1, 2, 3, ... ω: matemática, historia y epistemología

José Ferreirós

0

La presente contribución es de carácter programático. Esbozaré un posible enfoque de la filosofía de la matemática, una variante del *naturalismo*. Tras el giro antifundacional de los años 50 y 60 (Quine, Lakatos, Putnam), ha sido normal encontrar tales enfoques. Los más notables representantes son Philip Kitcher [1983] y Penelope Maddy [1990], que tienen en común su distanciamiento del platonismo y apriorismo clásico. Tratan de comprender el conocimiento matemático como un desarrollo de las capacidades naturales adquiridas por seres vivos concretos, los miembros de la especie humana. De una forma que recuerda la alternativa de Kuhn frente a la filosofía de la ciencia tradicional, el énfasis cambia de la matemática entendida como conjunto de teorías, a la matemática como actividad humana.

De acuerdo con Lakatos y Kitcher, entenderemos que nuestro asunto principal es el trasfondo epistemológico del conocimiento matemático tal como se ha desarrollado históricamente. (Una concepción histórica del tema se encuentra ya en Lautmann y Cavaillès, durante los años 30.) La matemática parece ser una actividad creativa, inserta en un proceso abierto de evolución histórica; esto basta para que la idea de un sistema formal omniabarcante parezca un mito. Dado el escaso valor epistemológico de los intentos fundacionalistas, una salida natural es tratar de seguir (epistemológicamente) la evolución histórica del tema. Ello sugiere un modo de confrontar el tema de la epistemología matemática y definir sus problemas abiertos. A fin de cuentas, la convicción de que el puro análisis conceptual no resolverá la cuestión es esencial al naturalismo: necesitamos teorías creativas y datos fiables. La historia puede ser una fuente sumamente interesante tanto de problemas como de datos.

Consideraremos algunos aspectos del desarrollo de los números, del uno al omega. Esto me permitirá mostrar, mediante ejemplos, algunos aspectos relevantes de mi concepción del naturalismo, y sugerir algunos de los problemas centrales que debería abordar.

1

Uno, dos, tres, ... Los enfoques fundacionalistas tratan de suministrar un marco global para las teorías matemáticas. Normalmente, la sistematicidad les resulta básica. Un sistema para los números naturales, además de ofrecer un fundamento adecuado para los desarrollos ulteriores (por ejemplo, el análisis), debe emplear medios de la máxima homogeneidad. Así son las teorías propuestas por Frege, Kronecker, Dedekind, Cantor, Peano, Russell, Hilbert, etc. hace un siglo. Por el contrario, un naturalismo histórico no intentará elaborar un sistema definitivo, sino sólo explicar el surgimiento y evolución de las nociones matemáticas. Lejos de exigir sistematicidad, esto parece pedir atención a una variedad de factores (lo que no implica eclecticismo). La idea resultará clara a cualquiera que acepte que el uso elemental de los números, tal como se enseña en la educación básica, obedece a características y restricciones muy diferentes que el empleo de los números en la matemática superior. El naturalismo debería explicar ambos usos y sus conexiones, pero no hay razón para pensar que la explicación será unificante o sistemática. Empecemos pues por lo elemental.

El primer problema a abordar es el de las raíces del número. ¿Son de carácter lingüístico, o pre-lingüístico? Ya que carecemos de espacio para una argumentación, diré simplemente que estoy a favor de la teoría de que el conocimiento no verbal —relacionado con la "inteligencia práctica" de Piaget— es básico para el desarrollo del número y la matemática en general. En este punto, parece que, si olvidamos cuestiones de detalle, estoy de acuerdo con Kitcher y Maddy. De hecho, las ideas que esbozaré sobre los números son muy cercanas a las de Kitcher, quien enfatiza la importancia de las operaciones realizadas sobre grupos de objetos. Sin embargo, Kitcher y Maddy resaltan la percepción de una forma que parece ligada al empirismo clásico, y el empirismo es un enfoque típicamente fundacionalista. Por contra, los neurobiólogos han insistido siempre en que el *output* motor del cuerpo humano es totalmente distinto de los *inputs* sensoriales, igualmente primitivo, e igualmente importante para el desarrollo de nuestros sistemas cognitivos (incluyendo la percepción, entendida ahora como procesamiento de alto nivel). Tal como Quine lo definió, el naturalismo es el intento de abordar las cuestiones epistemológicas con conceptos y métodos (supuestamente) científicos. En tal caso, los naturalistas no están obligados a adherirse a la epistemología empirista; en particular, sus teorías pueden apelar a objetos físicos y biológicos, al igual que las teorías científicas.[1]

Comentemos pues, brevemente, nuestro *Problema I: las raíces naturalistas del conocimiento matemático*. Entre las teorías de hace un siglo, mencionadas arriba, algunas se centraban en los números cardinales, otras en los ordinales; algunas preferían un análisis abstracto del número, ya fuera conjuntista o axiomático, mientras que otras eran de corte constructivista, enfatizando el papel de los numerales (símbolos numéricos). Pero estos diversos elementos no son incompatibles, y un filósofo podría estar tentado de tratarlos simultáneamente. Hay evidencia experimental de que poseemos (también los infantes) la capacidad de percibir directamente números muy pequeños de cosas; por otro lado, los datos históricos, antropológicos y psicológicos apuntan a la conclusión de que dependemos de los numerales para manejar números grandes. En esta línea, uno podría argüir que alguna noción intuitiva de número cardinal es básica para el empleo de los números, y a la vez estar a favor del enfoque ordinal de los números. La 'intuición' elemental de la invariancia cardinal de grupos de objetos se basaría directamente en características del mundo de objetos en que vivimos y en características de nuestra estructura física heredada, y, por tanto, en regularidades subyacentes a nuestro acceso sensorial y motor al mundo. Pero mi razón para preferir los números ordinales es que parece mucho más claro cómo los manejan nuestras mentes, mientras que los cardinales parecen irremediablemente abstractos, de modo que presentan los problemas de acceso enfatizados por Benacerraf [1973]. Además, como dijo el gran matemático William Rowan Hamilton, "I cannot imagine myself *counting* any set of things without first *ordering* them, and treating them as *successive*—however *arbitrary* and *mental* (or *subjective*) the assumed succession may be" [Hamilton 1853, 125].

Ahora bien, el principal argumento en contra del naturalismo es su aparente incapacidad para dar cuenta de la extraordinaria universalidad y objetividad del conocimiento matemático. En la versión del naturalismo que presento aquí, la objetividad se explica en términos de similitudes intersubjetivas. La mayoría de los seres humanos desarrollan una noción de objeto (según los psicólogos, hacia los 18 meses de edad). Telegráficamente, esto puede explicarse teniendo en cuenta las interrelaciones estables y convergentes entre objetos, biológicos y de otro tipo, así

---

1 Hablar de objetos es crucial para Maddy, aunque parece que sigue estando a favor de una concepción más bien pasiva de la percepción. La manipulación de objetos es central para Kitcher, pero curiosamente la reduce a la percepción de objetos que son manipulados (!).

como las regularidades sensoriales y motoras a las que dan lugar.[1] De forma similar, la mayoría de los humanos aprenden a emplear el lenguaje, tanto oral como escrito, natural o artificial. Por supuesto, hay problemas de aprendizaje tales como la afasia (motora o sensorial), la agrafía y, a un nivel menos severo, la dislexia, incluyendo la dislexia numérica. Esto debería ayudarnos a recordar que las similitudes intersubjetivas no son aproblemáticas, ya que se construyen sobre la base movediza o fangosa de las diferencias individuales. Pero sigue siendo cierto que la mayoría de los humanos tienen éxito en dominar las habilidades sumamente básicas que involucra el aprendizaje de los números, de su simbolismo, etc. Esto ofrece, según creo, una *base suficiente* para la objetividad matemática, de carácter perfectamente naturalista.

Siguiendo la línea de Hamilton, Dedekind [1888] presentó un análisis ordinal del número que se me antoja especialmente indicado para su adaptación a un enfoque naturalista, siempre y cuando lo despojemos de los rasgos abstractos propios del marco conjuntista en el que Dedekind lo encuadró. De esta manera, resulta esencialmente idéntico al análisis que presentó el constructivista Kronecker en la misma época. Contar involucra dos capacidades fundamentales: la capacidad de considerar una multitud (un conjunto) de cosas desde un mismo punto de vista, ya sea —añado— conceptual, perceptual o manipulativo; y la capacidad de relacionar cosas con cosas, hacer corresponder una cosa a otra, representar una cosa mediante otra. Para contar, empleamos los numerales y hacemos corresponder a cada cosa contada un y sólo un numeral, respetando su orden. Así obtenemos una correspondencia biunívoca entre las cosas y un segmento inicial de la serie ordenada de los numerales, empezando con 1. El último numeral empleado, que es único, representa el número de cosas, el invariante cardinal de la multitud o conjunto que forman.

Quizá conviene mencionar que, aunque nosotros los occidentales empleamos sofisticados numerales, otras culturas emplean los dedos o cualquier parte del cuerpo (en Papúa Nueva Guinea se cuenta: "pulgar, muñeca, antebrazo ..."), nudos sobre una cuerda, o rayas sobre una vara de madera [Ifrah 1987]. Pero, en todas las culturas, el mecanismo es similar: siempre hay un conjunto ordenado de marcas, símbolos u objetos (por cierto, los numerales son objetos), que se emplea como una 'regla' cuando cada marca se pone en correspondencia biunívoca con las cosas contadas. Los símbolos numéricos sofisticados son superiores por una simple razón, que Dedekind no mencionó pero fue enfatizada por los constructivistas. Los numerales se generan mediante un *sistema recursivo de reglas*, que puede ser más simple (piénsese en los números indo-arábigos) o más complejo (piénsese en las palabras numéricas de los lenguajes naturales). Dicho sistema de reglas, relativamente simple, nos permite generar una serie de numerales que, a todos los efectos prácticos, resulta ilimitada: podemos extender la 'regla portátil' tanto como queramos, en cualquier lugar y a cualquier hora. La carga mnemónica es pequeña, y el conocimiento del sistema de reglas hace que memorizar el resultado del proceso de contar sea tarea fácil.

Algún lector puede estar pensando, ¿a qué viene esta digresión sobre los numerales? Bien, un experto en teoría de números puede permitirse ignorar los *medios técnicos* que nos permiten contar y dominar los números, pero no así un filósofo naturalista. La evidencia histórica y antropológica sugiere que tales medios técnicos han sido indispensables para que captáramos los números grandes, y, por tanto, para el propio concepto de número. Ello apunta a un segundo problema básico: ¿hasta qué punto nuestro conocimiento (si se quiere, nuestras representaciones mentales,[2] o

1 Podríamos tener que considerar un factor coadyuvante: la colaboración de los adultos en juegos, etc.

2 En lo tocante a las relaciones entre naturalismo y ciencia cognitiva, opino que deberíamos mostrarnos algo circunspectos. En particular, creo que los filósofos podríamos realizar una

nuestras intuiciones), y en particular el conocimiento numérico, depende del lenguaje? Quienes trabajan en enfoques cognitivos de la filosofía de la ciencia deberían también considerar central este problema, ya que afecta a la cuestión de cómo nuestro sistema cognitivo maneja las teorías, entendidas en términos de modelos. Creo que es esencial, a este respecto, diferenciar entre el lenguaje oral y escrito. Cabe recordar que, según algunos antropólogos, el elemento clave que hizo posible el 'milagro griego' —surgimiento de un discurso abstracto sobre filosofía, ciencia y matemática— fue una invención técnica, la escritura alfabética, en torno al año 800 a.n.e. Si es así, las posibilidades del lenguaje oral y escrito son muy diferentes.1

Dentro de la propia historia de la matemática, la importancia del simbolismo no puede sobrestimarse, aunque, si nos referimos a símbolos escritos peculiares, es básicamente un fenómeno de la era Moderna. Consideremos la forma en que el sistema posicional indo-arábigo hizo posible el descubrimiento del cero y el desarrollo de algoritmos de cálculo fáciles de aprender; cómo abrió el camino al desarrollo de un simbolismo algebraico, que fue aplicado con tanto éxito en la geometría analítica, y desarrollado para ajustarse a las necesidades del análisis infinitesimal. Consideremos la forma en que el simbolismo puede ser una fuente de progreso aun cuando lleva a aparentes absurdos: la introducción de los números imaginarios (también llamados "imposibles", "sordos", "sofísticos") y, con ellos, la posibilidad de calcular las raíces reales de ecuaciones cúbicas, y sobre todo la formulación por Girard del llamado Teorema Fundamental del Álgebra. Aquí, el pensamiento simbólico parece guiar el progreso matemático, y viene mucho antes del pensamiento conceptual, que en el caso de los números imaginarios surge hacia 1800.

Espero que esta mención extremadamente breve de algunos ejemplos bastará para justificar la importancia del *Problema II: lenguaje, símbolos, y conocimiento matemático*. La historia de la matemática puede al menos sugerir tales problemas, y creo que también puede suministrar ejemplos clave que, analizados desde un punto de vista teórico, deberían formar una base empírica sobre la que validar hipótesis de trabajo. Si es así, la historia de la matemática (y de la ciencia en general) podría prestar un gran servicio a la epistemología naturalizada. Tal empresa es, por su naturaleza, interdisciplinar, lo que puede bastar para justificar (si se siente esa necesidad) la intervención de filósofos en ella.

2

... **Omega.** Finalmente llegamos a ω, el primer número ordinal transfinito de Cantor, que cuenta 114 años por esta fechas. Aquí simboliza los números naturales tal como intervienen en la matemática superior: en teoría de conjuntos axiomática, dada la forma en que se definen los números, ω es el conjunto de los números naturales. Pero al hablar del *conjunto* de los números naturales, estos ya no pueden considerarse como símbolos numéricos. La construcción ilimitada de numerales mediante reglas recursivas puede bien ser la fuente primitiva de nuestra noción del infinito, pero, cuando éste se toma como infinito actual, tratamos con una nueva noción abstracta, que no tiene nada que ver con símbolos en el sentido usual. Al haber infinitos números, el conjunto de todos ellos sólo puede ser objeto de una 'representación' o 'intuición' abstracta, en algún sentido que debería ser especificado. Así, la matemática superior plantea problemas especialmente difíciles, relacionados con el surgimiento de nociones matemáticas abstractas. Como vemos, hay pocas razones para esperar que

contribución positiva criticando nociones relativamente oscuras, como la de 'representación mental'.

1 El progreso en la dirección de una estructura argumentativa del discurso, y el abandono de recursos mnemónicos propios de una cultura oral, son muy visibles de Homero a Parménides y Platón (Tomás Pollán, curso 1983-84 en la Universidad Autónoma de Madrid).

las teorías sobre la matemática elemental y la abstracta sean unificantes o sistemáticas.

Muchos filósofos de la matemática consideran el infinito como un supuesto básico que no puede ser explicado, excepto por sus consecuencias para las teorías matemáticas [por ejemplo, Maddy 1990, 125, 172]. Pero, en mi opinión, parece posible ir más allá; y, en tal caso, el infinito debería ser el problema central de la epistemología matemática. Retrospectivamente, resulta claro que la historia de ω está ligada indisolublemente a la historia del continuo y los números reales. Sin las cuestiones geométricas y analíticas que dieron origen a **R**, habría poca necesidad del infinito matemático. Una historia del continuo debería comenzar con la geometría griega, donde la continuidad de las líneas fue asumida implícitamente, y la filosofía griega, donde fue explícitamente cuestionada. En la era Moderna, una nueva definición del número hizo posible hablar del sistema esencialmente continuo de los números reales (Simon Stevin, 1585). Más tarde, la falta de claridad respecto a los fundamentos del cálculo estuvo ligada a la oscuridad en torno al continuo, a **R**, lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande. La rigorización en el siglo XIX disipó la niebla gradualmente, hasta que las nuevas definiciones de **R** completaron el trabajo [Ferreirós 1993, cap. V]. Pero, aunque en las primeras décadas de aquel siglo parecía que el discurso sobre el infinito había desaparecido, a fin de siglo resultaba claro que la aritmetización del análisis no sólo requería números naturales, sino también conjuntos infinitos de dichos naturales. El axioma del infinito —que postula la existencia de ω— se convirtió en uno de los axiomas clave de la matemática. Hablando metafóricamente, diríamos que el matemático moderno no puede vivir sin el infinito.

Estos maravillosos desarrollos revelan varios fenómenos que se pueden encontrar una y otra vez en la historia de la matemática, fenómenos cuya interpretación epistemológica dista de ser obvia. Quizá podemos formular el último problema como sigue: *Problema III: las representaciones matemáticas, o lo fructífero de la intuición matemática trascendente*. Intentaré explicarlo. La historia muestra claramente que las nociones matemáticas emergen a un nivel intuitivo, y que el rigor axiomático viene después; incluso algunos formalistas (como Curry) han asumido la importancia de la intuición para el trabajo matemático. No deberíamos considerar tales intuiciones como primitivas, al estilo kantiano; por el contrario, parecen desarrollarse y perfeccionarse a lo largo del tiempo, con la práctica. La axiomática puede verse como un simple método, por importante que sea, para hacer explícita una base suficiente de supuestos subyacentes a cualquier nueva intuición o cualquier rama de la matemática. En nuestro ejemplo, la noción del continuo surgió rodeada de misterio en Grecia, mientras que su análisis axiomático sólo fue completado unos 2400 años después. Podrían indicarse muchos otros ejemplos: superficies de Riemann, números transfinitos, etc.

Además, la noción o representación del continuo *trasciende* lo dado: la experiencia de seres vivos concretos es finita y discreta; como indicó Hilbert [1925], cuanto más sabemos del mundo físico, menos razones tenemos para pensar que es infinito en ningún sentido. Tanto más sorprendente es que las nociones del infinito y el continuo formaran la base indispensable del análisis infinitesimal, la rama de la matemática con más éxito en lo tocante a aplicaciones científicas (física clásica, etc.). Pero el motivo último del supuesto de continuidad puede haber sido una mera cuestión de simplicidad. Los griegos se encontraron con dos posibilidades teóricas en el análisis del espacio físico y la geometría, lo discreto y lo continuo (véanse los argumentos de Zenón). La última ciertamente simplifica la teoría, tanto en presencia como en ausencia de información detallada sobre la estructura de la materia.

Una teoría naturalista de los números y otras ideas matemáticas debería suministrar una base para explicar la 'intuición' de nociones matemáticas abstractas, y abrir el camino a una clarificación de lo fructífero de tales representaciones trascendentes. Estos son los problemas superiores que debería abordar una epistemología naturalista de la matemática.

Referencias

BENACERRAF, P. 1973. 'Mathematical truth', in P. Benacerraf y H. Putnam, eds., *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, 1983.

DEDEKIND, R. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?*, in *Gesammelte mathematische Werke* (New York, Chelsea, 1969), vol.3. Trad. en *¿Qué son y para qué sirven los números?*, Madrid, Alianza, en prensa.

FERREIRÓS, J. 1993. *El nacimiento de la teoría de conjuntos*, Madrid, Publicaciones de la Universidad Autónoma.

HAMILTON, W.R. 1853. 'Preface to «Lectures on Quaternions»', *The Mathematical Papers*, vol. 3, Cambridge University Press, 1967.

HILBERT, D. 1925. 'Über das Unendliche', *Mathematische Annalen* **95**. Trad. parcial en *Fundamentos de la geometría*, Madrid, CSIC, 1991.

IFRAH, G. 1987. *Las cifras: historia de una gran invención*, Madrid, Alianza.

KITCHER, P. 1983. *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press.

MADDY, P. 1990. *Realism in Mathematics*, Oxford University Press.