

Curso 2012/2013



TRABAJO
FIN DE
GRADO

PROGRAMACIÓN LINEAL: APLICACIÓN A LA PRODUCCIÓN DE HELADOS

Alumna: | Conejero Calvo de León, Elena

ÍNDICE

1.- INTRODUCCIÓN.....	3
2.- RESEÑA HISTÓRICA.....	6
3.- APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL.....	12
4.- PROBLEMA LINEAL: PRODUCCIÓN DE HELADOS LINEAL.....	16
5.- REFERENCIAS.....	30

1. Introducción

La programación lineal es una técnica matemática, desarrollada al comienzo de la segunda mitad del siglo XX. Su impacto desde 1950 ha sido extraordinario y en la actualidad es una herramienta de uso habitual en los países industrializados del mundo.

Un problema de programación lineal es un problema de *optimización con restricciones* en el que tanto la *función objetivo* como las *restricciones* son *funciones lineales* de las variables de decisión.

Desde un punto de vista técnico, hay cinco supuestos que debe cumplir todo problema de programación lineal:

- Divisibilidad: todas las variables tienen carácter continuo por lo que pueden tomar cualquier valor real.
- Condición de no negatividad: todas las variables siempre tomarán valores iguales o superiores al cero.
- Proporcionalidad: la contribución de cada variable es individual y proporcional a su valor.
- Aditividad: la contribución total de las variables es la suma de las contribuciones individuales de cada una de ellas.
- Certidumbre: todos los parámetros del modelo son conocidos.

Si en un modelo lineal, las variables de decisión deben tomar valores enteros, puede utilizarse la Programación Lineal Entera.

Si los parámetros del problema lineal no son conocidos, puede realizarse un análisis de sensibilidad o usarse la Programación Lineal Estocástica.

Además, cuando se tiene más de un objetivo, puede aplicarse la Programación Lineal Multicriterio.

- Solución no acotada: En ocasiones, podemos encontrarnos con problemas que no tienen solución finita. Esta situación sólo se puede dar en el caso de que la región factible no esté acotada.
- No Factibilidad: Esta situación se da cuando ningún punto del plano (o, en general, del espacio real n-dimensional) cumple simultáneamente todas las restricciones del problema, es decir, la región factible es un conjunto vacío.

2. Reseña Histórica

Aunque parece ser que la programación lineal fue utilizada por G. Monge en 1776, se considera al matemático y economista ruso Leonid Vitalevich Kantorovitch como uno de sus creadores, aunque no fue el único. A continuación exponemos, cronológicamente, los autores que pueden considerarse como los creadores de la programación lineal así como sus aportaciones.

- ✚ **1939-** L. Kantorovitch publica: “Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción”. En esta obra se engloba una serie de problemas de producción y distribución con una teoría matemática precisa y bien definida. Esta obra no se dio a conocer hasta 20 años después.



- ✚ **1942-** Tjallinging Koopmans trabajando como estadístico en el puerto de Washington trató de determinar los planes de embarque al mínimo coste total, conociendo de antemano la disponibilidad y demanda de cada puerto. Hoy en día, a este tipo de problema se le conoce como “Problema de Transporte”.

Simultáneamente pero de forma independiente Kantorovich trabajaba en la resolución de este tipo de problema.



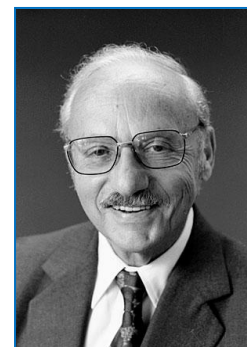
Ambos son galardonados con el Premio Nobel de Economía en 1975, por su contribución a la “Teoría de optimización de recursos”.

- ✚ **1946-** George Joseph Stigler publica “Los costes de la Subsistencia” donde formula y resuelve el problema lineal de régimen alimenticio óptimo (Problema de la Dieta), para solventar la preocupación del ejército americano por asegurar a sus tropas unos requisitos nutricionales al menor coste posible. Para su resolución utilizó un método heurístico cuya solución pudo comprobarse años más tarde que sólo difería en unos céntimos de la solución aportada por el método del simplex.



En 1982, recibe el Premio Nobel de Economía por sus estudios de las estructuras industriales, el funcionamiento de los mercados y las causas y efectos de la reglamentación pública.

- ✚ **1947-** George Bernard Dantzing, trabajando como experto en métodos de planificación para las fuerzas aéreas norteamericanas, formula el enunciado general al que se reduce cualquier problema lineal y desarrolla un método iterativo y muy eficaz de resolución, llamado “Método del Simplex”.



Una de las primeras aplicaciones de sus estudios fue la resolución del llamado "Puente Aéreo de Berlín". A mediados de 1948, en plena guerra fría, la URSS bloqueó las comunicaciones terrestres entre las zonas occidentales alemanas ocupadas por los aliados y la ciudad de Berlín. Utilizando la Programación Lineal, diseñó un plan de abastecimiento aéreo minimizando costes que en pocos meses consiguió igualar a los suministros realizados por carretera y ferrocarril antes del bloqueo.

Si bien es cierto que G. Dantzig no fue galardonado con el Premio Nobel, su contribución ha sido reconocida con numerosos premios, entre los que destaca el premio Von Neumann de la Sociedad Americana de Investigación Operativa del año 1975.

- ✚ **1947-** John Von Neumann establece los fundamentos matemáticos de la Programación Lineal, al relacionar ésta con la teoría de matrices de su famosa teoría de juegos, que años antes había publicado junto con Oscar Morgenstern en el libro “Theory of Games and Economic Behavior (1944)”.



Aunque la Programación Lineal surgió para dar respuesta a problemas logísticos y militares, a lo largo de la historia ha tenido aplicaciones importantes en distintas áreas de la actividad humana, desde el social y estratégico hasta la industria y la economía.

El éxito de esta herramienta se debe a varios motivos:

- La sencillez de su formulación permite describir un gran número de situaciones reales en distintas áreas.
- La eficacia del algoritmo del simplex para hallar la solución en un número finito de pasos además de su fácil implementación.

Durante más de 30 años el método del simplex ha sido el único método utilizado para la resolución de problemas lineales de gran tamaño. Su importancia ha sido tal que en el 2000 fue incluido entre los 10 algoritmos más trascendentes del siglo XX en el “top ten” de la revista “Computing in Science and Engineering”.

Cierto es, que el algoritmo del simplex supuso un gran empuje a esta herramienta, pero quizás no hubiese sido así sin la colaboración de los ordenadores. La aplicación de este método ha estado siempre ligada al desarrollo de los ordenadores. En 1951 el ordenador SEAC (Standards Eastern Automatic Computer) resolvía problemas con 48 restricciones y 72 variables. En 1963 el IBM 7090 resolvía problemas con 1024 restricciones y 10 años más tarde otro IBM, el modelo 360, era ya capaz de utilizar 32000 restricciones.

Un avance más, en la utilización de la programación lineal, fue en la década de los 80 con el desarrollo de los ordenadores personales cada vez más rápidos, con mayor capacidad, prestaciones, potencia... acompañados de buenos paquetes de software, permitiendo el uso de esta herramienta a un gran número de personas.

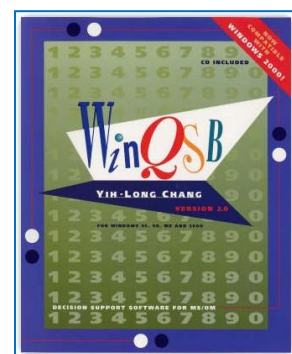
En la actualidad es una herramienta común que ha ahorrado miles o millones de recursos a muchas compañías y negocios, incluyendo industrias medianas en distintos países del mundo, como por ejemplo¹:

- En el laboratorio American Edwards fabricaron en 1981 una nueva válvula cardíaca biológica para ser utilizada en seres humanos. Sid Hilal y Warren Erikson desarrollaron un programa lineal para seleccionar la combinación de proveedores que se acercara más a la medida correcta de las válvulas cardíacas humanas. Resultado: unos ahorros anuales de 1,5 millones de dólares.
- SANTOS, Ltd., Australia ahorró 3 millones de dólares en 1987 optimizando las inversiones de capital para producir gas natural durante 25 años.
- Texaco Inc., ahorró 30 millones de dólares en 1989 optimizando la mezcla de ingredientes disponibles para que los productos de gasolina cumplieran con los requerimientos de ventas y calidad.

Existen variados programas informáticos que permiten el tratamiento de grandes volúmenes de información, facilitando la introducción del modelo y la integración de éste con los sistemas de información de la empresa. La mayor parte de estos paquetes utilizan (o han utilizado) el método simplex, lo cual permite explicar, mediante el propio método, algunos conceptos como precios-sombra o costes reducidos.

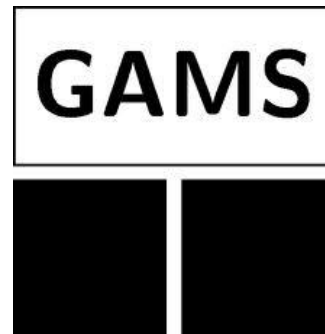
Entre los softwares más utilizados en programación lineal se pueden citar los siguientes:

- **WINQSB (Quantitative System Business):** Desarrollado en 1985, es una herramienta versátil que permite solucionar una gran variedad de problemas. Consta de 19 módulos ó aplicaciones individuales, cada uno de ellos se corresponde a un tipo de problema. Cabe destacar el módulo de programación lineal y el módulo de programación por metas (Goal Programming).



¹ El estudio se encuentra en el N° Enero-Febrero de la revista <http://interfaces.journal.informs.org/> del año correspondiente.

- **GAMS (General Algebraic Modeling System):** Creado a finales de los años 80 por un grupo de economistas, resuelve problemas lineales, enteros y no lineales. Permite además la interrelación con otros lenguajes de programación como por ejemplo Fortran.



- **LINGO (LINEar Generalize Optimizer):** Es la versión moderna bajo entorno windows, del software LINDO (Linear Interactive Discrete Optimizer) que desarrolló en 1979 la empresa Lindo Systems. Está disponible en la web www.lindo.com, y es una herramienta que permite formular problemas lineales y no lineales, resolverlos y analizar su solución. La sintaxis que utiliza es sencilla y muy similar a la notación matemática estándar. Los datos pueden leerse en un fichero aparte o en una hoja de cálculo, lo cual permite tener separada la estructura del modelo de los datos del mismo. Aún sigue siendo uno de los softwares más populares.



Actualmente es posible encontrar aplicaciones gratuitas en internet, como por ejemplo:

- **PHP SIMPLEX:** herramienta on-line de uso gratuito para la resolución de problemas lineales. Determina la solución óptima mediante el método del simplex y las tablas asociadas a cada iteración.

Pero no sólo los programas especializados como Lingo pueden usarse para la resolución de problemas lineales. También las hojas de cálculo como Excel ofrecen esta posibilidad mediante la macro Solver. Resuelve problemas de hasta 200 variables y 500 restricciones.

De entre todos los softwares disponibles hemos elegido LINGO, para la resolución del problema que abordaremos en el trabajo, por varias razones:

- ★ La sencillez de su sintaxis.

- ★ Disponibilidad de una versión demo gratuita que pueden resolver modelos con más de 300 variables y 150 restricciones.

- ★ Permite generar modelos mediante un lenguaje de modelización que es especialmente útil en problemas con muchas restricciones de estructura similar.

3. Aplicaciones de la Programación Lineal

Como ya se ha comentado anteriormente, la Programación Lineal es una herramienta que se utiliza habitualmente en muchos áreas, siendo la industria y la economía donde ha encontrado sus aplicaciones más importantes. Podemos incluso afirmar que esta herramienta ha tenido un gran impacto en el estudio y desarrollo de la actividad económica. Es en este último aspecto donde nos centraremos en este apartado.



Como muestra en el gráfico superior, hemos dividido el ámbito económico en 6 categorías: Marketing, Finanzas, Producción, Logística, Mezclas y Asignación de Tareas.

A continuación esbozaremos la utilidad de esta herramienta en cada una de ellas.

Marketing:

La Programación Lineal en este campo, se presenta como una herramienta bastante eficaz, en la elección, por ejemplo, de la combinación más efectiva de los medios de comunicación (periódicos, revistas, radio, televisión...) para promocionar productos o servicios.

El objetivo principal es conseguir la mayor audiencia posible, y usualmente las restricciones suelen ser:

- ✓ Presupuestaria, ya que no es ilimitado.
- ✓ Política publicitaria específica de la empresa.
- ✓ Disponibilidad de cada medio.

Producción:

En este campo, esta herramienta permite determinar la producción óptima de una empresa (las cantidades a producir de cada producto) con objeto de maximizar beneficios o minimizar costes.

Las restricciones, más comunes son:

- ✓ Presupuestaria.
- ✓ Disponibilidad de recursos.
- ✓ Demanda del mercado.
- ✓ Políticas medioambientales.
- ✓ Políticas de la propia empresa.

Finanzas:

Normalmente directivos, bancos, etc... deben seleccionar una serie de inversiones concretas para configurar su “Cartera de Valores” entre la amplia variedad de alternativas que existen en el mercado.

Tradicionalmente el objetivo ha sido maximizar el rendimiento que genera dicha cartera o minimizar el riesgo adherente a la misma.

Las restricciones a las que se enfrentan son:

- ✓ Presupuestaria.
- ✓ Nivel de riesgo permisible.
- ✓ Leyes estatales.
- ✓ Políticas de la compañía.

Logística:

Una de las aplicaciones más habituales de la Programación Lineal en este campo es el denominado “Problema de Transporte”. En este tipo de problema se desea determinar la cantidad de mercancía que se ha de transportar desde cualquier grupo de centros de suministro (Orígenes), a cualquier grupo de centros de recepción (Destinos). Habitualmente el objetivo es minimizar costes de transporte.

Las restricciones son:

- ✓ Oferta de cada centro de origen.
- ✓ Demanda de cada centro de destino.

El problema de transporte es un caso particular de Programación Lineal, y existen algoritmos específicos para su resolución, como por ejemplo la Regla de la Esquina NorOeste.

Asignación de tareas:

Habitualmente se desea asignar de la forma más eficiente un trabajo a cada empleado ó máquina. El objetivo es minimizar el coste total de la asignación.

El problema de asignación es un caso particular del problema de transporte. Una peculiaridad de este tipo de problema es que las variables de decisión son binarias (toman valor 1 ó 0) y aunque puede resolverse mediante el simplex, existen métodos específicos más eficaces como el método húngaro.

Otra aplicación interesante de la Programación Lineal en este ámbito es la planificación de horarios, en la cual se desea asignar tareas a empleados polifuncionales. Suele utilizarse en sectores como la sanidad, la banca, etc..

Mezclas:

Una de las primeras aplicaciones de la Programación Lineal fue el denominado Problema de la Dieta, en el cual se desea determinar la combinación óptima de alimentos al menor coste posible, objetivo habitual, aunque también puede ser minimizar/maximizar calorías.

Teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

- ✓ Presupuesto.
- ✓ Disponibilidad de alimentos.
- ✓ Especificación nutritivas mínimas.

En general, los problemas de mezclas se presentan cuando se desea combinar dos o más recursos para fabricar uno o más productos. En estos casos, se desea determinar la cantidad de cada recurso a adquirir para satisfacer las especificaciones de los productos y las demandas de los mismos a un costo mínimo.

Los problemas de mezclas aparecen frecuentemente en la industria del petróleo (problemas como la combinación de petróleos crudos para fabricar gasolinias con octanajes diferentes), en la industria química (como mezcla de productos químicos para fabricar fertilizantes) y en la industria de los alimentos (como mezcla de ingredientes para fabricar bebidas, sopas, etc.).

4. Problema Lineal de Producción de Helados

Nuestra empresa de origen valenciano afincada en Sevilla desde la década de los años 70, se dedica a la elaboración de helados artesanos. Después de estos años de grandes progresos en su negocio, desea abrir mercado para poder enfrentarse a la situación actual.

Esta ampliación tiene como objetivo introducir sus productos en el sector de la hostelería, mediante la propuesta de una gama de helados que podemos considerar “Gourmet”. A continuación detallaremos dicha gama.

Gama Gourmet



Creada por el gran Filippo Zampieron está compuesta por cinco tipos de polos artesanos: Polos de menta, Polos de chocolate, Polos de yogurt y melocotón, Polos de almendras y Polos “Fiordilatte”.

Aunque la elaboración de todos ellos difieren en diversos aspectos, ya sea en la composición de la base, cobertura o en las proporciones de cada componente, hay un producto común en todos ellos “Jarabe Base” ya que sin este no sería posible la fabricación de la base de los polos.

Este Jarabe, está compuesto por:

- Agua: 655 gr
- Azúcar de caña : 180 gr
- Dextosa: 35 gr
- Glucosa: 130 gr

A continuación detallamos el proceso de elaboración y las cantidades utilizadas para la fabricación de un kilo de cada tipo de polos.

Polos de menta

La fabricación de este producto comienza con la elaboración de la base. Para ello, como se puede apreciar en la fotografía, se utiliza 550 gr del jarabe, seguido de unas gotas de esencia de menta (10 gotas) y posteriormente añadiendo unos 450 gr de leche fresca entera.

Una vez que se ha mezclado la base y se ha dejado reposar para conseguir una textura idónea se procede a la elaboración de su cobertura.

Está compuesta por unos 800 gr chocolate y 200 gr de manteca de cacao.



Polos de Chocolate

La base de estos está compuesta por: 500 gr de jarabe, 440 gr de leche entera fresca unos 25 gr de azúcar invertido (una combinación de glucosa y fructosa) y por último, 35 gr de cacao.

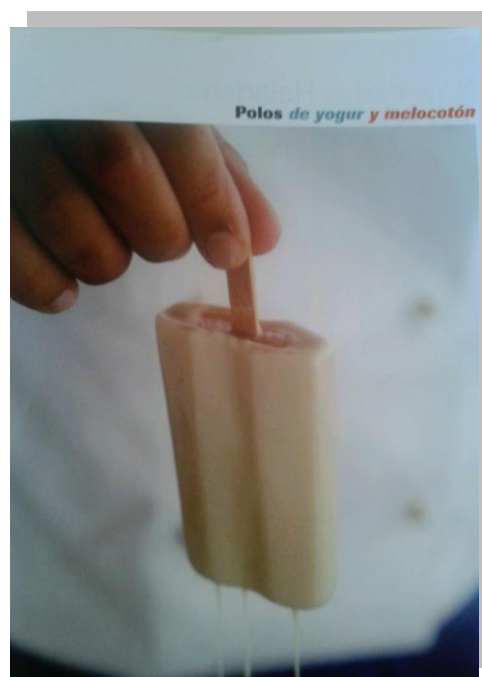
La cobertura al igual que el producto anterior está compuesta por: 800 gr de chocolate y 200 gr de manteca de cacao.



Polos de Yogurt y Melocotón

Con una base compuesta por: 430 gr de jarabe, 300 gr de yogurt desnatado, 20 gr de azúcar invertido y 250 gr de melocotón batido.

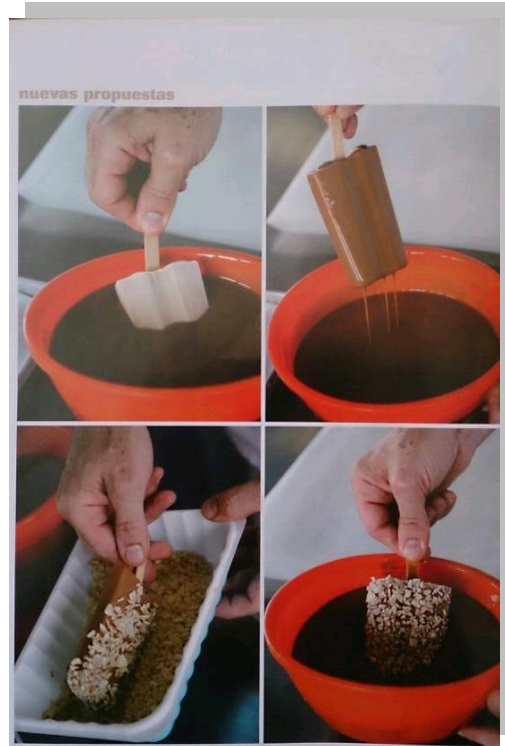
Su cobertura es una dulce combinación de 500 gr de chocolate y 500 gr de nata.



Polos de almendra

Base elaborada por: 400 gr de jarabe, 495 gr de leche fresca entera, 25 gr de azúcar invertido.

La cobertura está elaborada por 800 gr de chocolate, 200 gr de manteca de cacao y 80 gr de pasta de almendras.



Polos “Fiordilatte”

Su elaboración comienza con la base compuesta por 510 gr de jarabe, 510 gr de leche fresca entera, 250 gr de nata, 200 gr de azúcar invertido.

Una vez que la base se haya mezclado y adoptado la textura deseada, se le inyecta un relleno compuesto por: 550 gr de nata y 500 gr de chocolate.

Finalmente, esperado el tiempo necesario para que el relleno se adapte a la base, se le añade una cobertura de 800 gr de chocolate y 200 gr de manteca de cacao.



A su vez se ha realizado un estudio de mercado y de producción, que nos proporcionan los siguientes datos:

✚ Beneficio esperado por cada kilo de los diferentes polos:

- ✓ Polos de menta: 23 u.m. el kilo
- ✓ Polos de chocolate: 22.5 u.m. el kilo
- ✓ Polos de yogurt y melocotón: 21 u.m. el kilo
- ✓ Polos de almendras: 20.5 u.m. el kilo
- ✓ Polos “ Fiordilatte”: 21 u.m. el kilo

✚ Disponibilidad semanal de las siguientes materias primas :

- ✓ Jarabe Base: 20,5 kg
- ✓ Leche Fresca entera: 13 kg
- ✓ Yogurt desnatado: 5 kg
- ✓ Nata: 8,5 kg
- ✓ Azúcar invertido: 1,3 kg
- ✓ Chocolate: 27 kg
- ✓ Manteca de cacao: 5 kg
- ✓ Esencia de menta: 2 frasco de 90 ml, cada frasco proporciona 75 gotas.
- ✓ Cacao: 0,28 kg (2 bolsas de 140 gr cada uno)
- ✓ Melocotón batido: 4 kg
- ✓ Pasta de almendras: 0,8 kg (2 bolsas de 400 gr cada una)

✚ Demanda esperada semanalmente para cada tipo de polo:

- ✓ Demanda de polos de menta y polos de chocolate: 10 kilos
- ✓ Demanda de polos de yogurt y polos de almendras: 10 kilos
- ✓ No se ha estimado demanda alguna de polos Fiordilatte.

Una vez que hemos descrito el proceso de producción de cada producto, hemos sintetizado toda la información, en el siguiente cuadro para ver de una forma más clara, los requisitos de materias primas por tipo de polo:

	Jarabe	Leche entera fresca	Yogurt Desn.	Nata	Azúcar inver.	Cobertura baño	Chocolate	Manteca cacao	Esencia menta	Cacao	Melocotón Batido	Pasta Almen.
P. Menta	550 gr	450 gr				800 gr	200 gr		10 g			
P. Chocolate	500 gr	440 gr			25 gr	800 gr	200 gr			35 gr		
P. Yogurt y Melocotón	430 gr		300 gr	500 gr	20 gr	500 gr					250 gr	
P. Almendra	400 gr	495 gr			25 gr	800 gr	200 gr					80 gr
P. Fiordilatte	510 gr	510 gr		550 gr	200 gr	1300 gr	200 gr					

Tabla: Elaboración propia

La empresa nos ha solicitado que determinemos el plan semanal de producción de los diferentes tipos de polos que conforman la “Gama Gourmet”, con el objetivo de maximizar beneficios.

El problema propuesto por la empresa se corresponde con un problema de programación lineal. A continuación, se definen las distintas actividades a realizar (variables de decisión), las restricciones del problema originadas por las limitaciones de los recursos (materias primas) y las demandas a satisfacer, así como la función objetivo (beneficio) que hay que maximizar.

Variables de decisión:

$x_1 =$ nº kilos a fabricar semanalmente de polos de menta

$x_2 =$ nº kilos a fabricar semanalmente de polos de chocolate

$x_3 =$ nº kilos a fabricar semanalmente de polos de yogur y melocotón

$x_4 =$ nº kilos a fabricar semanalmente de polos de almendras

$x_5 =$ nº kilos a fabricar semanalmente de polos fiordilatte

Restricciones con respecto a la disponibilidad de materias primas:

- Limitación de Jarabe Base: 20,5 kilos

$$550x_1 + 500x_2 + 430x_3 + 400x_4 + 510x_5 \leq 20500$$

- Limitación de Leche Fresca Entera: 13 kilos

$$450x_1 + 440x_2 + 495x_4 + 510x_5 \leq 13000$$

- Limitación de Yogurt desnatado: 5 kilos

$$300x_3 \leq 5000$$

- Limitación de Nata: 8,5 kilos

$$500x_3 + 550x_5 \leq 8500$$

- Limitación de Azúcar invertido: 1,3 kilo

$$25x_2 + 20x_3 + 25x_4 + 200x_5 \leq 1300$$

- Limitación de Chocolate: 27 kilos

$$800x_1 + 800x_2 + 500x_3 + 800x_4 + 1300x_5 \leq 27000$$

- Limitación de Manteca de cacao: 5 kilos

$$200x_1 + 200x_2 + 200x_4 + 200x_5 \leq 5000$$

- Limitación de Esencia de menta: 150 gotas

$$10x_1 \leq 150$$

- Limitación de Cacao: 0,28 kg

$$35x_2 \leq 280$$

- Limitación de Melocotón Batido: 4 kilos

$$250x_3 \leq 4000$$

- Limitación de Pasta de Almendras: 0.8 kilo

$$80x_4 \leq 800$$

- Restricciones con respecto a la demanda:

$$x_1 + x_2 \geq 10$$

$$x_3 + x_4 \geq 10$$

- Función Objetivo: Beneficio

$$23x_1 + 22.5x_2 + 21x_3 + 20.5x_4 + 21x_5$$

Por tanto, la formulación del problema que hemos de resolver es:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 23x_1 + 22.5x_2 + 21x_3 + 20.5x_4 + 21x_5 \\ \text{s.a.} \quad & 550x_1 + 500x_2 + 430x_3 + 400x_4 + 510x_5 \leq 20500 \\ & 450x_1 + 440x_2 + 495x_4 + 510x_5 \leq 13000 \\ & 300x_3 \leq 5000 \\ & 500x_3 + 550x_5 \leq 8500 \\ & 25x_2 + 20x_3 + 25x_4 + 200x_5 \leq 1300 \\ & 800x_1 + 800x_2 + 500x_3 + 800x_4 + 1300x_5 \leq 27000 \\ & 200x_1 + 200x_2 + 200x_4 + 200x_5 \leq 5000 \\ & 10x_1 \leq 150 \\ & 35x_2 \leq 280 \\ & 250x_3 \leq 4000 \\ & 80x_4 \leq 800 \\ & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & x_3 + x_4 \geq 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Para la resolución de este problema hemos utilizado el programa LINGO. Como se ha comentado en apartados anteriores, este programa permite realizar una modelización del problema que simplifica enormemente la introducción del modelo a resolver, ya que todas las restricciones con análoga estructura pueden escribirse en una sola sentencia.

En este caso, el modelo quedaría de la forma siguiente:

Programación Lineal: Aplicación a la producción de helados

```

Lingo 13.0 - (Lingo Model - MODELIZADO-POLO)
File Edit LINGO Window Help
MODEL:
SETS:
POLO/PMENTA PCHOCOLATE PYOGURMELOCOTON PALMENDRA PFIORDILATTE/: P, BENEFICIO;
MATERIAPRIMA/ JARABE LECHE YOGUR NATA AZUCARINVERTIDO CHOCOLATE MANTECA MENTA CACAO MELOCOTON ALMENDRA/: DISPONIBILIDAD;
COEFICIENTE/1 2/: DEMANDA;
PAREJA( POLO,MATERIAPRIMA): CANTIDAD;
LINK(POLO,COEFICIENTE): RECURSO;
ENDSETS

DATA:
BENEFICIO = 23 22.5 21 20.5 21;
DISPONIBILIDAD= 20500 13000 5000 8500 1300 27000 5000 150 280 4000 800;
CANTIDAD = 550 450 0 0 0 800 200 10 0 0 0
          500 440 0 0 25 800 200 0 35 0 0
          430 0 300 500 20 500 0 0 0 250 0
          400 495 0 0 25 800 200 0 0 0 80
          240 510 0 550 200 1300 200 0 0 0 0;
RECURSO= 1 0
         1 0
         0 1
         0 1
         0 0;
DEMANDA= 10 10;
ENDDATA
[OBJETIVO]Max= @SUM( POLO : BENEFICIO * P);
@FOR(MATERIAPRIMA( J): @SUM(POLO(I): CANTIDAD(I,J) *P(I)) < DISPONIBILIDAD(I));
@FOR(COEFICIENTE(J): @SUM(POLO(I): RECURSO(I,J) *P(I)) >DEMANDA(J));
    
```

Las siguientes ventanas muestran la solución del problema que proporciona el programa y el análisis de sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo y de los términos independientes de las restricciones.

Lingo 13.0 - Solution Report - Helados

Variable	Value	Reduced Cost
X1	15.00000	0.000000
X2	8.000000	0.000000
X3	16.00000	0.000000
X4	0.7500000	0.000000
X5	0.000000	12.31250

Lingo 13.0 - Solution Report - Helados

Row	Slack or Surplus	Dual Price
BENEFICIO	876.3750	1.000000
JARABE	1070.000	0.000000
LECHE	2358.750	0.000000
YOGURT	200.0000	0.000000
NATA	500.0000	0.000000
AZUCAR	761.2500	0.000000
CHOCOLATE	0.000000	0.2562500E-01
MANTECA	250.0000	0.000000
MENTA	0.000000	0.2500000
CACAO	0.000000	0.5714286E-01
MELOCOTON	0.000000	0.3275000E-01
ALMENDRAS	740.0000	0.000000
DMENTAYCHOC	13.00000	0.000000
DYOGURYALME	6.750000	0.000000

Range Report - Helados

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	23.00000	INFINITY	2.500000
X2	22.50000	INFINITY	2.000000
X3	21.00000	INFINITY	8.187500
X4	20.50000	2.000000	7.576923
X5	21.00000	12.31250	INFINITY

Range Report - Helados

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
JARABE	20500.00	INFINITY	1070.000
LECHE	13000.00	INFINITY	2358.750
YOGURT	5000.000	INFINITY	200.0000
NATA	8500.000	INFINITY	500.0000
AZUCAR	1300.000	INFINITY	761.2500
CHOCOLATE	27000.00	1000.000	600.0000
MANTECA	5000.000	INFINITY	250.0000
MENTA	150.0000	7.500000	92.50000
CACAO	280.0000	26.25000	280.0000
MELOCOTON	4000.000	166.6667	500.0000
ALMENDRAS	800.0000	INFINITY	740.0000
DMENTAYCHOC	10.00000	13.00000	INFINITY
DYOGURYALME	10.00000	6.750000	INFINITY

Atendiendo a las salidas que proporciona el programa vamos a realizar el informe que se presentará a la empresa.

INFORME PARA LA EMPRESA HELADERA

La empresa obtiene un beneficio máximo de 876,3750 u.m., produciendo semanalmente 15 kilos de polos de menta, 8 kilos de polos de chocolate, 16 kilos de yogurt y melocotón y 0,75 kilos de polos de almendra. En esta producción óptima no se contempla la fabricación de polos de Fiordilatte.

Si se desea fabricar este tipo de polo, por cada kilo de este producto elaborado, el beneficio disminuiría en 12,31 u.m. O bien podría realizarse esta actividad productiva si se incrementase el beneficio unitario en dicha cantidad.

Esta producción óptima es única y se agotan todos los recursos disponibles de las siguientes materias primas:

- *Chocolate*
- *Esencia de Menta*
- *Cacao*
- *Melocotón batido*

A continuación, se muestra las materias primas que no se agotan (indicamos las cantidades):

- *1070 gr de Jarabe Base*
- *2358,75 gr de Leche entera fresca*
- *200 gr de Yogurt desnatado*
- *500 gr de Nata*
- *761,25gr de Azúcar invertido*
- *250 gr de Manteca de cacao*
- *740 gr de Pasta de Almendras*

Con respecto a la demanda hay un excedente de 13 kilos de polos de menta y polos de chocolate, mientras que son 6,75 kilos el excedente de polos de yogurt y melocotón; y polos de almendras.

INFORME PARA LA EMPRESA HELADERA

Con respecto al chocolate que forma parte de la cobertura, el precio que se estaría dispuesto a pagar por cada gramo adicional es de 0,025 u.m. Este precio sería válido siempre que se adquiriese hasta 1000 gr.

El precio que se estaría dispuesto a pagar por cada gota de menta adicional, es de 0,25 u.m., aunque con este precio solo podría adquirirse 7,5 gotas. Situación no válida, ya que esta materia prima suele comprarse en frascos de 90 ml equivalentes a 75 gotas.

Con respecto al cacao, que es otro recurso que se agota en la producción, por cada gramo del mismo, podría pagarse hasta 0,057 u.m., aunque solamente podría comprarse a este precio, unos 26 gramos.

Por otro lado, el precio que se estaría dispuesto a pagar por cada gramo adicional de Melocotón batido es de 0,032 u.m., pudiéndose comprar al precio indicado, hasta unos 167 gr.

La producción óptima se mantiene siempre que:

- El beneficio unitario de polos de menta no sea inferior a 22,5 u.m., o*
- el beneficio unitario de polos de chocolate no sea inferior a 20,5 u.m., o*
- en el caso de polos de yogurt el beneficio no debe disminuir más de 8,1875u.m. o*
- si el beneficio de polos de almendra oscile entre las 12,9 y 22,5u.m.*

En todos estos casos cambiaría el beneficio máximo obtenido.

La producción cambiaría si el beneficio de polos Fiordilatte aumentase en 12,3125 u.m.

INFORME PARA LA EMPRESA HELADERA

Seguiremos produciendo: polos de menta, chocolate, yogurt y melocotón y almendras; aunque en cantidades distintas, siempre y cuando las disponibilidades de las materias primas no se reduzcan en las cantidades indicadas a continuación:

- + Jarabe base: 1070gr*
- + Leche entera fresca: 2358,75 gr*
- + Yogurt desnatado: 200 gr*
- + Nata: 500 gr*
- + Azúcar invertido: 761,25 gr*
- + Chocolate: 600 gr*
- + Manteca de cacao: 250 gr*
- + Esencia de menta: 92,5 gotas*
- + Cacao: 280 gr*
- + Melocotón Batido: 500 gr*
- + Pasta de Almendras: 740 gr*

En estos casos no se producirán: Polos Fiordilatte.

5. Referencias

BIBLIOGRAFÍA:

Dongarra, J.; Sullivan, F. (2000): “*Guest Editors, Introduction: The top 10 Algorithms*”. Computing in Science and Engineering, Vol. 2, N° 1, January/ February.

Kantorovich, L.V. (1939): “*Mathematical Methods of Organizing and Planning Production*”. Management Science, Vol. 6, N° 4 (Jul, 1960), pp. 366-422. Ed. INFORMS.

Stigler, G. J. (1945): “*The Cost of Subsistence*”. Journal of Farm Economics. Vol. 27, N° 2 (May, 1945), pp. 304-314.

Von Neumann, J.; Morgenstern, O. (1944): “*Theory of Games and Economic Behavior*”. Ed. Princeton University Press. (Commemorative Edition, May 2007).

Revista “Helado Artesano” (2011). N°38 y 39.

ENLACES:

- <http://franciscopaz0.tripod.com/programacionlineal/id5.html>.
Breve reseña histórica desde Monge (1776) hasta Dantzig (1947).
- <http://alerce.pntic.mec.es/jjir0003/CURSOS/MATEMATICAS%20ACS%20II/4%20programacion%20lineal.pdf>.
Origen de la Programación Lineal, planteamientos matemáticos y diversas formas de resolución.
- <http://www.ua.es/personal/SEMVCV/Actas/IVJornadas/pdf/Part102.PDF>.
“Medio siglo de Programación Lineal”, por Miguel A. Goberna. Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Facultad de Ciencias, Universidad de Alicante.

- http://www.uoc.edu/in3/emath/docs/Aplicaciones_PL.pdf.
“Aplicaciones de la Programación Lineal”, Universitat Oberta de Catalunya.

- <http://www.uv.es/~ivorra/docencia/MatII.pdf>.
“Apuntes Teóricos de Programación Lineal”, por: DR. Carlos Ivorra. Universidad de Valencia.

- <http://www.uv.es/~sala/C010405.pdf>.
“Introducción a la Programación Matemática”.

- <http://docencia.udea.edu.co/ingenieria/plineal/solucionGrafica08.html>.
Tipos de soluciones de un problema de programación lineal.

- <http://www.iiasa.ac.at/web/home/about/achievements/iiasaandthenobelprize/koopmanskantovorich/The-Nobel-Prize--IIASA--Tjalling-Koopmans--and-Leonid.en.html>.
Web oficial del “Instituto Oficial de Análisis de Sistemas Aplicados”, comprobación de galardonados con el premio Nobel.

- <http://www.econlib.org/library/Enc/bios/Koopmans.html>.
“Biblioteca sobre economía y libertad”, bibliografía sobre Tjalling Charles Koopmans.

- <http://www.javeriana.edu.co/biblos/tesis/ingenieria/tesis574.pdf>.
“Elaboración de un modelo de costo mínimo de una dieta balanceada para la población de Bogotá para el año 2010”. Para el conocimiento del planteamiento de este tipo de problemas.

- http://www.phpsimplex.com/biografia_Dantzig.htm.
Bibliografía sobre George Bernard Dantzig.

- <http://www.lindo.com>
Web oficial sobre el paquete informático “LINGO”.

- <http://www.dia.fi.upm.es/~jafernan/teaching/operationalresearch/WinQSB2.0.pdf>.
“Introducción al programa WinQSB”.
- <http://www.gams.com/>.
Web oficial sobre el paquete informático “GAMS”.