



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

## La Geometría Esférica

Memoria realizada por Carlos Valverde Martín

---

Dirigido por:

VºBº

Dr. Alfonso Carriazo Rubio



# Abstract

In this work we present the main facts on Spherical Geometry, by using two different approaches: Differential Geometry and Descriptive Geometry. For instances, we prove that the geodesics on the Sphere are the so-called great circles, which always intersect. We also establish some results about Spherical Trigonometry, like that saying that the sum of the angles of a spherical triangle must be greater than  $\pi$ .



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. La Geometría Diferencial de la Esfera</b>	<b>11</b>
1.1. Curvas regulares . . . . .	11
1.1.1. Curva parametrizada regular, cambio de parámetros y parámetro arco . . . . .	12
1.1.2. Triedro de Frénet y Teorema Fundamental de curvas . . . . .	17
1.2. Superficies regulares . . . . .	21
1.2.1. Superficie simple, plano tangente y cambio de parámetros . . . . .	22
1.2.2. La Primera Forma Fundamental . . . . .	29
1.2.3. Curvas en superficies. Geodésicas . . . . .	31
1.2.4. El Teorema de Gauss-Bonnet. Consecuencias . . . . .	39
1.3. Geodésicas de la Esfera . . . . .	45
<b>2. La Geometría de la Esfera</b>	<b>51</b>
2.1. Los triedros y sus propiedades . . . . .	51
2.2. Principales conceptos de la Geometría Esférica . . . . .	59
2.3. Trigonometría Esférica . . . . .	62
<b>Conclusiones</b>	<b>81</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>83</b>



# Introducción

“Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única recta paralela a la anterior”. Este enunciado, conocido como *Axioma de las paralelas* (véase la Figura 1) es, probablemente, una de las “verdades geométricas” que antes aprendemos en nuestra vida escolar y académica.

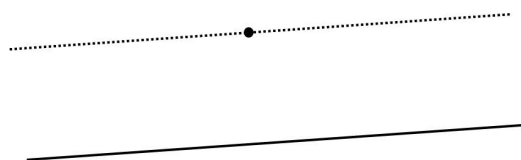


Figura 1: Axioma de las paralelas

De hecho, fue propuesto por Proclus (410-485), aunque se conoce también como *Axioma de Playfair*, en honor de este matemático escocés del siglo XVIII, quien lo propuso para sustituir al célebre *Quinto Postulado de Euclides*, cuyo enunciado original podría traducirse aproximadamente de la siguiente manera: “Si una línea recta que incide sobre dos líneas rectas forma los ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, si se prolongan indefinidamente, se encuentran en el lado en que están los ángulos menores que los dos ángulos rectos”. Resulta evidente la mayor complejidad de este enunciado, para cuya comprensión suele ser más que recomendable visualizar lo que en él se dice (véase la Figura 2).

Euclides lo incluyó, junto con otros cuatro postulados, como punto de partida para desarrollar todo el conocimiento geométrico de su época en sus libros de *Los Elementos*, escritos alrededor del año 300 a.C. Estos otros cuatro postulados eran:

1. Se puede dibujar una línea recta desde un punto hasta cualquier otro.
2. Todo segmento se puede extender continuamente a una línea recta.

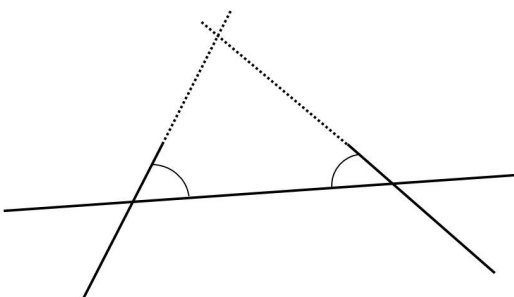


Figura 2: Quinto Postulado de Euclides

3. Se puede describir una circunferencia con cualquier centro y radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

Está claro que el Quinto Postulado es muy diferente de los anteriores. Esto hizo que el propio Euclides se sintiera incómodo con él, y tratara de usarlo lo menos posible. Además, fueron muchos los matemáticos que intentaron, erróneamente, probar que podía deducirse de los otros cuatro: Ptolomeo, Wallis, Saccheri, Legendre, ...

No fue hasta el siglo XIX que se pudo resolver el problema de la dependencia o no de este enunciado. Y se hizo desarrollando dos nuevas geometrías, resultantes de las dos posibles negaciones del Axioma de las Paralelas: si no es cierto que por un punto exterior a una recta pase una única recta, puede ser porque no pase ninguna (es el caso de la Geometría Esférica) o porque pase más de una (se obtendría entonces la llamada Geometría Hiperbólica). Este trabajo está dedicado a la primera, cuyo establecimiento suele atribuirse a Riemann, matemático alemán más conocido por la Geometría Riemanniana, que lleva su nombre (puede verse su retrato en la Figura 3). Para un relato más completo de esta historia, incluyendo el nacimiento de la Geometría Hiperbólica, recomendamos la referencia [1].

Es este un buen momento para aclarar que, durante toda esta memoria, cada vez que nos refiramos a la Esfera, lo estaremos haciendo a la Superficie Esférica. Así, la Geometría Esférica podría definirse como aquella que se desarrolla en la superficie de una esfera. En ella, las rectas de la geometría plana serán sustituidas por las llamadas circunferencias máximas, que siempre se cortan, lo que elimina la posibilidad de la existencia de “paralelas”. Otro enunciado muy destacado, como veremos, es que la suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que  $\pi$ . De hecho, fue Legendre quien probó





Figura 3: Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

que la igualdad a este valor en la geometría plana era equivalente al Quinto Postulado.

Para llegar a estos resultados, lo hacemos desde una doble vertiente: desde la Geometría Diferencial y desde la Geometría Descriptiva. El primer enfoque se recoge en el Capítulo 1. Para ello, hemos optado por realizar un recorrido por la materia impartida en las asignaturas obligatorias del tercer curso del Grado en Matemáticas de la Universidad de Sevilla llamadas *Geometría Local de Curvas y Superficies* y *Geometría y Topología de Superficies*. Hemos incluido cuantos resultados y definiciones nos han parecido necesarios para seguir el desarrollo de la teoría, optando por no escribir sus demostraciones, pues ello aumentaría la extensión de esta memoria de manera excesiva. Sin embargo, hemos ido particularizando al caso de la Esfera, a modo principalmente de ejemplos, de manera que quede claro cómo se obtienen los resultados correspondientes. Además, incluimos una última sección en este capítulo en la que se muestra otra manera de calcular las curvas geodésicas de la Esfera, que puede ser extendida a dimensiones superiores.

En cuanto al segundo enfoque, se recoge en el Capítulo 2. En él se abordan los resultados de manera quizás más directa, utilizando algunas propiedades previamente demostradas sobre triedros. Se completa este capítulo con algunos resultados de Trigonometría Esférica, que ponen de manifiesto, una vez

más, la diferencia entre esta geometría y la del plano.

Concluimos esta memoria con una lista de los materiales bibliográficos empleados en su elaboración.

No quisiera acabar esta Introducción sin expresar mi agradecimiento a mi familia y a mis amigos, pues sin sus apoyos esta memoria sería difícil afrontarla. Gracias a ellos, por ejemplo, he podido entender mejor las figuras realizadas al haberles explicado qué querían decir, además de animarme en momentos de estrés donde uno no sabe ya qué hacer. Por otro lado, también quería agradecer a Alfonso la ayuda que me ha ofrecido a lo largo del trabajo. Creo que hemos hecho un buen equipo aprendiendo temas que no habíamos visto con anterioridad. En particular, he aprendido también muchas cosas ajenas al trabajo que hacen ver cómo puede ser la vida de un investigador.

Espero que el trabajo sea de agrado al lector y que se pueda entender con todo detalle y espero que todo este trabajo haya sido útil para motivar a quien realmente le guste las Matemáticas, y en particular, la Geometría.

# Capítulo 1

## La Geometría Diferencial de la Esfera

En este capítulo se tratarán definiciones básicas y los resultados más importantes (desde el punto de vista de la Geometría Diferencial) que permitirán introducir el contexto en el que se sitúa el tema del trabajo: La Geometría Esférica.

Estos conceptos se estudiaron en Geometría Local de Curvas y Superficies, asignatura impartida en el tercer curso del Grado en Matemáticas, lo que justifica que no se incluyan las demostraciones. Éstas pueden consultarse en la referencia [2].

En este capítulo se tomará la Topología Euclídea de  $\mathbb{R}^3$ , que es la topología métrica asociada a la distancia métrica euclídea (la del valor absoluto). Así, las bolas abiertas forman una base de ella. ass

### 1.1. Curvas regulares

En esta sección se estudian los principales elementos que engloban las curvas en el espacio, como son las reparametrizaciones (entre ellas, el parámetro arco), el triedro de Frénet, la curvatura y la torsión.

### 1.1.1. Curva parametrizada regular, cambio de parámetros y parámetro arco

Empezaremos introduciendo el concepto de curva, estudiando el cambio de parámetros y como caso más importante, el parámetro arco.

**Definición 1.1.1.** Una *curva parametrizada* en  $\mathbb{R}^3$  es una aplicación

$$\begin{aligned} \alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

definida en un abierto  $(a, b)$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$ . Además, se dice que  $\alpha$  es *regular* si  $\alpha'(t) \neq 0$  para cualquier  $t \in (a, b)$ .

Se recuerda que  $\alpha \in \mathcal{C}^\infty$  significa que  $\alpha$  admite derivadas de todos los órdenes, es decir, que las funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  (llamadas coordenadas) son derivables en el sentido habitual.

**Definición 1.1.2.** Sea  $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada. A la imagen de  $\alpha$  se le llama *traza*.

Como la traza de una curva parametrizada es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  (que se trata de un espacio vectorial), se dotará a este espacio del producto escalar habitual en espacios euclídeos:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = \sum_{i=1}^3 u_i v_i,$$

para todos  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ . Asimismo, este producto escalar genera la norma euclídea (también llamada norma 2) de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}},$$

para todo  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ . Salvo que se indique lo contrario, se utilizará esta norma para las demás definiciones, por lo que se simplificará la notación para referirnos a esta norma utilizando  $|\cdot|$ .

**Definición 1.1.3.** Sea  $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada regular. Se define el *vector tangente* a  $\alpha$  en  $\alpha(t)$ , denotado por  $\mathbf{t}(t)$ , como:

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}} (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

A la norma de  $\alpha'(t)$  se le llama *velocidad* de  $\alpha$  en  $\alpha(t)$ .

Introducimos ahora los ejemplos de curvas sobre los que trabajaremos posteriormente, y que tendrán propiedades que las hacen distintas de cualquier otra curva.

**Ejemplo 1.1.4.**

- El ejemplo más sencillo de curva parametrizada regular es el de la recta. Sea  $\alpha$  una recta que pasa por un punto  $P$  y que tiene como vector director  $\mathbf{v}$ . Entonces, una parametrización de la recta es la siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto P + t\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

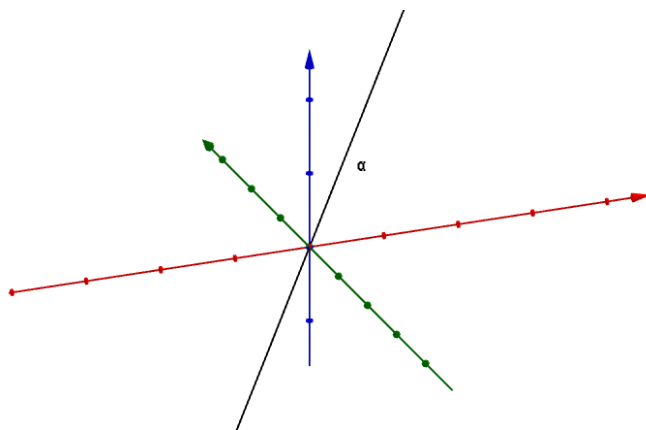


Figura 1.1: Recta que pasa por el origen con vector director  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ .

Efectivamente, se trata de una curva parametrizada regular ya que es una aplicación lineal (y por tanto, es de clase  $\mathcal{C}^\infty$ ) y su derivada es  $\alpha'(t) = \mathbf{v} \neq 0$  por hipótesis. Por consiguiente, existe el vector tangente:

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

- Sea  $\beta$  la circunferencia de centro  $P$  y radio  $r > 0$  en el plano OXY parametrizada por:

$$\begin{aligned} \beta : (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto P + (r \cos t, r \sin t, 0). \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

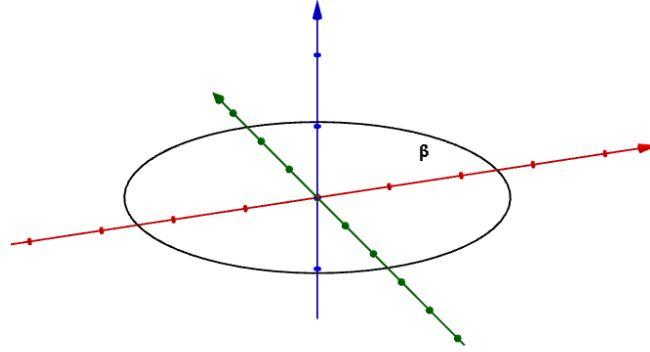


Figura 1.2: Circunferencia en el plano OXY de centro el origen y radio 5.

Se trata de una curva parametrizada regular, ya que sus componentes son funciones trigonométricas, y por tanto, de clase  $\mathcal{C}^\infty$ . Además, es regular puesto que  $\beta'(t) = (-r \sin t, r \cos t, 0) \neq (0, 0, 0)$ , para cualquier  $t \in (0, 2\pi)$ , pues no existe valor de  $t$  que anule el seno y el coseno simultáneamente. Por tanto, existe su vector tangente que viene dado por:

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = \frac{1}{r}(-r \sin t, r \cos t, 0) = (-\sin t, \cos t, 0).$$

- Por último, definimos como  $\gamma$  la hélice circular de radio  $r$  y de paso  $2\pi h$  definida por:

$$\begin{aligned} \gamma : (-2\pi, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (r \cos t, r \sin t, ht). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

En función del signo del parámetro  $h$ , la hélice será *dextrógira* ( $h > 0$ ) o *levógira* ( $h < 0$ ). Estos nombres proceden del sentido en el que se recorre la curva (véase la Figura 1.3).

Independientemente del signo de  $h$ , se tiene que  $\gamma$  es una curva parametrizada ya que  $\gamma$  es de clase  $\mathcal{C}^\infty$ , puesto que sus coordenadas  $x$  e  $y$  son funciones trigonométricas, y su coordenada  $z$  es lineal, todas de clase  $\mathcal{C}^\infty$ . Además, es regular pues  $\alpha'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in (a, b)$ , pues  $\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t, h) \neq (0, 0, 0)$ , ya que no existe ningún valor real donde las funciones seno y coseno se anulen simultáneamente.

Siguiendo el argumento de los ejemplos anteriores, calculamos el vector tangente:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(t) &= \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{(-r \operatorname{sen} t, r \operatorname{cos} t, h)}{\sqrt{r^2 \operatorname{cos}^2(t) + r^2 \operatorname{sen}^2(t) + h^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}(-r \operatorname{sen} t, r \operatorname{cos} t, h). \end{aligned}$$

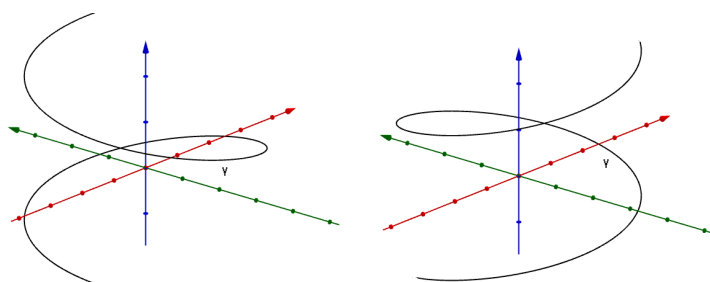


Figura 1.3: Hélices levógiara y dextrógiara de radio 5 y de paso  $2\pi$ .

Una vez vista la definición de curva parametrizada regular, veamos cómo se pueden obtener reparametrizaciones de ésta y qué debemos exigir para que esas reparametrizaciones sean también regulares.

**Definición 1.1.5.** Sean  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada regular y  $g : (c, d) \rightarrow (a, b)$  una función real biyectiva. Se dice que  $g$  es un *cambio de parámetros* de  $\alpha$  si se trata de una función de clase  $\mathcal{C}^\infty$  que verifica que  $g'(\sigma) \neq 0$ , para todo  $\sigma \in (c, d)$ . En estas condiciones, se define la *curva reparametrizada* como  $\beta = \alpha \circ g$ .

Si consideramos  $\beta = \alpha \circ g$  como en la definición anterior, se puede comprobar que la traza de  $\alpha$  es igual que la de  $\beta$ , además de que  $\beta$  es una curva parametrizada regular. Una vez introducida la noción de cambio de parámetros, procedemos a definir el concepto de parámetro arco.

**Definición 1.1.6.** Sean  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada regular y  $t_0 \in (a, b)$ . La función *parámetro arco*  $s : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  se define como:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\xi)| d\xi.$$

Esta función, por definición, nos proporciona la distancia a lo largo de la curva  $\alpha$  entre el punto  $\alpha(t_0)$  y  $\alpha(t)$ , siguiendo el sentido de la curva de  $a$  a  $b$ . Además se puede demostrar que tiene la propiedad de que no depende de la parametrización tomada. Por otro lado, esto nos da una reparametrización de la curva en términos de  $s$ . A este parámetro  $s$  le llamaremos *parámetro natural* y a la parametrización *parametrización natural*. Usaremos la abreviatura "p.n." para referirnos al parámetro natural.

Ahora procedemos a obtener la parametrización natural de las curvas estudiadas en el Ejemplo 1.1.4:

**Ejemplo 1.1.7.**

- Sea  $\alpha$  la recta definida por (1.1.1). Como  $\alpha'(t) = \mathbf{v}$ , se tiene que  $|\alpha'(t)| = |\mathbf{v}|$ , de donde se deduce que:

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(\xi)| d\xi = \int_0^t |\mathbf{v}| d\xi = |\mathbf{v}|t.$$

Despejando, se obtiene que la recta parametrizada naturalmente viene dada por:

$$\alpha(s) = P + \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}s.$$

- Sea ahora  $\beta$  la circunferencia con ecuaciones paramétricas dadas por (1.1.2). Volvemos a repetir los pasos anteriores para  $\beta$ , obteniendo:

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= (-r \operatorname{sen} t, r \operatorname{cos} t, 0), \\ |\beta'(t)| &= \sqrt{(-r \operatorname{sen} t, r \operatorname{cos} t, 0) \cdot (-r \operatorname{sen} t, r \operatorname{cos} t, 0)} = r, \\ s(t) &= \int_0^t |\beta'(\xi)| d\xi = \int_0^t r d\xi = tr, \\ \beta(s) &= P + \left( r \operatorname{cos} \left( \frac{s}{r} \right), r \operatorname{sen} \left( \frac{s}{r} \right), 0 \right). \end{aligned}$$

- Por último, calculamos el parámetro natural para la hélice  $\gamma$  parame-



trizada como (1.1.3):

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-r \operatorname{sen} t, r \operatorname{cos} t, h), \\ |\gamma'(t)| &= \sqrt{(-r \operatorname{sen} t, r \operatorname{cos} t, h) \cdot (-r \operatorname{sen} t, r \operatorname{cos} t, h)} = \sqrt{r^2 + h^2}, \\ s(t) &= \int_0^t |\gamma'(\xi)| d\xi = \int_0^t \sqrt{r^2 + h^2} d\xi = t\sqrt{r^2 + h^2}, \\ \gamma(s) &= \left( r \operatorname{cos} \left( \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right), r \operatorname{sen} \left( \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right), h \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right).\end{aligned}$$

A continuación, daremos una caracterización de curvas p.n. que nos permite comprobar fácilmente si una curva  $\alpha$  está parametrizada con el parámetro arco:

**Proposición 1.1.8.** *Una curva parametrizada regular  $\alpha(t)$  está parametrizada naturalmente si y sólo si  $|\alpha'(t)| = 1$ , para todo  $t \in (a, b)$ .*

**Notación 1.1.9.** Cuando la curva esté parametrizada por su parámetro arco, se notará la primera derivada como  $\dot{\alpha}(s)$ , la segunda como  $\ddot{\alpha}(s)$  y así sucesivamente.

Por último, acabamos con el concepto de curva regular, que generaliza el de curva parametrizada regular.

**Definición 1.1.10.** Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada regular. A la familia de todas las curvas reparametrizadas de  $\alpha$  se le llama *curva regular*.

Se recuerda que la traza de una curva parametrizada regular  $\alpha$  coincide con la de su curva reparametrizada  $\beta$ . Esto nos lleva a entender el concepto de curva regular realmente como la traza de cualquier parametrización de  $\alpha$ .

### 1.1.2. Triedro de Frénet y Teorema Fundamental de curvas

En este apartado definiremos los elementos básicos de una base ortonormal de vectores en  $\mathbb{R}^3$  que forman un sistema de referencia móvil en una curva parametrizada regular  $\alpha$ , sistema que recibirá el nombre de Triedro de Frénet.

**Definición 1.1.11.** Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada naturalmente. Se define la *curvatura* de  $\alpha$  en  $\alpha(s)$ , denotada por  $k(s)$ , como el valor

$$k(s) = |\ddot{\alpha}(s)| = |\dot{\mathbf{t}}(s)|,$$

donde  $\mathbf{t}(s) = \dot{\alpha}(s)$  es el vector tangente a  $\alpha$  en  $\alpha(s)$ .

**Definición 1.1.12.** Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada naturalmente. Se define el *vector normal principal* a  $\alpha$  en  $\alpha(s)$ , denotado por  $\mathbf{n}(s)$ , como el vector

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\dot{\mathbf{t}}(s)}{k(s)},$$

que está bien definido en los puntos donde  $k(s) \neq 0$ .

**Definición 1.1.13.** Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada naturalmente. Se define el *vector binormal* a  $\alpha$  en  $\alpha(s)$ , denotado por  $\mathbf{b}(s)$ , como el vector:

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s).$$

Dado que el producto vectorial de dos vectores nos proporciona otro vector perpendicular a los anteriores y que el módulo de estos vectores definidos previamente es 1, podemos concluir que  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  es una base ortonormal que recibe el nombre de *Triedro de Frénet*.

**Nota 1.1.14.** Si  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva parametrizada natural y  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  es su triedro de Frénet, entonces  $\mathbf{b}(s)$  es paralelo a  $\mathbf{n}(s)$ .

Este hecho motiva el concepto de torsión de una curva:

**Definición 1.1.15.** Se define la *torsión* de una curva  $\alpha$  en  $\alpha(s)$ , denotada por  $\tau(s)$ , como el valor  $\tau(s) = -\dot{\mathbf{b}}(s) \cdot \mathbf{n}(s)$ .

Por tanto, la torsión nos mide el cambio de dirección del vector binormal. Así, la interpretación geométrica que tiene es la siguiente:

**Proposición 1.1.16.** *La torsión de una curva  $\alpha$  es nula si y sólo si  $\alpha$  es plana.*

Volviendo a los Ejemplos 1.1.4 y 1.1.7, calculamos tanto la curvatura como la torsión de la recta, la circunferencia y la hélice.

**Ejemplo 1.1.17.**

- Sea  $\alpha$  la recta dada por (1.1.1) cuya parametrización natural es:

$$\alpha(s) = P + \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}s.$$

Se tiene, entonces, lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(s) &= \dot{\alpha}(s) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \\ \dot{\mathbf{t}}(s) &= \ddot{\alpha}(s) = 0.\end{aligned}$$

Esto hace que su curvatura sea nula en todos sus puntos. Como consecuencia, no estén definidos ni el vector normal principal ni el vector binormal y, por tanto, no tiene sentido hablar del triedro de Frénet de una recta.

- Veamos ahora el caso más importante debido al estudio al que se refiere este trabajo. Sea  $\beta$  la circunferencia cuya parametrización natural fue calculada en el Ejemplo 1.1.7 y que viene dada por:

$$\beta(s) = \left( r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right).$$

Calculamos los vectores tangente, normal y binormal, así como la curvatura y la torsión de  $\beta$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(s) &= \dot{\beta}(s) = (-\sin(s/r), \cos(s/r), 0), \\ \dot{\mathbf{t}}(s) &= \ddot{\beta}(s) = \frac{1}{r}(-\cos(s/r), -\sin(s/r), 0), \\ k(s) &= |\ddot{\beta}(s)| = \frac{1}{r}\sqrt{\cos^2(s/r) + \sin^2(s/r)} = \frac{1}{r}, \\ \mathbf{n}(s) &= \frac{\ddot{\beta}(s)}{k(s)} = (-\cos(s/r), -\sin(s/r), 0), \\ \mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin(s/r) & \cos(s/r) & 0 \\ -\cos(s/r) & -\sin(s/r) & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1), \\ \tau(s) &= -\dot{\mathbf{b}}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = 0.\end{aligned}$$

Por tanto,  $k(s) = 1/r$  y  $\tau(s) = 0$ .

- Repetimos los cálculos anteriores para la hélice circular  $\gamma$  con parametrización natural:

$$\gamma(s) = \left( r \cos \left( \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right), r \operatorname{sen} \left( \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right), h \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right).$$

Denotamos por  $\omega$  al valor  $1/\sqrt{r^2 + h^2}$  y obtenemos, entonces:

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= (r \cos \omega s, r \operatorname{sen} \omega s, \omega h s), \\ \mathbf{t}(s) &= \dot{\gamma}(s) = (-r\omega \operatorname{sen} \omega s, r\omega \cos \omega s, \omega h), \\ \dot{\mathbf{t}}(s) &= \ddot{\gamma}(s) = (-r\omega^2 \cos \omega s, -r\omega^2 \operatorname{sen} \omega s, 0), \\ k(s) &= |\ddot{\gamma}(s)| = \sqrt{\ddot{\gamma}(s) \cdot \ddot{\gamma}(s)} = \sqrt{r^2 \omega^4 (\cos^2 \omega s + \operatorname{sen}^2 \omega s)} = r\omega^2, \\ \mathbf{n}(s) &= \frac{\ddot{\gamma}(s)}{k(s)} = (-\cos \omega s, -\operatorname{sen} \omega s, 0), \\ \mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = (h\omega \operatorname{sen} \omega s, -h\omega \cos \omega s, r\omega). \end{aligned}$$

Entonces, para calcular la torsión, derivamos el vector binormal (componente a componente):

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = (h\omega^2 \cos \omega s, h\omega^2 \operatorname{sen} \omega s, 0) = -h\omega^2 \mathbf{n}(s),$$

por lo que

$$k(s) = \frac{r}{r^2 + h^2} \text{ y } \tau(s) = \frac{h}{r^2 + h^2}. \quad (1.1.4)$$

Así que, al igual que la circunferencia, la curvatura y torsión de la hélice también son constantes. La única diferencia entre ambas curvas es que en  $\beta$  la torsión es 0, mientras que en  $\gamma$  no. Esta diferencia es importante ya que, por la Proposición 1.2.22, la circunferencia es plana, mientras que la hélice no. Por último, cabe destacar que si tomamos límite cuando  $h$  tiende a 0 en las expresiones (1.1.4), llegamos a que  $k(s) = 1/r$  y  $\tau(s) = 0$ , lo que nos hace ver la circunferencia como una hélice degenerada.

En el Ejemplo 1.1.17 vimos el cálculo de la curvatura y la torsión de dos curvas distintas y llegamos a la conclusión de que a pesar de que ambas eran constantes, no coincidían. Esto nos lleva a plantearnos si la torsión y la curvatura definen unívocamente a la curva. Para dar respuesta a esta pregunta, necesitaremos previamente el siguiente resultado:

**Teorema 1.1.18** (Teorema de Frénet-Serret). *Si  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva parametrizada natural con curvatura positiva y  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  es su triedro de Frénet, entonces:*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}(s) = & +k(s)\mathbf{n}(s), \\ \dot{\mathbf{n}}(s) = -k(s)\mathbf{t}(s) & +\tau(s)\mathbf{b}(s), \\ \dot{\mathbf{b}}(s) = & -\tau(s)\mathbf{n}(s). \end{cases}$$

El teorema anterior se puede expresar de forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}}(s) \\ \dot{\mathbf{n}}(s) \\ \dot{\mathbf{b}}(s) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix},$$

donde la matriz  $A$  es antisimétrica, siendo muy importante en la demostración del teorema siguiente:

**Teorema 1.1.19** (Teorema Fundamental de Curvas en  $\mathbb{R}^3$ ). *Sean dos funciones continuas  $\bar{k}, \bar{\tau} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\bar{k} > 0$ . Entonces existe una única curva (salvo movimientos rígidos)  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizada con parámetro arco, cuya curvatura y torsión son  $\bar{k}$  y  $\bar{\tau}$ , respectivamente.*

**Nota 1.1.20.** En el Teorema 1.1.19 se habla de la unicidad de la curva salvo movimientos rígidos ya que cualquier movimiento rígido no cambia ni la torsión ni la curvatura de una curva.

## 1.2. Superficies regulares

En esta sección se recordará el concepto de superficie regular de forma análoga a como se hizo en la Sección 1.1 para curvas. Comenzaremos con la noción de superficie simple y sus elementos para terminar con la definición de superficie regular en la que juegan un papel esencial las superficies simples. Para ilustrar estos conceptos, usaremos como ejemplo el elemento esencial de este trabajo: la Esfera.

### 1.2.1. Superficie simple, plano tangente y cambio de parámetros

En este apartado estudiaremos lo que es una superficie simple, veremos qué es el plano tangente en cada uno de sus puntos, y cómo podemos obtener reparametrizaciones de esa superficie.

**Definición 1.2.1.** Una *superficie simple* en  $\mathbb{R}^3$  es una aplicación inyectiva de clase  $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u^1, u^2) &\longmapsto (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2)) \end{aligned}$$

definida en un abierto  $U$ , que verifica que  $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \neq 0$  en todo punto de  $U$ , donde  $\mathbf{x}_i$  denota la derivada de  $\mathbf{x}$  respecto de  $u^i$ .

**Ejemplo 1.2.2.** Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Se define el *grafo de  $f$*  como el conjunto de puntos  $(u^1, u^2, f(u^1, u^2))$ . Veamos que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, f(x, y)) \end{aligned}$$

es una superficie simple.

Si  $(x, y) \neq (\bar{x}, \bar{y})$ , entonces se tiene que  $(x, y, f(x, y)) \neq (\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$ , por lo que  $\mathbf{x}$  es claramente inyectiva. Por otro lado,  $\mathbf{x}$  es de clase  $\mathcal{C}^\infty$ , al ser  $f$  diferenciable. Por último,  $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \neq 0$ , ya que  $\mathbf{x}_1 = (1, 0, f'_x)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (0, 1, f'_y)$  y su producto vectorial es  $(-f'_x, f'_y, 1)$ , que es distinto de  $(0, 0, 0)$ .

Estas superficies simples reciben el nombre de *Cartas de Monge*, en honor a Gaspard Monge (1746-1818), matemático francés que es considerado el fundador de la Geometría Diferencial por ser el primero en utilizar técnicas del cálculo diferencial para el estudio de objetos geométricos.

**Ejemplo 1.2.3.** Sea  $\alpha$  una curva parametrizada regular inyectiva en el plano OXZ dada de la forma

$$\begin{aligned} \alpha : (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (x(t), 0, z(t)), \end{aligned}$$

donde  $x(t) > 0$ . Se define la *superficie de revolución* generada al girar  $\alpha$  alrededor del eje OZ, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : (a, b) \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \theta) &\longmapsto (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t)). \end{aligned}$$

Se puede comprobar que es una superficie simple, ya que es inyectiva (por serlo  $\alpha$ ) y es de clase  $\mathcal{C}^\infty$ , pues todas sus componentes lo son. Además,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 &= (x'(t) \cos \theta, x'(t) \operatorname{sen} \theta, z'(t)) \times (-x(t) \operatorname{sen} \theta, x(t) \cos \theta, 0) = \\ &= (-x(t)z'(t) \cos \theta, x(t)z'(t) \operatorname{sen} \theta, x(t)x'(t)) = \\ &= x(t)(-z'(t) \cos \theta, z'(t) \operatorname{sen} \theta, x'(t)) \neq (0, 0, 0),\end{aligned}$$

ya que  $x(t) > 0$  y  $\alpha$  es regular.

**Ejemplo 1.2.4.** Siguiendo con el tema de este trabajo, del Ejemplo 1.2.2 se deduce que el hemisferio superior de la Esfera de radio  $r$

$$S_+^2(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = r^2; z > 0\}$$

se trata de una superficie simple. Podemos tomar como dominio  $U$  el disco unidad  $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$ , y  $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2})$ , como parametrización. Se puede hacer el mismo razonamiento para

$$S_-^2(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = r^2; z < 0\},$$

concluyendo que el hemisferio inferior también se trata de una superficie simple.

Por otro lado, haciendo uso del Ejemplo 1.2.3, podemos demostrar que la Esfera de radio  $r$  centrada en el origen (menos un meridiano) es una superficie simple, haciendo girar la curva  $\alpha(\varphi) = (r \cos \varphi, 0, r \operatorname{sen} \varphi)$ , donde el parámetro  $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ . En tal caso, obtenemos la superficie (véase la Figura 1.4.)

$$\mathbf{x}(\varphi, \theta) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, r \operatorname{sen} \varphi). \quad (1.2.1)$$

**Notación 1.2.5.** Cuando nos refiramos a curvas en la superficie esférica o a la parametrización de la Esfera obtenida en (1.2.1) usaremos los parámetros  $\varphi$  y  $\theta$  para mantener la notación de las coordenadas esféricas.

**Definición 1.2.6.** Si  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es una superficie simple, se define el *vector normal* a  $\mathbf{x}$  en  $p = \mathbf{x}(u^1, u^2)$  como el vector:

$$\mathbf{N}(u^1, u^2) = \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|}.$$

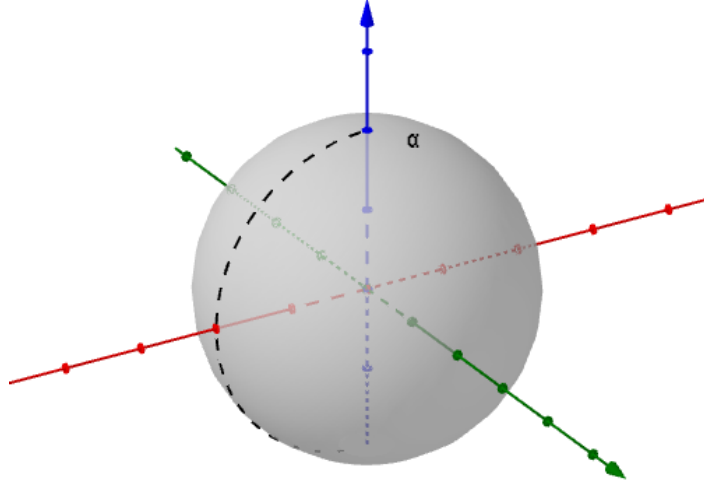


Figura 1.4: Superficie esférica obtenida al girar  $\alpha$  alrededor del eje OZ.

**Definición 1.2.7.** Sea  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie simple. Se define el *plano tangente* a  $\mathbf{x}$  en  $p = \mathbf{x}(u^1, u^2)$ , denotado por  $T_p(\mathbf{x})$ , como el plano que pasa por dicho punto y que tiene como vector característico al vector normal  $N$ .

Con estos elementos, podemos determinar la ecuación del plano tangente a cualquier superficie simple  $\mathbf{x}$  en cualquier punto  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ :

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(u^1, u^2)) \cdot \mathbf{N}(u^1, u^2) = 0,$$

lo que equivale a decir que

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(u^1, u^2)) \cdot \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|} = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$[(\mathbf{x} - \mathbf{x}(u^1, u^2)), \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] = 0,$$

donde  $[\cdot, \cdot, \cdot]$  denota el producto mixto.

Por analogía con la Sección 1.1, procedemos a definir el concepto de cambio de parámetros en una superficie simple.



**Definición 1.2.8.** Un *cambio de parámetros regular* es una aplicación biyectiva  $f : V \rightarrow U$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$  que verifica que  $|J(f)| \neq 0$ , donde  $J(f)$  denota la matriz jacobiana de  $f$ , es decir,

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \frac{\partial u^1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial v^1} & \frac{\partial u^2}{\partial v^2} \end{pmatrix}.$$

**Definición 1.2.9.** Si  $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ f$ , es decir,  $\mathbf{y}(v^1, v^2) = \mathbf{x}(f(v^1, v^2)) = \mathbf{x}(u^1, u^2)$ , entonces se dice que  $\mathbf{y}$  es una *reparametrización* de  $\mathbf{x}$ .

Las condiciones exigidas en la Definición 1.2.8 para que  $f$  sea un cambio de parámetros nos permiten demostrar la siguiente proposición:

**Proposición 1.2.10.** Si  $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ f$  es una reparametrización de  $\mathbf{x}$ , se tiene que  $Im(\mathbf{x}) = Im(\mathbf{y})$ ,  $\mathbf{y}$  es una superficie simple, y el plano tangente a  $\mathbf{y}$  en  $\mathbf{y}(v^1, v^2)$  coincide con el plano tangente a  $\mathbf{x}$  en  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ .

El siguiente resultado nos asegura que cualquier superficie simple cuya imagen está restringida a la imagen de su dominio posee aplicación inversa, siendo ambas aplicaciones diferenciables, es decir, es un difeomorfismo.

**Proposición 1.2.11.** Si  $\mathbf{x}$  es una superficie simple, entonces  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U)$  es un difeomorfismo.

Para finalizar este apartado introducimos el concepto de superficie regular, dando como ejemplo el que nosotros necesitamos, el de la Esfera y viendo que el concepto de plano tangente se puede extender a una superficie regular.

**Definición 1.2.12.** Sea  $M \subseteq \mathbb{R}^3$ . Diremos que un conjunto

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3, \alpha \in A\}$$

es un *atlas* en  $M$  si verifica:

1.  $\mathbf{x}_\alpha$  es una superficie simple, para cualquier  $\alpha \in A$ , tal que  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$  es abierto en  $M$ .
2.  $M = \bigcup_{\alpha \in A} \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ .

3. Si  $W = \mathbf{x}_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}) \cap \mathbf{x}_{\alpha_2}(U_{\alpha_2}) \neq \emptyset$ , entonces

$$\mathbf{x}_{\alpha_2}^{-1} \circ \mathbf{x}_{\alpha_1} : \mathbf{x}_{\alpha_1}^{-1}(W) \longrightarrow \mathbf{x}_{\alpha_2}^{-1}(W)$$

y

$$\mathbf{x}_{\alpha_1}^{-1} \circ \mathbf{x}_{\alpha_2} : \mathbf{x}_{\alpha_2}^{-1}(W) \longrightarrow \mathbf{x}_{\alpha_1}^{-1}(W)$$

son de clase  $\mathcal{C}^\infty$ .

En el caso de que exista ese atlas, se dirá que  $M$  es una *superficie regular*.

**Ejemplo 1.2.13.** La Esfera es un ejemplo claro de superficie regular, pero necesitamos dos superficies simples para cubrir la Esfera completa. En efecto si  $\mathbf{x}$  fuera la única superficie que cubriera la Esfera,  $\mathbf{x}(U) = S^2(r)$ , entonces, en virtud de la Proposición 1.2.11, resultaría que  $\mathbf{x} : U \longrightarrow S^2(r)$  sería un difeomorfismo y, por tanto, un homeomorfismo. Como  $S^2(r)$  es compacta,  $U$  también habría de serlo, por lo que, además de abierto en  $\mathbb{R}^2$ , sería cerrado. Pero, como  $\mathbb{R}^2$  es conexo, los únicos conjuntos  $U$  abiertos y cerrados en  $\mathbb{R}^2$  son el vacío y el propio  $\mathbb{R}^2$ . Así,  $U = \emptyset$ , lo que no es posible, o  $U = \mathbb{R}^2$ , que resulta contradictorio pues  $\mathbb{R}^2$  no es compacto.

Para ver qué dos superficies simples tendríamos que utilizar para cubrir  $S^2(r)$ , introducimos las proyecciones estereográficas.

Las proyecciones estereográficas, aplicadas a las cartas estelares, se conocieron por Hiparco de Nicea (190-125 a.C.) de quien se cree que introdujo la idea de longitud y latitud. La proyección estereográfica es aquella aplicación que lleva cada punto de la Esfera al plano, tomando rectas que pasan por un polo de la Esfera. Veamos la aplicación inversa  $\phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U = S^2(1) \setminus \{N\}$ , que lleva el plano a la Esfera unidad  $S^2(1)$ . Para ello, centramos la Esfera en el origen  $O = (0, 0, 0)$ . Sean  $Q = (u, v, 0)$  que está en el plano  $OXY$  y  $N = (0, 0, 1)$  el Polo Norte. La recta  $r$  que pasa por  $Q$  y  $N$  tiene como ecuación:

$$r = N + \lambda \overrightarrow{NQ} = (\lambda u, \lambda v, 1 - \lambda), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Entonces,  $r$  corta a la Esfera en un punto  $P = (x, y, z)$ , además de en  $N$  (véase la Figura 1.5) Para calcular las ecuaciones de  $P$ , buscamos el  $\lambda$  en  $r$

que verifique las ecuaciones de la Esfera:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\(\lambda u)^2 + (\lambda v)^2 + (1 - \lambda)^2 &= 1, \\ \lambda^2 u^2 + \lambda^2 v^2 + 1 + \lambda^2 - 2\lambda &= 1, \\ \lambda u^2 + \lambda v^2 + \lambda &= 2,\end{aligned}$$

de donde se deduce que  $\lambda = 2/(u^2 + v^2 + 1)$ ,  $\lambda \neq 0$ , obteniendo como ecuaciones paramétricas

$$\phi^{-1}(u, v) = \left( \frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{-1 + u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2} \right). \quad (1.2.2)$$

Se puede comprobar que la aplicación dada por las ecuaciones (1.2.2) es una superficie simple, cuya imagen es toda la Esfera menos el Polo Norte. Luego, para cubrir la Esfera totalmente, repetimos el mismo argumento con la proyección  $\psi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow V = S^2(1) \setminus \{S\}$  que utiliza el Polo Sur  $S = (0, 0, -1)$ . En este caso, las ecuaciones paramétricas que se obtienen son:

$$\psi^{-1}(u, v) = \left( \frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2} \right). \quad (1.2.3)$$

Por tanto, si tomamos como atlas  $\mathcal{A}$  el formado por estas dos proyecciones inversas, para ver que realmente la Esfera es una superficie regular basta comprobar que los cambios de parámetros son diferenciables. Es decir, tenemos que estudiar si

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

y

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$$

son de clase  $\mathcal{C}^\infty$ .

Razonando de forma similar a como lo hicimos para obtener  $\phi^{-1}$ , se pueden obtener las ecuaciones de  $\phi$  y  $\psi$ , que vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\phi : S^2(1) \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto \left( \frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right).\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \psi : S^2(1) \setminus \{S\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto \left( \frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que  $\phi(U \cap V) = \psi(U \cap V) = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ . Sea entonces un punto  $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ . Calculamos las ecuaciones de  $\psi \circ \phi^{-1}$  y  $\phi \circ \psi^{-1}$  en dicho punto

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi^{-1}(u, v) &= \psi \left( \frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2} \right) = \\ &= \left( \frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2} \right) = \phi \circ \psi^{-1}(u, v) \end{aligned}$$

que son de clase  $\mathcal{C}^\infty$ , pues queda excluido el origen, que es el único punto donde no lo serían.

Así, concluimos que  $\mathcal{A}$  es realmente un atlas que cubre a la Esfera completamente.

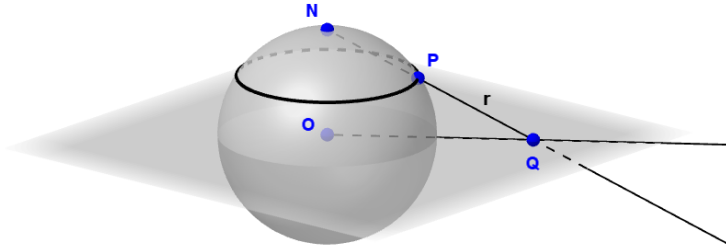


Figura 1.5: Proyección estereográfica inversa que lleva el plano a la Esfera menos el Polo Norte  $N$ .

En una superficie regular, como  $\mathbf{x}_{\alpha_2}^{-1} \circ \mathbf{x}_{\alpha_1}$  y  $\mathbf{x}_{\alpha_1}^{-1} \circ \mathbf{x}_{\alpha_2}$  son cambios de parámetros, entonces los vectores normales a los planos tangentes de cada superficie simple son paralelos. Este hecho motiva la siguiente definición en función de si estos vectores tienen o no el mismo sentido. Notaremos por  $\mathbf{N}^x$  al vector normal del plano tangente a la superficie simple  $x$ .

**Definición 1.2.14.** Una superficie regular  $M$  se dice que es *orientable* si existe un atlas  $\mathcal{A}$  en  $M$  tal que  $\mathbf{N}^{\mathbf{x}_{\alpha_1}} = \mathbf{N}^{\mathbf{x}_{\alpha_2}}$  en  $\mathbf{x}_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}) \cap \mathbf{x}_{\alpha_2}(U_{\alpha_2})$ , para cualesquiera  $\mathbf{x}_{\alpha_1}, \mathbf{x}_{\alpha_2} \in \mathcal{A}$ . En tal caso,  $\mathcal{A}$  es un *atlas de orientación*. Por el contrario, diremos que es *no orientable*, si no existe ningún atlas  $\mathcal{A}$  cumpliendo lo anterior.

**Ejemplo 1.2.15.** Utilizando las superficies simples del Ejemplo 1.2.13, se puede comprobar que ambas tienen el mismo vector normal, lo que hace que la Esfera sea una superficie regular orientable.

**Proposición 1.2.16.** Sean  $M$  una superficie regular,  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$  una superficie simple y  $p \in \mathbf{x}(U)$ . Se tiene que  $\langle \mathbf{x}_1(p), \mathbf{x}_2(p) \rangle$  coincide con el conjunto de vectores tangentes a  $M$  en  $\mathbf{x}(p)$ .

Por la Proposición 1.2.16, el plano  $\langle \mathbf{x}_1(p), \mathbf{x}_2(p) \rangle$  no depende de la superficie simple tomada, lo que nos permite extender el concepto de plano tangente a una superficie regular.

**Definición 1.2.17.** Sean  $M$  una superficie regular y  $p \in M$ . Se define el *Plano Tangente a  $M$  en  $p$* , denotado por  $T_p(M)$ , como el conjunto de los vectores tangentes a  $M$  en  $p$ .

## 1.2.2. La Primera Forma Fundamental

Una vez estudiado el concepto de superficie regular, sabemos que tiene asociado a ella un espacio tangente en cada punto. Este plano es un espacio vectorial, en el que definiremos un producto interno que recibirá el nombre de Primera Forma Fundamental.

**Nota 1.2.18.** Sea  $M$  una superficie regular y  $p \in M$ . Entonces existe una superficie simple  $\mathbf{x}$  tal que  $p = \mathbf{x}(u_0^1, u_0^2)$ . Como  $\mathbf{x}$  es una superficie simple, existen su plano tangente  $T_p(\mathbf{x})$  y su vector normal  $\mathbf{N}(p)$ . Esto hace que los vectores  $\mathbf{x}_1(p), \mathbf{x}_2(p)$  no sean paralelos y formen una base en  $T_p(\mathbf{x})$ . Por tanto, para cualesquiera  $\vec{v}, \vec{w} \in T_p(\mathbf{x})$ , tenemos que  $\mathbf{v} = v^1 \mathbf{x}_1(p) + v^2 \mathbf{x}_2(p) = \sum_i v^i \mathbf{x}_i(p)$  y análogamente  $\mathbf{w} = \sum_j w^j \mathbf{x}_j(p)$ . Como  $T_p(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^2$ , podemos definir el producto escalar usual para obtener:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \left( \sum_i v^i \mathbf{x}_i(p) \right) \cdot \left( \sum_j w^j \mathbf{x}_j(p) \right) = \sum_{i,j} v^i w^j \mathbf{x}_i(p) \cdot \mathbf{x}_j(p) = \sum_{i,j} v^i w^j g_{ij}(p),$$

lo que motiva la siguiente definición:

**Definición 1.2.19.** Sean  $M$  una superficie regular y  $p \in M$ . Se definen los *coeficientes métricos* como el producto escalar  $g_{ij}(p) = \mathbf{x}_i(p) \cdot \mathbf{x}_j(p) \in \mathbb{R}$ , donde  $\mathbf{x}$  es la superficie simple en la que se encuentra  $p$ . En general, notaremos los coeficientes métricos de una superficie simple (en cualquier punto) como  $g_{ij} = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$ . Denotaremos por  $g$  a la matriz de coeficientes métricos  $(g_{ij})$ .

**Ejemplo 1.2.20.** Calculemos los coeficientes métricos de la Esfera utilizando la parametrización del Ejemplo 1.2.4. Para ello, calculamos primero los  $\mathbf{x}_i$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 &= (-r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, -r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, r \cos \varphi), \\ \mathbf{x}_2 &= (-r \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, r \cos \varphi \cos \theta, 0).\end{aligned}$$

Después hacemos el producto escalar  $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$ , para cualesquiera  $i, j = 1, 2$ :

$$\begin{aligned}g_{11} &= \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1 = r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta + r^2 \cos^2 \varphi = r^2. \\ g_{22} &= \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2 = r^2 \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta + r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta = r^2 \cos^2 \varphi. \\ g_{12} &= \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = r^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \cos \theta - r^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 0. \\ g_{21} &= \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = g_{12} = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos como  $g$  la matriz diagonal siguiente:

$$g = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix}.$$

Una vez definidos los coeficientes métricos, estamos en condiciones de establecer la siguiente definición:

**Definición 1.2.21.** Se define la *Primera Forma Fundamental* de una superficie regular  $M$  en el punto  $p \in M$  como la aplicación bilineal:

$$\begin{aligned}I_p : T_p(M) \times T_p(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\longmapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i,j} g_{ij}(p) v^i w^j,\end{aligned}$$

donde  $g_{ij}$  son los coeficientes métricos de cualquier superficie simple del atlas de  $M$ .

La Geometría Intrínseca estudia los elementos geométricos que dependen de los coeficientes métricos. Estos elementos geométricos, como las longitudes, los ángulos o las áreas, se pueden calcular utilizando la Primera Forma Fundamental. En el apartado 1.2.3, se verá que la curvatura geodésica es también un elemento intrínseco.

### 1.2.3. Curvas en superficies. Geodésicas

En este apartado veremos primero que las propiedades de una curva se conservan al ser aplicadas bajo superficies simples, lo que permite ver las curvas en las superficies regulares. Así, tiene sentido estudiar la curvatura de ellas para generalizar el concepto de curvatura de una curva plana al de curvatura de una curva en una superficie regular.

**Proposición 1.2.22.** Sean  $M$  una superficie regular,  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$  una superficie simple en  $M$  y  $\bar{\alpha} : (a, b) \rightarrow U$  una aplicación. En estas condiciones,  $\alpha = \mathbf{x} \circ \bar{\alpha}$  es una curva si y sólo  $\bar{\alpha}$  lo es.

Si  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$  es una superficie simple, entonces  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  se puede parametrizar con los parámetros  $(u^1, u^2)$ . Tomando  $u^2 = u_0^2$ , obtenemos una curva  $\bar{\alpha}(u^1) = (u^1, u_0^2)$ . Análogamente, obtenemos la curva  $\bar{\beta}(u^2) = (u_0^1, u^2)$ . Estas curvas son las *rectas coordenadas* que pasan por el punto  $(u_0^1, u_0^2)$ .

Por la Proposición 1.2.22,

$$\alpha(u^1) = \mathbf{x}(\bar{\alpha}(u^1)) = \mathbf{x}(u^1, u_0^2)$$

y

$$\beta(u^2) = \mathbf{x}(\bar{\beta}(u^2)) = \mathbf{x}(u_0^1, u^2)$$

son curvas en  $M$ , lo que nos permite introducir la siguiente definición:

**Definición 1.2.23.** En las condiciones anteriores, a  $\alpha$  se le denomina *curva  $u^1$ -paramétrica*, mientras que a  $\beta$  se le llama *curva  $u^2$ -paramétrica*.

**Ejemplo 1.2.24.** Volviendo al Ejemplo 1.2.4 y utilizando la parametrización

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, \theta) &\longmapsto (r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi), \end{aligned}$$

obtenemos que las curvas  $u^1$ -paramétricas y  $u^2$ -paramétricas son

$$\alpha(\varphi) = (r \cos \varphi \cos \theta_0, r \cos \varphi \sin \theta_0, r \sin \varphi),$$

$$\beta(\theta) = (r \cos \varphi_0 \cos \theta, r \cos \varphi_0 \sin \theta, r \sin \varphi_0)$$

respectivamente. Las curvas  $\alpha$  se llaman *meridianos*, mientras que las curvas  $\beta$  se llaman *paralelos* (véase la Figura 1.6). Como veremos más adelante, se llama *circunferencia máxima* a aquella obtenida de intersecar la Esfera

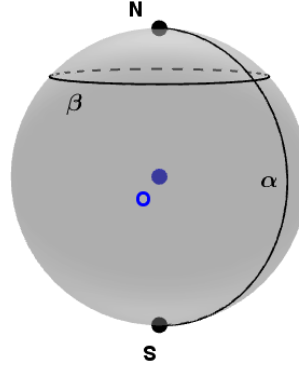


Figura 1.6: Esfera en la que se representa un meridiano  $\alpha$  y un paralelo  $\beta$ .

con el plano que contiene al origen de la misma. Así, cualquier meridiano es una semicircunferencia máxima, mientras que el único paralelo que es una circunferencia máxima es el ecuador. Los demás son circunferencias menores (circunferencias cuyo plano que interseca con la Esfera no contiene al origen).

Estamos ya en las condiciones de definir la curvatura geodésica de una curva. Sean  $M$  es una superficie regular,  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ ,  $p \in \mathbf{x}(U)$  y una curva  $\alpha$  parametrizada naturalmente (para simplificar notación) que pasa por  $p$ . Entonces, el vector  $\mathbf{t}$  tangente a  $\alpha$  en  $p$  está en el plano tangente a  $\mathbf{x}$  en  $p$ , mientras que, por definición, el vector normal a  $\mathbf{x}$  en  $p$  no se encuentra en  $T_p(\mathbf{x})$ . Por este motivo, se define un vector en  $T_p(\mathbf{x})$ , que es perpendicular a  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{N}$ .

**Definición 1.2.25.** En las condiciones anteriores, se define el vector *normal intrínseco* a  $\alpha$  en  $\alpha(s)$ , denotado por  $\mathbf{S}(s)$ , como el vector

$$\mathbf{S}(s) = \mathbf{N}(s) \times \mathbf{t}(s).$$

Con esta definición, acabamos de construir otro triedro para  $\alpha$ , que es el dado por  $\{\mathbf{t}, \mathbf{S}, \mathbf{N}\}$ . Además, usando las Ecuaciones de Frénet, obtenemos que  $\ddot{\alpha}(s) = \dot{\mathbf{t}}(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$ , que es perpendicular a  $\mathbf{t}(s)$ . Por tanto,  $\ddot{\alpha}$  es combinación lineal de los vectores  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{S}$ , lo que motiva la siguiente definición:

**Definición 1.2.26.** En las condiciones anteriores:

$$\ddot{\alpha}(s) = k(s)\mathbf{n}(s) = k_g(s)\mathbf{S}(s) + k_n(s)\mathbf{N}(s),$$



donde  $k_g(s)$  y  $k_n(s)$  son la *curvatura geodésica* y la *curvatura normal* de  $\alpha$  en  $\alpha(s)$ , respectivamente. Diremos que  $\alpha$  es una *curva geodésica* si  $k_g(s) \equiv 0$ .

**Proposición 1.2.27.** *Si  $\alpha(s)$  es plana, entonces  $k_g \equiv k$ , donde  $k$  es su curvatura plana.*

Hay que notar que para las curvas del plano, se puede definir una curvatura con signo, ya que en el plano, la curva se puede separar de su recta tangente en un punto hacia la izquierda (curvatura positiva) o hacia la derecha (curvatura negativa).

Según la Proposición 1.2.27, la curvatura geodésica de una curva  $\alpha(s)$  en  $\mathbb{R}^2$  es  $k(s)$ , por lo que se puede decir que el concepto de geodésica en una superficie regular generaliza el concepto de recta en el plano.

Otra consecuencia inmediata de la Definición 1.2.26 es la relación que guardan la curvatura de una curva con su curvatura geodésica y su curvatura normal.

**Proposición 1.2.28.** *Se tiene que  $k^2 = k_g^2 + k_n^2$ , donde  $k$  denota la curvatura de la curva, y  $k_g$ ,  $k_n$ , sus curvaturas geodésica y normal, respectivamente.*

Sea ahora una superficie regular  $M$  y  $\mathbf{x}$  una superficie simple en  $M$ . Si  $\alpha(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$  está en dicha superficie simple, necesitamos obtener  $\ddot{\alpha}(s)$  para poder obtener sus curvaturas. Derivando, obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(s) &= \sum_i \mathbf{x}_i \dot{u}^i, \\ \ddot{\alpha}(s) &= \sum_{i,j} \mathbf{x}_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j + \sum_i \mathbf{x}_i \ddot{u}^i.\end{aligned}$$

Pero aquí surge el problema de desconocer quiénes son los  $\mathbf{x}_{ij}$ . Entonces, Elwin Christoffel (1829-1900), quien estudió, entre otros campos, el de la geodesia, los mapas conformes o el análisis tensorial, quien llegó a la conclusión de la siguiente igualdad:

$$\mathbf{x}_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k + L_{ij} \mathbf{N},$$

igualdad que recibe el nombre de Ecuación de Gauss. Los  $\Gamma_{ij}^k$  son los símbolos de Christoffel, en honor a su inventor, y los  $L_{ij}$  son los coeficientes de la Segunda Forma Fundamental de  $\mathbf{x}$ .

Los siguientes resultados nos darán expresiones explícitas para el cálculo de los  $\Gamma_{ij}^k$  y  $L_{ij}$ , que nos servirá para concluir que la curvatura geodésica es una propiedad intrínseca.

Antes, conviene introducir la siguiente notación:

**Notación 1.2.29.** Si  $g$  es la matriz de los coeficientes métricos

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

de su definición se sigue que  $g$  es regular, por lo que existe su inversa  $g^{-1}$ , cuyos elementos denotaremos por:

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}.$$

**Proposición 1.2.30.** *En las condiciones habituales:*

1.  $\Gamma_{ij}^k = \sum_h (\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{x}_h) g^{kh}$ ,     $L_{ij} = \mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{N}$ .
2.  $k_g S = \sum_k \left( \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j + \ddot{u}^k \right) \mathbf{x}_k$ ,     $k_n = \sum_{ij} L_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j$ .

**Ejemplo 1.2.31.** Calculemos los coeficientes de la Segunda Forma Fundamental de  $S^2(r)$ , pero antes, necesitamos calcular tanto  $\mathbf{N}$  como los  $\mathbf{x}_{ij}$ . Del Ejemplo 1.2.20, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (-r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, -r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, r \cos \varphi), \\ \mathbf{x}_2 &= (-r \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, r \cos \varphi \cos \theta, 0). \end{aligned}$$

Derivando de nuevo, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{11} &= (-r \cos \varphi \cos \theta, -r \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, -r \operatorname{sen} \varphi), \\ \mathbf{x}_{12} &= (r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, -r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, 0) = \mathbf{x}_{21}, \\ \mathbf{x}_{22} &= (-r \cos \varphi \cos \theta, -r \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, 0). \end{aligned}$$

Por otro lado, afirmamos que  $\mathbf{N}$  es paralelo al vector de posición en  $S^2(r)$ . En efecto, sea  $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$  una curva cualquiera en  $S^2(r)$ . Así,

$$x^2(s) + y^2(s) + z^2(s) = r^2.$$

Derivando obtenemos:

$$x(s)\dot{x}(s) + y(s)\dot{y}(s) + z(s)\dot{z}(s) = 0.$$

Gracias a esto podemos decir que  $\alpha(s)$  es perpendicular a  $\dot{\alpha}(s)$  con la métrica Euclídea. Como todo vector tangente lo es a una cierta curva, esto prueba lo que decíamos. Tenemos entonces que:

$$\mathbf{N} = -\frac{1}{r}(r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi) = -(\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi).$$

Por tanto, los  $L_{ij}$  vienen dados por:

$$\begin{aligned} L_{11} &= \mathbf{x}_{11} \cdot \mathbf{N} = r, \\ L_{12} &= \mathbf{x}_{12} \cdot \mathbf{N} = 0 = \mathbf{x}_{21} \cdot \mathbf{N} = L_{21}, \\ L_{22} &= \mathbf{x}_{22} \cdot \mathbf{N} = r \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Así, si denotamos por  $L$  a la matriz de los coeficientes de la Segunda Forma Fundamental ( $L_{ij}$ ), obtenemos para la Esfera la matriz diagonal:

$$L = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \cos^2 \varphi \end{pmatrix}.$$

El siguiente resultado nos proporciona una forma más sencilla de calcular los símbolos de Christoffel:

**Proposición 1.2.32.** *En las condiciones habituales, se tiene que:*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_h g^{kh} \left( \frac{\partial g_{hi}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{hj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^h} \right).$$

*Como consecuencia, los símbolos de Christoffel son intrínsecos.*

Por tanto, combinando las Proposiciones 1.2.30 y 1.2.32, llegamos a la conclusión de que la curvatura geodésica es intrínseca.

A continuación veremos formas de calcular la curvatura geodésica de una curva y, como consecuencia de estos cálculos, caracterizaciones de cuándo una curva es geodésica.

**Proposición 1.2.33.** *Sea  $M$  una superficie regular y  $\mathbf{x}$  una superficie simple en  $M$ . Si  $\alpha(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$ , entonces:*

1.  $k_g(s) = (\dot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s), \mathbf{N}(s))$ .

2.  $k_g(s) = k(s) \cos \varphi(s)$ , con  $\varphi(s) = \widehat{(\mathbf{b}(s), \mathbf{N}(s))}$ .

**Corolario 1.2.34.** *Sea  $M$  una superficie regular y  $\mathbf{x}$  una superficie simple en  $M$ . Si  $\alpha(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$ , entonces:*

1.  $\alpha(s)$  es geodésica si y sólo si  $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \mathbf{N}) \equiv 0$ .

2.  $\alpha(s)$  es geodésica si y sólo si es una recta o  $\mathbf{n} \equiv \pm \mathbf{N}$ .

Con este corolario, podemos comprobar que las geodésicas en  $S^2(r)$  son las circunferencias máximas.

**Ejemplo 1.2.35.** Sea  $S^2(r)$  la Esfera de radio  $r$ . Por el Corolario 1.2.34, si  $\alpha(s)$  es una curva en la Esfera, entonces  $\alpha$  es geodésica si y sólo si es una recta o  $\mathbf{n} \equiv \pm \mathbf{N}$ . Pero en la Esfera no hay rectas, por lo que  $\mathbf{n} \equiv \pm \mathbf{N}$ . Además  $\mathbf{N}$  es paralelo al vector de posición en  $S^2(r)$ . Por tanto, como  $\alpha$  está en la Esfera, concluimos que  $\mathbf{N} \equiv \pm \alpha$ , que es equivalente a  $\mathbf{n} \equiv \pm \alpha$ . Derivando y utilizando las ecuaciones de Frénet:

$$-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} = \pm \frac{1}{r}\mathbf{t}.$$

Igualando coordenadas, concluimos que:

$$k \equiv \mp \frac{1}{r} \quad \text{y} \quad \tau \equiv 0.$$

Pero por definición, la curvatura siempre es positiva, luego  $k \equiv 1/r$ . Por el Teorema Fundamental de Curvas, existe una única curva (salvo movimientos rígidos) con  $k = 1/r$  y  $\tau = 0$ . Utilizando el Ejemplo 1.1.17, concluimos que esa curva es la circunferencia de radio  $r$ . Pero en la Esfera, las únicas circunferencias de radio  $r$  son las circunferencias máximas. Así, las geodésicas en la Esfera son las circunferencias máximas.

En la Sección 1.3 veremos otra forma de comprobar este resultado, que nos permitirá extender la obtención de geodésicas a esferas de cualquier dimensión.

Veamos ahora la ecuación diferencial que caracteriza a una curva geodésica:

**Teorema 1.2.36.** Sea  $\alpha(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$  una curva en una superficie simple  $\mathbf{x}$  de una superficie regular  $M$ . Entonces  $\alpha$  es geodésica si y sólo si

$$\ddot{u}^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{u}_i \dot{u}_j = 0, \quad k = 1, 2.$$

A continuación, definimos un concepto que nos dice cómo se curva una superficie, concepto que recibe el nombre de *curvatura de Gauss*.

**Definición 1.2.37.** Sean  $M$  una superficie regular y  $\mathbf{x}$  una superficie simple en  $M$ . Se define la *curvatura de Gauss* de  $M$ , denotada por  $K$ , como la expresión:

$$K = \frac{\det(L)}{\det(g)},$$

donde  $g$  y  $L$  son las matrices de la Primera y Segunda Formas Fundamentales de  $\mathbf{x}$ , respectivamente.

**Ejemplo 1.2.38.** Como ejemplo, calculamos la curvatura de Gauss de la Esfera, utilizando los Ejemplos 1.2.20 y 1.2.31:

$$\det(g) = \det \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix} = r^4 \cos^2 \varphi.$$

$$\det(L) = \det \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \cos^2 \varphi \end{pmatrix} = r^2 \cos^2 \varphi.$$

Así obtenemos que la curvatura de Gauss es:

$$K = \frac{\det(L)}{\det(g)} = \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{r^4 \cos^2 \varphi} = \frac{1}{r^2}.$$

Por tanto, la peculiaridad de la Esfera es que tiene curvatura de Gauss constante positiva. Además, se puede demostrar que la única superficie regular conexa y compacta con curvatura constante es la Esfera.

El siguiente resultado es importante pues, aunque en un principio, parece que la curvatura de Gauss es un concepto extrínseco (pues depende de los  $L_{ij}$ ), realmente es un concepto intrínseco. Esto se conoce como el Teorema Egregio de Gauss:

**Teorema 1.2.39** (Teorema Egregio de Gauss). *La curvatura de Gauss  $K$  es intrínseca, es decir, depende sólo de los coeficientes métricos de la superficie.*

La curvatura de Gauss jugará un papel esencial en el Teorema de Gauss-Bonnet, y el tenerla ya calculada, nos facilitará posteriormente el obtener resultados importantes con este resultado.

**Comparación entre las rectas del plano y las geodésicas en la superficie**

Para terminar esta sección, buscamos las similitudes que guardan las rectas en el plano y las geodésicas en una superficie regular. Para ello, veamos las propiedades que guardan las rectas en  $\mathbb{R}^2$ :

1. La curvatura de una recta en el plano es nula.
2. Una recta en el plano presenta el camino más corto entre dos puntos  $p$  y  $q$  distintos cualesquiera.
3. Si  $p, q \in \mathbb{R}^2$ ,  $p \neq q$ , entonces existe una única recta que une a  $p$  y  $q$ .
4. Si  $p \in \mathbb{R}^2$  y  $\mathbf{v}$  es un vector en  $p$ , entonces existe una única recta que pasa por  $p$  con dirección  $\mathbf{v}$ .
5. Todas las rectas tangentes a una recta son paralelas.

La comparación del apartado (1) ya la hemos visto en virtud de la Proposición 1.2.27. Para el apartado (2), tenemos el siguiente teorema que es similar para geodésicas y se conoce como la Propiedad Minimizante de las Geodésicas:

**Teorema 1.2.40.** *Sea  $M$  una superficie regular,  $p, q \in M$ ,  $p \neq q$ . Si existe una curva  $\alpha$  de  $p$  a  $q$  con longitud mínima en comparación con cualquier otra curva de  $p$  a  $q$ , entonces  $\alpha$  es geodésica.*

Gracias a J. Whitehead (1904-1960), uno de los fundadores de la Teoría de Homotopía, tenemos un resultado de carácter local para curvas geodésicas que es la extensión del apartado (3) para las rectas de  $\mathbb{R}^2$ :

**Teorema 1.2.41.** *Sea  $M$  una superficie regular. Para cualquier punto  $p \in M$ , existe un entorno  $\mathcal{N}(p) \subseteq M$  tal que para cualesquiera puntos  $q_1, q_2 \in \mathcal{N}(p)$ , existe una única geodésica de  $q_1$  a  $q_2$ .*

Por último, en concordancia con el apartado (4), tenemos un resultado de existencia y unicidad de geodésicas:

**Teorema 1.2.42.** *Sean  $M$  una superficie regular,  $p \in M$  y  $\mathbf{v} \in T_p(M)$ . Entonces existe una única curva  $\alpha$  geodésica en  $M$  que pasa por  $p$  y tiene a  $\mathbf{v}$  como dirección de su recta tangente en  $p$ .*

Para acabar, decir que el apartado (5) no es cierto para geodésicas en cualquier superficie. Por ejemplo, en la Esfera, las geodésicas son las circunferencias máximas. Sean un punto  $p$  en una circunferencia máxima cualquiera y  $r$  su recta tangente en  $p$ . Entonces, sólo hay una recta tangente a dicha circunferencia y paralela a  $r$ , que es la recta  $s$ , contradiciendo que todas las rectas tangentes sean paralelas a  $r$  (véase la Figura 1.7).

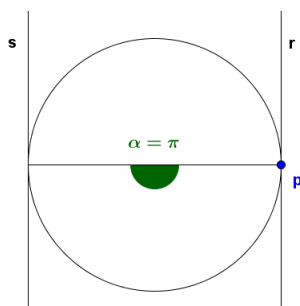


Figura 1.7: Sólo hay una recta paralela a una recta tangente en un punto  $p$  de una circunferencia máxima de la Esfera.

#### 1.2.4. El Teorema de Gauss-Bonnet. Consecuencias

En esta sección estudiaremos un teorema (en sus dos versiones) que relaciona la Geometría Diferencial con la topología. Este teorema recibe el nombre de Teorema de Gauss-Bonnet. Una vez lo hayamos enunciado, trataremos sus consecuencias y las aplicaremos al caso de la Esfera.

Comenzamos con las definiciones y los resultados previos que se necesitan para entender este teorema.

**Definición 1.2.43.** Una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  se dice que es *regular* en  $[a, b]$  si existe una curva regular  $\bar{\alpha} : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $[a, b] \subseteq (c, d)$  tal que  $\bar{\alpha}|_{[a, b]} \equiv \alpha$ .

Esta definición no deja lugar a ambigüedades pues en la definición que dimos de curva regular, el dominio de la curva era un intervalo abierto.

Para establecer el primer teorema de la sección, necesitamos hacer varias hipótesis, que detallaremos a continuación. Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular y supongamos que  $R \subset M$  es una región que satisface las siguientes propiedades:

- La región  $R$  es simplemente conexa en  $M$ . Es decir, cualquier curva cerrada en  $R$  se puede contraer a un punto sin salir de la región. Por lo tanto,  $R$  es un subconjunto convexo de  $M$  (véase la Figura 1.8). Además, el interior de  $R$  en  $M$  es conexo. Esta condición excluye los casos como la región encerrada por la figura de un 8.

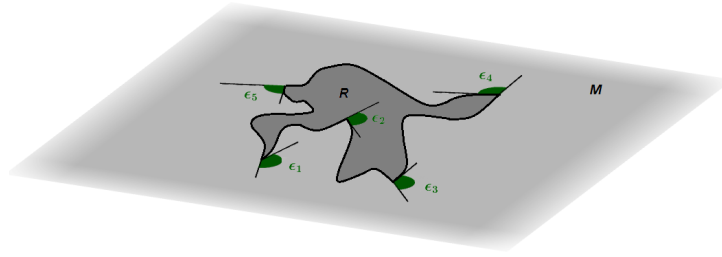


Figura 1.8: Ejemplo de región simplemente conexa.

- La frontera de  $R$  viene dada por una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  regular a trozos, es decir, existe una partición de  $[a, b]$ ,  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$  tal que  $\alpha|_{[s_i, s_{i+1}]}$  es regular, para todo  $0 \leq i \leq n - 1$ , y  $\alpha(a) = \alpha(s_0) = \alpha(s_n) = \alpha(b)$ . Para cada  $0 \leq i \leq n - 1$ , los  $\alpha(s_i)$  y los  $\alpha([s_i, s_{i+1}])$  son los *vértices* y los *lados* de  $\alpha$ , respectivamente.

Por definición de curva regular, se tiene que existen los vectores  $\dot{\alpha}(s_i^-)$  y  $\dot{\alpha}(s_i^+)$  y el ángulo entre ellos está bien definido. Llamamos a este ángulo *ángulo exterior* en el  $i$ -ésimo vértice y lo denotaremos por  $\epsilon_i$ . Además, satisface:

$$\cos(\epsilon_i) = I_{\alpha(s_i)}(\dot{\alpha}(s_i^-), \dot{\alpha}(s_i^+)).$$

Si suponemos que  $0 \leq |\epsilon_i| \leq \pi$ , entonces la ecuación anterior determina un signo para  $\epsilon_i$ . Una *cúspide* es un vértice donde  $\dot{\alpha}(s_i^-) = -\dot{\alpha}(s_i^+)$  y el ángulo exterior es  $\pm\pi$ . Si un vértice no es una cúspide, entonces podemos fijar el signo de  $\epsilon_i$  exigiendo que el ángulo esté entre 0 y  $\pi$  y comprobando si el triedro formado por  $\{\alpha(s_i^-), \dot{\alpha}(s_i^+), \mathbf{N}(\alpha(s_i))\}$  es dextrógiro o levógiro. El signo es positivo si el triedro es dextrógiro, y negativo, cuando es levógiro (véase la Figuras 1.9).

Para fijar el signo de una cúspide, tomamos dos puntos próximos a ese vértice, es decir, para  $\delta > 0$ , tomamos los puntos  $\alpha(s_i - \delta)$  y  $\alpha(s_i + \delta)$  y volvemos a comprobar si  $\{\alpha(s_i - \delta), \dot{\alpha}(s_i + \delta), \mathbf{N}(\alpha(s_i))\}$  es un



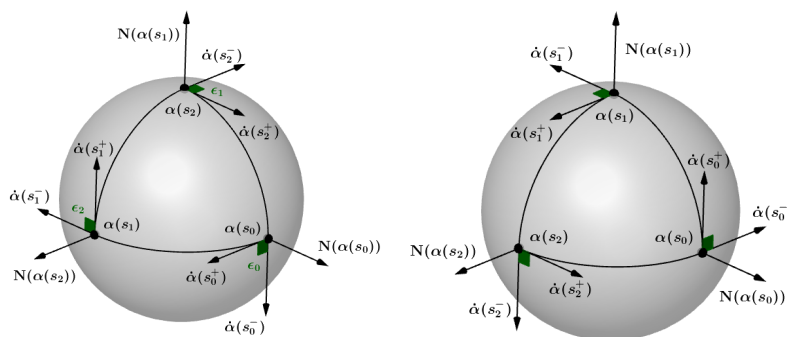


Figura 1.9: Los ángulos  $\epsilon_i$  son negativos en la imagen de la izquierda por ser los triedros levógiros y positivos en la figura de la derecha por ser dextrógiros

triedro levógiro o dextrógiro, tomando el signo como se ha explicado anteriormente.

- La última hipótesis que debemos considerar es que la región  $R$  y su frontera estén contenidas en una superficie simple  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$  de  $M$ .

Con esto, ya estamos en las condiciones de enunciar el Teorema de Gauss-Bonnet Local:

**Teorema 1.2.44** (Teorema de Gauss-Bonnet Local). *Si  $R$  es una región simplemente conexa en una superficie regular  $M$ , cuya frontera es una curva regular a trozos  $\alpha$  formando ángulos exteriores  $\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}$  en sus vértices, entonces*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K dA + \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i = 2\pi,$$

donde  $K$  es la curvatura de Gauss de  $M$  y  $k_g$  la curvatura geodésica de  $\alpha$ .

**Ejemplo 1.2.45.** Como aplicación de este resultado a la Esfera  $S^2(r)$ , veamos la relación entre el ángulo que se forma en el polo de un triángulo esférico  $T$  cuyo lado está en el ecuador de la Esfera y el área de dicho triángulo (véase la Figura 1.10).

Como se puede ver en la Figura 1.10, se tiene lo siguiente:

- Los ángulos exteriores  $\epsilon_0, \epsilon_2$  son rectos, mientras que  $\epsilon_1$  y  $\theta$  son suplementarios. Por tanto:  $\sum_i \epsilon_i = 2\pi - \theta$ .

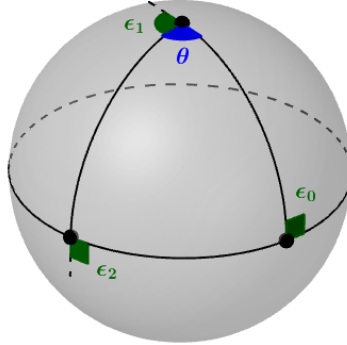


Figura 1.10: Aplicación del Teorema de Gauss-Bonnet a un triángulo geodésico en la Esfera.

- Los lados del triángulo forman parte de circunferencias máximas de la Esfera, luego sus curvaturas geodésicas son nulas.

Aplicando el teorema a  $T$  con estas observaciones, obtenemos que:

$$\iint_T K dA = \theta.$$

Pero sabemos por el Ejemplo 1.2.38, que la curvatura de Gauss de la Esfera de radio  $r$  es  $K = 1/r^2$ . Por consiguiente:

$$\frac{1}{r^2} \iint_T dA = \frac{1}{r^2} (\text{área}(T)) = \theta,$$

de donde concluimos que:

$$\text{área}(T) = \theta r^2.$$

Pero si tomamos como caso límite  $\theta = 2\pi$ , vemos que el área de un hemisferio de la Esfera de radio  $r$  es  $2\pi r^2$ . Concluimos entonces que el área de la Esfera es  $4\pi r^2$ .

Ahora procedemos a dar una extensión del Teorema 1.2.44. Para esto, necesitamos varias definiciones previas y algunas propiedades que se pueden extraer de ellas:

**Definición 1.2.46.** Dada una superficie regular  $M$ , se dice que  $R \subset M$  es una *región regular* si es compacta y su frontera está compuesta por una unión finita de curvas regulares a trozos.

En estas condiciones,  $R$  admite una *triangulación*, es decir, una familia  $\mathcal{Z} = \{T_1, \dots, T_n\}$  finita de triángulos que verifican:

- $R = \bigcup_{i=1}^n T_i$ .
- Si  $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ , entonces  $T_i \cap T_j$  es un lado común o uno o dos vértices.

Para una triangulación  $\mathcal{Z}$  de  $R$ , se define la *característica de Euler-Poincaré*, denotada por  $\chi(R)$  como

$$\chi(R) = F + V - E \in \mathbb{Z},$$

donde  $F$  es el número de triángulos de la triangulación,  $V$  el número de vértices y  $E$ , el número de lados.

La propiedad fundamental de la característica de Euler-Poincaré es la siguiente:

**Proposición 1.2.47.** *Si  $R \subset M$  es una región regular en una superficie regular  $M$ , entonces  $\chi(R)$  no depende de la triangulación tomada, es decir, si  $\mathcal{Z}$  y  $\tilde{\mathcal{Z}}$  son dos triangulaciones de  $R$ , entonces  $\chi(\mathcal{Z}) = \chi(\tilde{\mathcal{Z}})$ .*

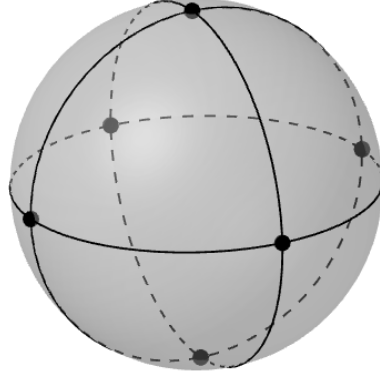
Por tanto, se tiene que  $\chi(R)$  es un invariante topológico de  $R$ . Además, las superficies compactas (como es el caso de la Esfera) son regiones regulares sin borde. Por tanto, admiten una triangulación y tiene sentido calcular su característica de Euler-Poincaré.

**Ejemplo 1.2.48.** Veamos cuánto vale la característica de Euler-Poincaré de la Esfera  $S^2(r)$ . Para ello, tomamos como triangulación  $\mathcal{Z}$  la de la Figura 1.11.

Con esta triangulación, tenemos que  $F = 8$ ,  $V = 6$  y  $E = 12$ , por lo que  $\chi(\mathcal{Z}) = 8 + 6 - 12 = 2$ . Pero por la Proposición 1.2.47, la característica no depende de la triangulación, por lo que concluimos que  $\chi(S^2(r)) = 2$ .

Estamos ya en las condiciones de enunciar el Teorema de Gauss-Bonnet Global para sacar conclusiones en sus aplicaciones a la Esfera:

**Teorema 1.2.49** (Teorema de Gauss-Bonnet Global). *Sean  $M$  una superficie regular orientable y  $R \subseteq M$  una región regular con  $\partial R = \bigcup_{i=1}^n \alpha_i$ , donde cada  $\alpha_i$  es una curva regular a trozos que verifica que  $\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$ , para  $i \neq j$ . Si*

Figura 1.11: Una triangulación  $\mathcal{Z}$  de la Esfera.

cada  $\alpha_i$  está orientada positivamente y  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_p$  son los ángulos exteriores en los vértices de los  $\alpha_i$ , se tiene:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i} k_g(s) ds + \iint_R K dA + \sum_{i=1}^p \epsilon_i = 2\pi\chi(R),$$

donde  $\chi(R)$  es la característica de Euler-Poincaré de la región  $R$ .

Se puede comprobar que este teorema aplicado a una superficie simple nos lleva al Teorema 1.2.44.

Veamos un resultado demostrado por Gauss que relaciona la curvatura  $K$  de una superficie regular  $M$  con los ángulos de un triángulo geodésico  $\Delta(ABC)$  de vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$ :

**Proposición 1.2.50.** *En las condiciones anteriores, se tiene que*

$$\iint_{\Delta(ABC)} K dA = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi.$$

Para el caso que nos interesa, se tiene que como la curvatura es positiva constante y el área de una región es siempre positiva, entonces:

**Corolario 1.2.51.** *La suma de los ángulos de un triángulo geodésico en la Esfera es mayor que  $\pi$*

Este resultado también lo obtendremos en el siguiente capítulo y es algo que diferencia de forma radical la geometría plana y la geometría esférica.

Por otro lado, como  $S^2(r)$  es una superficie compacta, veamos otras consecuencias del Teorema 1.2.49 que pueden ser aplicadas a ésta:

**Proposición 1.2.52.** *Si  $M$  es una superficie compacta, entonces*

$$\iint_M K dA = 2\pi\chi(M).$$

En el caso de la Esfera de radio  $r$ , como  $K = 1/r^2$ , se tiene que

$$\text{área}(S^2(r)) = 4\pi r^2,$$

que coincide con el caso límite visto en el Ejemplo 1.2.45.

**Proposición 1.2.53.** *Si  $M$  es una superficie compacta con  $K > 0$ , entonces cualquier par de curvas geodésicas cerradas se cortan.*

Particularizando para  $M = S^2(r)$ , como su curvatura de Gauss  $K = 1/r^2 > 0$ , concluimos que cualquier par de geodésicas cerradas en la Esfera se cortan (algo que gráficamente es obvio, ya que se aprecia que dos circunferencias máximas distintas en la Esfera tienen que cortarse en dos puntos antipodales). Esto niega el 5º postulado de Euclides, pues no existe el concepto de paralelismo en la Esfera.

### 1.3. Geodésicas de la Esfera

En esta sección estudiaremos otra forma de calcular las geodésicas en la Esfera, con la ventaja frente al método visto en el Ejemplo 1.2.35 de que se puede extender a las esferas de cualquier dimensión.

Conviene recordar que las geodésicas en la Esfera son las circunferencias máximas. En particular, nos interesa el meridiano que parte del Polo Norte con dirección  $(1,0,0)$ , que viene parametrizado por:

$$\begin{aligned} \beta : (-\pi/2, \pi/2) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (r \cos t, 0, -r \sin t). \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Introducimos ahora varias definiciones que se necesitan para dar el concepto esencial del capítulo: la isometría.

**Definición 1.3.1.** Sean  $M$  y  $N$  dos superficies regulares. Una aplicación continua  $f : M \rightarrow N$  se dice *diferenciable* si para todo punto  $p \in M$  existen superficies simples  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$  en  $M$  con  $p \in \mathbf{x}(U)$  y  $\mathbf{y} : V \rightarrow N$  en  $N$  con  $f(p) \in \mathbf{y}(V)$  tales que  $\mathbf{y}^{-1} \circ f \circ \mathbf{x}$  es diferenciable en  $p' = \mathbf{x}^{-1}(p)$ .

**Definición 1.3.2.** Sean  $M$  y  $N$  dos superficies regulares. Una aplicación  $f : M \rightarrow N$  se dice *regular* en  $p \in M$  si existen  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$  en  $M$  con  $p \in \mathbf{x}(U)$  e  $\mathbf{y} : V \rightarrow N$  en  $N$  con  $f(p) \in \mathbf{y}(V)$  tales que  $\mathbf{y}^{-1} \circ f \circ \mathbf{x}$  es regular en  $p' = \mathbf{x}^{-1}(p)$  o, lo que es lo mismo, la matriz jacobiana  $J_{p'}(\mathbf{y}^{-1} \circ f \circ \mathbf{x})$  es regular.

**Definición 1.3.3.** Sean  $M$  y  $N$  dos superficies regulares,  $f : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable y  $p \in M$ . Se define la *diferencial* de  $f$  en  $p$  como la aplicación dada por

$$\begin{aligned} f_{*p} : T_p(M) &\longrightarrow T_{f(p)}(N) \\ X &\longmapsto f_{*p}\mathbf{v} = (f \circ \gamma)'(0), \end{aligned}$$

siendo  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  una curva diferenciable tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = \mathbf{v}$ .

**Definición 1.3.4.** Sean  $M$  y  $N$  dos superficies regulares y  $f : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable. Se dice que  $f$  es una *isometría* si es biyectiva, regular y su diferencial  $f_{*p}$  es isometría para todo punto  $p \in M$ .

**Observación 1.3.5.** El que la diferencial  $f_{*p} : T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$  sea isometría quiere decir que

$$I_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = I_{f(p)}(f_{*p}\mathbf{v}, f_{*p}\mathbf{w}),$$

para todo punto  $p \in M$  y para todo par de vectores  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(M)$  donde  $I_p$  (respectivamente  $I_{f(p)}$ ) denota la Primera Forma Fundamental de  $M$  (resp.  $N$ ) en  $p$  (resp.  $f(p)$ ).

Como se puede ver en la Observación 1.3.5, las isometrías respetan la Primera Forma Fundamental, pero sabemos que la curvatura geodésica es un concepto intrínseco, por lo que las geodésicas son intrínsecas. Por tanto, se deduce que las isometrías transforman geodésicas en geodésicas. Además, por el Teorema Egregio de Gauss, la curvatura de Gauss es intrínseca, por lo que isometrías también mantienen la curvatura de Gauss. En consecuencia, como la curvatura del plano es nula y distinta a la de la Esfera, entonces estas

superficies no son isométricas, por lo que podemos decir de forma informal que los mapas están “mal hechos”.

Procedemos ahora a calcular todas las geodésicas de la Esfera. Para ello necesitamos dar las siguientes definiciones:

**Definición 1.3.6.** Una superficie se dice *homogénea* si dados dos puntos cualesquiera, existe una isometría que lleva uno en el otro. Geométricamente, esto quiere decir que la superficie presenta el mismo aspecto en todos sus puntos.

**Definición 1.3.7.** Una superficie se dice *isotrópica* en un punto  $p$  si dados dos vectores tangentes en  $p$  cualesquiera, existe una isometría tal que su diferencial lleva un vector en el otro. Geométricamente, esto quiere decir que, en ese punto, la superficie presenta el mismo aspecto en todas las direcciones.

Claramente, una superficie homogénea que sea isotrópica en un punto, lo será en todos. En tal caso se dice que es homogénea e isotrópica.

Los primeros ejemplos de superficies homogéneas e isotrópicas que podemos imaginar son el plano y la Esfera. De hecho, vamos a probar que esta última efectivamente lo es:

**Teorema 1.3.8.** *La Esfera  $S^2(r)$  es homogénea e isotrópica.*

*Demostración.* Por simplificar la notación, supondremos que  $r = 1$ ; la demostración para un  $r$  cualquiera sería completamente análoga.

Sean  $p$  y  $q$  dos puntos en la Esfera y  $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\}$ ,  $\{\hat{\mathbf{E}}_1, \hat{\mathbf{E}}_2\}$  dos bases ortonormales de  $T_p(S^2)$  y  $T_q(S^2)$ , respectivamente.

Basta probar que existe una isometría  $f$  en  $S^2$ , es decir  $f : S^2 \rightarrow S^2$ , de manera que  $f(p) = q$  y  $f_{*p}\mathbf{E}_i = \hat{\mathbf{E}}_i$  para  $i = 1, 2$ . De hecho, si tomamos  $N = (0, 0, 1)$  el Polo Norte de la Esfera y consideramos el plano tangente a la superficie en ese punto, es decir  $T_N(S^2)$ , es evidente que el vector  $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_N = (0, 0, 1)$  es normal al plano tangente  $T_N(S^2)$  como se observa en la Figura 1.12.

Así, los vectores  $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_N = (1, 0, 0)$  y  $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_N = (0, 1, 0)$  son tangentes a  $S^2$  en  $N$ .

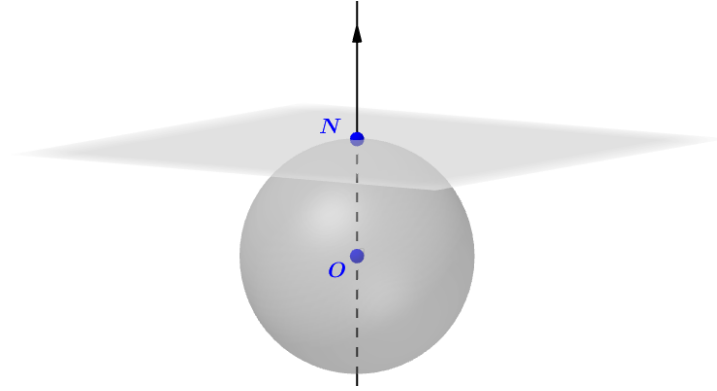


Figura 1.12: Vector normal al plano tangente en el Polo Norte de la Esfera.

Probaremos entonces que, dados  $p \in S^2$  y  $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\}$  base ortonormal de  $T_N(S^2)$ , existe  $f$  isometría en  $S^2$  tal que:

$$f(N) = p, \quad f_{*N} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)_N = \mathbf{E}_1, \quad f_{*N} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)_N = \mathbf{E}_2. \quad (1.3.2)$$

Así, para tener el resultado general, bastaría pasar por el Polo Norte con la base indicada.

Para ello, sabemos que  $\mathcal{B}_1 = \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)_N, \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)_N, \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)_N \right\}$  es una base ortonormal de  $T_N(\mathbb{R}^3)$ .

Construyamos ahora una base ortonormal de  $T_p(\mathbb{R}^3)$ . Basta tomar  $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\}$  y el vector normal a  $S^2$  en  $p$ . Dicho vector normal tiene la dirección del vector de posición (Figura 1.13).

Observemos que el vector de posición  $p$  es unitario, al estar en la Esfera de radio 1. Así,  $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, p\}$  es una base ortonormal de  $T_p(\mathbb{R}^3)$ .

Sea ahora  $f$  la aplicación cuya matriz es la de cambio de base de  $\mathcal{B}_1$  a  $\mathcal{B}_2$ . Como ambas bases son ortonormales, dicha matriz estará en  $O(3)$ , grupo de las matrices ortogonales respecto de la métrica Euclídea, que transforman la Esfera en ella misma.



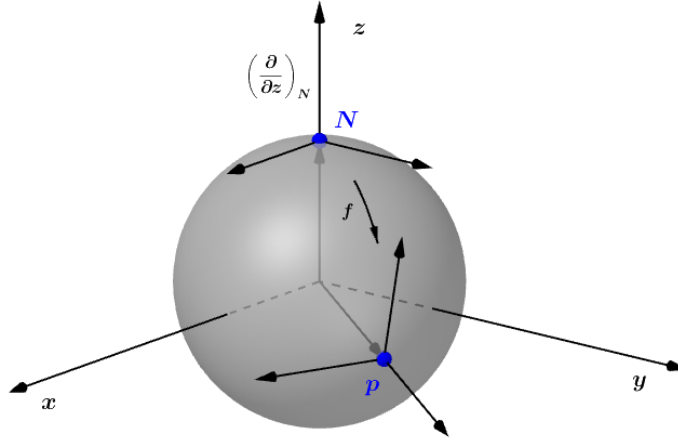


Figura 1.13: Base ortonormal en el punto p.

Obviamente,  $f$  es una isometría de  $S^2$  cumpliendo (1.3.2), que era exactamente lo que queríamos probar, luego la Esfera es homogénea e isotrópica.  $\square$

Estamos ahora en condiciones de calcular todas las geodésicas de la Esfera.

**Teorema 1.3.9.** *Las geodésicas de  $S^2$  son las circunferencias máximas.*

*Demostración.* Sean  $p$  un punto de  $S^2$  y  $\mathbf{v}$  un vector en  $T_p(S^2)$  cualesquiera. Determinemos la geodésica  $\beta$  de  $S^2$  que pasa por  $p$  y tiene dirección  $\mathbf{v}$ .

Como  $S^2$  es homogénea e isotrópica, existe una isometría  $f$  tal que lleva al punto  $p$  en  $N$  y al vector  $\mathbf{v}$  en  $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_N$ . Así, la geodésica que pasa por  $p$  con dirección  $\mathbf{v}$  será  $\beta = f^{-1}(\alpha)$  donde  $\alpha$  es la geodésica que pasa por  $N$  con dirección  $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_N$ .

Veamos en primer lugar que esta geodésica  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  debe permanecer en el plano  $y = 0$ , siendo por tanto la circunferencia máxima obtenida mediante el corte de la Esfera con dicho plano. Si esto no ocurriera, existiría un cierto valor  $t_0$  tal que  $y(t_0) \neq 0$ . La aplicación lineal

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$$

es una isometría de  $S^2$  que deja fijos tanto el punto  $N$  como la dirección  $\mathbf{v}$ . Así,  $\alpha$  y  $F(\alpha)$  son dos geodésicas distintas (pues  $\alpha(t_0) \neq F(\alpha)(t_0)$ ) que parten del mismo punto, con la misma dirección, lo cual es una contradicción con el Teorema de Existencia y Unicidad de geodésicas.

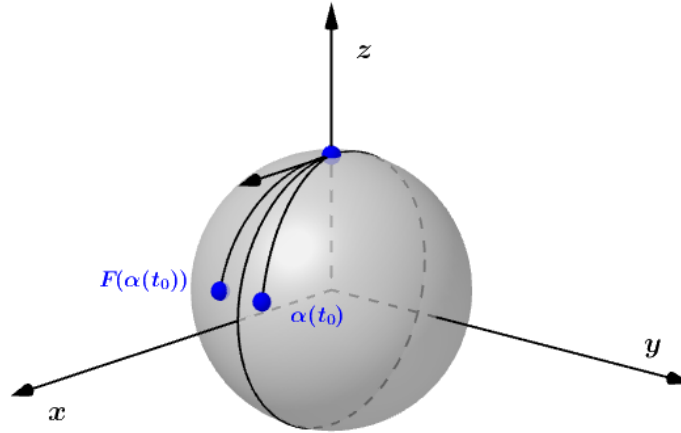


Figura 1.14: Simetría respecto al plano  $y = 0$ .

Como  $\alpha$  es el corte de  $S^2$  con el plano  $y = 0$ ,  $f$  pertenece a  $O(3)$  y las aplicaciones lineales transforman planos que pasan por el origen en planos que pasan por el origen,  $\beta$  será el corte de  $S^2$  con un cierto plano que pasa por el origen de coordenadas como queríamos probar.  $\square$

La gran ventaja que tiene este método para el cálculo de geodésicas es que se puede generalizar a cualquier dimensión utilizando el mismo argumento que en la demostración del Teorema 1.3.9. Para más detalles, consultar la referencia [3].

# Capítulo 2

## La Geometría de la Esfera

En este capítulo estudiaremos los principales resultados de los elementos en la Esfera, como son, especialmente, los triángulos esféricos, resultantes de cortar un triedro con la Esfera. Así empezaremos con resultados que conciernen a los triedros, para aplicarlos posteriormente a los triángulos esféricos ya mencionados. La mayoría de resultados desarrollados a lo largo de este capítulo están explicados de forma más extendida en [4].

### 2.1. Los triedros y sus propiedades

En este apartado se estudiarán los elementos básicos de los triedros en  $\mathbb{R}^3$ , así como sus propiedades, que luego se extenderán a los triángulos esféricos.

**Definición 2.1.1.** Sea  $\mathbb{R}^3$  el espacio vectorial euclídeo y sean  $a$ ,  $b$  y  $c$ , tres semirrectas con origen común  $O$ . Se denomina *triedro* a la figura convexa formada por el conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^3$  que son comunes a los semiespacios limitados por los planos  $ab$ ,  $bc$  y  $ac$  (véase la Figura 2.1).

Se puede comprobar que si 3 planos se cortan en un punto, entonces dividen el espacio en 8 triedros.

Una vez vista la definición de triedro, procedemos a ver sus principales elementos, a los que nos referiremos en resultados posteriores.

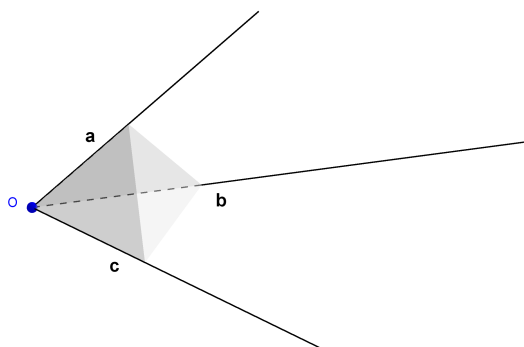


Figura 2.1: Triedro generado por las semirrectas  $a$ ,  $b$  y  $c$  que parten del vértice  $O$ .

**Definición 2.1.2.** Para cualquier triedro, se definen los siguientes elementos:

- *Vértice*  $O$  o punto común a las semirrectas  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
- *Aristas* o semirrectas  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
- *Caras* o ángulos convexos  $\angle(ab)$ ,  $\angle(bc)$ ,  $\angle(ac)$ .
- *Diedros del triedro* o diedros convexos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , formados por dos caras consecutivas que comparten las aristas  $a$ ,  $b$  y  $c$ , respectivamente.
- Los *ángulos del diedro*, que son los formados por las caras de los diedros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , se denotarán por  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  y  $\hat{\gamma}$ , respectivamente (véase Figura 2.2).
- *Superficie del triedro* o conjunto de puntos pertenecientes a las caras de un triedro.

En estas condiciones, denotaremos el triedro por  $T(abc)$ , haciendo mención a sus aristas.

Empezaremos viendo una propiedad que relaciona el ángulo de los diedros de un triedro con el ángulo formado por semirrectas perpendiculares a las caras de esos diedros.

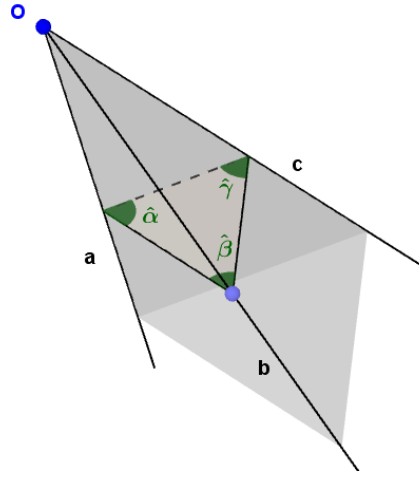


Figura 2.2: Ángulos de los diedros del triedro  $T(abc)$ .

**Proposición 2.1.3.** *Sean  $\alpha$  un diedro convexo y  $P$  un punto de la arista  $a$  de dicho diedro. Si por el punto  $P$  se trazan las semirrectas  $r$  y  $s$  perpendiculares a cada cara del diedro, y situadas con respecto a cada cara en distinto espacio que el que contiene el diedro, entonces el ángulo  $\angle(rs)$  es suplementario del ángulo del diedro  $\hat{\alpha}$  (véase la Figura 2.3).*

*Demostración.* Supongamos que las semirrectas  $r$  y  $s$  son perpendiculares a las caras  $\angle(ab)$  y  $\angle(ac)$ , respectivamente, del diedro. Entonces, también lo serán a la arista del diedro. Por tanto, el plano determinado por  $r$  y  $s$  será perpendicular a dicha arista formando el ángulo  $\angle(mn) = \hat{\alpha}$ , donde  $m$  y  $n$  son las rectas en las que corta el plano con cada una de las caras del diedro. Por construcción, las semirrectas  $r$  y  $s$  y las rectas  $m$  y  $n$  están en el mismo plano, por lo que

$$\angle(mn) + \angle(mr) + \angle(rs) + \angle(sn) = 2\pi.$$

Como  $\angle(mr) = \angle(sn) = \pi/2$ , entonces  $\angle(mn) + \angle(rs) = \hat{\alpha} + \angle(rs) = \pi$ . Por tanto, el ángulo del diedro  $\alpha$  y  $\angle(rs)$  son suplementarios.  $\square$

A continuación, veremos una forma de construir un triedro  $T'$  a partir de un triedro  $T$  dado, que nos servirá para estudiar otras propiedades de los triedros.

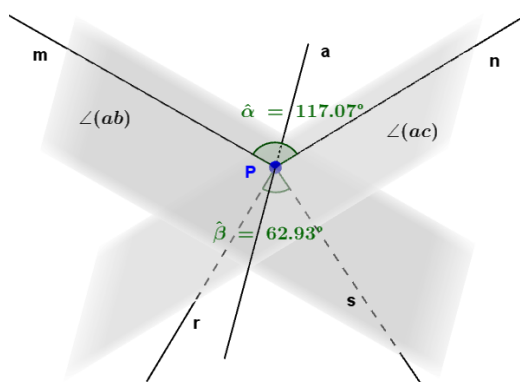


Figura 2.3: Imagen del diedro referido a la Proposición 2.1.3

**Proposición 2.1.4.** *Sea  $O$  el vértice del triedro  $T$  formado por las semirrectas  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Si se consideran las semirrectas  $a'$ ,  $b'$  y  $c'$  perpendiculares a las caras  $\angle(bc)$ ,  $\angle(ac)$  y  $\angle(ab)$ , respectivamente, del triedro  $T$  con origen en  $O$ , estando situadas cada una de ellas en distinto semiespacio que el que contiene al triedro, entonces dichas semirrectas definen otro triedro  $T'$  cuyas caras son suplementarias a los ángulos de los diedros de  $T$ . A este triedro se le llamará triedro polar de  $T$  (véase la Figura 2.4).*

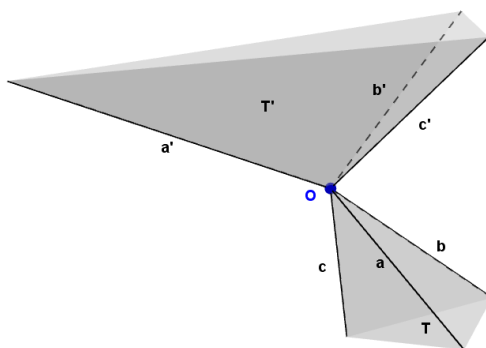


Figura 2.4: Representación del triedro polar  $T'$  respecto al triedro  $T$ .

*Demostración.* Usando la Proposición 2.1.3, este resultado es sencillo de demostrar. Por hipótesis, como  $b'$  es perpendicular a  $\angle(ac)$ , y  $c'$  a  $\angle(ab)$ , entonces  $\angle(b'c') + \hat{\alpha} = \pi$ . Análogamente, se obtiene que  $\angle(a'c') + \hat{\beta} = \pi$  y  $\angle(a'b') + \hat{\gamma} = \pi$ , concluyendo la demostración.  $\square$

**Corolario 2.1.5.** *En las condiciones de la Proposición 2.1.4, el triedro  $T$  es el triedro polar de  $T'$  y, consecuentemente, los diedros de  $T'$  son suplementarios de las caras de  $T$ .*

*Demostración.* Se tiene que  $b$  y  $c$  son perpendiculares a  $\angle(a'c')$  y  $\angle(a'b')$ , respectivamente. Por tanto, por la Proposición 2.1.3,  $\angle(bc) + \hat{\alpha}' = \pi$ . Repitiendo esto con cada diedro, llegamos a que  $T$  cumple las condiciones de la definición dada en la Proposición 2.1.3, por lo que  $T$  es el triedro polar de  $T'$ .  $\square$

**Teorema 2.1.6.** *Sea  $T(abc)$  un triedro cualquiera de vértice  $O$ . Entonces se verifica que cualquiera de sus caras es menor que la suma de las otras dos.*

*Demostración.* Veamos la demostración, por ejemplo, para la cara  $\angle(ab)$ . Para las otras, el procedimiento sería análogo. Tenemos que probar que

$$\angle(ab) < \angle(bc) + \angle(ac). \quad (2.1.1)$$

Se pueden dar dos casos:

- Caso 1:  $\angle(ab) < \angle(ac)$  o  $\angle(ab) < \angle(bc)$ . Es obvio en cualquiera de los casos que  $\angle(ab) < \angle(ac) + \angle(ab)$ .
- Caso 2:  $\angle(ab) > \angle(ac)$  y  $\angle(ab) > \angle(bc)$ . Este es el caso más interesante. Para comprobar (2.1.1), hacemos la siguiente construcción detallada en la Figura 2.5:

Sea  $d$  la semirrecta sobre la cara  $ab$ , de forma que  $\angle(ac) = \angle(ad)$  (esto es posible porque  $\angle(ab) > \angle(ac)$ ). Construimos un segmento  $\overline{AB}$  arbitrario perteneciente a la cara  $\angle(ab)$  con extremos  $A$  y  $B$  pertenecientes a las semirrectas  $a$  y  $b$ , respectivamente. Entonces la semirrecta  $d$  corta a  $\overline{AB}$  en un punto  $D$ . Por otro lado, sea  $C$  un punto de la semirrecta  $c$  tal que  $\overline{OC} = \overline{OD}$ . De esta forma, obtenemos que  $\triangle(AOC) = \triangle(AOD)$ , pues ambos triángulos tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. Por tanto,  $\overline{AC} = \overline{AD}$ .

Por otro lado, en el triángulo  $\triangle(ABC)$  se verifica que  $\overline{BC} + \overline{AC} > \overline{AB}$  y despejando, llegamos a que  $\overline{BC} > \overline{AB} - \overline{AC} = \overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}$ . Así los triángulos  $\triangle(OBC)$  y  $\triangle(OBD)$  tienen un lado común  $\overline{OB}$ , un lado igual  $\overline{OC} = \overline{OD}$  y el tercer lado  $\overline{BC} > \overline{DB}$  desigual. Por tanto:

$$\angle(bc) > \angle(bd) = \angle(ab) - \angle(ad) = \angle(ab) - \angle(ac).$$

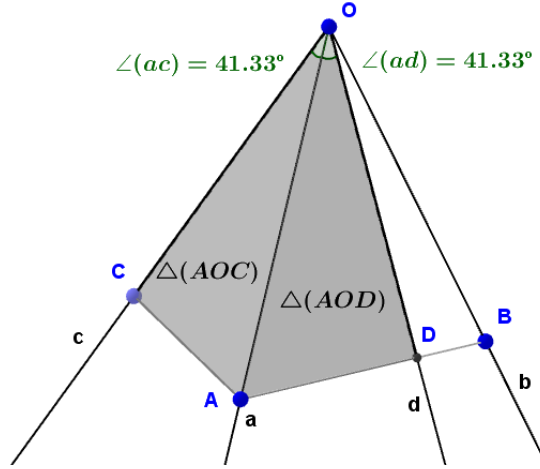


Figura 2.5: Situación de la demostración del Teorema 2.1.6.

Despejando, concluimos que  $\angle(ab) < \angle(bc) + \angle(ac)$ , como queríamos demostrar.

□

**Corolario 2.1.7.** *Toda cara de un triedro es mayor que la diferencia entre las otras dos.*

*Demostración.* Aplicando el Teorema 2.1.6, se obtiene que  $\angle(ab) < \angle(ac) + \angle(bc)$ , de donde se deduce despejando que  $\angle(ac) > \angle(ab) - \angle(bc)$ . Los otros casos son análogos. □

Veamos una cota inferior para la suma de las caras de un triedro dado.

**Proposición 2.1.8.** *La suma de las caras de un triedro es menor que  $2\pi$ .*

*Demostración.* Consideremos el triedro  $\bar{T}(a'bc)$  siendo  $a'$  la semirrecta opuesta a la arista  $a$ . Aplicando el Teorema 2.1.6 al triedro  $\bar{T}$  se obtiene que

$$\angle(bc) < \angle(a'b) + \angle(a'c). \quad (2.1.2)$$

Como  $a'$  es opuesta a la arista  $a$ , se tiene que

$$\angle(a'b) + \angle(ab) = \pi \text{ y } \angle(a'c) + \angle(ac) = \pi. \quad (2.1.3)$$



Despejando en la ecuación (2.1.2):

$$\angle(bc) < \angle(a'b) + \angle(a'c) = (\pi - \angle(ab)) + (\pi - \angle(ac)) = 2\pi - \angle(ab) - \angle(ac).$$

Finalmente,  $\angle(ab) + \angle(ac) + \angle(bc) < 2\pi$ , que demuestra la afirmación de la proposición.  $\square$

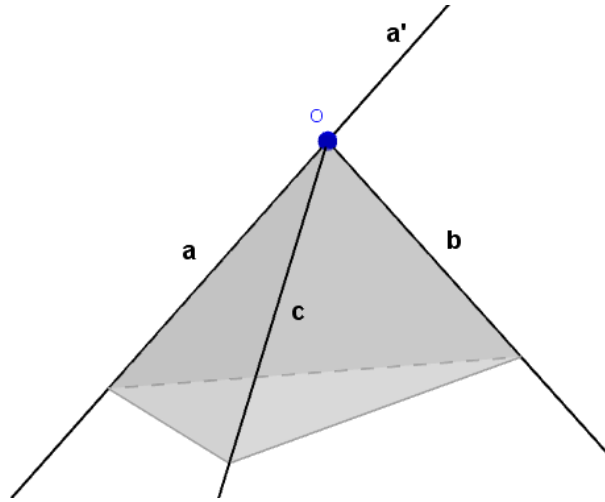


Figura 2.6: Representación del triedro  $T(abc)$  junto con la arista  $a'$  de la demostración de la Proposición 2.1.8.

Combinando la Proposición 2.1.8 con la Proposición 2.1.4, llegamos a la siguiente desigualdad para diedros.

**Proposición 2.1.9.** *La suma de los ángulos de los diedros de un triedro  $T(abc)$  está comprendida entre  $\pi$  y  $3\pi$ .*

*Demostración.* Sea  $T'(a'b'c')$  el triedro polar de  $T(abc)$ . Aplicando la Proposición 2.1.8 a las caras de  $T'$ , obtenemos que  $0 < \angle(a'b') + \angle(a'c') + \angle(b'c') < 2\pi$ . Además, por la Proposición 2.1.4 sabemos que sus caras son suplementarias de los ángulos de los diedros del triedro  $T$ . Por tanto, se tiene que  $0 < (\pi - \hat{\gamma}) + (\pi - \hat{\beta}) + (\pi - \hat{\alpha}) < 2\pi$ , donde  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  y  $\hat{\gamma}$  son los ángulos de los diedros que comparten la arista  $a$ ,  $b$  y  $c$ , respectivamente, en  $T(abc)$ . Así, concluimos que  $\pi < \hat{\gamma} + \hat{\beta} + \hat{\alpha} < 3\pi$ .  $\square$

Usando un razonamiento similar al de la demostración de la Proposición 2.1.9, obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario 2.1.10.** *Cualquiera de los ángulos de los diedros de un triedro difiere de la suma de los otros dos en menos de  $\pi$ .*

*Demostración.* Sea  $T'(a'b'c')$  el triedro polar de  $T(abc)$ . Aplicando el Teorema 2.1.6 a cualquiera de las caras de  $T'$ , por ejemplo,  $\angle(b'c')$ , se obtiene que  $\angle(b'c') < \angle(a'c') + \angle(a'b')$ . Usando la Proposición 2.1.4, llegamos a la desigualdad:  $(\pi - \hat{\alpha}) < (\pi - \hat{\beta}) + (\pi - \hat{\gamma})$ . Por tanto,  $(\hat{\beta} + \hat{\gamma}) - \hat{\alpha} < \pi$ .  $\square$

Introducimos la siguiente definición que nos ayudará a entender la Proposición 2.1.12.

**Definición 2.1.11.** Sea  $T$  un triedro. Para cualquier cara del triedro, se define su (*ángulo del*) *diedro opuesto* como el (*ángulo del*) diedro resultante de eliminar dicha cara al triedro  $T$ . Análogamente, para cualquier diedro del triedro, se define su *cara opuesta* como la cara resultante de eliminar dicho diedro al triedro  $T$ .

En otras palabras, si  $T(abc)$  es un triedro (con la notación habitual), entonces el (*ángulo del*) diedro opuesto a la cara  $\angle(bc)$  es ( $\hat{\alpha}$ )  $\alpha$  y la cara opuesta al diedro  $\alpha$  es  $\angle(bc)$ .

**Proposición 2.1.12.** *Si dos caras de un triedro son iguales, entonces también son iguales los ángulos de los diedros opuestos. Análogamente, si dos diedros de un triedro son iguales, entonces también son iguales las caras opuestas.*

**Definición 2.1.13.** En virtud de la proposición anterior, un *triedro isósceles* es un triedro con dos caras o dos diedros iguales (véase, por ejemplo, la Figura 2.7).

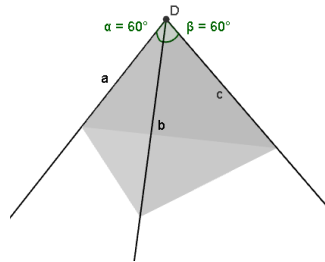


Figura 2.7: Ejemplo de un triedro isósceles.

## 2.2. Principales conceptos de la Geometría Esférica

En esta sección se introducirán las principales definiciones y los elementos más esenciales de la Geometría Esférica. Algunos de ellos son resultantes de las intersecciones de la Esfera con planos o triedros, como se verá a continuación.

Empezaremos con el concepto de circunferencia máxima.

**Definición 2.2.1.** Se llama *circunferencia máxima* a la obtenida al intersecar la Esfera con un plano que pasa por el origen de la misma (véase la Figura 2.8).

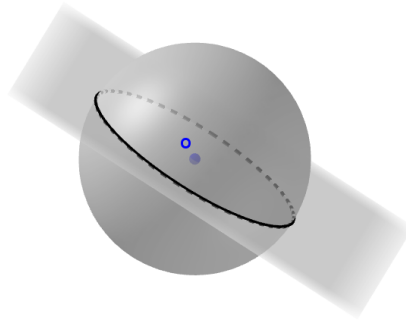


Figura 2.8: Circunferencia máxima.

Estas circunferencias reciben este nombre por ser las circunferencias de mayor diámetro que hay en la Esfera. Si el plano que corta a la Esfera no pasa por el origen, la intersección que se obtiene es una *circunferencia menor*. En la Esfera Terrestre, los meridianos siempre son semicircunferencias máximas, mientras que todos los paralelos son circunferencias menores salvo el ecuador, que es máxima.

**Notación 2.2.2.** Para ser coherentes con la notación, a aquella semirrecta que parta del origen de la Esfera y pase por un punto  $A$  se la denotará por  $a$ .

Veamos ahora el concepto de distancia esférica que se usará más adelante.

**Definición 2.2.3.** Sean  $A$  y  $B$  dos puntos de la Esfera. Se define la *distancia esférica* como el menor arco de la circunferencia máxima obtenida de intersecar la Esfera con el plano que contiene a los dos puntos y al origen (véase la Figura 2.9).

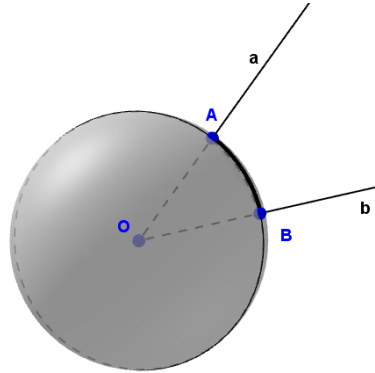


Figura 2.9: Distancia esférica entre los puntos  $A$  y  $B$ .

A partir de ahora, se tomará la Esfera unidad  $S^2(1)$  para que la distancia esférica entre dos puntos sea igual que el ángulo central que determinan dichos puntos, tomando como medida la de dicho ángulo central (véase la Figura 2.10).

Si  $A$  y  $B$  son puntos diametralmente opuestos en la Esfera, existen infinitas circunferencias máximas que pasen por ambos puntos. En tal caso, la distancia esférica entre  $A$  y  $B$  será cualquiera de las semicircunferencias que los una. En el caso de la Esfera Terrestre, dados el Polo Norte  $N$  y el Polo Sur  $S$ , que son diametralmente opuestos, existen infinitas semicircunferencias máximas que los unen, que son precisamente los meridianos.

Si consideramos los dos planos que contienen a dos circunferencias máximas cualesquiera, estos planos contienen al origen. Por tanto, la recta obtenida de intersecarlos pasa por el origen. Como dicha recta también pasa por los dos puntos de intersección de las circunferencias máximas, se obtiene que dichos puntos son diametralmente opuestos. Por lo que dadas dos circunferencias máximas cualesquiera, sus puntos de intersección son diametralmente opuestos.

**Definición 2.2.4.** Se definen los *polos de una circunferencia máxima* como los puntos de intersección de la Esfera y la recta que pasa por el origen y

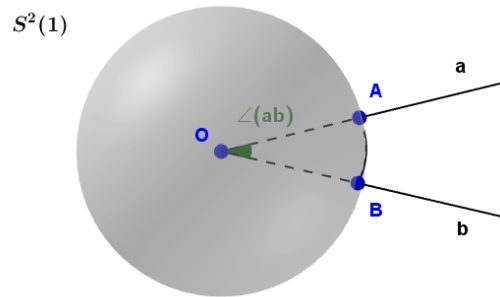


Figura 2.10: La distancia esférica de A a B se tomará como  $\angle(ab)$  en  $S^2(1)$ .

es perpendicular al plano que contiene a la circunferencia máxima (véase la Figura 2.11).

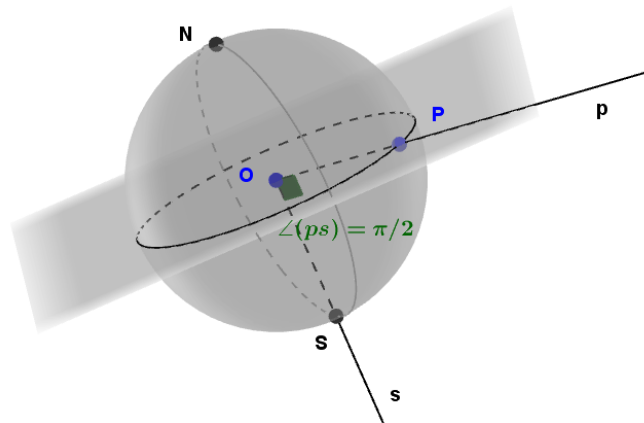


Figura 2.11: Polos  $N$  y  $S$  de una circunferencia máxima.

A partir de la Figura 2.11, se puede ver que los polos de una circunferencia máxima son aquellos puntos que equidistan de todos los puntos de la misma. Así, la distancia esférica de los polos a cualquier punto  $P$  de la circunferencia máxima es  $\pi/2$ .

Introducimos ahora la noción de ángulo esférico y su bisectriz esférica, así como la mediatriz de un arco de circunferencia máxima.

**Definición 2.2.5.** Se define el *huso o ángulo esférico* entre dos circunferencias máximas como el ángulo formado por las dos tangentes a dichas

circunferencias en uno de los puntos de corte. Si  $A$  es uno de esos puntos, se denotará por  $\hat{A}$  a ese ángulo esférico (véase la Figura 2.12).

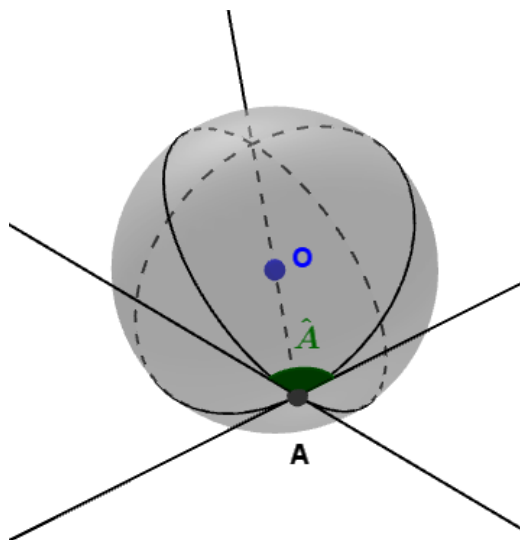


Figura 2.12: Ángulo o huso esférico entre dos circunferencias máximas.

Como ambas tangentes son perpendiculares al diámetro de la Esfera que pasa por los dos puntos de corte, el ángulo esférico es igual que el ángulo del diedro que tiene como caras los planos sobre los que están cada una de las circunferencias máximas (véase la Figura 2.13). Por lo que si  $\hat{\alpha}$  es el ángulo de dicho diedro, entonces  $\hat{\alpha} = \hat{A}$ . Así, dos circunferencias máximas serán perpendiculares si  $\hat{A} = \pi/2$ . Se puede apreciar que todos los meridianos son perpendiculares al ecuador.

El nombre de huso esférico procede de los husos horarios que existen en la Esfera Terrestre. Si cogemos como meridiano de referencia el meridiano de Greenwich y tomamos meridianos de forma que si el ángulo esférico entre dos consecutivos sea  $15^\circ$ , la Esfera queda dividida en  $360^\circ/15^\circ = 24$  franjas horarias. Esto se utiliza para sincronizar los relojes de una región al mismo tiempo solar medio.

Por otro lado, tomando como referencia de nuevo el meridiano de Greenwich, al ángulo esférico que forma ese meridiano con cualquier otro se le llama *longitud*.

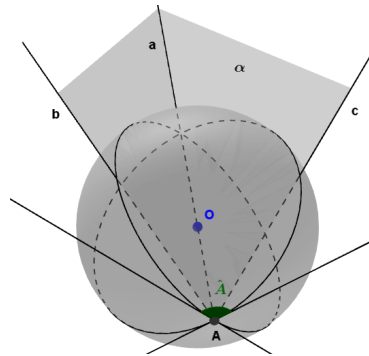


Figura 2.13: El corte del diedro  $\alpha$  con la Esfera produce el ángulo esférico  $\hat{A}$ .

**Definición 2.2.6.** Se define la *distancia* de un punto  $A$  a una circunferencia máxima  $\hat{c}$  como la distancia esférica entre  $A$  y el punto de intersección de  $\hat{c}$  con la circunferencia máxima perpendicular a ella que pasa por  $A$  (véase la Figura 2.14).

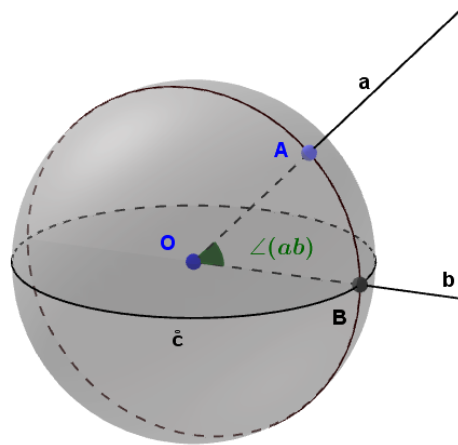


Figura 2.14: Distancia de un punto  $A$  a la circunferencia máxima  $\hat{c}$ .

En el caso de la Esfera Terrestre, a la distancia entre un punto y el ecuador se le llama *latitud*. Si tomamos como parametrización de la Esfera la dada en la Ecuación (1.2.1), el parámetro  $\varphi$  representa la latitud, mientras que el parámetro  $\theta$ , la longitud.

**Definición 2.2.7.** Se define la *mediatriz esférica* de un arco  $AB$  como la circunferencia máxima perpendicular a la que contiene a  $A$  y  $B$  y que pasa por el punto medio  $M$  de dicho arco (véase la Figura 2.15).

Así pues, en la Esfera Terrestre, la mediatriz esférica de cualquier meridiano que una el Polo Norte  $N$  y el Polo Sur  $S$ , es el ecuador.

**Definición 2.2.8.** Se define la *bisectriz* de un ángulo esférico  $\hat{A}$  como la circunferencia máxima equidistante de sus lados (véase la Figura 2.15).

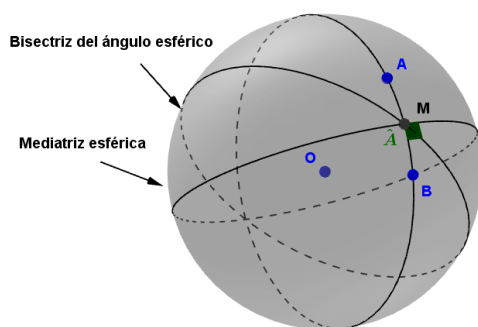


Figura 2.15: Representación de la mediatriz esférica del arco  $AB$  y bisectriz del ángulo esférico formado por dicha mediatriz y la circunferencia máxima que contiene a  $A$  y  $B$ .

Al igual que hemos definido los polos de una circunferencia máxima, también podemos definir los polos de una circunferencia menor, de forma análoga:

**Definición 2.2.9.** Se definen los *polos de una circunferencia menor* como los extremos del diámetro perpendicular al plano que la contiene. El polo que está situado a una distancia esférica menor se denomina *centro* y esta distancia, *radio esférico*. Todos los puntos que disten del centro menos que el radio esférico se llaman *interiores*, y todos aquellos que disten más que el radio esférico, *exteriores*. En la Figura 2.16, la zona más oscura corresponde a los puntos interiores, mientras que la más clara, a los puntos exteriores.



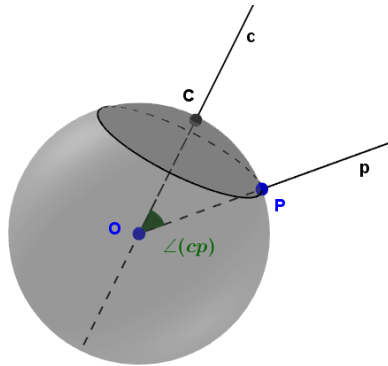


Figura 2.16: Circunferencia menor con centro  $C$  y radio esférico  $\angle(cp)$ .

Finalmente, se define el triángulo esférico, que es el elemento básico de la Geometría Esférica del que se obtendrá los resultados más importantes de este capítulo.

**Definición 2.2.10.** Se llama *triángulo esférico* a la superficie esférica obtenida a partir de intersectar una Esfera con un triedro cuyo vértice es el origen de la misma (véase la Figura 2.17).

Si  $T(abc)$  es el triedro de la intersección, al intersectar sus aristas con la Esfera, se obtienen los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , que son los vértices del triángulo esférico. Por otro lado, como a cada ángulo central le corresponde una distancia esférica, las caras del triedro serán los arcos de circunferencias máximas que, a su vez, serán los lados del triángulo esférico. Además, los ángulos de los diedros del triedro serán los ángulos esféricos que también se corresponderán con los ángulos del triángulo. Denotaremos por  $\nabla(ABC)$  el triángulo esférico determinado por los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

## 2.3. Trigonometría Esférica

La Trigonometría Esférica estudia las relaciones trigonométricas que existen entre los tres lados y los tres ángulos de un triángulo esférico, o de forma equivalente, las tres caras y los tres ángulos de los tres diedros que definen dicho triángulo esférico.

La principal diferencia entre la Trigonometría Plana y la Trigonometría

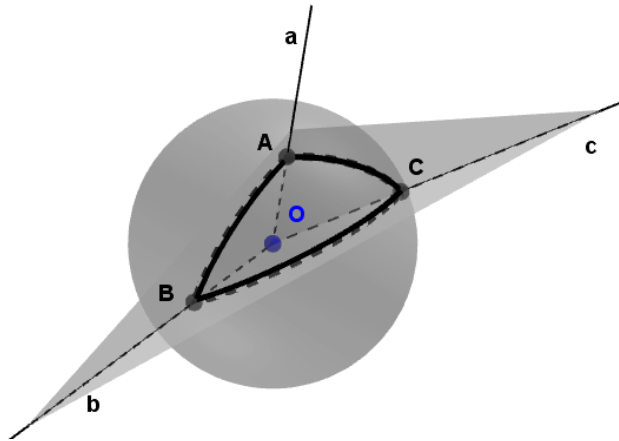


Figura 2.17: Triángulo esférico obtenido de intersectar la Esfera con el triedro  $T(abc)$  de vértice  $O$ .

Esférica, es que en la primera, los lados se miden en unidades lineales, mientras que en la segunda, todo se mide en unidades angulares.

Así, en función de la relación que guarden los lados y los ángulos de los triángulos tenemos la siguiente definición:

**Definición 2.3.1.** Un triángulo esférico se denomina *isósceles* si tiene dos lados iguales y *equilátero* si tiene iguales los tres. Por otro lado, se dirá que es *rectángulo* si tiene un ángulo recto, *birrectángulo* si tiene dos y *trirrectángulo* u *octante* si tiene los tres ángulos rectos (véase la Figura 2.18).

Aquí también se ve la diferencia entre la geometría plana y la esférica, ya que, como vimos a partir del Teorema de Gauss-Bonnet, los ángulos de un triángulo plano siempre suman  $\pi$ , mientras que los de un triángulo esférico suman más de  $\pi$ .

La siguiente proposición recoge las propiedades que heredan los triángulos esféricos de los resultados sobre triedros que expusimos en la Sección 2.1, al obtenerse dichos triángulos de intersectar los triedros con la Esfera.

**Proposición 2.3.2.** *Los elementos de todo triángulo esférico verifican las siguientes propiedades:*

1. *Los lados de un triángulo esférico miden menos de  $\pi$ .*
2. *Cualquier lado de un triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.*

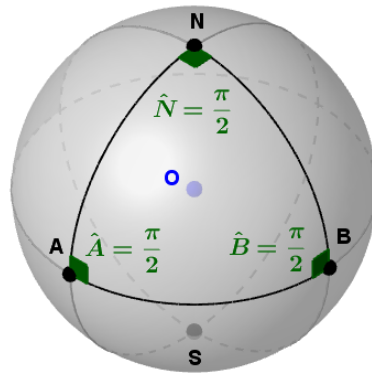


Figura 2.18: Tirrectángulo de vértices  $A$ ,  $B$  y  $N$ .

3. La suma de los lados de un triángulo esférico (perímetro) es menor que  $2\pi$ . A la diferencia entre  $2\pi$  y el perímetro de un triángulo esférico se le llama defecto esférico y se denota por  $\delta$ .
4. La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que  $\pi$  y menor que  $3\pi$ . A la diferencia entre esa suma y  $\pi$  se le llama exceso esférico y se denota por  $\epsilon$ .
5. El menor de los ángulos de un triángulo esférico difiere de la suma de los otros dos en menos de  $\pi$ .
6. Un triángulo esférico isósceles tiene iguales los ángulos opuestos a los lados iguales y, consecuentemente, si un triángulo esférico tiene dos ángulos iguales, también es isósceles.

*Demostración.* En esta demostración hacemos referencia a aquellos resultados de la Sección 2.1 relacionados con cada afirmación de la proposición:

1. Si alguna de los lados midiera más de  $\pi$ , la cara correspondiente del triedro mediría más de  $\pi$  y esto no es posible por la definición de triedro, pues dejaría de ser una figura convexa.
2. Se tienen por el Teorema 2.1.6 y por el Corolario 2.1.7, respectivamente.
3. Se tiene por la Proposición 2.1.8.
4. Se tiene por la Proposición 2.1.9.

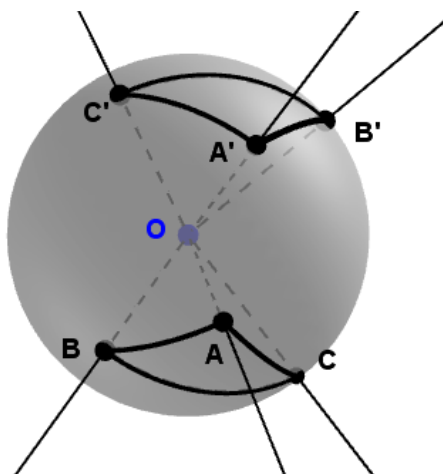


Figura 2.19: Triángulo esférico polar  $\nabla(A'B'C')$  al triángulo esférico  $\nabla(ABC)$ .

5. Resultado obtenido a partir del Corolario 2.1.10.

6. Se obtiene a partir de la Proposición 2.1.12.

Concluimos así la demostración.  $\square$

Haciendo mención a los triedros polares, obtenemos la siguiente definición:

**Definición 2.3.3.** La intersección de una Esfera con un triedro esférico y su polar, de vértice común  $O$ , origina dos triángulos esféricos llamados *triángulos polares* (véase la Figura 2.19).

Al igual que en la Sección 2.1, se tiene que los lados de un triángulo esférico son suplementarios de los ángulos de su polar y viceversa.

**Proposición 2.3.4.** *El exceso/defecto esférico de un triángulo esférico  $\nabla(ABC)$  es igual al defecto/exceso esférico de su triángulo polar  $\nabla(A'B'C')$ .*

*Demostración.* Se tiene por la relación que guardan los triángulos esféricos y sus polares. Denotando por  $\epsilon$  y  $\delta$  al exceso y defecto esférico del triángulo esférico, respectivamente, y  $\epsilon'$ ,  $\delta'$ , a los de su triángulo polar, obtenemos:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = \\ &= (\pi - \angle(b'c')) + (\pi - \angle(a'c')) + (\pi - \angle(a'b')) - \pi = \\ &= 2\pi - (\angle(a'b') + \angle(a'c') + \angle(b'c')) = \delta'. \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}\delta &= 2\pi - (\angle(ab) + \angle(ac) + \angle(bc)) = \\ &= 2\pi - ((\pi - \hat{C}') + (\pi - \hat{B}') + (\pi - \hat{A}')) = \\ &= \hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' - \pi = \epsilon',\end{aligned}$$

concluyendo así la demostración.  $\square$

Como aplicación interesante del concepto de exceso esférico, veamos cómo este elemento está relacionado con el área de un triángulo esférico. Para ello, necesitamos definir antes el área de un huso esférico:

**Definición 2.3.5.** Se define el área de un huso esférico  $\hat{A}$  como la porción de superficie esférica que cubre dicho huso (véase la Figura 2.20).

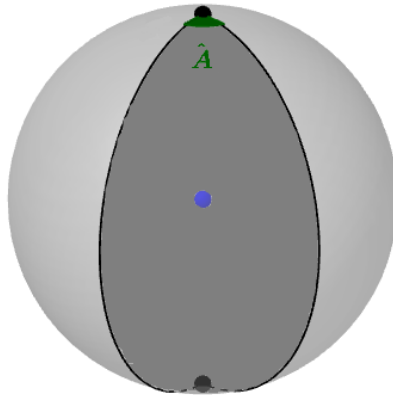


Figura 2.20: El área del huso viene dado por la zona sombreada.

Si tomamos el ángulo del huso en radianes (como hasta ahora) y hacemos uso del Capítulo 1 para determinar que el área de la superficie esférica  $S^2(r)$  es  $4\pi r^2$ , concluimos que el área del huso esférico es

$$\text{área}(\hat{A}) = 2r^2\hat{A}.$$

Así, estamos en las condiciones de calcular el área de un triángulo rectángulo.

**Proposición 2.3.6.** *El área de un triángulo esférico  $\nabla(ABC)$  en la Esfera  $S^2(r)$  viene dado por la fórmula:*

$$\text{área}(\nabla(ABC)) = \epsilon r^2,$$

donde el ángulo viene dado en radianes y  $\epsilon$  denota el exceso esférico del triángulo.

*Demostración.* Sean  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  y  $\tilde{C}$  los vértices antipodales de los vértices del triángulo  $\nabla(ABC)$ . Se puede apreciar a partir de la Figura 2.21 que los triángulos  $\nabla(ABC)$ ,  $\nabla(\hat{A}BC)$ ,  $\nabla(A\hat{B}C)$  y  $\nabla(\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C})$  constituyen la mitad de la superficie esférica, por tanto, si  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$  y  $S'''$  son respectivamente las superficies de los triángulos anteriores, entonces  $S + S' + S'' + S''' = 2\pi r^2$ . Sumando  $2S$  en la igualdad anterior se tiene

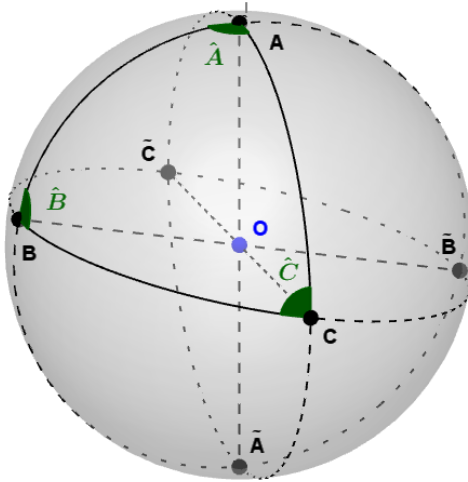


Figura 2.21: Triángulo esférico  $\nabla(ABC)$  y sus vértices antipodales.

$$(S + S') + (S + S'') + (S + S''') = 2\pi r^2 + 2S, \quad (2.3.1)$$

pero cada uno de los paréntesis del primer miembro de esta ecuación es la superficie de un huso esférico distinto, así que:

- $S + S'$  es la superficie del huso de ángulo  $\hat{A}$  cuya área es  $2r^2\hat{A}$ .
- $S + S''$  es la superficie del huso de ángulo  $\hat{B}$  cuya área es  $2r^2\hat{B}$ .

- $S + S'''$  es la superficie del huso de ángulo  $\hat{C}$  cuya área es  $2r^2\hat{A}$ .

Sustituyendo en la Ecuación (2.3.1) por el área de los husos esféricos, tenemos:

$$2r^2\hat{A} + 2r^2\hat{B} + 2r^2\hat{C} = 2\pi r^2 + 2S,$$

de donde obtenemos que

$$S = r^2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi) = \epsilon r^2,$$

como queríamos demostrar. □

Al igual que existen relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo plano, estudiamos qué relaciones guardan estos elementos, en un triángulo esférico. Para ello, haremos uso de la Trigonometría Plana, de la que ya se conocen sus relaciones.

En esta sección se obtendrán las relaciones principales de la Trigonometría Esférica, que reciben el nombre de *Fórmulas de Bessel*, en honor al matemático Friedrich Wilhelm Bessel (Wesfalia, Alemania, 1784-Kaliningrado, Rusia, 1846).

**Teorema 2.3.7** (Teorema del seno. Primer grupo de Fórmulas de Bessel). *En un triángulo esférico, los senos de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. Esto es, si  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$  son los ángulos del triángulo y  $\angle(bc)$ ,  $\angle(ac)$  y  $\angle(ab)$  son sus lados opuestos, entonces:*

$$\frac{\text{sen } \hat{A}}{\text{sen } \angle(bc)} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{sen } \angle(ac)} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \angle(ab)}.$$

*Demostración.* Sea el triángulo esférico  $\nabla(ABC)$  sobre una Esfera de radio  $r$ .

Si proyectamos el vértice  $C$  sobre el plano  $OAB$  en un punto  $P$ , y  $P$  sobre la recta  $OA$  en un punto  $Q$ . Obtenemos un triángulo que es perpendicular a  $OA$  de forma que el ángulo en  $Q$  del triángulo  $\triangle(CPQ)$  coincide con el ángulo  $\hat{A}$ . De forma similar, proyectando el punto  $P$  sobre la recta  $OB$  obtenemos un punto  $R$  de forma que el ángulo en  $R$  del triángulo  $\triangle(CPR)$  es igual que el ángulo  $\hat{B}$ . Con estos puntos podemos obtener también dos triángulos que nos servirán para obtener la fórmula que queremos (véanse las Figuras 2.22 y 2.23).

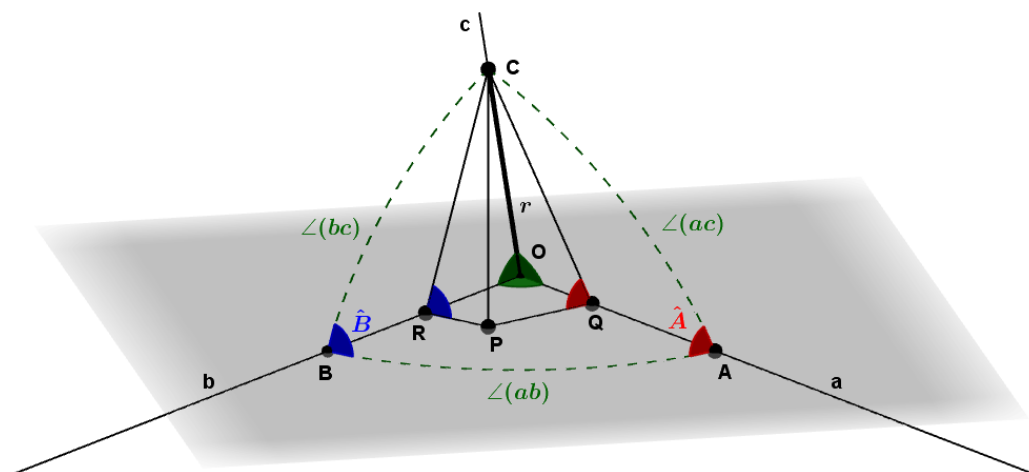


Figura 2.22: Figura de la demostración del Teorema 2.3.7

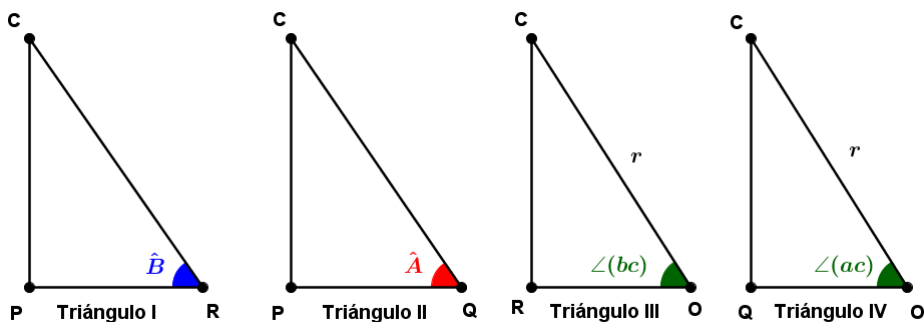


Figura 2.23: Proyección de los triángulos descritos en el plano

De los triángulos I y II, se tiene que  $\overline{CP} = \overline{CR} \text{sen } \hat{B}$  y  $\overline{CP} = \overline{CQ} \text{sen } \hat{A}$ . Igualando ambas ecuaciones obtenemos:

$$\overline{CR} \text{sen } \hat{B} = \overline{CQ} \text{sen } \hat{A}. \quad (2.3.2)$$

Por otro lado, de los triángulos III y IV, tenemos  $\overline{CR} = r \text{sen } \angle(bc)$  y  $\overline{CQ} = r \text{sen } \angle(ac)$ .

Sustituyendo  $\overline{CR}$  y  $\overline{CQ}$  en la Ecuación (2.3.2), obtenemos que

$$r \text{sen } \angle(bc) \text{sen } \hat{B} = r \text{sen } \angle(ac) \text{sen } \hat{A},$$

de donde se tiene que

$$\frac{\text{sen } \hat{A}}{\text{sen } \angle(bc)} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{sen } \angle(ac)}.$$



Realizando una construcción similar a la anterior, los triángulos a los que llegamos guardan las mismas propiedades, de forma que nos permiten concluir que

$$\frac{\text{sen } \hat{A}}{\text{sen } \angle(bc)} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{sen } \angle(ac)} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \angle(ab)},$$

concluyendo así la demostración del teorema.  $\square$

**Teorema 2.3.8** (Teorema del coseno. Segundo grupo de Fórmulas de Bessel). *En todo triángulo esférico, el coseno de un lado es igual al producto de los cosenos de los otros dos lados, más el producto de los senos de dichos lados por el coseno del ángulo comprendido. Esto es, si  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$  son los ángulos del triángulo y  $\angle(bc)$ ,  $\angle(ac)$  y  $\angle(ab)$  son sus lados opuestos, entonces:*

$$\begin{cases} \cos \angle(bc) = \cos \angle(ac) \cos \angle(ab) + \text{sen } \angle(ac) \text{sen } \angle(ab) \cos \hat{A}, \\ \cos \angle(ac) = \cos \angle(ab) \cos \angle(bc) + \text{sen } \angle(ab) \text{sen } \angle(bc) \cos \hat{B}, \\ \cos \angle(ab) = \cos \angle(ac) \cos \angle(bc) + \text{sen } \angle(ac) \text{sen } \angle(bc) \cos \hat{C}. \end{cases}$$

*Demostración.* Usando los triángulos III y IV de la Figura 2.23, se tiene que

$$\begin{cases} \overline{OR} = r \cos \angle(bc), & \overline{CR} = r \text{sen } \angle(bc), \\ \overline{OQ} = r \cos \angle(ac), & \overline{CQ} = r \text{sen } \angle(ac). \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Por lado, del triángulo II de la Figura 2.23, se obtiene que

$$\overline{PQ} = \overline{CQ} \cos \hat{A} = r \text{sen } \angle(ac) \cos \hat{A}.$$

Se utiliza ahora que la proyección del segmento  $\overline{OC}$  sobre  $\overline{OB}$  es la suma de las proyecciones de los segmentos  $\overline{OQ}$ ,  $\overline{QP}$  y  $\overline{PR}$  sobre  $\overline{OB}$  (véase la Figura 2.24).

Si denotamos la proyección de cada segmento sobre  $\overline{OB}$  como  $\text{proy}_{\overline{OB}}(\cdot)$ , la observación anterior se puede escribir como:

$$\text{proy}_{\overline{OB}}(\overline{OC}) = \text{proy}_{\overline{OB}}(\overline{OQ}) + \text{proy}_{\overline{OB}}(\overline{QP}) + \text{proy}_{\overline{OB}}(\overline{PR}). \quad (2.3.4)$$

A partir de la Figura 2.24 y usando las ecuaciones (2.3.3) podemos calcular estas proyecciones:

- $\text{proy}_{\overline{OB}}(\overline{OC}) = \overline{OR} = r \cos \angle(bc),$

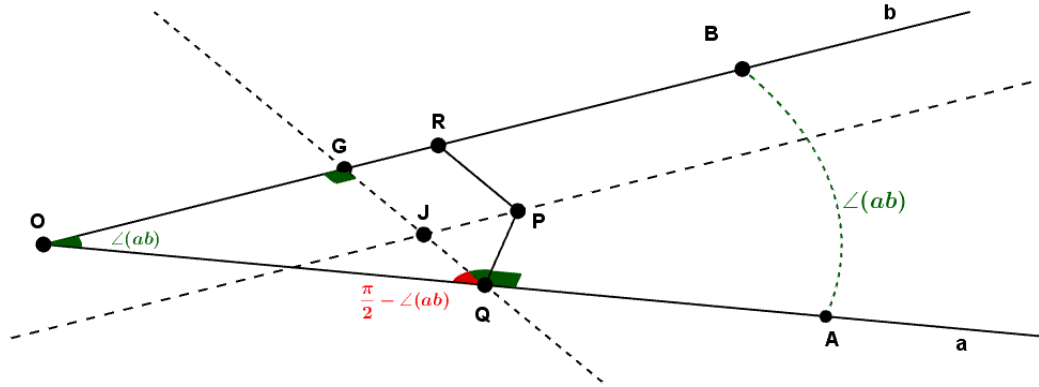


Figura 2.24: Relación que guardan las proyecciones de los segmentos sobre el segmento  $\overline{OB}$ .

- $\text{proy}_{\overline{OB}}(\overline{OQ}) = \overline{OG} = \overline{OQ} \cos \angle(ab) = r \cos \angle(ac) \cos \angle(ab)$ ,
- $\text{proy}_{\overline{OB}}(\overline{QP}) = \overline{JP} = \overline{QP} \sin \angle(ab) = r \sin \angle(ac) \sin \angle(ab) \cos \hat{A}$ ,
- $\text{proy}_{\overline{OB}}(\overline{PR}) = 0$ .

Así, sustituyendo estos valores en (2.3.4) y dividiendo por  $r$  en ambos miembros, obtenemos:

$$\cos \angle(bc) = \cos \angle(ac) \cos \angle(ab) + \sin \angle(ac) \sin \angle(ab) \cos \hat{A}.$$

Razonando de manera análoga con los lados  $\angle(ac)$  y  $\angle(ab)$ , tenemos las relaciones enunciadas en el teorema.  $\square$

A partir del Teorema del coseno, se obtienen los otros dos grupos de fórmulas restantes, como veremos a continuación:

**Teorema 2.3.9** (Analogías de Bessel. Tercer grupo de Fórmulas de Bessel). *En todo triángulo esférico, el seno de un lado por el coseno de un ángulo adyacente a él es igual al producto del coseno del lado opuesto al ángulo anterior por el seno del otro lado menos el producto del seno de dicho lado opuesto por el coseno del otro lado por el coseno del ángulo opuesto al lado inicial. Esto es, si  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$  son los ángulos del triángulo y  $\angle(bc)$ ,  $\angle(ac)$  y*

$\angle(ab)$  son sus lados opuestos, entonces:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \angle(ab) \cos \hat{B} = \cos \angle(ac) \operatorname{sen} \angle(bc) - \cos \angle(bc) \operatorname{sen} \angle(ac) \cos \hat{C}, \\ \operatorname{sen} \angle(ab) \cos \hat{A} = \cos \angle(bc) \operatorname{sen} \angle(ac) - \cos \angle(ac) \operatorname{sen} \angle(bc) \cos \hat{C}, \\ \operatorname{sen} \angle(ac) \cos \hat{A} = \cos \angle(bc) \operatorname{sen} \angle(ab) - \cos \angle(ab) \operatorname{sen} \angle(bc) \cos \hat{B}, \\ \operatorname{sen} \angle(ac) \cos \hat{C} = \cos \angle(ab) \operatorname{sen} \angle(bc) - \cos \angle(bc) \operatorname{sen} \angle(ab) \cos \hat{B}, \\ \operatorname{sen} \angle(bc) \cos \hat{B} = \cos \angle(ac) \operatorname{sen} \angle(ab) - \cos \angle(ab) \operatorname{sen} \angle(ac) \cos \hat{A}, \\ \operatorname{sen} \angle(bc) \cos \hat{C} = \cos \angle(ab) \operatorname{sen} \angle(ac) - \cos \angle(ac) \operatorname{sen} \angle(ab) \cos \hat{A}. \end{cases}$$

*Demostración.* Demostraremos la primera igualdad. Las demás se obtienen de forma análoga.

Tenemos a partir del teorema del coseno las dos siguientes igualdades:

$$\begin{cases} \cos \angle(ac) = \cos \angle(ab) \cos \angle(bc) + \operatorname{sen} \angle(ab) \operatorname{sen} \angle(bc) \cos \hat{B}, \\ \cos \angle(ab) = \cos \angle(ac) \cos \angle(bc) + \operatorname{sen} \angle(ac) \operatorname{sen} \angle(bc) \cos \hat{C}. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Despejando la primera igualdad y sustituyendo la segunda expresión de (2.3.5) obtenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \angle(ab) \operatorname{sen} \angle(bc) \cos \hat{B} &= \cos \angle(ac) - \cos \angle(ab) \cos \angle(bc) = \\ &= \cos \angle(ac) - \cos \angle(bc) \left( \cos \angle(ac) \cos \angle(bc) + \operatorname{sen} \angle(ac) \operatorname{sen} \angle(bc) \cos \hat{C} \right) = \\ &= \cos \angle(ac) - \cos^2 \angle(bc) \cos \angle(ac) - \cos \angle(bc) \operatorname{sen} \angle(ac) \operatorname{sen} \angle(bc) \cos \hat{C} = \\ &= \cos \angle(ac) \operatorname{sen}^2 \angle(bc) - \cos \angle(bc) \operatorname{sen} \angle(ac) \operatorname{sen} \angle(bc) \cos \hat{C}. \end{aligned}$$

Dividiendo ambos miembros por  $\operatorname{sen} \angle(bc)$ :

$$\operatorname{sen} \angle(ab) \cos \hat{B} = \cos \angle(ac) \operatorname{sen} \angle(bc) - \cos \angle(bc) \operatorname{sen} \angle(ac) \cos \hat{C},$$

concluyendo, así, la demostración del teorema.  $\square$

El último grupo de Fórmulas de Bessel, el cuarto, se obtiene aplicando el Teorema del coseno al triángulo esférico polar:

**Teorema 2.3.10** (Teorema del coseno para ángulos. Cuarto grupo de Fórmulas de Bessel). *En todo triángulo esférico, el coseno de un ángulo es igual al producto de los senos de los otros dos ángulos por el coseno del lado opuesto menos el producto de los cosenos de dichos ángulos. Esto es, si  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$*

son los ángulos del triángulo y  $\angle(bc)$ ,  $\angle(ac)$  y  $\angle(ab)$  son sus lados opuestos, entonces:

$$\begin{cases} \cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C} \cos \angle(bc), \\ \cos \hat{B} = -\cos \hat{C} \cos \hat{A} + \sin \hat{C} \sin \hat{A} \cos \angle(ac), \\ \cos \hat{C} = -\cos \hat{B} \cos \hat{A} + \sin \hat{B} \sin \hat{A} \cos \angle(ab). \end{cases}$$

*Demostración.* Como dijimos previamente, aplicamos el Teorema del coseno a un lado del triángulo polar  $\nabla(A'B'C')$  del triángulo esférico  $\nabla(ABC)$ , se tiene:

$$\cos \angle(b'c') = \cos \angle(a'c') \cos \angle(a'b') + \sin \angle(a'c') \sin \angle(a'b') \cos \hat{A}'. \quad (2.3.6)$$

Puesto que

$$\angle(b'c') = \pi - \hat{A}, \angle(a'c') = \pi - \hat{B}, \angle(a'b') = \pi - \hat{C} \text{ y } \hat{A}' = \pi - \angle(bc),$$

sustituyendo estas igualdades en (2.3.6) y aplicando las propiedades trigonométricas conocidas, concluimos que:

$$\cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C} \cos \angle(bc).$$

Así, finalizamos la demostración del teorema, pues las demás expresiones del enunciado se obtienen de manera análoga.  $\square$

A partir de los grupos de Fórmulas de Bessel se deducen las Fórmulas de Cagnoli y de Borda, así como las Analogías de Gauss-Delambre y Neper, que no las estudiaremos ya que la memoria se extendería demasiado. Estos resultados se pueden consultar en [4].

Para acabar con esta sección, veremos un resultado que afirmará que la Trigonometría Plana es un caso particular de la Trigonometría Esférica, a partir de los desarrollos en serie de potencias de Taylor.

**Proposición 2.3.11.** *Si consideramos un triángulo esférico suficientemente pequeño y despreciamos términos desde el tercer orden en adelante, entonces las fórmulas de la Trigonometría Esférica se transforman en las de la Trigonometría Plana.*

*Demostración.* Al ser el triángulo esférico pequeño, podemos utilizar el desarrollo en el punto 0 en series de Taylor del seno y coseno, que es, respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{sen } x &\simeq x + \dots \\ \text{cos } x &\simeq 1 - \frac{x^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Con esto, obtenemos las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \angle(bc) &\simeq \angle(bc) \simeq \overline{BC}, & \cos \angle(bc) &\simeq 1 - \frac{\angle(bc)^2}{2} \simeq 1 - \frac{\overline{BC}^2}{2}, \\ \operatorname{sen} \angle(ac) &\simeq \angle(ac) \simeq \overline{AC}, & \cos \angle(ac) &\simeq 1 - \frac{\angle(ac)^2}{2} \simeq 1 - \frac{\overline{AC}^2}{2}, \\ \operatorname{sen} \angle(ab) &\simeq \angle(ab) \simeq \overline{AB}, & \cos \angle(ab) &\simeq 1 - \frac{\angle(ab)^2}{2} \simeq 1 - \frac{\overline{AB}^2}{2}.\end{aligned}$$

Por tanto, el Teorema del seno se convierte en

$$\frac{\operatorname{sen} \hat{A}}{\overline{BC}} = \frac{\operatorname{sen} \hat{B}}{\overline{AC}} = \frac{\operatorname{sen} \hat{C}}{\overline{AB}},$$

que es el Teorema del seno para un triángulo plano. Mientras tanto, el Teorema del coseno se transforma en:

$$1 - \frac{\overline{BC}^2}{2} = \left(1 - \frac{\overline{AC}^2}{2}\right) \left(1 - \frac{\overline{AB}^2}{2}\right) + \overline{AB} \overline{AC} \cos \hat{A},$$

de donde despreciando los términos a partir del tercer orden, nos queda:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AC} \overline{AB} \cos \hat{A},$$

que se trata del Teorema del coseno para el ángulo  $\hat{A}$  de un triángulo plano.  $\square$

Todos los resultados que se han obtenido a lo largo de este capítulo están orientados a la resolución de triángulos esféricos, es decir, al cálculo de los elementos desconocidos de un triángulo rectángulo a partir de datos conocidos. A su vez, la resolución de triángulos esféricos está vinculada a la navegación, pues se utiliza este método para determinar la distancia mínima entre dos puntos de la superficie terrestre, estimar tiempos de llegada a destino de barcos o aviones, calcular rumbos, etc. Para más detalles, ver la referencia [4].



# Conclusiones

En resumen, a lo largo de este trabajo hemos descrito diversas propiedades de la Geometría de la Esfera, que la diferencian de la Geometría Euclídea del plano. Recogemos las más destacadas en la siguiente tabla:

<b>Geometría Euclídea</b>	<b>Geometría Esférica</b>
Las geodésicas son las rectas	Las geodésicas son las circunferencias máximas
Dos paralelas nunca se cortan	No existe el paralelismo
La curvatura de Gauss es constante nula	La curvatura de Gauss es constante positiva
La suma de los ángulos es $\pi$	La suma de los ángulos es mayor que $\pi$
Teoremas del seno y coseno	Cuatro grupos de Fórmulas de Bessel





# Bibliografía

- [1] J. McCleary. *Geometry from a Differentiable Viewpoint*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [2] M. P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- [3] J. M. Lee. *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [4] M. Berrocoso, M. E. Ramírez, J. M. Enríquez y A. Pérez. *Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía posición*. Servicio de publicaciones de la Universidad de Cádiz, Cádiz, 2004.