Ricardo Barroso Campos

José María Gavilán Izquierdo

Departamento de Didáctica de las Matemáticas(Universidad de Sevilla)

Independientemente de la frecuencia con que se demuestre, el Teorema de Pitágoras logra siempre retener su belleza, su frescura y su eterno sentido de admiración (Dunham, 1.995)

Diversas perspectivas del Teorema de Pitágoras.

(Referenciado en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (2.002), Vol 34 (3) G40 2234)

El teorema de Pitágoras es uno de los más conocidos e importantes dentro de las Matemáticas. Queremos mostrarlo bajo tres perspectivas; la primera de ellas sociocultural, siendo las otras dos con visión matemática, desde la Teoría de Números y desde una visión geométrica basada en la circunferencia.

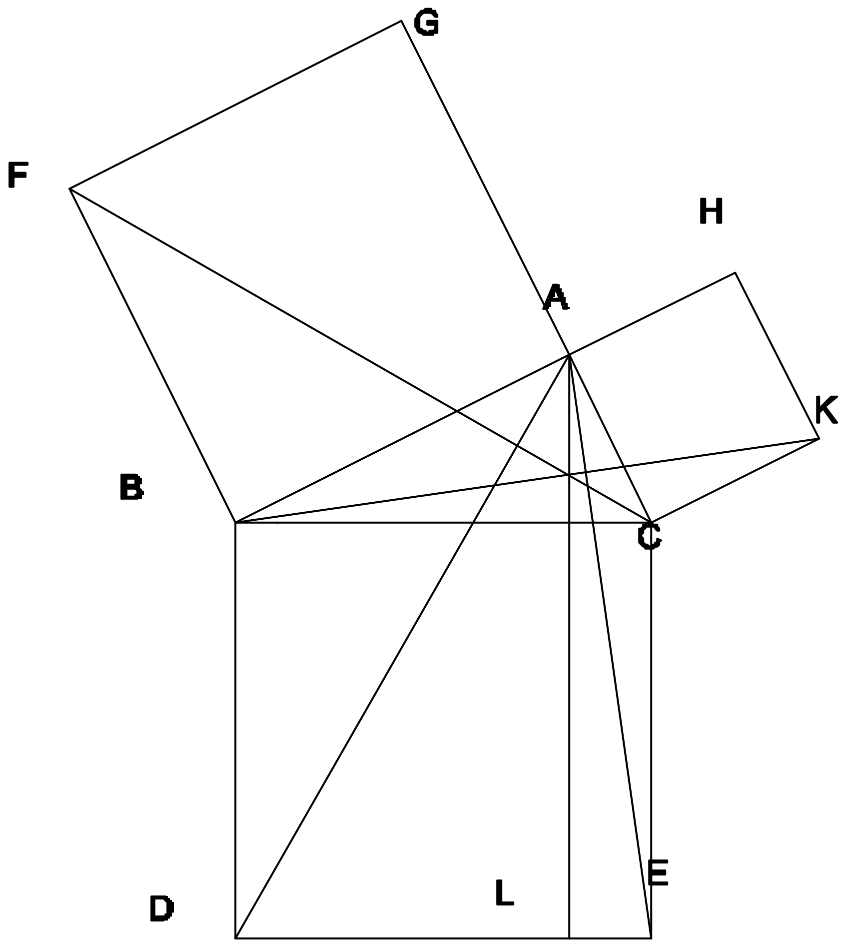
Perspectiva socio-cultural.

<In rectangulis triangulis, quod a latere rectum angulum subtendente describitur, quadratum aequale est quadratis quae a lateribus rectum angulum continentibus describuntur.>

Este trabajo es consecuencia del Proyecto de Innovación "Fundamentación social e histórica de las Matemáticas", financiado por el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Sevilla.

Así se enuncia el Teorema (de Pitágoras) de la proposición XLVII del Libro Primero de la Edición de los "Euclidis Elementorum", versión latina de Federici Commandini de 1.756.

La demostración de Euclides del Teorema de Pitágoras se basa en la figura siguiente:



Se demuestra mediante la equivalencia de áreas.

El triángulo ACE, al girarlo 90ª en sentido positivo tomando como centro de giro C, se transforma en el triángulo KCB, por lo que el área de ambos es igual.

En el triángulo ACE, considerando la base CE, se tiene que AL es paralela a la base, por lo que EL es la altura del mismo.

Por ello, área de ACE = ½(CE) (EL) = ½(área del rectángulo de diagonal CL)

En el triángulo KCB, considerando la base CK, se tiene que BH es paralela a la base, por lo que HK es la altura del mismo.

Por ello, área de KCE = ½(CK) (HK) = ½(área del cuadrado de diagonal CH)

Al ser ambos triángulos iguales por giro, tomando el doble de los últimos valores, tenemos que : área del rectángulo CL = área del cuadrado CK.

Por los mismos motivos, considerando ahora el triángulo ABD, se llega a la conclusión de que : área del rectángulo BL = área del cuadrado BG.

Sumado ambas igualdades, se tiene:

área del cuadrado BE = área del cuadrado CK + área del cuadrado BG.

C.q.d.

El Teorema de Pitágoras, fue según Colerus (1.972, pag 34) en sí y para sí un verdadero trampolín para ulteriores descubrimientos durante muchos lustros. Se convirtió en el "pons asinorum", el puente de los asnos. Del teorema nació ese nuevo y extraño número, el número irracional, y el mero hecho de que los pitagóricos empezaran a estudiar la teoría de los números, aunque al principio sólo fuera con fines místicos, fue ya un acontecimiento importante para el progreso de las matemáticas.

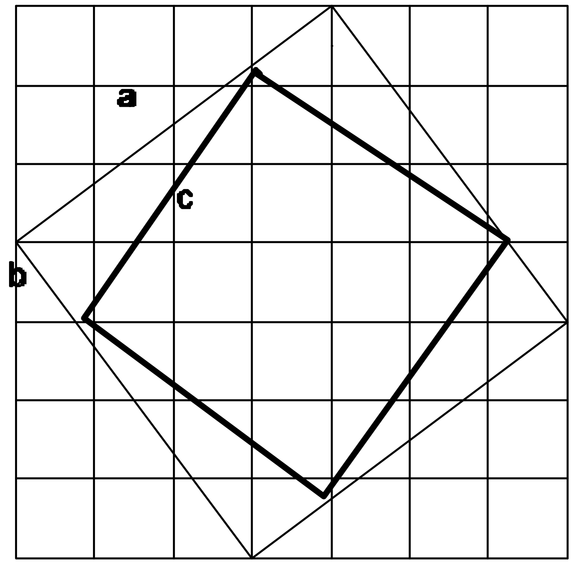
Amiot y otros (1.992, pag 1) lo denominan también "puente de los asnos", e indican que es ciertamente el teorema más popular de las Matemáticas. Según ellos, es seguramente uno de los últimos vestigios de cultura matemática que sigue en toda persona que deje de estudiar y que no tenga ocasión de practicarlas.

Según Loomis (1.968, pag 269), existen 370 demostraciones del Teorema, de las que 109 son algebraicas, 255 geométricas, 4 cuaterniónicas y 2 dinámicas.

Indican Loomis (1.968, pag 262) y Ziman (1.976, pag 23) que The Book of Chou

Pei Suan King, probablemente escrito alrededor del 40 A.C., contiene una demostración del Teorema, siendo atribuido por una tradición oral a una fuente anterior a la griega.

La demostración de Shou Peí está basada en el dibujo siguiente:



La demostración se basa en la descomposición del cuadrado de lado a + b en el cuadrado de lado c y cuatro triángulos de base b y altura a.

Está realizado en molde, con esas ligeras deformaciones tal y como se aprecia. Según Ziman (op. cit, pag 22), durante milenios se construyeron pirámides y templos en Egipto y Mesopotamia. Los hábiles constructores en piedra que usaron estas herramientas debieron sin duda estimar el uso práctico del triángulo (3,4,5) para construir un ángulo recto. La misma palabra *geometría* no significa otra cosa que "medida de la tierra". La hazaña intelectual de los matemáticos griegos que transformaron este arte práctico en un sistema lógico es digno de admiración.

Según Pla (1.995, pag 836), Edwards(1.995, pag28) y Amiot y otros (op. cit., pag

2), el teorema era conocido en Babilonia alrededor de 1.500 A.C. En una tablilla (la Plimpton 322) de arcilla que se conserva en la Universidad de Columbia y que fue descifrada en 1.945, se tienen "ternas pitagóricas" , como la 4961, 6480 y 8161, lo que indica que tenían algún método para hallarlas (Edwards, op.cit).

De todo lo que antecede se puede concluir que el Teorema de Pitágoras era conocido en diversas culturas. Zárate (1.996, pag 128) señala que a través de la historia de las matemáticas, y en diversas latitudes, a este teorema se le ha dado relevante importancia. De hecho, según Amiot y otros (op. cit. Pag 2), tal denominación del Teorema es de principios del siglo XX.

A pesar de la afirmación de estos autores, en Cortázar (1.884, pag 62) se tiene:

"Teorema 70, llamado de Pitágoras:

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa AC es igual a la suma de los cuadrados de los catetos AB y AC."

Siguiendo a Heat (1.947), Pitágoras de Samos vivió según entre los años 572 a 497 A.C. Según Colerus (op. cit., pag 13) viajó mucho, estando en Egipto, siendo acogido por las órdenes sacerdotales. Luego dicen las anécdotas que fue hecho prisionero y enviado a Babilonia. Regresó ciertamente y en Crotona funda su misteriosa escuela esotérica que es recordada en la película "Donald en el país de las Matemáticas" (Donald in Mathemagic land) (1.992) de Walt Disney.

Indica Colerus (op. cit. Pag 21), todo el mundo conoce el enunciado del famoso teorema... La pregunta planteada por Schopenhauer porqué existe esa relación, no tiene respuesta... El porqué sigue siendo un misterio. Las propiedades de una figura geométrica residen en su propia naturaleza, en el concepto de la figura que nosotros nos hemos formado de ella. Preguntas así no tienen sentido por lo tanto.

Perspectiva desde la Teoría de Números.

Beiler (1.966, pag 104-134), Courant y Robbins (1.971, pag 48-50) así como Rademacher y Toeplitz (1.970, pag 129-139) , se ocupan de las ternas pitagóricas elementales, es decir conjuntos de tres números naturales primos entre sí para los que se verifique el teorema de Pitágoras.

De los citados, Beiler estudia numerosas propiedades de las ternas. Así, por ejemplo, se pregunta: ¿Qué ternas tienen los catetos consecutivos?

Una de las fórmulas para obtener dichas ternas (en general), que nos dan los autores citados viene dada por dos números naturales cualesquiera de distinta paridad

$$m > n, \text{ es : } a = m^2 - n^2 , b = 2 m n , c = m^2 + n^2.$$

Los valores m=2, n=1 son los más simples y nos dan la terna 3,4,5 que era conocida, teniendo en cuenta lo señalado por Colerus (op. cit., pág 13) en Egipto, siendo usada por sus arquitectos, agrimensores y delineantes para trazar ángulos rectos. Tal terna no sólo tiene consecutivos sus catetos, sino también la hipotenusa es consecutiva al cateto mayor. Se pregunta Beiler (op. cit., pag 122) si tal circunstancia volverá a ocurrir. Veamos que no es así.

Analiza Beiler que si fuese para otros valores $a = m^2 - n^2$, $a + 1 = 2 m n$, $a+2 = m^2 + n^2$, sumando el primero y el tercero, sería: $2 a + 2 = 2 m^2$, es decir, $a + 1 = m^2$, y restándole al tercero el primero, tendríamos: $2 = 2 n^2$, es decir: $n^2 = 1$, $n = 1$.

Luego es : $a + 1 = m^2 = 2 m n$. De donde: $m = 2 n = 2 * 1 = 2$.

O sea, la única terna con sus tres valores consecutivos es 3, 4 y 5.

El ser los dos catetos consecutivos, implica que, siendo de nuevo $a = m^2 - n^2$ $b = 2mn$ y $c = m^2 + n^2$, debe ser $m^2 - n^2 + 1 = 2\ mn$, o bien : $2\ mn + 1 = m^2 - n^2$, es decir:

$(m - n)^2 = 2 n^2 - 1$ ó $(m - n)^2 = 2 n^2 + 1$, en resumen debe m y n cumplir la ecuación $(m - n)^2 = 2 n^2$ " 1 denominada ecuación de Pell.

Las ternas que la verifican son infinitas, siendo cada vez más dispersas. Así las primeras que lo hacen son:

n	m	a	b	c
1	2	3	4	5
2	5	21	20	29
5	12	119	120	169
12	29	697	696	985
29	70	4059	4060	5741
70	169	23661	23660	33461
169	408	137903	137904	195025
408	985	803760	803761	1136689
985	2378	4684659	4684660	6625109

Ampliado de Beiler,(op. cit., pag 122).

La situación cambia radicalmente si se trata de que sean consecutivos el cateto mayor y la hipotenusa. Para cada número impar a partir de 3 tomado como a, cateto menor, existe una terna con tal característica.

Tomemos $a = 2p + 1$. Es $a^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1$.

Es : $a^2 = [(2p^2 + 2p + 1) + (2p^2 + 2p)][(2p^2 + 2p + 1) - (2p^2 + 2p)]$

O sea: $a^2 = (2p^2 + 2p + 1)^2 - (2p^2 + 2p)^2$.

Las primeras son:

a	b	c
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85

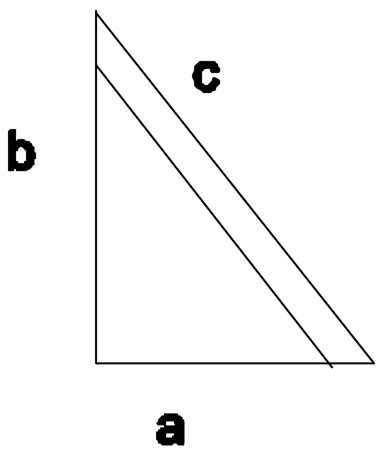
Señalan Boyer (1.987, pag 81), además de Amiot y otros (op.cit, pag 1) que J.Kepler (1.571,1.630)escribió:

> *<La geometría guarda dos grandes tesoros: uno es el Teorema de Pitágoras y el otro la división de una línea en media y extrema razón. El primero es comparable a una medida de oro. El segundo a una preciosa joya.>*

Pues bien, existe una relación matemática entre ambas. Sánchez (1.994, pag 116) propone (algo modificado) el siguiente problema:

Hallar dos triángulos rectángulos que tengan exactamente cinco elementos de uno iguales a cinco elementos del otro (llamando así a los tres lados y tres ángulos) y el sexto desigual. Calcular la razón de semejanza.

Evidentemente, los dos triángulos deben tener un lado desigual (pues si los lados fuesen los tres iguales, los ángulos también lo serían), por lo que los tres ángulos deben ser iguales.



Triángulos semejantes con cinco elementos iguales

Tomemos a, b y c los dos catetos y la hipotenusa del triángulo "mayor". Evidentemente es c el elemento que no puede tener el triángulo "menor", por lo que b debe ser la hipotenusa y a el cateto mayor de este (ver figura). Por tanto sea d el cateto menor del triángulo "menor".Así pues tenemos dos triángulos rectángulos de lados a b c y d a b , cuyos ángulos son iguales. Calculemos la razón de semejanza.

Es : $a / d = b / a = c / b = r$.

Luego debe ser: $a = d\,r$; $b = a\,r$; $c = b\,r$.

Tenemos : $b = a\,r = d\,r\,r = d\,r^2$; $c = b\,r = d\,r^2\,r = d\,r^3$.

Así pues, tenemos los valores de a, b y c en función de d y r. Debido a ser lados de un triángulo rectángulo y verificar el Teorema de Pitágoras, debe ser:

$c^2 = a^2 + b^2$. Es decir: $(d\,r^3)^2 = (d\,r)^2 + (d\,r^2)^2$. Dado que es $d > 0$ y $r > 0$, podemos simplificar la expresión dividiéndola por $(d\,r)^2$. Nos queda así:

$r^4 = 1 + r^2$. Ecuación bicuadrada que se resuelve tomando $t = r^2$.

$t^2 - t - 1 = 0$. Es:

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = f$$

Luego el valor de r es $r = \sqrt{\Phi}$

Se establece así una relación entre el número de oro y el Teorema de Pitágoras.

Perspectivas basadas en la circunferencia.

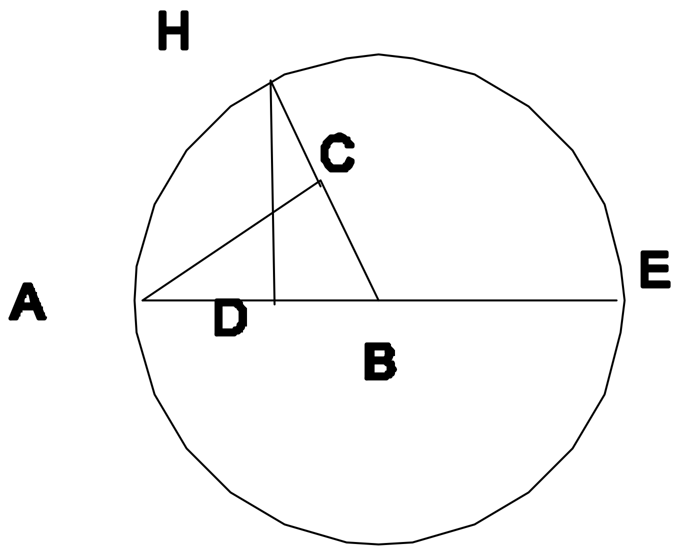
Consideremos dos demostraciones de las treinta y dos que ofrece Loomis (op. cit. pag 60-80).

La propuesta como número 55 de las demostraciones algebráicas es:

Tomamos B como centro de la circunferencia y la hipotenusa como radio.

Prolongando BC hasta encontrar la circunferencia en H, a partir de H trazamos la perpendicular a AB que la cortará en D.

El triángulo HBD, por construcción, es igual al ABC, pues los ángulos D y C son rectos, el ángulo B es común, y las hipotenusas HB y AB son radios de la circunferencia.



Circunferencia 1

Si consideramos los triángulos AHD y HED rectángulos en D y semejantes por tener los ángulos A = H y H = E al ser AHE recto por abarcar una semicircunferencia, sus lados son proporcionales, siendo:

HD = b, AD = AB - DB = c - BC = c - a

ED = EB + BD = c + CB = c + a HD = b .

De la semejanza de los dos triángulos, tenemos :

$$\frac{b}{c-a} = \frac{c+a}{b}$$

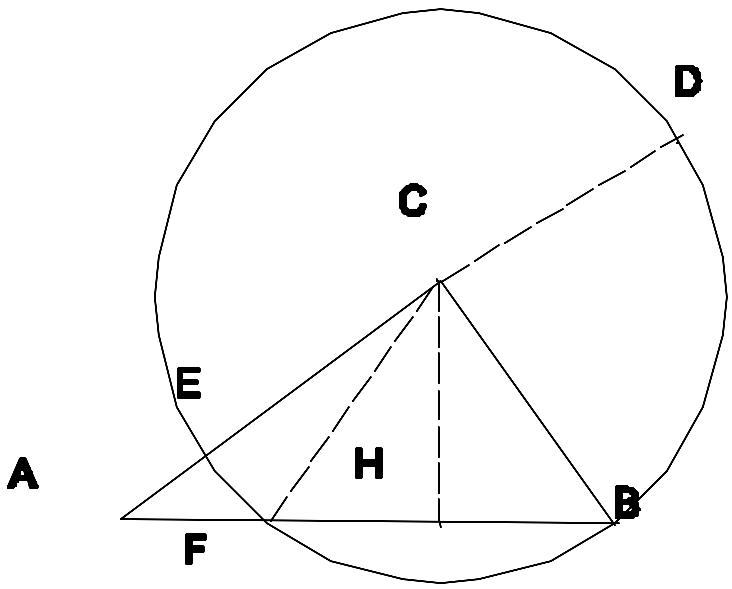
De donde tenemos: $b^2 = (c-a)(c+a)$, es decir, que $b^2 = c^2 - b^2$.

C.q.d.

La segunda demostración que analizamos se basa en el siguiente razonamiento:

Demostración número 71 de las algebráicas:

Tomemos C como centro de la circunferencia y CB (siendo CB el cateto menor) como radio (ver Circunferencia 2).



Circunferencia 2

Los triángulos AEF y ABD son semejantes, pues tienen el ángulo A común, y el ángulo E de AEF es igual al ángulo B de ABD.

Veámoslo. El ángulo E se denomina periférico (Bruño, 1.950, pág 86). Es:

AÊF = 180º - DÊF = 180º - (ARCO ABARCADO POR DÊF)/2 =

180º - (FBD)/2 = (360º - FBD) / 2 = (ARCO ABARCADO POR DEF)/2.=

Ángulo DBF. C.q.d.

Naturalmente el tercer ángulo F de AEF es igual al tercero D de ABD.

Pues bien al ser semejantes ambos, tenemos la siguiente proporción:

AD / AB = AF / AE.

Es AD = AC + CD = AC + CB = b + a

AB = c

AF = c - 2 HB . El valor de HB se obtiene al considerar que los triángulos HBC y CBA son semejentes al ser rectángulos y tener el ángulo B común. De todo ello, se sigue:

HB / BC = BC / BA. Es decir: HB / a = a / c.

Por ello: $HB = a^2 / c$.

Luego es $AF = c - 2a^2 / c$.

AE = AC - CE = AC - CB = b - a .

La proporción anterior queda de esta manera:

$(b + a) / c = (c - 2a^2 / c) / (b - a)$.

Realizando operaciones: $(b + a)(b - a) = c(c - 2a^2 / c)$.

Es decir: $b^2 - a^2 = c^2 - 2a^2$. Y al fin: $b^2 + a^2 = c^2$ C.q.d.

REFERENCIAS

AMIOT, M. y otros (1.992): *Theme: le Theoreme de Pithagore,* IREM. Aubiere.

BEILER, A.H. (1.966): *Recreations in the Theory of Numbers,* Dover. New York.

BOYER, C. (1.987): *Historia de la Matemática.* Alianza Editorial, Textos.Madrid.

BRUÑO, G.M. (1.950). *Tratado de geometría. Tercer Grado,* Madrid.

COLERUS, E. (1.972): *Breve Historia de las Matemáticas,* Doncel. Madrid.

CORTÁZAR, J. (1.884): *Tratado de Geometría Elemental,* Librería de Hernando. Madrid.

COURANT R. y ROBINS, H. (1.971): *¿Qué es la matemática?,* Aguilar. Madrid.

Donald en el país de las Matemáticas (Donald in mathemagic land)(1.992). Buenavista Home Video. Madrid.

DUNHAM, W. (1.995): *El Universo de las Matemáticas,* Pirámide. S.A. Madrid.

EDWARDS, H. M. (1.995):<< Pierre de Fermat>>. *Investigación y Ciencia* (Temas 1) (pag 26-34).

Euclidis Elementorum (1.756) Versione Latina Federici Commandini. Glasguae.

HEAT, T.L.(1.947): *Matemáticas y Astronomía*, Ediciones Pegaso. Madrid.

LOOMIS, E.S. (1.968) *The pithagorean proposition*, N.C.T.M. Washington, D.C.

PLA I CARRERA, J. (1.995) <<Sherlok Holmes y Pitágoras en Mesopotamia>>. *Mundo Científico* 161 (pag 836-845).

RADEMACHER, H. Y TOEPLITZ, O. (1.970): *Números y figuras*, Alianza Editorial. Madrid.

Sánchez, G. (1.994): *Métodos gráficos de resolución de problemas geométricos,* Curso organizado por la SAEM THALES con la colaboración del CEP de Sevilla y el I.B. Fernando de Herrera. Sevilla.

ZÁRATE, E. (1.996): Generalización del Teorema de Pitágoras en Educación Matemática (Vol. 8 nº 2, pag 127-144).

ZIMAN, J. (1.976) *La fuerza del conocimiento,* Alianza Editorial, Madrid.