



Facultad de Matemáticas
Departamento de Geometría y Topología

———— TRABAJO FIN DE GRADO ————

Aspectos algebraicos en Teoría de Grafos

Francisco Javier Franco Galvín
Sevilla, Junio 2016



Facultad de Matemáticas
Departamento de Geometría y Topología

TRABAJO FIN DE GRADO

Aspectos algebraicos en Teoría de Grafos

La Profesora Tutora:

Fdo: **María Trinidad Villar Liñán** Fdo: **Francisco Javier Franco Galván**
Prof. Titular de Universidad

A mi abuela.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a varias personas la dedicación que me han prestado y los conocimientos que me han transmitido a lo largo de estos cuatro años universitarios. Gracias a ellos, esta memoria ha dado su fruto.

Entre ellas, y en primer lugar, a María Trinidad Villar Liñán, mi tutora en este Trabajo de Fin de Grado, por todo lo que me ha enseñado y ayudado ante todas las dificultades que se han presentado durante la elaboración de este proyecto.

Seguidamente, al resto de profesores de la Universidad de Sevilla. Concretamente, expresar mi reconocimiento a aquellos del departamento de Geometría y Topología, por hacerme descubrir el interesante mundo de la Teoría de Grafos.

Agradecer también este trabajo a mis padres, que desde el primer momento en el que decidí empezar mi etapa universitaria me han apoyado y ayudado lo suficiente para que pudiera cumplir uno de mis sueños.

Al resto de mi familia y, en especial, a mi abuela, que se hubiera sentido más orgullosa de su nieto de lo que ya lo estaba.

Y finalmente a mis amigos, que han conseguido que estos cuatro años sean menos duros de lo que podrían haber sido.

Muchas gracias a todos.

Abstract

Algebraic Graph Theory applies algebraic methods to problems about graphs.

Throughout this project we will study the relationship between matrices and polynomials which are associated with graphs and invariant properties of graphs under isomorphisms.

From matrices associated with graphs we can study properties about the connectivity as the number of connected components a graph has and the number of paths with a specific length contained therein. In addition to these problems, we will focus on Kirchhoff theorem, a classic result that counts how many spanning trees a graph has.

We will also study other invariants: the characteristic polynomial of a graph, the chromatic polynomial and the Tutte polynomial. From these objects we will know the basic structural properties of the graph that represents as the number of vertices, edges or triangles that it has; and some information about the problem of colouring the graph or the number of subgraphs which are contained in it.

Índice general

Introducción	11
1. Preliminares	13
1.1. Conceptos básicos en Teoría de Grafos	13
1.1.1. Primeros conceptos	13
1.1.2. Isomorfismo de grafos	15
1.1.3. Subgrafos	15
1.1.4. Operaciones con aristas	16
1.1.5. Caminos y ciclos	17
1.1.6. Conexión	18
1.1.7. Operaciones binarias entre grafos	19
1.1.8. Familias infinitas de grafos	19
1.1.9. Árboles	21
1.1.10. Grafos duales	21
1.2. Conceptos algebraicos	21
1.2.1. Matrices y determinantes	22
1.2.2. Polinomios	22
1.2.3. Espacios vectoriales	23
2. Matrices asociadas a grafos	25
2.1. La matriz de adyacencia	25
2.1.1. Caminos y arcos	29
2.1.2. Conexión	31
2.2. La matriz de incidencia	34
2.3. La matriz laplaciana. Teorema de Kirchhoff	37
2.4. Otras matrices asociadas a grafos	41
3. Polinomios asociados a grafos	43
3.1. Polinomio característico	43
3.2. Polinomio cromático	51
3.2.1. Algoritmo de adición—contracción de aristas	57
3.2.2. Algoritmo de eliminación—contracción de aristas	60
3.3. Polinomio de Tutte	61

3.3.1.	Algoritmo de eliminación—contracción de aristas	63
3.3.2.	Definiciones alternativas	66
3.3.3.	Relación entre el polinomio de Tutte y el polinomio cromático	72
3.4.	Otros polinomios asociados a grafos	73

Introducción

La Teoría Algebraica de Grafos es una rama de las matemáticas donde se aplican métodos algebraicos a problemas sobre grafos.

A lo largo de esta memoria haremos uso del Álgebra Lineal y de la Teoría de Grafos para estudiar la relación existente entre ciertos invariantes algebraicos y las propiedades invariantes de grafos bajo isomorfismos. Además de conceptos algebraicos también usaremos enfoques algorítmicos y de combinatoria para abordar otro tipo de problemas.

En el Capítulo 1 se exponen conceptos básicos de Teoría de Grafos y términos y resultados algebraicos que serán utilizados a lo largo de los capítulos siguientes tanto para definir propiedades de grafos que aparecen reflejadas en estructuras algebraicas como para demostrarlas.

El Capítulo 2 está dedicado al estudio de la conexión de un grafo a través de matrices asociadas a éste. De estas matrices podremos conocer el número de componentes conexas por las que está formado el grafo al que hace referencia, de caminos contenidos en él y, en especial, acerca del número de árboles maximales que éste incluye. Este último problema es uno de los más famosos en Teoría de Grafos y es conocido como Teorema de Kirchhoff.

Finalmente, este trabajo se concluye con el Capítulo 3. En él se tratan tres invariantes fundamentales: el espectro de un grafo, su polinomio cromático y su polinomio de Tutte. El capítulo comienza definiendo qué se entiende por espectro de un grafo y por polinomio característico de un grafo, y continúa describiendo algoritmos que serán usados para la construcción del polinomio cromático y del polinomio de Tutte. De estos polinomios conoceremos propiedades básicas estructurales del grafo al que representa, como el número de vértices, aristas, triángulos, etc., que éste tiene; así como información sobre el coloreado del mismo y los subgrafos contenidos en él.

El contenido de esta obra puede considerarse una breve presentación del amplio campo de estudio que hoy día abarca la Teoría Algebraica de Grafos y que se demuestra con la numerosa literatura especializada existente de la cual sólo hemos podido consultar una pequeña muestra de ejemplares.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introductorio definiremos conceptos básicos de Teoría de Grafos y resultados algebraicos que usaremos a lo largo de los próximos capítulos.

1.1. Conceptos básicos en Teoría de Grafos

1.1.1. Primeros conceptos

Un **grafo** es un par $G = (V, E)$, donde V es un conjunto finito no vacío y E es un conjunto formado por pares no ordenados de elementos distintos de V . Los elementos de V se llaman **vértices** o **nodos** y los elementos de E son las **aristas** de G .

Se llama **orden** de G al cardinal de conjunto V y **tamaño** de G al cardinal del conjunto A .

Si consideramos E como un conjunto de pares ordenados, es decir, si se les ha dado un cierto sentido a todas las aristas del grafo, hablaremos de **grafos dirigidos** o **digrafos**.

Una orientación de un grafo se obtiene al asignar un sentido a cada una de sus aristas. Un grafo dirigido construido de esta manera se denomina un **grafo orientado**.

Un grafo se dice **etiquetado** si en él se han distinguido sus vértices o aristas, es decir, si se le ha asignado un cierto nombre a cada uno de sus vértices o aristas. En caso contrario el grafo se dice **no etiquetado**.

Si e es una arista de extremos u y v , escribiremos $e = uv$. Diremos entonces que los vértices u y v son **adyacentes** ó que e es **incidente** con los vértices u y v .

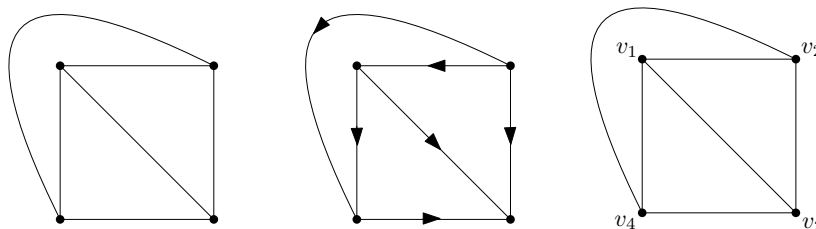


Figura 1.1: Grafo, digrafo y grafo etiquetado.

Si la arista e está dirigida desde u hasta v , diremos que v es adyacente a u ó que e es incidente a v .

Llamaremos **lazo** a toda arista del tipo $e = uu$.

Diremos que G es un **multigrafo** si tiene **aristas múltiples**, es decir, aristas repetidas. Si G tiene **lazos** decimos que G es un **pseudografo**. Un grafo es **simple** si no tiene ni aristas múltiples ni lazos.

Cabe notar que la definición inicial de grafo corresponde en realidad con la noción de grafo simple.

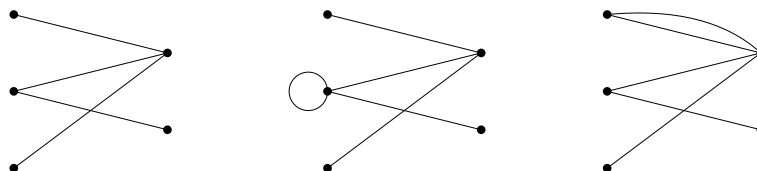


Figura 1.2: Grafo simple, pseudografo y multigrafo.

El **grado** de un vértice v en un grafo G no dirigido, que lo denotaremos por $\delta(v)$, es el número de aristas de G incidentes con v .

En el caso de ser G un grafo dirigido, no podemos hablar de grado de un vértice v , sino de **grado de entrada** y **grado de salida** de un vértice, que los denotaremos por $\delta^-(v)$ y $\delta^+(v)$ respectivamente. En un digrafo, el grado de entrada de un vértice es el número de aristas incidentes a él y el grado de salida de un vértice es el número de sus vértices adyacentes.

Un grafo se dice **regular** si todos sus vértices tienen el mismo grado.

1.1.2. Isomorfismo de grafos

Diremos que dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son **isomorfos** si existe una aplicación biyectiva f entre V y V' de forma que uv define una arista en G si y sólo si $f(u)f(v)$ define una arista en G' .

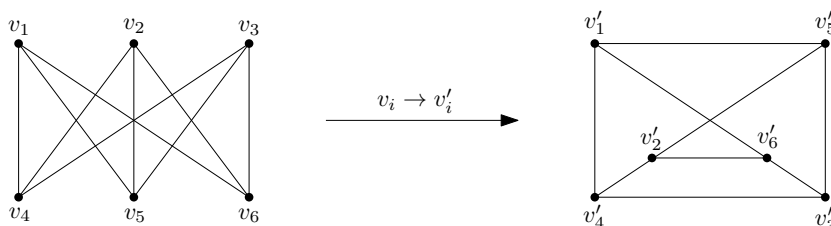


Figura 1.3: Isomorfismo entre dos grafos.

1.1.3. Subgrafos

Sea $S \subseteq V$ un subconjunto de vértices del grafo G . Denominamos **subgrafo inducido** o **generado** por S al subgrafo de G que tiene a S como conjunto de vértices y cuyas aristas son todas aquellas del grafo G con los dos extremos en S .

Un subgrafo se dice **maximal** o **spanning** si contiene todos los vértices del grafo en el que está contenido.

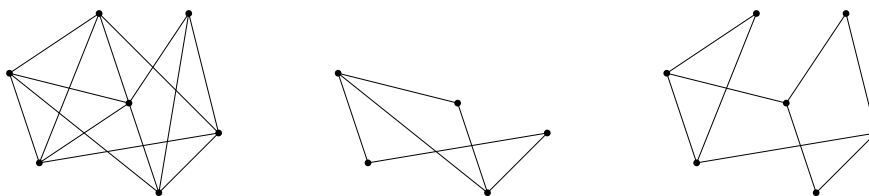


Figura 1.4: Grafo, subgrafo y subgrafo maximal o *spanning*.

Sea G un grafo y $v \in V$ uno de sus vértices. Se denomina subgrafo $G - v$ al subgrafo de G inducido o generado por $V - \{v\}$, es decir, al subgrafo de G que se obtiene eliminando el vértice v y todas las aristas incidentes con él, aunque los otros extremos de esas aristas permanecen.

Sea G un grafo y $e \in E$ una de sus aristas. Se denomina subgrafo $G - e$ al subgrafo de G inducido por $E - \{e\}$, es decir, al subgrafo de G que se obtiene eliminando la arista e , aunque sus extremos permanecen.

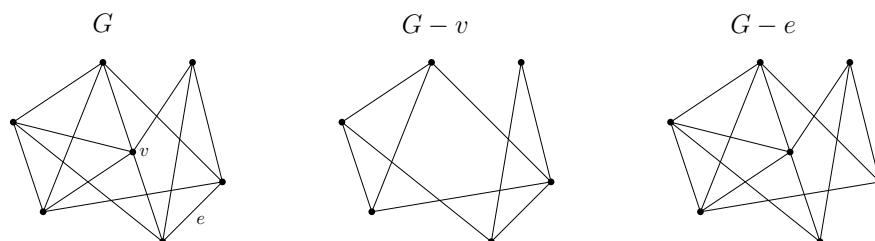


Figura 1.5: Grafo $G = (V, E)$, subgrafo de G inducido por $V - \{v\}$ y subgrafo de G inducido por $E - \{e\}$.

1.1.4. Operaciones con aristas

Sea $G = (V, E)$ un grafo cualquiera, podemos definir las siguientes operaciones en el conjunto E :

1. **Adición de aristas.** Resulta de añadir una arista e al grafo G , que denotaremos por $G + e$. Si $e \in G$, entonces obtendremos una arista múltiple en G .
2. **Eliminación o supresión de aristas.** Consiste en eliminar una arista $e \in G$, pero sin suprimir los vértices extremos. Esta eliminación la describiremos por $G - e$.
3. **Contracción de aristas.** Usaremos G/e para denotar la contracción de la arista e en el grafo G . Cuando contraemos una arista $e = uv$ en un grafo lo que hacemos es identificar los vértices u y v , de manera que pasan a ser un mismo vértice y la arista e se pierde. En el caso en que el grado de uno de los vértices extremos de e sea exactamente igual a uno, la arista no se pierde, sino que se convierte en un lazo dentro del conjunto de aristas de G/e . Tras la contracción, el resto de vértices de G/e siguen manteniendo las mismas adyacencias que en G .
4. **Contracción simple de aristas.** Denotaremos por $G \setminus e$ a la contracción simple de la arista e en G . Consiste en contraer la arista pero teniendo en cuenta que la contracción de ésta no puede originar ni lazos ni aristas múltiples, así que eliminaremos este tipo de aristas cuando aparezcan.

En la Figura 1.6 pueden verse algunos ejemplos de estas operaciones sobre un grafo.

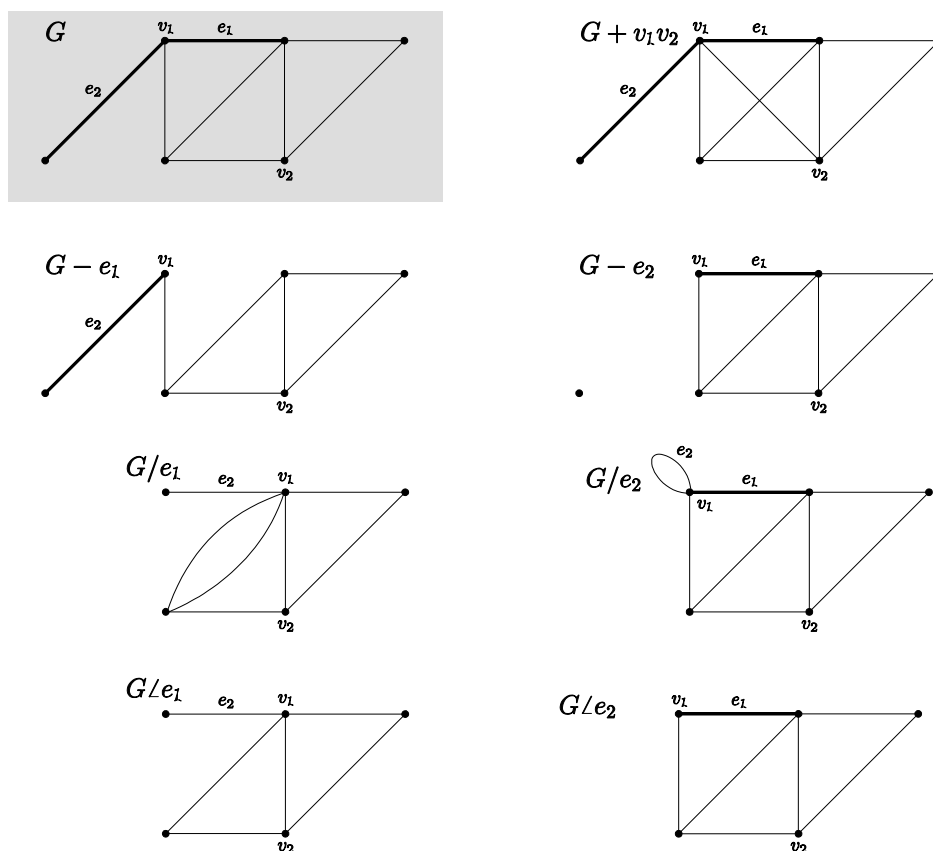


Figura 1.6: Operaciones con aristas en un grafo G .

1.1.5. Caminos y ciclos

Un **camino** en G es una sucesión finita de vértices $\gamma = \{v_1v_2 \dots v_s\}$ tales que dos elementos consecutivos de la misma son siempre adyacentes.

Cuando G se trata de un grafo con aristas múltiples es conveniente definir los caminos como sucesiones finitas de vértices y aristas. Así un camino podría ser $\gamma = \{v_1e_{12}v_2e_{23} \dots e_{s-1,s}v_s\}$, donde e_{ij} denota la arista que une los vértices v_i y v_j .

Un **recorrido** en G es un camino en el cual todas las aristas que lo forman son distintas.

Un **arco** en G es un recorrido en el que todos los vértices que lo forman son distintos. Véase la Figura 1.7.

Un **ciclo** en G es un camino cerrado en G que es un arco, excepto en el hecho de que el primer y último vértice coinciden. Véase la Figura 1.8.

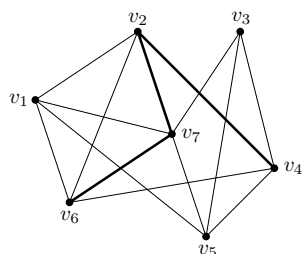


Figura 1.7: Arco.

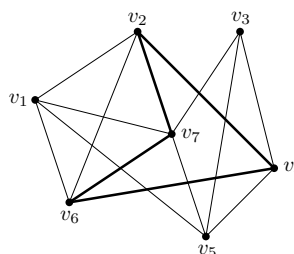


Figura 1.8: Ciclo.

1.1.6. Conexión

Un grafo se dice **conexo** si dos cualesquiera de sus vértices pueden unirse mediante un arco. Si un grafo no es conexo, se dice **disconexo**. Se denomina **componente conexa** de un grafo a todo subgrafo conexo del mismo que tenga el mayor número posible de vértices. Los vértices aislados, que no tienen aristas incidentes, se consideran también componentes conexas del grafo.

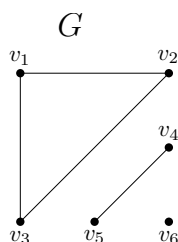


Figura 1.9: Grafo desconexo con tres componentes conexas.

Se denomina **longitud** de un camino en el grafo al número de aristas que lo forman. Se denomina **distancia** entre dos vértices $u, v \in V$ a la menor longitud de todos los arcos que los unen, si los hay. La denotaremos por $d(u, v)$. Si no existe ningún arco que una los vértices u y v tomaremos por convenio que $d(u, v) = \infty$.

En el grafo de la Figura 1.7, vemos que el camino marcado tiene longitud tres ya que está formado por tres aristas. La distancia entre los vértices v_4 y v_6 es uno ya que hay una arista que los une. La distancia entre v_1 y v_4 es dos ya que como mínimo esos vértices pueden conectarse a través de dos aristas, por ejemplo la arista v_1v_2 y a continuación la v_2v_4 .

Si G es un grafo conexo, llamaremos **diámetro** de G a la mayor longitud entre dos cualesquiera de sus vértices.

Puede observarse en la misma Figura 1.7 que su diámetro es 2.

Se denomina **punto de corte** de un grafo G a todo vértice $v \in V$ tal que el grafo $G - v$ tenga más componentes conexas que G .

Se denomina **punto de corte** de un grafo G a toda arista $e \in E$ tal que $G - e$ tenga más componentes conexas que G . La eliminación de un punto de corte o de un puente en un grafo conexo lo desconectaría.

Un grafo se dice **no separable** si es conexo y no tiene puntos de corte.

Se denomina **bloque** de G a todo subgrafo de G no separable maximal.

1.1.7. Operaciones binarias entre grafos

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos, entonces se definen las siguientes operaciones:

1. **Grafo unión:** $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.
2. **Grafo intersección:** $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$.
3. **Grafo suma:** $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{uv \mid u \in V_1, v \in V_2\})$.

1.1.8. Familias infinitas de grafos

Grafos P_n o lineales

Son grafos de n vértices y un arco de longitud $n - 1$. Todos los vértices de estos grafos tienen por tanto grado dos, excepto dos de ellos, que tienen grado 1.

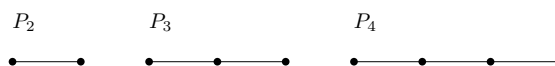


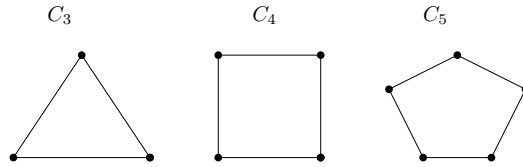
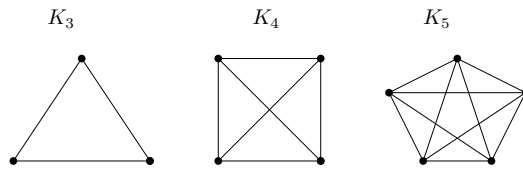
Figura 1.10: Grafos P_n o lineales.

Grafos C_n o ciclos

Son grafos regulares y conexos de n vértices de grado 2 cada uno de ellos.

Grafos K_n o completos

Son grafos regulares de n vértices de grado $n - 1$ cada uno de ellos.

Figura 1.11: Grafos C_n o ciclos.Figura 1.12: Grafos K_n o completos.

Grafos bipartitos

Son aquellos grafos cuyo conjunto de vértices V se puede descomponer en dos subconjuntos disjuntos no vacíos V_1 y V_2 de modo que para toda arista $uv \in E$ se verifique que $u \in V_1$ y $v \in V_2$.

Grafos $K_{n,m}$ o bipartitos completos

Son aquellos grafos bipartitos en los que existen todas las aristas posibles. En ellos, $n = |V_1|$ y $m = |V_2|$.

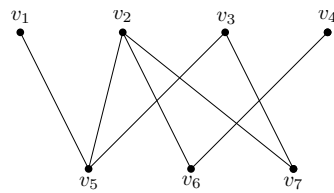


Figura 1.13: Grafo bipartito.

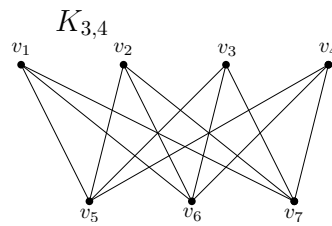


Figura 1.14: Grafo bipartito completo.

Grafos W_n o ruedas

Son aquellos grafos del tipo $W_n = K_1 + C_{n-1}$, con $n \geq 4$, que se obtienen mediante la unión de un vértice aislado (K_1) con un ciclo de $n - 1$ vértices.

1.1.9. Árboles

Un grafo G se dice **acíclico** si no contiene ciclos. Si un grafo es conexo y acíclico es llamado **árbol**. Un árbol $G = (V, E)$ se caracteriza por ser conexo y verificar $|E| = |V| - 1$.

Se dice que un grafo es un **bosque** si es acíclico y desconexo.

Se denomina **árbol maximal** o **spanning** de un grafo G a todo subgrafo maximal de G que sea además árbol.

1.1.10. Grafos duales

Un **grafo plano** o **planar** es un grafo que puede ser representado en el plano sin que ninguna arista se cruce.

Un **grafo dual** G^* de un grafo plano G es un grafo que tiene un vértice por cada región de G , y una arista por cada arista en G uniendo a dos regiones vecinas.

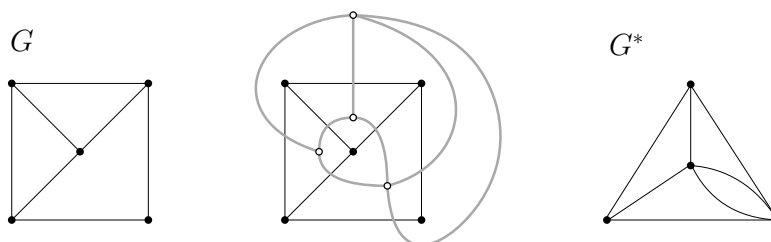


Figura 1.15: Grafo planar y construcción de su grafo dual.

Si $G = (V, E)$ y $G^* = (V^*, E^*)$ son dos grafos planares cuyos conjuntos de regiones son R y R^* respectivamente, entonces se verifica que $|E^*| = |E|$, $|V^*| = |R|$ y $|R^*| = |V|$.

1.2. Conceptos algebraicos

Recogeremos en esta sección los resultados de álgebra lineal que utilizaremos en los próximos capítulos aunque hay conceptos que supondremos conocidos y pueden consultarse en [6].

Estas definiciones y resultados que ahora expondremos, a diferencia de los relacionados con grafos, serán enumerados para poder hacer referencia a ellos cuando sea necesario.

1.2.1. Matrices y determinantes

Definición 1.2.1 (TRAZA DE UNA MATRIZ). Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n . Denotamos por $\text{tr}(A)$ a la traza de la matriz A , es decir, a la suma de los elementos de su diagonal principal.

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Proposición 1.2.2. Sea A una matriz cuadrada de orden n y sean $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ los autovalores de su potencia n -ésima (donde pueden existir repeticiones). Entonces se verifica

$$\text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k.$$

Definición 1.2.3 (MATRICES CONGRUENTES). Dos matrices cuadradas A y B son **congruentes** si puede pasarse de A a B mediante un número finito de operaciones elementales fila y las mismas operaciones y en el mismo orden pero en columnas.

Proposición 1.2.4. Dos matrices cuadradas A y B son congruentes si y sólo si existe una matriz cuadrada regular P verificando $B = P^t A P$.

Definición 1.2.5 (MENOR DE UN ELEMENTO). Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n . El menor del elemento a_{ij} de la matriz A es la matriz de orden $n - 1$ que resulta de suprimir la fila i y la columna j en A .

Definición 1.2.6 (COFACTOR DE UN ELEMENTO). El cofactor de un elemento de una matriz es el determinante del menor de ese elemento.

Teorema 1.2.7 (TEOREMA DE EXPANSIÓN DE LAPLACE). Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n . Entonces

$$\det(A) = \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} c_{ij},$$

donde c_{ij} es el cofactor del elemento a_{ij} en A .

1.2.2. Polinomios

Definición 1.2.8 (POLINOMIO MÍNIMO). Sea A una matriz de orden n . El polinomio mínimo de A , denotado por ψ_A , es el polinomio mónico de menor grado que satisface A , es decir, $\psi_A(A) = 0$.

1.2.3. Espacios vectoriales

Teorema 1.2.9 (TEOREMA DE LA DIMENSIÓN). *Sean U y V dos k -espacios vectoriales donde U tiene dimensión finita, y sea $f : U \rightarrow V$ una transformación lineal. Entonces*

$$\dim(U) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)),$$

siendo $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$ el núcleo y la imagen de la aplicación f respectivamente.

En [6] se puede encontrar los conceptos de núcleo e imagen de una transformación lineal, así como los de dimensión y bases de espacios vectoriales.

Observación 1.2.10. *Si la aplicación lineal f puede ser descrita mediante una matriz A de dimensión $n \times m$, entonces*

$$n = \dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = \dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A).$$

Capítulo 2

Matrices asociadas a grafos

Uno de los problemas principales de la teoría algebraica de grafos es determinar qué propiedades de grafos aparecen reflejadas en las propiedades de sus matrices asociadas.

En este capítulo definiremos matrices que están naturalmente asociadas a grafos. Para poder establecer esta relación entre grafos y matrices necesitaremos que los grafos estén etiquetados.

A lo largo de este capítulo introduciremos la matriz de adyacencia, de incidencia y laplaciana, además de las matrices de alcance y de distancias.

Gracias a ellas estudiaremos si un grafo es conexo o no, si es bipartito o no lo es, cuántos caminos de una determinada longitud hay en un grafo entre dos vértices suyos cualesquiera o cuántos árboles maximales hay contenidos en él.

En todo el capítulo la terminología empleada y la mayor parte conceptos definidos se recogen en [5, 7, 9].

2.1. La matriz de adyacencia

De las relaciones de adyacencia entre los vértices de un grafo pueden deducirse propiedades acerca de los caminos que éste contiene y de su conexión. Para estudiarlas presentaremos y profundizaremos a continuación la noción de matriz de adyacencia de un grafo.

Definición 2.1.1 (MATRIZ DE ADYACENCIA). *Sea $G = (V, E)$ un grafo etiquetado con n vértices, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Se define su matriz de adyacencia como $A_{n \times n} = (a_{ij})$, donde cada entrada a_{ij} indica el número de aristas incidentes desde v_i hasta v_j .*

Puede notarse que en esta definición el grafo G no tiene porqué ser simple. Este grafo puede tener tanto lazos como aristas múltiples e incluso ser dirigido.

En todo lo que sigue en esta sección consideraremos $G = (V, E)$ un grafo cuyos vértices están etiquetados, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. La Figura 2.1 muestra un grafo etiquetado G y su matriz de adyacencia A .

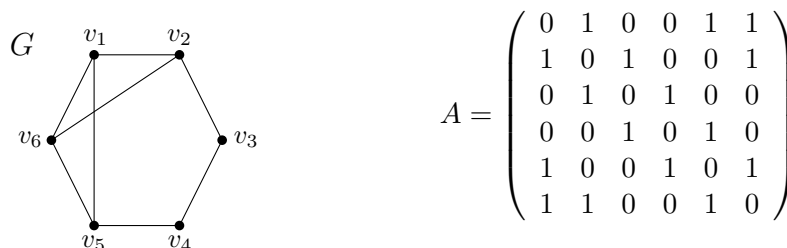


Figura 2.1: Grafo simple y su matriz de adyacencia.

De esta definición podemos deducir de manera inmediata las propiedades que aparecen en la siguiente proposición.

Proposición 2.1.2. *Se verifica*

1. *La matriz de adyacencia de un grafo no dirigido es simétrica, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$ para cada i y j . Esto se verifica porque si el vértice v_i es adyacente al v_j , este último también lo es del primero.*
2. *La matriz de adyacencia depende del etiquetado del grafo. Existe una correspondencia biyectiva entre los grafos simples etiquetados con n vértices y las matrices $n \times n$ simétricas binarias con ceros en la diagonal.*
3. *La matriz de adyacencia de un multigrafo no es binaria.*
4. *La diagonal de la matriz de adyacencia de un pseudografo no está formada únicamente por ceros.*
5. *Si un grafo tiene un vértice v_i aislado, tanto la fila como la columna i -ésima de A estarán formadas por ceros.*
6. *Si G es un grafo no dirigido, la suma de los elementos de la fila (o columna) i -ésima de su matriz de adyacencia coincide con el grado del vértice v_i .*

$$\delta(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji}$$

7. En la matriz de adyacencia de un grafo no dirigido sin lazos, la suma de todos los elementos es el doble del tamaño del grafo, es decir, el doble del número de aristas del grafo. En grafos dirigidos, la suma de todos los elementos de A da exactamente el tamaño del grafo.

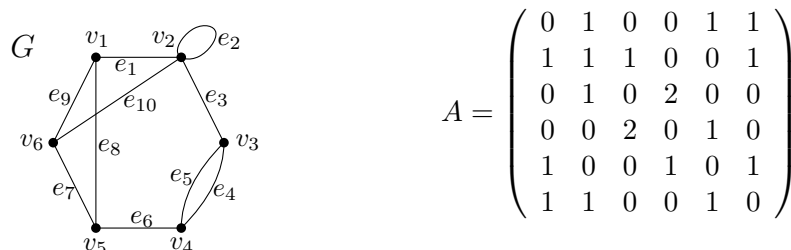


Figura 2.2: Grafo no simple y su matriz de adyacencia.

En la propiedad 2 de la proposición anterior comentamos que distintos etiquetados de un mismo grafo originan, en general, matrices de adyacencia diferentes. Estas matrices están relacionadas entre sí tal y como veremos a continuación.

Proposición 2.1.3. Si A_1 y A_2 son dos matrices de adyacencia para diferentes etiquetados de un mismo grafo simple G , entonces existe una matriz de paso P , o matriz permutación, que es regular y verifica

$$A_1 = P^t A_2 P.$$

Demostración. Basta notar que un distinto etiquetado de un grafo origina matrices de adyacencia equivalentes, es decir, se puede pasar de una a otra mediante un número determinado de intercambios de filas y/o columnas.

Además, como la matriz de adyacencia de un grafo simple es simétrica, para pasar de A_1 a A_2 lo hacemos mediante un número finito de operaciones elementales por filas y las mismas operaciones y en el mismo orden pero por columnas, es decir, por la Definición 1.2.3 tenemos que A_1 y A_2 son congruentes.

Por lo tanto, usando la Proposición 1.2.4, se tiene que existe una matriz regular P que verifica $A_1 = P^t A_2 P$. \square

Las diversas familias infinitas de grafos que vimos en el Capítulo 1 tienen asociadas matrices con cierta regularidad. Por ejemplo, si pensamos en un grafo completo, independientemente del etiquetado de sus vértices, tendremos que su matriz de adyacencia es una matriz cuadrada de orden n donde

todos los elementos extradiagonales son unos y los elementos de la diagonal son cero. Esto es ya que todos los vértices de un grafo K_n están conectados mediante aristas entre sí y no existen lazos que conecte un vértice consigo mismo.

Es fácil ver también que los grafos del tipo P_n tienen asociadas matrices de adyacencia tridiagonales, donde los elementos de la diagonal son ceros y los elementos que están exactamente por encima y por debajo de ésta son unos. Además, como los grafos C_n resultan al unir los vértices extremos de grafos P_{n+1} , sus matrices de adyacencia tendrán la misma estructura que la de los P_n salvo que las entradas $(1, n)$ y $(n, 1)$ pasarán de ser ceros a ser unos.

En la Figura 2.3 se muestran las matrices de adyacencia asociadas a los grafos K_5 , P_5 y C_5 . En ellas podemos observar las particularidades que acabamos de mencionar.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2.3: Matrices de adyacencia asociadas a los grafos K_5 , P_5 y C_5 respectivamente.

A continuación, en la proposición siguiente, veremos qué forma tienen las matrices de adyacencia para grafos bipartitos. Este resultado es importante en problemas de asignación típicos de optimización combinatoria [8]. Además, el concepto de grafo bipartito es clave cuando hablamos de emparejamiento o *matching* de un grafo (Capítulo 4 de [5]).

Proposición 2.1.4. *Sea $G = (V, A)$ un grafo bipartito de conjuntos de vértices disjuntos $V_1 = \{v_1, \dots, v_k\}$ y $V_2 = \{v_{k+1}, \dots, v_n\}$, tal que $V = V_1 \cup V_2$ y sólo existen aristas que conectan vértices de V_1 con vértices de V_2 . Entonces, con este etiquetado de V , la matriz de adyacencia de G tiene la forma*

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \theta & B \\ \hline B^t & \theta \end{array} \right),$$

donde B es una matriz binaria de dimensión $k \times (n - k)$ y B^t su matriz traspuesta.

Esta proposición es inmediata a partir de las definiciones.

2.1.1. Caminos y arcos

En este apartado pretendemos encontrar qué información contiene la matriz de adyacencia en relación con el número de caminos que un grafo posee y, en particular, con el número de caminos existentes entre dos vértices de dicho grafo. Este es el resultado que recogeremos en el Teorema 2.1.5.

Para llegar hasta él comenzaremos elevando al cuadrado la matriz de adyacencia del grafo de la Figura 2.2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vamos a fijarnos en el elemento b_{25} de la matriz $B = A^2$. Ese elemento vale 2 y resulta de multiplicar la segunda fila por la quinta columna.

$$b_{25} = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2$$

Este resultado indica que hay 2 caminos de longitud 2 entre los vértices v_2 y v_5 . Estos caminos quedan reflejados en los sumandos no nulos que aparecen en el cálculo de b_{25} .

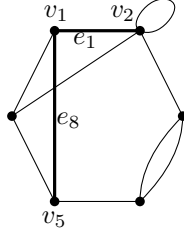
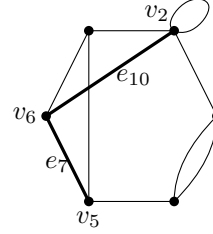
En efecto, el primer sumando no nulo aparece al multiplicar el elemento a_{21} por a_{15} . El elemento a_{21} vale 1 ya que hay una arista que une v_2 con v_1 , en este caso e_1 ; y a_{15} vale 1 ya que el vértice v_1 se encuentra unido con el vértice v_5 a través de la arista e_8 .

Por lo tanto, un camino de longitud dos entre v_2 y v_5 es $\gamma_1 = \{v_2 e_1 v_1 e_8 v_5\}$.

De la misma manera, con el otro sumando no nulo, se obtiene que otro camino de longitud dos entre estos vértices es $\gamma_2 = \{v_2 e_{10} v_6 e_7 v_5\}$.

Siguiendo el mismo procedimiento, vemos que hay $b_{33} = 5$ caminos de longitud dos entre v_3 y él mismo son: $\gamma_1 = \{v_3 e_3 v_2 e_3 v_3\}$, $\gamma_2 = \{v_3 e_4 v_4 e_4 v_3\}$, $\gamma_3 = \{v_3 e_5 v_4 e_5 v_3\}$, $\gamma_4 = \{v_3 e_4 v_4 e_5 v_3\}$ y $\gamma_5 = \{v_3 e_5 v_4 e_4 v_3\}$.

En el teorema siguiente formalizaremos las ideas vistas sobre este ejemplo.

Figura 2.4: Camino γ_1 entre v_2 y v_5 .Figura 2.5: Camino γ_2 entre v_2 y v_5 .

Teorema 2.1.5. *Sea G un grafo de n vértices con matriz de adyacencia $A = (a_{ij})$. Entonces el elemento (i, j) de A^k , que denotaremos por $a_{ij}^{(k)}$, es el número de caminos de longitud k desde v_i a v_j .*

Demostración. Realizaremos la prueba por inducción.

Para $k = 1$, según el teorema, el elemento a_{ij} indica el número de caminos diferentes de longitud uno entre v_i y v_j . Esto se verifica por la definición de matriz de adyacencia, ya que un camino de longitud uno desde v_i a v_j es justamente la arista que une ambos vértices.

Ahora supondremos que el teorema es cierto para $k - 1$, con $k > 1$. Es decir, $a_{ij}^{(k-1)}$ es el número de caminos diferentes de longitud $k - 1$ desde v_i hasta v_j .

Queremos probar el teorema para k , es decir, $a_{ij}^{(k)}$ es el número de caminos diferentes de longitud k entre v_i y v_j .

$$\text{Como } A^k = A^{k-1}A, \text{ se tiene que } a_{ij}^{(k)} = \sum_{t=1}^n a_{it}^{(k-1)} a_{tj}.$$

Por otro lado, los caminos de longitud k entre v_i y v_j son caminos de longitud $k - 1$ entre v_i y v_t , siendo v_t un vértice adyacente a v_j , seguidos de una arista v_tv_j . Como hemos supuesto en la hipótesis de inducción que b_{it} es el número de caminos de longitud $k - 1$ desde v_i hasta v_t , y sabemos por nuestro caso base que a_{tj} es el número de caminos de longitud uno entre v_t y v_j , entonces el número total de caminos entre v_i y v_j será $\sum_{t=1}^n a_{it}^{(k-1)} a_{tj}$, que es tal y como hemos denotado a las entradas de la matriz A^k . \square

Cabe notar que el razonamiento seguido en la prueba anterior es válido tanto si G es dirigido como si no lo es.

De este teorema podemos deducir de forma inmediata las siguientes propiedades.

Corolario 2.1.6. *Sea G un grafo simple. Siguiendo la notación del teorema anterior se tiene que:*

1. $a_{ii}^{(2)} = \delta(v_i)$.
2. $a_{ii}^{(3)}$ es el doble del número de triángulos que contienen al vértice v_i .

Considerando por ejemplo el grafo simple de la Figura 2.1, tenemos que las potencias segunda y tercera de su matriz de adyacencia son

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

De aquí, fijándonos en la diagonal de la matriz A^2 , tenemos que los vértices v_1, v_2, v_5 y v_6 tienen grado 3, mientras que los vértices v_3 y v_4 tienen grado 2.

Por otro lado, hallando la mitad de los elementos de la diagonal de la matriz A^3 , deducimos que los vértices v_1 y v_6 están contenidos en dos triángulos, los vértices v_2 y v_5 están en un único triángulo cada uno de ellos, y ningún triángulo del grafo contiene a los vértices v_3 ó v_4 .

2.1.2. Conexión

El resultado que acabamos de estudiar es de gran utilidad para determinar si un grafo es o no conexo. Esto es ya que dos vértices estarán en una misma componente conexa si existe algún camino entre ambos.

Teorema 2.1.7 (CARACTERIZACIÓN DE GRAFOS CONEXOS). *Sea G un grafo de n vértices con matriz de adyacencia A y sea $B = (b_{ij})$ la matriz*

$$B = A + A^2 + \dots + A^{n-1}.$$

Entonces G es conexo si y sólo si $b_{ij} \neq 0$, con $i \neq j$, es decir, si y sólo si los elementos extradiagonales de la matriz B son no nulos.

Demostración. Al igual que antes, denotaremos por $a_{ij}^{(k)}$ al elemento (i, j) de la matriz A^k , donde $k = 1, \dots, n-1$. Entonces

$$b_{ij} = a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \dots + a_{ij}^{(n-1)}.$$

Por el Teorema 2.1.5, sabemos que los elementos $a_{ij}^{(k)}$ indican el número de caminos distintos de longitud k entre v_i y v_j . Así deducimos que b_{ij} es el número de caminos diferentes entre v_i y v_j de longitud menor que n .

Supongamos en primer lugar que G es conexo, es decir, que para todo par de vértices hay un camino que lo une. El grafo G tiene n vértices, por lo que dicho camino atravesará a lo más n vértices y su longitud será por tanto menor que n . Como este resultado se tiene para dos vértices cualesquiera, entonces $b_{ij} \neq 0$, con $i \neq j$.

Recíprocamente, si suponemos que $b_{ij} \neq 0$, con $i \neq j$, entonces hay al menos un camino de longitud menor que n desde v_i a v_j . Esto quiere decir que para todo (i, j) , con $i \neq j$, los vértices v_i a v_j están en la misma componente conexa. Por consiguiente, G es un grafo conexo. \square

Ilustremos el teorema con dos ejemplos. Utilizándolo vamos a comprobar que el grafo G_1 de la Figura 2.6 es conexo y que el grafo G_2 de la Figura 2.7 no lo es.

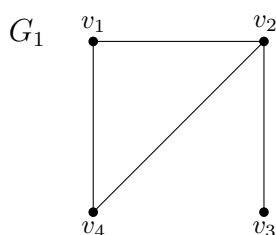


Figura 2.6: Grafo conexo.

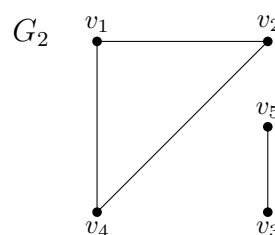


Figura 2.7: Grafo disconexo.

Sea $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz de adyacencia del grafo G_1 .

Entonces $A_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A_1^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Por lo tanto,

$$B_1 = A_1 + A_1^2 + A_1^3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Como todos los elementos extradiagonales de B_1 son no nulos, podemos afirmar que G_1 es un grafo conexo.

Análogamente, siendo $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz de adyacencia

de G_2 , se tiene lo siguiente:

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2^4 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Así, } B_2 = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 10 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como B_2 tiene ceros extradiagonales, G_2 no es un grafo conexo.

Las matrices de adyacencia de grafos desconexos, al igual que la de los grafos bipartitos como vimos en la Proposición 2.1.4, tienen una forma característica.

Proposición 2.1.8. *Si G es un grafo con dos componentes conexas, existe un etiquetado de los vértices de G de manera que su matriz de adyacencia A resulta de la forma*

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \theta \\ \hline \theta & A_2 \end{array} \right),$$

donde A_1 y A_2 son las matrices de adyacencia de cada una de las componentes conexas de G .

En el caso de que G sea un grafo desconexo con más de dos componentes conexas, existe un etiquetado de vértices tal que la matriz de adyacencia es diagonal por bloques.

Anteriormente dedujimos que el grafo G_2 de la Figura 2.7 era desconexo. Por la proposición anterior, existe una reordenación de vértices que transforma su matriz de adyacencia en una matriz diagonal por bloques.

En este caso, intercambiando las etiquetas v_3 y v_4 , quedarían los vértices $\{v_1, v_2, v_3\}$ en una componente conexas y $\{v_4, v_5\}$ en la otra. Y, paralelamente, la matriz de adyacencia resultante del nuevo etiquetado, A'_2 , es la matriz que surge tras intercambiar las filas y columnas 3 y 4 en la matriz A_2 .

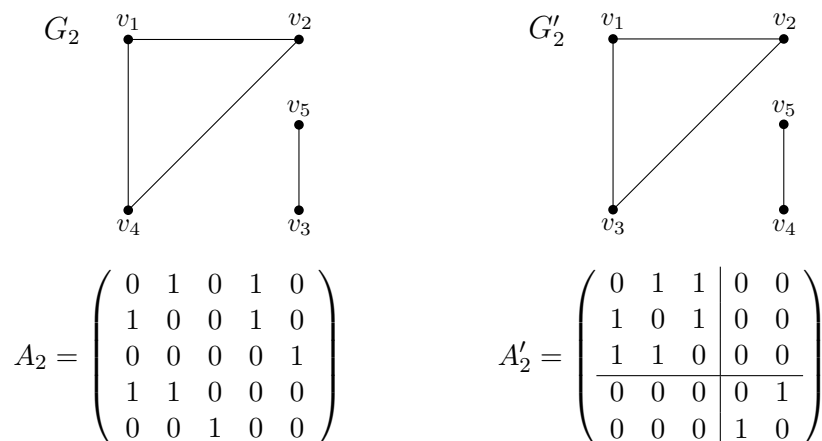


Figura 2.8: Reordenación de vértices en grafos disconexos.

En A'_2 puede observarse que cada bloque de la diagonal es matriz de adyacencia de una de las componentes conexas de G'_2 .

Observamos que este resultado es consistente para grafos no simples en general.

2.2. La matriz de incidencia

Existen otras formas de representar grafos mediante matrices. Cada representación matricial tiene sus virtudes y desventajas. En particular, la matriz de incidencia es muy utilizada en la programación.

Definición 2.2.1 (MATRIZ DE INCIDENCIA). Sea $G = (V, E)$ un grafo etiquetado con n vértices y m aristas, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. La matriz de incidencia de G viene definida por $M_{n \times m} = (m_{ij})$, donde

si G es un grafo no dirigido,

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } v_i \text{ no es incidente con } e_j \\ 1 & \text{si } v_i \text{ es incidente con } e_j \\ 2 & \text{si la arista } e_j \text{ es un lazo en el vértice } v_i \end{cases}$$

y si G es un grafo dirigido,

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } v_i \text{ no es incidente con } e_j \\ 1 & \text{si } v_i \text{ es el comienzo de la arista dirigida } e_j \\ -1 & \text{si } v_i \text{ es el final de la arista dirigida } e_j \\ 2 & \text{si } e_j \text{ es un lazo en el vértice } v_i \end{cases}$$

En las Figuras 2.9 y 2.10 se muestran dos ejemplos de grafos con sus respectivas matrices de incidencia.

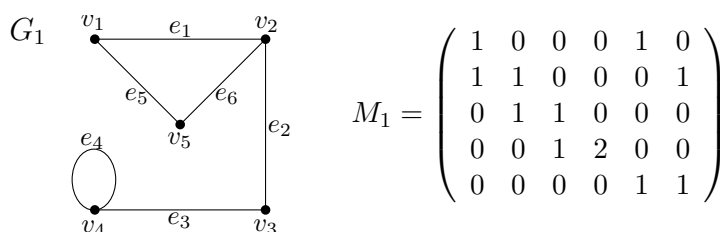


Figura 2.9: Grafo no dirigido y su matriz de incidencia.

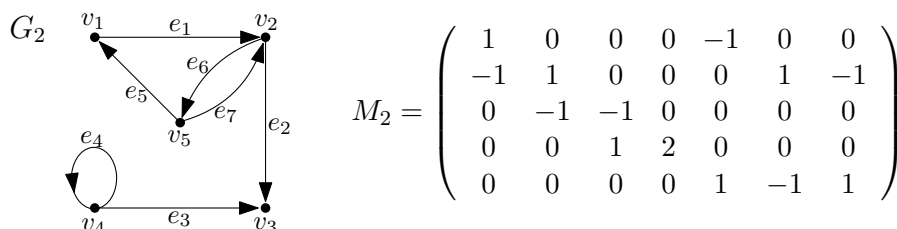


Figura 2.10: Grafo dirigido y su matriz de incidencia.

De la definición de matriz de incidencia derivan las propiedades que aparecen en esta proposición.

Proposición 2.2.2. *Se verifica*

1. *La matriz de incidencia, al igual que la de adyacencia, depende del etiquetado del grafo. Si M_1 y M_2 son dos matrices de incidencia para diferentes etiquetados de un mismo grafo G , entonces podemos pasar de la matriz M_1 a la matriz M_2 mediante intercambios de filas y columnas.*
2. *Para grafos no dirigidos, la suma de los elementos de la i -ésima fila de M da el grado del vértice v_i de G , mientras que la suma de los elementos de cualquier columna siempre es dos.*

3. Para digrafos sin lazos, la suma de los elementos de la i -ésima fila de M da la diferencia entre el grado de salida y el grado de entrada en v_i , mientras que la suma de los elementos de cualquier columna siempre es cero.

El siguiente resultado proporciona una relación entre las matrices de adyacencia e incidencia de un grafo.

Proposición 2.2.3. *Sea G un grafo simple con matriz de adyacencia A y matriz de incidencia M , y sea D una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son los grados de los vértices correspondientes, entonces*

$$A + D = MM^t.$$

Demostración. Si $i = j$, el producto de la i -ésima fila de M por la j -ésima columna de M^t es el grado del vértice v_i en G . Si $i \neq j$, la entrada (i, j) en MM^t es 1 ó 0 según v_i y v_j sean adyacentes o no en G . \square

Ahora vamos a considerar grafos simples. Dando una orientación a las aristas podemos construir la matriz de incidencia β asociada al grafo G con respecto a esta orientación.

Este tipo de matrices son usadas en ciencias de la computación para representar grafos de flujo de datos o grafos de control de flujos, en los que aparecen todos los caminos que pueden ser descritos por un programa durante su ejecución.

Definición 2.2.4 (MATRIZ DE INCIDENCIA RESPECTO A UNA ORIENTACIÓN). *Sea G un grafo simple no dirigido en el que tanto sus vértices como sus aristas están etiquetadas. Dando una orientación a las aristas de G podemos obtener la matriz de incidencia $\beta = (\beta_{ij})$ definida como sigue:*

$$\beta_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si } v_i \text{ es el vértice final de } e_j \\ -1 & \text{si } v_i \text{ es el vértice inicial de } e_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Aunque parezca un concepto sin relevancia lo usaremos en la proposición que sigue, la cual nos ayudará a demostrar el resultado principal de la Sección 2.3: el *Teorema de Kirchhoff*.

Proposición 2.2.5. *Sea G un grafo simple con n vértices y sea β la matriz de incidencia de G con respecto a una orientación dada. Denotando por $rg(\beta)$ al rango de la matriz β y por ω al número de componentes conexas de G , entonces se verifica $rg(\beta) = n - \omega$.*

Demostración. Sean G_1, \dots, G_ω las componentes conexas de G y n_i el número de vértices de cada componente G_i . Entonces, al igual que vimos para la matriz de adyacencia de grafos disconexos en la Proposición 2.1.8, β tiene una descomposición en bloques de modo que, para cada i con $1 \leq i \leq \omega$, $\beta^{(i)}$ es la matriz de incidencia, con respecto a la orientación correspondiente fijada en β , de la i -ésima componente conexa de G .

Para cada i con $1 \leq i \leq \omega$, como la suma de los elementos de cada columna de $\beta^{(i)}$ es nula, el rango de esta matriz es $rg(\beta^{(i)}) \leq n_i - 1$. Para concluir que $rg(\beta) = n - \omega$, basta probar que $rg(\beta^{(i)}) = rg((\beta^{(i)})^t) = n_i - 1$ para cada i con $1 \leq i \leq \omega$.

Por el Teorema 1.2.9, tenemos que

$$\dim(\text{Im}(f_i)) + \dim(\text{Ker}(f_i)) = n_i,$$

donde f_i es la aplicación definida por la matriz $(\beta^{(i)})^t$. Como la dimensión de la imagen de f_i coincide con el rango de $(\beta^{(i)})^t$, que queremos ver que es exactamente $n_i - 1$, probemos que el núcleo de $(\beta^{(i)})^t$ tiene dimensión 1. Para esto veamos que $\{\mathbf{1}^t = (1, \dots, 1)^t\}$ es base para este subespacio.

Claramente $\mathbf{1}^t \beta^{(i)} = \mathbf{0}$, o sea, $\mathbf{1} \in \text{Ker}((\beta^{(i)})^t)$. Sólo falta demostrar que $\text{Ker}((\beta^{(i)})^t)$ está generado por $\mathbf{1}$.

Sea $x \in \text{Ker}((\beta^{(i)})^t)$. Consideremos dos coordenadas x_l y x_k cualesquiera de x , relacionadas respectivamente a los vértices v_l y v_k de G_i . Como G_i es conexo, existe un subconjunto de vértices $\{v_l = v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_r} = v_k\}$, tales que existe una arista entre v_{j_p} y $v_{j_{(p+1)}}$ para cada $p = 1, \dots, r - 1$. Además, para cada una de estas $r - 1$ aristas, existe una columna c_p en $\beta^{(i)}$ (no necesariamente la p -ésima) cuyas entradas de orden j_p y $j_{(p+1)}$ en c_p valen una 1 y otra -1 , siendo el resto iguales a cero.

Como $x^t \beta^{(i)} = \mathbf{0}$, entonces $x^t c_i = \mathbf{0}$ y, por tanto, $x_{j_p} = x_{j_{(p+1)}}$. Pero como esto se tiene para todo $p = 1, \dots, r - 1$, se llega a que para cada l y k , $x_l = x_k$. Luego $x = \alpha \mathbf{1}$, para algún escalar α y así, $\mathbf{1}$ genera $\text{Ker}((\beta^{(i)})^t)$. \square

2.3. La matriz laplaciana. Teorema de Kirchhoff

El objetivo principal de esta sección es encontrar la forma de contar cuántos árboles maximales diferentes están contenidos en un grafo. Este es uno de los problemas más antiguos y famosos en Teoría de Grafos y fue resuelto por Kirchhoff mientras estudiaba circuitos eléctricos en 1847. Este resultado es conocido como Teorema de Kirchhoff o Teorema de matriz-árbol, y tiene gran importancia en diversos contextos, como la representación de moléculas en Química o el diseño de redes (Sección 4.6 de [9]).

Para presentarlo necesitaremos definir el concepto de matriz laplaciana y dar unos resultados previos que usaremos en su prueba.

Definición 2.3.1 (MATRIZ LAPLACIANA). Sea G un grafo simple no dirigido y etiquetado con n vértices, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Definimos la **matriz laplaciana o de Kirchhoff** como $L_{n \times n} = (l_{ij})$, con

$$l_{ij} = \begin{cases} \delta(v_i) & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i \neq j \text{ y } v_i \text{ es adyacente con } v_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Equivalentemente, $L = D - A$, donde $D = (d_{ij})$ es una matriz diagonal con $d_{ii} = \delta(v_i)$ y A es la matriz de adyacencia de G .

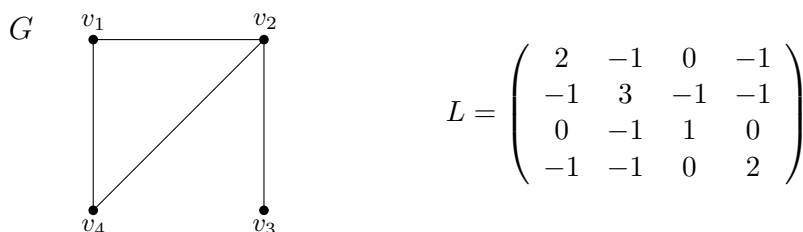


Figura 2.11: Grafo y su matriz laplaciana.

Proposición 2.3.2. Si β es la matriz de incidencia asociada al grafo G tras darle una orientación a sus aristas, entonces $L = \beta\beta^t$.

Demostración. En primer lugar vamos a construir la matriz $\beta = (\beta_{ij})$ eligiendo una orientación arbitraria, es decir, cambiando uno de los dos unos que aparecen en cada columna de la matriz de incidencia M de G por -1 .

La entrada (i, j) de $\beta\beta^t$ es $\beta_{i1}\beta_{j1} + \beta_{i2}\beta_{j2} + \dots + \beta_{im}\beta_{jm}$, que toma el valor $\delta(v_i)$ si $i = j$, -1 si v_i y v_j son adyacentes, y 0 en otro caso. Por lo tanto $\beta\beta^t = L$. \square

De esta proposición podemos deducir que la matriz laplaciana L es una matriz simétrica y semidefinida positiva. Por tanto, todos sus autovalores son mayores o iguales que cero.

Proposición 2.3.3. Sea G un grafo con n vértices y ω componentes conexas. Entonces el rango de L es $\text{rg}(L) = n - \omega$.

Demostración. Esta afirmación deriva directamente de la Proposición 2.2.5. De hecho, el rango de L es igual al rango de la matriz de incidencia β con respecto a cualquier orientación considerada en G , ya que hemos visto en la Proposición 2.3.2 que $L = \beta\beta^t$. \square

En todo lo que sigue, consideraremos que G es un grafo simple y conexo con n vértices y m aristas.

Lema 2.3.4. *La matriz adjunta de L , $\text{adj}(L)$, es múltiplo de J , siendo J la matriz cuadrada de orden n cuyas entradas son todas iguales a 1.*

Demostración. Como G es un grafo conexo, podemos afirmar por la Proposición 2.3.3 que $\text{rg}(L) = n - 1$. Además, el núcleo de L tiene dimensión 1 y es generado por $\mathbf{1}$. Por otro lado, como

$$L \cdot \text{adj}(L) = \det(L) \cdot I = 0 \cdot I = \theta$$

(con θ la matriz nula de orden n), entonces cada columna de $\text{adj}(L)$ pertenece al núcleo de L , siendo así un múltiplo del vector $\mathbf{1}^t$. Pero como L es una matriz simétrica, entonces $\text{adj}(L)$ también es simétrica y tiene, por lo tanto, todas las entradas iguales. \square

Lema 2.3.5. *Sea β la matriz de incidencia de G con respecto a una orientación dada. Entonces, toda submatriz cuadrada suya tiene determinante 0, 1 ó -1 .*

Demostración. Sea S una submatriz cuadrada de β . Si cada columna de S tiene dos entradas no nulas, entonces estas entradas son 1 y -1 y, por tanto, cada columna tiene suma igual a 0. Luego $\det(S) = 0$.

Supongamos ahora que al menos una columna de S tiene exactamente una entrada no nula. En este caso, denotando por S' a la matriz resultante al eliminar la fila y la columna en la que se encuentra dicha entrada, obtenemos $\det(S) = \det(S')$. Repitiendo este proceso, llegaremos a una matriz con determinante nulo o con una entrada no nula de β que tendrá entonces determinante 1 ó -1 . \square

Lema 2.3.6. *Consideremos cualquier submatriz de β obtenida tomando $n-1$ de sus columnas. Esta matriz de dimensión $n \times (n-1)$ corresponde a un subgrafo H de G que es maximal. Entonces, eliminando cualquier fila de esta submatriz, la matriz resultante β' es cuadrada de orden $n-1$ y tiene $|\det(\beta')| = 1$ ó 0 , según el subgrafo H sea o no un árbol.*

Demostración. Supongamos que eliminamos la fila k -ésima de la submatriz. Por el Lema 2.3.5, $|\det(\beta')| = 1$ ó 0 .

Como H tiene n vértices y $n - 1$ aristas, si H no es un árbol, necesariamente debe ser disconexo y una de las componentes no contiene el vértice v_k . Como las columnas de β' correspondientes a las aristas de esta componente suman 0 (pues cada arista une dos vértices la misma componente), las filas de β' son linealmente dependientes y, por lo tanto, $\det(\beta') = 0$.

Por otro lado, si H es un árbol, podemos renombrar sus vértices y aristas de la siguiente forma: llamamos $u_1 \neq v_k$ a un vértice de grado 1 de H (cualquier árbol tiene por lo menos dos vértices de grado 1) y e_1 a su arista incidente, llamamos $u_2 \neq v_k$ a un vértice extremo de $H - u_1$ y e_2 a su arista incidente, y así sucesivamente. Este reetiquetado de los vértices y aristas de H determina una nueva matriz β'' que puede ser obtenida mediante permutaciones de filas y columnas de β' . Entonces $|\det(\beta')| = |\det(\beta'')|$. Como β'' es triangular inferior con todos los elementos de la diagonal $+1$ ó -1 , llegamos a que $|\det(\beta')| = |\det(\beta'')| = 1$. \square

Tras estos resultados, podemos presentar y demostrar el teorema fundamental de esta sección.

Teorema 2.3.7 (TEOREMA DE KIRCHHOFF). *Sea G un grafo con matriz laplaciana L , entonces todos los cofactores de la matriz L son iguales y coinciden con el número de árboles maximales de G . Más precisamente,*

$$\text{adj}(L) = \tau(G) \cdot J,$$

donde $\tau(G)$ indica el número de árboles maximales de G y J es la matriz cuadrada de orden n cuyas entradas son todas iguales a 1 .

Demostración. Por el Lema 2.3.4, basta probar que cualquier cofactor de G es $\tau(G)$. Sea β_0 la matriz obtenida de β tras eliminar su última fila. Eliminando también la última fila y la última columna de L , observamos que la submatriz obtenida es exactamente $\beta_0 \beta_0^t$. Además, $\det(\beta_0 \beta_0^t)$ es el cofactor del elemento l_{nn} de L . Expandiendo este determinante por la fórmula de Binet-Cauchy, obtenemos

$$\det(\beta_0 \beta_0^t) = \sum_U \det(\beta_U) \det(\beta_U^t),$$

donde el sumatorio es considerado sobre todos los subconjuntos U de $\{1, \dots, n\}$ con $n - 1$ elementos y β_U denota la submatriz cuadrada de β_0 cuyas columnas corresponden exactamente a los elementos de U .

Por los Lemas 2.3.5 y 2.3.6, $\det(\beta_U) \neq 0$ si y sólo si el subgrafo cuyas aristas están en U y tiene todos los vértices de G es un árbol maximal de G y, entonces, $\det(\beta_U) = 1$ ó -1 . Como $\det(\beta_U) = \det(\beta_U^t)$ tenemos que $\det(\beta_0 \beta_0^t) = \tau(G)$. De ahí que $\text{adj}(L) = \tau(G) \cdot J$. \square

Si calculamos los cofactores de la matriz laplaciana de la Figura 2.11 observamos que todos valen 3. Esto indica que del grafo G pueden extraerse tres árboles maximales, como se ve en la Figura 2.12.

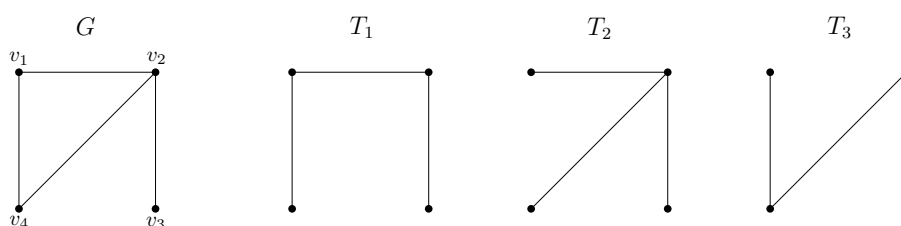


Figura 2.12: Grafo y sus árboles maximales.

2.4. Otras matrices asociadas a grafos

Aparte de las matrices de adyacencia, de incidencia y laplaciana, en este capítulo veremos brevemente otras tres matrices asociadas a grafos y, más concretamente, a digrafos.

Aparte de éstas, existen muchas otras que han tenido que ser definidas para abarcar y resolver problemas principalmente de investigación operativa y modelización y programación matemática [8].

Un estudio detallado de las matrices que a continuación se presentan pueden encontrarse en el Capítulo 16 de [7].

Definición 2.4.1 (MATRIZ DE ALCANCE). *Sea G un grafo etiquetado con n vértices. Se define su matriz de alcance como $R_{n \times n} = (r_{ij})$, donde r_{ij} toma el valor 1 si existe un camino desde v_i hasta v_j , y 0 en caso contrario.*

Definición 2.4.2 (MATRIZ DE DISTANCIAS). *Sea G un grafo etiquetado con n vértices. Se define su matriz de distancias como $C_{n \times n} = (c_{ij})$, donde c_{ij} da la distancia que hay desde el vértice v_i hasta el vértice v_j , y toma el valor infinito si no hay un camino desde v_i a v_j .*

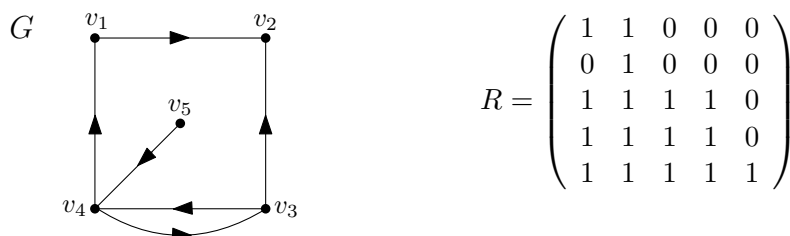


Figura 2.13: Digrafo y su matriz de alcance.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \infty \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \infty \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2.14: Matriz de distancias del grafo G de la Figura 2.13.

Proposición 2.4.3. *Las entradas de la matriz de alcance y de la matriz de distancias asociadas a un grafo G pueden obtenerse de las potencias de la matriz de adyacencia A de dicho grafo como sigue:*

1. $r_{ii} = 1$ y $c_{ii} = 0$.
2. $r_{ij} = 1$ si y sólo si $a_{ij}^{(k)} > 0$ para algún k .
3. c_{ij} es el menor k (si lo hay) tal que $a_{ij}^{(k)} > 0$. En otro caso es ∞ .

La demostración de esta proposición sigue de las Definiciones 2.4.1 y 2.4.2 y del Teorema 2.1.5.

Capítulo 3

Polinomios asociados a grafos

En el Capítulo 2 estudiamos matrices asociadas a grafos y vimos que de ellas podían extraerse ciertas propiedades de conexión y sobre el número de árboles maximales contenidos en el mismo.

En particular, los coeficientes del polinomio característico obtenido de la matriz de adyacencia y su espectro reflejan propiedades estructurales de grafos, conceptos que estudiaremos en la Sección 3.1 y trataremos tal cual se hace en el Capítulo 2 de [9].

Continuaremos el capítulo definiendo dos nuevos polinomios que se encuentran relacionados entre sí: el polinomio cromático y el polinomio de Tutte. Del primero obtendremos información sobre el coloreado de grafos; y del segundo, acerca del número de bosques y subgrafos que un grafo contiene, además del número de orientaciones acíclicas que el mismo posee, entre otras características.

Para la construcción de estos dos polinomios emplearemos algoritmos recursivos basados en operaciones por aristas. Estos algoritmos, junto a otros resultados, son descritos en los artículos [2, 10, 12, 13], además de en el Capítulo 7 de [1].

Concluiremos el capítulo citando otros polinomios de interés.

3.1. Polinomio característico

Comenzaremos la sección definiendo qué se entiende por polinomio característico de un grafo para, a continuación, estudiar propiedades que derivan de él.

Definición 3.1.1 (POLINOMIO CARACTERÍSTICO). *Sea G un grafo con n vértices (sin lazos ni aristas múltiples) y A su matriz de adyacencia. Defini-*

mos el **polinomio característico** de G como $p_G(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Cabe notar que el polinomio característico de un grafo es único, es decir, no depende del etiquetado de los vértices de G .

Proposición 3.1.2. *El polinomio característico de un grafo $G = (V, E)$ no depende del etiquetado de V .*

Demostración. Consideremos A_1 y A_2 las matrices de adyacencia de G correspondientes a dos etiquetados diferentes de los vértices de G , y denotemos por $p_G^{(1)}(\lambda)$ y $p_G^{(2)}(\lambda)$ a los polinomios característicos de G obtenidos a través de las matrices de adyacencia A_1 y A_2 respectivamente. Entonces existe una matriz permutación invertible P de manera que $A_1 = P^{-1}A_2P$.

Así vemos que $p_G^{(1)}(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = \det(P^{-1}A_2P - \lambda P^{-1}IP) = \det(P^{-1}(A_2 - \lambda I)P) = \det(P^{-1})\det(A_2 - \lambda I)\det(P) = \det(A_2 - \lambda I) = p_G^{(2)}(\lambda)$. \square

Consideraremos ahora el grafo diamante la Figura 3.1 y calcularemos su polinomio característico. Para ello, en primer lugar, necesitaremos su matriz de adyacencia asociada.

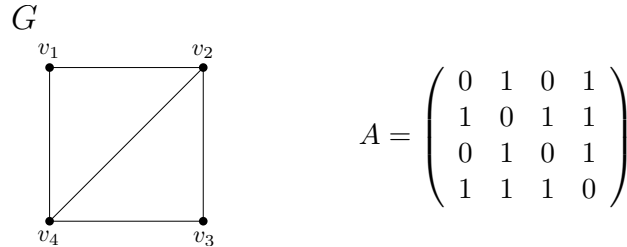


Figura 3.1: Grafo diamante y su matriz de adyacencia.

Entonces, el polinomio característico de G es

$$p_G(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda.$$

Definición 3.1.3 (AUTOVALOR DE UN GRAFO). *Decimos que λ es un **autovalor** del grafo G si es raíz de su polinomio característico $p_G(\lambda)$.*

Los autovalores del grafo de la figura anterior son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 \simeq 2,56155$ y $\lambda_4 \simeq -1,56155$ ya que $p_G(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda - 4)$ tiene esos autovalores como raíces.

Definición 3.1.4 (ESPECTRO DE UN GRAFO). *Sea G un grafo que posee s autovalores distintos $\lambda_1 > \dots > \lambda_s$ cuyas multiplicidades son, respectivamente, $m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_s)$. Definimos el **espectro** de G como*

$$\text{spec}(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_s \\ m(\lambda_1) & \cdots & m(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

El espectro del grafo que hemos considerado antes es

$$\text{spec}(G) = \begin{pmatrix} 2,56155 & 0 & -1 & -1,56155 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nota 1. *En lo que sigue del capítulo siempre consideraremos los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ordenados de manera estrictamente decreciente.*

En el caso en que G no es un grafo conexo, su polinomio característico puede ser obtenido como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.5. *Si G tiene dos componentes conexas G_1 y G_2 , entonces*

$$p_G(\lambda) = p_{G_1}(\lambda) \cdot p_{G_2}(\lambda).$$

En particular, si G_1, \dots, G_r son las componentes conexas de un grafo G se tiene que $p_G(\lambda) = p_{G_1}(\lambda) \cdots p_{G_r}(\lambda)$.

Demostración. Sea A_i la matriz de adyacencia de G_i para $i = 1, 2$. Según la Proposición 2.1.8, G admite un etiquetado de manera que su matriz de adyacencia es de la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \theta \\ \hline \theta & A_2 \end{array} \right).$$

Entonces, usando el Teorema 1.2.7, obtenemos $p_G(\lambda) = p_{G_1}(\lambda) \cdot p_{G_2}(\lambda)$. \square

La siguiente proposición muestra algunas relaciones entre los coeficientes del polinomio característico y el grafo al que hace referencia.

Proposición 3.1.6. *Sea G un grafo con n vértices y m aristas, y*

$$p_G(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n$$

su polinomio característico. Entonces los coeficientes de $p_G(\lambda)$ satisfacen:

1. $a_1 = 0$.
2. $-a_2 = m$.
3. $-a_3 = 2t$, siendo t el número de triángulos de G .

Demostración. Si $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n$ es el polinomio característico de A , entonces

$$a_i = (-1)^i \sum M_i(A),$$

donde $M_i(A)$ representa los menores principales de orden i de la matriz A .

1. Como la diagonal principal de A está formada por ceros, entonces todos sus menores principales de orden 1 valen 0. De aquí se deduce que $a_1 = 0$.
2. Cualquier menor principal de A de orden 2 con entradas no nulas es necesariamente de la forma

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Este menor aparece en A por cada par de vértices adyacentes de G y tiene valor -1 . Por lo tanto, $(-1)^2 a_2 = (-1)m$. Luego $-a_2 = m$.

3. Existen ocho posibilidades de menores principales de A de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

De estos determinantes, el único no nulo es el primero, cuyo valor es 2. Este menor principal corresponde a tres vértices de G mutuamente adyacentes, o sea, un triángulo. Así, $(-1)^3 a_3 = 2t$. De donde sigue, $-a_3 = 2t$.

□

Hemos visto que el polinomio característico del grafo diamante es $\lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$. En este polinomio, $a_1 = 0$, $a_2 = -5$ y $a_3 = -4$, por lo que se cumple la Proposición 3.1.6 ya que G tiene cinco aristas y dos triángulos.

Una vez conocidos los conceptos de polinomio característico y autovalores de un grafo, y recordando el Teorema 2.1.5, se deduce el siguiente resultado.

Proposición 3.1.7. *Sea G un grafo con n vértices y m aristas y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus autovalores. Si denotamos por T_k al número de caminos cerrados de longitud $k \geq 1$ que aparecen en G , entonces $T_k = \text{tr}(A^k)$. Por lo tanto, $T_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$, donde λ_i^k son los autovalores de la matriz A^k . En particular,*

1. *La suma de los cuadrados de los autovalores es dos veces el número de aristas, es decir, $\text{tr}(A^2) = 2m$.*
2. *Si G es un grafo regular de grado k , entonces $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = kn$.*
3. *La suma de los cubos de los autovalores es seis veces el número de triángulos de G , es decir, $\text{tr}(A^3) = 6t$.*

Demostración. Del Teorema 2.1.5 se tiene que el número de caminos cerrados de longitud k de G coincide con la traza de la matriz A^k . Esto es ya que los elementos de la diagonal principal de A^k indican el número de caminos de longitud k desde i hasta él mismo y, por lo tanto, los caminos serán cerrados. Por otra parte, de la Proposición 1.2.2 se tiene $T_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$.

1. La suma de los cuadrados de los autovalores es el número de caminos cerrados de longitud dos de G . Por cada arista de G tenemos dos caminos cerrados de longitud dos, uno que se recorre partiendo de uno de los vértices extremos, y otro camino partiendo del otro. Por lo tanto $\text{tr}(A^2) = 2m$.
2. Si G es un grafo regular de grado k se verifica $kn = 2m$ y, entonces, usando la propiedad anterior se tiene el resultado.
3. Esto se tiene porque un triángulo puede ser recorrido cerradamente de seis maneras distintas ya que para cada vértice hay dos formas de llegar a sí mismo.

□

Proposición 3.1.8. *Sea G un grafo conexo con diámetro d , entonces tiene al menos $d + 1$ autovalores distintos.*

Demostración. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ los autovalores distintos de G . Como A es simétrica con coeficientes reales, su polinomio mínimo tiene grado s y, por tanto,

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_s I) = 0.$$

De aquí se deduce que A^s es combinación lineal de $I, A, A^2, \dots, A^{s-1}$.

Supongamos que $s \leq d$ y consideremos u y v dos vértices de G tales que $d(u, v) = s$. Entonces, denotando por a_{uv}^i a la entrada de la matriz A^i que relaciona los vértices u y v , se tiene que $a_{uv}^i = 0$ para todo i con $0 \leq i \leq s-1$ y $a_{uv}^s > 0$. Esto contradice el hecho de que A^s pueda expresarse como combinación lineal de $I, A, A^2, \dots, A^{s-1}$. Entonces $s \geq d + 1$. \square

El diámetro del grafo diamante de la Figura 3.1 es dos y vimos que tenía 4 autovalores distintos. Por lo tanto, para este caso concreto, se verifica la proposición anterior ya que G tiene al menos 3 autovalores diferentes.

Proposición 3.1.9. *Sea G un grafo con n vértices, m aristas y autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, entonces*

$$\lambda_1 \leq \sqrt{2m \left(1 - \frac{1}{n}\right)}.$$

Demostración. Probaremos mediante un problema de optimización que el máximo valor posible que puede tomar λ_1 es el que aparece en el resultado. Para definir el problema de maximización necesitamos imponer unas restricciones que vendrán dadas por identidades ya vistas anteriormente.

De la Proposición 3.1.7 tenemos que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ y $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2m$. Sean f, g y h funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} definidas por $f(x_1, \dots, x_n) = x_1$, $g(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ y $h(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$, podemos considerar el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s.a :} \quad & g(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ & h(x_1, \dots, x_n) = 2m \end{aligned}$$

Definimos entonces la función lagrangiana

$$L(x_1, \dots, x_n, k_1, k_2) = x_1 - k_1(x_1 + \dots + x_n) - k_2(x_1^2 + \dots + x_n^2 - 2m)$$

y, resolviendo utilizando los multiplicadores de Lagrange, obtenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - k_1 - 2k_2x_1 = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -k_1 - 2k_2x_i = 0, \text{ para todo } i, 2 \leq i \leq n \quad (3.2)$$

Además conocemos que:

$$x_1 + \dots + x_n = 0 \quad (3.3)$$

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = 2m \quad (3.4)$$

Tenemos que $k_2 \neq 0$, ya que, de lo contrario, de (3.1) y (3.2) tendríamos que k_1 sería simultáneamente igual a 0 y 1.

De (3.2) sigue que para cada i , con $2 \leq i \leq n$, $x_i = \frac{-k_1}{2k_2}$. Sustituyendo esto en (3.3) llegamos a que $x_1 + (n-1) \left(\frac{-k_1}{2k_2} \right) = 0$. Luego,

$$x_1 = (n-1) \left(\frac{k_1}{2k_2} \right) \quad (3.5)$$

Sustituyendo (3.5) en (3.4), obtenemos $(n-1)^2 \left(\frac{k_1}{2k_2} \right)^2 + (n-1) \left(\frac{-k_1}{2k_2} \right)^2 =$
 $= (n-1) \left(\frac{k_1}{2k_2} \right)^2 (n-1+1) = n(n-1) \left(\frac{k_1}{2k_2} \right)^2 = 2m.$

Entonces $\frac{k_1}{2k_2} = \sqrt{\frac{2m}{n(n-1)}}$ y, volviendo a (3.5), obtenemos

$$x_1 = (n-1) \sqrt{\frac{2m}{n(n-1)}} = \sqrt{(n-1)^2 \frac{2m}{n(n-1)}} = \sqrt{2m \left(1 - \frac{1}{n} \right)}.$$

□

Veamos que este resultado se verifica para el grafo diamante de la Figura 3.1. En ese grafo $n = 4$, $m = 5$ y $2,56155$ y, entonces, se cumple

$$\lambda_1 = 2,56155 \leq \sqrt{2 \cdot 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)} \simeq 2,73861.$$

La proposición que sigue nos da una ligera idea sobre cómo son los autovalores de un grafo en el caso en que éste sea regular.

Proposición 3.1.10. *Sea G un grafo regular de grado k . Entonces:*

1. k es un autovalor de G .
2. G es conexo si y sólo si la multiplicidad de k es 1.
3. Cualquier autovalor λ de G satisface $|\lambda| \leq k$.

Demostración. 1. Sea $\mathbf{1}$ el vector columna $(1, 1, \dots, 1)^t$. Como G es regular de grado k , entonces la suma de los elementos de cada fila de la matriz de adyacencia A de G es k , el grado de cada vértice. Entonces se tiene que $A\mathbf{1} = k\mathbf{1}$, o sea, k es un autovalor de G .

2. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ un autovector asociado al autovalor k de G y supongamos que x_j es una entrada de x con valor absoluto máximo. Como $Ax = kx$, entonces $(Ax)_j = \sum x_i$, donde el sumatorio es considerado sobre los k vértices v_i que son adyacentes a v_j . Luego $\sum x_i = kx_j$. De ahí tenemos que, para cada l con v_l adyacente a v_j ,

$$|x_j| + (k-1)|x_j| = \left| \sum x_i \right| \leq \sum |x_i| \leq |x_l| + (k-1)|x_j|.$$

De ahí llegamos a que $|x_j| \leq |x_l|$ y, por tanto, $x_l = x_j$ para todos estos k vértices.

Como G es conexo, podemos repetir sucesivamente lo anterior hasta llegar que todas las entradas de x son iguales. Entonces x es múltiplo de $\mathbf{1}$ y el autoespacio asociado al autovalor k tiene dimensión 1.

Recíprocamente, si suponemos ahora que el autovalor k tiene multiplicidad 1 y que G es un grafo desconexo con G_1, \dots, G_s componentes conexas. Como cada una de ellas es un grafo regular de orden k entonces k es un autovalor de multiplicidad 1 para cada componente G_i . Además, por la Proposición 3.1.5, como $p_G(\lambda) = p_{G_1}(\lambda) \cdots p_{G_s}(\lambda)$ se sigue que k es un autovalor de G de multiplicidad s , que contradice la hipótesis. Luego, G es conexo.

3. Sea y un vector no nulo de G asociado al autovalor λ y sea y_j la entrada de y con máximo valor absoluto. Al igual que antes, $\sum y_i = \lambda y_j$ y $|\lambda| |y_j| = |\sum y_i| \leq \sum |y_i| \leq k |y_j|$. Luego, $|\lambda| \leq k$. \square

Consideremos el grafo G regular de grado 3 que aparece en la Figura 3.2. Si calculamos su polinomio característico obtenemos $p_G(\lambda) = \lambda^6 - 9\lambda^4 - 4\lambda^3 + 12\lambda^2$ y su espectro es

$$\text{spec}(G) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

De ahí vemos que el grado del grafo regular G , que es 3, es autovalor con multiplicidad 1 y los valores absolutos del resto de autovalores son inferiores a éste. Por lo que se verifica esta proposición.

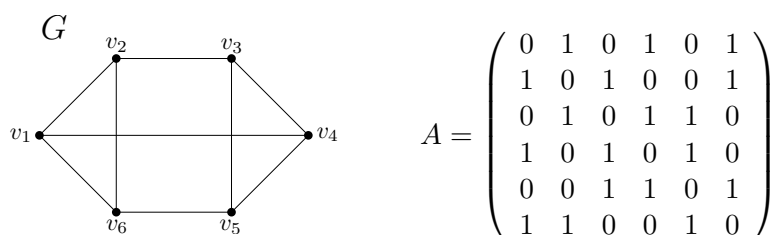


Figura 3.2: Grafo regular de grado 3 y su matriz de adyacencia.

Si el lector lo desea puede obtener más información sobre el polinomio característico de un grafo y, en general, acerca de la teoría espectral de grafos en los Capítulos 2 y 3 de [3].

3.2. Polinomio cromático

En esta sección nos centraremos en contar de cuántas formas distintas puede colorearse los vértices de un grafo con un número determinado de colores de manera que vértices adyacentes tengan coloraciones distintas.

Para ello construiremos un polinomio en una variable, el llamado *polinomio cromático*, cuya evaluación por números naturales indicará cuántas son esas formas distintas de colorear el grafo. Insistamos desde un principio en que trabajaremos con grafos simples o multigrafos.

Con esto podemos presentar la definición de polinomio cromático, pero antes definiremos qué entendemos por coloreado de un grafo.

Definición 3.2.1 (COLORACIÓN DE UN GRAFO). Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y S el conjunto de colores de la colección $\{1, \dots, k\}$. Una **coloración** de los vértices de G con los colores de S es una correspondencia tal que a cada uno de los vértices de G se le asigna un color de S de manera que dos vértices adyacentes no pueden recibir el mismo color. Formalmente, una k -coloración es una aplicación $c : V \rightarrow S$ tal que $c(u) \neq c(v)$ si existe una arista de G que une u y v . El valor de $c(u)$ es el color que recibe el vértice u en la coloración c . Además, se dice que un grafo G es k -**coloreable** si existe una k -coloración en vértices de G .

Aquí se presenta una 4-coloración del grafo de la Figura 3.2.

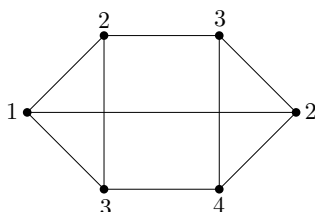


Figura 3.3: Ejemplo de coloreado de un grafo.

Sin embargo, es fácil ver que este grafo puede ser coloreado también con tres colores (coloreando con 1 el vértice coloreado con 4), que es el mínimo número de colores con el que lo podemos colorear. Esto es lo que se entiende por *número cromático* de un grafo.

Definición 3.2.2 (NÚMERO CROMÁTICO). Se define el **número cromático** de un grafo G como el menor valor $k \in \mathbb{N}$ tal que G es k -coloreable y se denota por $\chi(G)$. Si $k = \chi(G)$ se dice que el grafo G es k -cromático.

Por lo dicho anteriormente, el grafo de Figura 3.3 es 3-cromático.

Nota 2. Usaremos en lo que sigue $\chi_G(k)$ para denotar el número de maneras de colorear G con a lo más k colores. Esta misma notación será usada también para el polinomio cromático.

El polinomio cromático fue introducido por G. D. Birkhoff en 1912 para únicamente grafos planares con el objetivo de demostrar el Teorema de los cuatro colores. Más tarde, en 1932, H. Whitney generalizó este polinomio para grafos en general (Sección 9.3 de [4]).

El Teorema de los cuatro colores establece que todo mapa geográfico con regiones continuas puede ser coloreado con cuatro colores diferentes de forma

que no queden regiones adyacentes con el mismo color. Además del problema de los cuatro colores hay muchos otros que pueden resolverse mediante la coloración de un grafo de forma similar. Por ejemplo, la distribución de las conferencias de un congreso de manera que dos conferencias que puedan ser de interés para una persona no se impartan al mismo tiempo; el almacenamiento de productos químicos donde hay determinados productos que son incompatibles entre sí y, por lo tanto, deben almacenarse de manera independiente; o distribuir las especies de animales de un zoológico teniendo en mente que hay especies que no pueden cohabitar en un mismo territorio.

En la siguiente proposición se mencionan algunas propiedades inmediatas de $\chi_G(k)$.

Proposición 3.2.3. *Denotando por $\chi_G(k)$ al número de formas distintas en las que podemos colorear G con k colores, entonces:*

1. *Si $k < k'$ entonces $\chi_G(k) < \chi_G(k')$.*
2. *Si $k < \chi(G)$ entonces $\chi_G(k) = 0$.*
3. *Si $k \geq \chi(G)$ entonces $\chi_G(k) \geq 1$.*
4. *El número cromático de un grafo G es el menor número entero k a partir del cual no se anula $\chi_G(k)$.*
5. *Si G y G' son grafos isomorfos, entonces $\chi_G(k) = \chi_{G'}(k)$ ya que las coloraciones de G son transformadas por el propio isomorfismo en coloraciones de G' .*
6. *Si G es un grafo desconexo con G_1, \dots, G_r componentes conexas, entonces $\chi_G(k) = \chi_{G_1}(k) \cdots \chi_{G_r}(k)$.*

A continuación veremos dos resultados para el cálculo de $\chi_G(k)$ cuando G es un grafo con puntos de corte o aristas puente.

Proposición 3.2.4. *Si un grafo $G = G_1 \cup G_2$ tiene un punto de corte v que es el único vértice común entre G_1 y G_2 , entonces*

$$\chi_G(k) = \frac{\chi_{G_1}(k) \cdot \chi_{G_2}(k)}{k}.$$

Demostración. En primer lugar sería necesario notar que siendo G un grafo cualquiera y v uno de sus vértices elegido de forma arbitraria, el número de

coloraciones de G con los colores $\{1, \dots, k\}$ en las que el vértice v toma el color 1 sería $\chi_G(k)/k$.

Este mismo resultado se obtendría si en lugar de tomar v el color 1, adquiriera cualquiera de los otros colores.

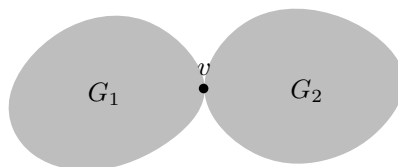


Figura 3.4: Situación de la Proposición 3.2.4.

Volviendo a nuestro problema y recordando que $V(G_1) \cap V(G_2) = \{v\}$, sin haber restricciones de colores para el vértice v , tenemos que existen $\chi_{G_1}(k)$ formas de colorear el grafo G_1 con k colores. En cualquiera de estas coloraciones ya habremos fijado un color en el vértice v , por lo tanto ahora podremos colorear G_2 de $\chi_{G_2}(k)/k$ diferentes, tal y como notamos antes.

Deducimos entonces que $\chi_G(k) = \frac{\chi_{G_1}(k) \cdot \chi_{G_2}(k)}{k}$. □

Proposición 3.2.5. *Sea G un grafo con una arista puente $e = uv$ que conecta las componentes G_1 y G_2 del grafo $G - e$, entonces*

$$\chi_G(k) = \frac{\chi_{G_1}(k) \cdot \chi_{G_2}(k)}{k(k-1)}.$$

Demostración. Basta notar que si tenemos un grafo cualquiera G y una arista suya $e = uv$, entonces el número de coloraciones de G con k colores donde u recibe el color 1 y v recibe el color 2 es

$$\frac{\chi_G(k)}{k(k-1)}.$$

Al igual que antes, en lugar de los colores 1 y 2 podríamos haber elegido cualquier otro par de colores.

Considerando entonces una coloración cualquiera de G_1 donde los vértices u y v tengan colores distintos i y j respectivamente, podemos hacer una partición de las $\chi_{G_2}(k)$ coloraciones de G_2 según la coloración de G_1 descrita

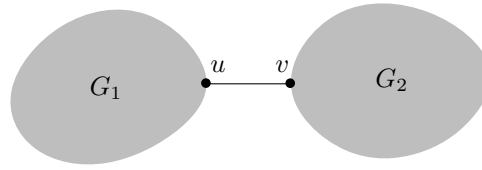


Figura 3.5: Situación de la Proposición 3.2.5.

anteriormente, es decir, donde los vértices u y v tomen los colores i y j . Estas coloraciones estarían en proporción $1/k(k-1)$, así que

$$\chi_G(k) = \frac{\chi_{G_1}(k) \cdot \chi_{G_2}(k)}{k(k-1)}.$$

□

Ahora vamos a calcular las expresiones de $\chi_G(k)$ para grafos lineales y completos mediante un proceso constructivo.

Proposición 3.2.6. $\chi_{P_n}(k) = k(k-1)^{n-1}$, con $n > 1$.

Demostración. Sea P_n el grafo lineal de vértices ordenados v_1, \dots, v_n . Para el primer vértice, v_1 , tenemos a nuestra disposición k colores. Una vez fijado el color del vértice v_1 , tendremos disponible únicamente $k-1$ colores para v_2 ya que no podemos usar el mismo color que hemos asignado al vértice v_1 .

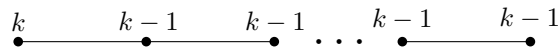


Figura 3.6: Situación de la Proposición 3.2.6.

A partir de ahí, cada vértice tendrá un color prohibido que corresponde al usado en el vértice anterior, por lo tanto, utilizando la regla del producto, se tiene el resultado. □

Observación 3.2.7. Para que $\chi_{P_n}(k)$ no se anule es necesario y suficiente que $k \geq 2$.

Proposición 3.2.8. $\chi_{K_n}(k) = k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1)$.

Demostración. Sea K_n el grafo completo de n vértices todos ellos conectados entre sí mediante aristas. Comencemos en primer lugar a colorear el vértice v_1 , para el que tenemos disponibles k colores. Fijado el color del vértice v_1 , otro vértice cualquiera del grafo (supongamos sin pérdida de generalidad v_2) sería adyacente a éste, así que lo podremos colorear con $k - 1$ colores distintos. Otro vértice arbitrario de K_n distinto a v_1 y v_2 sería adyacente a estos dos, así que sólo podría ser coloreado con $k - 2$ colores.

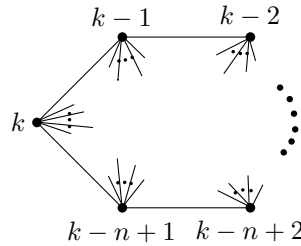


Figura 3.7: Situación de la Proposición 3.2.8.

Como el grafo es completo, siguiendo el razonamiento con todos los vértices, se llega al resultado. \square

Observación 3.2.9. Para que $\chi_{K_n}(k)$ no se anule debe verificarse $k \geq n$.

Utilicemos estos resultados para calcular la expresión de $\chi_G(k)$ del grafo toro que aparece en la Figura 3.8.

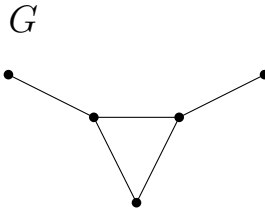


Figura 3.8: Grafo toro.

Como observamos, G tiene dos puntos de corte que conecta dos subgrafos P_2 de G con un subgrafo K_3 suyo. De la Proposición 3.2.6 tenemos que $\chi_{P_2}(k) = k(k - 1)$; y, de la Proposición 3.2.8, $\chi_{K_3}(k) = k(k - 1)(k - 2)$. Por lo tanto, haciendo uso ahora de la Proposición 3.2.4 deducimos que el valor de $\chi_G(k)$ del grafo toro es

$$\chi_G(k) = \frac{k^3(k - 1)^3(k - 2)}{k^2} = k(k - 1)^3(k - 2).$$

Calcular la expresión de $\chi_G(k)$ siendo G un grafo ciclo ya no es tan fácil. Imaginemos que tenemos que calcularla para el grafo C_3 . Como este grafo coincide con el grafo K_3 entonces $\chi_G(k) = k(k-1)(k-2)$. Sin embargo, para ciclos de la forma C_n con $n > 3$ comienzan a aparecer ciertos problemas.

Consideremos el ciclo C_4 de vértices v_1, \dots, v_4 cuyas aristas son $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1$. Si disponemos de k colores para colorear el grafo, primeramente podemos dar k colores diferentes al vértice v_1 . A continuación, para el vértice v_2 tenemos un color prohibido, por lo que podemos asignarle $k-1$ colores. Esto mismo ocurre para v_3 . Pero ahora para el vértice v_4 tenemos uno o dos colores prohibidos dependiendo de cómo hayamos coloreado los vértices v_1 y v_3 . Si los colores de estos dos vértices son iguales tendremos sólo un color prohibido, mientras que si son distintos tendremos dos.

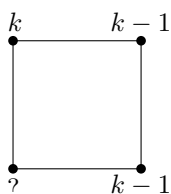


Figura 3.9: Esquema para el cálculo de $\chi_{C_4}(k)$.

En estos casos, y para otros grafos más complejos, tendremos que conocer otra forma alternativa de hallar $\chi_G(k)$. A continuación describiremos cómo hacerlo usando dos algoritmos: el *algoritmo de adición–contracción de aristas* y el *algoritmo de eliminación–contracción de aristas*.

3.2.1. Algoritmo de adición–contracción de aristas

Este algoritmo es relativamente útil si el grafo al que vamos a calcular su polinomio cromático tiene un gran número de aristas o, dicho de otra forma, le faltan pocas aristas para ser un grafo completo.

Describiremos el algoritmo como se expone en [10]. Consideremos el grafo particular G dado en la Figura 3.10 y fijémonos en un par de vértices no adyacentes, por ejemplo los etiquetados por u y v .

Ahora, las coloraciones en G con k colores son de dos tipos:

- a) Aquellas donde u y v tienen distinto color.
- b) Aquellas donde u y v tienen el mismo color.

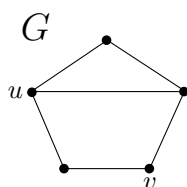


Figura 3.10

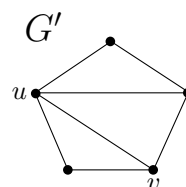
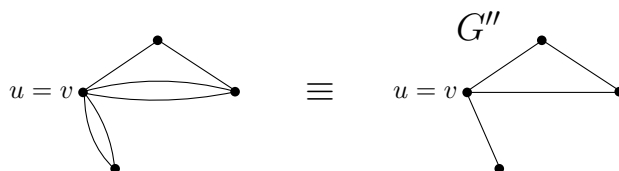


Figura 3.11

Las coloraciones de G de tipo a) coinciden con las coloraciones del grafo G' resultante al añadir la arista uv al grafo G , es decir, $G' = G + uv$, ya que la adición de esta arista no altera tal coloración. Véase la Figura 3.11. Recíprocamente, toda coloración G' corresponde a una coloración de G tipo a).

Ahora, una coloración de G tipo b) será una coloración del grafo G'' obtenido identificando los vértices u y v mediante la operación de contracción simple definida en la Sección 1.1.4, es decir, $G'' = G \setminus uv$. Notemos que podemos reemplazar las aristas múltiples por una única arista sin perder información sobre el coloreado del grafo resultante. Véase Figura 3.12. Recíprocamente, toda coloración G'' corresponde a una coloración de G tipo b).

Figura 3.12: Grafos equivalentes para el cálculo de $\chi_G(k)$.

A partir de estos resultados estamos en condiciones de definir el polinomio cromático de cualquier grafo.

Definición 3.2.10 (POLINOMIO CROMÁTICO). *El polinomio cromático de un grafo simple G se define de manera recursiva con la siguiente fórmula*

$$\chi_G(x) = \chi_{G+e}(x) + \chi_{G \setminus e}(x),$$

siendo e cualquier arista de G .

Obsérvese que esta notación es la misma que hemos utilizado anteriormente para denotar el número de coloraciones distintas de G usando k colores. Utilizaremos la variable x en lugar de k en lo que sigue cuando hablemos de polinomio cromático. Además, la evaluación en este polinomio de x por un

valor natural k dará $\chi_G(k)$ y tendrá el significado comentado anteriormente.

El algoritmo descrito consiste en ir añadiendo aristas para hacer del grafo inicial un grafo completo. Al mismo tiempo que vamos añadiendo aristas las iremos contrayendo y así también llegaremos, en un número finito de pasos, a grafos completos con menor número de vértices.

De esta manera, como conocemos la expresión del polinomio cromático de cualquier grafo completo, habremos determinado el polinomio cromático del grafo original.

Comprobemos mediante este algoritmo que el polinomio cromático del grafo toro es el que obtuvimos anteriormente.

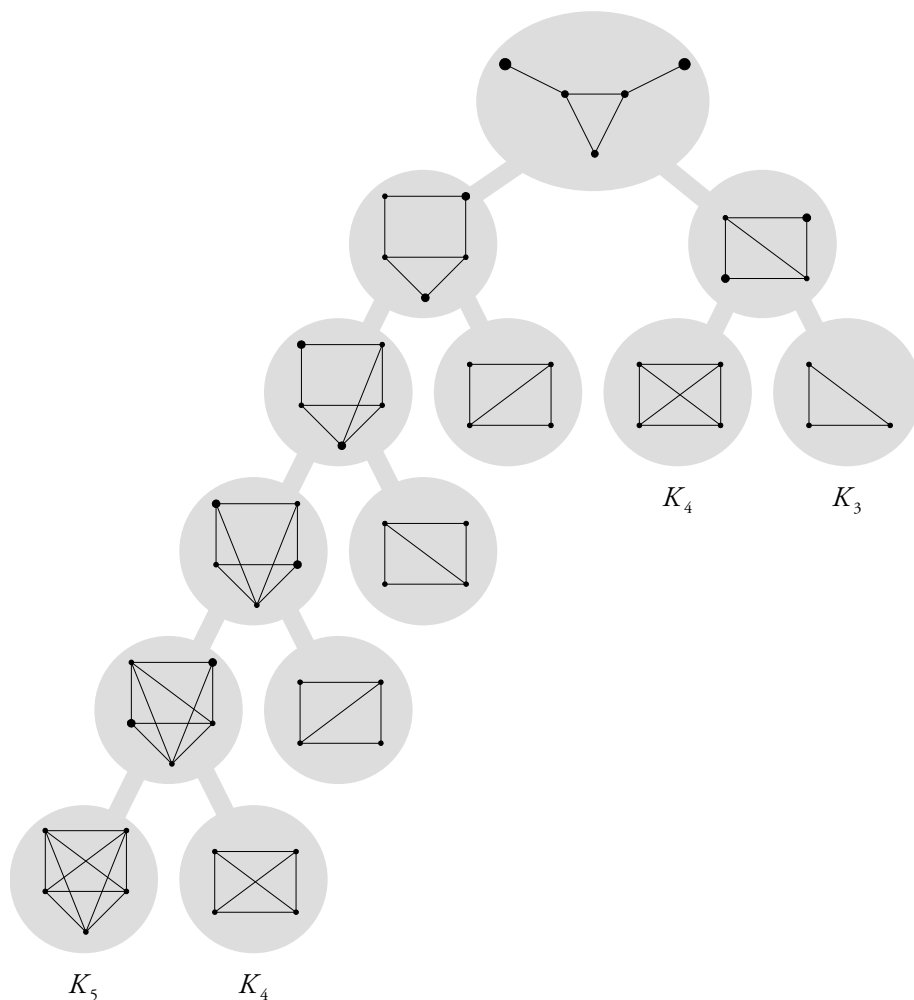


Figura 3.13: Llamadas del algoritmo de adición–contracción en el grafo toro.

El árbol binario precedente representa las llamadas de este algoritmo para el grafo toro. De cada nodo salen dos ramas: la izquierda da el grafo obtenido tras la adición de la arista que une los vértices destacados, y la derecha da el grafo obtenido tras su contracción. Un nodo se convierte en hoja cuando en éste aparece un grafo completo, ya que conocemos la expresión de su polinomio cromático. Por lo tanto, el polinomio cromático del grafo inicial será la suma de los polinomios cromáticos de los grafos que aparecen en las hojas del árbol.

De la Figura 3.13 tenemos que

$$\chi_G(x) = \chi_{K_5}(x) + \chi_{K_4}(x) + 4(\chi_{K_4}(x) + \chi_{K_3}(x)).$$

Usando la Proposición 3.2.8 y simplificando la expresión se obtiene

$$\chi_G(x) = x(x-1)^3(x-2).$$

3.2.2. Algoritmo de eliminación–contracción de aristas

Anteriormente comentamos que el algoritmo de adición–contracción de aristas es especialmente útil para hallar $\chi_G(x)$ cuando $G = (V, E)$ es un grafo «próximo» al grafo completo $K_{|V|}$.

Imaginemos ahora que pretendemos hallar el polinomio cromático de un grafo con pocas aristas y muchos vértices. Hacer esto con el algoritmo anterior resultaría bastante laborioso, pues tendríamos que añadir un gran número de aristas a G para completar el grafo y por lo tanto aumentaría la complejidad del algoritmo debido al carácter recursivo del mismo.

Por esta razón vamos a definir un nuevo algoritmo, que puede encontrarse en [1], para facilitar este cálculo en tal caso: el algoritmo de eliminación–contracción de aristas.

Definición 3.2.11. *El polinomio cromático de un grafo simple G se define de manera recursiva como*

$$\chi_G(x) = \chi_{G-e}(x) - \chi_{G \setminus e}(x).$$

La definición de este algoritmo puede ser obtenida fácilmente a partir del algoritmo de adición–contracción de aristas, ya que

$$\chi_{G-e}(x) = \chi_{G-e+e}(x) + \chi_{G \setminus e}(x).$$

En la Figura 3.14 se muestran las llamadas de este algoritmo, de nuevo, sobre el grafo toro.

Ahora la rama izquierda que sale de cada nodo da lugar al grafo resultante de la eliminación de la arista destacada, y la rama derecha da el grafo obtenido tras la contracción de ésta. Dejaremos de ramificar los nodos cuando en todos ellos hayamos llegado a grafos lineales o las componentes conexas de los grafos obtenidos sean lineales.

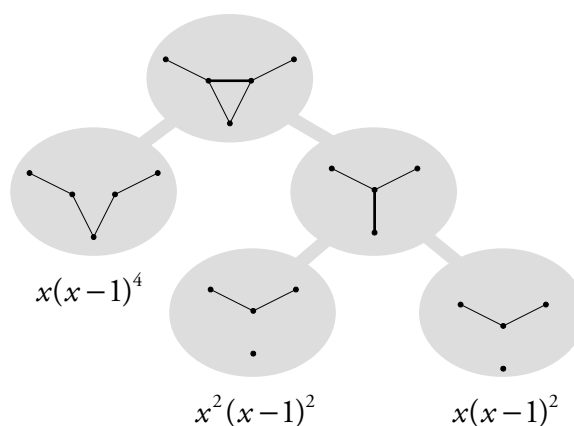


Figura 3.14: Llamadas del algoritmo de eliminación-contracción en el grafo toro.

De la figura tenemos que el polinomio cromático del grafo toro es

$$\chi_G(x) = x(x-1)^4 - [x^2(x-1)^2 - x(x-1)^2].$$

Simplificando la expresión anterior llegamos a que el polinomio cromático del grafo toro es, al igual que antes,

$$\chi_G(x) = x(x-1)^3(x-2).$$

3.3. Polinomio de Tutte

Otro de los polinomios de gran interés en Teoría de Grafos es el polinomio de Tutte. Este polinomio surgió cuando cuatro estudiantes universitarios, entre los que se encontraba Tutte, tomaron como pasatiempo estudiar los rectángulos perfectos. De ahí derivó la necesidad de estudiar el número

de árboles maximales de un grafo general G , lo que estos estudiantes denominaron por *complejidad* del grafo y denotaron por $C(G)$.

En [12, 13], el propio Tutte describe el proceso seguido hasta encontrar el polinomio, algunas de las propiedades que éste posee e incluso su relación con los rectángulos perfectos.

Entre los cuatro encontraron una fórmula recursiva que relacionaba la complejidad de un grafo G con las complejidades de dos nuevos grafos. Siguiendo la notación de [12], los grafos involucrados en la fórmula recursiva son: G'_e , que resultaba de suprimir la arista e de G ; y G''_e , que aparecía tras contraer la misma. La fórmula era

$$C(G) = C(G'_e) + C(G''_e) \quad (3.6)$$

Tutte se preguntó si existía otra fórmula recursiva similar a (3.6) para algún invariante de grafos bajo isomorfismo. Paralelamente, según Tutte, R. M. Foster había observado que el polinomio cromático de un grafo satisfacía tal fórmula recursiva pero con un menos en lugar de un más, como vimos en la Definición 3.2.11.

Las funciones que cumplen (3.6) son denominadas W -funciones en [12].

Por otra parte, algunas funciones de grafos, denominadas V -funciones, son multiplicativas por componentes, es decir, el valor de la función para un grafo dado es producto de los valores de las funciones de sus componentes.

Tutte consiguió jugando con las V, W -funciones para grafos no dirigidos un polinomio en dos variables del cual se podían obtener el polinomio cromático y otros polinomios interesantes anulando alguna de las variables y reajustando los signos.

Este polinomio Tutte lo llamó *polinomio dicromato* (del inglés, *dichromate polynomial*) pero más tarde, y en honor suyo, este polinomio pasó a ser llamado *polinomio de Tutte* a pesar de que H. Whitney había encontrado una expresión muy similar con coeficientes análogos, como veremos en (3.8) y (3.9).

El polinomio de Tutte puede ser calculado por distintos algoritmos. Sin embargo, el que se puede emplear de forma general y el que usaremos en la Sección 3.3.1 para calcularlo es el que en principio empleó Tutte, conocido ahora como algoritmo de eliminación-contracción de aristas y similar al de la Definición 3.2.11.

3.3.1. Algoritmo de eliminación–contracción de aristas

El objetivo de esta sección es obtener el polinomio de Tutte de manera recursiva. Esta recursión la haremos usando el algoritmo de eliminación–contracción de aristas en el que, tras dichas operaciones progresivas, se llega a grafos formados únicamente por una arista.

Esta arista puede ser del tipo $e = uv$, es decir, el grafo P_2 ; o una arista $e = uu$, que denominamos lazo. Finalmente procederemos a la reconstrucción del polinomio a partir de los casos base.

De aquí en adelante, si un grafo G está formado únicamente por una arista lazo o P_2 , denotaremos su polinomio de Tutte por $T_e(x, y)$.

Definición 3.3.1 (POLINOMIO DE TUTTE). *El polinomio de Tutte de un grafo $G = (V, E)$ no dirigido se define de manera recursiva como sigue:*

1. $T_G(x, y) = 1$ si G no tiene aristas.
2. $T_{e=uv}(x, y) = x$.
3. $T_{e=uu}(x, y) = y$.
4. $T_G(x, y) = T_{G-e}(x, y) + T_{G/e}(x, y)$, siempre que $e \in E$ no sea ni un puente ni un lazo.
5. Si $G = G_1 \cup G_2$ tiene un punto de corte v que es el único vértice común entre G_1 y G_2 , entonces $T_G(x, y) = T_{G_1}(x, y) \cdot T_{G_2}(x, y)$. Por lo tanto, en el caso en que $e \in E$ sea un puente o un lazo aplicaremos este resultado y obtendremos que:
 - a) Si e es un lazo en G entonces $T_G(x, y) = y \cdot T_{G-e}(x, y)$.
 - b) Si e es un puente en G entonces $T_G(x, y) = x \cdot T_{G/e}(x, y)$.

Usando el apartado 5 es fácil deducir que $T_{P_n}(x, y) = x^{n-1}$. Además, denotando por L_n al grafo formado por n lazos unidos entre sí por un vértice, se tiene que $T_{L_n}(x, y) = y^n$.

Tras la definición algorítmica es fácil observar que salvo encontrarnos en uno de los casos base, todos los pasos son recursivos y en el peor de los casos cada llamada recursiva generaría dos nuevas llamadas. Esto es lo que hace realmente difícil el cálculo manual de este polinomio para grafos con un gran número de aristas que no son ni lazos ni puentes, por ejemplo del tipo K_n .

En las siguientes proposiciones hallaremos el polinomio de Tutte de diversos tipos de grafos. Estas expresiones nos facilitarán en ocasiones el cálculo de dicho polinomio.

Proposición 3.3.2. *Sea M_n el multigrafo formado por 2 vértices y n aristas. Entonces $T_{M_n}(x, y) = x + \sum_{i=1}^{n-1} y^i$.*

Demostración. Para M_2 usando el algoritmo se obtiene

$$T_{M_2}(x, y) = T_{e=uv}(x, y) + T_{e=uu}(x, y) = x + y.$$

Por inducción en n se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} T_{M_n}(x, y) &= T_{M_{n-1}}(x, y) + T_{L_{n-1}}(x, y) = T_{M_{n-1}}(x, y) + y^{n-1} = \\ &= T_{M_{n-2}}(x, y) + y^{n-2} + y^{n-1} = T_{M_2}(x, y) + y^2 + \dots + y^{n-1} = \\ &= x + y + y^2 + \dots + y^{n-1} = x + \sum_{i=1}^{n-1} y^i. \end{aligned} \quad \square$$

Proposición 3.3.3. $T_{C_n} = y + \sum_{i=1}^{n-1} x^i$.

Demostración. Para C_3 usando el algoritmo se obtiene

$$T_{C_3}(x, y) = T_{P_3}(x, y) + T_{M_2}(x, y) = x^2 + x + y.$$

Por inducción en n se tiene que

$$\begin{aligned} T_{C_n}(x, y) &= T_{P_n}(x, y) + T_{C_{n-1}}(x, y) = x^{n-1} + T_{C_{n-1}}(x, y) = \\ &= x^{n-1} + x^{n-2} + T_{C_{n-2}}(x, y) = x^{n-1} + \dots + x^3 + T_{C_3}(x, y) = \\ &= x^{n-1} + \dots + x^3 + x^2 + x + y = y + \sum_{i=1}^{n-1} x^i. \end{aligned} \quad \square$$

En la Figura 3.15 puede verse la descomposición del grafo pez en los ciclos C_3 y C_4 a través de su punto de corte. Por lo tanto, haciendo uso del apartado 5 de la Definición 3.3.1 y de la Proposición 3.3.3, concluimos que el polinomio de Tutte del grafo pez es

$$T_G(x, y) = (x^3 + x^2 + x + y)(x^2 + x + y).$$

En la Figura 3.16 se muestran las llamadas que generaría el algoritmo para el cálculo del polinomio de Tutte del grafo C_4 . A la izquierda de cada nodo aparece el grafo obtenido tras la eliminación de la arista destacada y

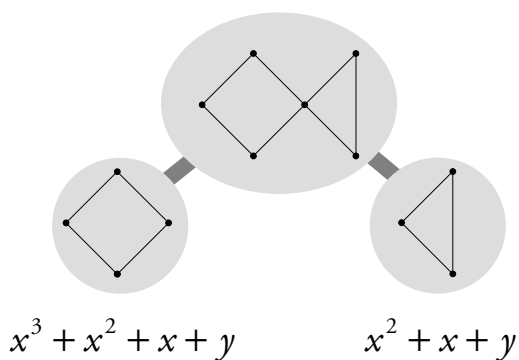


Figura 3.15: Descomposición del grafo pez en dos ciclos.

a la derecha del mismo el grafo resultante tras su contracción. Dejamos de ramificar un nodo cuando el grafo que aparece en éste sea una arista del tipo lazo o P_2 , o podamos obtener fácilmente aristas de este tipo descomponiendo el grafo por sus puntos de corte.

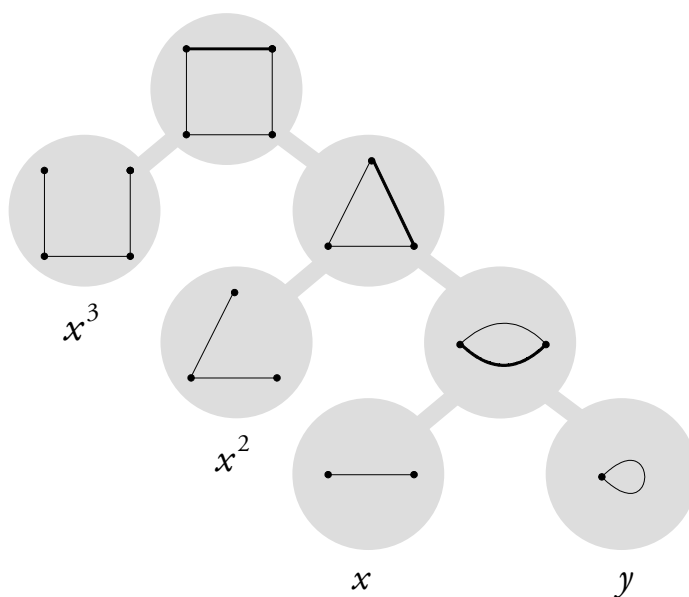


Figura 3.16: Llamadas del algoritmo de eliminación–contracción sobre el grafo C_4 .

Llegados a este punto es fácil notar que el polinomio de Tutte del grafo toro de la Figura 3.8 es

$$T_G(x, y) = x^2(x^2 + x + y). \tag{3.7}$$

Esto se debe a que el grafo toro tiene dos puntos de corte que descomponen el grafo en dos grafos P_2 y en un grafo C_3 .

Esa misma descomposición se tendría para el grafo de la Figura 3.17, por lo que tal grafo tendría el mismo polinomio de Tutte.

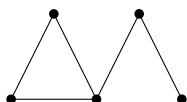


Figura 3.17: Grafo con el mismo polinomio de Tutte que el grafo toro.

De aquí deriva una interesante propiedad del polinomio de Tutte.

Observación 3.3.4. *El polinomio de Tutte es invariante por isomorfismo, es decir, grafos isomorfos están definidos por el mismo polinomio de Tutte; sin embargo, el recíproco no es cierto en general.*

3.3.2. Definiciones alternativas

Además de la definición recursiva dada anteriormente, en este epígrafe daremos dos definiciones alternativas y equivalentes de este polinomio: una en función de sus subgrafos maximales y otra en términos de sus árboles maximales. Para profundizar en ellas pueden verse [2, 11, 12].

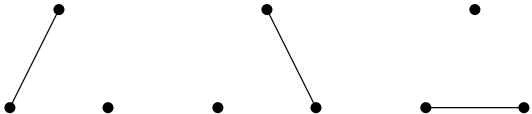
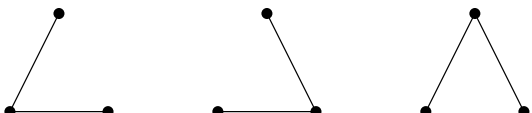
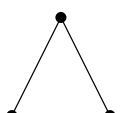
Definición 3.3.5. *Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido y $E' \subseteq E$. Si denotamos por $c(E')$ al número de componentes conexas del subgrafo que viene dado por (V, E') , entonces el **polinomio de Tutte** de G se define como*

$$T_G(x, y) = \sum_{E' \subseteq E} (x - 1)^{c(E') - c(E)} (y - 1)^{c(E') + |E'| - |V|}. \quad (3.8)$$

En lo que sigue, $c(E')$ simbolizará el número de componentes conexas del subgrafo maximal dado por (V, E') .

Como ejemplo, vamos a calcular el polinomio de Tutte del grafo K_3 . En este grafo $c(E) = 1$ y $|V| = 3$. Los valores de $c(E')$ y de $|E'|$ dependerán del subgrafo dado por (V, E') en cada caso.

En el Cuadro 3.1 se muestran los sumandos originados en el polinomio de Tutte por los subgrafos maximales del grafo K_3 , conforme a la definición anterior.

SUBGRAFOS MAXIMALES	$ E' $	$c(E')$	SUMANDO ORIGINADO
•	0	3	$(x - 1)^2$
	1	2	$x - 1$
	2	1	1
	3	1	$y - 1$

Cuadro 3.1: Obtención de los sumandos del polinomio de Tutte originados por cada uno de los subgrafos maximales del grafo K_3 .

De esa manera, sumando todos los sumandos originados, se obtiene que

$$T_{K_3}(x, y) = (x - 1)^2 + 3(x - 1) + 3 + (y - 1) = x^2 + x + 1.$$

Por otra parte, de la Definición 3.3.5 es claro ver que se verifica el apartado 5 de la Definición 3.3.1, es decir, todo grafo G que es unión disjunta de dos grafos G_1 y G_2 ($G = G_1 \cup G_2$) verifica que

$$T_G(x, y) = T_{G_1}(x, y) \cdot T_{G_2}(x, y).$$

En el siguiente resultado caracterizaremos el polinomio de Tutte del grafo dual de cualquier grafo plano.

Proposición 3.3.6. *Para todo grafo plano G se verifica*

$$T_G(x, y) = T_{G^*}(y, x).$$

Demostración. Basta usar el hecho de que si $X \subseteq E$, entonces se tiene que $r^*(E) = |E| - r(E)$ y $r^*(X) = |X| - r(E) + r(E - X)$, donde r^* denota la

función rango de G^* . Entonces,

$$\begin{aligned}
 T_{G^*}(x, y) &= \sum_{X \subseteq E} (x-1)^{r^*(E)-r^*(X)} (y-1)^{|X|-r^*(X)} = \\
 &= \sum_{X \subseteq E} (x-1)^{|E|-r(E)-|X|+r(E)-r(E-X)} (y-1)^{r(E)-r(E-X)} = \\
 &= \sum_{X \subseteq E} (x-1)^{|E-X|-r(E-X)} (y-1)^{r(E)-r(E-X)} = \\
 &= \sum_{X \subseteq E} (y-1)^{r(E)-r(E-X)} (x-1)^{c(E-X)}
 \end{aligned}$$

Haciendo ahora el cambio $Y = E - X$, tenemos

$$T_{G^*}(x, y) = \sum_{Y \subseteq E} (y-1)^{r(E)-r(Y)} (x-1)^{c(Y)} = T_G(y, x).$$

□

Consideremos de nuevo G el grafo toro y comprobemos que este resultado se verifica. En la Figura 3.18 aparece la construcción de uno de los grafos duales de G .

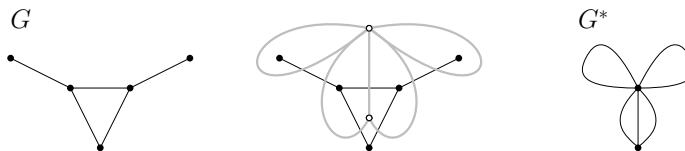


Figura 3.18: Grafo toro y uno de sus grafos duales.

Utilizando entonces el algoritmo de eliminación–contracción de aristas podemos deducir que su polinomio de Tutte asociado es

$$T_{G^*}(x, y) = y^2(y^2 + y + x).$$

Recordando que $T_G(x, y) = x^2(x^2 + x + y)$ es el polinomio de Tutte asociado al grafo toro, puede corroborarse el resultado.

A continuación daremos en el Teorema 3.3.10 otra presentación equivalente al polinomio de Tutte. Ésta definición, de hecho, fue la dada originalmente por Tutte en 1954 (véase [11]). En ella se usa la noción de *actividad*, que describiremos seguidamente.

Definición 3.3.7 (ARISTA INTERNA Y EXTERNA). Sea T un árbol maximal de $G = (V, E)$. Una arista de E se dice **interna** si está en T . En otro caso la llamaremos **externa**.

En la Figura 3.19 aparecen representados un grafo G , un árbol maximal suyo T y de nuevo el grafo G donde sus aristas han sido destacadas con trazo continuo si son aristas internas y con trazo discontinuo si son externas.

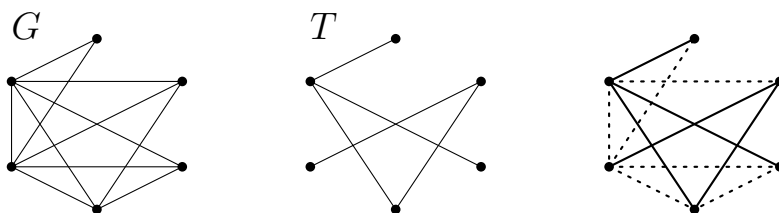


Figura 3.19: Grafo G , árbol maximal suyo T y representación de sus aristas internas y externas.

Ahora se definirán los conceptos de aristas externamente activas e internamente activas en grafos conexos. Primeramente será necesario fijar una ordenación en las aristas de G , digamos e_1, \dots, e_m .

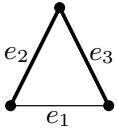
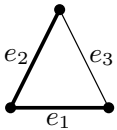
Definición 3.3.8 (ARISTA INTERNAMENTE ACTIVA). Sea T un árbol maximal de $G = (V, E)$ y sea e_i una arista interna. Sean T_1 y T_2 las dos componentes de $T - e_i$. Diremos entonces que e_i es una **arista internamente activa** en T si para cada arista e_j con $i \neq j$ que tenga un extremo en T_1 y otro en T_2 se verifica $j < i$.

Definición 3.3.9 (ARISTA EXTERNAMENTE ACTIVA). Sea T un árbol maximal de $G = (V, E)$ y sea e_i una arista externa de extremos a y b . Sea P el único arco desde a hasta b en T . Diremos que e_i es una **arista externamente activa** en T si toda arista e_j de P satisface $j < i$.

Una vez visto estos conceptos sobre actividad de aristas en grafos podemos definir el polinomio de Tutte de la siguiente manera.

Teorema 3.3.10. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. Dando un orden al conjunto de aristas E , el polinomio de Tutte de G es igual al

$$T_G(x, y) = \sum_{T \subseteq G} x^{i(T)} y^{e(T)},$$

ÁRBOLES MAXIMALES	$i(T)$	$e(T)$	SUMANDO ORIGINADO
	$\#\{e_2, e_3\} = 2$	0	x^2
	$\#\{e_3\} = 1$	0	x
	0	$\#\{e_3\} = 1$	y

Cuadro 3.2: Obtención de los sumandos del polinomio de Tutte originados por cada uno de los árboles maximales del grafo K_3 .

donde la suma es considerada sobre todos los árboles maximales T de G e $i(T)$ y $e(T)$ representan el número de aristas internamente activas y externamente activas respectivamente de cada árbol maximal T .

En [11] se demuestra que el polinomio de Tutte obtenido con este teorema es independiente de la ordenación fijada en el conjunto de aristas.

Usando este teorema vamos a calcular de nuevo el polinomio de Tutte del grafo K_3 . En el Cuadro 3.2 aparecen los sumandos que los árboles maximales de K_3 generan en el polinomio de Tutte. De esta manera es claro ver que

$$T_{K_3}(x, y) = (x - 1)^2 + 3(x - 1) + 3 + (y - 1) = x^2 + x + 1.$$

Verdaderamente el polinomio de Tutte es interesante por las propiedades que contiene acerca del grafo al que hace referencia. En especial destacaremos el teorema que se da a continuación, que sigue directamente del Teorema 3.3.10, y está estrechamente relacionado con el Teorema 2.3.7 o de Kirchhoff.

Teorema 3.3.11. $T_G(1, 1)$ da el número de bosques maximales de G , es decir, el número de subconjuntos de aristas sin ciclos con el mismo número de componentes conexas que G . En el caso en el que G sea conexo, $T_G(1, 1)$ coincide con el número de árboles máximos contenidos en él.

Observemos que este teorema es equivalente al Teorema 2.3.7. Con ellos tenemos dos alternativas para saber cuántos árboles maximales tiene un grafo cualquiera, o bien a través de los cofactores de su matriz laplaciana, o bien mediante una evaluación en su polinomio de Tutte.

Como vimos en (3.7), el polinomio de Tutte del grafo toro es

$$T_G(x, y) = x^2(x^2 + x + y).$$

De ahí tenemos que $T_G(1, 1) = 3$. Esto significa que este grafo tiene tres árboles maximales, los mostrados en la Figura 3.20.



Figura 3.20: Árboles maximales del grafo toro.

Otras propiedades interesantes que derivan de este polinomio son las que aparecen en la siguiente proposición.

Proposición 3.3.12.

1. $T_G(2, 1)$ da el número de bosques de G .
2. $T_G(1, 2)$ da el número de subgrafos maximales contenidos de G .
3. $T_G(2, 0)$ da el número de orientaciones acíclicas de G .
4. $T_G(2, 2) = 2^{|E|}$.

Corroboraremos esta proposición para el caso en que G es el grafo toro.

Para ese caso, el número de bosques es $T_G(2, 1) = 28$. Éstos aparecen representados en la Figura 3.21.

Por otra parte, considerando los árboles maximales del grafo toro de la Figura 3.20 junto al propio grafo G , tendremos los $T_G(1, 2) = 4$ subgrafos maximales de G .

En cuanto a las orientaciones acíclicas, G tiene $T_G(2, 0) = 24$.

Un ciclo C_n tiene $2^n - 2$ orientaciones acíclicas. Esto se debe a que a cada arista podemos darle dos orientaciones distintas y, por lo tanto, el ciclo

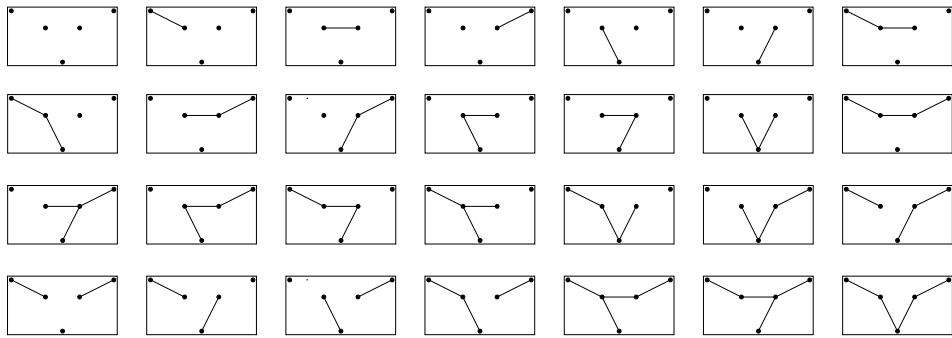


Figura 3.21: Bosques contenidos en el grafo toro.

puede ser orientado de 2^n formas diferentes. Si a esto le restamos las dos orientaciones cíclicas que todo ciclo posee se obtienen las $2^n - 2$ orientaciones acíclicas.

El grafo toro tiene un ciclo C_3 al que podemos darle $2^3 - 2 = 6$ orientaciones acíclicas. Por otra parte tiene dos aristas más a las que le podemos dar dos orientaciones distintas a cada una de ellas. Esto hace un total de $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ orientaciones acíclicas. En la Figura 3.22 aparecen representadas todas ellas.

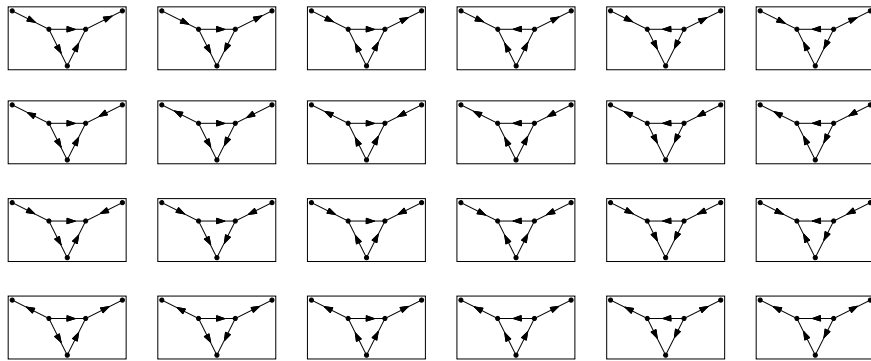


Figura 3.22: Orientaciones acíclicas del grafo toro.

Finalmente, $T_G(2, 2) = 32$, que es exactamente 2^5 , con 5 el número de aristas.

3.3.3. Relación entre el polinomio de Tutte y el polinomio cromático

El polinomio cromático está relacionado con el polinomio de Tutte. Este vínculo se presenta en la definición siguiente.

Definición 3.3.13 (POLINOMIO CROMÁTICO). Sea $G = (V, E)$, entonces definimos su polinomio cromático como

$$\chi_G(x) = (-1)^{|V|-c(E)} x^{c(E)} T_G(1-x, 0).$$

Como ejemplo, comprobemos de nuevo que el polinomio cromático del grafo toro es $\chi_G(x) = x(x-1)^3(x-2)$.

Con la fórmula dada en la proposición obtenemos:

$$\chi_G(x) = (-1)^{5-1} x^1 ((1-x)^4 + (1-x)^3) = x(x-1)^3(x-2).$$

Cuando x toma los valores 0, 1 y 2, $\chi_G(x)$ se anula. Esto significa que los vértices del grafo toro no pueden ser coloreados con menos de tres colores de manera que dos vértices adyacentes tengan colores distintos. Esto es porque dicho grafo tiene un ciclo de longitud tres. Para $x = 3$ se obtiene $\chi_G(x) = 24$, por lo que con tres colores el grafo tiene veinticuatro 3-coloraciones distintas.

De las Definiciones 3.3.13 y 3.3.5 sigue directamente esta otra definición de polinomio cromático.

Definición 3.3.14. Sea $G = (V, E)$. El polinomio cromático de G puede ser definido como

$$\chi_G(x) = \sum_{E' \subseteq E} (-1)^{|E'|} x^{c(E')}.$$

3.4. Otros polinomios asociados a grafos

Definición 3.4.1 (RANGO DE UN GRAFO). Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se define el rango de G como $r(E) = |V| - c(E)$.

Con esto, y mediante el cambio de variable $T_G(x, y) = R_G(x-1, y-1)$, se tiene la definición siguiente.

Definición 3.4.2 (POLINOMIO DE RANGO DE WHITNEY). Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Se define el **polinomio de rango de Whitney** como

$$R_G(x, y) = \sum_{E' \subseteq E} x^{r(E)-r(E')} y^{|E'|-r(E')}. \quad (3.9)$$

Por otro lado, mediante otra transformación en el polinomio de Tutte, puede ser obtenido el *polinomio dicromático* de Tutte. Este polinomio es una generalización en dos variables del polinomio cromático y no debe ser confundido con el polinomio dicromato o de Tutte que mencionamos en la Sección 3.3, aunque son bastante similares.

El polinomio dicromático, denotado por $Q_G(x, y)$, es resultado de la transformación siguiente:

$$T_G(x, y) = (x - 1)^{-c(G)} Q_G(x - 1, y - 1).$$

Con esta transformación el polinomio es definido como sigue.

Definición 3.4.3 (POLINOMIO DICROMÁTICO). *Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. El **polinomio dicromático** es definido como*

$$Q_G(x, y) = \sum_{E' \subseteq E} x^{c(E')} y^{|E'| - |V| + c(E')}.$$

En el Capítulo 5 de [14] sobre Álgebra en Teoría de Grafos aparecen, además de estos polinomios mencionados, otros polinomios de interés, como por ejemplo el polinomio de flujos.

Índice alfabético

- árbol, 21
 - maximal o spanning, 21
 - algoritmo de adición—contracción de aristas, 57
 - algoritmo de eliminación—contracción de aristas, 60, 63
 - arco, 17
 - arista, 13
 - adición de una, 16
 - contracción de una, 16
 - contracción simple de una, 16
 - eliminación de una, 16
 - externa, 69
 - externamente activa, 69
 - incidente, 13
 - interna, 69
 - internamente activa, 69
 - múltiple, 14
 - bosque, 21
 - camino, 17
 - longitud de un, 18
 - ciclo, 17
 - componente conexa, 18
 - diámetro, 18
 - grafo, 13
 - C_n o ciclos, 19
 - K_n o completos, 19
 - $K_{n,m}$ o bipartitos completos, 20
 - P_n o lineales, 19
 - W_n o ruedas, 20
 - acíclico, 21
 - autovalor de un, 44
 - bipartito, 20
 - coloración de un, 52
 - conexo, 18
 - diamante, 44
 - dirigido, 13
 - disconexo, 18
 - dual, 21
 - espectro de un, 45
 - etiquetado, 13
 - intersección, 19
 - isomorfo, 15
 - no etiquetado, 13
 - orden de un, 13
 - orientado, 13
 - pez, 64
 - plano o planar, 21
 - regular, 14
 - simple, 14
 - suma, 19
 - tamaño de un, 13
 - unión, 19
- Kirchhoff, 38
 - matriz de, 38
 - teorema de, 40
 - lazo, 14
 - matriz, 25
 - de adyacencia, 25
 - de alcance, 41
 - de distancias, 41
 - de incidencia, 34
 - respecto a una orientación, 36
 - laplaciana, 38
 - multigrafo, 14

número cromático, 52

polinomio, 43

 característico, 43

 cromático, 51, 58

 de rango, 73

 de Tutte, 63

 dicromático, 74

 dicromato, 62

pseudografo, 14

rango, 73

recorrido, 17

subgrafo, 15

 inducido, 15

 maximal o spanning, 15

vértice, 13

 adyacente, 13

 aislado, 18

 distancia entre, 18

 grado de entrada de un, 14

 grado de salida de un, 14

 grado de un, 14

Bibliografía

- [1] R. Balakrishnan, K. Ranganathan, *A textbook of graph theory*, Springer, 2000.
- [2] O. Bernardi, *A characterization of the Tutte polynomial via combinatorial embeddings*, Annals of Combinatorics, 139 – 153, (2008).
- [3] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Second Edition, Cambridge Mathematical Library, 1993.
- [4] G. Chartrand, *Introductory graph theory*, Dover publications, 1977.
- [5] J. Clark, D. A. Holton, *A first look at Graph Theory*, World Scientific, 1991.
- [6] S. I. Grossman, J. J. Flores, *Álgebra Lineal*, 7^a edición, Mc Graw Hill, 2012.
- [7] F. Harary, *Graph Theory*, Second printing, Addison-Wesley, 1971.
- [8] F. S. Hillier, G. J. Lieberman, *Introducción a la investigación de operaciones*, 8^a edición, Mc Graw Hill, 2006.
- [9] N. M. Maia de Abreu, *Introdução à Teoria Espectral de Grafos com Aplicações*, 2^a edição, Notas em Matemática Aplicada, 2012;
<http://www.sbmac.org.br/boletim/arquivos2007/volume27.pdf>
- [10] R. C. Read, *An Introduction to Chromatic Polynomials*, Journal of combinatorial theory 4, 52 – 71, (1968).
- [11] W. T. Tutte, *A contribution to the theory of chromatic polynomials*, Canadian Journal of Mathematics, 80 – 91, (1954).
- [12] W. T. Tutte, *A ring in graph theory*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 43, 26 – 40, (1947).
- [13] W. T. Tutte, *Graph-polynomials*, Advances in Applied Mathematics 32, 5 – 9, (2004).

- [14] W. T. Tutte, *Graph Theory. As I have known it*, Oxford Science Publications, 2012.