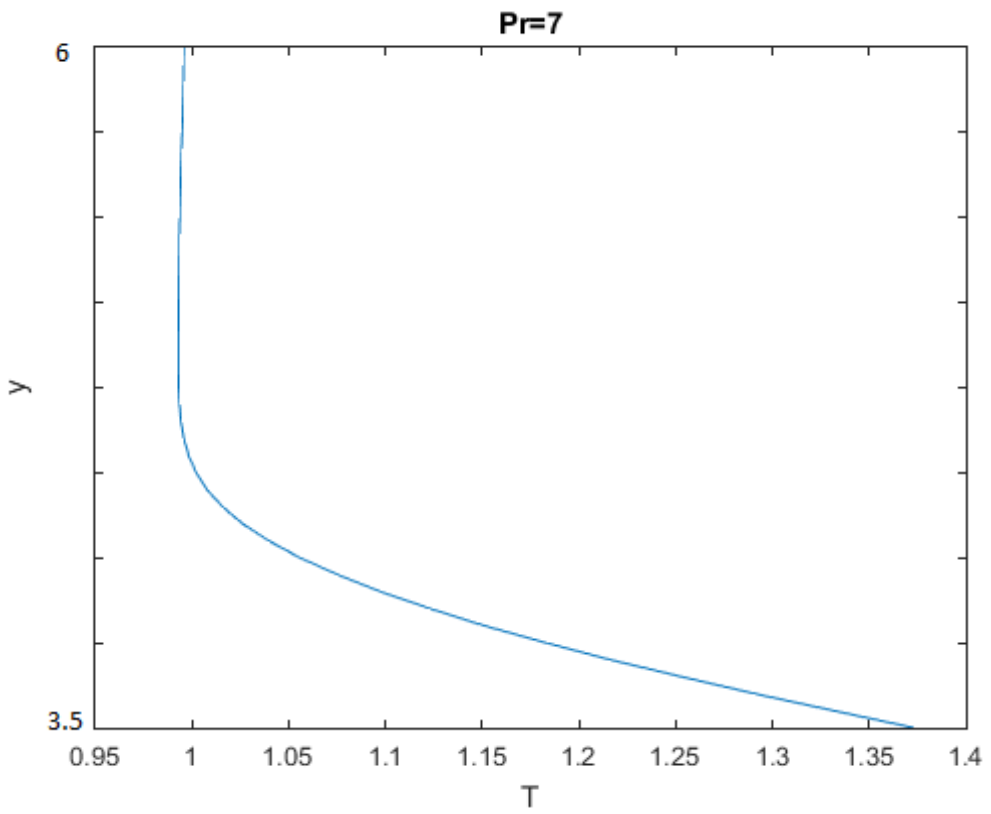
Se aprecia claramente como en el primer caso correspondiente a $Pr = 0.7$ los efectos de conducción de calor son permitiendo que exista una transferencia de calor en todas direcciones buscando suavizar el gradiente adverso de temperatura. No obstante, al considerar un Numero de Prandtl de orden unidad ambos efectos estarán presentes y se puede observar como parte del calor está siendo convectado por el flujo aguas abajo del cuadrado.

En el segundo caso se observa como dominan claramente los mecanismos de transferencia de calor por convección, ya que el flujo barre el calor que desprende el objeto antes de que este pueda transmitirse por conducción.

Para realizar una comparación más exhaustiva podemos representar los perfiles de temperatura en ambos casos.



Figura(5-4)



Figura(5-5)

Donde se aprecia con más claridad si cabe la dominancia de los mecanismos de transferencia de calor por convección en el caso de $Pr = 7$ mientras que en el caso de $Pr = 0.7$ ambos mecanismos son importantes.

Si realizamos un análisis de órdenes de magnitud podemos estimar los espesores de la capa límite térmica.

$$\frac{\delta_t}{D} = \frac{1}{\sqrt{RePr}} \quad (5-34)$$

Teniendo en cuenta que ambos casos se han obtenido para un mismo número de Reynolds podemos obtener la siguiente relación:

$$\frac{\delta_t^{0.7}}{\delta_t^7} = \sqrt{\frac{7}{0.7}} = \sqrt{10} \sim 3.16 \quad (5-35)$$

Esto se puede corroborar observando los perfiles de temperatura representados anteriormente:

$$\frac{\delta_t^{0.7}}{\delta_t^7} = \frac{2.5}{0.9375} = 2.668 \quad (5-36)$$

Vemos como ambos números son del mismo orden de magnitud. No obstante, es conveniente comentar que en el caso de $Pr = 0.7$ los efectos perturbadores de la pared del conducto aparecen antes de que se pueda desarrollar completamente el perfil de temperaturas.

En la página siguiente mostramos el código MATLAB utilizado para la resolución de estos problemas.


```

%=====FLUJO ALREDEDOR DE UN CUADRADO CON TEMPERATURA=====
%LAS VARIABLES P_ SE CORRESPONDEN AL TERMINO PREDICTOR
%=====
close all;clear all;
%=====PARÁMETROS=====
nx=319;%intervalos de partición en x
ny=179;%intervalos de partición en y
nt=35000;%intervalos de partición en t
D=1; %ancho cavidad
Dt=0.003; %incremento temporal
Dx=35*D/nx; %incremento eje x
Dy=6*D/ny; %incremento eje y

%=====NODOS CUADRADO=====
i1=round(15/35*(nx+1));
i2=round(16/35*(nx+1));
j1=round(2.5/6*(ny+1));
j2=round(3.5/6*(ny+1));

%=====NÚMEROS ADIMENSIONALES=====
M=0.15; %número de Mach
Re=100; %número de Reynolds
gamma=1.4;
dt=0.35; %incremento temperatura

%=====TEMPERATURAS Y VELOCIDAD=====
T2=1+dt;%temperatura cuadrado
T1=1; %temperatura fluido
U=M; %velocidad cavidad

%=====COEFICIENTES=====

a1=Dt/Dx;
a2=Dt/Dy;
a3=Dt/Pr^2;
a4=-Dt/Pr/Re/(gamma-1)/Dx^2;
a52=-Dt/Pr/Re/(gamma-1)/Dy^2;
a5=4*Dt/(3*Re*Dx^2);
a6=Dt/(Re*Dy^2);
a7=Dt/(Re*Dx^2);
a8=4*Dt/(3*Re*Dy^2);
a9=Dt/(12*Re*Dx*Dy);
a10=2*(a5+a6);
a11=2*(a7+a8);

%=====MALLADO=====

x=linspace(0,35,nx+1);y=linspace(0,6,ny+1);[X,Y]=meshgrid(x,y) ; %mallado
%=====CONDICIONES INICIALES=====

P_u=ones(nx+1,ny+1)*U;%velocidad x en los puntos del mallado
P_v=zeros(nx+1,ny+1);%velocidad y en los puntos del mallado
P_u(i1:i2,j1:j2)=0; %velocidad x en el cuadrado
P_v(i1:i2,j1:j2)=0; %velocidad y en el cuadrado
P_T=ones(nx+1,ny+1)*T1; %campo de temperatura en cada punto del mallado
equilibrio
P_rho=ones(nx+1,ny+1);% densidad en los puntos del mallado
P_rhou=P_rho.*P_u;% densidad*u en los puntos del mallado
P_rhov=P_rho.*P_v;%densidad*v en los puntos del mallado
P_rhou2=P_rhou.*P_u;% densidad*u^2 en los puntos del mallado
P_rhov2=P_rhov.*P_v;%densidad*v^2 en los puntos del mallado

```

```

P_rhouv=P_rhou.*P_v;%densidad*uv en los puntos del mallado
P_E=(P_T/gamma/(gamma-1)-0.5*(P_v.^2+P_u.^2)).*P_rho;%energía total en los
puntos del mallado
P_Eu=P_E.*P_u;%energía*u total en los puntos del mallado
P_Ev=P_E.*P_v;%energía*v total en los puntos del mallado

u=ones(nx+1,ny+1)*U;%velocidad x en los puntos del mallado
v=zeros(nx+1,ny+1);%velocidad y en los puntos del mallado
u(i1:i2,j1:j2)=0;%velocidad x en el cuadrado
v(i1:i2,j1:j2)=0;%velocidad v en el cuadrado
T=ones(nx+1,ny+1)*T1;%campo de temperatura en cada punto del mallado
equilibrio
rho=ones(nx+1,ny+1);% densidad en los puntos del mallado
rhou=rho.*u;% densidad*u en los puntos del mallado
rhov=rho.*v;%densidad*v en los puntos del mallado
rhou2=rhou.*u;% densidad*u^2 en los puntos del mallado
rhov2=rhov.*v;%densidad*v^2 en los puntos del mallado
rhouv=rhou.*v;%densidad*uv en los puntos del mallado
E=(T/gamma/(gamma-1)-0.5*(v.^2+u.^2)).*rho;%energía total en los puntos del
mallado
Eu=E.*u;%energía*u total en los puntos del mallado
Ev=E.*v;%energía*v total en los puntos del mallado

%=====BUCLE TEMPORAL=====
cont=1;
k=1;
for q=1:nt

    u(:, :)=rhou(:, :)./rho(:, :);
    v(:, :)=rhov(:, :)./rho(:, :);
    k=1+k;

    %=====PREDICTOR=====

pdgamma=(gamma-1)*(E-0.5*rho.*(u.^2+v.^2));%VARIABLE AUXILIAR PRESIÓN

P_rho(2:nx,2:ny)=rho(2:nx,2:ny)-a1*(rhou(3:nx+1,2:ny)-rhou(2:nx,2:ny))-
a2*(rhov(2:nx,3:ny+1)-rhov(2:nx,2:ny));
P_rhou(2:nx,2:ny)=rhou(2:nx,2:ny)-a1*(gamma-1)*(E(3:nx+1,2:ny)-
E(2:nx,2:ny))+a1*0.5*(gamma-1)*((rhov2(3:nx+1,2:ny)+rhou2(3:nx+1,2:ny))-
(rhov2(2:nx,2:ny)+rhou2(2:nx,2:ny)))-a1*(rhou2(3:nx+1,2:ny)-
rhou2(2:nx,2:ny))-a2*(rhouv(2:nx,3:ny+1)-rhouv(2:nx,2:ny))-
a10*u(2:nx,2:ny)+a5*(u(3:nx+1,2:ny)+u(1:nx-
1,2:ny))+a6*(u(2:nx,3:ny+1)+u(2:nx,1:ny-1))+a9*(v(3:nx+1,3:ny+1)+v(1:nx-
1,1:ny-1)-v(1:nx-1,3:ny+1)-v(3:nx+1,1:ny-1));
P_rhov(2:nx,2:ny)=rhov(2:nx,2:ny)-a2*(gamma-1)*(E(2:nx,3:ny+1)-
E(2:nx,2:ny))+a1*0.5*(gamma-1)*((rhov2(2:nx,3:ny+1)+rhou2(2:nx,3:ny+1))-
(rhov2(2:nx,2:ny)+rhou2(2:nx,2:ny)))-a1*((rhouv(3:nx+1,2:ny))-
(rhouv(2:nx,2:ny)))-a2*(rhov2(2:nx,3:ny+1)-rhov2(2:nx,2:ny))-
a11*v(2:nx,2:ny)+a7*(v(3:nx+1,2:ny)+v(1:nx-
1,2:ny))+a8*(v(2:nx,3:ny+1)+v(2:nx,1:ny-1))+a9*(u(3:nx+1,3:ny+1)+u(1:nx-
1,1:ny-1)-u(1:nx-1,3:ny+1)-u(3:nx+1,1:ny-1));
P_E(2:nx,2:ny)=E(2:nx,2:ny)-
a1*(u(3:nx+1,2:ny).*(E(3:nx+1,2:ny)+pdgamma(3:nx+1,2:ny))-
u(2:nx,2:ny).*(E(2:nx,2:ny)+pdgamma(2:nx,2:ny)))-a4*(T(3:nx+1,2:ny)-
2*T(2:nx,2:ny)+T(1:nx-1,2:ny))-a52*(T(2:nx,3:ny+1)-
2*T(2:nx,2:ny)+T(2:nx,1:ny-1))-
a2*(v(2:nx,3:ny+1).*(E(2:nx,3:ny+1)+pdgamma(2:nx,3:ny+1))-
v(2:nx,2:ny).*(E(2:nx,2:ny)+pdgamma(2:nx,2:ny)));

```

```

%=====DECODIFICACIÓN VARIABLES=====
P_u=P_rho./P_rho;
P_v=P_rho_v./P_rho;
Vmod2(2:nx,2:ny)=P_v(2:nx,2:ny).^2+P_u(2:nx,2:ny).^2;%variable auxiliar
módulo velocidad al cuadrado
P_T(2:nx,2:ny)=(P_E(2:nx,2:ny)./P_rho(2:nx,2:ny)-
0.5*Vmod2(2:nx,2:ny))*gamma*(gamma-1);

%=====CONDICIONES DE CONTORNO PREDICTOR=====

P_rho(1,1:ny+1)=rho(1,1:ny+1)-(a1/2)*(-rhov(3,1:ny+1)+4*rhov(2,1:ny+1)-
3*rhov(1,1:ny+1));%%%x=0 densidad
P_rho(nx+1,1:ny+1)=rho(nx+1,1:ny+1)+(a1/2)*(-rhov(nx-
1,1:ny+1)+4*rhov(nx,1:ny+1)-3*rhov(nx+1,1:ny+1));%%%x=d densidad
P_rho(2:nx,1)=rho(2:nx,1)-(a2/2)*(-rhov(2:nx,3)+4*rhov(2:nx,2)-
3*rhov(2:nx,1))-(a1*U/2)*(rho(3:nx+1,1)-rho(1:nx-1,1));%%%y=0 densidad
P_rho(2:nx,ny+1)=rho(2:nx,ny+1)+a2/2*(-rhov(2:nx,ny-1)+4*rhov(2:nx,ny)-
3*rhov(2:nx,ny+1))-(a1*U/2)*(rho(3:nx+1,ny+1)-rho(1:nx-1,ny+1));%%%y=d
densidad

P_rho(i1,j1:j2)=rho(i1,j1:j2)+(a1/2)*(-rhov(i1-2,j1:j2)+4*rhov(i1-
1,j1:j2)-3*rhov(i1,j1:j2));%%%x=0 densidad cubo
P_rho(i2,j1:j2)=rho(i2,j1:j2)-(a1/2)*(-
rhov(i2+2,j1:j2)+4*rhov(i2+1,j1:j2)-3*rhov(i2,j1:j2));%%%x=d densidad cubo
P_rho(i1:i2,j1)=rho(i1:i2,j1)+a2/2*(-rhov(i1:i2,j1-2)+4*rhov(i1:i2,j1-1)-
3*rhov(i1:i2,j1));%%%y=0 densidad cubo
P_rho(i1:i2,j2)=rho(i1:i2,j2)-(a2/2)*(-
rhov(i1:i2,j2+2)+4*rhov(i1:i2,j2+1)-3*rhov(i1:i2,j2));%%%y=d densidad cubo

P_u(2:nx,ny+1)=U;%%%velocidad u y=d
P_v(2:nx,ny+1)=0;%%%velocidad v y=d
P_u(2:nx,1)=U;%%%velocidad u y=0
P_v(2:nx,1)=0;%%%velocidad v y=0
P_u(nx+1,:)=U;%%%velocidad u x=d
P_v(nx+1,:)=0;%%%velocidad v x=d
P_u(1,:)=U;%%%velocidad u x=0
P_v(1,:)=0;%%%velocidad v x=0

P_u(i1:i2,j2)=0;%%%velocidad u y=d cubo
P_v(i1:i2,j2)=0;%%%velocidad v y=d cubo
P_u(i1:i2,j1)=0;%%%velocidad u y=0 cubo
P_v(i1:i2,j1)=0;%%%velocidad v y=0 cubo
P_u(i2,j1:j2)=0;%%%velocidad u x=d cubo
P_v(i2,j1:j2)=0;%%%velocidad v x=d cubo
P_u(i1,j1:j2)=0;%%%velocidad u x=0 cubo
P_v(i1,j1:j2)=0;%%%velocidad v x=0 cubo
P_u(i1:i2,j1:j2)=0;
P_v(i1:i2,j1:j2)=0;

P_T(:,1)=(4*P_T(:,2)-P_T(:,3))/3;
P_T(:,ny+1)=(4*P_T(:,ny)-P_T(:,ny-1))/3;
P_T(1,2:ny)=T1 ;
P_T(nx+1,2:ny)=P_T(nx,2:ny)+(P_T(nx,2:ny)-P_T(nx-1,2:ny));

P_T(i1:i2,j1:j2)=T2;

```

```

P_E(:,1)=P_T(:,1).*P_rho(:,1)/gamma/(gamma-1);
P_E(:,ny+1)=P_T(:,ny+1).*P_rho(:,ny+1)/gamma/(gamma-1);
P_E(1,2:ny)=P_T(1,2:ny).*P_rho(1,2:ny)/gamma/(gamma-1);
P_E(nx+1,2:ny)=P_T(nx+1,2:ny).*P_rho(nx+1,2:ny)/gamma/(gamma-1);
P_rhou(2:nx,ny+1)=P_rho(2:nx,1+ny).* P_u(2:nx,ny+1);%%%%%%%%densidad*u en
y=d
P_rhou(2:nx,1)=P_rho(2:nx,1).* P_u(2:nx,1);%%%%%%%%densidad*u en y=0
P_rhou(1,:)=P_rho(1,:).* P_u(1,:);%%%%%%%%densidad*u en x=0
P_rhou(nx+1,:)=P_rho(nx+1,:).* P_u(nx+1,:);%%%%%%%%densidad*u en x=d
P_rhov(2:nx,ny+1)=P_rho(2:nx,1+ny).* P_v(2:nx,ny+1);%%%%%%%%densidad*v en
y=d
P_rhov(2:nx,1)=P_rho(2:nx,1).* P_v(2:nx,1);%%%%%%%%densidad*v en y=0
P_rhov(1,:)=P_rho(1,:).* P_v(1,:);%%%%%%%%densidad*v en x=0
P_rhov(nx+1,:)=P_rho(nx+1,:).* P_v(nx+1,:);%%%%%%%%densidad*v en x=d

%=====ACTUALIZACIÓN DE VARIABLES=====
Vmod2(2:nx,2:ny)=P_v(2:nx,2:ny).^2+P_u(2:nx,2:ny).^2;
P_T(2:nx,2:ny)=(P_E(2:nx,2:ny)./P_rho(2:nx,2:ny)-
0.5*Vmod2(2:nx,2:ny))*gamma*(gamma-1);
P_rhou2=P_rhou.*P_u;
P_rhouv=P_rhou.*P_v;
P_rhov2=P_rhov.*P_v;
P_Eu=P_E.*P_u;
P_Ev=P_E.*P_v;

%=====CORRECTOR=====
pdgamma=0.5*(pdgamma+(gamma-1).*(P_E-0.5.*P_rho.*(P_u.^2+P_v.^2)));

rho(2:nx,2:ny)=0.5*(P_rho(2:nx,2:ny)+rho(2:nx,2:ny)-a1*(rhou(2:nx,2:ny)-
rhou(1:nx-1,2:ny))-a2*(rhov(2:nx,2:ny)-rhov(2:nx,1:ny-1)));

rhou(2:nx,2:ny)=0.5*(P_rhou(2:nx,2:ny)+rhou(2:nx,2:ny)-a1*(gamma-
1)*(P_E(2:nx,2:ny)-P_E(1:nx-1,2:ny))+a1*0.5*(gamma-
1)*(P_rhov2(2:nx,2:ny)+P_rhou2(2:nx,2:ny)-(P_rhov2(1:nx-
1,2:ny)+P_rhou2(1:nx-1,2:ny)))-a1*(rhou2(2:nx,2:ny)-rhou2(1:nx-1,2:ny))-
a2*(P_rhouv(2:nx,2:ny)-P_rhouv(2:nx,1:ny-1))-
a10*P_u(2:nx,2:ny)+a5*(P_u(3:nx+1,2:ny)+P_u(1:nx-
1,2:ny))+a6*(P_u(2:nx,3:ny+1)+P_u(2:nx,1:ny-
1))+a9*(P_v(3:nx+1,3:ny+1)+P_v(1:nx-1,1:ny-1)-P_v(1:nx-1,3:ny+1)-
P_v(3:nx+1,1:ny-1)));

rhov(2:nx,2:ny)=0.5*(P_rhov(2:nx,2:ny)+rhov(2:nx,2:ny)-a2*(gamma-
1)*(P_E(2:nx,2:ny)-P_E(2:nx,1:ny-1))+a2*0.5*(gamma-
1)*(P_rhov2(2:nx,2:ny)+P_rhou2(2:nx,2:ny)-(P_rhov2(2:nx,1:ny-
1)+P_rhou2(2:nx,1:ny-1)))-a1*((P_rhouv(2:nx,2:ny))-(P_rhouv(1:nx-1,2:ny)))-
a2*(rhov2(2:nx,2:ny)-rhov2(2:nx,1:ny-1))-
a11*v(2:nx,2:ny)+a7*(v(3:nx+1,2:ny)+v(1:nx-
1,2:ny))+a8*(v(2:nx,3:ny+1)+v(2:nx,1:ny-1))+a9*(u(3:nx+1,3:ny+1)+u(1:nx-
1,1:ny-1)-u(1:nx-1,3:ny+1)-u(3:nx+1,1:ny-1)));

E(2:nx,2:ny)=0.5*(P_E(2:nx,2:ny)+E(2:nx,2:ny)-
a1*(u(2:nx,2:ny).*(E(2:nx,2:ny)+pdgamma(2:nx,2:ny))-u(1:nx-1,2:ny).*(E(1:nx-
1,2:ny)+pdgamma(1:nx-1,2:ny)))-a4*(T(3:nx+1,2:ny)-2*T(2:nx,2:ny)+T(1:nx-
1,2:ny))-a52*(T(2:nx,3:ny+1)-2*T(2:nx,2:ny)+T(2:nx,1:ny-1))-
a2*(v(2:nx,2:ny).*(E(2:nx,2:ny)+pdgamma(2:nx,2:ny))-v(2:nx,1:ny-
1).*(E(2:nx,1:ny-1)+pdgamma(2:nx,1:ny-1))));
%=====ACTUALIZACIÓN DE VARIABLES=====
u=rhou./rho;
v=rhov./rho;

Vmod2(2:nx,2:ny)=v(2:nx,2:ny).^2+u(2:nx,2:ny).^2;

```

```

T(2:nx,2:ny)=(E(2:nx,2:ny)./rho(2:nx,2:ny)-
0.5*Vmod2(2:nx,2:ny))*gamma*(gamma-1);
%=====C.C=====

T(:,1)=(4*T(:,2)-T(:,3))/3;%Y=0 pared caliente
T(:,ny+1)=(4*T(:,ny)-T(:,ny-1))/3;%%y=d pared fria
T(1,2:ny)=T1 ; % T(nx+1,2:ny)=T(nx,2:ny)+(T(nx,2:ny)-T(nx-
1,2:ny));
T(i1:i2,j2)=T2;%%velocidad u y=d cubo
T(i1:i2,j1)=T2;%%velocidad u y=0 cubo
T(i2,j1:j2)=T2;%%velocidad u x=d cubo
T(i1,j1:j2)=T2;%%velocidad u x=0 cubo
T(i1:i2,j1:j2)=T2;

rho(1,2:ny)=(P_rho(1,2:ny)+rho(1,2:ny)-a1/2*(-
P_rho(3,2:ny)+4*P_rho(2,2:ny)-3*P_rho(1,2:ny)))*0.5;%%x=0
rho(nx+1,2:ny)=(P_rho(nx+1,2:ny)+rho(1,2:ny)+a1/2*(-P_rho(nx-
1,2:ny)+4*P_rho(nx,2:ny)-3*P_rho(nx+1,2:ny)))*0.5;%%x=d
rho(2:nx,1)=(P_rho(2:nx,1)+rho(2:nx,1)-a2/2*(-
P_rho(2:nx,3)+4*P_rho(2:nx,2)-3*P_rho(2:nx,1))-a1*U/2*(P_rho(3:nx+1,1)-
P_rho(1:nx-1,1)))*0.5;%%y=0
rho(2:nx,1+ny)=(P_rho(2:nx,1+ny)+rho(2:nx,1+ny)+a2/2*(-P_rho(2:nx,ny-
1)+4*P_rho(2:nx,ny)-3*P_rho(2:nx,ny+1))-a1*U/2*(P_rho(3:nx+1,ny+1)-
P_rho(1:nx-1,ny+1)))*0.5;%%y=d

rho(i1,j1:j2)=(rho(i1,j1:j2)+P_rho(i1,j1:j2)+(a1/2)*(-P_rho(i1-
2,j1:j2)+4*P_rho(i1-1,j1:j2)-3*P_rho(i1,j1:j2)))*0.5;%%x=0 densidad cubo
rho(i2,j1:j2)=(rho(i2,j1:j2)+P_rho(i2,j1:j2)-(a1/2)*(-
P_rho(i2+2,j1:j2)+4*P_rho(i2+1,j1:j2)-3*P_rho(i2,j1:j2)))*0.5;%%x=d
densidad cubo
rho(i1:i2,j1)=(rho(i1:i2,j1)+P_rho(i1:i2,j1)+a2/2*(-P_rho(i1:i2,j1-
2)+4*P_rho(i1:i2,j1-1)-3*P_rho(i1:i2,j1)))*0.5;%%y=0 densidad cubo
rho(i1:i2,j2)=(rho(i1:i2,j2)+P_rho(i1:i2,j2)-(a2/2)*(-
P_rho(i1:i2,j2+2)+4*P_rho(i1:i2,j2+1)-3*P_rho(i1:i2,j2)))*0.5;%%y=d
densidad cubo

u(2:nx,ny+1)=U;%%velocidad u y=d
v(2:nx,ny+1)=0;%%velocidad v y=d
u(2:nx,1)=U;%%velocidad u y=0
v(2:nx,1)=0;%%velocidad v y=0
u(nx+1,:)=U;%%velocidad u x=d
v(nx+1,:)=0;%%velocidad v x=d
u(1,:)=U;%%velocidad u x=0
v(1,:)=0;%%velocidad v x=0

u(i1:i2,j2)=0;%%velocidad u y=d cubo
v(i1:i2,j2)=0;%%velocidad v y=d cubo
u(i1:i2,j1)=0;%%velocidad u y=0 cubo
v(i1:i2,j1)=0;%%velocidad v y=0 cubo
u(i2,j1:j2)=0;%%velocidad u x=d cubo
v(i2,j1:j2)=0;%%velocidad v x=d cubo
u(i1,j1:j2)=0;%%velocidad u x=0 cubo
v(i1,j1:j2)=0;%%velocidad v x=0 cubo
u(i1:i2,j1:j2)=0;
v(i1:i2,j1:j2)=0;

```

```

E(:,1)=T(:,1).*rho(:,1)/gamma/(gamma-1);
E(:,ny+1)=T(:,ny+1).*rho(:,ny+1)/gamma/(gamma-1);
E(1,2:ny)=T(1,2:ny).*rho(1,2:ny)/gamma/(gamma-1);
E(nx+1,2:ny)=T(nx+1,2:ny).*rho(nx+1,2:ny)/gamma/(gamma-1);
rhoul(2:nx,ny+1)=rho(2:nx,1+ny).*u(2:nx,ny+1);%%%%%%%%densidad*u en y=d
rhoul(2:nx,1)=rho(2:nx,1).*u(2:nx,1);%%%%%%%%densidad*u en y=0
rhoul(1,:)=rho(1,:).*u(1,:);%%%%%%%%densidad*u en x=0
rhoul(nx+1,:)=rho(nx+1,:).*u(nx+1,:);%%%%%%%%densidad*u en x=d
rhov(2:nx,ny+1)=rho(2:nx,1+ny).*v(2:nx,ny+1);%%%%%%%%densidad*v en y=d
rhov(2:nx,1)=rho(2:nx,1).*v(2:nx,1);%%%%%%%%densidad*v en y=0
rhov(1,:)=rho(1,:).*v(1,:);%%%%%%%%densidad*v en x=0
rhov(nx+1,:)=rho(nx+1,:).*v(nx+1,:);%%%%%%%%densidad*v en x=d

%=====ACTUALIZACIÓN DE VARIABLES=====
Eu=E.*u;
Ev=E.*v;
rhoul=rho.*u;% densidad*u en los puntos del mallado
rhov=rho.*v;%densidad*v en los puntos del mallado
rhoul2=rhoul.*u;
rhoulv=rhoul.*v;
rhov2=rhov.*v;

q;
%=====REPRESENTACIÓN GRÁFICA=====
if k==50
    disp(max(max(abs(v))));
    plot(H)
    pause
    q
    figure
    contourf(T')

    Tmod=sqrt(v'.^2+u'.^2);
    figure
    contourf(Tmod)
    figure
    quiver(linspace(0,2,nx+1),linspace(0,1,ny+1),u'./Tmod,v'./Tmod)

    k=1
    pel(:, :, cont)=T;
    cont=cont+1;
end
H(q)=max(max(abs(u)));
end

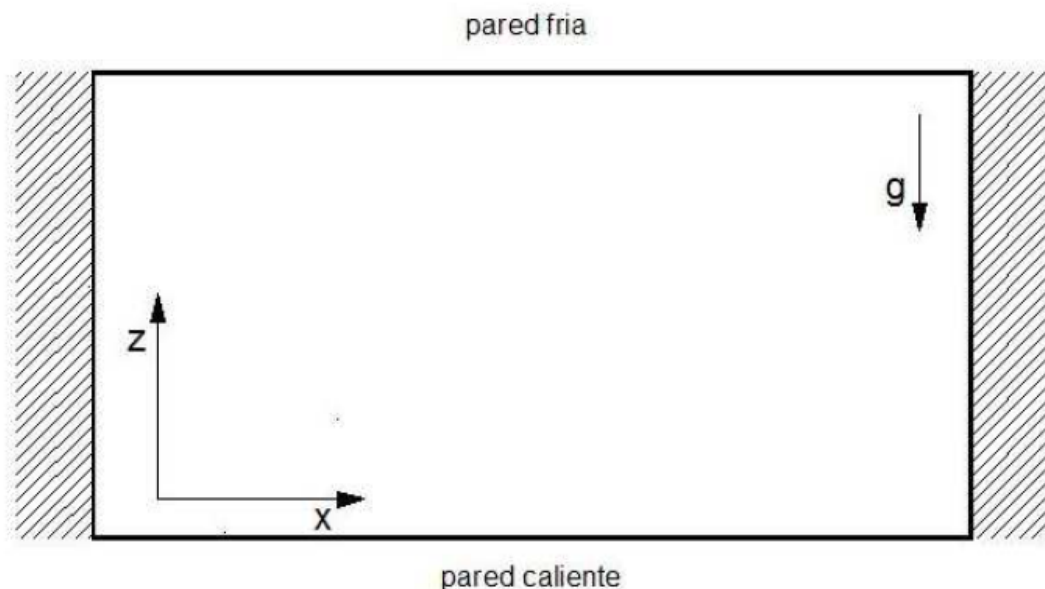
quiver(linspace(0,2,nx+1),linspace(0,1,ny+1),u'./sqrt(v'.^2+u'.^2),v'./sqrt(
v'.^2+u'.^2))

```

6 APLICACIÓN: CAVIDAD RECTANGULAR CON DIFERENCIA DE TEMPERATURA EN LAS TAPAS

El objetivo de esta aplicación será reproducir los patrones de convección natural originados por la inestabilidad que generan las fuerzas de flotabilidad en un fluido en reposo. Si tenemos un fluido en reposo y se introduce una pequeña perturbación que provoque un ligero desplazamiento vertical de la partícula, la densidad media de la partícula será menor que la de su entorno y tendrá una tendencia aún más ascendente. De forma opuesta si el desplazamiento de la partícula es negativo su densidad media será mayor que la de su entorno y esto provocará que su tendencia sea aún más descendente. Además de las fuerzas de flotabilidad aparecen otras fuerzas que tienden a amortiguar el efecto desestabilizador de la flotabilidad estas son los efectos de viscosidad y de conducción de calor. Muchos estudios de este problema han sido realizados mediante el uso de la aproximación de Boussinesq y en el caso incompresible, en este manual se trata el estudio con la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes completas utilizando un esquema de MacCormack, utilizado por K.V.Parchevsky [19] para realizar simulaciones a gran escala de la convección solar, por lo que se podría considerar como desarrollo futuro la aplicación de estas ecuaciones para la resolución de problemas de ese tipo.

A continuación, vamos a realizar la formulación de la aplicación que aquí se va a resolver.



Figura(6-1)

Se va a resolver el problema de convección de Rayleigh-Benard con la pared inferior a mayor temperatura, que como veremos es condición necesaria para que se genere la inestabilidad. Las paredes laterales vamos a considerarlas perfectamente adiabáticas.

Comencemos con las ecuaciones que vamos a resolver. Partiremos de las ecuaciones de Navier-Stokes completas e iremos realizando algunas simplificaciones.

- Se añadirán fuerzas másicas a las ecuaciones.

La velocidad característica se puede estimar de igualar en la ecuación de cantidad de movimiento el orden de magnitud de los términos convectivos y los de flotabilidad como:

$$v_o = \sqrt{\Delta T \beta g H} \quad (6-1)$$

Además, el cuadrado del número de Froude es tal que:

$$Fr^2 = \frac{g H \Delta T \beta}{g H} \sim O(1) \quad (6-2)$$

No podemos despreciar las fuerzas másicas lógicamente ya que son las encargadas de realizar el movimiento del fluido.

- Los términos de disipación viscosa comparados con los de convección térmica se pueden expresar como:

$$\frac{\bar{\tau} : \nabla \vec{v}}{\rho c_p \bar{v} \nabla T} \sim \frac{\frac{\mu v_o^2}{H^2}}{\rho c_p v_o \frac{\Delta T}{H}} = \frac{v}{c_p} \frac{\sqrt{g H \Delta T \beta}}{H \Delta T} \ll 1 \quad (6-3)$$

Y por tanto podrán ser despreciados los efectos de disipación viscosa respecto a los de convección térmica.

$$\frac{\partial(U)}{\partial t} + \frac{\partial(F)}{\partial x} + \frac{\partial(G)}{\partial y} + S = 0 \quad (6-4)$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad (6-5)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (E + p)u + q_x \end{bmatrix} \quad (6-6)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ (E + p)v + q_y \end{bmatrix} \quad (6-7)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \\ \rho v g \end{bmatrix} \quad (6-8)$$

Para evitar valores muy altos de presión y temperatura y por tanto reducir el cálculo computacional, vamos a operar únicamente con las diferencias de temperatura y presión respecto a las variables en equilibrio hidrostático:

$$p = p_{eq} + p^+, \quad T = T_{eq} + T^+, \quad E = E_{eq} + E^+ \quad (6-9)$$

Se introducen las siguientes variables adimensionales:

$$\begin{aligned}
 x^* &= \frac{x}{H}, \quad y^* = \frac{y}{H}, \quad v_0 = \sqrt{\Delta T \beta g H} = \sqrt{\Delta T^* g H}, \quad u^* = \frac{u}{v_0}, \quad v^* = \frac{v}{v_0}, \quad p^* \\
 &= \frac{p^+}{\rho_0 v_0^2}, \quad p_{eq}^* = \frac{p_{eq}}{\rho_0 R_g T_0}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad T^* = \frac{T}{T_0}, \\
 E_{eq}^* &= \frac{E_{eq}}{\rho_0 R_g T_0}, \quad E^* = \frac{E^+}{\rho_0 v_0^2}
 \end{aligned} \tag{6-10}$$

Se definen los números adimensionales:

$$Re = \frac{\rho_0 v_0 H}{\mu}, \quad Pr = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Fr^2 = \Delta T \beta = \frac{\Delta T}{T_0} = \Delta T^*, \quad M = \frac{v_0}{a_0} \tag{6-11}$$

Que representan los Números de Reynolds, Prandtl, Froude y Mach respectivamente. Siendo v_0 una velocidad característica, μ la viscosidad del fluido, ρ_0 y p_0 la densidad y presión de referencia, κ la conductividad térmica del fluido, g la aceleración gravitatoria, H una dimensión característica del problema y a_0 la velocidad del sonido.

Con estas nuevas variables adimensionales, de las que de ahora en adelante se suprimirá el asterisco, el sistema de ecuaciones resultante será:

$$\frac{d(U)}{dt} + \frac{d(F)}{dx} + \frac{d(G)}{dy} + S = 0 \tag{6-12}$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \tag{6-13}$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p^* - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (E^* + p^*)u + q_x \end{bmatrix} \tag{6-14}$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p^* - \tau_{yy} \\ (E^* + p^*)v + q_y \end{bmatrix} \tag{6-15}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\rho - \rho_{eq}}{Fr^2} \\ \frac{\rho v - \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho_{eq} v}{Fr^2} + \frac{p_{eq}}{(\gamma-1)M^2} \nabla \cdot \mathbf{V} \end{bmatrix} \tag{6-16}$$

Siendo τ_{ij} el tensor de esfuerzos viscosos que en las nuevas variables se puede expresar como:

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3Re} \left(\frac{2\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \tau_{yy} = \frac{2}{3Re} \left(\frac{2\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right), \tau_{xy} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (6-17)$$

Y los términos de conducción de calor quedarían:

$$q_x = -\frac{1}{PrReM^2(\gamma-1)} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right), q_y = -\frac{1}{PrReM^2(\gamma-1)} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (6-18)$$

Y finalmente la ecuación de estado para un gas ideal en estas variables quedaría:

$$T = \frac{T_{eq}(\rho_{eq} - \rho)}{\rho} + \frac{\gamma M^2 p}{\rho} \quad (6-19)$$

Una vez descritas las ecuaciones que vamos a utilizar debemos especificar las condiciones de contorno del problema:

- Velocidad nula en las paredes y tapas
- Tapa superior a temperatura $T_{top} = 1 - \frac{\Delta T^*}{2}$ y tapa inferior a $T_{bottom} = 1 + \frac{\Delta T^*}{2}$ siendo ΔT^* la diferencia de temperatura adimensional entre placas.
- Las paredes serán adiabáticas, $\frac{dT_m}{dx} = 0$
- La densidad será actualizada a partir de la ecuación de continuidad tal y como se ha hecho en las aplicaciones anteriores.

Para deducir las condiciones iniciales vamos a suponer una situación de equilibrio hidrostático con distribución lineal de temperaturas lo que nos permite formular el siguiente sistema de ecuaciones:

$$T_{eq} = T_{bottom} - \frac{\Delta T}{H} y \quad (6-20)$$

$$\frac{dp_{eq}}{dy} = -\rho_{eq} g \quad (6-21)$$

$$P_{eq} = R\rho_{eq}T_{eq} \quad (6-22)$$

El siguiente sistema tiene solución analítica para densidad presión y temperatura:

$$T_{eq} = \left(T_{botom} - \frac{\Delta T}{H} y \right) \quad (6-23)$$

$$p_{eq} = \left(T_{botom} - \frac{\Delta T}{H} y \right)^{\frac{gH}{R\Delta T}} \quad (6-24)$$

$$\rho_{eq} = \frac{1}{R} \left(T_{botom} - \frac{\Delta T}{H} y \right)^{\frac{gH}{R\Delta T} - 1} \quad (6-25)$$

Que en nuestras variables adimensionales se puede poner:

$$T_{eq} = \left(1 + \frac{\Delta T^*}{2} - \Delta T^* y\right) \quad (6-26)$$

$$p_{eq} = \left(1 + \frac{\Delta T^*}{2} - \Delta T^* y\right)^{\frac{\gamma M^2}{Fr^4}} \quad (6-27)$$

$$\rho_{eq} = \left(1 + \frac{\Delta T^*}{2} - \Delta T^* y\right)^{\frac{\gamma M^2}{Fr^4} - 1} \quad (6-28)$$

Donde ΔT^* representa el incremento adimensional de temperaturas.

Como se comento al comienzo de esta aplicación es esencial que el gradiente de densidades sea positivo. Si observamos la última expresión de la densidad se aprecia que esto no siempre va a ocurrir por tanto es importante analizar este aspecto:

$$\frac{\partial \rho_{eq}}{\partial y} = -\frac{1}{\Delta T^*} \left(\frac{\gamma M^2}{Fr^4} - 1\right) (1 + \Delta T^* - \Delta T^* y)^{\frac{\gamma M^2}{Fr^4} - 2} \quad (6-29)$$

Como se ha definido ΔT^* positivo la condición necesaria para que el gradiente de densidades sea negativo es:

$$\frac{\gamma M^2}{Fr^4} < 1 \quad (6-30)$$

Es más, cuanto mayor sea el gradiente la inestabilidad será más propensa a aparecer. Observamos cómo esta condición es cualitativa pero vamos a necesitar una condición cuantitativa que nos determine a partir de que valores de los número adimensionales aparece la convección natural.

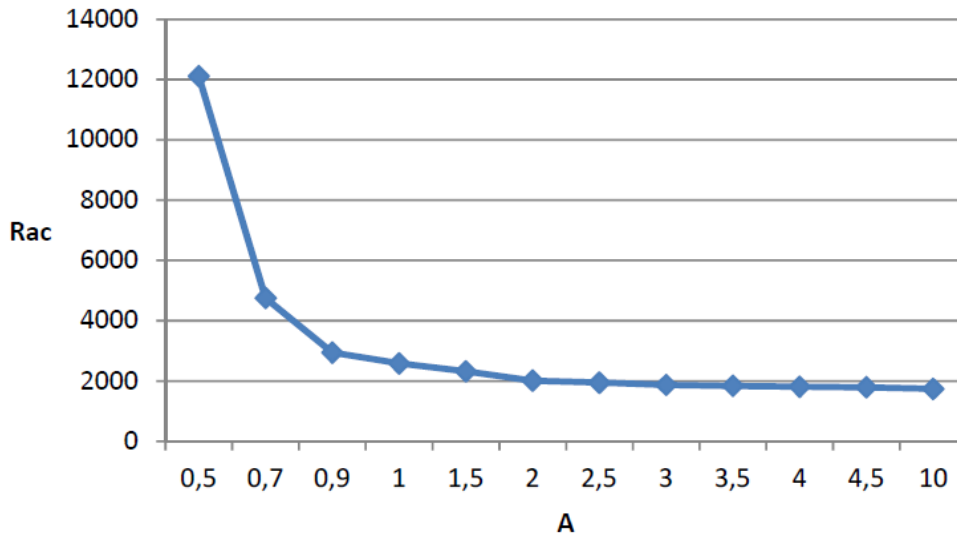
Lord Rayleigh realizó un análisis de estabilidad linealizando las ecuaciones de Navier-Stokes entorno a la situación de reposo y descubrió que de forma natural aparece un parámetro adimensional, el número de Rayleigh que se define como:

$$Ra = \frac{gH^3 \beta \Delta T}{\nu \alpha}, \quad (6-31)$$

Siendo g la aceleración gravitatoria, H una dimensión característica del problema (generalmente el espesor de la capa fluida), β el coeficiente de expansión térmica, ΔT la diferencia de temperatura entre placas, ν el coeficiente de viscosidad cinemática y α el coeficiente de difusividad térmica.

Este número adimensional mide la importancia relativa de las fuerzas de flotabilidad frente a las fuerzas de viscosidad y conducción de calor. Se encontró que existía un valor del número de Rayleigh crítico a partir del cual las fuerzas de viscosidad y conducción de calor no eran lo suficientemente fuertes para amortiguar la inestabilidad inducida por las fuerzas de flotabilidad. Dependiendo de las condiciones de contorno y relación de aspecto este varía como se puede observar en este gráfico extraído del Trabajo fin de carrera 'El método

de colocación para problemas de convección de Rayleigh-Bénard’:



Figura(6-2)

Donde se observa como el valor del Rayleigh crítico cuando la relación de aspecto va aumentando se asemeja mucho al valor predicho por Rayleigh para un fluido entre dos placas infinitas, que fue $Ra_c = 1708$.

Para la relación de aspecto que vamos a analizar inicialmente $A=2$ se obtiene un valor de $Ra_c \cong 2014$, resultado que vamos a intentar reproducir.

El aspecto más diferenciador de nuestra forma de plantear el problema es sin duda no utilizar la aproximación de Boussinesq como se hace en la mayor parte de la bibliografía. Esto hace que nuestras fuerzas de flotabilidad se estimen de manera diferente y por tanto es apropiado expresar el número de Rayleigh de una manera ligeramente diferente como se muestra en el siguiente desarrollo:

$$Ra = \frac{gH^3\beta\Delta T}{\nu\alpha} \quad (6-32)$$

La inclusión de β nos indica que se ha hecho uso de la aproximación de boussinesq por tanto vamos a tratar de ‘deshacer’ esta hipótesis que recordamos a continuación:

$$\rho \cong \rho_0(1 - \beta(T - T_0)) \quad (6-33)$$

Si aplicamos esta hipótesis para calcular la diferencia de densidades entre las tapas obtenemos:

$$\frac{\rho_{top}}{\rho_r} - \frac{\rho_{bottom}}{\rho_r} = \beta\Delta T \quad (6-34)$$

Si tenemos en cuenta que como se ha explicado antes la densidad en la cara inferior debe ser menor a la densidad de la cara superior y que hemos adimensionalizado con las condiciones de la tapa superior:

$$\Delta\rho^* = \frac{\rho_{top} - \rho_{bottom}}{\rho_r} = \beta\Delta T \quad (6-35)$$

Como no podía ser de otra manera recuperamos que las fuerzas de flotabilidad son generadas por una diferencia de densidades y no de temperaturas obteniendo un número equivalente al número de Rayleigh que se expresará como sigue:

$$Ra^* = \frac{gH^3\Delta\rho^*}{\nu\alpha} \quad (6-36)$$

Que sigue teniendo el mismo significado físico con la excepción de que ya no aparece la temperatura como causante de la convección sino la densidad. No obstante, es cierto que la diferencia de densidades está originada por fuerzas másicas y la diferencia de temperaturas por tanto vamos a intentar relacionarlas. Como se vio al comienzo del capítulo la densidad en nuestras variables adimensionales se puede expresar como:

$$\rho_{eq} = \left(1 + \frac{\Delta T^*}{2} - \Delta T^* y\right)^{\frac{\gamma M^2}{Fr^4} - 1} \quad (6-37)$$

Si evaluamos las densidades en las tapas obtenemos:

$$\rho_{top} = \left(1 - \frac{\Delta T^*}{2}\right)^{\frac{\gamma M^2}{Fr^4} - 1} \quad \rho_{bottom} = \left(1 + \frac{\Delta T^*}{2}\right)^{\frac{\gamma M^2}{Fr^4} - 1} \quad (6-38)$$

Por tanto obtenemos que:

$$\Delta\rho^* = \left(1 - \frac{\Delta T^*}{2}\right)^{\frac{\gamma M^2}{Fr^4} - 1} - \left(1 + \frac{\Delta T^*}{2}\right)^{\frac{\gamma M^2}{Fr^4} - 1} \quad (6-39)$$

Quedando el número de Rayleigh:

$$Ra^* = \frac{gH^3 \left(\left(1 - \frac{\Delta T^*}{2}\right)^{\frac{\gamma M^2}{Fr^4} - 1} - \left(1 + \frac{\Delta T^*}{2}\right)^{\frac{\gamma M^2}{Fr^4} - 1} \right)}{\nu\alpha} \quad (6-40)$$

Aún puede ser de más utilidad si lo relacionamos con los números adimensionales de nuestro problema:

$$Ra^* = \frac{Re^2 \left(\left(1 - \frac{\Delta T^*}{2}\right)^{\frac{\gamma M^2}{Fr^4} - 1} - \left(1 + \frac{\Delta T^*}{2}\right)^{\frac{\gamma M^2}{Fr^4} - 1} \right)}{Fr^2} Pr \quad (6-41)$$

Donde podemos observar que en ningún momento se ha perdido el sentido físico del parámetro ya que si recordamos las definiciones de los números de Reynolds Froude y Prandtl vemos como sigue comparando las fuerzas de flotabilidad con las de conducción de calor y viscosidad.

Teniendo en cuenta como hemos definido la velocidad de referencia podemos reducir alguno de los parámetros:

$$v_0 = \sqrt{\Delta T \beta g H} \quad (6-42)$$

$$Fr^2 = \frac{v_0^2}{gH} = \Delta T \beta \quad (6-43)$$

Para un gas ideal sabemos que:

$$\beta = \frac{1}{T_r} \quad (6-44)$$

Entonces:

$$Fr^2 = \frac{\Delta T}{T_r} = \Delta T^* \quad (6-45)$$

Es interesante observar que si introducimos nuestra velocidad de referencia en el número de Reynolds:

$$Re = \frac{v_0 H}{\nu} = \frac{\sqrt{\Delta T \beta g} H^{\frac{3}{2}}}{\nu} = Gr^{\frac{1}{2}} \quad (6-46)$$

Siendo Gr el número de Grasshoff.

Obteniendo un valor del Número de Rayleigh:

$$Ra^* = \frac{Gr \left(\left(1 - \frac{\Delta T^*}{2}\right)^{\frac{\gamma M^2}{\Delta T^{*2}} - 1} - \left(1 + \frac{\Delta T^*}{2}\right)^{\frac{\gamma M^2}{\Delta T^{*2}} - 1} \right)}{\Delta T^*} Pr \quad (6-47)$$

Que observamos que no es más que el Número de Rayleigh estándar aplicándole la corrección por no utilizar la aproximación de Boussinesq en las condiciones iniciales.

$$Ra = Gr Pr \quad (6-48)$$

$$Ra^* = Ra \frac{\left(\left(1 - \frac{\Delta T^*}{2}\right)^{\frac{\gamma M^2}{\Delta T^{*2}} - 1} - \left(1 + \frac{\Delta T^*}{2}\right)^{\frac{\gamma M^2}{\Delta T^{*2}} - 1} \right)}{\Delta T^*} = Ra \frac{\Delta \rho^*}{\Delta T \beta} \quad (6-49)$$

Podemos apreciar que existen 5 parámetros independientes:

- Número de Prandtl.
- Número de Mach.
- Número de Reynolds/Grasshoff.
- Coeficiente de expansión adiabática.
- Incremento adimensional de temperatura.

Observamos como si fijamos el fluido, aire por ejemplo, y las condiciones iniciales, el único parámetro libre que tenemos es el Número de Reynolds, es decir la importancia de las fuerzas de viscosidad. Este proceso se puede realizar de forma análoga para el resto de parámetros para analizar la importancia relativa de cada uno en este fenómeno.

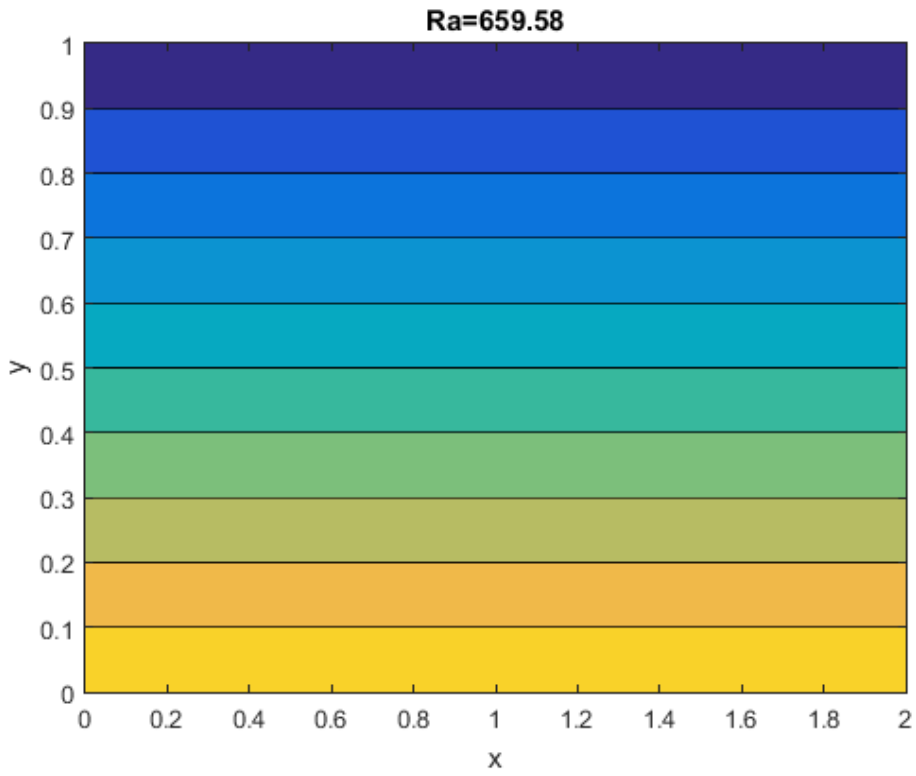
Tabla (6-1)

| <i>Re</i> | <i>Pr</i> | ΔT^* | <i>M</i> | <i>Ra</i> | <i>Ra</i>* | ¿Convección? |
|------------------|------------------|--------------------------------|-----------------|------------------|-------------------|---|
| 5 | 0.73 | 0,5 | 0,1 | 18,2500 | 18,3217 | No |
| 10 | 0.73 | 0,5 | 0,1 | 73 | 73,287 | No |
| 20 | 0.73 | 0,5 | 0,1 | 292 | 293,15 | No |
| 30 | 0.73 | 0,5 | 0,1 | 657 | 659,58 | No |
| 50 | 0,73 | 0,5 | 0,1 | 1825 | 1832,2 | No |
| 53 | 0,73 | 0,5 | 0,1 | 2050,6 | 2058,6 | Alcanza patrón de flujo estacionario (Dos celdas) |

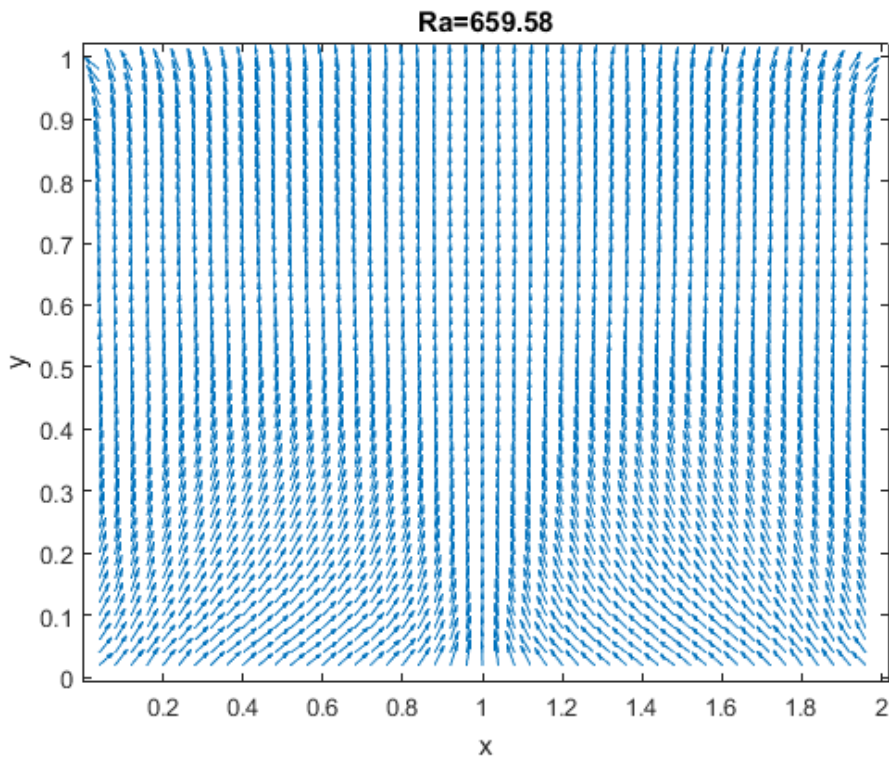
Se han escogido estas condiciones de iniciales para que el Número de Rayleigh calculado mediante la aproximación de Boussinesq y el nuestro sean similares y poder comparar resultados, ya que no hemos encontrado bibliografía sin utilizar esta aproximación. Observamos como el valor de Rayleigh crítico obtenido esta próximo al obtenido por Pablo José Ruiz Contreras en su trabajo fin de grado.

A continuación, mostramos algunas imágenes de los campos de temperatura y velocidades para números de Rayleigh donde existe convección natural y para los que no.

$Ra = 659.58$

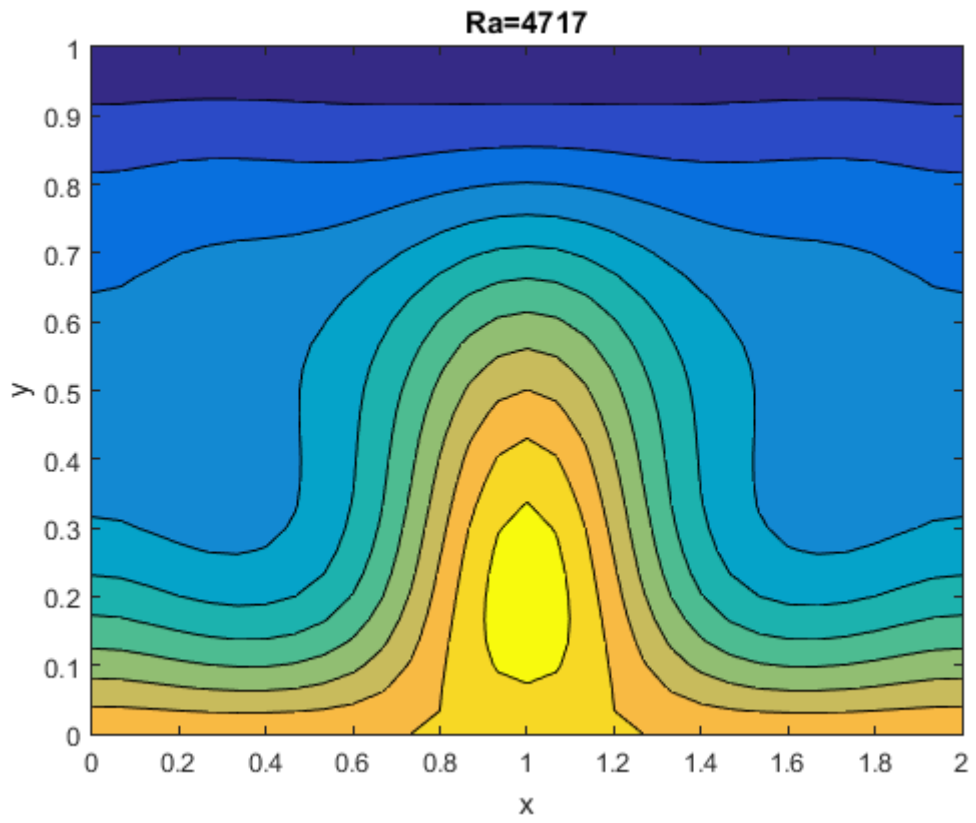


Figura(6-3)

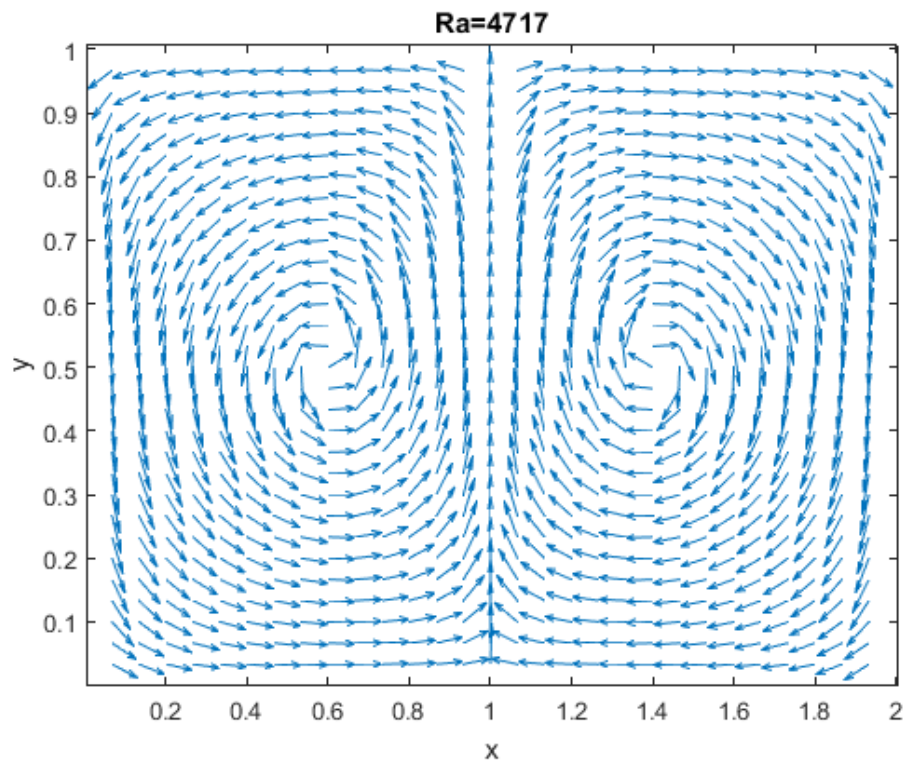


Figura(6-4)

$Ra = 4717$



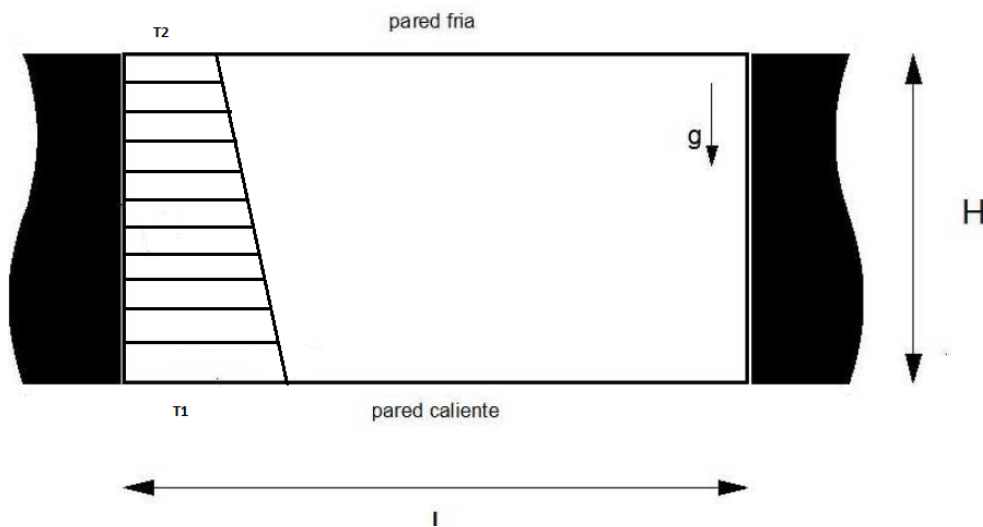
Figura(6-5)



Figura(6-6)

Observamos como en el primer caso, con el número de Rayleigh inferior al crítico, el campo de temperaturas se muestra sin alterar comparado con la condición inicial. En el segundo caso el número de Rayleigh ha superado el umbral a partir del cual los efectos de flotabilidad superan a los viscosos y a los de conducción de calor y el fluido comienza a ascender por el centro y a descender por las paredes formando este patrón celular tan representativo. Este patrón de flujo provoca que el fluido caliente de la placa de abajo asciende por el centro y el fluido mas frio descende por las paredes, provocando la distribución de temperaturas mostrada en la figura.

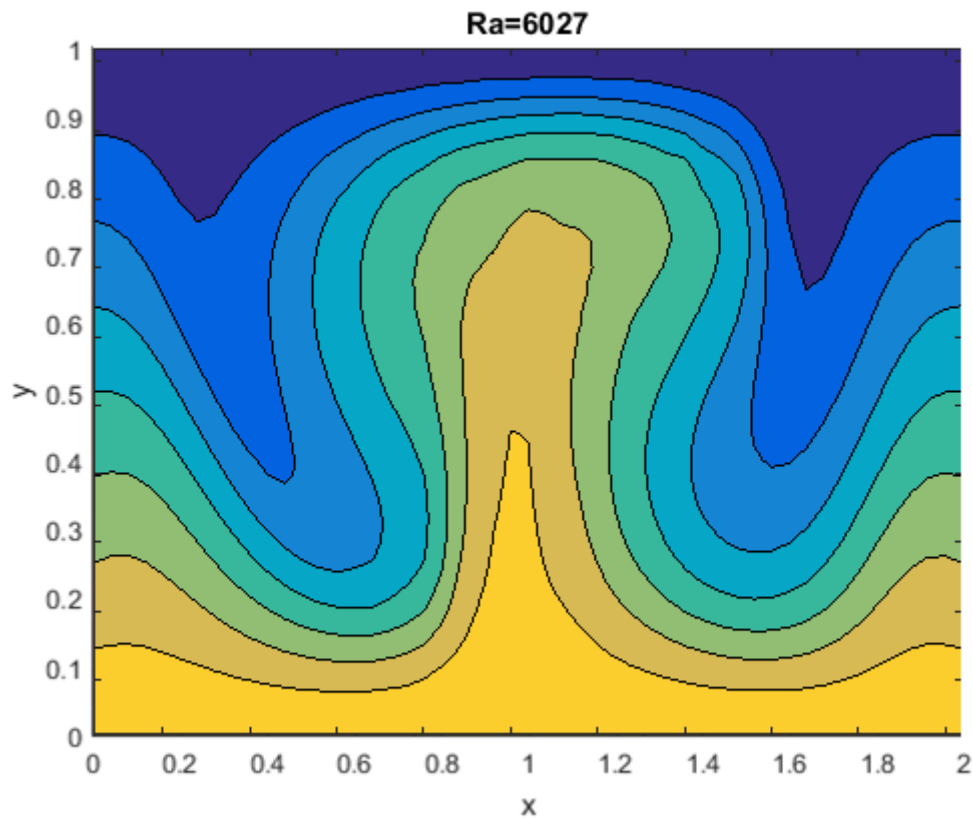
Otro aspecto del problema de Rayleigh-Bénard que se puede estudiar es modificar las condiciones de contorno en las paredes.



Figura(6-7)

Las paredes laterales vamos a considerarlas perfectamente conductoras. La situación es equivalente a una cavidad embebida en una plancha metálica con diferencia de temperatura entre caras. En la figura 6-7 se muestra el esquema general del problema.

El problema se resuelva idénticamente al anterior a excepción de la condición de contorno en temperatura que en este caso se reduce a imponer que la temperatura asociada al movimiento sea nula en las paredes, de esta forma la temperatura en las paredes será la de equilibrio que será la distribución que tendrá la plancha metálica.



Figura(6-8)

Observamos como el efecto de las paredes conductoras tiene un efecto amortiguador para la convección ya que acentúa más los efectos de conducción de calor haciendo más difícil la aparición de un régimen estacionario. Cuando este aparece lo hace con este patrón diferente al anterior debido a que la distribución de temperaturas en las paredes tiene que ser lineal por la condición de contorno de paredes conductoras que se ha impuesto.

Un estudio exhaustivo para determinar el número de Rayleigh crítico nos mostraría que para una relación de aspecto dada el número de Rayleigh crítico para el caso de paredes conductoras sería mayor que para paredes adiabáticas ya que como hemos comentado esta condición de contorno acentúa los efectos de conducción de calor que amortiguan la inestabilidad producida por las fuerzas de flotabilidad.

```

%=====cavidad con diferencia de temperaturas=====
close all;clear all;
%=====Parámetros=====

nx=50;%intervalos de partición en x
ny=50;%intervalos de partición en y
nt=150000 ;%intervalos de partición en t
D=1; %ancho cavidad

Dt=0.0001 ; %incremento temporal

Dx=2*D/nx;%incremento eje x
Dy=D/ny;%incremento eje y

%=====NUMEROS ADIMENSIONALES=====

dt=0.5; %INCREMENTO ADIMENSIONAL DE TEMPERATURA
M=0.1; %NÚMERO DE MACH
Re=30; %NÚMERO DE REYNOLDS
Pr=0.73; %NÚMERO DE PRANDTL
gamma=1.4; %COEFICIENTE DE EXPANSIÓN ADIABÁTICO
Fr=sqrt(dt);%NÚMERO DE FROUDE

%=====TEMPERATURAS=====t
T2=1-dt/2;
T1=1+dt/2;
%=====COEFICIENTES=====

a1=Dt/Dx;
a2=Dt/Dy;
a3=Dt/Fr^2;
a5=4*Dt/(3*Re*Dx^2);
a6=Dt/(Re*Dy^2);
a7=Dt/(Re*Dx^2);
a8=4*Dt/(3*Re*Dy^2);
a9=Dt/(12*Re*Dx*Dy);
a10=2*(a5+a6);
a11=2*(a7+a8);

%=====MALLADO=====

x=linspace(0,2,nx+1);y=linspace(0,1,ny+1);[X,Y]=meshgrid(x,y) ; %mallado

%=====CONDICIONES INICIALES=====
P_u=10^-10*ones(nx+1,ny+1).*sin(2*pi*X).*cos(pi*Y);%velocidad residual
dirección x en los puntos del mallado
P_v=-10^-10*ones(nx+1,ny+1).*cos(2*pi*X).*sin(pi*Y);%velocidad residual
dirección y en los puntos del mallado
P_Teq=(linspace(T1,T2,ny+1)')*ones(1,nx+1)'; %campo de temperatura en cada
punto del mallado equilibrio
P_T=zeros(nx+1,ny+1); %campo de temperatura DEL MOVIMIENTO en cada punto
del mallado equilibrio
P_rhoeq=P_Teq.*(gamma*M^2/dt^2-1);% densidad en los puntos del mallado
P_rho=P_rhoeq;% densidad en los puntos del mallado
P_rhou=P_rho.*P_u;% densidad*u en los puntos del mallado
P_rhov=P_rho.*P_v;%densidad*v en los puntos del mallado
P_rhou2=P_rhou.*P_u;% densidad*u^2 en los puntos del mallado
P_rhov2=P_rhov.*P_v;%densidad*v^2 en los puntos del mallado
P_rhouv=P_rhou.*P_v;%densidad*uv en los puntos del mallado
P_E=(P_T.*P_rho-(P_rhoeq-P_rho).*P_Teq)/gamma/(gamma-
1)/M^2+P_rhou2/2+P_rhov2/2;

```

```

P_Eu=P_E.*P_u;
P_Ev=P_E.*P_v;

u=10^-10*ones(nx+1,ny+1).*sin(2*pi*X).*cos(pi*Y);%velocidad residual
direccion x en los puntos del mallado
v=-10^-10*ones(nx+1,ny+1).*cos(2*pi*X).*sin(pi*Y);%velocidad residual
dirección y en los puntos del mallado
Teq=(linspace(T1,T2,ny+1)'*ones(1,nx+1))'; %campo de temperatura en cada
punto del mallado equilibrio
T=zeros(nx+1,ny+1);
rhoeq=Teq.^(gamma*M^2/dt^2-1);% densidad en los puntos del mallado
rho=rhoeq;
rhou=rho.*u;% densidad*u en los puntos del mallado
rhov=rho.*v;%densidad*v en los puntos del mallado
rhou2=rhou.*u;% densidad*u^2 en los puntos del mallado
rhov2=rhov.*v;%densidad*v^2 en los puntos del mallado
rhouv=rhou.*v;%densidad*uv en los puntos del mallado
E=(T.*rho-(rhoeq-rho).*Teq)/gamma/(gamma-1)/M^2+rhov2/2+rhov2/2;
Eu=E.*u;
Ev=E.*v;
P_eq=rhoeq.*Teq; %PRESIÓN EQUILIBRIO

Ra1=Re^2*Pr; %NÚMERO RAYLEIGH STANDAR
Ra2=Re^2/Fr^2*Pr*(max(max(rho))-min(min(rho))); %NÚMERO DE RAYLEIGH
CORREGIDO
pause

%=====BUCLE TEMPORAL=====
k=0;
cont=1;

for q=1:nt
    k=k+1;

%=====PREDICTOR=====
%

    P_rho(2:nx,2:ny)=rho(2:nx,2:ny)-a1*(rhov(3:nx+1,2:ny)-rhov(2:nx,2:ny))-
a2*(rhov(2:nx,3:ny+1)-rhov(2:nx,2:ny));
    P_rhou(2:nx,2:ny)=rhov(2:nx,2:ny)-a1*(gamma-1)*(E(3:nx+1,2:ny)-
E(2:nx,2:ny)-rhov2(3:nx+1,2:ny)/2+rhov2(2:nx,2:ny)/2-
rhov2(3:nx+1,2:ny)/2+rhov2(2:nx,2:ny)/2)-a1*(rhov2(3:nx+1,2:ny)-
rhov2(2:nx,2:ny))-a2*(rhouv(2:nx,3:ny+1)-rhouv(2:nx,2:ny))-
a10*u(2:nx,2:ny)+a5*(u(3:nx+1,2:ny)+u(1:nx-
1,2:ny))+a6*(u(2:nx,3:ny+1)+u(2:nx,1:ny-1))+a9*(v(3:nx+1,3:ny+1)+v(1:nx-
1,1:ny-1)-v(1:nx-1,3:ny+1)-v(3:nx+1,1:ny-1));
    P_rhov(2:nx,2:ny)=rhov(2:nx,2:ny)-a2*(gamma-1)*(E(2:nx,3:ny+1)-
E(2:nx,2:ny)-rhov2(2:nx,3:ny+1)/2+rhov2(2:nx,2:ny)/2-
rhov2(2:nx,3:ny+1)/2+rhov2(2:nx,2:ny)/2)-a2*(rhov2(2:nx,3:ny+1)-
rhov2(2:nx,2:ny))-a1*(rhouv(3:nx+1,2:ny)-rhouv(2:nx,2:ny))-
a11*v(2:nx,2:ny)+a7*(v(3:nx+1,2:ny)+v(1:nx-
1,2:ny))+a8*(v(2:nx,3:ny+1)+v(2:nx,1:ny-1))+a9*(u(3:nx+1,3:ny+1)+u(1:nx-
1,1:ny-1)-u(1:nx-1,3:ny+1)-u(3:nx+1,1:ny-1))-(rho(2:nx,2:ny)-
rhoeq(2:nx,2:ny))*Dt/(Fr^2);
    P_E(2:nx,2:ny)=E(2:nx,2:ny)-a1*(gamma)*(Eu(3:nx+1,2:ny)-
Eu(2:nx,2:ny))+a1*(gamma-
1)*0.5*(u(3:nx+1,2:ny).*(rhov2(3:nx+1,2:ny)+rhov2(3:nx+1,2:ny))-
u(2:nx,2:ny).*(rhov2(2:nx,2:ny)+rhov2(2:nx,2:ny)))+a1/(Dx*Pr*Re*M^2*(gamma-
1))*(T(3:nx+1,2:ny)-2*T(2:nx,2:ny)+T(1:nx-1,2:ny))-
a2*(gamma)*(Ev(2:nx,3:ny+1)-Ev(2:nx,2:ny))+a2*0.5*(gamma-

```

```

1) *(v(2:nx,3:ny+1).*(rhou2(2:nx,3:ny+1)+rhov2(2:nx,3:ny+1))-
v(2:nx,2:ny).*(rhou2(2:nx,2:ny)+rhov2(2:nx,2:ny)))+a2/(Dy*Pr*Re*M^2*(gamma-
1))*(T(2:nx,3:ny+1)-2*T(2:nx,2:ny)+T(2:nx,1:ny-1))-(rho(2:nx,2:ny)-
rhoeq(2:nx,2:ny)*gamma/(gamma-1)).*v(2:nx,2:ny)*Dt/(Fr^2)-1/M^2/(gamma-
1)*P_eq(2:nx,2:ny).*(a1*(u(3:nx+1,2:ny)-u(2:nx,2:ny))+a2*(v(2:nx,3:ny+1)-
v(2:nx,2:ny)));

%=====DECODIFICACIÓN=====
P_u=P_rhou./P_rho;
P_v=P_rhov./P_rho;
Vmod2=P_v.^2+P_u.^2;
P_T=(P_rhoeq-P_rho).*P_Teq./P_rho+(P_E./P_rho-Vmod2)*M^2*gamma*(gamma-1);

%=====C.C=====

P_T(:,1)=0;%%Y=0 pared caliente
P_T(:,ny+1)=0;%%Y=d pared fria
P_T(1,2:ny)=(4*P_T(2,2:ny)-P_T(3,2:ny))/3;%%X=0 dT/dx=0
P_T(nx+1,2:ny)=(4*P_T(nx,2:ny)-P_T(nx-1,2:ny))/3;%%X=d dT/dx=0

P_rho(1,:)=rho(1,1:ny+1)-(a1/2)*(-rhou(3,1:ny+1)+4*rhou(2,1:ny+1)-
3*rhou(1,1:ny+1));%%x=0 densidad
P_rho(nx+1,:)=rho(nx+1,1:ny+1)+(a1/2)*(-rhou(nx-
1,1:ny+1)+4*rhou(nx,1:ny+1)-3*rhou(nx+1,1:ny+1));%%x=d densidad
P_rho(2:nx,1)=rho(2:nx,1)-(a2/2)*(-rhov(2:nx,3)+4*rhov(2:nx,2)-
3*rhov(2:nx,1));%%y=0 densidad
P_rho(2:nx,ny+1)=rho(2:nx,ny+1)+a2/2*(-rhov(2:nx,ny-1)+4*rhov(2:nx,ny)-
3*rhov(2:nx,ny+1));%%y=d densidad

P_u(:,ny+1)=0;%%velocidad u y=d
P_v(:,ny+1)=0;%%velocidad v y=d
P_u(:,1)=0;%%velocidad u y=0
P_v(:,1)=0;%%velocidad v y=0

P_v(1,:)=0;
P_v(nx+1,:)=0;
P_u(1,:)=0;%%X=0 du/dx=0
P_u(nx+1,:)=0;%%X=d du/dx=0

%=====ACTUALIZACIÓN DE
VARIABLES=====

P_rhou=P_rho.*P_u;% densidad*u en los puntos del mallado
P_rhov=P_rho.*P_v;%densidad*v en los puntos del mallado
P_rhou2=P_rhou.*P_u;% densidad*u^2 en los puntos del mallado
P_rhov2=P_rhov.*P_v;%densidad*v^2 en los puntos del mallado
P_rhouv=P_rhou.*P_v;%densidad*uv en los puntos del mallado
P_E=(P_T.*P_rho-(P_rhoeq-P_rho).*P_Teq)/gamma/(gamma-
1)/M^2+P_rhou2/2+P_rhov2/2;

P_Eu=P_E.*P_u;
P_Ev=P_E.*P_v;

%=====CORRECTOR=====

```

```

rho(2:nx,2:ny)=0.5*(P_rho(2:nx,2:ny)+rho(2:nx,2:ny)-
a1*(P_rhou(2:nx,2:ny)-P_rhou(1:nx-1,2:ny))-a2*(P_rhov(2:nx,3:ny+1)-
P_rhov(2:nx,1:ny-1)));
rhou(2:nx,2:ny)=0.5*(rhou(2:nx,2:ny)+P_rhou(2:nx,2:ny)-a1*(gamma-
1)*(E(2:nx,2:ny)-E(1:nx-1,2:ny)-rhou2(2:nx,2:ny)/2+rhou2(1:nx-1,2:ny)/2-
rhov2(2:nx,2:ny)/2+rhov2(1:nx-1,2:ny)/2)-a1*(P_rhou2(2:nx,2:ny)-
P_rhou2(1:nx-1,2:ny))-a2*(P_rhov(2:nx,2:ny)-P_rhov(2:nx,1:ny-1))-
a10*P_u(2:nx,2:ny)+a5*(P_u(3:nx+1,2:ny)+P_u(1:nx-
1,2:ny))+a6*(P_u(2:nx,3:ny+1)+P_u(2:nx,1:ny-
1))+a9*(P_v(3:nx+1,3:ny+1)+P_v(1:nx-1,1:ny-1)-P_v(1:nx-1,3:ny+1)-
P_v(3:nx+1,1:ny-1)));
rhov(2:nx,2:ny)=0.5*(rhov(2:nx,2:ny)+P_rhov(2:nx,2:ny)-a2*(gamma-
1)*(E(2:nx,2:ny)-E(2:nx,1:ny-1)-rhou2(2:nx,2:ny)/2+rhou2(2:nx,1:ny-1)/2-
rhov2(2:nx,2:ny)/2+rhov2(2:nx,1:ny-1)/2)-a2*(P_rhov2(2:nx,2:ny)-
P_rhov2(2:nx,1:ny-1))-a1*(P_rhov(2:nx,2:ny)-P_rhov(1:nx-1,2:ny))-
a11*P_v(2:nx,2:ny)+a7*(P_v(3:nx+1,2:ny)+P_v(1:nx-
1,2:ny))+a8*(P_v(2:nx,3:ny+1)+P_v(2:nx,1:ny-
1))+a9*(P_u(3:nx+1,3:ny+1)+P_u(1:nx-1,1:ny-1)-P_u(1:nx-1,3:ny+1)-
P_u(3:nx+1,1:ny-1))- (P_rho(2:nx,2:ny)-P_rhoeq(2:nx,2:ny))*Dt/(Fr^2));
E(2:nx,2:ny)=0.5*(E(2:nx,2:ny)+P_E(2:nx,2:ny)-
a1*(gamma)*(P_Eu(2:nx,2:ny)-P_Eu(1:nx-1,2:ny))+a1*(gamma-
1)*0.5*(P_u(2:nx,2:ny).*(P_rhou2(2:nx,2:ny)+P_rhov2(2:nx,2:ny))-P_u(1:nx-
1,2:ny).*(P_rhou2(1:nx-1,2:ny)+P_rhov2(1:nx-
1,2:ny)))+a1/(Dx*Pr*Re*M^2*(gamma-1))*(P_T(3:nx+1,2:ny)-
2*P_T(2:nx,2:ny)+P_T(1:nx-1,2:ny))-a2*(gamma)*(P_Ev(2:nx,2:ny)-
P_Ev(2:nx,1:ny-1))+a2*(gamma-
1)*0.5*(P_v(2:nx,2:ny).*(P_rhou2(2:nx,2:ny)+P_rhov2(2:nx,2:ny))-
P_v(2:nx,1:ny-1).*(P_rhou2(2:nx,1:ny-1)+P_rhov2(2:nx,1:ny-
1)))+a2/(Dy*Pr*Re*M^2*(gamma-1))*(P_T(2:nx,3:ny+1)-
2*P_T(2:nx,2:ny)+P_T(2:nx,1:ny-1))- (P_rho(2:nx,2:ny)-
P_rhoeq(2:nx,2:ny))*gamma/(gamma-1)).*P_v(2:nx,2:ny)*Dt/(Fr^2)-1/M^2/(gamma-
1)*P_eq(2:nx,2:ny).*(a1*(P_u(2:nx,2:ny)-P_u(1:nx-
1,2:ny))+a2*(P_v(2:nx,2:ny)-P_v(2:nx,1:ny-1))));

```

```

%=====DECODIFICACIÓN=====

```

```

u=rhou./rho;
v=rhov./rho;
Vmod2=v.^2+u.^2;
T=(rhoeq-rho).*Teq./rho+(E./rho-Vmod2)*M^2*gamma*(gamma-1);

```

```

%=====C.C=====

```

```

T(:,1)=0;%%Y=0 pared caliente
T(:,ny+1)=0;%%y=d pared fria
T(1,2:ny)=(4*T(2,2:ny)-T(3,2:ny))/3;%%X=0 dT/dx=0
T(nx+1,2:ny)=(4*T(nx,2:ny)-T(nx-1,2:ny))/3;%%X=d dT/dx=0

```

```

rho(1,:)=(P_rho(1,:)+rho(1,:)-a1/2*(-P_rhou(3,:)+4*P_rhou(2,:)-
3*P_rhou(1,:)))*0.5;%%x=0
rho(nx+1,:)=(P_rho(nx+1,:)+rho(1,:)+a1/2*(-P_rhou(nx-
1,:)+4*P_rhou(nx,:)-3*P_rhou(nx+1,:)))*0.5;%%x=d
rho(2:nx,1)=(P_rho(2:nx,1)+rho(2:nx,1)-a2/2*(-
P_rhov(2:nx,3)+4*P_rhov(2:nx,2)-3*P_rhov(2:nx,1)))*0.5;%%y=0
rho(2:nx,1+ny)=(P_rho(2:nx,1+ny)+rho(2:nx,1+ny)+a2/2*(-P_rhov(2:nx,ny-
1)+4*P_rhov(2:nx,ny)-3*P_rhov(2:nx,ny+1)))*0.5;%%y=d

```

```

u(:,ny+1)=0;%%velocidad u y=d
v(:,ny+1)=0;%%velocidad v y=d
u(:,1)=0;%%velocidad u y=0

```

```

v(:,1)=0;%%%%velocidad v y=0

v(1,:)=0;%%%%X=0 dv/dx=0
v(nx+1,:)=0;%%%%X=d dv/dx=0
u(1,:)=0;%%%%X=0 du/dx=0
u(nx+1,:)=0;%%%%X=d du/dx=0

%=====ACTUALIZACIÓN DE
VARIABLES=====
rhou=rho.*u;% densidad*u en los puntos del mallado
rhov=rho.*v;%densidad*v en los puntos del mallado
rhou2=rhou.*u;% densidad*u^2 en los puntos del mallado
rhov2=rhov.*v;%densidad*v^2 en los puntos del mallado
rhouv=rhou.*v;%densidad*uv en los puntos del mallado
E=(T.*rho-(rhoeq-rho).*Teq)/gamma/(gamma-1)/M^2+rhou2/2+rhov2/2;
Eu=E.*u;
Ev=E.*v;

%=====REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y CONVERGENCIA=====

if k==500
    Dt;
    q;
    pel(:, :, cont)=T;
    cont=cont+1;
    k=0;
end
H(q)=max(max(abs(v)));
if max(max(u))>=20
    q=nt;
    pause
end
end

quiver(linspace(0,2,nx+1),linspace(0,1,ny+1),u'./sqrt(v'.^2+u'.^2),v'./sqrt(
v'.^2+u'.^2))

```


7 CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

El objetivo principal de este proyecto ha sido demostrar que, hoy en día, los estudiantes de disciplinas como la Dinámica de Fluidos y la Transferencia de Calor pueden resolver eficientemente problemas realistas haciendo uso de conocimientos básicos de programación y de cálculo numérico adquiridos en asignaturas cursadas en años anteriores. El uso del ordenador permite al alumno un mejor entendimiento de las leyes fundamentales de la fluidodinámica, sin que tenga que recurrir a manipulaciones engorrosas ni a simplificaciones que hagan perder al problema todo su interés, buscando una solución las ecuaciones que gobiernan el problema.

Para ilustrar esto se ha llevado a cabo un análisis numérico mediante el método de MacCormack aplicado a diversos problemas fluidodinámicos como el flujo alrededor de un cilindro cuadrado que viaja a velocidad constante por un conducto, la capa límite térmica alrededor del mismo y el régimen laminar no lineal de la convección natural de Rayleigh-Bénard en el interior de una cavidad rectangular.

En el capítulo 3 se ha expuesto el método de MacCormack explícito, el esquema multi-etapa de diferencias finitas, de segundo orden tanto el tiempo como en el espacio, que hemos utilizado para resolver los sistemas de ecuaciones que se han presentado en las diferentes aplicaciones. Se han desarrollado dos ejemplos, el primero unidimensional, la resolución de la ecuación lineal de onda, y el segundo, ya más enfocado a la resolución del trabajo, un caso bidimensional en el cual la convección está llevada por la tapadera, utilizaremos estos ejemplos como validadores del método ya que como podemos observar el acuerdo con los resultados de la bibliografía es excepcional.

En el capítulo 4, se ha estudiado el flujo compresible alrededor de un cilindro cuadrado, primero realizamos una comparación de los coeficientes de sustentación y resistencia con los obtenidos en la literatura, obteniendo un acuerdo excelente. Después analizamos como afectaba la relación de aspecto del dominio computacional a los resultados para buscar una solución de compromiso entre gasto computacional y resultados que se aproximasen a un cilindro cuadrado inmerso en una corriente incidente. Una vez seleccionado el dominio computacional estudiamos el fenómeno de ‘vortex shedding’ y la frecuencia con la que los torbellinos se emitían en función del número de Reynolds, el acuerdo con los datos de la bibliografía es muy bueno teniendo en cuenta la limitación computacional que tenemos. El incremento temporal que nos exige la condición CFL es muy restrictivo y el espaciamiento de la malla se vuelve restrictivo cuando aumentamos el número de Reynolds lo que penaliza aún más la condición CFL. Dos posibles soluciones para esto podrían ser un refinamiento de malla selectivo en zonas donde sea necesario, en este caso en el entorno del cuadrado se podría hacer una malla más fina, y en el entorno de las secciones de entrada y salida y paredes laterales se podría tener una malla más gruesa ya que lo único que queremos en esos puntos es imponer condiciones de contorno y el desarrollo del método de MacCormack modificado que se explica brevemente en el capítulo tres que relaja la condición CFL al dividir el proceso en etapas unidimensionales.

En el capítulo 5, se ha desarrollado una breve aplicación como primer contacto a la inclusión de la temperatura en las ecuaciones. Los perfiles de temperaturas obtenidos eran consecuentes con lo esperado y la estimación de órdenes de magnitud del espesor de la capa límite térmica también lo eran. Este problema requiere una capacidad computacional elevada por eso no se

han podido realizar simulaciones excesivamente largas, en este problema el refinamiento de malla sería como en el caso anterior muy adecuado.

En el capítulo 6 se ha resuelto el problema de Rayleigh-Bénard. Los resultados son muy coherentes con los proporcionados por el análisis lineal de Rayleigh como por el resto de la bibliografía que contempla análisis no lineales. Se aprecia la formación de celdas convectivas y los campos de temperaturas propios del régimen de convección natural. Además, el número de Rayleigh crítico coincide razonablemente bien con los resultados proporcionados en la bibliografía. No obstante recordar que nuestro estudio ha suprimido la aproximación de Boussinesq y tiene en cuenta los efectos de compresibilidad en todas las ecuaciones lo cual puede producir variaciones en los números de Rayleigh críticos para otras relaciones de aspecto u otra combinación de los números adimensionales. Por otro lado, tenemos limitaciones computacionales ya que para el caso de aire ($Pr = 0.73$) se requieren Reynolds del orden de 100 para comenzar la convección natural lo cual requiere un refinamiento de malla importante para obtener resultados coherentes, esto complica mucho la determinación de un número de Rayleigh crítico ya que en el entorno de este el tiempo para el cual se alcanza el régimen de convección natural es elevadísimo, por tanto puede que si se simulasen tiempos más largos los valores de Rayleigh crítico pudiesen variar ligeramente. Otro aspecto que se ha estudiado en esta sección ha sido la relación de aspecto de la cavidad, aumentando esta, se obtienen un número de celdas mayor, también se ha observado cómo aumentar el número de Rayleigh provoca la aparición de nuevas celdas. Por último, se ha llevado a cabo el estudio de una cavidad con paredes conductoras, donde hemos observado el efecto amortiguador que esta condición posee y creando patrones en el campo de temperatura diferentes a las paredes adiabáticas y se ha comprobado como coinciden con distribuciones de temperaturas reportadas por la literatura. Un último aspecto a comentar sobre este apartado sería la validez de la aproximación de Boussinesq. A pesar de que por limitaciones computacionales no hemos podido abordar un estudio exhaustivo de su validez para distintas temperaturas, hemos fijado las condiciones iniciales de tal forma que los órdenes de magnitud de las fuerzas de flotabilidad haciendo y sin hacer la aproximación de Boussinesq sean iguales y los resultados obtenidos han sido muy parejos a los reportados por otros autores.

Como desarrollos futuros se pretende explotar puramente el problema de Rayleigh-Bénard, para el cual en este documento únicamente se ha podido realizar una breve introducción ya que su desarrollo completo podría ocupar perfectamente un TFG. Una vez explotado este problema, sale a la luz uno de los motivos por los cuales se ha escogido el Método de MacCormack y es la posibilidad de extenderlo a tres dimensiones y poder observar patrones convectivos 3D. También sería interesante estudiar el problema de convección natural en geometrías cilíndricas y esféricas. Como hemos comentado anteriormente con unas ecuaciones muy similares K.V. Parchevsky simula la convección solar a gran escala por tanto sería un problema real al cual se podría aplicar este método. La inclusión de modelos de turbulencia nos permitiría simular patrones convectivos turbulentos a los cuales actualmente no podemos acceder. Este método nos permitiría el estudio de las ondas acústicas generadas posteriores a la inestabilidad. Para simular problemas de convección más realistas en lugar de utilizar la ecuación de estado de un gas ideal se podrían utilizar ecuaciones de estado reales, interpolando los valores requeridos de una base de datos, por ejemplo.

8 BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. B. Ripoll y Miguel Pérez-Saborid, *Fundamentos y aplicaciones de la mecánica de fluidos*, McGraw-Hill Interamericana, Madrid, 2005
- [2] E. L. Koschmieder, *Bénard Cells and Taylor vortices*, Cambridge university press, United States of America, 1993
- [3] S. Biringen and Chuen-Yen Chow, *An introduction to computational fluid mechanics by example*, Wiley & Sons, Nex Jersey, 2011
- [4] Tom M. Apostol, *Calculus Volumen II Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades*, Editorial Reverté, Barcelona, 1985
- [5] Barry Saltzman, *Finite amplitude free convection as an initial value Problem-I*, Journal of atmospheric science, 1962
- [6] J. O. Wilkes and S. W. Churchill, *The finite-difference Computation of natural convection in a rectangular enclosure*, A.I.Ch.E Journal, Michigan, 1966
- [7] Frank Rietz and Ralf Stannarius, *Convection and segregation in a flat rotating sandbox*, New Journal of Physics, Magdeburg, 2012
- [8] Leonardo Valencia Merizalde, *Estudio Numérico y Experimental de Flujo Rayleigh-Bénard en Cavidades Cúbicas para Régimen Transitorio y Turbulento*, 2005.
- [9] D. D. Gray and A. Giorgini, *The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases*, International Journal of Heat and Mass transfer, 1976.
- [10] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic stability*, Dover, New York, 1981.
- [11] R. W. Lewis, *Computational techniques in heat transfer*, Eng. Pineridge Press Swansea, 1985.
- [12] H. Schlichting, *Boundary-layer theory*, Mc Graw Hill, New York, 1968.
- [14] Adrian Bejan, *Convection heat transfer*, John Wiley and sons, New York, 1948.
- [15] T. Cebecci and P. Bradshav, *Physical and computational aspects of convective heat transfer*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [16] J. W. Deardorff, *A Numerical Study of Two-Dimensional Paralell-Plate Convection*, Journal of the atmospheric Science, 1964.
- [17] Pijush K. Kundu, Ira M. Cohen, David R Dowling, *Fluid Mechanics Fifth Edition*, Academic Press, 2011.
- [18] White F.M., *Fluid Mechanics*, Mc Graw Hill, 1998.

- [19] Parchevsky K.V, *Numerical simulation of 2D compressible heat-driven convection*, Center for Turbulence Research Briefs, 2002.
- [20] D. D. Gray and A. Giorgini, *The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases*, International Journal of Heat and Mass transfer, 1976.
- [21] O. G. Martynenko y P.P. Khramtsov, *Free-Convective Heat Transfer*, Springer, 2005.
- [22] W. M. Kays, *Convective Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, 1966.
- [23] Launder B. E., Spalding D. B., *Mathematical models of turbulence*, Academic Press., New York, 1972.
- [24] Brice Carnahan, H. A. Luther, James O. Wilkes, *Applied Numerical Methods*, Wiley, 1964.
- [25] J. D. Hellums and S. W. Churchill, *Journal of Heat Transfer*, 1962.
- [26] Pablo José Ruiz Contreras, *Método de colocación en el problema de Rayleigh-Bénard*, ETSI Sevilla, 2013.
- [27] Subhankar Sen, Sanjay Mittal and Gautmam Biswas, *Flow past a square cylinder at low Reynolds numbers*, International journal for numerical methods in fluids, 2011.
- [28] MacCormack, R.W, *Numerical computation of compressible and viscous flow*, AIAA education series, 2014.