



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Francisco Javier CALDERÓN MORENO & Luis NARVÁEZ
MACARRO

**Dualité et comparaison pour les complexes de de Rham logarithmiques par
rapport aux diviseurs libres**

Tome 55, n° 1 (2005), p. 47-75.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2005__55_1_47_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2005, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

DUALITÉ ET COMPARAISON SUR LES COMPLEXES DE DE RHAM LOGARITHMIQUES PAR RAPPORT AUX DIVISEURS LIBRES

par Francisco Javier CALDERÓN MORENO
& Luis NARVÁEZ MACARRO (*)

Introduction.

Soit X une variété analytique complexe lisse de dimension n et $D \subset X$ un diviseur (= hypersurface) libre, *i.e.* un diviseur tel que le faisceau $\text{Der}(\log D)$ des champs de vecteurs logarithmiques par rapport à D est un \mathcal{O}_X -module localement libre (de rang n) [24].

Les diviseurs lisses, les diviseurs à croisements normaux, les courbes planes, la réunion des hyperplans de réflexion d'un groupe de réflexions complexes, les discriminants des applications stables et les variétés de bifurcation sont des exemples de diviseurs libres.

Comme dans le cas des croisements normaux [11], on définit une connexion logarithmique par rapport à D comme un \mathcal{O}_X -module localement libre \mathcal{E} muni d'une connexion à coefficients dans les 1-formes logarithmiques

$$\nabla' : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1(\log D),$$

ou ce qui revient au même, d'un morphisme \mathcal{O}_X -linéaire à gauche

$$\nabla : \text{Der}(\log D) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{E})$$

(*) Les auteurs ont été partiellement financés par le BFM2001-3207 et le FEDER.
Mots-clés : D -modules, dualité de Verdier, comparaison méromorphe-logarithmique, perversité.
Classification math. : 32C38, 14F40, 32S40, 32S20.

qui satisfait la règle de Leibniz $\nabla(\delta)(ae) = a\nabla(\delta)(e) + \delta(a)e$. L'intégrabilité de (\mathcal{E}, ∇') est caractérisée par le fait que ∇ respecte le crochet de Lie.

Toute connexion logarithmique (par rapport à D) intégrable a un complexe de de Rham associé $\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{E})$.

Dans [12], et toujours dans le cas des croisements normaux, on étudie les connexions logarithmiques intégrables comme modules sur un certain faisceau d'anneaux d'opérateurs différentiels. En particulier, on interprète le complexe de de Rham logarithmique d'une connexion logarithmique intégrable par ce moyen et on décrit son dual de Verdier.

Dans [3] le premier auteur a généralisé le point de vue de [12] au cas des diviseurs libres arbitraires. En particulier il a démontré que le terme 0 de la V -filtration de Malgrange-Kashiwara par rapport à D sur le faisceau d'opérateurs différentiels \mathcal{D}_X , noté $\mathcal{D}_X(\log D)$, est l'algèbre enveloppante de l'algébroïde de Lie $\text{Der}(\log D)$ dans le sens de [23]. Son gradué pour la filtration par l'ordre s'identifie à l'algèbre symétrique du \mathcal{O}_X -module localement libre $\text{Der}(\log D)$. Donc $\mathcal{D}_X(\log D)$ est un faisceau d'anneaux cohérent à fibres noethériennes de dimension homologique finie (voir aussi [1]). En particulier, se donner une structure de $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à gauche (resp. à droite) sur un \mathcal{O}_X -module \mathcal{M} est équivalent à se donner un morphisme \mathcal{O}_X -linéaire $\nabla : \text{Der}(\log D) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$ tel que $\nabla(a\delta)(m) = a\nabla(\delta)(m)$, $\nabla([\delta, \delta']) = [\nabla(\delta), \nabla(\delta')]$ et qui satisfait la règle de Leibniz $\nabla(\delta)(am) = a\nabla(\delta)(m) + \delta(a)m$ (resp. est équivalent à se donner un morphisme \mathcal{O}_X -linéaire $\nabla : \text{Der}(\log D) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$ tel que $\nabla(a\delta)(m) = \nabla(\delta)(am)$, $\nabla([\delta, \delta']) = -[\nabla(\delta), \nabla(\delta')]$ et $\nabla(\delta)(am) = a\nabla(\delta)(m) - \delta(a)m$), pour toutes les sections locales a de \mathcal{O}_X , δ, δ' de $\text{Der}(\log D)$ et m de \mathcal{M} .

Dans cet article on donne un théorème de dualité qui échange la dualité dans le sens des \mathcal{D}_X -modules avec une dualité "tordue" dans le sens des $\mathcal{D}_X(\log D)$ -modules pour les connexions logarithmiques intégrables par rapport à un diviseur libre arbitraire (voir th. 3.1.1 et cor. 3.1.2). L'existence d'un tel théorème a été motivée par les travaux [12] (appendice) et [27], [8]. D'un point de vue technique, le résultat précédent utilise une formule d'associativité pour des produits tensoriels mixtes sur deux algèbres enveloppantes emboîtées que nous n'avons pas trouvé dans la littérature (voir th. 2.3.3 et cor. A.2).

Comme application du théorème précédent nous décrivons le dual de Verdier du complexe de de Rham logarithmique d'une connexion logarithmique intégrable dans le cas où le diviseur D est de Koszul ([3], def. 4.1.1), ce qui généralise le résultat déjà mentionné de [12] pour les diviseurs à

croisements normaux. Toutes les courbes planes et tous les diviseurs libres localement quasi-homogènes sont de Koszul [3], [5]. Nous donnons aussi un critère pour la perversité des complexes de de Rham logarithmiques.

Ensuite, nous donnons une caractérisation différentielle du théorème de comparaison logarithmique (TCL) de [4] (voir cor. 4.2), ainsi qu'une preuve différentielle de ce théorème dans le cas des diviseurs libres localement quasi-homogènes, qui avait été démontré dans [7] par une voie topologique. Cette preuve s'appuie dans des arguments de [8] et répond à la conjecture énoncée à la page 94 de *loc. cit.* Des résultats proches ont été obtenus dans [26] pour le cas des diviseurs de Koszul.

Une bonne partie de nos résultats s'étendent sans peine au cas général des algébroides de Lie (*cf.* [23], [14], [15], [10]), mais nous avons préféré rester dans le cadre logarithmique, où se trouve notre motivation originale.

Voici le contenu de cet article. Dans la section 1, on définit les complexes de Spencer logarithmiques pour les connexions logarithmiques intégrables.

Dans la section 2, on rappelle tout d'abord des constructions bien connues sur la structure de $\mathcal{D}_X(\log D)$ -modules sur le $\otimes_{\mathcal{O}_X}$ et le $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}$ des $\mathcal{D}_X(\log D)$ -modules, et on démontre le théorème 2.3.3 qui joue un rôle fondamental dans les résultats de la section suivante.

Dans la section 3, on démontre les résultats principaux de cet article : la formule qui échange les dualités au niveau de $\mathcal{D}_X(\log D)$ et de \mathcal{D}_X pour les connexions logarithmiques intégrables, et la formule qui décrit le dual de Verdier du complexe de de Rham logarithmique d'une connexion logarithmique intégrable par rapport à un diviseur Koszul-libre.

La section 4 concerne le TCL. On donne un critère différentiel pour le TCL valable pour tout diviseur libre. Ensuite on donne une nouvelle preuve de nature différentielle du TCL pour les diviseurs localement quasi-homogènes.

Dans la section 5 on étudie un exemple de diviseur libre en dimension 3, traité dans [9], et on montre que son complexe de de Rham logarithmique n'est pas pervers, ce qui répond à une question posée dans [6]. Finalement on propose quelques problèmes.

Dans l'appendice on se place dans le cadre général des algèbres enveloppantes des (k, A) -algèbres de Lie et on donne les résultats nécessaires pour démontrer le théorème 2.3.3.

Nous remercions F. J. Castro Jiménez, T. Torrelli et J. M. Ucha qui nous ont expliqué leurs résultats. Nous remercions aussi M. Schulze par ses remarques sur une version préliminaire de cet article.

1. Modules sur le faisceau des opérateurs différentiels logarithmiques.

1.1. Complexe de Cartan-Eilenberg-Chevalley-Rinehart-Spencer logarithmique. — Le faisceau structural \mathcal{O}_X est un \mathcal{D}_X -module à gauche qui, par restriction de scalaires, est aussi un $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à gauche cohérent. En fait on dispose d'une résolution du type Cartan-Eilenberg-Chevalley-Rinehart-Spencer ([23], 4; [3], 3.1), notée $Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^\bullet$ et définie de la façon suivante :

$$Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^{-k} = \mathcal{D}_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^k \text{Der}(\log D), \quad k = 0, \dots, n$$

et la différentielle $d^{-k} : Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^{-k} \rightarrow Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^{-k+1}$ est donnée par :

$$d^{-1}(P \otimes \delta) = P\delta,$$

$$\begin{aligned} d^{-k}(P \otimes (\delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_k)) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} P\delta_i \otimes (\delta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\delta}_i \wedge \dots \wedge \delta_k) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} P \otimes ([\delta_i, \delta_j] \wedge \delta_1 \wedge \dots \\ &\quad \dots \wedge \widehat{\delta}_i \wedge \dots \wedge \widehat{\delta}_j \wedge \dots \wedge \delta_k), \quad 2 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Le morphisme

$$P \in \mathcal{D}_X(\log D) = Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^0 \mapsto d^0(P) := P(1) \in \mathcal{O}_X$$

fait de $Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^\bullet$ une résolution localement libre de \mathcal{O}_X comme $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module. Pour le voir on procède comme dans *loc. cit.* (voir [3], th. 3.1.2): on filtre le complexe augmenté $Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^\bullet \xrightarrow{d^0} \mathcal{O}_X$ par

$$F^i Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^{-k} = (F^{i-k} \mathcal{D}_X(\log D)) \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^k \text{Der}(\log D), \quad F^i \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X$$

pour $i \geq 0$ et $k = 0, \dots, n$, de manière que le gradué associé est canoniquement isomorphe au complexe augmenté

$$\text{Sym}_{\mathcal{O}_X}^\bullet(\text{Der}(\log D)) \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^\bullet \text{Der}(\log D) \xrightarrow{d^0} \mathcal{O}_X,$$

dont la différentielle est donnée par

$$d^{-k}(F \otimes (\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_k)) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} (F \delta_i) \otimes (\delta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\delta_i} \wedge \cdots \wedge \delta_k)$$

pour $F \in \text{Sym}_{\mathcal{O}_X}^\bullet(\text{Der}(\log D))$, $\delta_1, \dots, \delta_k \in \text{Der}(\log D)$ et $k = 1, \dots, n$, et l'augmentation

$$d^0 : \text{Sym}_{\mathcal{O}_X}^\bullet(\text{Der}(\log D)) \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^0 \text{Der}(\log D) \rightarrow \mathcal{O}_X$$

provient de la structure naturelle de \mathcal{O}_X comme module sur l'algèbre symétrique $\text{Sym}_{\mathcal{O}_X}^\bullet(\text{Der}(\log D))$. Or, ce complexe augmenté

$$\text{Sym}_{\mathcal{O}_X}^\bullet(\text{Der}(\log D)) \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^\bullet \text{Der}(\log D) \xrightarrow{d^0} \mathcal{O}_X$$

est exact (cf. [2], §9, 3) et on déduit le résultat cherché.

1.2. Connexions logarithmiques intégrables. — Le faisceau des fonctions méromorphes à pôles le long de D , $\mathcal{O}_X(\star D)$, est un \mathcal{D}_X -module à gauche et donc un $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à gauche.

Pour chaque entier m , notons par $\mathcal{O}_X(mD)$ le sous- \mathcal{O}_X -module localement libre de rang 1 de $\mathcal{O}_X(\star D)$ formé par les fonctions méromorphes h telles que $\text{div}(h) + mD \geq 0$. Il est clair que chaque $\mathcal{O}_X(mD)$ est un $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à gauche.

Si $f = 0$ est une équation locale réduite de D au voisinage d'un point $p \in D$, alors f^{-m} est une base locale de $\mathcal{O}_{X,p}(mD)$ comme $\mathcal{O}_{X,p}$ -module. De plus, si $\delta_1, \dots, \delta_n$ est une base locale de $\text{Der}(\log D)_p$ et $\delta_i(f) = \alpha_i f$, alors en vertu de [3], th. 2.1.4, on a une présentation locale

$$(1) \quad \mathcal{O}_{X,p}(mD) \simeq \mathcal{D}_{X,p}(\log D) / \mathcal{D}_{X,p}(\log D)(\delta_1 + m\alpha_1, \dots, \delta_n + m\alpha_n).$$

DÉFINITION 1.2.1. — Une connexion logarithmique intégrable (le long de D) est un $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à gauche qui est localement libre de rang fini comme \mathcal{O}_X -module.

Les $\mathcal{O}_X(mD)$ sont des connexions logarithmiques intégrables.

Toute connexion logarithmique intégrable \mathcal{E} est un $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module cohérent. En fait, on peut exhiber comme dans le paragraphe 1.1 une résolution de Cartan-Eilenberg-Chevalley-Rinehart-Spencer $S p_{\mathcal{D}_X(\log D)}^\bullet(\mathcal{E})$ avec

$$S p_{\mathcal{D}_X(\log D)}^{-k}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^k \text{Der}(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}, \quad k = 0, \dots, n$$

et la différentielle $\varepsilon^{-k} : Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^{-k}(\mathcal{E}) \rightarrow Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^{-k+1}(\mathcal{E})$ donnée par :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}(P \otimes \delta \otimes e) &= P\delta \otimes e - P \otimes \delta e, \\ \varepsilon^{-k}(P \otimes (\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_k) \otimes e) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} P\delta_i \otimes (\delta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\delta}_i \cdots \wedge \delta_k) \otimes e \\ &\quad - \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} P \otimes (\delta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\delta}_i \cdots \wedge \delta_k) \otimes (\delta_i e) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} P \otimes ([\delta_i, \delta_j] \wedge \delta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\delta}_i \cdots \wedge \widehat{\delta}_j \cdots \wedge \delta_k) \otimes e, \end{aligned} \quad 2 \leq k \leq n.$$

Le complexe $Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^\bullet(\mathcal{E})$ est augmenté par

$$P \otimes e \in \mathcal{D}_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \mapsto \varepsilon^0(P \otimes e) := Pe \in \mathcal{E}.$$

Pour montrer que $Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^\bullet(\mathcal{E})$ est une résolution de \mathcal{E} comme $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module on procède de manière tout à fait analogue au paragraphe 1.1 en considérant toujours la filtration constante sur \mathcal{E} . Le gradué associé du complexe augmenté $Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^\bullet(\mathcal{E}) \xrightarrow{\varepsilon^0} \mathcal{E}$ est alors canoniquement isomorphe au tensorisé par \mathcal{E} sur \mathcal{O}_X du gradué associé du complexe augmenté $Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^\bullet \xrightarrow{\varepsilon^0} \mathcal{O}_X$, et donc il est exact.

D'après [3], th. 3.2.1, nous savons que pour tout $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à gauche \mathcal{E} , on a un isomorphisme naturel

$$(2) \quad \begin{aligned} \Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{E}) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^\bullet, \mathcal{E}) \\ &\simeq R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{E}). \end{aligned}$$

DÉFINITION 1.2.2. — *Nous dirons qu'une connexion logarithmique intégrable \mathcal{E} est admissible si le complexe $\mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}$ est concentré en degré 0 et $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}$ est un \mathcal{D}_X -module holonome.*

Dire que \mathcal{O}_X est une connexion logarithmique intégrable admissible revient à dire que D est un *diviseur de Spencer* dans la terminologie de [8], déf. 3.3.

La proposition suivante est une généralisation de [3] prop. 4.1.3, th. 4.2.1. et se démontre de manière tout à fait analogue à celle-ci en considérant le complexe $Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^\bullet(\mathcal{E})$:

PROPOSITION 1.2.3. — *Supposons que D est un diviseur libre de Koszul ([3], déf. 4.1.1). Alors, toute connexion logarithmique intégrable est admissible.*

Notons ω_X (resp. $\omega_X(\log D)$) le faisceau des n -formes différentielles holomorphes (resp. à pôles logarithmiques le long de D) sur X . Il s'agit du \mathcal{O}_X -dual du module $\bigwedge^n \text{Der}_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)$ (resp. du module $\bigwedge^n \text{Der}(\log D)$), qui est localement libre de rang 1. Pour des raisons générales⁽¹⁾ (cf. [23], [15], [10]), ω_X (resp. $\omega_X(\log D)$) a une structure naturelle de \mathcal{D}_X -module à droite (resp. de $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à droite) et l'inclusion naturelle $\omega_X \subset \omega_X(\log D)$ est $\mathcal{D}_X(\log D)$ -linéaire. Rappelons que l'action à droite d'un champ de vecteurs δ sur une n -forme différentielle θ est donnée par $\theta\delta = -L_\delta(\theta)$, où L_δ est la dérivée de Lie.

2. Opérations externes.

Si \mathcal{M}, \mathcal{N} sont deux $\mathcal{D}_X(\log D)$ -modules à gauche, alors les \mathcal{O}_X -modules $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ et $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ ont une structure naturelle de $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à gauche :

$$(\delta h)(m) = -h(\delta m) + \delta h(m), \quad \delta(m \otimes n) = (\delta m) \otimes n + m \otimes (\delta n)$$

où δ est une dérivation logarithmique, h est une section locale de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ et m, n sont des sections locales de \mathcal{M}, \mathcal{N} respectivement.

On voit facilement que les isomorphismes naturels $\mathcal{O}_X((m + m')D) \simeq \mathcal{O}_X(mD) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m'D)$ et $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(mD), \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_X(-mD)$ sont $\mathcal{D}_X(\log D)$ -linéaires.

Si \mathcal{E} est une connexion logarithmique intégrable, $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ est aussi une connexion logarithmique intégrable qu'on notera \mathcal{E}^* . Dans ce cas, si \mathcal{M} est un autre $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à gauche, l'isomorphisme canonique de \mathcal{O}_X -modules

$$(3) \quad \mathcal{E}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{M})$$

est un isomorphisme de $\mathcal{D}_X(\log D)$ -modules à gauche.

Si \mathcal{P}, \mathcal{Q} sont deux $\mathcal{D}_X(\log D)$ -modules à droite, alors le \mathcal{O}_X -module $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ a une structure naturelle de $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à gauche :

$$(\delta h)(p) = h(p\delta) - h(p)\delta,$$

⁽¹⁾ On utilise le fait que \mathcal{D}_X (resp. $\mathcal{D}_X(\log D)$) est l'algèbre enveloppante de l'algébroïde de Lie $\text{Der}_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)$ (resp $\text{Der}(\log D)$); voir [3], prop. 2.2.5)

où δ est une dérivation logarithmique, h est une section locale de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ et p est une section locale de \mathcal{P} .

Si \mathcal{P} (resp. \mathcal{N}) est un $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à droite (resp à gauche), alors le \mathcal{O}_X -module $\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ a une structure naturelle de $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à droite :

$$(p \otimes n) \delta = (p\delta) \otimes n - p \otimes (\delta n)$$

où δ est une dérivation logarithmique et p, n sont des sections locales de \mathcal{P}, \mathcal{N} respectivement.

Le lemme suivant se démontre comme les assertions (A.4) et (A.6) dans [12] :

LEMME 2.1. — *Si \mathcal{M}, \mathcal{N} sont deux $\mathcal{D}_X(\log D)$ -modules à gauche, on a un isomorphisme naturel \mathbb{C}_X -linéaire*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{O}_X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})).$$

Si de plus \mathcal{M} est une connexion logarithmique intégrable on a un isomorphisme naturelle dans la catégorie dérivée

$$R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \simeq R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}).$$

2.2. Commutativité et associativité du produit tensoriel externe. — Si \mathcal{M}, \mathcal{N} sont deux $\mathcal{D}_X(\log D)$ -modules à gauche, l'isomorphisme canonique de \mathcal{O}_X -modules $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \simeq \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ est en fait un isomorphisme de $\mathcal{D}_X(\log D)$ -modules à gauche.

Si \mathcal{P} est un autre $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à gauche (resp. à droite) l'isomorphisme canonique de \mathcal{O}_X -modules

$$(\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \simeq \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})$$

est $\mathcal{D}_X(\log D)$ -linéaire à gauche (resp. à droite).

D'après [24], on a $\omega_X(\log D) = \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)$.

La preuve de la proposition suivante est facile.

PROPOSITION 2.2.1. — *La structure naturelle de $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à droite sur $\omega_X(\log D)$ coïncide avec celle de $\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)$ provenant de la structure naturelle de \mathcal{D}_X -module à droite sur ω_X , et donc de $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à droite, et de la structure naturelle de $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à gauche sur $\mathcal{O}_X(D)$.*

Si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à gauche, le \mathcal{O}_X -module $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X(\log D)$ est un $\mathcal{D}_X(\log D)$ -bimodule : la structure à gauche est celle qu'on vient de définir à partir de celles de \mathcal{M} et de $\mathcal{D}_X(\log D)$, tandis que la structure à droite provient seulement de celle de $\mathcal{D}_X(\log D)$. De façon analogue, le \mathcal{O}_X -module $\mathcal{D}_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ est aussi un $\mathcal{D}_X(\log D)$ -bimodule : la structure à droite provient de la structure à droite de $\mathcal{D}_X(\log D)$ et de la structure à gauche de \mathcal{M} , tandis que la structure à gauche provient seulement de celle de $\mathcal{D}_X(\log D)$.

LEMME 2.2.2. — *Sous les hypothèses précédentes, il existe un isomorphisme naturel unique de $\mathcal{D}_X(\log D)$ -bimodules*

$$\mathcal{D}_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \simeq \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X(\log D)$$

qui applique $1 \otimes m$ dans $m \otimes 1$.

Preuve. — Le morphisme canonique $m \in \mathcal{M} \mapsto m \otimes 1 \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X(\log D)$ est \mathcal{O}_X -linéaire à gauche et s'étend donc à un morphisme $\mathcal{D}_X(\log D)$ -linéaire à gauche

$$\varphi : P \otimes m \in \mathcal{D}_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \mapsto P \cdot (m \otimes 1) \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X(\log D).$$

On démontre facilement que φ est aussi $\mathcal{D}_X(\log D)$ -linéaire à droite.

De façon analogue, le morphisme canonique

$$m \in \mathcal{M} \mapsto 1 \otimes m \in \mathcal{D}_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$$

est \mathcal{O}_X -linéaire à droite et s'étend donc à un morphisme $\mathcal{D}_X(\log D)$ -linéaire à droite

$$\psi : m \otimes P \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X(\log D) \mapsto (1 \otimes m) \cdot P \in \mathcal{D}_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M},$$

qui devient aussi $\mathcal{D}_X(\log D)$ -linéaire à gauche.

On a $(\psi \circ \varphi)(P \otimes m) = \psi(P \cdot (m \otimes 1)) = P \cdot \psi(m \otimes 1) = P \cdot (1 \otimes m) = P \otimes m$, d'où $\psi \circ \varphi$ est l'identité. De la même façon $\varphi \circ \psi$ est aussi l'identité, ce qui prouve le lemme. □

COROLLAIRE 2.2.3. — *Si \mathcal{M}, \mathcal{N} sont deux $\mathcal{D}_X(\log D)$ -modules à gauche, on a un morphisme naturel de $\mathcal{D}_X(\log D)$ -modules à droite*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X(\log D)) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \\ \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{M}, \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X(\log D)), \end{aligned}$$

qui est un isomorphisme si \mathcal{N} est une connexion logarithmique intégrable.

PROPOSITION 2.2.4. — Si \mathcal{P} est un $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à droite et \mathcal{M}, \mathcal{N} sont deux $\mathcal{D}_X(\log D)$ -modules à gauche, le morphisme

$$p \otimes (m \otimes n) \in \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{D}_X(\log D)} (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) \\ \mapsto (p \otimes m) \otimes n \in (\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{N}$$

est bien défini et est un isomorphisme \mathbb{C}_X -linéaire.

Preuve. — Elle est laissée au lecteur. \square

2.3. — Si \mathcal{P} est un $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à droite, le \mathcal{O}_X -module $\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X(\log D)$ est un $\mathcal{D}_X(\log D)$ -bimodule droite-droite : la première structure à droite est celle qui provient de la structure à droite de \mathcal{P} et de la structure à gauche de $\mathcal{D}_X(\log D)$, tandis que la deuxième structure à droite provient de la structure à droite de $\mathcal{D}_X(\log D)$.

La preuve du lemme suivant est analogue à celle du lemme 2.2.2 :

LEMME 2.3.1. — Sous les hypothèses précédentes, il existe une involution \mathcal{O}_X -linéaire du module $\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X(\log D)$ qui interchange les deux structures de $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à droite.

COROLLAIRE 2.3.2. — Sous les hypothèses précédentes, si \mathcal{P} est localement libre de rang fini comme \mathcal{O}_X -module, alors le module $\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X(\log D)$ est localement libre de rang fini en tant que $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à droite pour la première structure du paragraphe 2.3.

THÉORÈME 2.3.3. — Soit \mathcal{P} un \mathcal{D}_X -module à droite et \mathcal{N} un $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à gauche. Alors, le morphisme naturel

$$p \otimes n \in \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \mapsto p \otimes (1 \otimes n) \in \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{N})$$

est $\mathcal{D}_X(\log D)$ -linéaire à droite et le morphisme induit

$$\lambda : (\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{D}_X \rightarrow \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{N})$$

est un isomorphisme de \mathcal{D}_X -modules à droite.

Preuve. — Pour démontrer le théorème il suffit de procéder fibre à fibre, et ceci est une conséquence du corollaire A.2 pour $U_0 = \mathcal{D}_{X,p}(\log D)$, $U = \mathcal{D}_{X,p}$ et $p \in X$. \square

COROLLAIRE 2.3.4. — Soit \mathcal{P} un \mathcal{D}_X -module à droite qui est localement libre de rang fini sur \mathcal{O}_X et \mathcal{N} un $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à gauche qui

admet des résolutions localement libres⁽²⁾. Alors on a un isomorphisme naturel dans la catégorie dérivée des \mathcal{D}_X -modules à droite

$$(\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{D}_X \rightarrow \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_X} \left(\mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{N} \right).$$

Preuve. — D’après les hypothèses, on peut se réduire au cas où $\mathcal{N} = \mathcal{D}_X(\log D)$ (comme $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à gauche!). Dans ce cas, le corollaire 2.3.2 nous dit que le $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module à droite $\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X(\log D)$ est localement libre de rang fini, donc acyclique pour le produit tensoriel sur $\mathcal{D}_X(\log D)$. On conclut en appliquant le théorème 2.3.3. \square

Les résultats de l’Appendice nous permettent aussi de montrer la proposition suivante.

PROPOSITION 2.3.5. — *Pour toute connexion logarithmique intégrable \mathcal{E} , il existe un isomorphisme canonique de complexes de $\mathcal{D}_X(\log D)$ -modules à gauche :*

$$Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^\bullet(\mathcal{E}) \simeq Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$$

qui est compatible avec les augmentations vers \mathcal{E} .

Preuve. — D’après le corollaire A.7, pour chaque degré $k = 0, \dots, n$ on a des isomorphismes canoniques de $\mathcal{D}_X(\log D)$ -modules à gauche :

$$\begin{aligned} Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^k(\mathcal{E}) &= \mathcal{D}_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \left[\bigwedge^k \text{Der}(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \right] \\ &\simeq \left[\mathcal{D}_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^k \text{Der}(\log D) \right] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \\ &= Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^k \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que ces isomorphismes commutent avec les différentielles ε^\bullet et $d^\bullet \otimes \text{Id}_{\mathcal{E}}$ et les augmentations vers \mathcal{E} définies dans la section 1. \square

Remarque 2.3.6. — Tous les résultats de cette section sont valables pour un algébroïde de Lie arbitraire et son algèbre enveloppante à la place de $\text{Der}(\log D)$ et $\mathcal{D}_X(\log D)$ respectivement.

(2) Ceci sera le cas si par exemple \mathcal{N} est un $\mathcal{D}_X(\log D)$ -module cohérent.

3. Dualité sur les connexions logarithmiques et sur les complexes de de Rham logarithmiques.

La proposition suivante est bien connue dans le cas des \mathcal{D}_X -modules. Elle se généralise sans peine au cas des algébroides de Lie (cf. [10], prop. 3.2.1).

PROPOSITION 3.1. — *Pour toute connexion logarithmique intégrable \mathcal{E} le complexe $R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{E}, \mathcal{D}_X(\log D))$ est concentré en degré n et on a un isomorphisme naturel de $\mathcal{D}_X(\log D)$ -modules à droite*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_X(\log D)}^n(\mathcal{E}, \mathcal{D}_X(\log D)) \simeq \omega_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^*.$$

Preuve. — D'après le lemme 2.1 et le corollaire 2.2.3 on a des isomorphismes naturels $\mathcal{D}_X(\log D)$ -linéaires à droite :

$$\begin{aligned} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{E}, \mathcal{D}_X(\log D)) &\simeq R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{E}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X(\log D)) \\ &\simeq R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_X(\log D)) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^*. \end{aligned}$$

On est donc réduit au cas $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$. Considérons la résolution $Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^\bullet$ de \mathcal{O}_X :

$$\begin{aligned} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_X(\log D)) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^\bullet, \mathcal{D}_X(\log D)) \\ &= \Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{D}_X(\log D)) \end{aligned}$$

et l'augmentation

$$\Omega_X^n(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X(\log D) = \omega_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X(\log D) \rightarrow \omega_X(\log D)$$

donnée par $\theta \otimes P \mapsto \theta \cdot P$. Filtrons le complexe augmenté par

$$F^i(\Omega_X^k(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X(\log D)) = \Omega_X^k(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} F^{i+k} \mathcal{D}_X(\log D)$$

et $F^i \omega_X(\log D) = \omega_X(\log D)$ pour $k = 0, \dots, n$ et $i \in \mathbb{Z}$. On vérifie sans peine que le gradué associé est exact (cf. [2], §9, 3), d'où le résultat. \square

3.1. — Rappelons que le foncteur de dualité au niveau de \mathcal{D}_X -modules, $\mathbb{D}_{\mathcal{D}_X} : D_{\mathrm{coh}}^b(\mathcal{D}_X) \rightarrow D_{\mathrm{coh}}^b(\mathcal{D}_X)$, est défini par :

$$\mathbb{D}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X))[n].$$

De façon analogue nous pouvons considérer le foncteur (cf. [10], 3.2)

$$\mathbb{D}_{\mathcal{D}_X(\log D)} : D_{\mathrm{coh}}^b(\mathcal{D}_X(\log D)) \rightarrow D_{\mathrm{coh}}^b(\mathcal{D}_X(\log D))$$

défini par

$$\mathbb{D}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{M} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\omega_X(\log D), R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X(\log D)))[n].$$

Il s'agit d'une involution de la catégorie triangulée $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_X(\log D))$.

La proposition précédente nous dit que si \mathcal{E} est une connexion logarithmique intégrable alors $\mathbb{D}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^*$.

Si \mathcal{E} est une connexion logarithmique intégrable, on notera $\mathcal{E}(mD)$ la connexion logarithmique intégrable $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(mD)$.

THÉORÈME 3.1.1. — *Pour toute connexion logarithmique intégrable \mathcal{E} on a un isomorphisme naturel dans la catégorie dérivée des \mathcal{D}_X -modules à droite :*

$$R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}, \mathcal{D}_X) \simeq \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \left(\mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}^*(D) \right)[-n].$$

Preuve. — On a un isomorphisme canonique

$$R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}, \mathcal{D}_X) \simeq R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{E}, \mathcal{D}_X),$$

et par cohérence de $\mathcal{D}_X(\log D)$ et \mathcal{E}

$$R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{E}, \mathcal{D}_X) \simeq R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{E}, \mathcal{D}_X(\log D)) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{D}_X.$$

D'après la proposition 3.1 on a

$$R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}, \mathcal{D}_X) \simeq [\omega_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^*] \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{D}_X[-n].$$

Pour conclure il suffit d'appliquer 2.2, la proposition 2.2.1 et le corollaire 2.3.4. □

COROLLAIRE 3.1.2. — *Pour toute connexion logarithmique intégrable \mathcal{E} on a un isomorphisme naturel dans la catégorie dérivée des \mathcal{D}_X -modules à gauche :*

$$\mathbb{D}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}) \simeq \mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}^*(D).$$

Remarque 3.1.3. — Dans le cas d'un diviseur de Spencer et $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$, le corollaire précédent est une version intrinsèque du théorème de dualité de [8], th. 4.3 (voir la présentation (1)).

COROLLAIRE 3.1.4. — *Si \mathcal{E} est une connexion logarithmique intégrable admissible (voir déf. 1.2.2), alors $\mathcal{E}^*(D)$ est aussi admissible.*

Preuve. — Comme le complexe $\mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}$ est à cohomologie holonome concentrée en degré 0, son dual au sens de \mathcal{D}_X -modules l'est aussi et donc, d'après le corollaire précédent, $\mathcal{E}^*(D)$ est admissible. □

COROLLAIRE 3.1.5. — *Pour toute connexion logarithmique intégrable \mathcal{E} on a un isomorphisme naturel dans la catégorie dérivée*

$$\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{E}) \simeq R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}(D)).$$

Preuve. — D'après (2), $\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{E}) \simeq R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{E})$. Or,
 $R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{E}) \simeq R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathbb{D}_{\mathcal{D}_X(\log D)}\mathcal{E}, \mathbb{D}_{\mathcal{D}_X(\log D)}\mathcal{O}_X)$
 $\simeq R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X(\log D)}(\mathcal{E}^*, \mathcal{O}_X)$
 $\simeq R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}^*, \mathcal{O}_X)$
 $\simeq R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{D}_{\mathcal{D}_X}\mathcal{O}_X, \mathbb{D}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}^*))$
 $\simeq R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}(D)).$

□

COROLLAIRE 3.1.6. — *Soit \mathcal{E} une connexion logarithmique intégrable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) \mathcal{E}^* est admissible.

2) $\mathcal{E}(D)$ est admissible.

3) Le complexe de de Rham logarithmique $\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{E})$ est un faisceau pervers.

Preuve. — L'équivalence entre 1) et 2) a été prouvée dans le corollaire 3.1.4.

2) \Rightarrow 3) est une conséquence directe de la définition des connexions logarithmiques admissibles, du corollaire 3.1.5 et du fait que le complexe de de Rham (usuel) d'un \mathcal{D}_X -module holonome est un faisceau pervers.

3) \Rightarrow 1). Au cours de la preuve du corollaire 3.1.5 on a exprimé le complexe $\mathcal{K} = \Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{E})$ comme le complexe des solutions holomorphes du complexe borné de \mathcal{D}_X -modules à cohomologie cohérente $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}^*$. D'après [19], chap. II, th. (4.1.5), et la constructibilité de \mathcal{K} on déduit d'abord que le complexe \mathcal{M} est à cohomologie holonome. Or, par le théorème de bidualité locale [19], chap. I, th. (10.13), on sait que

$$\mathcal{D}_X^\infty \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M} \simeq R\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{K}, \mathcal{O}_X),$$

et comme \mathcal{K} est pervers, le deuxième complexe est, toujours par le théorème de bidualité locale, concentré en degré 0. Pour conclure il suffit d'invoquer la fidèle platitude de \mathcal{D}_X^∞ sur \mathcal{D}_X [25] (voir aussi [22]). □

COROLLAIRE 3.1.7. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Le diviseur D est de Spencer (i.e. \mathcal{O}_X est admissible).*

2. *Le complexe de de Rham logarithmique $\Omega_X^\bullet(\log D)$ est un faisceau pervers.*

Le corollaire suivant généralise la proposition (A.2) de [12]. Elle s'applique à toutes les connexions logarithmiques intégrables par rapport aux croisements normaux, et plus généralement par rapport aux diviseurs libres localement quasi-homogènes [5].

COROLLAIRE 3.1.8. — *Soit \mathcal{E} une connexion logarithmique intégrable (par rapport à D) telle que \mathcal{E}^* est admissible (et donc $\mathcal{E}(D)$ est aussi admissible). Alors on a un isomorphisme naturel dans la catégorie dérivée*

$$\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{E}) \simeq \Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{E}^*(-D))^\vee,$$

où \vee dénote le dual de Verdier.

Preuve. — D'après le corollaire 3.1.5, on a des isomorphismes naturels

$$\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{E}) \simeq R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}(D)),$$

$$\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{E}^*(-D)) \simeq R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}^*).$$

Le corollaire est donc une conséquence du théorème de dualité locale (cf. [19], ch. I, th. (4.3.1); voir aussi [21]) et du corollaire 3.1.2. \square

Remarque 3.1.9. — D'après la proposition 1.2.3, le corollaire précédent s'applique à toute connexion logarithmique intégrable dans le cas où le diviseur D est de Koszul.

4. Un critère différentiel pour le théorème de comparaison logarithmique.

Notons $\rho : \mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_X(\star D)$ le morphisme \mathcal{D}_X -linéaire à gauche donné par $\rho(P \otimes a) = P(a)$.

Rappelons qu'on dit que *le théorème de comparaison logarithmique* est vrai pour D si l'inclusion

$$\Omega_X^\bullet(\log D) \hookrightarrow \Omega_X^\bullet(\star D)$$

est un quasi-isomorphisme, ce qui équivaut, grâce au théorème de comparaison de Grothendieck, au fait que le morphisme naturel

$$\Omega_X^\bullet(\log D) \rightarrow Rj_*j^{-1}\Omega_X^\bullet$$

est un quasi-isomorphisme (voir [7], [4]), où $j : X - D \hookrightarrow X$ est l'inclusion ouverte.

Plus généralement, pour chaque connexion logarithmique intégrable \mathcal{E} on considère le morphisme

$$\rho_{\mathcal{E}} : \mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}(D) \rightarrow \mathcal{E}(\star D),$$

donné par $\rho_{\mathcal{E}}(P \otimes e') = P(e')$, où $\mathcal{E}(\star D)$ est le \mathcal{D}_X -module obtenu par restriction de scalaires à partir du $\mathcal{D}_X(\log D)(\star D) = \mathcal{D}_X(\star D)$ -module $\mathcal{O}_X(\star D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$. Nous savons que $\mathcal{E}(\star D)$ est une connexion méromorphe et donc holonome (cf. [20], th. 4.1.3). En fait, $\mathcal{E}(\star D)$ est régulière dans la partie lisse de D (elle a des pôles logarithmiques!), et donc elle est régulière partout [18], cor. 4.3-14.

Aussi, le complexe de de Rham logarithmique $\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{E})$ est un sous-complexe du complexe de de Rham méromorphe $\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{E}(\star D)) = \Omega_X^\bullet(\mathcal{E}(\star D))$. Les restrictions à $X - D$ des ces deux complexes coïncident et sont quasi-isomorphes au système local \mathcal{L} des section horizontales de \mathcal{E} sur $X - D$.

THÉORÈME 4.1. — *Sous les hypothèses précédentes, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *Le morphisme canonique $\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{E}) \rightarrow Rj_*\mathcal{L}$ est un isomorphisme dans la catégorie dérivée.*

2) *L'inclusion $\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{E}) \hookrightarrow \Omega_X^\bullet(\mathcal{E}(\star D))$ est un quasi-isomorphisme.*

3) *Le morphisme $\rho_{\mathcal{E}} : \mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}(D) \rightarrow \mathcal{E}(\star D)$ est un isomorphisme dans la catégorie dérivée.*

Preuve. — Notons pour simplifier $\mathcal{V}_0 = \mathcal{D}_X(\log D)$. L'équivalence entre 1) et 2) provient de la régularité de $\mathcal{E}(\star D)$:

$$\Omega_X^\bullet(\mathcal{E}(\star D)) \simeq Rj_*j^{-1}\Omega_X^\bullet(\mathcal{E}(\star D)) \simeq Rj_*\mathcal{L}.$$

3) \Rightarrow 2). Tout consiste à considérer le diagramme commutatif suivant dans la catégorie dérivée des complexes de faisceaux de \mathbb{C} -espaces vectoriels :

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\text{incl.}} & \Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{E}(\star D)) \\
 \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\
 \Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{V}_0) \otimes_{\mathcal{V}_0} \mathcal{E} & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \text{incl.}} & \Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{V}_0) \otimes_{\mathcal{V}_0} \mathcal{E}(\star D) \\
 \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\
 (\omega_X(\log D) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{V}_0} \mathcal{E})[-n] & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \text{incl.}} & (\omega_X(\log D) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{V}_0} \mathcal{E}(\star D))[-n] \\
 \simeq \downarrow (*) & & \simeq \downarrow (*) \\
 (\omega_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{V}_0} \mathcal{E}(D))[-n] & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \text{incl.}} & (\omega_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{V}_0} \mathcal{E}(\star D))[-n] \\
 \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\
 (\omega_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{V}_0} \mathcal{E}(D))[-n] & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \text{Id} \otimes \text{incl.}} & (\omega_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{V}_0} \mathcal{E}(\star D))[-n] \\
 \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow (**) \\
 \omega_X[-n] \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} (\mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{V}_0} \mathcal{E}(D)) & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \rho_{\mathcal{E}}} & \omega_X[-n] \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{E}(\star D) \\
 \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\
 \text{DR}(\mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{V}_0} \mathcal{E}(D)) & \xrightarrow{\text{DR}(\rho_{\mathcal{E}})} & \text{DR}(\mathcal{E}(\star D)),
 \end{array}$$

où les isomorphismes (*) sont ceux qui proviennent de la proposition 2.2.4, et l'isomorphisme (**) est donné par

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{V}_0} \mathcal{E}(\star D) &\simeq \mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{V}_0} \mathcal{V}_0(\star D) \otimes_{\mathcal{V}_0(\star D)} \mathcal{E}(\star D) \\
 &\simeq \mathcal{V}_0(\star D) \otimes_{\mathcal{V}_0(\star D)} \mathcal{E}(\star D) \simeq \mathcal{E}(\star D).
 \end{aligned}$$

Comme les flèches verticales sont des isomorphismes, si $\rho_{\mathcal{E}}$ est un isomorphisme dans la catégorie dérivée, alors l'inclusion $\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{E}) \hookrightarrow \Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{E}(\star D))$ est un quasi-isomorphisme.

2) \Rightarrow 3). Réciproquement, par le diagramme précédent, la propriété 2) entraîne que $\text{DR}(\rho_{\mathcal{E}})$ est un isomorphisme dans la catégorie dérivée. Soit \mathcal{Q} le cône de $\rho_{\mathcal{E}}$. Il s'agit d'un complexe de \mathcal{D}_X -modules à cohomologie cohérente dont le de Rham est nul. Par l'argument de la preuve de 3) \Rightarrow 1) dans le corollaire 3.1.6 on déduit que $\mathcal{Q} = 0$ et donc $\rho_{\mathcal{E}}$ est un isomorphisme dans la catégorie dérivée. \square

COROLLAIRE 4.2. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Le théorème de comparaison logarithmique est vrai pour D .*

2. *Le morphisme $\rho : \mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_X(\star D)$ est un isomorphisme dans la catégorie dérivée.*

Le corollaire 4.2 nous dit en particulier qu'une condition nécessaire pour que le théorème de comparaison logarithmique soit vrai pour D est que la connexion logarithmique intégrable $\mathcal{O}_X(D)$ soit admissible, ou encore par le corollaire 3.1.4, que \mathcal{O}_X soit admissible, ce qui revient à dire que D soit un diviseur de Spencer dans la terminologie de [8], def. 3.3.

Si $f = 0$ est une équation réduite locale de D , $\delta_1, \dots, \delta_n$ est une base locale de $\text{Der}(\log D)$ et $\delta_i(f) = \alpha_i f$, en tenant compte de la présentation (1), le théorème 4.2 peut s'énoncer comme l'équivalence des propriétés suivantes :

a) *Le théorème de comparaison logarithmique est vrai pour D .*

b) (b-1) D est un diviseur de Spencer, (b-2) le \mathcal{D}_X -module des fonctions méromorphes le long de D est engendré par f^{-1} et (b-3) l'annulateur de f^{-1} est le \mathcal{D}_X -idéal à gauche engendré par $\delta_1 + \alpha_1, \dots, \delta_n + \alpha_n$.

En fait, grâce à la proposition 1.3 de [26], la condition (b-3) entraîne la condition (b-2). Par conséquent, on a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.3. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Le théorème de comparaison logarithmique est vrai pour D .*

2. *Le complexe $\mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{O}_X(D)$ est concentré en degré 0 et le morphisme $\rho : \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_X(\star D)$ est injectif.*

En utilisant le corollaire 4.2 et l'argument de [8], th. 5.2 et lemme 5.3, nous allons donner une nouvelle preuve différentielle non topologique du théorème de comparaison logarithmique pour les diviseurs libres localement quasi-homogènes.

THÉORÈME 4.4 ([7]). — *Si D est un diviseur libre localement quasi-homogène, alors l'inclusion*

$$\Omega_X^\bullet(\log D) \hookrightarrow \Omega_X^\bullet(\star D)$$

est un quasi-isomorphisme.

Preuve. — D'après [5] et la proposition 1.2.3 nous savons que le

complexe $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_X(\log D)}^L \mathcal{O}_X(mD)$ est holonome et concentré en degré 0 pour tout $m \geq 1$.

Tout d'abord nous allons calculer le cycle caractéristique des $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{O}_X(mD)$. Soit $f = 0$ une équation locale réduite de D au voisinage d'un point $p \in D$ et $\delta_1, \dots, \delta_n$ une base de $\text{Der}(\log D)_p$, avec $\delta_i(f) = \alpha_i f$. Le module $\mathcal{O}_{X,p}(mD)$, $m \geq 1$, est engendré comme $\mathcal{D}_{X,p}(\log D)$ -module par f^{-m} , dont l'annulateur est l'idéal à gauche I_m engendré par $\delta_1 + m\alpha_1, \dots, \delta_n + m\alpha_n$ (voir (1)).

D'après [6], Remark 5.10, $\mathcal{D}_{X,p}/\mathcal{D}_{X,p}I_m \simeq \mathcal{O}_{X,p}(\star D)$ pour $m \gg 0$ (il faut que $-m$ soit plus petit que la plus petite racine entière du polynôme de Bernstein-Sato de f). Or, comme les symboles $\sigma(\delta_i + m\alpha_i) = \sigma(\delta_i)$, $i = 1, \dots, n$ forment une suite régulière dans le gradué de $\mathcal{D}_{X,p}$ pour tout $m \geq 0$ (le diviseur D est de Koszul, d'après [5]), nous déduisons que le cycle caractéristique de tous les $\mathcal{D}_{X,p}/\mathcal{D}_{X,p}I_m$ coïncide avec le cycle caractéristique de $\mathcal{O}_{X,p}(\star D)$.

Les raisonnements locaux précédents se recollent et on conclut que tous les \mathcal{D}_X -modules holonomes $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{O}_X(mD)$, $m \geq 1$, ont même cycle caractéristique égal au cycle caractéristique de $\mathcal{O}_X(\star D)$.

D'après le corollaire 4.2, pour démontrer le théorème de comparaison logarithmique pour D il suffit de démontrer que le morphisme \mathcal{D}_X -linéaire :

$$(4) \quad \rho_{D,X} : P \otimes a \in \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{O}_X(D) \mapsto P(a) \in \mathcal{O}_X(\star D)$$

est un isomorphisme, ou même qu'il est injectif car les deux modules ont même cycle caractéristique.

Nous allons procéder par récurrence sur la dimension n de la variété ambiante X en utilisant la méthode⁽³⁾ de [7], prop. 2.4.

Si $n = \dim X = 1$, le résultat est clair. Supposons que le morphisme (4) est un isomorphisme si D est un diviseur libre localement quasi-homogène dans une variété analytique complexe lisse X de dimension $n - 1$.

Soit maintenant $D \subset X$ un diviseur libre localement quasi-homogène dans une variété analytique complexe lisse X de dimension n et $p \in D$. D'après [7], prop. 2.4 et lemme 2.2, (iv), il existe un voisinage ouvert U de p tel que pour tout $q \in U \cap D$, $q \neq p$, le germe (X, D, q) est analytiquement isomorphe à un produit $(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}, D' \times \mathbb{C}, (0, 0))$, avec $D' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ diviseur libre et localement quasi-homogène.

⁽³⁾ Cette méthode a été utilisée aussi dans [5], th. 3.2; [8], th. 5.2; [6], prop. 5.2, th. 5.9.

Posons $X' = \mathbb{C}^{n-1}$ et notons $\pi : X' \times \mathbb{C} \rightarrow X'$ la projection. Par l'hypothèse de récurrence, le morphisme

$$\rho_{D',X'} : \mathcal{D}_{X'} \otimes_{\mathcal{D}_{X'}(\log D')} \mathcal{O}_{X'}(D') \rightarrow \mathcal{O}_{X'}(\star D')$$

est un isomorphisme. Or, le morphisme

$\rho_{D' \times \mathbb{C}, X' \times \mathbb{C}} : \mathcal{D}_{X' \times \mathbb{C}} \otimes_{\mathcal{D}_{X' \times \mathbb{C}}(\log D' \times \mathbb{C})} \mathcal{O}_{X' \times \mathbb{C}}(D' \times \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{O}_{X' \times \mathbb{C}}(\star(D' \times \mathbb{C}))$ s'identifie avec $\pi^* \rho_{D',X'}$ et donc est un isomorphisme. Par conséquent, le morphisme

$$\rho_{D,X} : \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_X(\star D)$$

est un isomorphisme sur $U - \{p\}$.

Notons \mathcal{K} le noyau de la restriction à U de $\rho_{D,X}$. Il s'agit d'un module holonome supporté par p . Par l'argument de [8], th. 5.2 et lemme 5.3, nous déduisons que \mathcal{K} est nul, et par conséquent $\rho_{D,X}$ est injective, ce qui termine la preuve du théorème. \square

COROLLAIRE 4.5. — *Si D est un diviseur libre localement quasi-homogène et $j : X - D \hookrightarrow X$ est l'inclusion, on a des isomorphismes canoniques :*

$$\Omega_X^\bullet(\log D) \simeq Rj_* \mathbb{C}_{X-D}, \quad j_! \mathbb{C}_{X-D} \simeq \Omega_X^\bullet(\log D)(\mathcal{O}_X(-D)).$$

Preuve. — Le premier isomorphisme est une conséquence du théorème 4.4 et du théorème de comparaison de Grothendieck $\Omega_X^\bullet(\star D) \simeq Rj_* \mathbb{C}_{X-D}$.

Le deuxième isomorphisme est une conséquence du premier et du corollaire 3.1.8. \square

Remarque 4.6. — Notons que dans le corollaire précédent, le morphisme canonique $j_! \mathbb{C}_{X-D} \rightarrow Rj_* \mathbb{C}_{X-D}$ correspond à l'inclusion $\mathcal{O}_X(-D) \hookrightarrow \mathcal{O}_X$.

5. Exemples et questions.

L'exemple suivant répond au problème 6.6. de [6] (voir 3.1.7).

Exemple 5.1. — (Dans cet exemple nous avons utilisé [13] et [16].) Soit $D \subset X = \mathbb{C}^3$ le diviseur donné par l'équation réduite

$$h = (xz + y)(x^4 + y^5 + xy^4) = x^2y^4z + xy^5z + xy^5 + y^6 + x^5z + x^4y = 0,$$

qui a été considéré dans [9]. Le diviseur D est libre, une base de $\text{Der}(\log D)$ étant $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, avec

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + \frac{5}{4}xy & \frac{3}{4}xy + y^2 & \frac{1}{4}xz^2 - \frac{1}{4}xz \\ 0 & 0 & (xz + y) \\ 4xy^2 + y^3 + 25x^2 & 3y^3 - x^2 + 20xy & y^2z^2 - 5xz - y^2z + x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}.$$

On vérifie que :

- $\delta_1(h) = (\frac{1}{4}xz + \frac{19}{4}x + 6y)h$, $\delta_2(h) = xh$, $\delta_3(h) = (y^2z + 19y^2 + 120x)h$,
- le déterminant de la matrice des coefficients précédente vaut h ,
- $[\delta_1, \delta_2] = (x + y - \frac{1}{4}xz)\delta_2$, $[\delta_2, \delta_3] = (y^2z - 4y^2 - 25x)\delta_2$,
- $[\delta_1, \delta_3] = -(3y^2 + 30x)\delta_1 + (\frac{5}{2}xz - \frac{1}{2}x)\delta_2 + (\frac{5}{4}x + \frac{7}{4}y)\delta_3$.

Nous allons prouver que D n'est pas un diviseur de Spencer (au voisinage du point $p = (0, 0, 0)$). Pour cela voyons que la fibre en p du complexe

$$\mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{O}_X = \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_X(\log D)} Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^\bullet$$

a une cohomologie non nulle en degré -1 .

Notons encore d^\bullet la différentielle du complexe $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_X(\log D)} Sp_{\mathcal{D}_X(\log D)}^\bullet$. L'image de d^{-2} est engendrée comme \mathcal{D}_X -module à gauche par :

$$\begin{aligned} d^{-2}(1 \otimes (\delta_1 \wedge \delta_2)) &= -\delta_2 \otimes \delta_1 + (\delta_1 - x - y + \frac{1}{4}xz) \otimes \delta_2, \\ d^{-2}(1 \otimes (\delta_1 \wedge \delta_3)) &= (-\delta_3 + 3y^2 + 30x) \otimes \delta_1 + (-\frac{5}{2}xz + \frac{1}{2}x) \otimes \delta_2 \\ &\quad + (\delta_1 - \frac{5}{4}x - \frac{7}{4}y) \otimes \delta_3, \\ d^{-2}(1 \otimes (\delta_2 \wedge \delta_3)) &= (-\delta_3 - y^2z + 4y^2 + 25x) \otimes \delta_2 + \delta_2 \otimes \delta_3. \end{aligned}$$

Par conséquent, tout élément $P_1 \otimes \delta_1 + P_2 \otimes \delta_2 + P_3 \otimes \delta_3$ de l'image de d^{-2} vérifie que P_3 appartient à l'idéal à gauche I de \mathcal{D}_X engendré par δ_2 et $\zeta = \delta_1 - \frac{5}{4}x - \frac{7}{4}y$.

Nous allons prouver que l'image de d^{-2} est contenue strictement dans le noyau de d^{-1} au point $p = (0, 0, 0)$.

Considérons les opérateurs différentiels :

$$\begin{aligned} Q_1 &= -yz^3\partial_z^2 - y^2z\partial_x\partial_z - 3y^2z\partial_y\partial_z + yz^2\partial_z^2 - 2yz^2\partial_z + 4y^2\partial_x\partial_z \\ &\quad - 25xz\partial_y\partial_z + 8yz\partial_z + 25x\partial_x\partial_z - x\partial_y\partial_z - 5y\partial_y\partial_z - 5z\partial_z^2 + \partial_z^2 \\ &\quad - 60\partial_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2 = & \frac{1}{4} (yz^4 \partial_z^2 + 4xyz^2 \partial_x \partial_z + 6y^2 z^2 \partial_x \partial_z + 2y^2 z^2 \partial_y \partial_z - 2yz^3 \partial_z^2 \\
& + 4xy^2 \partial_x^2 + 5y^3 \partial_x^2 - 4xy^2 \partial_x \partial_y - 2y^3 \partial_x \partial_y - 3y^3 \partial_y^2 + 4yz^3 \partial_z \\
& - 4xyz \partial_x \partial_z - 6y^2 z \partial_x \partial_z - 2y^2 z \partial_y \partial_z + 25xz^2 \partial_y \partial_z + yz^2 \partial_z^2 + 4xyz \partial_x \\
& + 6y^2 z \partial_x + 2y^2 z \partial_y + 25xy \partial_x \partial_y + 4x^2 \partial_y^2 - xy \partial_y^2 + 20y^2 \partial_y^2 \\
& - 24yz^2 \partial_z - 5xz \partial_y \partial_z + 20yz \partial_y \partial_z + 2yz^2 - 60xy \partial_x - 16y^2 \partial_x \\
& - 44y^2 \partial_y + 25xz \partial_y + 20yz \partial_z - 4x \partial_y \partial_z - 4y \partial_y \partial_z - 20yz + 400x \partial_x \\
& - 16x \partial_y + 340y \partial_y - 45z \partial_z + 60y + 9 \partial_z - 365), \\
Q_3 = & \frac{1}{4} (4xz \partial_y \partial_z + 4yz \partial_y \partial_z - z^2 \partial_z^2 - 4x \partial_x \partial_z - 5y \partial_x \partial_z + y \partial_y \partial_z + z \partial_z^2 \\
& - 13z \partial_z + 10 \partial_z).
\end{aligned}$$

On vérifie que $Q_1 \delta_1 + Q_2 \delta_2 + Q_3 \delta_3 = 0$ et donc $Q = Q_1 \otimes \delta_1 + Q_2 \otimes \delta_2 + Q_3 \otimes \delta_3$ est dans le noyau de d^{-1} .

Voyons que le germe en p de Q_3 n'appartient pas à I_p , et donc le germe en p de Q n'appartient pas à la fibre en p de l'image de d^{-2} .

Notons $R = \mathbb{C}[x, y, z] \subset \mathcal{O}_{X,p}$, $\mathfrak{m} = R(x, y, z)$, $S = R[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$, l'extension $S_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}}[\xi_1, \xi_2, \xi_3] \subset \text{Gr } \mathcal{D}_{X,p} = \mathcal{O}_{X,p}[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$ étant fidèlement plate.

On a $[\delta_2, \zeta] = (x + y - \frac{1}{4}xz)\delta_2$, d'où le \mathcal{O}_X -module engendré par δ_2 et ζ est un sous-algèbroïde de Lie de $F^1 \mathcal{D}_X$. D'autre part, les symboles $\sigma(\delta_2)$ et $\sigma(\zeta) = \sigma(\delta_1)$ forment une suite régulière dans R , et par platitude dans $\text{Gr } \mathcal{D}_{X,p}$.

On vérifie que $(S(\sigma(\zeta), \sigma(\delta_2)) : \sigma(Q_3)) = S(x, y)$, d'où $(S(\sigma(\zeta), \sigma(\delta_2)) : \sigma(Q_3)) \cap R = R(x, y)$, et donc $\sigma(Q_3) \notin R_{\mathfrak{m}}[\xi_1, \xi_2, \xi_3](\sigma(\zeta), \sigma(\delta_2))$. Par fidélité platitude, $\sigma(Q_3) \notin \text{Gr } \mathcal{D}_{X,p}(\sigma(\zeta), \sigma(\delta_2))$.

Le résultat cherché est donc une conséquence de la proposition suivante, dont la preuve est la même que celle de la proposition 4.1.2 de [3].

PROPOSITION 5.2. — *Soit I un idéal à gauche de $\mathcal{D}_{X,p}$ engendré par des opérateurs P_1, \dots, P_t d'ordre ≤ 1 tels que :*

- *La suite des symboles $\{\sigma(P_1), \dots, \sigma(P_t)\}$ est régulière dans $\text{Gr } \mathcal{D}_{X,p}$.*
- *$[P_i, P_j] \in \sum_{k=1}^t \mathcal{O}_X P_k$, $1 \leq i, j \leq t$.*

Alors $\sigma(I) = \text{Gr } \mathcal{D}_{X,p}(\sigma(P_1), \dots, \sigma(P_t))$.

Exemple 5.3. — Dans le cas non localement quasi-homogène il y a des exemples de connexions logarithmiques intégrables telles que le morphisme naturel

$$(5) \quad \mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{E}(kD) \rightarrow \mathcal{E}(\star D)$$

n'est un isomorphisme pour aucun $k > 0$. Prendre par exemple une courbe plane $D \subset X = \mathbb{C}^2$, d'équation $f = 0$, qui n'est pas quasi-homogène et $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$. Dans ce cas on a :

1) les complexes $\mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{O}_X(kD)$, $k \in \mathbb{Z}$, sont concentrés en degré 0, car D est de Koszul,

2) les morphismes $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{O}_X(kD) \rightarrow \mathcal{O}_X(\star D)$, $k > 0$, sont surjectifs, car les fonctions méromorphes sont engendrées sur \mathcal{D}_X par f^{-1} dans le cas des courbes planes,

3) le morphisme $\mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_X(\star D)$ n'est pas un isomorphisme, d'après [4] et le théorème 4.1,

4) tous les \mathcal{D}_X -modules $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{O}_X(kD)$, $k \in \mathbb{Z}$, ont même cycle caractéristique, car D est de Koszul (voir la preuve du théorème 4.4).

Par conséquent, le morphisme $\mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{O}_X(kD) \rightarrow \mathcal{O}_X(\star D)$ n'est un isomorphisme pour aucun $k > 0$.

Pourtant, dans le cas localement quasi-homogène il est raisonnable de se demander si le morphisme (5) est un isomorphisme pour $k \gg 0$. Dans un travail en cours nous étudions cette question en partant de la généralisation des résultats de [6] au cas des connexions logarithmiques intégrables.

Problème 5.4. — Est-ce que le complexe de de Rham logarithmique $\Omega_X^\bullet(\log D)$ de tout diviseur libre $D \subset X$ est analytiquement constructible? ou de façon équivalente d'après le théorème de constructibilité de Kashiwara et [19], chap. II, th. (4.1.5), est-ce que le complexe $\mathcal{D}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X(\log D)} \mathcal{O}_X$ est à cohomologie holonome?

On peut aussi se poser la même question pour les complexes de de Rham logarithmiques associés à des connexions logarithmiques intégrables arbitraires.

Problème 5.5. — Est-ce que si \mathcal{O}_X est admissible (i.e. D est un diviseur de Spencer), alors toute connexion logarithmique intégrable est admissible?

Problème 5.6. — Soit D un diviseur libre qui satisfait le théorème de comparaison logarithmique. Dans [4] on a conjecturé que D est Euler-homogène et d'après le corollaire 4.2 nous savons que D est de Spencer. Pourtant, il existe des diviseurs libres Euler-homogènes de Spencer, et même de Koszul, qui ne satisfont pas le théorème de comparaison logarithmique : il suffit de prendre une surface d'équation $zf(x, y) = 0$ où $f(x, y) = 0$ est l'équation réduite d'une courbe plane non quasi-homogène. Une question naturelle est de trouver des conditions suffisantes sur les diviseurs libres Euler-homogènes, autres que la quasi-homogénéité locale (resp. que d'être de Koszul) qui garantissent le théorème de comparaison logarithmique (resp. d'être de Spencer).

Appendice.

Dans cet appendice on fixe un homomorphisme d'anneaux commutatifs $k \rightarrow A$ (i.e. , A est une k -algèbre). Étant donnée une (k, A) -algèbre de Lie L , notons $U(L)$ son algèbre enveloppante cf. [23]. Rappelons qu'elle est construite comme le quotient de l'algèbre tensorielle $T_k^\bullet(A \oplus L)$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments :

$$\begin{aligned} & c \cdot 1 - i(c), c \in k, \\ & i(a) \otimes i(b) - i(ab), a, b \in A \subset A \oplus L, \\ & i(\lambda) \otimes i(a) - i(a) \otimes i(\lambda) - i(\lambda(a)), \lambda \in L, a \in A, \\ & i(\lambda) \otimes i(\mu) - i(\mu) \otimes i(\lambda) - i([\lambda, \mu]), \lambda, \mu \in L, \\ & i(a\lambda) - i(a) \otimes i(\lambda), \lambda \in L, a \in A, \\ & i : A \oplus L \rightarrow T_k^\bullet(A \oplus L) \quad \text{étant l'inclusion naturelle.} \end{aligned}$$

Une description alternative est donnée dans [3], prop. 2.2.5, en utilisant l'algèbre tensorielle des bimodules et le fait que $A \oplus L$ est muni d'une structure de (A, A) -bimodule :

$$a(b + \lambda) = ab + a\lambda, \quad (b + \lambda)a = [ba + \lambda(a)] + a\lambda, \quad a, b \in A, \lambda \in L.$$

De plus, $A \oplus L$ a aussi une structure de (k, A) -algèbre de Lie.

L'algèbre $U(L)$ est un anneau filtré de la manière évidente.

Si L est un module libre de rang n sur A , le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt ([23], th. 3.1) nous dit que le gradué associé à l'anneau $U(L)$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre symétrique du A -module L .

Considérons maintenant un morphisme de (k, A) -algèbres de Lie $L_0 \rightarrow L$ et le morphisme induit sur les algèbres enveloppantes correspondantes $U_0 = U(L_0) \rightarrow U(L) = U$. Si $\varepsilon \in L_0$, on écrira aussi ε pour son image dans L .

Supposons que M (resp. N) est un U -module à droite (resp. un U_0 -module à gauche). Alors $U \otimes_{U_0} N$ est un U -module à gauche, et donc $M \otimes_A [U \otimes_{U_0} N]$ est un U -module à droite.

D'autre part, comme M est aussi un U_0 -module à droite par restriction des scalaires, $M \otimes_A N$ est un U_0 -module à droite.

Il est clair que le morphisme :

$$\sigma : M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A [U \otimes_{U_0} N], \quad \sigma(m \otimes n) = m \otimes [1 \otimes n]$$

est U_0 -linéaire à droite, et induit donc un morphisme U -linéaire à droite :

$$\lambda : [M \otimes_A N] \otimes_{U_0} U \rightarrow M \otimes_A [U \otimes_{U_0} N].$$

THÉORÈME A.1. — *Pour tout U -module à droite P et pour tout morphisme U_0 -linéaire à droite $\alpha : M \otimes_A N \rightarrow P$, il existe un seul morphisme U -linéaire à droite $\beta : M \otimes_A [U \otimes_{U_0} N] \rightarrow P$ tel que $\beta \circ \sigma = \alpha$.*

Notons que le théorème A.1 nous dit que le morphisme σ vérifie la même propriété universelle que le morphisme naturel $[M \otimes_A N] \rightarrow [M \otimes_A N] \otimes_{U_0} U$. On a donc le corollaire suivant :

COROLLAIRE A.2. — *Sous les hypothèses précédentes, le morphisme*

$$\lambda : [M \otimes_A N] \otimes_{U_0} U \rightarrow M \otimes_A [U \otimes_{U_0} N]$$

est un isomorphisme de U -modules à droite.

Preuve du théorème A.1. — L'unicité est claire.

Notons $\Delta_0 = A \oplus L_0$, $\Delta = A \oplus L$, $T_0 = \mathbf{T}_k^\bullet(\Delta_0)$, $T = \mathbf{T}_k^\bullet(\Delta)$.

Le morphisme β proviendra d'une application k -multilinéaire

$$\nu : M \times T \times N \rightarrow P$$

satisfaisant certaines conditions.

Comme $T = \bigoplus T^r$, avec $T^0 = k$ et $T^r = \Delta^{\otimes r}$ (produit tensoriel sur k), il suffit de définir des applications k -multilinéaires

$$\nu_r : M \times T^r \times N \rightarrow P, r \geq 0.$$

Pour $r = 0$, on doit avoir clairement

$$\nu_0(m, c, n) = \alpha((mc) \otimes n).$$

On définit de manière récurrente $\nu_r : M \times T^r \times N \rightarrow P$,

$$\nu_r(m, t_1 \otimes \cdots \otimes t_r, n) = \nu_{r-1}(mt_1, t_2 \otimes \cdots \otimes t_r, n) - \nu_{r-1}(m, t_2 \otimes \cdots \otimes t_r, n)\lambda_1,$$

où on a écrit $t_i = a_i + \lambda_i$, $a_i \in A$, $\lambda_i \in L$.

On voit facilement que l'expression précédente est bien définie sur le produit tensoriel et que :

$$\nu_r(ma, t_1 \otimes \cdots \otimes t_r, n) = \nu_r(m, (at_1) \otimes \cdots \otimes t_r, n), a \in A.$$

Notons $I_r = \{1, \dots, r\}$, et si $E \subset I_r$, $E = \{i_1 < \cdots < i_l\}$ on écrira :

$$t_E = t_{i_1} \cdots t_{i_l}, \quad \lambda_E = \lambda_{i_l} \lambda_{i_{l-1}} \cdots \lambda_{i_1} \quad (\text{attention à l'ordre}).$$

Si $a \in A$ on notera $\lambda_E(a) = \lambda_{i_l}(\lambda_{i_{l-1}}(\cdots(\lambda_{i_1}(a))\cdots))$.

On démontre par récurrence la formule suivante :

$$\nu_r(m, t_1 \otimes \cdots \otimes t_r, n) = \sum_{E \subset I_r} (-1)^{\sharp(I_r - E)} \alpha((mt_E) \otimes n) \lambda_{I_r - E}.$$

À partir du lemme de commutation A.3, on démontre les relations suivantes :

$$\nu_r(ma, t_1 \otimes \cdots \otimes t_r, n) = \nu_r(m, t_1 \otimes \cdots \otimes t_r, n)a, a \in A,$$

$$\nu_r(m, t_1 \otimes \cdots \otimes (t_r a), n) = \nu_r(m, t_1 \otimes \cdots \otimes t_r, an), a \in A.$$

La preuve des trois lemmes suivants est laissée au lecteur.

LEMME A.3 (Lemme de commutation). — Pour $t_i = a_i + \lambda_i$, $i \in I_r$, $a \in A$ et $E \subset I_r$ on a :

$$at_E = \sum_{E' \subset E} (-1)^{\sharp(E - E')} t_{E'} \lambda_{E - E'}(a),$$

$$\lambda_E a = \sum_{E' \subset E} \lambda_{E'}(a) \lambda_{E - E'}.$$

LEMME A.4. — Pour $m \in M$, $n \in N$, $t_i \in \Delta$, $i = 1, \dots, r - 1$, $t_r \in \Delta_0$, on a :

$$\nu_r(m, t_1 \otimes \cdots \otimes t_r, n) = \nu_{r-1}(m, t_1 \otimes \cdots \otimes t_{r-1}, t_r n).$$

LEMME A.5. — Pour $m \in M, n \in N, t_i \in \Delta, i = 2, \dots, r, \lambda_1 \in L,$
 on a :

$$\begin{aligned} \nu_{r-1}(m\lambda_1, t_2 \otimes \dots \otimes t_r, n) - \nu_r(m, \lambda_1 \otimes t_2 \otimes \dots \otimes t_r, n) \\ = \nu_{r-1}(m, t_2 \otimes \dots \otimes t_r, n)\lambda_1. \end{aligned}$$

Ensuite on voit que l'application ν passe au quotient $U = T/J$ et définit une nouvelle application k -multilinéaire notée encore

$$\nu : M \times U \times N \rightarrow P,$$

qui grâce aux lemmes précédents définit l'application U -linéaire à droite cherchée

$$\beta : M \otimes_A [U \otimes_{U_0} N] \rightarrow P$$

et le théorème A.1 est démontré. □

Soit maintenant M (resp. N) un U -module à gauche (resp. un U_0 -module à gauche). Alors $U \otimes_{U_0} N$ est un U -module à gauche, et donc $[U \otimes_{U_0} N] \otimes_A M$ est un U -module à gauche.

D'autre part, comme M est aussi un U_0 -module à gauche par restriction des scalaires, $N \otimes_A M$ est un U_0 -module à gauche. Il est clair que le morphisme

$$n \otimes m \in N \otimes_A M \mapsto [1 \otimes n] \otimes m \in [U \otimes_{U_0} N] \otimes_A M$$

est U_0 -linéaire à gauche et induit donc un morphisme U -linéaire à gauche :

$$\lambda' : U \otimes_{U_0} [N \otimes_A M] \rightarrow [U \otimes_{U_0} N] \otimes_A M.$$

Le théorème suivant se démontre de façon tout à fait analogue au théorème A.1 et au corollaire A.2 :

THÉORÈME A.6. — *Sous les hypothèses précédentes, le morphisme*

$$\lambda' : U \otimes_{U_0} [N \otimes_A M] \rightarrow [U \otimes_{U_0} N] \otimes_A M$$

est un isomorphisme de U -modules à gauche.

La situation précédente s'applique au cas où $L_0 = 0$ et $U_0 = A \rightarrow U$ est l'inclusion :

COROLLAIRE A.7. — *Soit M un U -module à gauche et N un A -module. Alors il existe un unique isomorphisme U -linéaire à gauche*

$$\lambda' : U \otimes_A [N \otimes_A M] \rightarrow [U \otimes_A N] \otimes_A M$$

qui envoie $1 \otimes [n \otimes m]$ dans $[1 \otimes n] \otimes m$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. BACKELIN, On the homological dimension of a Der-free hypersurface, *Math. Scand.*, 78-1 (1996), 13–18.
- [2] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique*, Masson, Paris, 1980, Algèbre. Chapitre 10. Algèbre homologique.
- [3] F. J. CALDERÓN MORENO, Logarithmic differential operators and logarithmic de Rham complexes relative to a free divisor, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 32-5 (1999), 701–714.
- [4] F. J. CALDERÓN MORENO, D. MOND, L. NARVÁEZ MACARRO and F. J. CASTRO JIMÉNEZ, Logarithmic cohomology of the complement of a plane curve, *Comment. Math. Helv.*, 77-1 (2002), 24–38.
- [5] F. J. CALDERÓN MORENO and L. NARVÁEZ MACARRO, Locally quasi-homogeneous free divisors are Koszul free, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 238 (2002), 72–77.
- [6] F. J. CALDERÓN MORENO and L. NARVÁEZ MACARRO, The module $\mathcal{D}f^s$ for locally quasi-homogeneous free divisors, *Compositio Math.*, 134-1 (2002), 59–74.
- [7] F. J. CASTRO JIMÉNEZ, D. MOND and L. NARVÁEZ MACARRO, Cohomology of the complement of a free divisor, *Trans. A.M.S.*, 348 (1996), 3037–3049.
- [8] F. J. CASTRO JIMÉNEZ and J. M. UCHA ENRÍQUEZ, Free divisors and duality for \mathcal{D} -modules, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 238 (2002), 88–96.
- [9] F. J. CASTRO JIMÉNEZ and J. M. UCHA ENRÍQUEZ, Logarithmic comparaison theorem and some Euler homogeneous free divisors, to appear in *Proc. of the American Mathematical Society*.
- [10] S. CHEMLA, A duality property for complex Lie algebroids, *Math. Z.*, 232-2 (1999), 367–388.
- [11] P. DELIGNE, *Equations Différentielles à Points Singuliers Réguliers*, volume 163 of *Lect. Notes in Math.*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1970.
- [12] H. ESNAULT and E. VIEHWEG, Logarithmic De Rham complexes and vanishing theorems, *Invent. Math.*, 86 (1986), 161–194.
- [13] D. R. GRAYSON and M. E. STILLMAN, *Macaulay 2*, a software system for research in algebraic geometry, Available at <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>.
- [14] J. HUEBSCHMANN, Lie-Rinehart algebras, Gerstenhaber algebras and Batalin-Vilkovisky algebras, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48-2 (1998), 425–440.
- [15] J. HUEBSCHMANN, Duality for Lie-Rinehart algebras and the modular class, *J. Reine Angew. Math.*, 510 (1999), 103–159.
- [16] A. LEYKIN and H. TSAI, *D-modules for Macaulay 2*, Package included in [13].
- [17] Ph. MAISONOBE and L. NARVÁEZ MACARRO (EDITORS), *Éléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques*, Cours du C.I.M.P.A., École d'été de Séville (1996), volume 8 of “Séminaires et Congrès”, Soc. Math. France, Paris, 2004.
- [18] Z. MEBKHOUT, Le théorème de positivité, le théorème de comparaison et le théorème d'existence de Riemann, In [17], pages 165–308.
- [19] Z. MEBKHOUT, Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les \mathcal{D}_X -modules cohérents, volume 35 of “Travaux en cours”, Hermann, Paris, 1989.

- [20] Z. MEBKHOUT and L. NARVÁEZ MACARRO, La théorie du polynôme de Bernstein-Sato pour les algèbres de Tate et de Dwork-Monsky-Washnitzer, *Ann. Sci. E.N.S.*, 24 (1991), 227–256.
- [21] L. NARVÁEZ MACARRO, The Local Duality Theorem in \mathcal{D} -module Theory, In [17], pages 59–88.
- [22] L. NARVÁEZ MACARRO and A. ROJAS LEÓN, Continuous division of linear differential operators and faithful flatness of \mathcal{D}_X^∞ over \mathcal{D}_X , In [17], pages 129–148.
- [23] G. S. RINEHART, Differential forms on general commutative algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108 (1963), 195–222.
- [24] K. SAITO, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 27 (1980), 265–291.
- [25] M. SATO, T. KAWAI, and M. KASHIWARA, Microfunctions and pseudo-differential equations, *Lect. Notes in Math.*, 287 (1973), 265–529.
- [26] T. TORRELLI, On meromorphic functions defined by a differential system of order 1, *Bull. Soc. Math. France*, 132 (2004), 591–612.
- [27] J.M. UCHA ENRÍQUEZ, Métodos constructivos en álgebras de operadores diferenciales, Univ. Sevilla, September 1999, Ph.D.

Manuscrit reçu le 20 juillet 2004,
accepté le 19 octobre 2004.

Francisco Javier CALDERÓN
& Luis NARVÁEZ MACARRO,
Universidad de Sevilla
Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra
PO Box 1160
41080 Sevilla (Spain)
calderon@algebra.us.es
narvaez@algebra.us.es