QÜESTIIÓ, Vol 18, 3 pp. 397-415, 1994

ANÁLISIS INTERACTIVO DE LAS SOLUCIONES DEL PROBLEMA LINEAL MÚLTIPLE ORDENADO

E. CONDE SÁNCHEZ, F.R. FERNÁNDEZ GARCÍA
y J. PUERTO ALBANDOZ

Departamento de Estadística e I.O.
Universidad de Sevilla

En este trabajo se estudian procedimientos para la elección entre las soluciones eficientes del Problema de Programación Lineal con Objetivos Múltiples, cuando el decisor manifiesta preferencias sobre ciertas ordenaciones de las valoraciones de las funciones objetivo, utilizándose como criterio de valoración global funciones basadas en el $k-$ésimo valor del vector de los objetivos ordenado en cada punto.

Se desarrollan procedimientos para generar ordenaciones compatibles con la información del decisor. Estos se incorporan en un proceso interactivo que proporciona una solución eficiente final con un mayor compromiso, a juicio del decisor, en las valoraciones de todos los objetivos.

Interactive analysis of the multiple ordered Lineal Problems solutions.

Key words: Programación Lineal con Objetivos Múltiples, Teoría de Decisión, Análisis de Sensibilidad.

Clasificación A.M.S.: 90C05, 62C99.

Autor para correspondencia: J. Puerto Albandoz

–Article rebut el febrer de 1993.
–Acceptat el febrer de 1994.

1. INTRODUCCIÓN

El problema de Programación Lineal con Objetivos Múltiples (MOLP) ha sido ampliamente estudiado, ver por ejemplo Yu, Zeleny (1976), Gal (1977, 1979), Steuer (1986), y consiste en encontrar un vector x del conjunto factible $X = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b,\ x \geq 0,\ b \in \mathbb{R}^m\}$ que maximice las funciones lineales $c^1x, c^2x, \ldots, c^px$.

El conjunto de soluciones eficientes representa el concepto de solución de este problema. La determinación de dicho conjunto es difícil puesto que incluso el problema de determinar el número de vértices de un poliedro es un problema NP–duro, véase Dyer (1983) presentándose además la dificultad adicional de la elección de una solución de entre todas las eficientes cuando se desea implantar una política, ver por ejemplo Steuer (1986), White (1982) y Schrijver (1986).

Para destacar una solución eficiente acorde con las preferencias del decisor, es necesario que éste suministre alguna información adicional que será incorporada al problema original, véase Rios, French (1991). Por ejemplo en el caso en el que se acepte que existe una función de valor tipo lineal, $U(x) = \sum_{i=1}^{p} w_i c^i x$, si el decisor proporciona las ponderaciones de los distintos criterios se obtendrá un orden débil sobre X. Ahora bien, cuando la valoración de las ponderaciones no pueda realizarse de modo tan preciso, el decisor podrá optar por introducir relaciones de importancia entre las ponderaciones o entre los criterios, llamándose a esta información *aproximación cualitativa*, ver por ejemplo Paelinck (1975), Claessen *et al.* (1991).

La información suministrada restringe el conjunto de soluciones del problema, pero no asegura en todos los casos la unicidad de la solución. Es por tanto necesario proporcionar al decisor una metodología que le permita realizar la "elección" de la solución de acuerdo con dicha información. En esta metodología la información puede utilizarse en la reducción del conjunto factible y/o en la búsqueda de una función de valor.

La reducción del conjunto factible puede realizarse, entre otras formas, utilizando la ordenación de las valoraciones entre las funciones objetivo.

En lo referente al segundo punto, se han propuesto en la literatura diversas funciones de valoración, ver por ejemplo Wald (1950), destacando aquellas que hacen uso de la ordenación de los elementos $c^1x, c^2x, \ldots, c^px$, y consideran las valoraciones extremas: maximax y maximin. Estas ordenaciones entre los objetivos son aplicables cuando éstos estén valorados en una misma escala, o puedan ser transformados a dicha escala, algunos de estos métodos de transformación pueden ser consultados en Hwang y Yoon (1981). En lo que sigue se supone que estamos en este caso.

Los criterios de valoración anteriormente expuestos pueden generalizarse a cualquier posición del orden de las valoraciones, dando lugar a criterios que equilibran el optimismo y el pesimismo de los objetivos extremos. Siendo la función de valoración asociada al lugar $k-$ésimo en un punto factible $x \in X$

$$U_k(x) = c^{\sigma_k} x \quad \text{donde } c^{\sigma_1} x \leq c^{\sigma_2} x \leq \cdots \leq c^{\sigma_p} x$$

y $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ es una permutación de $1, 2, \ldots, p$, véase Puerto (1990). Esto plantea la resolución del problema

$$\max U_k(x) \quad \text{sujeto a} \quad Ax \leq b,\ x \geq 0 \quad (P_k)$$

para obtener la decisión óptima con este criterio.

El problema (P_k) es un problema de programación no convexa, salvo para los casos extremos, $k = 1$ y $k = p$, maximin y maximax, por lo que presenta mayor dificultad de resolución que los dos problemas extremos. Ahora bien, el problema (P_k) es lineal sobre ciertas particiones de $\mathbb{R}^n$, lo que permite dar algoritmos para su resolución y estudiar la sensibilidad de las soluciones, véase Fernández, Puerto (1992).

En este trabajo se utilizan las dos vías de explotación de la información (búsqueda de función de valor y reducción del conjunto factible) en el desarrollo de un algoritmo interactivo, en el cual la información se suministra mediante ordenaciones entre las funciones objetivo. Este algoritmo requiere un orden completo entre los objetivos para proporcionar una solución inicial. Además tiene flexibilidad para permitir efectuar cambios en la función globalizadora y en la ordenación de objetivos mediante el análisis de cada nueva solución.

El resto del artículo se compone de tres secciones. En la primera se estudian procedimientos para generar ordenaciones completas entre objetivos, compatibles con la información suministrada por el decisor. En la segunda se proponen métodos que, basándose en el conjunto factible modificado (por las ordenaciones), destacan una solución eficiente. Se utilizan para este cometido funciones globalizadoras con sistemas de ponderaciones que reflejan la importancia de los diversos objetivos. Por último, se da un procedimiento interactivo que, partiendo de una solución inicial con respecto a un orden dado y mediante análisis de sensibilidad de la misma, nos conduzca a una solución que sea aceptada por el decisor.

2. DETERMINACIÓN DE UN ORDEN ENTRE LOS OBJETIVOS

La determinación de un orden acorde con la información suministrada por el decisor es una labor delicada, por lo cual ésta es una fase clave en el proceso de resolución del problema planteado y depende del nivel de información de que disponga aquel. Distinguimos fundamentalmente dos casos:

a) posee información de orden completa o incompleta, siendo capaz de estructurarla en relaciones de tipo requerido y

b) no posee información de orden o no es capaz de estructurarla en relaciones de tipo requerido.

En el primer caso, estas relaciones se incorporan directamente al problema. En otro caso, nosotros proponemos unos procedimientos para estructurar las preferencias del decisor (total o parcialmente) en relaciones que generan un orden de compromiso.

En primer lugar vamos a considerar las ordenaciones naturales obtenidas al elegir (muestrear) p soluciones eficientes $x^*(i)$, $i = 1, \dots, p$, siendo el orden natural asociado a $x^*(i)$

$$\left(c^{\sigma(i)_1}, c^{\sigma(i)_2}, \dots, c^{\sigma(i)_p}\right) \text{ tal que: } c^{\sigma(i)_1}\, x^*(i) \leq c^{\sigma(i)_2}\, x^*(i) \leq \cdots \leq c^{\sigma(i)_p}\, x^*(i)$$

traduciéndose los empates en relaciones de igualdad entre los objetivos en las condiciones del orden.

Nótese que en el caso de información incompleta, si el decisor es capaz de escoger una de entre estas soluciones que verifique la información parcial, su orden natural asociado proporciona una primera ordenación de compromiso. En cualquier caso debemos resaltar que esta elección no es definitiva, ya que este orden puede ser modificado con ayuda de un análisis de sensibilidad que será abordado en una sección posterior.

Una forma coherente (pues trata igualmente a todos los objetivos) y sencilla que proponemos para realizar este muestreo consiste en optimizar todas las funciones objetivo de modo individual, y obtener las ordenaciones asociadas a las soluciones óptimas. Esto es $x^*(i)$ $i = 1, \dots, p$, solución de

$$\max c^i x \quad \text{sujeto a:} \quad Ax \leq b,\ x \geq 0 \quad P(i)$$

Estos problemas se resuelven secuencialmente, pues la región factible de todos ellos es la misma, y el vértice solución óptima de uno de ellos sirve como solución inicial del problema siguiente, al cambiar sólo la función objetivo.

En el caso de que ninguno de los órdenes naturales asociados a las soluciones $x^*(i)$ $i = 1, \ldots, p$, sea compatible con la información de orden del decisor, proponemos el siguiente esquema para la elección del orden inicial:

Conocidas las soluciones eficientes $x^*(i)$, $i = 1, \ldots, p$, valoramos todas las funciones objetivo en estos puntos:

Tabla 1

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & x^*_{(1)} & & x^*_{(i)} & & x^*_{(p)} \\
\hline
c^1x & z_{11} & \cdots & z_{1i} & \cdots & z_{1p} \\
 & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c^ix & z_{i1} & \cdots & z_{ii} & \cdots & z_{ip} \\
 & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c^px & z_{p1} & \cdots & z_{pi} & \cdots & z_{pp} \\
\hline
\end{array}
$$

A partir de esta tabla, ordenamos cada solución para los diferentes objetivos, esto es, reordenamos cada columna de la matriz anterior dando paso a:

Tabla 2

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & & i & & p \\
\hline
\text{PRIMERO} & z_1^{(1)} & \cdots & z_i^{(1)} & \cdots & z_p^{(1)} \\
 & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\text{I} - \text{ÉSIMO} & z_1^{(i)} & \cdots & z_i^{(i)} & \cdots & z_i^{(i)} \\
 & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\text{ÚLTIMO} & z_1^{(p)} & \cdots & z_i^{(p)} & \cdots & z_p^{(p)} \\
\hline
\end{array}
$$

Definiendo n_{ij} como el número de veces que el objetivo i–ésimo está en posición j, tenemos la frecuencia absoluta de aparición del objetivo i–ésimo en el lugar j. Este valor puede ser considerado como un índice objetivo de la aportación del objetivo c^i a la ordenación en posición j. Por tanto una forma de establecer el orden relativo entre los objetivos, sin intervención subjetiva del decisor, es considerar la asignación óptima dada por la solución del siguiente problema de asignación:

$$\max \sum_{i,j}^{p} w_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, p$$

$$\sum_{j=1}^{p} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, p$$

siendo $w_{ij} = \dfrac{n_{ij}}{\sum_{i,j}^{p} n_{ij}} \quad \forall i, j.$

La solución de este problema nos da la ordenación inicial, que representaremos por ρ, siendo el objetivo i ordenado en posición j, si la variable x_{ij} toma el valor 1.

Nótese que en los casos de información incompleta en los que se fijan algunos objetivos en determinadas posiciones, el esquema propuesto es válido. Simplemente se procede eliminando en la tabla 2, las filas correspondientes a los objetivos fijados y las columnas correspondientes a las posiciones que les asignaron a priori. Lo que se traduce en reducir las dimensiones del problema de asignación.

Si no existe ningún punto factible verificando el orden ρ, escogeremos el orden natural más "similar" a dicho orden.

Para ello, definimos una medida de disimilaridad entre dos ordenaciones σ, π, que identificamos por los índices de sus objetivos ordenados:

$$\text{dis } (\sigma, \pi) = \frac{\begin{array}{c}\text{mínimo número de intercambios entre índices consecutivos} \\ \text{para transformar la ordenación } \sigma \text{ en } \pi.\end{array}}{\text{máximo número de intercambios entre dos ordenaciones}}$$

Si definimos el número de inversiones de un índice π_i de π frente a σ como:

$$\text{inv } (\pi_i) = \text{ card } (\{\pi_j \colon \pi_j = \sigma_r;\ j > i \quad \text{y} \quad r < k\}) \quad \text{siendo } \pi_i = \sigma_k$$

dado que el mínimo número de intercambios entre índices consecutivos coincide con el número de inversiones de cada uno de los índices de la ordenación π frente a la σ y que, el máximo número de inversiones entre dos ordenaciones de p índices viene dado por $\binom{p}{2}$, tenemos la disimilaridad entre dos ordenaciones dada por

$$\text{dis } (\sigma, \pi) = \frac{\sum_{i=1}^{p-1} \text{inv } (\pi_i)}{\binom{p}{2}} \qquad \text{si } \sigma, \pi \in \mathcal{P}erm(1, \ldots, p)$$

Esta definición verifica propiedades que concuerdan con el sentido de la disimilaridad entre regiones ordenadas:

1) $\text{dis } (\sigma, \sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{P}erm(1, \ldots, p)$

2) $0 \leq \text{ dis } (\sigma, \pi) \leq 1 \quad \forall \sigma, \pi \in \mathcal{P}erm(1, \ldots, p)$

3) $\min_{\sigma \neq \pi} \text{dis } (\sigma, \pi) = \frac{1}{\binom{p}{2}}$ y se alcanza en todas aquellas ordenaciones que difieren en un único índice.

El orden que proponemos se obtiene:

Partiendo del orden ρ, elegir como decisión la solución del problema $P(i^*)$, si:

$$\text{dis } (s, s(i^*)) = \min_{i \in \mathbb{I}} \text{ dis } (s, s(i))$$

siendo $s(i)$ la permutación asociada a la ordenación de los objetivos en $x^*(i)$ e $\mathbb{I}$ el conjunto de índices asociados a las ordenaciones que verifican las condiciones impuestas por el decisor.

En el caso en que el conjunto de índices $\mathbb{I}$ sea vacío podemos optar por realizar un nuevo muestreo de soluciones eficientes, o bien podemos hacer $\mathbb{I} = \{1, \ldots, p\}$ y dar una ordenación inicial de entre las existentes, dejando para el proceso interactivo la posibilidad de cambios en la misma.

3. ESTRATEGIA DE LOS VÉRTICES ÓPTIMOS

Una vez conocida la ordenación entre objetivos: $c^{\sigma_1}x \leq c^{\sigma_2}x \leq \cdots \leq c^{\sigma_p}x$, proporcionada por el procedimiento descrito en la sección anterior, vamos a determinar una solución eficiente inicial que verifique las condiciones anteriores.

Para ello añadimos al conjunto de restricciones del problema original (P) las referidas a la ordenación, obteniendo un nuevo problema múltiple que denotaremos por $(P; c^{\sigma_1}, c^{\sigma_2}, \ldots, c^{\sigma_p})$:

$$\text{“Maximizar”} \ \{c^1x, c^2x, \ldots, c^px\}$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a } & Ax \leq b \\ & c^{\sigma_i}x \leq c^{\sigma_{i+1}}x, \ i = 1, 2, \ldots, p-1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

La elección de una solución eficiente puede realizarse por cualquier método. Ahora bien, cuanta mayor información del decisor se utilice en este proceso, menor será el esfuerzo que se tendrá que realizar en el proceso iterativo, puesto que la solución aquí obtenida es el punto de partida del algoritmo que describiremos en la sección siguiente.

Para dar una solución a este problema se suelen emplear criterios de tipo lexicográfico, pero esta aproximación tiene el inconveniente de trabajar sólo con los objetivos extremos; por lo que es recomendable emplear todas las funciones objetivo.

El proceso se puede llevar a cabo partiendo de p soluciones eficientes cualesquiera, pudiendo ser las obtenidas al resolver los problemas unidimensionales con el nuevo conjunto factible.

$$\max\{c^{\sigma_k}x \colon Ax \leq b, \ c^{\sigma_1}x \leq c^{\sigma_2}x \leq \cdots \leq c^{\sigma_p}x, \ x \geq 0\} \quad (P; c^{\sigma_1}, \ldots, c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$$

Representaremos a estas soluciones por $x(P; c^{\sigma_1}, \ldots, c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$, (y abreviadamente por $x^{(\sigma_k)}$). Posteriormente podemos escoger entre ellas la solución inicial (estrategia de los vértices óptimos). Los empates en las soluciones óptimas en el criterio c^{σ_k}, se dilucidan empleando secuencialmente los otros criterios $c^{\sigma_{k+1}}, \ldots, c^{\sigma_p}, c^{\sigma_{k-1}}, \ldots, c^{\sigma_1}$.

En la elección entre las p soluciones $\left(x^{(\sigma_1)}, x^{(\sigma_2)}, \ldots, x^{(\sigma_p)}\right)$ obtenidas en este caso, se utilizará la información de todos los criterios, pues cada una de estas soluciones será valorada por las p funciones objetivo del problema lineal con objetivos múltiples. Así este proceso de decisión queda descrito por la matriz $\mathbf{D} = (d_{ij})_{p \times p}$ cuyos elementos d_{ij} son $c^{\sigma_i}x^{(\sigma_j)}$ $\forall 1 \leq i, j \leq p$, que corresponden a las valoraciones de cada solución con todas las funciones objetivo. Por construcción se verifica que

$$c^{\sigma_1}x^{(\sigma_j)} \leq \cdots \leq c^{\sigma_k}x^{(\sigma_j)} \leq \cdots \leq c^{\sigma_p}x^{(\sigma_j)}.$$

Para la elección entre las diversas alternativas se puede utilizar sobre $\mathbf{D}$ cualquier criterio de decisión multiatributo, ver por ejemplo Huang, Yoon (1981).

Otra metodología diferente de elección se basa en suponer la existencia de una función de valor lineal sobre el problema. De esta forma si el decisor aporta información incompleta sobre las ponderaciones de dicha función de valor, se puede recomendar el uso de ciertos criterios. Estudiamos dos sistemas de ponderaciones propuestos por Kmietowicz, Pearman (1981).

En el primero de ellos el decisor supone que sus ponderaciones verifican

$$W_1 = \left\{ w \in \mathbb{R}^p : \sum_{i=1}^{p} w_i = 1,\ w_i \geq 0\ \forall i,\ w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_p \right\}.$$

ponderando en mayor medida las valoraciones menores para no incurrir en decisiones ultraoptimistas. Entonces se verifica el siguiente teorema.

Teorema 1

La función $F\left(Cx_{(w)}^{(\sigma_j)}\right) = \sum_{k=1}^{p} w_k c^{\sigma_k} x^{(\sigma_j)}, w \in W_1,$ verifica

$$c^{\sigma_1} x^{(\sigma_j)} \leq F\left(Cx_{(w)}^{(\sigma_j)}\right) \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} c^{\sigma_k} x^{(\sigma_j)} \quad \forall w \in W_1$$

Demostración

El teorema de Paelinck, véase Claessen *et al.* (1991) establece que el conjunto de vectores $(w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^p, w \in W_1$ es el cierre convexo de los vectores

$$\begin{aligned} s^1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\ s^2 &= (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ s^p &= (\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}, \ldots, \tfrac{1}{p}) \end{aligned}$$

Entonces por ser el objetivo lineal, los valores superiores e inferiores están en los extremos, de donde se obtiene el resultado.

■

Este teorema indica que el criterio suma es optimista y el criterio mínimo es pesimista, pues acotan la función anterior para cualquier valor de $w \in W_1$, superior e inferiormente. Así, proponemos como criterio de decisión una combinación convexa de ambos criterios para decidir la acción óptima sobre la matriz $\mathbf{D}$. El parámetro de esta combinación convexa, lo determinará el decisor de acuerdo con su compromiso ante las valoraciones de la función $F(\cdot)$.

En otras situaciones de decisión, es posible no sólo disponer de la ordenación del sistema de ponderaciones, sino además controlar las diferencias entre las mismas (escala de intervalo) a través de unas constantes $\{k_i\}$, que representan la importancia relativa de un peso respecto a los restantes. Este constituye el segundo conjunto de ponderaciones de los citados anteriormente que denominamos W_2:

$$W_2 = \Big\{ w \in \mathbb{R}^p / w_1 - w_2 \geq k_1,\ w_2 - w_3 \geq k_2, \ldots,$$
$$\ldots, w_{p-1} - w_p \geq k_{p-1},\ w_p \geq k_p,\ k_p \geq 0, \sum_{i=1}^{p} w_i = 1 \Big\}$$

La caracterización semejante a la del teorema de Paelinck para este conjunto de pesos viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 2

Para todo $w \in W_2$ si $\sum_{i=1}^{p} ik_i \leq 1$ se verifica

$$c^{\sigma_1} x^{(\sigma_j)} \left(1 - \sum_{j=1}^{p} jk_j\right) + K \leq F(Cx_{(w)}^{(\sigma_j)}) \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} c^{\sigma_k} x^{(\sigma_j)} \left(1 - \sum_{j=1}^{p} jk_j\right) + K,$$

$$\forall x \in X, \quad \text{con } K = \sum_{i=1}^{p} w_i^{\circ} c^{\sigma_i} x^{(\sigma_j)}$$
$$\text{y} \quad w^{\circ} = (k_1 + k_2 + \cdots + k_p,\ k_2 + \cdots + k_p, \ldots, k_{p-1} + k_p, k_p)$$

Demostración

Sea $\mathbf{A}$ la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdot & \cdots & 0 \\ \cdot & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ que define las restricciones de W_2, por lo que $\mathbf{A}^{-1}$ es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Si llamamos $y = \mathbf{A}w$, W_2 puede definirse de forma equivalente por $\sum_{i=1}^{p} jy_j = 1$, $y_j \geq k_j$ $j = 1, \ldots, p$. Este conjunto tiene por vectores extremos:

$$\hat{y}^i = (k_1, \ldots, \beta_i, \ldots, k_p), \quad i = 1, \ldots, p.$$

con $\beta_i = 1/i \left(1 - \sum_{j=1}^{p} jk_j + ik_i\right) \quad i = 1, \ldots, p.$

Por tanto los puntos extremos de W_2 vendrán dados por $w^i = \mathbf{A}^{-1}\hat{y}^i$, es decir, $w^i = w^o + \left(1 - \sum_{j=1}^{p} jk_j\right) s^i$, $i = 1, \ldots, p$.

Usando estos resultados podemos determinar las cotas superiores e inferiores de $F(Cx_{(w)}^{(\sigma_j)})$ en W_2 con lo que se prueba el resultado.

■

Nótese que si $\sum_{i=1}^{p} ik_i > 1$, el cono W_2 es vacío, lo que se interpreta como una incoherencia en la información proporcionada.

Corolario

Bajo las condiciones del teorema anterior y siendo $\lambda \in [0, 1]$ se verifica:

a) Si tomamos $k_1 = 1 - \lambda$, y $k_i = 0$, $i = 2, \ldots, p$

$$c^{\sigma_1} x^{(\sigma_j)} \leq F\left(Cx_{(w)}^{(\sigma_j)}\right) \leq \lambda \cdot \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} c^{\sigma_k} x^{(\sigma_j)} + (1 - \lambda) c^{\sigma_1} x^{(\sigma_j)}$$

b) Si tomamos $k_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p-2$, $k_{p-1} = -\lambda$, $k_p = \lambda$

$$(1-\lambda) c^{\sigma_1} x^{(\sigma_j)} + \lambda c^{\sigma_p} x^{(\sigma_j)} \leq F\left(Cx_{(w)}^{(\sigma_j)}\right) \leq (1-\lambda) \cdot \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} c^{\sigma_k} x^{(\sigma_j)} + \lambda c^{\sigma_p} x^{(\sigma_j)}$$

Por tanto la conclusión de este resultado es que el criterio de Hurwicz es un criterio pesimista y el cent-dian, véase Halpern (1978), optimista para el conjunto de pesos que define b). Y para el conjunto definido en a) el criterio del mínimo es nuevamente pesimista y como criterio optimista tenemos un criterio anticentdian, obtenido sustituyendo el criterio máximo por el mínimo.

Según el cono que el decisor desee emplear, en función de la información que pueda aportar, se elegirá la decisión óptima. A veces se emplea el criterio que toma por pesos el valor medio de todos los extremos del cono lo que se conoce como *criterio del centroide*, ver por ejemplo Van Huylebroeck (1990). Formas alternativas de seleccionar una ponderación pueden encontrarse en Barron, Schmidt (1988).

4. ESTRATEGIA INTERACTIVA

La estrategia de vértices descrita en el apartado anterior nos ha permitido destacar una solución eficiente con un orden de objetivos. Este orden es compatible con la información que el decisor suministró o bien ha sido generado por un procedimiento que incorpora la mayor información de orden intrínseca al problema.

Sin embargo esta solución pudiera ser mejorada al compararla con otras eficientes adyacentes a la misma respecto al conjunto factible, pues el decisor no conoce si disminuciones en el objetivo que fue destacado para encontrar la solución eficiente, pueden conducir a aumentos de otros objetivos.

Proponemos en este apartado utilizar los resultados de Fernández, Puerto (1992) para desarrollar un algoritmo interactivo, que manteniendo la eficiencia adquiera un mayor compromiso en las valoraciones y en el orden de los objetivos.

Para el estudio interactivo de $(P; c^{\sigma_1}, c^{\sigma_2}, \dots, c^{\sigma_p})$ partimos de la solución óptima aceptada según el apartado anterior, que suponemos optimiza el criterio c^{σ_k}.

Consideraremos que la matriz $\overline{\mathbf{A}}$ de restricciones del problema, posee una descomposición $\overline{\mathbf{A}} = [B, N]$; donde B son las columnas correspondientes a la base óptima del problema y N las correspondientes a las columnas no básicas. De igual forma descomponemos $C = [C_B, C_N]$. Asimismo, sea x_{B_r} la $r-$ésima variable de la base óptima del problema $(P; c^{\sigma_1}, \dots, c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$ y $\overline{b}$ el vector de términos independientes (RHS). Denotemos por $\hat{b} = B^{-1}\overline{b}$ el término independiente en la solución óptima y por $y_{.j}$ la columna $j-$ésima de $\overline{\mathbf{A}}$, que se obtiene al ser multiplicada por la inversa de la base óptima.

Una representación tabular pormenorizada de todos los elementos de este problema es:

	Variables del problema	Holguras de restricción $\mathbf{A}x \leq b$	Holguras de restricción del orden	
Coeficiente de objetivo	C	0	0	RHS
Restricciones originales del problema	$\mathbf{A}$	I	0	b
Restricción de orden	$C^i - C^j$	0	I	0
Precios Sombra de Objetivos	$Z - C$			

Nótese que $\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & I & 0 \\ C^i - C^j & 0 & I \end{bmatrix}$ y que $\bar{b} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$. Además, denotaremos por $\Theta_{rj} = \dfrac{\hat{b}_r}{y_{rj}}$, $C_{.j}$ la columna $j-$ésima de C y $Z_{.j} = C_B y_{.j}$.

Si x' es una solución adyacente a $x = x(P; c^{\sigma_1}, \ldots, c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$, que se obtiene introduciendo en la base de x, una variable x_j y sacando de la base de x, la variable que ocupa el lugar r, x_{B_r}; x' conserva el orden entre los objetivos si y sólo si se verifica que:

$$0 < \min_s \left\{ \overline{b}'_s / \overline{b}'_s = \hat{b}_s - \Theta_{rj} y_{sj}, \quad y_{rj} \neq 0 \right\}$$

(véase Fernández, Puerto (1992)).

Además la diferencia entre los valores de los objetivos en ambas soluciones x, x' viene dada por:

$$\boxed{\Delta C x = C x - C x' = \Theta_{rj}(Z_{.j} - C_{.j})}$$

Dado un cambio de base la expresión anterior nos muestra el cambio de todos los objetivos, pudiendo destacar la mejora de algunos de ellos y la cantidad en que disminuye el objetivo k−ésimo. La información de los costos sombra (positivos o negativos) en cada cambio de base, servirá de ayuda al decisor para comparar x' con x.

El proceso iterativo que proponemos se basa en implicar al decisor en la selección entre soluciones eficientes adyacentes, a través de la información que señalábamos anteriormente. Además difiere de otros métodos (ver capítulo 13 de Steuer (1986)) en que se desarrolla sobre un problema con restricciones de orden sobre los objetivos.

Partiendo de $x^{(\sigma_k)}$ que optimiza el problema $(P; c^{\sigma_1}, \ldots, c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$ el decisor escoge entre las variables no básicas $(j \in N)$ aquellas que a su juicio desea considerar a la luz de las valoraciones de los precios sombra. A este conjunto de variables seleccionadas por el decisor lo denominamos $\mathcal{J}$.

Un modo de elección de este conjunto $\mathcal{J}$ puede ser escoger en el conjunto

$$\{j/j \in N \quad \text{y} \quad \#\{j/Z_{.j} - C_{.j} < 0\} > h\}$$

siendo h un nivel fijado por el decisor. Es decir que el número de objetivos que podrán mejorar con este cambio de base sea mayor que la constante h. El decisor propone un orden de selección de estas variables no básicas, que puede ser en orden decreciente del número de objetivos mejorados.

Para cada variable no básica considerada j, se comprueba si el cambio de base factible conduce a una nueva solución eficiente, a través del (E-test) de Gal (1977):

Dado $j \in N$, resolvemos el problema (E-test)

$$\text{Min } \xi_j \quad \text{s.t.} \quad -w'(Z-C)+\xi = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{p} w_i = 1 \quad \text{con } w \text{ y } \xi \geq 0$$

Si la solución óptima ξ_j^* es 0, nos indica que el cambio sobre la variable j nos lleva a una base eficiente, ya que ambas bases tienen en común al menos el valor del parámetro solución del anterior problema, w^*.

Si se supera este test, se calculan las variaciones de las funciones objetivo $Cx - Cx'$ dadas anteriormente, en caso contrario se escoge otro $j \in N$.

Los aumentos y disminuciones que se produzcan conducirán a que el decisor acepte esta nueva solución o mantenga la antigua. La no aceptación de la solución también puede ser motivada porque la ordenación entre objetivos no satisface plenamente al decisor. En este caso el algoritmo puede modificar el orden, conociendo previamente la factibilidad de la nueva ordenación y las mejoras que ésta aportará a los objetivos. Para ello utiliza el siguiente resultado de Fernández y Puerto (1992):

Si P' es el problema cuya ordenación intercambia el orden de los objetivos k y $(k+1)$−ésimo respecto del actual $(P; c^{\sigma_1}, \ldots, c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$, es decir, P' es $(P; c^{\sigma_1}, \ldots, c^{\sigma_{k-1}}, c^{\sigma_{k+1}}, c^{\sigma_k}, \ldots, c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$ entonces se verifica:

a) Si $c^{\sigma_{k+1}} x^{(\sigma_k)} - c^{\sigma_k} x^{(\sigma_k)} > 0$, o P' no tiene solución o el óptimo de P' es menor que el de $(P; c^{\sigma_1}, \ldots, c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$.

b) Si $c^{\sigma_{k+1}} x^{(\sigma_k)} - c^{\sigma_k} x^{(\sigma_k)} = 0$, el óptimo de P' mejora estrictamente el valor anterior si y sólo la variable de holgura de la restricción $(A1)$ es no básica en toda solución óptima de $(P; c^{\sigma_1}, \ldots, c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$.

El proceso se detiene cuando con una ordenación satisfactoria para el decisor, no existan variables a considerar o cuando los valores de los objetivos alcancen niveles admisibles según las preferencias del decisor (criterio de parada).

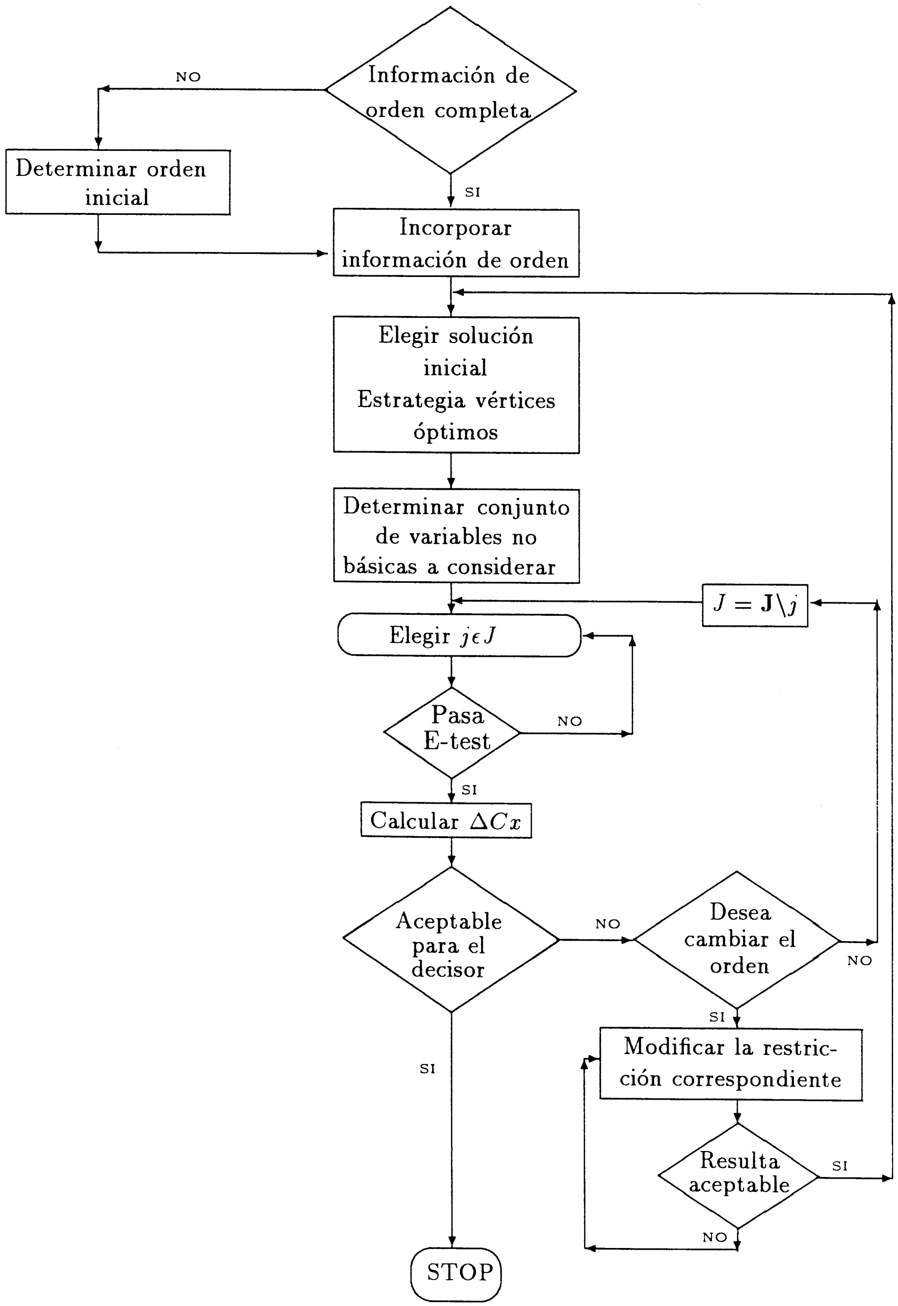
Un diagrama de flujo del esquema interactivo puede verse en el diagrama 1.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolla un procedimiento interactivo que recoge la información de orden entre objetivos, suministrada por el decisor, y determina una solución eficiente del problema de programación lineal con objetivos múltiples. En el proceso, tanto la fase de completación de la información de orden, como aquella en la que se genera una solución inicial, son flexibles en el sentido de poder ser modificadas y adaptadas a la naturaleza del problema considerado. En ambos casos se pueden utilizar métodos alternativos, existiendo por tanto la posibilidad de crear esquemas algorítmicos concretos en los que interactúen el método propuesto con nuevos desarrollos en el campo de la decisión multiatributo.

El uso de la hipótesis de linealidad de objetivos y restricciones del problema original ha sido utilizada en todo el esquema. La generalización a problemas no lineales no es inmediata puesto que en general no es posible la convexificación de los objetivos sobre regiones convexas del espacio factible, véase Puerto (1990), siendo esta línea de investigación objeto de estudio en este momento.

DIAGRAMA 1. ESQUEMA INTERACTIVO



AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a un experto anónimo los interesantes comentarios y sugerencias realizados durante el período de revisión de este trabajo.

REFERENCIAS

[1] **Barron, H.** & **Schmidt, C.P.** (1988). "Sensitivity analysis of additive multiattribute value models". *ORSA,* vol. **36, 1**, 122–127.

[2] **Claessen, M., Lootsma, F.** & **Vogt, F.** (1991). "An elementary proof of Paelinck's Theorem on the Convex Hull of Ranked Criterion Weights". *EJOR,* vol. **52, 2**, 255–258.

[3] **Dyer, M.E.** (1983). "The complexity of vertex enumeration methods". *Mathematic of Operations Research,* vol. **8, 3**, 381–402.

[4] **Fernández, F.R.** & **Puerto, J.** (1992). "Análisis de Sensibilidad de las soluciones del problema lineal múltiple ordenado". *Trabajos de Investigación Operativa,* vol. **17, 1**, 17–29.

[5] **Gal, T.** (1977). "A general method for determining the set of all efficient solution to a linear vectormaximum problem". *EJOR,* vol. **1**, 307–322.

[6] **Gal, T.** (1979). *Postoptimal Analysis, Parametric Programming and related topics.* MacGraw-Hill.

[7] **Halpern, J.** (1978). "Finding minimal center-median convex combinations of a graph". *Management Science,* vol. **24**, 535–544.

[8] **Hwang, C.L.** & **Yoon, K.** (1981). *Multiple Attribute Decision Making.* Springer Verlag.

[9] **Kmietowicz, Z.W.** & **Pearman, A.D.** (1981). *Decision Theory and Incomplete Knowledge.* Gower.

[10] **Paelinck, J.H.P.** (1975). "Qualitative multiple criteria analysis, environmental protection and multi-regional development". *European Meeting of the Regional Science Association.* Budapest, 26–29 August.

[11] **Puerto, J.** (1990). "Programación Múltiple Ordenada". *Tesis Doctoral.* Universidad de Sevilla.

[12] **Rios, D.** & **French, S.** (1991). "A framework for sensitivity analysis in discrete multi-objective decision.making". *EJOR,* vol. **54, 2**, 176–190.

[13] **Schrijver, A.** (1986). *Theory of Linear and Integer Programming.* Wiley.

[14] **Steuer, R.** (1986). *Multiple criteria optimization.* Wiley.

[15] **Van Huylenbroeck, G.** (1990). "Applications of Multicriteria Analysis in the Environmental Impact Report for the High Speed Train". *JORBEL,* vol. **30, 4**, 32–52.

[16] **Wald, A.** (1950). *Statistical Decision Functions.* Chelsea, P.C.

[17] **White, D.J.** (1982). *Optimality and Efficiency.* Wiley.

[18] **Yu, P. & Zeleny, M.** (1976). "Linear Multiparametric Programming by Multicriteria Simplex Method". *Management Science,* vol. **23, 2,** 159–170.

ENGLISH SUMMARY:

INTERACTIVE ANALYSIS OF THE MULTIPLE ORDERED LINEAL PROBLEMS SOLUTIONS

E. Conde Sánchez, F.R. Fernández García and J. Puerto Albandoz

The Multiple Objective Linear Problem consists of finding a vector x in the feasible set $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ x \geq 0,\ b \in \mathbb{R}^m\}$ maximazing the linear functions $c^1x, \ldots, c^px$. (See e.g. Yu, Zeleny (1976), Gal (1977, 1979), Steuer (1986).

Since, an ideal solution maximazing simultaneously all these functions does not exist, the set of nondominated vectors is taken as solution-set for this problem. However, obtaining this set is a difficult task, but even assuming it is obtained, choosing a particular efficient solution all of them is not an esay problem (see Steuer (1986), White (1980)).

In order to select a particular efficient solution, the decision-maker (D–M) have to apport some extra-information to the original problem (see Rios and French (1991)). For instance, if the existence of a linear value function is assumed, the D–M must give the weights associated with de different objective functions. On the other hand, only ordering relations might be given, which lead to the so called "*qualitative approach*". See e.g. Paelinck (1975), Claessen *et al.* (1991).

The additional information constraints the solution-set of this problem, although it cannot assure the uniquiness of solution. Hence, it is necessary to give to the D–M a methodology which simplifies the choice.

The goal of this paper is to ease the process of selection of a solution according with the fact that and extra-information is given. Two different ways are addressed. The first on deals with the generation of ordering among the objective functions, compatible with the extra-information given. The second one develops globalizing functions according to systems of weights.

The generation of compatible orderings covers two different approaches.

1. The D–M has a complete information and he is able to structure this information in the required kind of relations.
2. The D–M has incomplete information or he is not able to structure this information in the required kind of relations.

For the first case, these relations are incorporated to the feasible set, and for the second case, we give a procedure which generates a set of compromise relations. This arrangement is obtained as the optimal solution of assignment problem, where the coefficients are a measure of the adequation of a particular objective to a particular position in the arrangement of the objective functions.

Once the extra-information is adequately structured, we proposed different globalizing functions. The first approach leads us to the so called "*optimal vertex strategy*". This strategy chooses a feasible vertex with quit good properties as a solution. The second approach gives us two families of linear value functions with seights in two different sets. These families include most of the classical value functions in Decision Theory as particular instances.

The paper finishes developing an interactive algorithm which maintains the efficiency of the initial solution, using the E-test (Gal (1977)), and improves the adequation of the final solution with respect to the extra amount of information given by the D–M. This analysis is possible using the expressions for the variation in the objective functions given by

$$\Delta Cx = Cx - Cx' = \theta_{rj}(Z_j - C_j)$$

The algorithm stops in a finite number of steps, and the obtained solution is either admissible for the D–M or has the highest scores in the objectives among the feasible solutions.