



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Una aproximación geométrica a la aerodinámica de curvas y superficies

Memoria realizada por Alejandro García Bedoya

Dirigido por:

VºBº

Alfonso Carriazo Rubio M. Carmen Márquez García

Abstract

In this work we present a method to improve the aerodynamics of curves and surfaces with respect to the air resistance. Previously, we also analyze a method of normal approximation of curves and surfaces which is the basis of our aerodynamic method. In both of them, we will show many examples including computations, figures and some animations from our own files made with MAPLE VI and the internet-based service for solving numerical optimization problems NEOS Server.

Índice general

Introducción	7
1. Curvas y Superficies de Bézier	9
1.1. Pierre Etienne Bézier	9
1.2. Curvas de Bézier	10
1.2.1. Polinomios de Bernstein	10
1.2.2. Curvas de Bézier	11
1.3. Superficies de Bézier	18
2. Aproximación normal de curvas y superficies	23
2.1. Introducción	23
2.2. Método para curvas planas	24
2.3. Método para superficies	26
2.4. Ejemplos	26
3. Aproximación aerodinámica	49
3.1. Introducción	49
3.2. Método para curvas planas	52
3.3. Ejemplos	57
3.4. Método para superficies	65
3.5. Ejemplos	66
Apéndice Digital	73
Bibliografía	75

Introducción

¿Qué entendemos por aerodinámica? Según el Diccionario de la Real Academia Española, la aerodinámica es la “rama de la mecánica de fluidos que estudia el movimiento del aire y otros gases, y su interacción con los cuerpos que se mueven en ellos”. Se trata pues, de una ciencia de gran importancia en nuestros tiempos, pues de ella depende la forma, por ejemplo, de los aviones o de los coches (en particular los de carrera). Resulta evidente que un correcto diseño de éstos permite ahorrar combustible y/o alcanzar mayores velocidades. Sin embargo, no existe ninguna formulación física para controlar, mediante ecuaciones, la aerodinámica de un objeto inmerso en un fluido. De hecho, para poder mejorar un determinado diseño aerodinámico, sigue siendo necesario el uso de modelos a escala y de los llamados “túneles de viento”.

El objetivo de nuestro trabajo es aportar algunas herramientas para llevar a cabo una posible mejora aerodinámica de un objeto, siendo el fluido en nuestro caso el aire, que consideraremos representado por un vector constante unitario. Abordaremos este objetivo desde una perspectiva geométrica, considerando como objetos sometidos a la presión del aire las curvas y superficies. Si bien el problema real, desde un punto de vista físico, se correspondería con el de las superficies en el espacio, estudiaremos previamente el caso de las curvas en el plano, que podemos entender como un modelo de “bolsillo” (o de “prueba”), a la manera en que los físicos ensayan sus teorías en espacios de dimensiones menores, para simplificar los cálculos. Debemos señalar aquí que el método propuesto para esta mejora aerodinámica es completamente original. De hecho, una versión preliminar de los resultados obtenidos fue presentada por el autor de esta memoria como una comunicación al *XI Encuentro Andaluz de Geometría*, celebrado en Sevilla en mayo de 2015 (véase [1]).

Para desarrollar nuestro método, utilizaremos las llamadas curvas y superficies de Bézier. Por lo tanto, empezaremos esta memoria incluyendo un

primer capítulo en el que se recogen algunos preliminares sobre estos objetos geométricos, base de los estudios modernos de diseño industrial, así como unas breves notas biográficas sobre su creador: Pierre Bézier.

En el segundo capítulo, analizaremos con detalle el método introducido por los directores de este trabajo en [2], denominado *Método de Aproximación Normal*, cuyo objetivo es aproximar una curva o superficie regular mediante una curva o superficie de Bézier, obtenida geoméricamente a partir de la anterior. Además, ofreceremos algunos ejemplos de elaboración propia, no incluidos en el artículo original.

El tercer capítulo está dedicado a la exposición de nuestro método de aproximación aerodinámica. Al igual que antes, ofrecemos un buen número de ejemplos.

Todos los ejemplos presentados a lo largo de este trabajo han sido elaborados en los correspondientes ficheros que se adjuntan en formato digital. Para ello, hemos empleado el programa de cálculo simbólico MAPLE VI y el servidor gratuito para la resolución numérica de problemas de optimización *NEOS Server* (<https://neos-server.org/>). Los ficheros utilizados se detallarán en el Apéndice Digital.

Concluiremos esta memoria con una lista de las referencias bibliográficas que hemos empleado para su elaboración.

No quisiera terminar esta Introducción sin expresar mi agradecimiento a los tutores del trabajo, el Prof. Alfonso Carriazo y la Prof. M. Carmen Márquez, y en especial a mi familia y a mi pareja por su apoyo.

Capítulo 1

Curvas y Superficies de Bézier

En este capítulo incluiremos algunas nociones básicas sobre curvas y superficies de Bézier. Éstas van ser la base de los diferentes estudios que vamos a realizar. No presentaremos pruebas o demostraciones, que pueden consultarse en [3] o [4].

Para comenzar, sería conveniente introducir brevemente quién fue la persona que les da nombre.

1.1. Pierre Etienne Bézier

Francia, 1 de septiembre de 1910 - 25 de noviembre de 1999.

Nacido en París, de padre y abuelo ingenieros, estudió ingeniería mecánica en Arts et Métiers ParisTech (Escuela Nacional Superior de Artes y Oficios), ingeniería eléctrica y posteriormente Matemáticas en la Universidad Pierre y Marie Curie. Incluso sus hijos y nietos también se formaron como ingenieros mecánicos. Pierre nunca dejó de aprender: 40 años después de su carrera de ingeniería mecánica publicó su tesis “Essai de Définition Numérique des Courbes et des Surfaces Experimentales” en la Universidad Pierre y Marie Curie. Y en 1977, obtuvo el título de Doctor en Matemáticas.

Paul de Casteljaou fue el primero que utilizó las curvas de Bézier, aunque fue Pierre Bézier quien las popularizó y las formalizó. Pierre y Paul trabajaron en la industria automovilística en Renault y Citroën, respectivamente. En 1975, Pierre, después de graduarse, comenzó a trabajar en esta firma francesa como diseñador.



Figura 1.1: Pierre Etienne Bézier (1910 - 1999)

Hoy en día se utilizan sistemas que derivaron de sus estudios, como los B-Splines racionales no uniformes (NURBS) para el diseño de aviones, coches, barcos, etc.

Para más información sobre la vida de Bézier, puede consultarse la referencia [6].

1.2. Curvas de Bézier

En esta sección introduciremos las curvas de Bézier. Para su construcción necesitaremos recordar los polinomios de Bernstein. Incluiremos propiedades y ejemplos de interés para su mejor comprensión.

1.2.1. Polinomios de Bernstein

Definición 1.2.1 Fijado $n \in \mathbb{N}$ existen $n + 1$ *polinomios de Bernstein* de grado n ,

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

definidos generalmente para $t \in [0, 1]$.

Proposición 1.2.2 *Los polinomios de Bernstein cumplen las siguientes propiedades:*

1. Son no negativos, es decir,

$$B_k^n(t) \geq 0, \text{ para todo } t, n, k.$$

2. Alcanzan exactamente un máximo en $t = \frac{k}{n}$.

3. Constituyen una partición de la unidad, es decir:

$$\sum_{k=0}^n B_k^n(t) = 1, \quad \text{para todo } t.$$

4. Guardan el siguiente principio de recurrencia:

$$B_k^n(t) = (1-t)B_k^{n-1}(t) + tB_{k-1}^{n-1}(t), \quad \text{para todo } n \geq 2, \quad 1 \leq k \leq n.$$

5. Su derivada viene dada por:

$$\frac{d}{dt} B_k^n(t) = n(B_{k-1}^{n-1}(t) - B_k^{n-1}(t)).$$

6. Forman una base del espacio de polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes reales $\mathbb{R}[1, t, \dots, t^n]$.

1.2.2. Curvas de Bézier

Definición 1.2.3 Llamamos *curva de Bézier* simple o de un tramo a la curva en forma paramétrica donde cada coordenada es expresada como combinación lineal de la base de Bernstein:

$$B(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_k^n(t), \quad t \in [0, 1],$$

con $P_k = (x_k, y_k)$ si es una curva en \mathbb{R}^2 o $P_k = (x_k, y_k, z_k)$ si es una curva en \mathbb{R}^3 . Los coeficientes P_k se denominan *puntos de control* de la curva de Bézier. A la envolvente convexa de todos los puntos de control se denomina el *polígono de control* de la curva de Bézier.

Ejemplo 1.2.4

- Para $n = 1$, sólo tenemos los puntos extremos de la curva. De hecho, la curva es el segmento que une ambos extremos.

$$B(t) = \sum_{k=0}^1 P_k B_k^1(t) = P_0 B_0^1(t) + P_1 B_1^1(t) = (1-t)P_0 + tP_1.$$

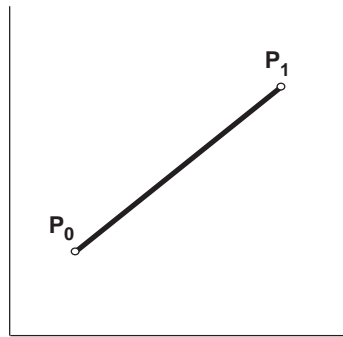
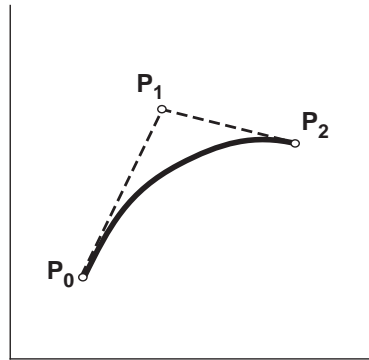


Figura 1.2: Curva de Bézier con 2 puntos ($n = 1$)

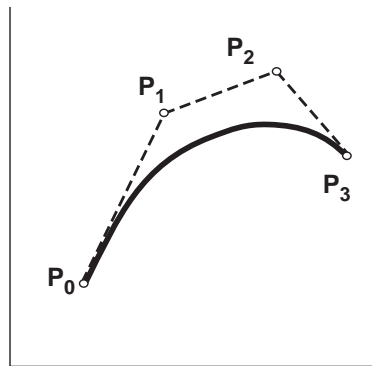
- Para $n = 2$, la curva de Bézier contiene un punto de control que no toca a la curva. La curva está contenida dentro de la envolvente convexa de $\{P_0, P_1, P_2\}$. El polinomio resultante será de grado 2.

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{k=0}^2 P_k B_k^2(t) = P_0 B_0^2(t) + P_1 B_1^2(t) + P_2 B_2^2(t) = \\ &= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2. \end{aligned}$$

Figura 1.3: Curva de Bézier con 3 puntos ($n = 2$)

- Para $n = 3$, al igual que en el caso anterior, la curva se encuentra dentro de la envolvente convexa $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$. En este caso, tenemos dos puntos de control intermedios. El polinomio resultante será de grado 3.

$$\begin{aligned} B(t) &= P_0 B_0^3(t) + P_1 B_1^3(t) + P_2 B_2^3(t) + P_3 B_3^3(t) = \\ &= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3. \end{aligned}$$

Figura 1.4: Curva de Bézier con 4 puntos ($n = 3$)

Proposición 1.2.5 *Las curvas de Bézier satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Sólo los puntos de control extremos pertenecen a la curva de Bézier:*

$$B(0) = P_0, \quad B(1) = P_n.$$

En general el resto de los puntos de control están fuera de la curva. No obstante, si los puntos P_0, \dots, P_n están alineados, entonces la curva de Bézier que determinan es el segmento que los une.

2. *La curva de Bézier está dentro del polígono de control.*
3. *La curva de Bézier es tangente al polígono de control en los extremos:*

$$B'(0) = n(P_1 - P_0), \quad B'(1) = n(P_n - P_{n-1}).$$

4. *La derivada de una curva de Bézier viene dada por:*

$$B'(t) = n \sum_{k=0}^{n-1} (P_{k+1} - P_k) B_k^{n-1}(t).$$

Si denotamos $\Delta P_j = P_{j+1} - P_j$, entonces podemos escribir:

$$B'(t) = n \sum_{k=0}^{n-1} \Delta P_k B_k^{n-1}(t).$$

Así, $B'(t)$ es a su vez una curva de Bézier de grado $n - 1$, con $n\Delta P_k$ como puntos de control.

En general, si denotamos

$$\Delta^r P_k = \Delta^{r-1} P_{k+1} - \Delta^{r-1} P_k,$$

entonces se tiene:

$$B^{(r)}(t) = n(n-1) \cdots (n-r+1) \sum_{k=0}^{n-r} \Delta^r P_k B_k^{n-r}(t).$$

5. *Invariancia afín.* Si f es una afinidad, la curva imagen por la afinidad $f(B(t))$ coincide con la curva de Bézier generada por los puntos $f(P_k)$, imagen por la afinidad de los puntos de control de $B(t)$.
6. *Recurrencia.* Dada una curva de Bézier de 2º grado,

$$\begin{aligned} B(t) &= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 = \\ &= (1-t)[(1-t)P_0 + tP_1] + t[(1-t)P_1 + tP_2]. \end{aligned}$$

Si denotamos

$$P_0^{(1)} = (1-t)P_0 + tP_1$$

y

$$P_1^{(1)} = (1-t)P_1 + tP_2,$$

entonces:

$$B(t) = (1-t)P_0^{(1)} + tP_1^{(1)}.$$

Así, los puntos de $B(t)$ están también sobre una curva de Bézier de 1º grado con puntos de control móviles.

Ejemplo 1.2.6 (Recurrencia) Considérese una curva de Bézier de 2º grado

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2,$$

y los siguientes puntos: $P_0 = (-1, 0)$, $P_1 = (0, 2)$, $P_2 = (1, 0)$. Entonces, la curva de Bézier es

$$B(t) = (1-t)^2(-1, 0) + 2t(1-t)(0, 2) + t^2(1, 0),$$

que también podemos expresar como:

$$B(t) = (1-t)[(1-t)(-1, 0) + t(0, 2)] + t[(1-t)(0, 2) + t(1, 0)].$$

Por ejemplo, para $t = \frac{1}{3}$, tenemos

$$P_0^{(1)} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)(-1, 0) + \frac{1}{3}(0, 2) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$P_1^{(1)} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)(0, 2) + \frac{1}{3}(1, 0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

y

$$B\left(\frac{1}{3}\right) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)P_0^{(1)} + \frac{1}{3}P_1^{(1)} = \left(-\frac{3}{9}, \frac{8}{9}\right).$$

Si realizásemos este proceso para todo $t \in [0, 1]$ generaríamos la curva de Bézier correspondiente a los puntos $P_0 = (-1, 0)$, $P_1 = (0, 2)$, $P_2 = (1, 0)$, como podemos apreciar en la Figura 1.5.

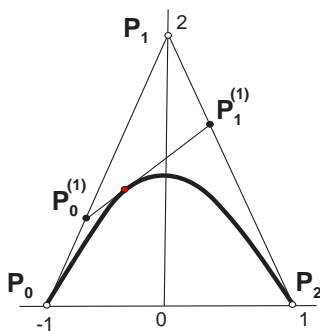


Figura 1.5: Curva de Bézier de 2º grado generada por recurrencia

Veamos este mismo proceso recursivo para curvas de Bézier de 3ª grado:

$$\begin{aligned}
 B(t) &= (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3 = \\
 &= (1-t)[(1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2] + \\
 &\quad + t[(1-t)^2 P_1 + 2t(1-t)P_2 + t^2 P_3] = \\
 &= (1-t)[(1-t)[(1-t)P_0 + tP_1] + t[(1-t)P_1 + tP_2]] + \\
 &\quad + t[(1-t)[(1-t)P_1 + tP_2] + t[(1-t)P_2 + tP_3]].
 \end{aligned}$$

Denotamos

$$\begin{aligned}
 P_0^{(1)} &= (1-t)P_0 + tP_1, \\
 P_1^{(1)} &= (1-t)P_1 + tP_2, \\
 P_2^{(1)} &= (1-t)P_2 + tP_3.
 \end{aligned}$$

Entonces

$$B(t) = (1-t)[(1-t)P_0^{(1)} + tP_1^{(1)}] + t[(1-t)P_1^{(1)} + tP_2^{(1)}],$$

y si denotamos $P_0^{(2)} = (1-t)P_0^{(1)} + tP_1^{(1)}$ y $P_1^{(2)} = (1-t)P_1^{(1)} + tP_2^{(1)}$, se tiene:

$$B(t) = (1-t)P_0^{(2)} + tP_1^{(2)}.$$

Observación 1.2.7 En la Figura 3.18 los puntos $P_0^{(1)}, P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, P_0^{(2)}, P_1^{(2)}$ están fijados para $t = 1/3$.

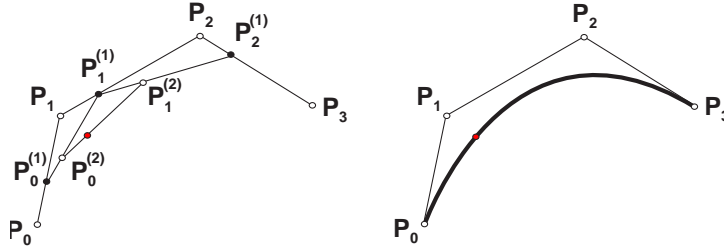


Figura 1.6: Curva de Bézier de 3^{er} grado generada por recurrencia

El siguiente algoritmo es una generalización del Ejemplo 1.2.6. De hecho, fue diseñado por De Casteljaou, el que originó las curvas de Bézier.

Algoritmo de De Casteljaou

Sean P_0, P_1, \dots, P_n , $n + 1$ puntos en \mathbb{R}^2 ó \mathbb{R}^3 . Si definimos

$$\begin{aligned}
 P_k^{(0)} &= P_k, & k &= 0, \dots, n, \\
 P_k^{(1)} &= (1 - t)P_k^{(0)} + tP_{k+1}^{(0)}, & k &= 0, \dots, n - 1, \\
 P_k^{(2)} &= (1 - t)P_k^{(1)} + tP_{k+1}^{(1)}, & k &= 0, \dots, n - 2, \\
 &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\
 P_k^{(n-1)} &= (1 - t)P_k^{(n-2)} + tP_{k+1}^{(n-2)}, & k &= 0, 1, \\
 P_k^{(n)} &= (1 - t)P_k^{(n-1)} + tP_{k+1}^{(n-1)}, & k &= 0,
 \end{aligned}$$

se tiene que

$$B(t) = P_0^{(n)}.$$

1.3. Superficies de Bézier

Definición 1.3.1 Dados un conjunto de puntos de control $\{P_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})\}$ con $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$, definimos la *superficie de Bézier* generada por estos puntos como la superficie paramétrica

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v),$$

para $u, v \in [0, 1]$, donde

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i},$$

$$B_j^m(v) = \binom{m}{j} v^j (1-v)^{m-j}$$

son polinomios de Bernstein de grados n y m respectivamente. Esto es:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) B_i^n(u) B_j^m(v) =$$

$$\left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v), \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v), \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) \right).$$

Proposición 1.3.2 *Las superficies de Bézier cumplen las siguientes propiedades:*

1. $S(u, v)$ interpola los puntos vértices de la malla de puntos de control:

$$S(0, 0) = P_{00}, \quad S(0, 1) = P_{0m},$$

$$S(1, 0) = P_{n0}, \quad S(1, 1) = P_{nm}.$$

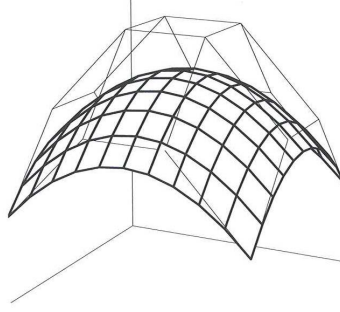


Figura 1.7: Los vértices de la malla forman parte de la superficie de Bézier

2. Las derivadas parciales de una superficie de Bézier vienen dadas por:

$$\frac{\partial S(u, v)}{\partial u} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} \frac{dB_i^n(u)}{du} B_j^m(v).$$

Teniendo en cuenta la derivada de los polinomios de Bernstein y reagrupando términos, tenemos:

$$\frac{\partial S(u, v)}{\partial u} = n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m (P_{i+1, j} - P_{ij}) B_i^{n-1}(u) B_j^m(v).$$

De la misma forma:

$$\frac{\partial S(u, v)}{\partial v} = m \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} (P_{i, j+1} - P_{ij}) B_i^n(u) B_j^{m-1}(v).$$

Si consideramos la curva paramétrica frontera $v = 0$, es decir $\alpha(u) = S(u, 0)$, tenemos:

$$\alpha'(u) = \frac{\partial S(u, 0)}{\partial u} = n \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1, 0} - P_{i0}) B_i^{n-1}(u).$$

Por tanto, $\alpha'(0) = n(P_{10} - P_{00})$ y $\alpha'(1) = n(P_{n0} - P_{n-1, 0})$.
(Obsérvese que realmente se ha obtenido aquí la Propiedad 3 de las curvas de Bézier)

3. Los puntos $S(u, v)$ están en la envolvente convexa de los puntos P_{ij} .
4. Invarianza afín. Si f es una afinidad, la superficie imagen por la afinidad $f(S(u, v))$ coincide con la superficie de Bézier generada por los puntos $f(P_{ij})$, imagen por la afinidad de los puntos de control de $S(u, v)$.
5. Si consideramos una curva paramétrica $v = v_0$,

$$\alpha(u) = S(u, v_0) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^m P_{ij} B_j^m(v_0) \right) B_i^n(u)$$

es una curva de Bézier de grado n con puntos de control

$$Q_i = \sum_{j=0}^m P_{ij} B_j^m(v_0).$$

Análogamente ocurriría para una curva paramétrica $u = u_0$

Ejemplo 1.3.3 Consideremos la siguiente malla de puntos:

$$\begin{array}{lll} P_{00} = (0, 0, 0), & P_{01} = (0, 1/2, 0), & P_{02} = (0, 1, 0), \\ P_{10} = (1/2, 0, 0), & P_{11} = (1/2, 1/2, 2), & P_{12} = (1, 1/2, 0), \\ P_{20} = (1, 0, 0), & P_{21} = (1/2, 1, 0), & P_{22} = (1, 1, 0). \end{array}$$

Entonces la superficie de Bézier resultante es:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) = (u, v, 8uv - 8uv^2 - 8u^2v + 8u^2v^2).$$

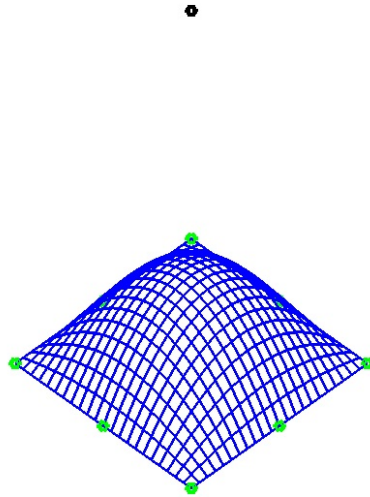


Figura 1.8: Superficie de Bézier

Observación 1.3.4 Podemos apreciar en la Figura 1.8 cómo se cumplen las propiedades 1 y 3 de las superficies de Bézier.

Capítulo 2

Aproximación normal de curvas y superficies

2.1. Introducción

En este capítulo vamos a presentar el método de aproximación normal de curvas y superficies publicado en [2]. Este procedimiento es la base del método que presentaremos en el capítulo siguiente.

Motivación

Sea $\alpha(t)$ una curva con una expresión determinada y $B(t)$ una curva de Bézier. Nuestro objetivo es modificar $B(t)$ a través de sus puntos de control para ajustarla, con el menor error posible, a la curva $\alpha(t)$. Este mismo proceso se podrá realizar con superficies y con aproximación mediante una superficie de Bézier.

Todas los cálculos realizadas en este capítulo se podrán encontrar en el Apéndice Digital. Algunas expresiones las indicaremos con aproximaciones numéricas ya que en esos casos las expresiones exactas resultan excesivamente largas.

2.2. Método para curvas planas

Sean $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular, una partición de $[0, 1]$ en intervalos iguales, $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$, $P_0 = \alpha(0)$ y $P_n = \alpha(1)$.

Para cada $i = 1, \dots, n-1$, consideramos el punto

$$P_i(\lambda_i) = \alpha(t_i) + \lambda_i \mathbf{n}(t_i),$$

donde $\mathbf{n}(t_i)$ es el vector normal de α en $\alpha(t_i)$, como podemos apreciar en la Figura 2.1.

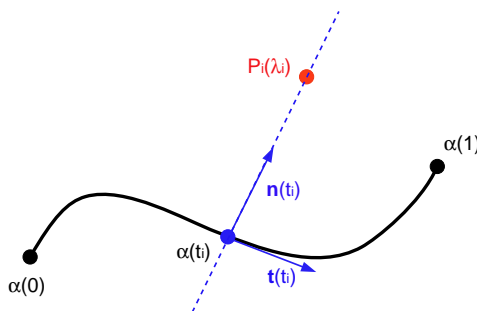


Figura 2.1: Método de aproximación normal de curvas

Definimos entonces

$$B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t) = P_0 B_0^n + \sum_{k=1}^{n-1} P_k(\lambda_k) B_k^n + P_n B_n^n \quad (2.2.1)$$

y

$$H(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = \int_0^1 |\alpha(t) - B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)|^2 dt. \quad (2.2.2)$$

Al considerar esta función se utiliza la norma L_2^2 , que representa la diferencia de área entre la curva original $\alpha(t)$ y la nueva curva construida en (2.2.1). Para poder obtener la mejor aproximación con este método necesitamos minimizar la función definida en (2.2.2). Así, obtendremos los valores $\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n-1}^0$ que mejor aproximan la curva $B(\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n-1}^0, t)$ a la curva $\alpha(t)$.

Para ello, necesitamos resolver un sistema de ecuaciones dado por $\partial H/\partial \lambda_j = 0$, para cada $j = 1, \dots, n-1$. Aplicando el criterio usual de derivación dentro del signo integral, se tiene que

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_j} = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial \lambda_j} dt, \quad (2.2.3)$$

con

$$\begin{aligned} G(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t) &= |\alpha(t) - B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^2 (\alpha^k(t) - B^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t))^2, \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

donde el superíndice k representa la componente k -ésima.

Observación 2.2.1 Una de las grandes ventajas que posee este método es que podemos aproximar cualquier curva regular con su expresión determinada por una curva polinómica con su error asociado. Además, esto puede hacerse resolviendo un sistema de ecuaciones lineales, tal y como se prueba en el siguiente teorema:

Teorema 2.2.2 *El sistema de ecuaciones $\partial H/\partial \lambda_j = 0$, $j = 1, \dots, n-1$, es un sistema de ecuaciones lineales.*

Demostración: Veamos la expresión que tienen estas derivadas parciales. En virtud de (2.2.3) y (2.2.4), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda_j} &= -2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{n}^k(t_j) \int_0^1 (\alpha^k(t) - B^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)) B_j^n(t) dt = \\ &= -2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{n}^k(t_j) \left(\int_0^1 \alpha^k(t) B_j^n(t) dt - P_0^k \int_0^1 B_0^n(t) B_j^n(t) dt - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^k(t_i) \int_0^1 B_i^n(t) B_j^n(t) dt - P_n^k \int_0^1 B_n^n(t) B_j^n(t) dt \right) + \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^2 \mathbf{n}^k(t_i) \mathbf{n}^k(t_j) \int_0^1 B_i^n(t) B_j^n(t) dt \right) \lambda_i. \end{aligned}$$

Al igualar esta expresión a cero, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales en $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$. \square

2.3. Método para superficies

Veamos cómo podemos extender el método anterior a superficies:

Sean $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto S(u, v)$ una superficie regular, y dos particiones en intervalos iguales, en cada una de ellas:

$$u_0 = 0 < u_1 < \dots < u_{n-1} < u_n = 1,$$

$$v_0 = 0 < v_1 < \dots < v_{m-1} < v_m = 1.$$

Primero, se aproximan las curvas que forman la frontera $S(0, v)$, $S(1, v)$, $S(u, 0)$ y $S(u, 1)$ mediante el método de aproximación normal de curvas definido en la sección anterior.

Posteriormente, consideramos la normal \mathbf{N} de la superficie $S(u, v)$ y redefinimos los puntos de control interiores de la malla:

$$P_{ij}(\lambda_{ij}) = S(u_i, v_j) + \lambda_{ij}\mathbf{N}(u_i, v_j), \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq m-1. \quad (2.3.1)$$

Nota 2.3.1 Los puntos de la frontera son fijos, es decir, no realizamos ninguna modificación sobre ellos.

Entonces, definimos la superficie de Bézier construida a partir de los puntos de control de las curvas aproximadas de la frontera y de los puntos interiores redefinidos en (2.3.1). Es decir:

$$BS(\lambda_{ij}, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v).$$

El resto del método para superficies se aplica de manera análoga al caso de las curvas.

2.4. Ejemplos

De ahora en adelante, en todas las figuras la curva azul representará la curva original y la curva roja la curva aproximada. En algunas figuras las curvas se superponen, dada la exactitud de la aproximación.

En primer lugar veamos varios ejemplos de curvas planas:

Ejemplo 2.4.1 Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva polinómica $\alpha(t) = (t, t^4)$. Queremos aproximar la curva con un punto intermedio. Tomamos entonces $n = 2$, $\alpha(0) = P_0 = (0, 0)$ y $\alpha(1) = P_2 = (1, 1)$. Elegimos $t_1 = 1/2$ y definimos:

$$P_1(\lambda_1) = \alpha(1/2) + \lambda_1 \mathbf{n}(1/2) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \lambda_1 \sqrt{5}, \frac{1}{16} + \frac{2}{5} \lambda_1 \sqrt{5} \right).$$

La curva de Bézier depende del parámetro λ_1 y viene dada por:

$$\begin{aligned} B(\lambda_1, t) &= P_0 B_0^2(t) + P_1(\lambda_1) B_1^2(t) + P_2 B_2^2(t) = \\ &= \left(t - \frac{2}{5} t \lambda_1 \sqrt{5} + \frac{2}{5} t^2 \lambda_1 \sqrt{5}, \frac{1}{8} t + \frac{4}{5} t \lambda_1 \sqrt{5} + \frac{7}{8} t^2 - \frac{4}{5} t^2 \lambda_1 \sqrt{5} \right). \end{aligned}$$

Ahora, vamos a calcular la función $H(\lambda_1)$:

$$H(\lambda_1) = \int_0^1 |\alpha(t) - B(\lambda_1, t)|^2 dt = \frac{8381}{275562} + \frac{13}{3129} \lambda_1 \sqrt{745} + \frac{2}{15} \lambda_1^2. \quad (2.4.1)$$

Derivando la función de la expresión (2.4.1) obtenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \frac{17}{350} \sqrt{5} + \frac{4}{15} \lambda_1.$$

Entonces, resolviendo la ecuación $\partial H / \partial \lambda_1 = 0$, se tiene:

$$\lambda_1^0 = -\frac{51}{280} \sqrt{5}, \quad P_1(\lambda_1^0) = \left(\frac{1}{3} + \frac{51}{10430} \sqrt{149}, \frac{1}{81} - \frac{1377}{4170} \sqrt{149} \right)$$

y la curva óptima:

$$B(\lambda_1^0, t) = \left(\frac{191}{140} t - \frac{51}{140} t^2, -\frac{169}{280} t + \frac{449}{280} t^2 \right).$$

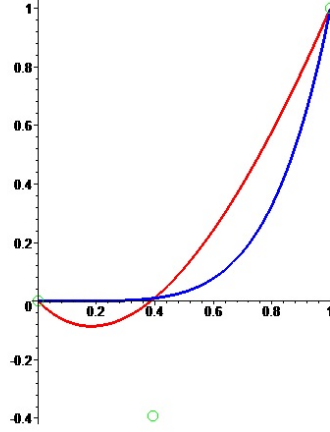


Figura 2.2: Aproximación con 1 punto intermedio a la curva $\alpha(t) = (t, t^4)$

Y el error producido es $H(\lambda_1^0) = 0,0103479309$.

Ejemplo 2.4.2 Vamos a utilizar el Ejemplo 2.4.1 pero ahora con dos puntos intermedios, $n = 3$, $\alpha(0) = P_0 = (0, 0)$ y $\alpha(1) = P_3 = (1, 1)$. Elegimos $t_1 = 1/3$, $t_2 = 2/3$ y definimos:

$$P_1(\lambda_1) = \alpha(1/3) + \lambda_1 \mathbf{n}(1/3) = \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{745} \lambda_1 \sqrt{745}, \frac{1}{81} + \frac{27}{745} \lambda_1 \sqrt{745} \right),$$

$$P_2(\lambda_2) = \alpha(2/3) + \lambda_2 \mathbf{n}(2/3) = \left(\frac{2}{3} - \frac{32}{1753} \lambda_2 \sqrt{1753}, \frac{16}{81} + \frac{27}{1753} \lambda_2 \sqrt{1753} \right).$$

La curva de Bézier, que depende de los parámetros λ_1 y λ_2 , viene dada por:

$$\begin{aligned} B(\lambda_1, \lambda_2, t) &= P_0 B_0^3(t) + P_1(\lambda_1) B_1^3(t) + P_2(\lambda_2) B_2^3(t) + P_3 B_3^3(t) = \\ &= \left(t - \frac{12}{745} t \lambda_1 \sqrt{745} + \frac{24}{745} t^2 \lambda_1 \sqrt{745} - \frac{12}{745} t^3 \lambda_1 \sqrt{745} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{96}{1753} t^2 \lambda_2 \sqrt{1753} + \frac{96}{1753} t^3 \lambda_2 \sqrt{1753}, \frac{1}{27} t + \frac{81}{745} t \lambda_1 \sqrt{745} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{14}{27} t^2 - \frac{162}{745} t^2 \lambda_1 \sqrt{745} + \frac{4}{9} t^3 + \frac{81}{745} t^3 \lambda_1 \sqrt{745} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{81}{1753} t^2 \lambda_2 \sqrt{1753} - \frac{81}{1753} t^3 \lambda_2 \sqrt{1753} \right). \end{aligned}$$

Ahora, vamos a calcular la función $H(\lambda_1, \lambda_2)$:

$$\begin{aligned}
 H(\lambda_1, \lambda_2) &= \int_0^1 |\alpha(t) - B(\lambda_1, \lambda_2, t)|^2 dt = \\
 &= \frac{269}{245420} \lambda_2 \sqrt{1753} + \frac{3}{35} \lambda_2^2 + \frac{3}{35} \lambda_1^2 + \\
 &\quad + \frac{7713}{91418950} \lambda_1 \sqrt{745} \lambda_2 \sqrt{1753} + \frac{229}{15309} + \frac{37}{20860} \lambda_1 \sqrt{745}.
 \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Minimizando la función de la expresión (2.4.2) obtenemos:

$$\lambda_1^0 = -\frac{37}{3576} \sqrt{745} - \frac{2571}{5223940} \lambda_2 \sqrt{113985}, \quad \lambda_2^0 = -\frac{325985}{85714314} \sqrt{1753}.$$

Sustituyendo estos valores en los puntos definidos, resulta que

$$\begin{aligned}
 P_1(\lambda_1^0) &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1211242}{1157143239} \sqrt{729}, \frac{1}{81} - \frac{605621}{85714314} \sqrt{729} \right), \\
 P_2(\lambda_2^0) &= \left(\frac{2}{3} + \frac{5215760}{1157143239} \sqrt{729}, \frac{16}{81} - \frac{325985}{85714314} \sqrt{729} \right)
 \end{aligned}$$

y la curva óptima es:

$$\begin{aligned}
 B(\lambda_1^0, \lambda_2^0, t) &= \left(\frac{15496961}{14285719} t + \frac{2793276}{14285719} t^2 - \frac{572074}{2040817} t^3, \right. \\
 &\quad \left. -\frac{412926271}{771428826} t + \frac{1045352485}{771428826} t^2 + \frac{3309586}{18367353} t^3 \right).
 \end{aligned}$$

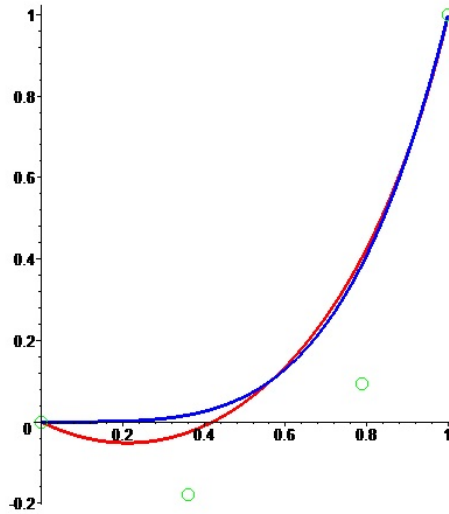


Figura 2.3: Aproximación con 2 puntos intermedios a la curva $\alpha(t) = (t, t^4)$

Y el error producido en este caso es $H(\lambda_1^0, \lambda_2^0) = 0,00663644682$.

En la Figura 2.4 podemos ver la curva original α y las curvas de Bézier aproximadas con 1 y 2 puntos de control intermedios, en color rojo y verde, respectivamente.

Resumimos en la siguiente tabla los errores de las dos aproximaciones:

Nº ptos intermedios	Error producido
1	0.0103479309
2	0.00663644682

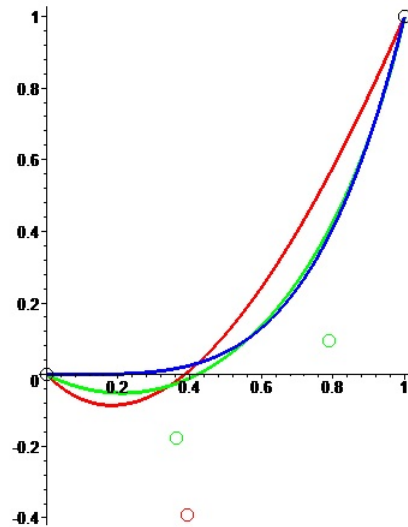


Figura 2.4: Aproximaciones normales a la curva $\alpha(t) = (t, t^4)$

Mostramos a continuación otros ejemplos de aproximaciones normales de una curva α que no es polinómica.

Ejemplo 2.4.3 Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la exponencial negativa $\alpha(t) = (t, e^{-t})$. Queremos aproximar la curva con un punto intermedio. Para ello, tomamos entonces $n = 2$, $\alpha(0) = P_0 = (0, 1)$ y $\alpha(1) = P_2 = (1, e^{-1})$. Elegimos $t_1 = 1/2$ y definimos:

$$P_1(\lambda_1) = \alpha(1/2) + \lambda_1 \mathbf{n}(1/2) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda_1 e^{-1/2}}{\sqrt{1 + e^{-1}}}, e^{-1/2} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + e^{-1}}} \right).$$

La curva de Bézier depende del parámetro λ_1 y viene dada por:

$$\begin{aligned} B(\lambda_1, t) &= P_0 B_0^2(t) + P_1(\lambda_1) B_1^2(t) + P_2 B_2^2(t) = \\ &= \left((2 - 2t)t \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda_1 e^{-1/2}}{\sqrt{1 + e^{-1}}} \right) + t^2, \right. \\ &\quad \left. (1 - t)^2 + (2 - 2t)t \left(e^{-1/2} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + e^{-1}}} \right) + t^2 e^{-1} \right). \end{aligned}$$

Ahora, vamos a calcular la función $H(\lambda_1)$:

$$H(\lambda_1) = \int_0^1 |\alpha(t) - B(\lambda_1, t)|^2 dt \simeq 0,134\lambda_1^2 + 0,017\lambda_1 + 0,001. \quad (2.4.3)$$

Minimizando la expresión (2.4.3), obtenemos

$$\lambda_1^0 \simeq -0,066, \quad P_1(\lambda_1^0) \simeq (0,465, 0,549)$$

y la curva óptima:

$$B(\lambda_1^0, t) \simeq (0,930t + 0,069t^2, 1 - 0,901t + 0,269t^2).$$

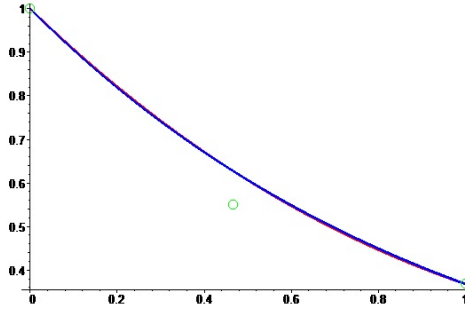


Figura 2.5: Aproximación normal con 1 punto intermedio a la curva $\alpha(t) = (t, e^{-t})$

Y el error producido es $H(\lambda_1^0) = 0,0002300261480$.

Ejemplo 2.4.4 Vamos a aproximar la curva del Ejemplo 2.4.3 pero ahora con dos puntos intermedios. Tomamos $n = 3$, $\alpha(0) = P_0 = (0, 1)$ y $\alpha(1) = P_3 = (1, e^{-1})$. Elegimos $t_1 = 1/3$, $t_2 = 2/3$ y definimos:

$$P_1(\lambda_1) = \alpha(1/3) + \lambda_1 \mathbf{n}(1/3) = \left(\frac{1}{3} + \frac{\lambda_1 e^{-1/3}}{\sqrt{1 + e^{-2/3}}}, e^{-1/3} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + e^{-2/3}}} \right),$$

$$P_2(\lambda_2) = \alpha(2/3) + \lambda_2 \mathbf{n}(2/3) = \left(\frac{2}{3} + \frac{\lambda_2 e^{-2/3}}{\sqrt{1 + e^{-4/3}}}, e^{-2/3} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{1 + e^{-4/3}}} \right).$$

La curva de Bézier depende de los parámetros λ_1 y λ_2 . Viene dada por:

$$\begin{aligned}
B(\lambda_1, \lambda_2, t) &= P_0 B_0^3(t) + P_1(\lambda_1) B_1^3(t) + P_2(\lambda_2) B_2^3(t) + P_3 B_3^3(t) \simeq \\
&\simeq (t + 1,747t\lambda_1 - 3,494t^2\lambda_1 + 1,747t^3\lambda_1 + 1,37t\lambda_2 - 1,37t^3\lambda_2, \\
&\quad 1 - 0,850t + 0,241t^2 - 0,022t^3 + 2,438t\lambda_1 - 4,877t^2\lambda_1 + \\
&\quad + 2,438t^3\lambda_1 + 2,668t^2\lambda_2 - 2,668t^3\lambda_2).
\end{aligned}$$

Ahora, vamos a calcular la función $H(\lambda_1, \lambda_2)$:

$$\begin{aligned}
H(\lambda_1, \lambda_2) &= \int_0^1 |\alpha(t) - B(\lambda_1, \lambda_2, t)|^2 dt \simeq \\
&\simeq 0,365 \cdot 10^{-3} + 0,889 \cdot 10^{-2} \lambda_1 + 0,871 \cdot 10^{-2} \lambda_2 + \\
&\quad 0,085 \lambda_1^2 + 0,085 \lambda_2^2 + 0,127 \lambda_1 \lambda_2.
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Minimizando la expresión (2.4.4), obtenemos $\lambda_1^0 \simeq -0,031$, $\lambda_2^0 \simeq -0,027$ y la curva óptima:

$$B(\lambda_1^0, \lambda_2^0, t) \simeq (0,944t + 0,072t^2 - 0,017t^3, 1 - 0,927t + 0,321t^2 - 0,026t^3).$$

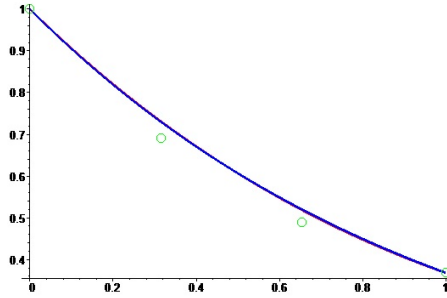


Figura 2.6: Aproximación normal con 2 puntos intermedios a la curva $\alpha(t) = (t, e^{-t})$.

Y el error producido es $H(\lambda_1^0, \lambda_2^0) = 0,0001061806379$.

También hemos calculado las curvas con 3 y 4 puntos intermedios para ver cómo se comporta el error. Así, se ha obtenido:

Nº ptos intermedios	Error producido
1	0.0002300261480
2	0.0001061806379
3	0.00006045249766
4	0.00004356696217

Observación 2.4.5 Se observa empíricamente, que a mayor cantidad de puntos de control intermedios, el error disminuye. Es decir, partiendo de una curva con cualquier expresión y un determinado error a priori, podríamos obtener una curva polinómica de grado $n - 1$, siendo n el número de puntos que hemos necesitado para construir la curva, y un error menor o igual al asumido anteriormente.

Ejemplo 2.4.6 Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva $\alpha(t) = (t, t \log(t))$ (la definimos en $t = 0$ por continuidad, pues $\log(0)$ no existe). Queremos aproximarla con un punto intermedio. Tomamos entonces $n = 2$, $\alpha(0) = P_0 = (0, 0)$ y $\alpha(1) = P_2 = (1, 0)$. Elegimos $t_1 = 1/2$ y definimos:

$$P_1(\lambda_1) = \alpha(1/2) + \lambda_1 \mathbf{n}(1/2) \simeq (0,333 + 0,0981\lambda_1, -0,366 + 0,995\lambda_1).$$

La curva de Bézier depende del parámetro λ_1 y viene dada por:

$$\begin{aligned} B(\lambda_1, t) &= P_0 B_0^2(t) + P_1(\lambda_1) B_1^2(t) + P_2 B_2^2(t) \simeq \\ &\simeq (-0,332t(-2,010 - 0,592\lambda_1 - 1,005t + 0,592t\lambda_1), \\ &\quad 0,663(-1 + t)t(1,104 - 3\lambda_1)). \end{aligned}$$

Ahora, vamos a calcular la función $H(\lambda_1)$:

$$H(\lambda_1) = \int_0^1 |\alpha(t) - B(\lambda_1, t)|^2 dt \simeq 0,0245 + 0,0920\lambda_1 + 0,133\lambda_1^2. \quad (2.4.5)$$

Minimizando la expresión (2.4.5), obtenemos

$$\lambda_1^0 \simeq -0,366, \quad P_1(\lambda_1^0) \simeq (0,297, -0,730)$$

y la curva óptima:

$$B(\lambda_1^0, t) \simeq (-0,0396t(-15,007 - 10,220t), 1,460(-1 + t)t).$$

Y el error producido es $H(\lambda_1^0) = 0,004862420158$.

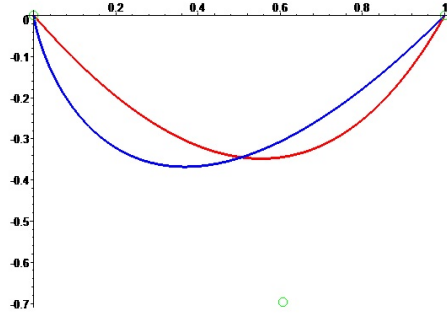


Figura 2.7: Aproximación normal con 1 punto intermedio a la curva $\alpha(t) = (t, t \log(t))$

Ejemplo 2.4.7 Vamos a aproximar la curva del Ejemplo 2.4.6 pero ahora con dos puntos intermedios. Tomamos $n = 3$, $\alpha(0) = P_0 = (0, 0)$ y $\alpha(1) = P_3 = (1, 0)$. Elegimos $t_1 = 1/3$, $t_2 = 2/3$ y definimos:

$$\begin{aligned} P_1(\lambda_1) &= \alpha(1/3) + \lambda_1 \mathbf{n}(1/3) \simeq (0,333 + 0,0981\lambda_1, -0,366 + 0,995\lambda_1), \\ P_2(\lambda_2) &= \alpha(2/3) + \lambda_2 \mathbf{n}(2/3) \simeq (0,667 - 0,511\lambda_2, -0,270 + 0,860\lambda_2). \end{aligned}$$

Ahora, vamos a calcular la función $H(\lambda_1, \lambda_2)$:

$$\begin{aligned} H(\lambda_1, \lambda_2) &= \int_0^1 |\alpha(t) - B(\lambda_1, \lambda_2, t)|^2 dt \simeq \\ &\simeq 0,011 + 0,104\lambda_1\lambda_2 + 0,0357\lambda_2 + 0,0588\lambda_1 + \\ &\quad + 0,086\lambda_1^2 + 0,0857\lambda_2^2. \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Minimizando la expresión (2.4.6), obtenemos

$$\lambda_1^0 \simeq -0,331, \quad \lambda_2^0 \simeq -0,002$$

y la curva óptima:

$$B(\lambda_1^0, \lambda_2^0, t) \simeq (-0,001t(-170,239t + 86,274t^2 - 749,466), \\ 0,001t(2854,411t - 1087,335t^2 - 1767,075)).$$

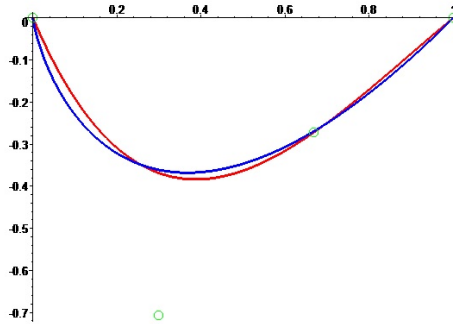


Figura 2.8: Aproximación normal con 2 puntos intermedios a la curva $\alpha(t) = (t, t \log(t))$

Y el error producido es $H(\lambda_1^0, \lambda_2^0) = 0,0005937663342$.

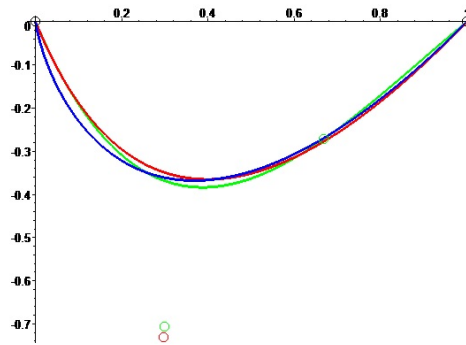


Figura 2.9: Aproximaciones normales a la curva $\alpha(t) = (t, t \log(t))$

Así, se ha obtenido:

N° ptos intermedios	Error producido
1	0.004862420158
2	0.0005937663342

Nota 2.4.8 En la Figura 2.9, la curva roja es la aproximación con un punto intermedio y la curva verde con dos puntos intermedios.

Ejemplo 2.4.9 A pesar de lo señalado en la Observación 2.2.1, este método también tiene algunas dificultades a la hora de interpolar curvas con muchos cambios de curvatura. Sea ahora, $\alpha(t) = (t, \text{sen}(2\pi t))$ con $t \in [0, 1]$. Vamos a realizar la interpolación con un punto intermedio, $n = 2$, $\alpha(0) = P_0 = (1, 0)$ y $\alpha(1) = P_2 = (1, 0)$. Elegimos $t_1 = 1/2$ y definimos:

$$P_1(\lambda_1) = \alpha(1/2) + \lambda_1 \mathbf{n}(1/2) = \left(\frac{1}{2} + \frac{2\pi\lambda_1}{\sqrt{1+4\pi^2}}, \frac{\lambda_1}{\sqrt{1+4\pi^2}} \right).$$

La curva de Bézier depende del parámetro λ_1 y viene dada por:

$$\begin{aligned} B(\lambda_1, t) &= P_0 B_0^2(t) + P_1(\lambda_1) B_1^2(t) + P_2 B_2^2(t) = \\ &= \left((2-2t)t \left(\frac{1}{2} + \frac{2\pi\lambda_1}{\sqrt{1+4\pi^2}} \right) + t^2, (2-2t)t \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{1+4\pi^2}} \right) \right). \end{aligned}$$

Ahora, vamos a calcular la función $H(\lambda_1)$:

$$H(\lambda_1) = \int_0^1 |\alpha(t) - B(\lambda_1, t)|^2 dt = \frac{1}{2} + \frac{2}{15} \lambda_1^2. \quad (2.4.7)$$

Minimizando la expresión (2.4.7), obtenemos $\lambda_1^0 = 0$, $P_1(\lambda_1^0) = (\frac{1}{2}, 0)$ y la curva óptima:

$$B(\lambda_1^0, t) = (t, 0).$$

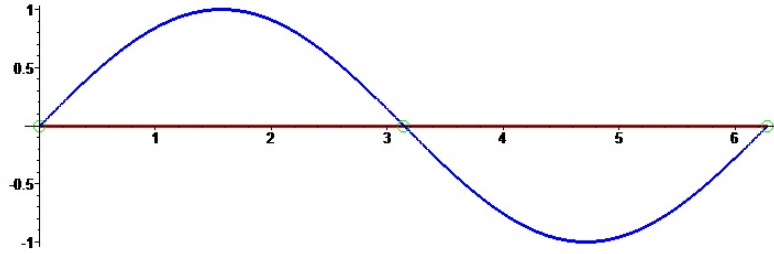


Figura 2.10: Aproximación normal con 1 punto intermedio a la curva $\alpha(t) = (t, \sin(2\pi t))$

Esto se debe a que las áreas por encima y por debajo del eje de abscisas se equilibran.

Y el error producido es 0,5.

Vemos que el punto óptimo es $(1/2, 0)$, dado que nuestro punto de control está tomado justo para $t = 1/2$. Y la curva de Bézier de tres puntos alineados es el segmento que los une, tal y como indicamos en la primera propiedad de las curvas de Bézier.

Para poder solucionar este problema, necesitamos dividir la curva justo en el punto de cambio de curvatura.

Para ello, vamos a reparametrizar la curva en dos tramos de forma independientes, aunque se podría generar el segundo tramo a partir del primero por la Propiedad 5 de las curvas de Bézier (invarianza afín).

La curva reparametrizada en los dos tramos queda:

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &= (\pi t, \sin(\pi t)), \\ \alpha_2(t) &= (\pi t + \pi, \sin(\pi t + \pi))\end{aligned}$$

y en ambos tramos $t \in [0, 1]$, dado que lo necesitamos al trabajar con curvas de Bézier.

Sean los puntos

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 0), \\ P_1 &= (\pi/2, 1 + \lambda_1), \\ P_2 &= (\pi, 0) = Q_0, \\ Q_1 &= (3\pi/2, -1 + \lambda_2), \\ Q_2 &= (2\pi, 0). \end{aligned}$$

En este caso vamos a trabajar en cada tramo con un punto de control intermedio. Como podemos apreciar, $P_2 = Q_0$; esto es necesario dado que es precisamente el punto donde dividimos la curva y obtenemos continuidad.

Realizando el mismo proceso visto anteriormente, con $t = 1/2$ en ambos tramos, obtenemos:

$$\begin{aligned} B_1(\lambda_1, t) &= \left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi t^2}{2}, -t(1-t)(1 + \lambda_1) \right), t \in [0, 1], \\ B_2(\lambda_2, t) &= \left(\pi - \frac{\pi t}{2} + \frac{3\pi t^2}{2}, -t(1-t)(1 + \lambda_2) \right), t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Alcanzan sus valores óptimos en:

$$\lambda_1^0 = -\frac{\pi^3 - 120}{\pi^3} \text{ y } \lambda_2^0 = \frac{\pi^3 - 120}{\pi^3}.$$

Entonces, las curvas de Bézier óptimas son:

$$\begin{aligned} B_1(\lambda_1^0, t) &= \left(\pi t, -120 \frac{t(-1+t)}{\pi^3} \right), t \in [0, 1], \\ B_2(\lambda_2^0, t) &= \left(\pi t + \pi, 120 \frac{t(-1+t)}{\pi^3} \right), t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

En la Figura 2.11 podemos ver la representación de la curva compuesta por $B_1(\lambda_1^0, t)$ y $B_2(\lambda_2^0, t)$.

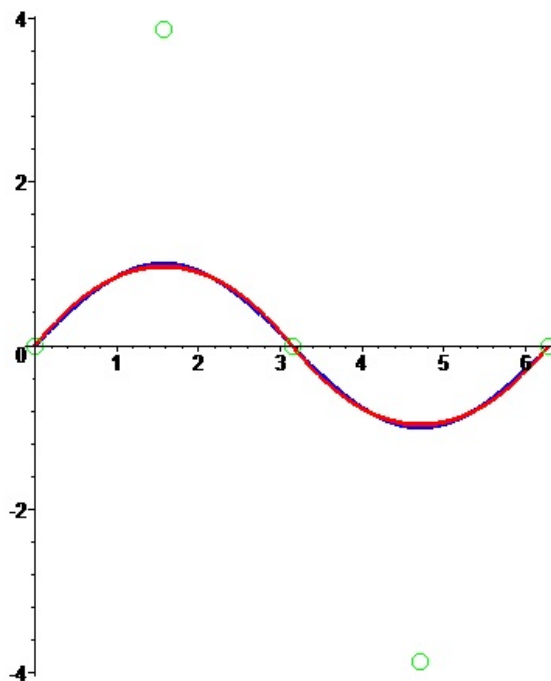


Figura 2.11: Aproximación normal dividida en dos tramos a la curva $\alpha(t) = (t, \text{sen}(2\pi t))$

El error es la suma de los dos errores generados por las dos aproximaciones: 0,001444986389.

Para terminar este capítulo, vamos a presentar un ejemplo de aproximación de una superficie.

Ejemplo 2.4.10 (Helicoide) Sea el helicoide la superficie a la cual queremos realizar una aproximación:

$$S(u, v) = ((2v - 1)\cos(\pi u), (2v - 1)\sen(\pi u), \pi u), \quad u, v \in [0, 1].$$

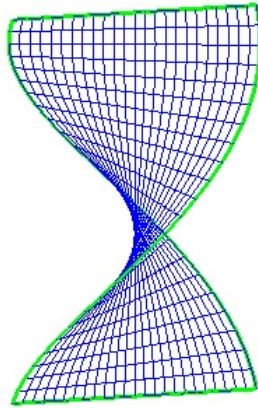


Figura 2.12: Helicoide

En primer lugar, vamos a aproximar la frontera del helicoide (curvas verdes de la Figura 2.12) mediante cuatro curvas independientes con dos puntos de control intermedios ($t = 1/3$ y $t = 2/3$) para cada una de ellas. Luego generaremos la superficie aproximada con cuatro puntos de control internos y esta superficie estará atada a su frontera.

Primera curva

Sean la recta

$$S(0, t) = (2t - 1, 0, 0) \tag{2.4.8}$$

y los puntos extremos

$$P_{00} = S(0, 0) = (-1, 0, 0),$$

$$P_{03} = S(0, 1) = (1, 0, 0).$$

Consideramos los siguientes puntos:

$$P_{01} = S(0, 1/3) = (-1/3, 0, 0),$$

$$P_{02} = S(0, 2/3) = (1/3, 0, 0).$$

Como los puntos P_{00}, \dots, P_{03} están alineados, la curva de Bézier que generan es precisamente el segmento que los une (propiedad 1 de las curvas de Bézier), es decir, la propia recta dada por (2.4.8):

$$B_1(t) = (2t - 1, 0, 0).$$

Segunda curva

Sean la hélice

$$S(t, 0) = (-\cos(\pi t), -\operatorname{sen}(\pi t), \pi t) \quad (2.4.9)$$

y los puntos extremos

$$P_{00} = S(0, 0) = (-1, 0, 0),$$

$$P_{30} = S(1, 0) = (1, 0, \pi).$$

Definamos los siguientes puntos:

$$P_{10} = S(1/3, 0) + \lambda_{10}\mathbf{n}(1/3) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda_{10}, -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\lambda_{10}\sqrt{3}, \frac{\pi}{3} \right),$$

$$P_{20} = S(2/3, 0) + \lambda_{20}\mathbf{n}(2/3) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda_{20}, -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\lambda_{20}\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3} \right),$$

donde \mathbf{n} denota ahora la normal principal de la hélice. Observemos que el método de aproximación normal de curvas planas puede extenderse de manera natural a las curvas alabeadas. Entonces, si buscamos los valores óptimos de estos puntos, mediante el procedimiento habitual, obtenemos:

$$\lambda_{10}^0 = \lambda_{20}^0 = \frac{1}{11} \frac{-1680 + 140\pi^2 + 13\pi^4 - 280\sqrt{3}\pi}{\pi^4}.$$

Así, la curva de Bézier viene dada por

$$B_2(t) \simeq (-1 + 0,722t + 3,833t^2 - 2,555t^3, -3,945t + 3,945t^2, 3,142t)$$

y su error es 0,004851010404.

Tercera curva

Sean la recta

$$S(1, t) = (-2t + 1, 0, \pi) \quad (2.4.10)$$

y los puntos extremos

$$\begin{aligned} P_{30} &= S(1, 0) = (1, 0, \pi), \\ P_{33} &= S(1, 1) = (-1, 0, \pi). \end{aligned}$$

Consideremos los siguientes puntos:

$$\begin{aligned} P_{31} &= S(1, 1/3) = (1/3, 0, \pi), \\ P_{32} &= S(1, 2/3) = (-1/3, 0, \pi). \end{aligned}$$

Como los puntos P_{30}, \dots, P_{33} están alineados, la curva de Bézier que generan es precisamente el segmento que los une (propiedad 1 de las curvas de Bézier), es decir, la propia recta dada por (2.4.10):

$$B_3(t) = (-2t + 1, 0, \pi).$$

Cuarta curva

Sean la hélice

$$S(t, 1) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t), \pi t) \quad (2.4.11)$$

y los puntos extremos

$$\begin{aligned} P_{03} &= S(0, 1) = (1, 0, 0), \\ P_{33} &= S(1, 1) = (-1, 0, \pi). \end{aligned}$$

Definamos los siguientes puntos:

$$\begin{aligned} P_{13} &= S(1/3, 1) + \lambda_{13} \mathbf{n}(1/3) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lambda_{13}, \frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \lambda_{13} \sqrt{3}, \frac{\pi}{3} \right), \\ P_{23} &= S(2/3, 1) + \lambda_{23} \mathbf{n}(2/3) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lambda_{23}, \frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \lambda_{23} \sqrt{3}, \frac{2\pi}{3} \right), \end{aligned}$$

donde, de nuevo, \mathbf{n} denota la normal principal de la hélice. Razonando como en el cálculo de la segunda curva, buscamos los valores óptimos de estos puntos, obteniendo:

$$\begin{aligned} \lambda_{13}^0 &= \frac{1}{11} \frac{-1680 + 140\pi^2 + 13\pi^4 - 280\sqrt{3}\pi}{\pi^4}, \\ \lambda_{23}^0 &= -\frac{1}{11} \frac{1680 - 140\pi^2 - 13\pi^4 + 280\sqrt{3}\pi}{\pi^4}. \end{aligned}$$

Entonces la curva de Bézier viene dada por

$$B_4(t) \simeq (1 - 0,722t - 3,833t^2 + 2,555t^3, 3,945t - 3,945t^2, 3,142t)$$

y su error es 0,004851009158.

En la Figura 2.13 mostramos la representación gráfica de las curvas que forman la frontera del helicoides y las aproximaciones obtenidas $B_1(t)$, $B_2(t)$, $B_3(t)$ y $B_4(t)$.

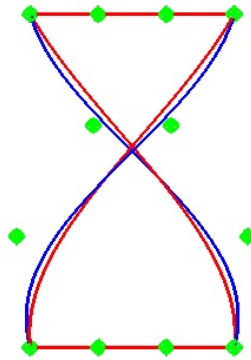


Figura 2.13: Aproximación de la frontera del helicoides

Superficie aproximada

Antes de empezar con la definición de la superficie, estos son todos los puntos ya fijados:

$$\begin{aligned} P_{00} &= (-1, 0, 0), & P_{30} &= (1, 0, \pi), \\ P_{01} &= (-1/3, 0, 0), & P_{31} &= (1/3, 0, \pi), \\ P_{02} &= (1/3, 0, 0), & P_{32} &= (-1/3, 0, \pi), \\ P_{03} &= (1, 0, 0), & P_{33} &= (-1, 0, \pi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{10} &= \left(\frac{1}{11} \frac{\pi^4 - 840 + 70\pi^2 + 140\sqrt{3}\pi}{\pi^4}, \frac{1}{11} \frac{\sqrt{3}(\pi^4 - 840 + 70\pi^2 - 140\sqrt{3}\pi)}{\pi^4}, \frac{\pi}{3} \right), \\
P_{13} &= \left(\frac{1}{11} \frac{-\pi^4 + 840 - 70\pi^2 + 140\sqrt{3}\pi}{\pi^4}, \frac{1}{11} \frac{\sqrt{3}(-\pi^4 + 840 - 70\pi^2 + 140\sqrt{3}\pi)}{\pi^4}, \frac{\pi}{3} \right), \\
P_{20} &= \left(\frac{1}{11} \frac{-\pi^4 + 840 - 70\pi^2 + 140\sqrt{3}\pi}{\pi^4}, \frac{1}{11} \frac{\sqrt{3}(\pi^4 - 840 + 70\pi^2 - 140\sqrt{3}\pi)}{\pi^4}, \frac{2\pi}{3} \right), \\
P_{23} &= \left(-\frac{1}{11} \frac{-\pi^4 + 840 - 70\pi^2 + 140\sqrt{3}\pi}{\pi^4}, \frac{1}{11} \frac{\sqrt{3}(-\pi^4 + 840 - 70\pi^2 + 140\sqrt{3}\pi)}{\pi^4}, \frac{2\pi}{3} \right),
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Los puntos de (2.4.12) ya están optimizados al sustituir los parámetros óptimos para las aproximaciones de las curvas segunda y cuarta de la frontera.

Ahora, tomamos los siguientes 4 puntos de la superficie

$$S(1/3, 1/3), \quad S(1/3, 2/3), \quad S(2/3, 1/3), \quad S(2/3, 2/3).$$

y les aplicamos las siguientes variaciones normales:

$$\begin{aligned}
P_{11}(\lambda_{11}) &= S(1/3, 1/3) + \lambda_{11} \mathbf{N}(1/3, 1/3) = \\
&= \left(-\frac{1}{6} - \frac{3}{20} \lambda_{11} \sqrt{30}, -\frac{1}{6} \sqrt{3} + \frac{3}{20} \lambda_{11} \sqrt{10}, \frac{\pi}{3} + \frac{1}{10} \lambda_{11} \sqrt{10} \right), \\
P_{12}(\lambda_{12}) &= S(1/3, 2/3) + \lambda_{12} \mathbf{N}(1/3, 2/3) = \\
&= \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{20} \lambda_{12} \sqrt{30}, \frac{1}{6} \sqrt{3} + \frac{3}{20} \lambda_{12} \sqrt{10}, \frac{\pi}{3} - \frac{1}{10} \lambda_{12} \sqrt{10} \right), \\
P_{21}(\lambda_{21}) &= S(2/3, 1/3) + \lambda_{21} \mathbf{N}(2/3, 1/3) = \\
&= \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{20} \lambda_{21} \sqrt{30}, -\frac{1}{6} \sqrt{3} - \frac{3}{20} \lambda_{21} \sqrt{10}, \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{10} \lambda_{21} \sqrt{10} \right), \\
P_{22}(\lambda_{22}) &= S(2/3, 2/3) + \lambda_{22} \mathbf{N}(2/3, 2/3) = \\
&= \left(-\frac{1}{6} - \frac{3}{20} \lambda_{22} \sqrt{30}, \frac{1}{6} \sqrt{3} - \frac{3}{20} \lambda_{22} \sqrt{10}, \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{10} \lambda_{22} \sqrt{10} \right).
\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

Buscamos los valores óptimos de λ_{11} , λ_{12} , λ_{21} y λ_{22} de (2.4.13) que hagan mínimo el volúmen que se genera entre las dos superficies. Y obtenemos:

$$\begin{aligned}\lambda_{11}^0 &= \lambda_{22}^0 = \\ &= \frac{\sqrt{10} (12853680\sqrt{3} - 287560\pi - 1071140\sqrt{3}\pi^2 - 11969\sqrt{3}\pi^4 + 2376\pi^5)}{65549\pi^4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{12}^0 &= \lambda_{21}^0 = \\ &= -\frac{\sqrt{10} (36776880\sqrt{3} - 664440\pi - 3064740\sqrt{3}\pi^2 - 33783\sqrt{3}\pi^4 + 8426\pi^5)}{196647\pi^4}.\end{aligned}$$

Y la superficie óptima:

$$\begin{aligned}BS(\lambda_{11}^0, \lambda_{12}^0, \lambda_{21}^0, \lambda_{22}^0, u, v) &\simeq (-7,1uv + 3,833u^2 - 1 - 2,555u^3 + 36,973u^2v^3 - \\ &- 54,954u^2v^2 + 10,314u^2v - 12,325uv^3 + 17,98uv^2 + 36,973u^3v^2 - 7,214u^3v - \\ &- 24,649u^3v^3 + 0,722u + 2v, -0,140 \cdot 10^{-8}u(-1 + u)(-2012549867uv + \\ &+ 2012549867uv^2 - 2818096317 + 9251702528v + 5218469919v^3 - \\ &- 8833979807v^2), \quad 4,082u^2v^3 + 7,429u^2v^2 - 11,511u^2v + 3,142u + 1,606uv^2 - \\ &- 9,035u^3v^2 - 4,082uv^3 + 2,476uv + 9,035u^3v).\end{aligned}$$

En la Figura 2.14 los puntos verdes son los puntos de control de las 4 curvas y los puntos azules son los puntos de control de la superficie. También podemos ver representados el helicoides de partida y la superficie de Bézier que lo aproxima, con un error de 0,006712368901.

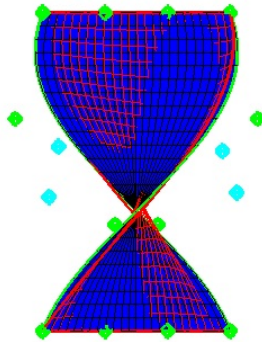


Figura 2.14: Aproximación del helicoides

En la Figura 2.15 podemos apreciar el proceso realizado partiendo de la superficie original hasta obtener la superficie de Bézier aproximada mediante el método de aproximación normal.

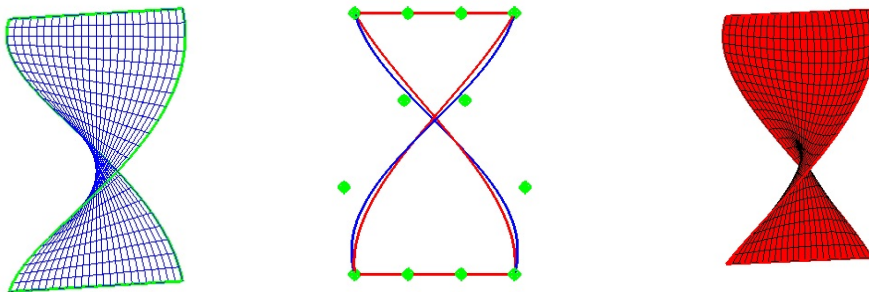


Figura 2.15: Aproximación normal al helicoides

Capítulo 3

Aproximación aerodinámica

3.1. Introducción

La idea principal de este método es modificar la curva del mismo modo que en el Capítulo 2, pero ahora moveremos los puntos de control a través de sus normales para mejorar el rendimiento aerodinámico.

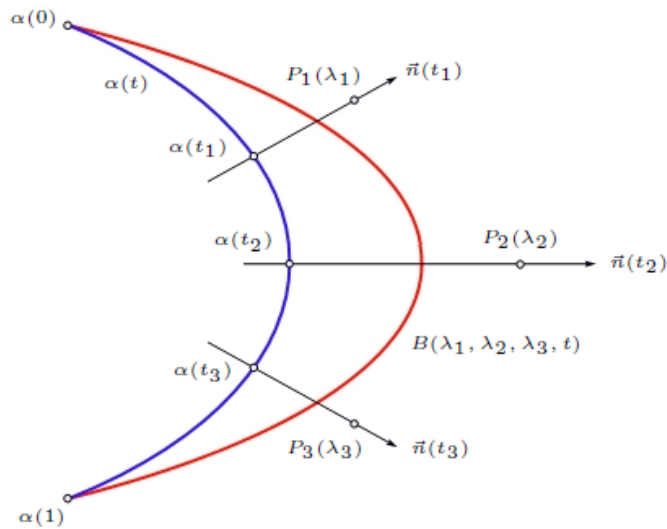


Figura 3.1: Modificación de los puntos de control

Observemos que, en general, sería necesario fijar una cota superior para la deformación de la curva ya que, en caso contrario, ésta tendería a infinito. Las siguientes observaciones físicas han sido obtenidas de [5].

Motivación

Supongamos un flujo de aire continuo y en una misma dirección. Cuando “choca” con un cuerpo se ejerce una fuerza en la misma dirección del aire. Esta fuerza depende de la superficie del cuerpo y la denotaremos como R . Por ejemplo, cuando sacamos la mano mientras vamos en un coche, observamos que, a medida que inclinamos la mano y la colocamos totalmente paralela a la carretera, la fuerza es mucho menor que cuando es perpendicular.

En general, la fuerza R actuando sobre el cuerpo se descompone en una componente D (drag) en la misma dirección del aire y una componente L (lift) en la dirección normal a la superficie, tal y como puede verse en la Figura 3.2:

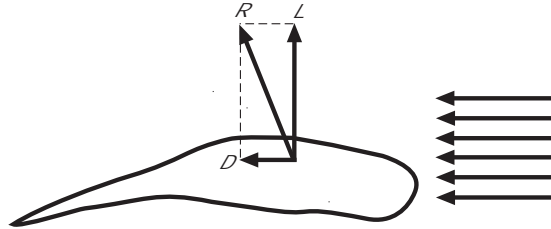


Figura 3.2: Descomposición de la fuerza R que actúa sobre un cuerpo

Sea p la presión del aire sobre una porción mínima de área dA y τ la fuerza de fricción por unidad de área. La fuerza pdA actúa en la normal a la superficie, mientras que la fuerza de fricción se ejerce tangencialmente.

Nuestro objetivo es minimizar la fuerza de presión que viene determinada por la ecuación

$$F_p = \int_A \cos \theta p dA,$$

siendo θ el ángulo formado por el vector horizontal (que representa la dirección del aire) y el vector normal de la curva.

Físicamente no hay una forma explícita de calcular la resistencia al aire; se prueba mediante experimentos.

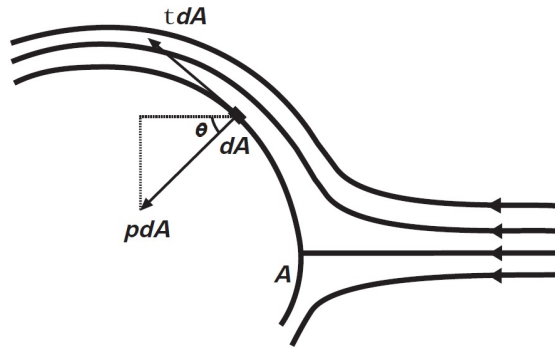


Figura 3.3: Descomposición de la fuerza R que actúa sobre un cuerpo

En la Figura 3.4, vemos cómo a medida que variamos la inclinación del segmento, la fuerza de presión disminuye hasta el último caso, en el que $F_p = 0$, y podemos afirmar que la fuerza de presión se anula. Entonces, queda verificado que el ángulo θ es significativo al evaluar la fuerza de presión del aire sobre una curva o superficie. A medida que el valor absoluto del $\cos\theta$ disminuye, la fuerza de presión es menor. Para evitar problemas con el signo, consideraremos de ahora en adelante $\cos^2\theta$.

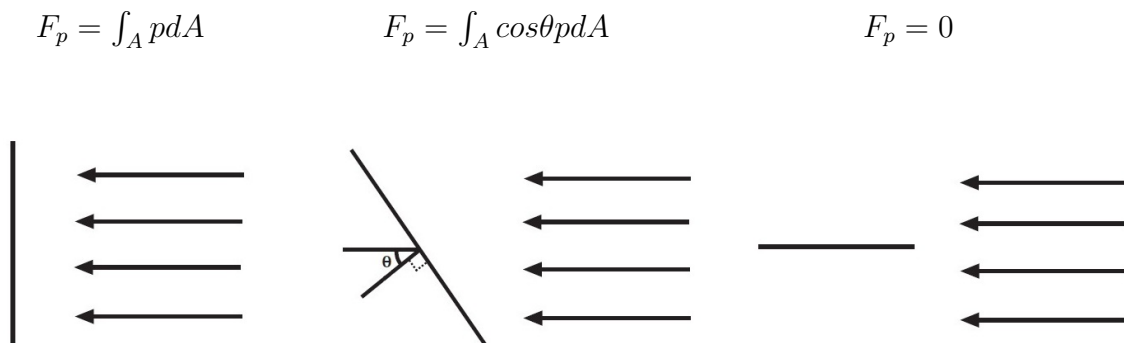


Figura 3.4: Variación de la fuerza de presión en función del ángulo θ

3.2. Método para curvas planas

Usando como base el método descrito en el capítulo anterior, nuestro objetivo es minimizar el $\cos^2\theta$.

Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva. En el caso que en $\alpha(t)$ no esté parametrizada en $[0, 1]$, la reparametrizamos para que esté definida en ese intervalo. Consideremos también el vector del viento \mathbf{v} , que tomaremos unitario (se detallará claramente en los diferentes casos prácticos).

En primer lugar, al igual que el método introducido en el Capítulo 2, vamos a realizar una partición de n intervalos de t

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$$

y vamos a redefinir los puntos de control intermedios:

$$\begin{aligned} P_0 &= \alpha(0), \\ P_i(\lambda_i) &= \alpha(t_i) + \lambda_i \mathbf{n}_\alpha(t_i), \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ P_n &= \alpha(1), \end{aligned}$$

siendo $\mathbf{n}_\alpha(t)$ el vector normal de la curva $\alpha(t)$.

Se construye la curva de Bézier:

$$B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t) = P_0 B_0^n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} P_i B_i^n(t) + P_n B_n^n(t)$$

siendo $B_k^n(t)$ los polinomios de Bernstein (véase el Capítulo 1).

Se determina el vector normal a $B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)$, que denotaremos por $\mathbf{n}_B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)$. Llamaremos $\theta(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)$ al ángulo que forma este vector normal con el vector del viento \mathbf{v} . Calculamos

$$\cos^2 \theta(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t) = (\mathbf{n}_B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t) \cdot \mathbf{v})^2,$$

pues tanto \mathbf{n}_B como \mathbf{v} son vectores unitarios.

Presentamos a continuación dos posibilidades para imponer la mejora del comportamiento aerodinámico de la curva α .

Posibilidad 1

Construimos la función

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = \int_0^1 \cos^2 \theta(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t) dt,$$

que representa la evaluación del $\cos^2 \theta$ en todos los puntos de la curva de Bézier.

Nuestro objetivo será minimizar esta función para obtener los valores óptimos de $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, siendo éstos los que hacen que la curva sea “más” aerodinámica.

Veamos un ejemplo para ilustrar este método:

Ejemplo 3.2.1 Sean $\alpha(t) = (0, 1 - t)$, $t \in [0, 1]$ el segmento vertical que une los puntos $(0, 1)$ y $(0, 0)$ y $\mathbf{v} = (-1, 0)$. Consideremos un punto de control intermedio. Entonces $n = 2$ y $t_1 = 1/2$. Por tanto, los puntos quedan:

$$\begin{aligned} P_0 &= \alpha(0) = (0, 1), \\ P_1(\lambda_1) &= \alpha(t_1) + \lambda_1 \mathbf{n}_\alpha(t_1) = (\lambda_1, 1/2), \\ P_2 &= \alpha(1) = (0, 0). \end{aligned}$$

Construimos ahora la curva de Bézier:

$$\begin{aligned} B(\lambda_1, t) &= P_0 B_0^2(t) + P_1(\lambda_1) B_1^2(t) + P_2 B_2^2(t) = \\ &= (2\lambda_1 t - 2\lambda_1 t^2, 1 - t). \end{aligned}$$

Calculamos el $\cos^2 \theta$:

$$\cos^2 \theta(\lambda_1, t) = (\mathbf{n}_B(\lambda_1, t) \cdot \mathbf{v})^2 = \frac{1}{16\lambda_1^2 t^2 - 16\lambda_1^2 t + 4\lambda_1^2 + 1}.$$

Ahora tendremos que calcular la función $F(\lambda_1)$:

$$F(\lambda_1) = \int_0^1 \cos^2 \theta(\lambda_1, t) dt = \frac{\arctan(2\lambda_1)}{\lambda_1}. \quad (3.2.1)$$

Para minimizar esta función, planteamos:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = -\frac{-2\lambda_1 + 4 \arctan(2\lambda_1)\lambda_1^2 + \arctan(2\lambda_1)}{(4\lambda_1^2 + 1)\lambda_1^2} = 0. \quad (3.2.2)$$

De la ecuación (3.2.2) obtenemos $\lambda_1 = 0$, pero esto es el máximo de la función. Esto tiene sentido, pues cuando el segmento no se deforma presenta más resistencia al aire. No obstante, podemos analizar directamente la función $F(\lambda_1)$. Resulta obvio que $F(\lambda_1)$ alcanza el mínimo cuando $\lambda_1^0 = \pm\infty$ y $F(\lambda_1^0) = 0$, dado que el numerador en la expresión (3.2.1) está acotado entre $[-\pi/2, \pi/2]$ y el denominador tiende a $\pm\infty$ con λ_1 .

En la Figura 3.5 puede verse la mejora aerodinámica para $\lambda_1^0 = 1$:

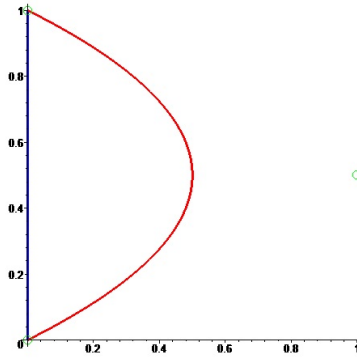


Figura 3.5: Optimización aerodinámica del segmento vertical con 1 punto de control intermedio

Ejemplo 3.2.2 Consideremos el Ejemplo 3.2.1, pero con 2 puntos de control intermedios. Entonces $n = 3$, $t_1 = 1/3$ y $t_2 = 2/3$. Por tanto, los puntos quedan:

$$\begin{aligned} P_0 &= \alpha(0) = (0, 1), \\ P_1(\lambda_1) &= \alpha(t_1) + \lambda_1 \mathbf{n}_\alpha(t_1) = (\lambda_1, 2/3), \\ P_2(\lambda_2) &= \alpha(t_2) + \lambda_2 \mathbf{n}_\alpha(t_2) = (\lambda_2, 1/3), \\ P_3 &= \alpha(1) = (0, 0). \end{aligned}$$

Construimos ahora la curva de Bézier:

$$\begin{aligned} B(\lambda_1, \lambda_2, t) &= P_0 B_0^3(t) + \sum_{i=1}^2 P_i B_i^3(t) + P_3 B_3^3(t) = \\ &= (3\lambda_1 t - 6\lambda_1 t^2 + 3\lambda_1 t^3 + 3t^2 \lambda_2 - 3t^3 \lambda_2, 1 - t). \end{aligned}$$

Calculamos el $\cos^2 \theta$:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, t) &= (\mathbf{n}_B(\lambda_1, \lambda_2, t) \cdot \mathbf{v})^2 = \\ &= 1/(-216\lambda_1^2 t^3 + 198\lambda_1^2 t^2 + 9\lambda_1^2 + 81\lambda_1^2 t^4 + 81t^4 \lambda_2^2 + 324\lambda_1 t^3 \lambda_2 \\ &\quad - 162\lambda_1 t^4 \lambda_2 + 36\lambda_1 t \lambda_2 - 198\lambda_1 t^2 \lambda_2 + 36t^2 \lambda_2^2 - 72\lambda_1^2 t - 108t^3 \lambda_2^2 + 1). \end{aligned}$$

Ahora tendríamos que calcular la función $F(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^1 \cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, t) dt$, pero esta integral no es sencilla de obtener, ni siquiera usando un programa de cálculo simbólico.

Entonces, proponemos una nueva posibilidad para el método:

Posibilidad 2

En lugar de definir $F(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$, buscamos una función alternativa que represente la evaluación del $\cos^2 \theta$ pero computacionalmente más sencilla.

Proponemos

$$\tilde{F}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \cos^2 \theta(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t_i),$$

es decir, discretizamos el problema evaluando el $\cos^2 \theta$ sólo en los puntos de control intermedios (los puntos extremos no dan información relevante). El objetivo sigue siendo el mismo: minimizar la función $\tilde{F}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ para obtener los valores óptimos de $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$.

Ejemplo 3.2.3 Volviendo al Ejemplo 3.2.2 vamos a aplicar la Posibilidad 2. Para ello, calculamos:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, t = 1/3) &= \frac{1}{1 + \lambda_2^2}, \\ \cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, t = 2/3) &= \frac{1}{1 + \lambda_1^2}, \end{aligned}$$

$$\tilde{F}(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1}^2 \cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, t_i) = \frac{1}{1 + \lambda_1^2} + \frac{1}{1 + \lambda_2^2}.$$

Vemos que $\tilde{F}(\lambda_1, \lambda_2)$ se minimiza cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm\infty$. Si tuviésemos una cota superior para ambos parámetro, el mínimo se alcanzaría en esa cota.

Podemos considerar el caso simétrico ($\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$):

$$\tilde{F}(\lambda) = \frac{2}{1 + \lambda^2}.$$

Al igual que antes se alcanza el mínimo cuando $\lambda = \pm\infty$. Por lo tanto, cuanto más “alarguemos” la figura, más aerodinámica se volverá, tal y como nos indica nuestra intuición.

En la Figura 3.6 puede verse la mejora aerodinámica para $\lambda^0 = 1$:

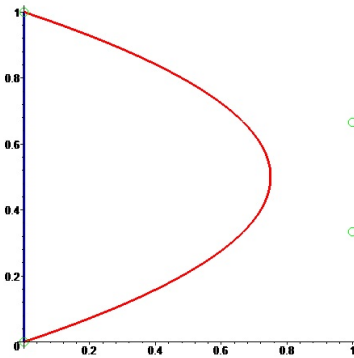


Figura 3.6: Optimización aerodinámica del segmento vertical con 2 puntos de control

Nota 3.2.4 La Posibilidad 2 del método presenta un inconveniente: a la hora de discretizar el problema sólo evaluamos la “aerodinámica” en los puntos de control intermedios. Puede ocurrir que en dichos puntos el $\cos^2 \theta$ sea menor, pero que en el resto de puntos de la curva ese ángulo no sea mínimo (véase el Ejemplo 3.3.6, que presentaremos en la siguiente sección).

¿Qué pasaría si aplicásemos la Posibilidad 2 al Ejemplo 3.2.2?

Pues al tener sólo un punto de control intermedio tendríamos que evaluar el $\cos^2 \theta$ cuando $t = 1/2$:

$$\cos^2 \theta(\lambda_1, t = 1/2) = 1.$$

Entonces no aporta ninguna información, pues no podemos modificar λ_1 . Esto ocurre pues en ese punto el vector normal de la curva tiene la misma dirección que el vector del viento.

3.3. Ejemplos

Una vez presentadas las dos posibilidades del método, veamos diferentes ejemplos que podrían resultar interesantes.

Ejemplo 3.3.1 Consideremos el Ejemplo 3.2.3 pero vamos a realizar el estudio con 3 puntos de control intermedios. Así, $n = 4$, $t_1 = 1/4$, $t_2 = 1/2$ y $t_3 = 3/4$. Por tanto, los puntos quedan:

$$\begin{aligned} P_0 &= \alpha(0) = (0, 1), \\ P_1(\lambda_1) &= \alpha(t_1) + \lambda_1 \mathbf{n}_\alpha(t_1) = (\lambda_1, 3/4), \\ P_2(\lambda_2) &= \alpha(t_2) + \lambda_2 \mathbf{n}_\alpha(t_2) = (\lambda_2, 1/2), \\ P_3(\lambda_3) &= \alpha(t_3) + \lambda_3 \mathbf{n}_\alpha(t_3) = (\lambda_3, 1/4), \\ P_4 &= \alpha(1) = (0, 0). \end{aligned}$$

Construimos ahora la curva de Bézier:

$$\begin{aligned} B(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, t) &= P_0 B_0^4(t) + \sum_{i=1}^3 P_i(\lambda_i) B_i^4(t) + P_4 B_4^4(t) = \\ &= (4t\lambda_1 - 12t^2\lambda_1 + 12t^3\lambda_1 - 4t^4\lambda_1 + 6t^2\lambda_2 - 12t^3\lambda_2 + 6t^4\lambda_2 + 4t^3\lambda_3 - 4t^4\lambda_3, 1 - t). \end{aligned}$$

El $\cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, t)$ tiene una expresión demasiado larga, al igual que $F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Entonces, vamos a aplicar la Posibilidad 2. Veamos cuáles son las discretizaciones del coseno:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, t = 1/4) &= \frac{1}{1 + \frac{81}{64}\lambda_2^2 + \frac{9}{8}\lambda_2\lambda_3 + \frac{1}{4}\lambda_3^2}, \\ \cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, t = 1/2) &= \frac{1}{1 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3^2 + \lambda_1^2}, \\ \cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, t = 3/4) &= \frac{1}{1 + \frac{81}{64}\lambda_2^2 + \frac{9}{8}\lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{4}\lambda_1^2}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \sum_{i=1}^3 \cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, t_i) = \frac{1}{1 + \frac{81}{64}\lambda_2^2 + \frac{9}{8}\lambda_2\lambda_3 + \frac{1}{4}\lambda_3^2} + \\ &+ \frac{1}{1 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3^2 + \lambda_1^2} + \frac{1}{1 + \frac{81}{64}\lambda_2^2 + \frac{9}{8}\lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{4}\lambda_1^2}. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Vamos a suponer que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1]$ para optimizar la curva, dado que si no el resultado tendería a $\pm\infty$. Los valores óptimos son:

$$\lambda_1^0 = 0, \lambda_2^0 = 1 \text{ y } \lambda_3^0 = 1$$

ó

$$\lambda_1^0 = 1, \lambda_2^0 = 1 \text{ y } \lambda_3^0 = 0,$$

por la simetría de la curva. El resultado puede observarse en la Figura 3.7:

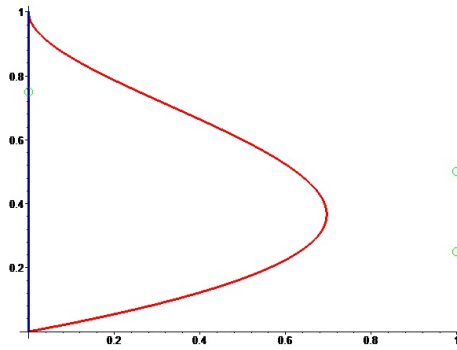


Figura 3.7: Optimización aerodinámica del segmento vertical con 3 puntos de control intermedios

Nota 3.3.2 Para la optimización del Ejemplo 3.3.1 hemos minimizado la expresión (3.3.1), con los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1]$. Para ello, hemos utilizado los servidores de NEOS Server. Éstos nos han proporcionado los valores óptimos y el menor valor numérico de $\tilde{F}(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0)$. En las optimizaciones más complejas volveremos a utilizar estos servidores.

Ejemplo 3.3.3 Sean $\alpha(t) = (\sin(\pi t), \cos(\pi t))$, $t \in [0, 1]$, la semicircunferencia que une los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$, y $\mathbf{v} = (-1, 0)$. Consideremos un punto de control intermedio. Entonces $n = 2$ y $t_1 = 1/2$. Por tanto, los puntos quedan:

$$\begin{aligned} P_0 &= \alpha(0) = (0, -1), \\ P_1(\lambda_1) &= \alpha(t_1) + \lambda_1 \mathbf{n}_\alpha(t_1) = (1 + \lambda_1, 0), \\ P_2 &= \alpha(1) = (0, 1). \end{aligned}$$

Construimos ahora la curva de Bézier:

$$\begin{aligned} B(\lambda_1, t) &= P_0 B_0^2(t) + P_1(\lambda_1) B_1^2(t) + P_2 B_2^2(t) = \\ &= (-2(-1+t)t(1+\lambda_1), -1+2t). \end{aligned}$$

Calculamos el $\cos^2 \theta$:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta(\lambda_1, t) &= (\mathbf{n}_B(\lambda_1, t) \cdot \mathbf{v})^2 = \\ &= \frac{1}{4t^2 + 8t^2\lambda_1 - 4t - 8t\lambda_1 + 4t^2\lambda_1^2 - 4t\lambda_1^2 + 2 + 2\lambda_1 + \lambda_1^2}. \end{aligned}$$

Ahora tendremos que calcular la función $F(\lambda_1)$:

$$F(\lambda_1) = \int_0^1 \cos^2 \theta(\lambda_1, t) dt = 2 \frac{\arctan(1 + \lambda_1)}{1 + \lambda_1}. \quad (3.3.2)$$

Entonces $F(\lambda_1)$ alcanza el mínimo cuando $\lambda_1^0 = \pm\infty$ y $F(\lambda_1^0) = 0$, dado que el numerador en la expresión (3.3.2) está acotado entre $[-\pi, \pi]$ y el denominador tiende a $\pm\infty$. Igual que antes, cuanto más “alarguemos” la figura más aerodinámica será. Si acotamos $\lambda_1 \in [0, 2]$ el mínimo se alcanzará cuando $\lambda_1^0 = 2$ como se puede observar en la siguiente figura:

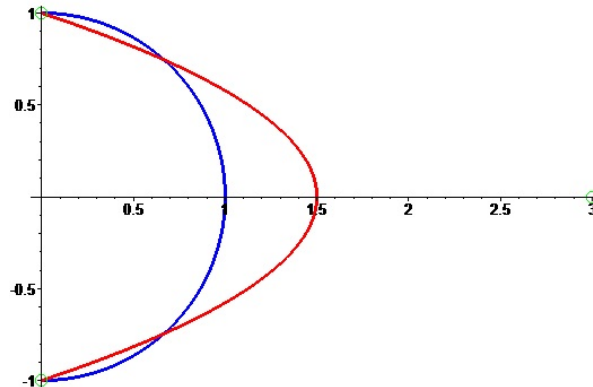


Figura 3.8: Optimización aerodinámica de la semicircunferencia con 1 punto de control intermedio

Ejemplo 3.3.4 Consideremos el Ejemplo 3.3.3, pero con 2 puntos de control intermedios. Entonces $n = 3$, $t_1 = 1/3$ y $t_2 = 2/3$. Por tanto, los puntos quedan:

$$\begin{aligned} P_0 &= \alpha(0) = (0, -1), \\ P_1(\lambda_1) &= \alpha(t_1) + \lambda_1 \mathbf{n}_\alpha(t_1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\lambda_1 \sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\lambda_1}{2} \right), \\ P_2(\lambda_2) &= \alpha(t_2) + \lambda_2 \mathbf{n}_\alpha(t_2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\lambda_2 \sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\lambda_2}{2} \right), \\ P_3 &= \alpha(1) = (0, 1). \end{aligned}$$

Construimos ahora la curva de Bézier:

$$\begin{aligned} B(\lambda_1, \lambda_2, t) &= P_0 B_0^3(t) + \sum_{i=1}^2 P_i(\lambda_i) B_i^3(t) + P_3 B_3^3(t) = \\ &= \left(\frac{3}{2} t \sqrt{3} + \frac{3}{2} t \lambda_1 \sqrt{3} - \frac{3}{2} t^2 \sqrt{3} - 3 t^2 \lambda_1 \sqrt{3} + \frac{3}{2} t^3 \lambda_1 \sqrt{3} + \frac{3}{2} t^2 \lambda_2 \sqrt{3} - \frac{3}{2} t^3 \lambda_2 \sqrt{3}, \right. \\ &\quad \left. 1 - \frac{3}{2} t - \frac{3}{2} t^2 + t^3 + \frac{3}{2} t \lambda_1 - 3 t^2 \lambda_1 + \frac{3}{2} \lambda_1 t^3 - \frac{3}{2} t^2 \lambda_2 + \frac{3}{2} \lambda_2 t^3 \right) \end{aligned}$$

El $\cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, t)$ tiene una expresión demasiado larga, al igual que $F(\lambda_1, \lambda_2)$. Entonces, vamos a aplicar la Posibilidad 2. Veamos cuáles son las discretizaciones del coseno:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, t = 1/3) &= \frac{1}{4} \frac{(13 + 3\lambda_2)^2}{9\lambda_2^2 + 33\lambda_2 + 49}, \\ \cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, t = 2/3) &= \frac{1}{4} \frac{(13 + 3\lambda_1)^2}{9\lambda_1^2 + 33\lambda_1 + 49}. \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{i=1}^2 \cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, t_i) = \\ &= \frac{1}{4} \frac{(13 + 3\lambda_2)^2}{9\lambda_2^2 + 33\lambda_2 + 49} + \frac{1}{4} \frac{(13 + 3\lambda_1)^2}{9\lambda_1^2 + 33\lambda_1 + 49}. \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Optimizando (3.3.3) se obtienen los valores óptimos:

$$\lambda_1^0 = -13/3 \text{ y } \lambda_2^0 = -13/3.$$

La curva resultante puede observarse en la Figura 3.9:

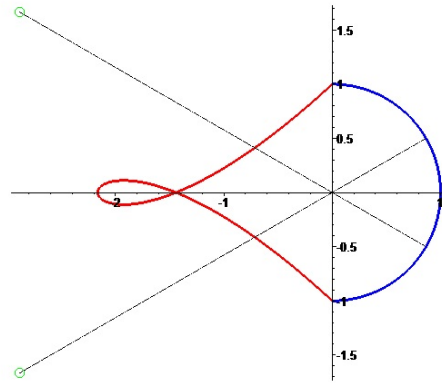


Figura 3.9: Optimización aerodinámica de la semicircunferencia con 2 puntos de control intermedios

Esta deformación no es válida, pues físicamente no resulta lógica. Esto se debe a que las normales se cortan a la izquierda del eje de ordenadas. Para resolver el problema, suponemos $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$. Entonces los valores óptimos serían $\lambda_1^0 = 1$ y $\lambda_2^0 = 1$. En este caso se obtiene la curva de la Figura 3.10:

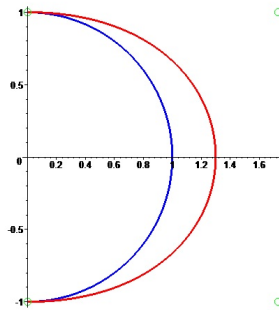


Figura 3.10: Optimización aerodinámica de la semicircunferencia con 2 puntos de control intermedios

Nota 3.3.5 Para el cálculo de los valores óptimos hemos vuelto a utilizar los servidores mencionados anteriormente.

Ejemplo 3.3.6 Sea la curva $\alpha(t) = (t, 1 - t)$ el segmento oblicuo que une los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$. Supongamos que tenemos un punto de control intermedio. Entonces $n = 2$, $t_1 = 1/2$. Por tanto, los puntos quedan:

$$\begin{aligned} P_0 &= \alpha(0) = (0, 1), \\ P_1(\lambda_1) &= \alpha(t_1) + \lambda_1 \mathbf{n}_\alpha(t_1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda_1 \sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\lambda_1 \sqrt{2}}{2} \right), \\ P_2 &= \alpha(1) = (1, 0). \end{aligned}$$

Construimos ahora la curva de Bézier:

$$\begin{aligned} B(\lambda_1, t) &= P_0 B_0^2(t) + P_1(\lambda_1) B_1^2(t) + P_2 B_2^2(t) = \\ &= (t + t\lambda_1\sqrt{2} - t^2\lambda_1\sqrt{2}, 1 - t + t\lambda_1\sqrt{2} - t^2\lambda_1\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Calculamos el $\cos^2 \theta$:

$$\cos^2 \theta(\lambda_1, t) = (\mathbf{n}_B(\lambda_1, t) \cdot \mathbf{v})^2 = \frac{1 (1 + 2t\lambda_1\sqrt{2} - \lambda_1\sqrt{2})^2}{2 \cdot 8t^2\lambda_1^2 - 8t\lambda_1^2 + 1 + 2\lambda_1^2}.$$

Ahora tendríamos que calcular la función $F(\lambda_1)$, resultando

$$F(\lambda_1) = \int_0^1 \cos^2 \theta(\lambda_1, t) dt = \frac{1}{2}, \quad (3.3.4)$$

lo que indica que la variación de la curva no proporciona ninguna mejora aerodinámica. Esto se debe a que, debido a la simetría de la curva $B(\lambda_1, t)$, la posible mejora aerodinámica se compensa a ambos lados de la recta normal a α en $\alpha(t_1)$.

En la Figura 3.11, hemos calculado la curva de Bézier con $\lambda_1 = 0,8$ (en rojo) y $\lambda_1 = -0,8$ (en verde) para poder apreciar el resultado anterior.

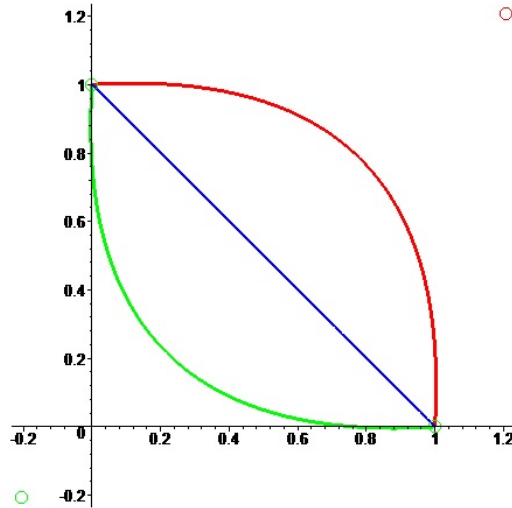


Figura 3.11: Optimización aerodinámica del segmento oblicuo con 1 punto de control intermedio

Ejemplo 3.3.7 Consideremos el Ejemplo 3.3.6 pero con 2 puntos de control intermedios. Entonces $n = 3$, $t_1 = 1/3$ y $t_2 = 2/3$. Por tanto, los puntos quedan:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \alpha(0) = (0, 1), \\
 P_1(\lambda_1) &= \alpha(t_1) + \lambda_1 \mathbf{n}_\alpha(t_1) = \left(\frac{1}{3} + \frac{\lambda_1 \sqrt{2}}{2}, \frac{2}{3} + \frac{\lambda_1 \sqrt{2}}{2} \right), \\
 P_2(\lambda_2) &= \alpha(t_2) + \lambda_2 \mathbf{n}_\alpha(t_2) = \left(\frac{2}{3} + \frac{\lambda_2 \sqrt{2}}{2}, \frac{1}{3} + \frac{\lambda_2 \sqrt{2}}{2} \right), \\
 P_3 &= \alpha(1) = (1, 0).
 \end{aligned}$$

Construimos ahora la curva de Bézier:

$$\begin{aligned}
 B(\lambda_1, \lambda_2, t) &= P_0 B_0^3(t) + \sum_{i=1}^2 P_i(\lambda_i) B_i^3(t) + P_3 B_3^3(t) = \\
 &= \left(t + \frac{3}{2} t \lambda_1 \sqrt{2} - 3t^2 \lambda_1 \sqrt{2} + \frac{3}{2} t^3 \lambda_1 \sqrt{2} + \frac{3}{2} t^2 \lambda_2 \sqrt{2} - \frac{3}{2} t^3 \lambda_2 \sqrt{2}, \right. \\
 &\quad \left. 1 - t + \frac{3}{2} t \lambda_1 \sqrt{2} - 3t^2 \lambda_1 \sqrt{2} + \frac{3}{2} t^3 \lambda_1 \sqrt{2} + \frac{3}{2} t^2 \lambda_2 \sqrt{2} - \frac{3}{2} t^3 \lambda_2 \sqrt{2} \right).
 \end{aligned}$$

El $\cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, t)$ tiene una expresión demasiado larga, al igual que $F(\lambda_1, \lambda_2)$. Entonces, vamos a aplicar la Posibilidad 2. Veamos cuáles son las discretizaciones del coseno:

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, t = 1/3) &= \frac{1}{4} \frac{(-2 + \lambda_2 \sqrt{2})^2}{2 + \lambda_2^2}, \\
 \cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, t = 2/3) &= \frac{1}{4} \frac{(-2 + \lambda_1 \sqrt{2})^2}{2 + \lambda_1^2}.
 \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(\lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{i=1}^2 \cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, t_i) = \\
 &= \frac{1}{4} \frac{(-2 + \lambda_2 \sqrt{2})^2}{2 + \lambda_2^2} + \frac{1}{4} \frac{(-2 + \lambda_1 \sqrt{2})^2}{2 + \lambda_1^2}.
 \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Optimizando (3.3.5) se obtienen los valores óptimos:

$$\lambda_1^0 = -\sqrt{2} \text{ y } \lambda_2^0 = \sqrt{2},$$

ó

$$\lambda_1^0 = \sqrt{2} \text{ y } \lambda_2^0 = -\sqrt{2}.$$

Se ha obtenido $\tilde{F}(\lambda_1^0, \lambda_2^0) = 0,4112779620$ y dado que, sin modificar el segmento oblicuo, $F(0,0) = 0,5$, la mejora aerodinámica no ha sido muy superior. Al realizar la discretización de la Posibilidad 2 del método, podemos obtener que la curva sea más aerodinámica en los puntos que vamos a optimizar pero menos en el resto de puntos de la curva. Véase la Figura 3.12.

Nota 3.3.8 Para el cálculo de los valores óptimos hemos vuelto a utilizar los servidores mencionados anteriormente.

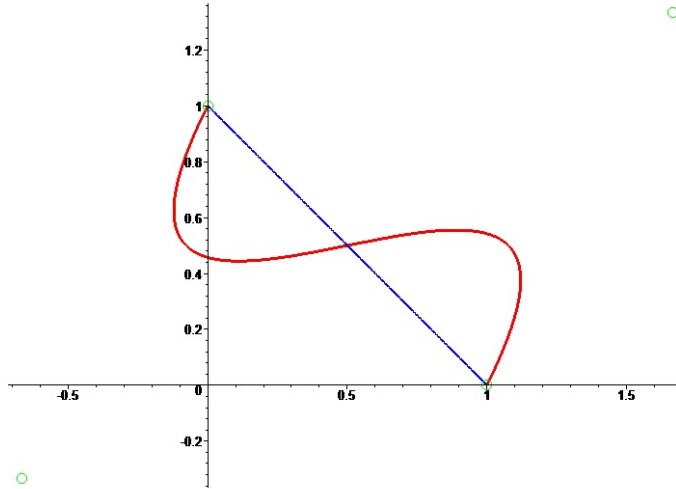


Figura 3.12: Optimización aerodinámica del segmento oblicuo con 2 puntos de control intermedios

3.4. Método para superficies

Veamos cómo podemos extender este método a superficies:

Sean $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto S(u, v)$ una superficie regular, y dos particiones en intervalos iguales, en cada una,

$$u_0 = 0 < u_1 < \dots < u_{n-1} < u_n = 1,$$

$$v_0 = 0 < v_1 < \dots < v_{m-1} < v_m = 1.$$

Fijamos la frontera de la superficie y los puntos interiores de la malla los redefinimos mediante la normal de la misma (que denotaremos \mathbf{N}_S):

$$P_{ij}(\lambda_{ij}) = S(u_i, v_j) + \lambda_{ij} \mathbf{N}_S(u_i, v_j),$$

Entonces, definimos la superficie de Bézier

$$BS(\lambda_{ij}, u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v),$$

donde $P_{ij} = P_{ij}(\lambda_{ij})$ si $1 \leq i \leq n-1$ y $1 \leq j \leq m-1$.

El resto del método para superficies se aplica de manera análoga al caso de curvas, salvo que lo que antes era una integral simple, ahora lo es doble. Así, consideramos

$$F(\lambda_{ij}) = \int_0^1 \int_0^1 \cos^2 \theta(\lambda_{ij}, u, v) dudv,$$

siendo $\theta(\lambda_{ij}, u, v)$ el ángulo que forman el vector normal a la superficie $BS(\lambda_{ij}, u, v)$, que notaremos $\mathbf{N}_{BS}(\lambda_{ij}, u, v)$, y el vector del viento \mathbf{v} .

3.5. Ejemplos

En esta sección aplicaremos el método presentado en la sección anterior a varios tipos de mallas, para observar la deformación aerodinámica.

Ejemplo 3.5.1 Sean $S(u, v) = (u, v, 0)$ el plano $Z = 0$ con $u, v \in [0, 1]$ y el vector del viento $\mathbf{v} = (-1, 0, 0)$. Realizamos una malla equidistante 3×3 , es decir, con un solo punto de control intermedio dado que la frontera está fijada. La deformación del punto de control intermedio queda:

$$P_{11}(\lambda) = S(1/2, 1/2) + \lambda \mathbf{N}(1/2, 1/2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \lambda \right).$$

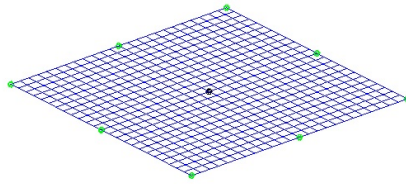


Figura 3.13: Malla 3×3 con 1 punto de control intermedio

La superficie de Bézier es:

$$BS(\lambda, u, v) = (u, v, 4uv\lambda - 4uv^2\lambda - 4u^2v\lambda + 4u^2v^2\lambda).$$

Ahora, tendríamos que calcular la función

$$F(\lambda) = \int_0^1 \int_0^1 \cos^2 \theta(\lambda, u, v) dudv,$$

pero esta expresión es demasiado larga. Aunque sabemos que es decreciente, es decir, a medida que crece λ el $\cos^2 \theta$ disminuye. Acotemos λ y supongamos que $\lambda \in [0, 3]$, entonces la mejora aerodinámica se alcanza en $\lambda^0 = 3$.

✻

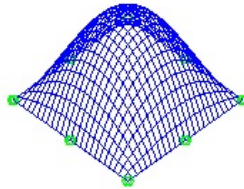


Figura 3.14: Deformación de la malla 3×3 con 1 punto de control intermedio

Ejemplo 3.5.2 Considérese el Ejemplo 3.5.1, pero ahora realizamos el estudio en una malla equidistante 4×4 , es decir, con 4 puntos de control intermedios dado que la frontera está fijada. Tomamos $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda$, buscando la simetría de la figura. La deformación de los puntos de control intermedios queda:

$$P_{11}(\lambda) = S(1/3, 1/3) + \lambda \mathbf{N}(1/3, 1/3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \lambda \right),$$

$$P_{12}(\lambda) = S(1/3, 2/3) + \lambda \mathbf{N}(1/3, 2/3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \lambda \right),$$

$$P_{21}(\lambda) = S(2/3, 1/3) + \lambda \mathbf{N}(2/3, 1/3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \lambda \right),$$

$$P_{22}(\lambda) = S(2/3, 2/3) + \lambda \mathbf{N}(2/3, 2/3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \lambda \right).$$

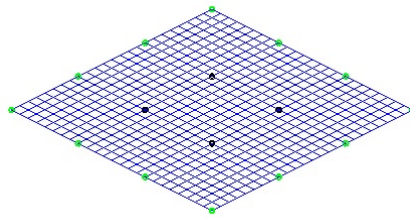


Figura 3.15: Malla 4×4 con 4 puntos de control intermedios

La superficie de Bézier es:

$$BS(\lambda, u, v) = (u, v, 9uv\lambda - 9uv^2\lambda - 9u^2v\lambda + 9u^2v^2\lambda).$$

Ahora, tendríamos que calcular la función

$$F(\lambda) = \int_0^1 \int_0^1 \cos^2 \theta(\lambda, u, v) dudv,$$

pero esta expresión es, de nuevo, demasiado larga. Aunque sabemos que es decreciente, es decir, a medida que crece λ el $\cos^2 \theta$ disminuye. Supongamos que $\lambda \in [0, 3]$; entonces la mejora aerodinámica se alcanza en $\lambda^0 = 3$. Véase la Figura 3.16.

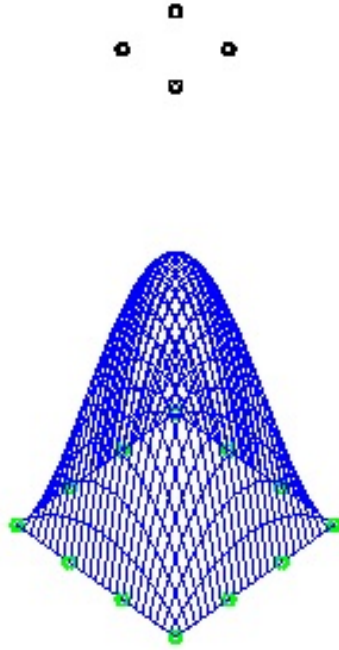


Figura 3.16: Deformación de la malla 4×4 con 4 puntos de control intermedios

Para concluir, vamos a presentar un ejemplo donde la redefinición de los puntos la realizamos de manera diferente.

Ejemplo 3.5.3 Considérese el Ejemplo 3.5.1 pero ahora realizamos el estudio en una malla equidistante 5×5 , es decir, con 9 puntos de control intermedios dado que la frontera está fijada.

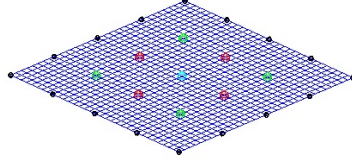


Figura 3.17: Malla 5×5 con 9 puntos de control intermedios

La deformación de los puntos de control intermedios queda:

$$P_{11}(\lambda_1) = S(1/4, 1/4) + \lambda_1 \mathbf{N}(1/4, 1/4) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \lambda_1 \right),$$

$$P_{12}(\lambda_2) = S(1/4, 1/2) + \lambda_2 \mathbf{N}(1/4, 1/4) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \lambda_2 \right),$$

$$P_{13}(\lambda_1) = S(1/4, 3/4) + \lambda_1 \mathbf{N}(1/4, 3/4) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \lambda_1 \right),$$

$$P_{21}(\lambda_2) = S(1/4, 1/4) + \lambda_2 \mathbf{N}(1/4, 1/4) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \lambda_2 \right),$$

$$P_{22}(\lambda_3) = S(1/4, 1/4) + \lambda_3 \mathbf{N}(1/4, 1/4) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \lambda_3 \right),$$

$$P_{23}(\lambda_2) = S(1/4, 3/4) + \lambda_2 \mathbf{N}(1/4, 3/4) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \lambda_2 \right),$$

$$P_{31}(\lambda_1) = S(3/4, 1/4) + \lambda_1 \mathbf{N}(3/4, 1/4) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \lambda_1 \right),$$

$$P_{32}(\lambda_2) = S(3/4, 1/4) + \lambda_2 \mathbf{N}(3/4, 1/4) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \lambda_2 \right),$$

$$P_{33}(\lambda_1) = S(3/4, 3/4) + \lambda_1 \mathbf{N}(3/4, 3/4) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \lambda_1 \right).$$

Nota 3.5.4 Los puntos verdes de la Figura 3.17 dependen de λ_1 , los rojos de λ_2 y el punto celeste de λ_3 .

La superficie de Bézier es:

$$\begin{aligned}
 BS(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, u, v) = & (u, v, 36u^2v^4\lambda_3 - 72u^2v^3\lambda_3 - 120u^2v^4\lambda_2 + 240u^2v^3\lambda_2 - \\
 & - 144u^2v^2\lambda_2 + 24uv^4\lambda_2 - 48uv^3\lambda_2 - 96u^4v^4\lambda_2 + 192u^4v^3\lambda_2 - 120u^4v^2\lambda_2 + \\
 & + 192u^3v^4\lambda_2 - 384u^3v^3\lambda_2 + 64u^4v^4\lambda_1 - 128u^4v^3\lambda_1 - 128u^3v^4\lambda_1 + \\
 & + 256u^3v^3\lambda_1 + 96u^2v^4\lambda_1 - 192u^2v^3\lambda_1 + 36u^4v^4\lambda_3 - 72u^4v^3\lambda_3 + 36u^4v^2\lambda_3 - \\
 & - 72u^3v^4\lambda_3 + 144u^3v^3\lambda_3 - 72u^3v^2\lambda_3 + 96u^4v^2\lambda_1 - 32u^4v\lambda_1 + 144u^2v^2\lambda_1 - \\
 & - 48u^2v\lambda_1 - 48uv^2\lambda_1 + 24u^4v\lambda_2 - 48u^3v\lambda_2 + 24u^2v\lambda_2 + 64u^3v\lambda_1 - 192u^3v^2\lambda_1 \\
 & + 24uv^2\lambda_2 + 240u^3v^2\lambda_2 + 64uv^3\lambda_1 + 36u^2v^2\lambda_3 - 32uv^4\lambda_1 + 16uv\lambda_1).
 \end{aligned}$$

Ahora, vamos a plantear otro tipo de problema. Supongamos que tenemos una cota superior para $\lambda_3 = 3$, nuestro objetivo será obtener los parámetros λ_1^0 y λ_2^0 , que hacen que la superficie $BS(\lambda_1^0, \lambda_2^0, 3, u, v)$ sea lo más aerodinámica posible. Para simplificar cálculos, consideramos $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 3]$.

En este momento, tendríamos que calcular $F(\lambda_1, \lambda_2, 3)$, pero esta expresión es difícilmente computable. Una opción es usar el método de Simpson para calcular una aproximación de $F(\lambda_1, \lambda_2, 3)$ (se puede encontrar en el archivo **11.malla.5x5.mws** del *Ápndice Digital*).

Utilizando los servidores mencionados anteriormente, hemos obtenido:

$$\lambda_1^0 = \lambda_2^0 = 0, \quad F(0, 0, 3) = 0,18027.$$

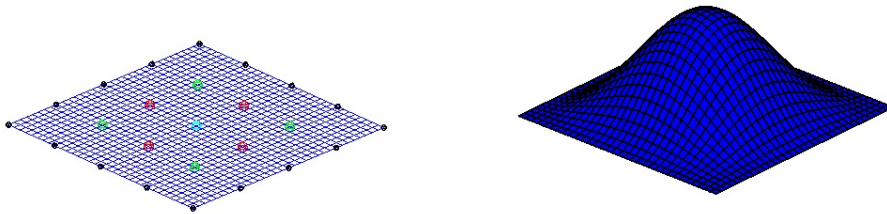


Figura 3.18: Deformación de la malla 5×5 con 9 puntos de control intermedios

Apéndice Digital

Esta memoria se acompaña de un CD, que incluye los siguientes archivos, a modo de Apéndice Digital:

- **01.aprox_polinomica.mws** En este archivo se podrán encontrar todos los cálculos, figuras y animaciones relacionadas con los Ejemplos 2.4.1 y 2.4.2.
- **02.aprox_exponencial.mws** En este archivo se podrán encontrar todos los cálculos, figuras y animaciones relacionadas con los Ejemplos 2.4.3 y 2.4.4.
- **03.aprox_tlog(t).mws** En este archivo se podrán encontrar todos los cálculos, figuras y animaciones relacionadas con los Ejemplos 2.4.6 y 2.4.7.
- **04.aprox_seno.mws** En este archivo se podrán encontrar todos los cálculos, figuras y animaciones relacionadas con el Ejemplo 2.4.9.
- **05.aprox_helicoide.mws** En este archivo se podrán encontrar todos los cálculos, figuras y animaciones relacionadas con el Ejemplo 2.4.10.
- **06.segmento_vertical.mws** En este archivo se podrán encontrar todos los cálculos, figuras y animaciones relacionadas con los Ejemplos 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 y 3.3.1.
- **07.semicircunferencia.mws** En este archivo se podrán encontrar todos los cálculos, figuras y animaciones relacionadas con los Ejemplos 3.3.3 y 3.3.4.
- **08.segmento_oblicuo.mws** En este archivo se podrán encontrar todos los cálculos, figuras y animaciones relacionadas con los Ejemplos 3.3.6 y 3.3.7.

- **09.malla_3x3.mws** En este archivo se podrán encontrar todos los cálculos, figuras y animaciones relacionadas con el Ejemplo 3.5.1.
- **10.malla_4x4.mws** En este archivo se podrán encontrar todos los cálculos, figuras y animaciones relacionadas con el Ejemplo 3.5.2.
- **11.malla_5x5.mws** En este archivo se podrán encontrar todos los cálculos, figuras y animaciones relacionadas con el Ejemplo 3.5.3.
- **Carpeta optimización** En esta carpeta se podrán encontrar los archivos utilizados en NEOS Server.

Bibliografía

- [1] A. Carriazo, M. C. Márquez, A. G. Bedoya. Una aproximación geométrica a la aerodinámica de curvas y superficies. *Actas del XI Encuentro Andaluz de Geometría*. En prensa.
- [2] A. Carriazo, M. C. Márquez, H. Ugail. Normal approximations of regular curves and surfaces. *Filomat* **29** (2015), no. 3, 457-464.
- [3] J. M. Cordero, J. Cortés Parejo. *Curvas y Superficies para modelado geométrico*. Ra-Ma, Madrid, 2002.
- [4] G. Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, San Diego, 1988.
- [5] Y. Nakayama, R. F. Boucher. *Introduction to Fluid Mechanics*. Butterworth Heinemann, Oxford, 2000.
- [6] D. F. Rogers. Pierre Etienne Bézier (1910-1999), in memoriam. *Computer-Aided Design* **34** (2002), 489-491.