Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº 16 (2000), 67–85.

Algunos trabajos relacionados con la teoría de E.D.P. y su homogeneización

Juan Casado
Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico
Universidad de Sevilla

e-mail: `jcasado@numer.us.es`

El presente trabajo tiene como objetivo exponer algunos resultados relacionados con los problemas de E.D.P. sobre los cuales he trabajado y gracias a los cuales obtuve el premio de la Sociedad Española de Matemática Aplicada en su edición de 1999, Sociedad a la que quiero aprovechar la ocasión para expresar mi más sincero agradecimiento.

A fin de no extenderme demasiado, a la hora de comentar los resultados previos de otros autores, sólo referenciaré aquéllos que considero básicos al tener una relación directa con mi trabajo

1. Relajación de un funcional cuadrático no coercivo y no acotado.

Los resultados correspondientes a esta sección se encuentran en [13]. El problema consiste en calcular la envolvente semicontinua inferior $\bar{F}$ en $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, del funcional

$$F(u) = \begin{cases} \int_\Omega A(x)\, \nabla u\, \nabla u\, dx \text{si } u \in W^{1,\infty}(\Omega), \\ +\infty \text{si } u \in L^p(\Omega) \setminus W^{1,\infty}(\Omega), \end{cases}$$

donde Ω es un abierto, acotado de $\mathbf{R}^N$ y A una aplicación medible de Ω en el conjunto de las matrices simétricas semidefinidas positivas de orden N. Nótese que no se hace ninguna hipótesis de coercividad ni de acotación sobre A, lo cual lleva a que las topologías de tipo Sobolev no sean interesantes. el problema se encuentra relacionado con la minimización de funcionales en los cuales interviene F.

Nuestra intención es caracterizar el dominio H de $\bar{F}$, i.e. el espacio donde este funcional es finito y obtener una representación integral de $\bar{F}$ en este espacio. Obsérvese que H es el espacio donde $\bar{F}$ se encuentra definida de forma natural.

A fin de exponer los resultados obtenidos conviene introducir alguna notación:

Se denota por $W_A(\Omega)$ el espacio definido por

$$W_A(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,\infty}(\Omega) : \sqrt{A}\,\nabla u \in L^2(\Omega)^N \right\}.$$

y por V, el cierre en la topología de $L^p(\Omega) \times L^2(\Omega)^N$ del espacio

$$\left\{ (u, \sqrt{A}\,\nabla u) \in W_A(\Omega) \times L^2(\Omega)^N \right\}.$$

La primera caracterización de $\bar{F}$ y H viene entonces dada por:

$$\begin{cases} H = \{u \in L^p(\Omega) : \ \exists\, v \in L^2(\Omega)^N \text{ con } (u,v) \in V\}, \\ \bar{F}(u) = \min\left\{ \int_\Omega |v|^2\,dx : \ (u,v) \in V \right\}, \quad \forall u \in H. \end{cases}$$

El elemento que da el mínimo en esta última expresión se nota por w_u y verifica propiedades análogas a las de un gradiente. De esta forma, se puede ver que el espacio H adquiere una estructura similar a la de un espacio de Sobolev.

El siguiente punto, consiste en utilizar la caracterización anterior de $\bar{F}$ y H, para obtener una representación integral de $\bar{F}$. Para ello se establece la siguiente hipótesis $(\tilde{\mathrm{H}})$:

$$(\tilde{\mathrm{H}}) \begin{cases} \text{Para todo } u \in L^\infty(\Omega) \text{ existe una sucesión } u_n \in W_A(\Omega) \\ \text{que converge a } u \text{ en casi todo.} \end{cases}$$

Esta hipótesis significa que los coeficientes de A no pueden ser arbitrariamente grandes. En particular $(\tilde{\mathrm{H}})$ se verfica si A pertenece a $L^1(\Omega)^{N\times N}$.

Bajo la hipótesis $(\tilde{\mathrm{H}})$, se tiene el siguiente resultado: Existe una función medible P (que no depende de p) definida en Ω y con valores en las matrices de orden $N \times N$, tal que para casi todo $x \in \Omega$, $P(x)$ es la matriz de una proyección ortogonal sobre un subespacio $T(x)$ de $\mathbf{R}^N$, y que verifica

$$\bar{F}(u) = \int_\Omega |Pv|^2\,dx, \quad \forall\,(u,v) \in V. \tag{1.1}$$

En particular, se tiene

$$\bar{F}(u) = \int_\Omega B\,\nabla u\,\nabla u\,dx, \ \forall u \in W_A(\Omega), \tag{1.2}$$

con B definida por

$$B = \sqrt{A} P \sqrt{A}. \tag{1.3}$$

En realidad, a partir de un teorema de L. Carbone y C. Sbordone ([8]), se sabía ya que si A pertenece a $L^1(\Omega)^{N\times N}$ entonces existe otra matriz B tal que se verifica (1.2) para $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Lo más novedoso de este resultado es la expresión (1.3) de B, así como la representación (1.1) cuando u no es tan regular.

El problema que aparece ahora es el de caracterizar la función P. Esto solamente lo he llevado a cabo en el caso unidimensional, $\Omega = (0,\, 1)$, donde la matriz A se reduce a una función a que supondremos valuada en $[0,\, +\infty]$. La hipótesis ($\tilde{\mathrm{H}}$) no es necesaria en este caso.

El resultado es el siguiente: Sea G el mayor abierto contenido en $(0,1)$ tal que $1/a$ es localmente integrable en él, es decir

$$G = \left\{ x \in (0,\, 1) : \ \exists\, \delta = \delta(x) > 0 \text{ tal que } \frac{1}{a} \in L^1(x-\delta,\, x+\delta) \right\}.$$

Entonces, se tiene

$$\begin{cases} H = \left\{ u \in L^p(0,1) \cap W^{1,1}_{loc}(G) \ \text{ tales que } \ \int_G a \left| \frac{du}{dx} \right|^2 dx < +\infty \right\} \\ \bar{F}(u) = \int_G a \left| \frac{du}{dx} \right|^2 dx, \ \forall u \in H. \end{cases}$$

Este teorema mejora un resultado anterior debido a P. Marcellini ([39]) quién obtiene la expresión anterior de $\bar{F}(u)$ pero solamente para u en $H^1(0,1)$ y suponiendo que la función a pertenece a $L^\infty(0,1)$. La demostración que realizamos es muy distinta de la de P. Marcellini (la cual es más constructiva que la nuestra) y está basada en la caracterización de $\bar{F}$ y H dada por el primer resultado expuesto.

2. Homogeneización de problemas de Dirichlet no lineales en abiertos que varían

El problema es esencialmente el siguiente: Se considera un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ y una sucesión Ω_n de abiertos contenidos en él. En cada abierto Ω_n consideramos entonces un problema elíptico no lineal de segundo orden con condiciones de Dirichlet homogéneas en la frontera. Suponiendo entonces las soluciones u_n de estos problemas, prolongadas por cero fuera de Ω_n, podemos considerar que se encuentran definidas en todo Ω. Bajo ciertas hipótesis sobre los operadores, tendremos además que las funciones u_n están acotadas en un cierto espacio de Sobolev y por tanto, al menos para una subsucesión, convergen débilmente hacia una función u. La cuestión que se trata de resolver es encontrar el problema que satisface esta función u, (problema límite).

Como caso más simple, comenzamos hablando del problema lineal. Aquí la función u_n se supone que satisface el problema

$$\left\{\begin{array}{l} -div\,(A\nabla u_n) = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega_n), \\ u_n \in H_0^1(\Omega_n), \end{array}\right. \tag{2.1}$$

con A en $L^\infty(\Omega)^{N\times N}$ y coercitiva. Este problema ha sido ya estudiado desde hace tiempo por varios autores, así por ejemplo, cuando A se reduce a la identidad, la homogeneización de (2.1) fue realizada por D. Cioranescu y F. Murat ([26]) bajo las siguientes hipótesis sobre Ω_n: Existen una sucesión de funciones w_n y una distribución μ tales que

$$w_n \in H^1(\Omega), \tag{H1}$$

$$w_n = 0 \text{ en } \Omega \setminus \Omega_n, \tag{H2}$$

$$w_n \rightharpoonup 1 \text{ en } H^1(\Omega), \tag{H3}$$

$$\mu \in H^{-1}(\Omega), \tag{H4}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\, v_n, v \text{ tales que} \\ \\ v_n \rightharpoonup v \text{ en } H^1(\Omega), \quad v_n = 0 \text{ en } \Omega\setminus\Omega_n, \text{ se tiene} \\ \\ \int_\Omega \nabla w_n \nabla(\varphi v_n) \to <\mu, \varphi v>, \ \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{array}\right. \tag{H5}$$

Bajo estas condiciones, se prueba que para toda distribución $f \in H^{-1}(\Omega)$, la solución u_n de (2.1) (con A=I) converge en $H_0^1(\Omega)$ débil hacia la solución u del problema

$$\left\{\begin{array}{l} -div\,(A\nabla u) + \mu u = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Vemos por tanto que u ya no verifica el problema (2.1) sino que un nuevo término μu aparece; es lo que D. Cioranescu y F. Murat llaman el "término extraño".

Estas hipótesis son justificadas en [26] mediante la presentación de varios ejemplos, de los cuales el más característico es el caso en el que $N \geq 3$ y Ω_n es de la forma $\Omega_n = \Omega \setminus T_n$, con T_n la unión de bolas de radio $(1/n)^{N/(N-2)}$, cuyos centros se sitúan en los vértices de un enrejado formado por las aristas de cubos de lado $1/n$ que recubren periódicamente $\mathbf{R}^N$. Con respecto a la distribución μ, debemos notar que la hipótesis (H5) implica que es el límite en el sentido de las medidas $*$-débil de la sucesión $|\nabla w_n|^2$ y por tanto se trata de una medida boreliana finita y no negativa. Los resultados se generalizan fácilmente cuando A es distinta de la identidad suponiendo condiciones similares. Además del resultado de homogeneización mencionado, se obtiene también un resultado de corrector, es decir, una aproximación de ∇u_n en la topología fuerte de $L^2(\Omega)^N$, que establece que si la solución u de (2.2) es muy regular, por ejemplo $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, entonces

$$\nabla u_n - \nabla u - u\nabla w_n \to 0 \ \text{ en } L^2(\Omega)^N.$$

Conseguí una mejora de estos resultados en [9], donde probé que, suponiendo tan sólo la existencia de una sucesión z_n tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} z_n \in H^1(\Omega), \\ z_n = 0 \text{ en } \Omega \setminus \Omega_n, \\ z_n \rightharpoonup 1 \text{ in } H^1(\Omega), \end{array} \right. \tag{2.3}$$

entonces, para una subsucesión de Ω_n, existen una sucesión w_n y una medida finita μ perteneciente a $\mathcal{M}_0^2(\Omega)$ (por $\mathcal{M}_0^p(\Omega)$ se indica el conjunto de medidas borelianas no negativas que se anulan en conjuntos de p-capacidad nula) tales que la sucesión w_n y la medida μ verifican propiedades muy similares a las impuestas por D. Cioranescu y F. Murat. Esto permite por tanto realizar la homogeneización de (2.1) suponiendo tan sólo la existencia de la sucesión z_n mencionada anteriormente. El resultado de corrector también es mejorado probando que basta suponer que la función límite u se encuentra en $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. En realidad, los resultados que aparecen en [9], son válidos para el p-laplaciano ($p > 1$)

$$\left\{ \begin{array}{l} -div\,(|\nabla\, u_n|^{p-2}\nabla\, u_n) = f \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega_n), \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega_n). \end{array} \right. \tag{2.4}$$

El término extraño que aparece tiene ahora la estructura $|u|^{p-2}u\mu$, con μ perteneciente a $\mathcal{M}_0^p(\Omega)$ y finita.

En realidad, anteriormente a mi trabajo, G. Dal Maso y U. Mosco ([30], [31]) habían ya realizado la homogeneización de (2.1), sin imponer ninguna condición adicional al hecho de que Ω_n esté contenida en Ω. Ellos prueban en este caso, la existencia de una medida $\mu \in \mathcal{M}_0^2(\Omega)$ y una subsucesión de Ω_n que sequiremos denotando por Ω_n tal que para toda $f \in H^{-1}(\Omega)$, la solución u_n de (2.1), converge en $H_0^1(\Omega)$ débil hacia la solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega) \cap L_\mu^2(\Omega), \\ \int_\Omega A\nabla u\nabla v\, dx + \int_\Omega uv\, d\mu = \langle f, v\rangle, \\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \cap L_\mu^2(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.5}$$

En el caso en que μ es una medida de Radon (lo cual puede no ser cierto), las funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$ pertenecen a $L^2_\mu(\Omega)$ y por tanto la ecuación (2.5) se puede escribir en la forma (2.2). El método empleado para probar este resultado es la Γ-convergencia, el cual tiene sin embargo el inconveniente de que el problema debe poderse escribir como un problema de minimización y por tanto la matriz A debe ser simétrica (problema que también se presenta en [9]). Además, no aparece un resultado de corrector, lo cual como mencionaremos más adelante es de gran importancia para afrontar problemas no lineales. El resultado más general referente a la homogeización de (2.1) se debe a G. Dal Maso y A. Garroni ([28]) quienes prueban el resultado anterior, para A no es necesariamente simétrica. Además aparece un resultado de corrector.

En el caso de problemas no lineales debemos mencionar un trabajo de G. Dal Maso y A. Defranceschi ([27]) quienes estudian el problema siguiente

$$\left\{\begin{array}{l} -div\, a(x,\nabla u_n)=f, \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega_n), \\ u_n\in W^{1,p}_0(\Omega_n), \end{array}\right. \tag{2.6}$$

donde como en el caso considerado por G. Dal Maso y U. Mosco, los abiertos Ω_n satisfacen tan sólo la propiedad de estar contenidos en Ω y donde $a:\Omega\mapsto \mathbf{R}^N$ define un operador monótono de orden p. Esta función se supone además que satisface la siguiente propiedad de homogeneidad

$$a(x,t\xi)=|t|^{p-2}ta(x,\xi),\ \forall\xi\in\mathbf{R}^N,\forall t\in\mathbf{R},\ \text{p.c.t. } x\in\Omega. \tag{2.7}$$

Como ejemplo, podemos considerar el caso $a(x,\xi)=|\xi|^{p-2}\xi$, que nos vuelve a dar el problema (2.4). El resultado que obtienen para este problema consiste en la existencia de una subsucesión de n, que seguiremos denotando por n, y de una medida $\mu\in\mathcal{M}^p_0(\Omega)$, tal que la solución u_n de (2.6) converge hacia la solución u del problema

$$\left\{\begin{array}{l} u\in W^{1,p}_0(\Omega)\cap L^p_\mu(\Omega), \\ \int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla v\,dx+\int_\Omega |u|^{p-2}uv\,d\mu=\langle f,v\rangle, \\ \forall\, v\in W^{1,p}_0(\Omega)\cap L^p_\mu(\Omega). \end{array}\right.$$

La técnica empleada en la demostración es, como en el caso de G. Dal Maso y U. Mosco, la Γ-convergencia y por tanto, a fin de que el problema se pueda escribir como un problema de minimización, se debe suponer que $a(x,\xi)$ es la derivada con respecto a ξ de una función $F(x,\xi)$ convexa en ξ. Tampoco aparece resultado de corrector en este trabajo. La eliminación de estas restricciones fue realizada por G. Dal Maso y F. Murat ([32], [33]) mediante una generalización del método usado por G. Dal Maso y A. Garroni. Sin embargo la hipótesis de homogeneidad (2.7) es aún impuesta.

Mi principal contribución a la homogeneización del problema (2.6), ha consistido principalmente en la eliminación de la hipótesis (2.7). Otros resultados en esta dirección pero menos generales y mediante un método completamente diverso han sido obtenidos por I.V. Skrypnik (ver por ejemplo [41], [42]). Suponiendo como en [9] la existencia de una sucesión z_n que satisface (2.3), (con $H^1(\Omega)$ reemplazado por $W^{1,p}(\Omega)$, se prueba en [12] la existencia de una subsucesión de n y de una función $g : \Omega \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ tal que la solución u_n del problema (2.6) converge hacia la solución u del problema

$$\begin{cases} -div\, a(x, \nabla u) + g(x, u)\mu = f, & \text{en } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

donde μ puede ser tomada como la misma medida que aparece en la homogeneización de (2.4). Tal y como fue probado más tarde en un trabajo conjunto con A. Garroni ([20]) y a diferencia de lo que sucede cuando se impone (2.7), la función $g(x, s)$ no tiene ahora por qué satisfacer una hipótesis de homogeneidad del tipo

$$g(x, ts) = |t|^{p-2} t g(x, s), \ \forall s \in \mathbf{R}, \forall t \in \mathbf{R}, \text{ p.c.t. } x \in \Omega.$$

Si bien se prueba que $g(x, .)$ es creciente, con un crecimiento de orden $p - 1$, vale cero en cero y es localmente hölderiana. La demostración de este resultado es distinta de la anteriores y consiste en comparar la solución u_n de (2.6) con el corrector de (2.4) que aparece en [9]. De aquí la necesidad de tener un corrector ya mencionada anteriormente. Debemos mencionar que en general no es cierto que el corrector que aparece al homogeneizar (2.4) sea aún un corrector para (2.6). Sin embargo, la comparación aporta la suficiente información sobre ∇u_n como para pasar al límite en (2.6). El método permite también encontrar un resultado de corrector para (2.6), el cual establece esencialmente la existencia de una sucesión de funciones $P_n : \Omega \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}^N$ que verifican

$$\nabla u_n - \nabla u - P_n(x, u) \to 0 \ \text{ en } L^p(\Omega)^N \tag{2.8}$$

(el verdadero resultado es más complejo técnicamente).

Usando el corrector para (2.4) que aparece en [33], es también posible generalizar todos estos resultados al caso en que no se impone la existencia de z_n satisfaciendo (2.3). Es decir, Ω_n es completamente general. Esto ha sido realizando en un trabajo conjunto con A. Garroni ([21]), en el cual además las funciones u_n que aparecen en (2.6) toman valores en $\mathbf{R}^M$, es decir a diferencia de los trabajos anteriores se trata de un sistema y no de una sola ecuación. Ello es posible gracias a que el método no usa el principio del máximo.

En realidad, la idea de comparar con el corrector de un problema más simple, la introduje para estudiar la homogeneización del siguiente problema:

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta u_n + H(x, u_n, \nabla u_n) = f \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega_n), \\ u_n \in H_0^1(\Omega_n) \cap L^\infty(\Omega_n), \end{array}\right. \tag{2.9}$$

donde f es una función de $L^\infty(\Omega)$ y $H(x, s, \xi)$ es una función de clase C^2 en las variables s y ξ, cuyas dos propiedades principales son las siguientes:

a) Existe una constante $\lambda > 0$ tal que

$$\frac{\partial H(x, s, \xi)}{\partial s} \geq \lambda, \quad \forall\, (s, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N, \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega.$$

b) Existen dos constantes C_0, C_1 tales que

$$|H(x, s, \xi)| \leq C_0 + C_1 |\xi|^2.$$

La existencia de solución a este problema fue probada por L. Boccardo, F. Murat y J.P. Puel en [6], mientras que la unicidad se debe a G. Barles y F. Murat ([3]). Comparando las soluciones de (2.9) con el corrector de (2.1) y bajo la hipótesis de la existencia de una sucesión z_n que verifica (2.3), pruebo en [11] la existencia de un problema límite del tipo

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta u + H(x, u, \nabla u) + g(x, u)\mu = f \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega, d\mu). \end{array}\right. \tag{2.10}$$

Como en el caso anterior, se obtiene también un resultado de corrector similar a (2.8). La demostración de estos resultados es bastante más compleja que la del caso monótono ya que es necesario introducir un cambio de variables debido a G. Barles y F. Murat ([3]) que produce gran cantidad de dificultades técnicas.

Respecto al problema (2.9), deseo referenciar también un trabajo anterior ([10]) en el que considero el caso particular

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta u_n + \lambda |u_n|^2 + \gamma |\nabla u_n|^2 = f \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega_n) \\ u_n \in H_0^1(\Omega_n) \cap L^\infty(\Omega_n) \end{array}\right. \tag{2.11}$$

el cual puede ser resuelto mediante el cambio de variables $z_n = e^{\gamma u_n} - 1$, que lo transforma en un problema semilineal.

Para terminar con este apartado referente a la homogeneización de problemas no lineales en abiertos variables, debemos comentar también el siguiente problema

$$\left\{\begin{array}{l} -div\, a(x, u_n, \nabla u_n) = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega_n), \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega_n), \end{array}\right. \tag{2.12}$$

donde ahora la función a define un operador pseudo-monótono. En principio, podemos pensar que el problema es bastante similar al considerado en (2.6). De hecho, en el trabajo con A. Garroni ([21]) mostramos cómo los resultados obtenidos para (2.6), se pueden aplicar a (2.12) en algunos casos particulares. Estos casos sin embargo son bastante restrictivos, ya que suponen para la función $a(x, s, \xi)$ una lipschitzianidad local del tipo

$$|a(x, s_1, \xi) - a(x, s_2, \xi)| \leq C(1 + |\xi|^{p-1-\sigma})|s_1 - s_2|, \\ \forall\, s_1, s_2 \in \mathbf{R},\ \forall\, \xi \in \mathbf{R}^N,\ \text{p.c.t. } x \in \Omega,$$

con σ una constante positiva; esta hipótesis no se verifica en los casos más simples, como por ejemplo

$$\begin{cases} -div\,\big(a(x, u_n)\nabla u_n\big) = f & \text{en } \mathcal{D}'(\Omega_n), \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega_n), \end{cases}$$

donde σ es igual a cero.

La homogeneización de (2.12) en el caso $\sigma = 0$ es un resultado que he conseguido realizar de hecho bastante tiempo después que la de (2.6) (ver [14]) y para llevarla a cabo he necesitado antes, obtener algunos resultados nuevos referentes al comportamiento de la soluciones de un problema pseudo-monótono (ver la Sección 4 de este trabajo). La principal diferencia con (2.6) es que ahora no es posible obtener un resultado de corrector del tipo (2.8), que es el que conducía a la ecuación límite en el caso de los problemas (2.6) y (2.9). Es decir, no se obtienen resultados acerca del comportamiento de ∇u_n en la topología fuerte de $L^p(\Omega)^N$. Las estimaciones de las que he hablado anteriormente permiten sin embargo obtener resultados sobre el comportamiento del término $a(x, u_n, \nabla u_n)$ y dan como resultado la existencia de un término nuevo en la ecuación límite, del tipo de los que aparecen en (2.6) y (2.9). El método hace uso de truncatura y por tanto, a diferencia de lo que ocurría con (2.6), no es válido para sistemas. Estos resultados se refieren al caso en que los abiertos Ω_n son completamente arbitrarios. Un caso más simple en el cual Ω_n tiene una estructura periódica ha sido analizado en [15], trabajo en el cual he aplicado técnicas de convergencia en dos escalas de las cuales hablaré en la Sección 3 y que simplifican notablemente el problema. Si bien, presenta ya gran parte de las dificultades del caso general y, de hecho, fue estudiando este caso sencillo como llegué a obtener las estimaciones necesarias para afrontar el problema general.

Para terminar esta Sección, comentar que los resultados anteriores estan relacionados con los Problemas de Control para EDP en los cuales la variable de Control, es el propio dominio en el cual tenemos la ecuación (se trata por tanto de un problema de diseño). Los resultados anteriores, muestran que en general el Problema de Control está mal planteado ya que la ecuación límite contiene el término $g(x,u)\mu$ que no estaba en las ecuaciones satisfechas por u_n. Debemos comentar sin embargo que una ecuación como por ejemplo (2.1), se puede escribir, análogamente a (2.5), en la forma

$$\text{(2.5)}\qquad \begin{cases} u_n \in H_0^1(\Omega)\cap L^2_{\mu_n}(\Omega), \\ \int_\Omega A\nabla u_n \nabla v\, dx + \int_\Omega u_n v\, d\mu_n = \langle f, v\rangle, \\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\cap L^2_{\mu_n}(\Omega), \end{cases}$$

sin más que introducir la medida μ_n definida por

$$\mu_n(B) = \begin{cases} +\infty & \text{si } cap_2(B\cup(\Omega\setminus\Omega_n)) > 0 \\ 0 & \text{si } cap_2(B\cup(\Omega\setminus\Omega_n)) = 0, \end{cases} \quad \forall\, B\subset\Omega, \text{ Borel.}$$

Esta observación fue realizada por G. Dal Maso y U. Mosco ([30], [31]) y conduce a una relajación de Problema de Control.

Actualmente, junto con C. Calvo ([7]), hemos considerado problemas de homogeneización en los cuales varían tanto el abierto en el que está planteada la ecuación como los coeficientes de la misma. La cuestión se encuentra relacionada con los Problemas de Control en los cuales las variables de Control son el abierto y los coeficientes.

3. Convergencia en dos escalas.

El concepto de convergencia en dos escalas fue introducido por G. Nguetseng ([40], ver también [1]) a fin de pasar al límite en una expresión del tipo

$$\text{(3.1)}\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})\,dx,$$

la cual aparece habitualmente en problemas de homogeneización periódica. En (3.1), la sucesión u_ε es débilmente convergente en $L^p(\Omega)$ mientras que $\psi(x,y)$ es una función suficientemente regular y periódica en la variable y. Por tanto, $\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})$ converge débilmente hacia la función

$$\frac{1}{|Y|}\int_Y \psi(x,y)\,dy$$

donde Y es el cubo de periodicidad. Nos encontramos pues con el producto de dos términos que convergen débil. El teorema de G. Nguetseng afirma que existen una subsucesión de u_ε que seguiremos notando por u_ε y una función $u\in L^p(\Omega\times Y)$ tales que u_ε converge en dos escalas hacia u, i.e.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})\,dx = \int_\Omega \frac{1}{|Y|}\int_Y u(x,y)\psi(x,y)\,dy\,dx$$

para toda función ψ en las condiciones anteriores. Nótese que u depende de dos variables, mientras que u_ε sólo depende de una. En homogeneización, la función u representa el primer término del desarrollo asintótico de u_ε, de hecho bajo ciertas condiciones y suponiendo $u(x,.)$ prolongada a todo $\mathbf{R}^n$ por periodicidad, se prueba el siguiente resultado de corrector:

$$u_\varepsilon(x) - u(x, \frac{x}{\varepsilon}) \to 0 \text{ en } L^p(\Omega).$$

Junto con I. Gayte, hemos generalizado el teorema anterior al caso en que la función ψ pertenece al espacio $CAP(\mathbf{R}^N)$ de las funciones casi-periódicas en el sentido de Böhr en la variable y. Recordemos que este espacio está definido como el cierre en la norma uniforme del espacio formado por los polinomios trigonométricos. Más general que este espacio, se puede considerar el espacio $B^p(\mathbf{R}^N)$ de las funciones casiperi-ódicas en el sentido de Besicovitch de orden p, definido como el cierre de $CAP(\mathbf{R}^N)$ respecto de la norma

$$\|f\|^p = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{|B(0,T)|} \int_\Omega |f(y)|^p \, dy.$$

El teorema que probamos, muestra que, si u_ε está acotada en $L^p(\Omega)$, $p > 1$, entonces existe una subsucesión de u_ε que seguimos denotando por u_ε y existe $u \in L^p(\Omega, B^p(\mathbf{R}^N))$ tales que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) \, dx = \int_\Omega M_y(u(x,y)\psi(x,y)) \, dydx$$

para toda función $\psi(x,y)$ suficientemente regular tal que $\psi(x,.) \in CAP(\mathbf{R}^N)$. Aquí, hemos notado por M_y la siguiente media

$$M_y(u(x,y)\psi(x,y)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{|B(0,T)|} \int_{B(0,T)} u(x,y)\psi(x,y) \, dy, \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega.$$

La principal dificultad del resultado radica en que $CAP(\mathbf{R}^N)$ no es un espacio separable, lo que nos ha llevado a realizar una oportuna generalización del teorema de compacidad secuencial en la topología $*$-débil del dual de un espacio separable. Concretamente, probamos que si Y es un espacio reflexivo, X un subespacio vectorial (no necesariamente cerrado) de Y y $f_n : X \mapsto \mathbf{R}$, una sucesión de funcionales lineales (no necesariamente continuos) tales que existe $C > 0$ verificando

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) \le C\|x\|, \quad \forall\, x \in X.$$

Entonces, existe una subsucesión de f_n, que seguimos notando por f_n, y existe un funcional $f \in Y'$ tales que

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall\, x \in X.$$

Nótese que si f_n son continuas y X es cerrado, el resultado es una consecuencia inmediata del teorema de Banach-Steinhaus y la compacidad secuencial en la topología $*$-débil de la bola unidad en el dual de un espacio reflexivo.

En realidad, en el trabajo con I. Gayte Delgado, se consideran los espacios que hemos llamado de Besicovitch Generalizados introducidos por V. Jikov, M. Kozlov y O. Oleiknik (ver [36]) para $p = 2$.

Cuando en lugar de una sucesión acotada en $L^p(\Omega)$, lo que se tiene es una sucesión acotada en $W^{1,p}(\Omega)$, caso habitual en homogeneización, conseguimos también caracterizar la forma del límite en dos escalas de ∇u_ε que analógamente al caso periódico ([40], [1]) resulta ser de la forma

$$\nabla u(x) + \nabla u_1(x, y)$$

donde u es el límite en $W^{1,p}(\Omega)$ de u_ε y $u_1 : \Omega \times \mathbf{R}^N \mapsto \mathbf{R}$ una función tal que su gradiente con respecto a y pertenece a $L^p(\Omega, B^p(\mathbf{R}^N)^N)$. Como hemos mencionado anteriormente, en este resultado consideramos los espacios de Besicovitch Generalizados y es necesario establecer previamente una teoría de derivación para estos espacios. Esta teoría contiene varios resultados nuevos incluso para los espacios de Besicovitch usuales y, además de a la homogeneización, se aplica a la búsqueda de soluciones en los espacios de Besicovitch para EDP con coeficientes en estos espacios (véase [23]).

Los resultados sobre convergencia en dos escalas mencionados anteriormente aparecen en [22], en el caso en que $p = 2$ y los espacios de Besicovtich son los usuales. El resultado general se encuentra en la tesis de I. Gayte ([35]), de la cual soy director, junto con el Profesor J. Couce. Los resultados se aplican a diferentes problemas de homogeneización como es el caso de

$$\begin{cases} -div\, a(\frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

donde $a(x, s, \xi)$ define un operador pseudomonótono y es tal que para cada $(s, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$, $a(., s, \xi)$ pertenece a uno de los espacios mencionados anteriormente.

Continuando con esta Sección dedicada a la generalizcación del método de convergencia en dos escalas, quiero mencionar también otras extensiones de esta técnica, referidas a la homogeneización periódica, en las que he trabajado:

Definamos $\kappa : \mathbf{R}^N \mapsto \mathbf{Z}^N$ por

$$\max_{1 \le 1 \le N} |x_i - \kappa_i(x)| < \frac{1}{2},$$

función que está bien definida salvo en un conjunto de medida nula. Siguiendo un trabajo de T. Arbogast, J. Douglas y U. Hornung ([2]), definamos entonces la siguiente transformación que hace corresponder a una sucesión $u_\varepsilon : \Omega \subset \mathbf{R}^N \mapsto \mathbf{R}$ la sucesión $\hat{u}_\varepsilon : \Omega \times Y \mapsto \mathbf{R}$ ($Y = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^N$), definida por

$$\hat{u}_\varepsilon(x,y) = u_\varepsilon(\varepsilon\kappa(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon y).$$

Nótese que si C_ε^k es el cubo de centro $k \in \mathbf{Z}^N$ y lado ε, entonces $\hat{u}_\varepsilon$ no depende de $x \in C_\varepsilon^k$ mientras que como función de y no es más que la transformada de u_ε por el cambio de variables

$$y = \frac{x - \varepsilon k(\frac{x}{\varepsilon})}{\varepsilon},$$

que lleva el cubo C_ε^k en el cubo Y. Es decir, se trata de agrandar cada pequeño cubo C_ε^k a fin de no perder información cuando ε tiende a cero.

Con esta sucesión $\hat{u}_\varepsilon$ y tal y como hace notar L. Lenczner ([37]), la función $u(x,y)$ que aparece en el teorema de G. Nguetseng, no es otra que el límite en $L^p(\Omega \times Y)$ de $\hat{u}_\varepsilon$.

En [15], aplico estas ideas al siguiente problema de homogeneización (ver la Sección 2)

$$\begin{cases} -div\, a(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega_\varepsilon) \\ u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega_\varepsilon). \end{cases}$$

donde a define un operador pseudo-monótono de tipo Leray-Lions de orden $p \in (1, N)$ y donde Ω_ε está definido por (problema con talla crítica)

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus T_\varepsilon, \quad \text{con} \quad T_\varepsilon = \bigcup_{k \in Z^N} B(\varepsilon k, \varepsilon^{\frac{N}{N-p}}).$$

No es posible abordar este problema con el teorema de Nguetseng ya que, mientras que Ω_ε tiene una estructura periódica, con periodo ε, las bolas que aparecen en la definición de T_ε decrecen con orden $\varepsilon^{\frac{N}{N-p}}$. El problema puede sin embargo ser resuelto con la siguiente adaptación de la idea de T. Arbogast, J. Douglas y U. Hornung. Basta definir $\hat{u}_\varepsilon$ por

$$\hat{u}_\varepsilon(x,y) = u_\varepsilon(\varepsilon\kappa(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^{\frac{N}{N-p}} y).$$

Cuando $p = N$, el problema guarda varias diferencias debido a que se trata de un caso crítico en las inyecciones de Sobolev. El problema se encuentra estudiado en [18] y para su resolución es necesario usar un cambio de variables no lineal.

Junto con J.D. Martín y M. Luna hemos usado también estas técnicas en la homogeneización de multiestructuras periódicas con varios parámetros (ver [24]). El método también se aplica a la resolución de problemas de homogeneización periódica en dominios que varían para operadores de orden mayor que 2, trabajo que se encuentra aún en proceso de redacción.

4. Propiedades de las soluciones de problemas pseudo-monótonos.

Los resultados de esta Sección se refieren a un problema del tipo

$$\text{(4.1)} \qquad \begin{cases} -div\, a(x,u,\nabla u) = f \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

donde Ω es un abierto acotado de $\mathbf{R}^N$, $a : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \mapsto \mathbf{R}^N$ define un operador pseudo-monótono de orden p, f es una distribución del espacio $W^{-1,p'}(\Omega)$ y u_0 un elemento de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como es conocido, la existencia de solución de este problema se debe a J. Leray y J.L. Lions ([38]). Respecto a la unicidad, se sabe que es cierta (ver [25], [4]) por ejemplo si $a(x,s,\xi)$ es localmente lipschitziana con respecto a s y fuertemente monótona con respecto a ξ. sin embargo, en casos más generales, el problema no tiene solución única (ver [4]).

Mi contribución en el contexto de este problema ([16]) ha consistido en probar que, bajo hipótesis más débiles que las necesarias para la unicidad, se puede aún probar el siguiente resultado: Si $u_1, u_2 \in W^{1,p}(\Omega)$ son soluciones de (4.1), entonces ambas verifican la misma condición de Neumann en el borde, i.e., si n es la normal exterior en $\partial\Omega$, entonces

$$a(x,u_1,\nabla u_1)n = a(x,u_2,\nabla u_2)n \;\text{ sobre } \partial\Omega.$$

Este resultado permite ahora mostrar que el máximo y el mínimo de dos soluciones de (4.1) son aún solución de (4.1), lo que permite probar la existencia de una solución minimal y una solución maximal, las cuales verifican además el siguiente principio del máximo:

Supongamos $f, g \in W^{-1,p'}(\Omega)$ y $u_0, v_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ tales que $f \le g$ en Ω, $u_0 \le v_0$ en $\partial\Omega$. Entonces, si $\underline{u}, \overline{u}$ son respectivamente la solución minimal y maximal de (4.1) con datos f y u_0 y $\underline{v}, \overline{v}$ son respectivamente la solución minimal y maximal de (4.1) con datos g y v_0, se tiene que

$$\underline{u} \le \underline{v}, \quad \overline{u} \le \overline{v} \;\text{ e.c.t. } \Omega.$$

Es importante señalar que un resultado anterior referente a la existencia de soluciones minimales y maximales para operadores pseudo-monótonos fue obtenido por L. Boccardo, F. Murat y J.P. Puel en [6], donde, no obstante, no se prueba que el máximo (resp. mínimo) de dos soluciones sea aún una solución sino tan sólo una subsolución (resp. supersolución). Se debe comentar también que las estimaciones que permiten resolver el problema (2.12) están basadas en estas propiedades.

Los resultados anteriores permiten también extender el concepto de capacidad a los operadores pseudo-monótonos de la siguiente forma. Si K es un compacto contenido en Ω y s es un número real, se define la capacidad de K en Ω respecto del operador $\mathcal{A} = -div\, a(x, u, \nabla u)$ y la constante s por

$$C_{\mathcal{A}}(K, \Omega, s) = \int_{\Omega} a(x, u_s, \nabla u_s) \nabla u_s \, dx,$$

donde u_s es una solución del problema

$$\begin{cases} -div\, a(x, u_s, \nabla u_s) = 0 \;\text{ en } \mathcal{D}'(\Omega \setminus K), \\ u_s = s \text{ en } K, \\ u_s = 0 \;\text{ en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

Nótese que, aunque (4.2) puede no tener solución única, el hecho de que dos soluciones verifiquen la misma condición de Neumann implica que la definición de $C_{\mathcal{A}}(K, \Omega, s)$ no depende de la solución u_s escogida. Esta capacidad se puede además probar que verifica propiedades análogas a las de la capacidad habitual, $a(x, u, \nabla u) = |\nabla u|^{p-2} \nabla u$. Estos resultados generalizan los obtenidos por G. Dal Maso e I.V. Skrpnik en [34], para el caso monótono y se encuentran en [17]. Análogamente al caso monótono, sirven para caracterizar el término $g(x, u)\mu$ que aparecía el la homogeneización de (2.12).

5. Un resultado de compacidad.

En esta última Sección voy a comentar un trabajo con G. Dal Maso que aunque ha sido usado en alguno de los trabajos mencionados anteriormente, tiene importancia por sí mismo y conviene ser tratado de forma independiente.

Es conocido, que una función de $W^{1,p}(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbf{R}^N$ abierto, $1 \le p \le N$) admite un representante que está definido salvo en un conjunto de p-capacidad nula (y por tanto de dimensión de Hausdorff $N - p$), el cual además es p-cuasi-continuo. Tomando para cada función de $W^{1,p}(\Omega)$ el correspondiente representante mencionado anteriormente, es conocido que se tiene el siguiente resultado. Si $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ converge fuertemente en $W^{1,p}(\Omega)$ hacia una función u, entonces existe una subsucesión que converge salvo en un conjunto de p-capacidad nula. Sin embargo, el resultado es falso si la convergencia es solamente débil. Junto con G. Dal Maso ([19]), probamos que si u_n converge débilmente en $W^{1,p}(\Omega)$ hacia u, entonces para toda medida boreliana μ, finita, que se anula en conjuntos de p-capacidad nula la sucesión u_n converge en μ-medida hacia u, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|u_n - u| > \varepsilon\}) = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Se obtiene además un resultado inédito debido a E. De Giorgi, que establece que en las condiciones anteriores, existe una subsucesión de u_n, que denotamos aún u_n, tal que

$$\liminf_{n\to\infty} |u_n(x) - u(x)| = 0,$$

salvo en un conjunto de p-capacidad nula. Estos resultados, se aplican por ejemplo a los problemas de optimización siguientes:

$$\min\left\{\int_\Omega F(x,u,Du)\,dx + \int_\Omega f(x,u)\,d\mu : \ u \in W^{1,p}(\Omega)^m\right\}$$
$$\min\left\{\int_\Omega F(x,u,Du)\,dx : \ u \in W^{1,p}(\Omega)^m, \ u(x) \in K(x)\right\},$$

donde la función F es convexa en su última variable y satisface una condición del tipo

$$F(x,s,\xi) \geq \alpha|\xi|^p,$$

con $\alpha > 0$, la función f es semicontinua en su segunda variabla y no negativa y los conjuntos $K(x)$ son cerrados en $\mathbf{R}^M$. En el segundo problema, la condición $u(x) \in K(x)$, se entiende verificada salvo a lo más en un conjunto de p-capacidad nula (problema fino de obstáculo).

Bibliografía

[1] G. ALLAIRE, *Homogenization and two-scale convergence.* SIAM J. Math. Anal. 23, 6 (1992), 1482-1518.

[2] T. ARBOGAST, J. DOUGLAS, U. HORNUNG, *Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory.* SIAM J. Math. Anal., 21, 4 (1990), 823-836.

[3] G. BARLES, F. MURAT, *The maximum principle for quasilinear elliptic equations with quadratic growth conditions.* Arch. Rat. Mech. Anal. 133 (1995), 77-101.

[4] L. BOCCARDO, T. GALLOUET, F. MURAT, *Unicité de la solution de certaines équations elliptiques non linéaires.* C.R. Acad. Sci. Paris, 315, I (1992), 1159-1164.

[5] L. BOCCARDO, F. MURAT, J.P. PUEL, *Existence de solutions faibles pour des équations elliptiques quasi-linéaires à croissance quadratique.* En *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, Collège de France Seminar, Vol. IV*, ed. por H. Brezis, J.L. Lions. Research Notes in Math. 84 (1983), Pitman, Londres, 19-73.

[6] L. BOCCARDO, F. MURAT, J.P. PUEL, *Quelques propiétés des opérateurs elliptiques quasi linéaires.* C.R. Acad. Sci. Paris, 307, I (1988), 749-752.

[7] C. CALVO-JURADO, J. CASADO-DÍAZ, *Homogenization of nonlineal Dirichlet problems with varying coefficients in general perforated domains.* En preparación.

[8] L. CARBONE, C. SBORDONE, *Some properties of* Γ*-limits of integral functionals.* Ann. Mat. Pur. Appl. IV, 122 (1979), 1-60.

[9] J. CASADO-DÍAZ, *Existence of a sequence satisfying Cioranescu-Murat conditions in homogenization of Dirichlet problems in perforated domains.* Rendiconti di Matematica, VII, 16 (1996), 387-413.

[10] J. CASADO-DÍAZ, *Homogenization of a quasi-linear problem with quadratic growth in perforated domains: An example.* Ann. I. H. Poincaré, An. non Linéaire, 14, 5 (1997), 669-686.

[11] J. CASADO-DÍAZ, *Homogenization of general quasi-linear Dirichlet problems with quadratic growth in perforated domains.* J. Math. Pur. Appl. 76 (1997), 431-476.

[12] J. CASADO-DÍAZ, *Homogenisation of Dirichlet problems for monotone operators in varying domains.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 127 A (1997), 457-478.

[13] J. CASADO-DÍAZ, *Relaxation of a quadratic functional defined by a nonnegative unbounded matrix.* Potential Anal. 11, (1999), 39-76.

[14] J. CASADO-DÍAZ, *Homogenization of Dirichlet pseudomonotone problems with renormalized solutions in perforated domains.* J. Math. Pur. Appl. 79, 6 (2000), 553-590.

[15] J. CASADO-DÍAZ, *Two scale convergence for nonlinear Dirichlet problems in perforated domains.* P. Roy. Soc. Edimburgh, 130 A (2000), 249-276.

[16] J. CASADO-DÍAZ, *Minimal and maximal solutions for Dirichlet pseudomonotone problems.* Por aparecer en Nonlinear Analysis. Theor. Meth. and Appl.

[17] J. CASADO-DÍAZ, *The capacity for pseudomonotone operators.* Por aparecer en Potential Anal.

[18] J. CASADO-DÍAZ, *Asymptotic behaviour of nonlinear problems in periodically perforated domains. The case* $p = N$. Por aparecer

[19] J. CASADO-DÍAZ, G. DAL MASO, *A weak notion of convergence in capacity with applications to thin obstacle problems.* Por aparecer en *Calculus of Variations and Related Topics* (Technion, Haifa, Israel, 25-31 Marzo 1998), Pitman Research Notes in Mathematics, Addison Wesley Longman.

[20] J. CASADO-DÍAZ, A. GARRONI, *A non homogeneous extra term for the limit of Dirichlet problems in perforated domains.* Por aparecer en *Homogenization and applications to material sciences (Proceedings, Niza, 6-10 Junio, 1995).* Math. Sciences and Appl. Series, Gakkokotosho, 1996.

[21] J. CASADO-DÍAZ, A. GARRONI, *Asymptotic behaviour of Dirichlet solutions of nonlinear elliptic systems on varying domains.* SIAM J. Math. Anal., 31, 3 (2000), 581-624.

[22] J. CASADO-DÍAZ, I. GAYTE, *A general compactness result and its application to the two-scale convergence of almost periodic functions.* C. R. Acad. Sci. Paris, 323,1, (1996), 329-334.

[23] J. CASADO-DÍAZ, I. GAYTE, *A derivation theory for Generalized Besicovitch spaces and its application to partial differential equations.* Por aprecer.

[24] J. CASADO-DÍAZ, M. LUNA-LAYNEZ, J.D. MARTÍN-GÓMEZ, *An adaptation of the Arbogast, Douglas, Hornung's method for the analysis of very thin reticulated structures.* Por aparecer.

[25] M. CHIPOT, G. MICHAILLE, *Uniqueness results and monotonicity properties for strongly nonlinear elliptic variational inequalities.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (1989), 137-166.

[26] D. CIORANESCU, F. MURAT, *Un terme étrange venu d'ailleurs.* En *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, Collège de France Seminar, Vol. II and III*, ed. por H. Brezis, J.L. Lions. Research Notes in Math. 60 and 70 (1982), Pitman, Londres, 98-138 and 154-178.

[27] G. DAL MASO, A. DEFRANCESCHI, *Limits of nonlinear Dirichlet problems in varying domains.* Manuscripta Math. 61 (1988), 251-278.

[28] G. DAL MASO, A. GARRONI, *New results on the asymptotic behaviour of Dirichlet problems in perforated domains.* Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 3 (1994), 373-407.

[29] G. DAL MASO, A. GARRONI, I.V. SKRYPNIK, *A capacitary method for the asymptotic analysis of Dirichlet problems for monotone operators.* J. Anal Math. 71 (1997), 263-313.

[30] G. DAL MASO, U. MOSCO, *Wiener-criterion and* Γ*-convergence.* Appl. Math. Optim. 15 (1987), 15-63.

[31] G. DAL MASO, U. MOSCO, *Wiener-criteria and energy decay for relaxed Dirichlet problems.* Arch. Rat. Mech. Anal. 95, 4 (1986), 345-387.

[32] G. DAL MASO, F. MURAT, *Dirichlet problems in perforated domains for homogeneous monotone operators on* H_0^1. En *Calculus of Variations, Homogenization and Continuum Mechanics (Proceedings, Cirm-Lumigny, Marsella, Junio 21-25, 1993)*, ed. por G. Bouchitté, G. Buttazzo, P. Suquet. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences 18 (1994), World Scientific, Singapur, 177-202.

[33] G. DAL MASO, F. MURAT, *Asymptotic behaviour and correctors for Dirichlet problems in perforated domains with homogeneous monotone operators.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 7, 4 (1997), 765-803.

[34] G. DAL MASO, I.V. SKRYPNIK, *Capacity theory for monotone operators.* Potential Anal. 7, 4 (1997), 765-803.

[35] I. GAYTE, *Espacios de Besicovitch generalizados y convergencia en dos escalas.* Universidad de Sevilla. 1998.

[36] V.V. JIKOV, S.M. KOZLOV, O.A. OLEINIK, *Homogenization of differential operators and integral functionals.* Springer-Verlag, Berlín, (1994).

[37] M. LENCZNER, *Homogénéisation d'un circuit électrique.* C. R. Acad. Sci. Paris, 324, S. II b (1997), 537-542.

[38] J. LERAY, J.L. LIONS, *Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder.* Bull. Soc. Math. France, 93 (1965), 97-107.

[39] P. MARCELLINI, *Some problems of semicontinuity and of* Γ*-Convergence for integrals of the calculus of variations.* En *Proceedings of the international meeting on recent methods in non lineal anallysis, (Roma, mayo 8-12, 1978),* ed. por E. De Giorgi, E. Magenes, U. Mosco. Pitagora, Bologna, (1979), 205-221.

[40] G. NGUETSENG, *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization.* SIAM J. Math. Anal. 20, 3 (1989), 608-623.

[41] I.V. SKRIPNIK, *Asymptotic behaviour of solutions of nonlinear elliptic problems in perforated domains.* Math. Sb. 184 (1993), 67-90.

[42] I.V. SKRYPNIK, *Homogenization of nonlinear Dirichlet problems in perforated domains of general structure.* Math Sb. 187, 8 (1996), 125-157.