Universidad de Sevilla

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Programación Matemática Aplicada a las Finanzas

Autor:
Daniel Ruiz Coronel

Tutor:
Justo Puerto

8 de septiembre de 2015

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La optimización es una rama de la investigación operativa que cuenta con una amplia variedad de aplicaciones y de algoritmos eficientes. Matemáticamente, se refiere a la minimización (o maximización) de una función objetivo que depende de varias variables de decisión que satisfacen ciertas restricciones.
Las variables de decisión, la función objetivo y las restricciones son tres elementos esenciales de cualquier problema de optimización. Los problemas que carecen de restricciones se denominan problemas de optimización sin restricciones, mientras que a menudo hablamos sobre problemas de optimización con restricciones. Los problemas sin funciones objetivo se llaman problemas de factibilidad. Algunos problemas pueden tener varias funciones objetivo, estos problemas se abordan a menudo reduciéndolas a un problema de optimización con un solo objetivo.
Si las variables de decisión de un problema de optimización se limitan a números enteros tenemos un problema de optimización discreta o entera. Si no hay tales restricciones en las variables, el problema es un problema de optimización continua. Por supuesto, algunos problemas pueden tener una mezcla de variables discretas y continuas. Continuamos con una lista de las clases de problemas que vamos a encontrar en esta memoria.

1.1. Problemas de Optimización

Comenzamos con una descripción genérica de un problema de optimización. Dada una función $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y un conjunto S $\subset \mathbb{R}^n$, el problema de encontrar un $x^* \in \mathbb{R}^n$ que resuelve:

$$\begin{aligned} &\min_x f(x) \\ &s.t. \ x \in S \end{aligned} \tag{1.1}$$

se llama un problema de optimización (OP). Nos referimos a f como la función objetivo y a S como la región factible. Si S está vacío, el problema se dice no factible. Si es posible encontrar una secuencia $x^k \in$ S tal que $f(x^k) \to -\infty$ cuando k $\to +\infty$ entonces el problema no está acotado. Si el problema no es factible ni está acotado, entonces podemos encontrar una solución $x^* \in$ S que satisface:

$$f(x^*) \leq f(x), \ \forall x \in S.$$

tal x^* se llama un minimizador global del problema (OP). Si

$$f(x^*) < f(x), \ \forall x \in S, \ x \neq x^*$$

entonces x^* es un minimizador global estricto. En otros casos, sólo podemos encontrar una $x^* \in S$ que satisface:

$$f(x^*) \leq f(x), \ \forall x \in S \cap B_{x^*}(\epsilon)$$

para algún $\epsilon > 0$, donde $B_{x^*}(\epsilon)$ es la bola abierta con radio ϵ y centrado en x^*. Tal x^* se llama un minimizador local del problema (OP). Un minimizador local estricto se define de manera similar.

Existen muchos factores que afectan si los problemas de optimización se pueden resolver de manera eficiente. Por ejemplo, el número de variables de decisión, y el número total de restricciones, son generalmente buenos predictores de lo difícil que será resolver un problema de optimización. Los problemas con restricciones y objetivos lineales son considerados fáciles, también lo son los problemas con funciones objetivo convexas. Por esta razón, en lugar de los algoritmos generales de optimización, los investigadores han desarrollado diferentes algoritmos para problemas con características especiales.

1.1.1. Programación Lineal

Uno de los problemas más comunes y fáciles es la programación lineal (PL). La PL es el problema de optimización de una función objetivo lineal sujeta a restricciones de igualdad y desigualdad lineales. Esto corresponde al caso en el OP donde las funciones f y g_i son lineales, donde se denota por g_i a las funciones de las restricciones. Si f o uno de los g_i no es lineal, entonces el problema resultante es un problema de programación no lineal (NLP). La forma estándar de la PL es la siguiente:

$$\begin{aligned} (PL) \qquad & \min_x c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde A $\in \mathbb{R}^{mxn}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ son dados, y x $\in \mathbb{R}^n$ es el vector variable a determinar. Un k-vector será como una matriz kx1. Para una matriz M_{mxn}, la notación M^T es la matriz traspuesta, es decir, una matriz nxm con entradas $M^T_{ij} = M_{ji}$. La formulación c^T es una matriz 1xn y c^Tx es una matriz 1x1 con valores $\sum_{j=1}^n c_j x_j$. El objetivo en (1.2) es minimizar la función lineal $\sum_{j=1}^n c_j x_j$. Al igual que con OP, el problema PL se dice que es factible si sus restricciones son consistentes y se llama ilimitada si existe una secuencia de vectores factibles $\{x_k\}$ tal que $c^T x^k \to -\infty$. Cuando PL es factible pero no ilimitada tiene una solución óptima, es decir, un vector x que satisface las restricciones y minimiza el valor objetivo entre todos los vectores factibles.

1.1.2. Programación Cuadrática

Un problema de optimización más general es la optimización cuadrática o el problema de programación cuadrática (PQ), donde la función objetivo es ahora una función cuadrática de las variables. La forma PQ estándar se define como sigue:

$$\begin{aligned} (PQ) \qquad min_x \ \frac{1}{2}x^T Q x \ + \ c^T x & \\ Ax \ = \ b & \\ x \ \geq \ 0 & \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde A $\in \mathbb{R}^{mxn}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$, $y \ x \in \mathbb{R}^n$. Ya que x^TQx $= \frac{1}{2}x^T(Q + Q^T)x$, podemos asumir sin perdida de generalidad que Q es simétrico, i.e, $Q_{ij} = Q_{ji}$.
La función objetivo del problema PQ es una función convexa de x cuando Q es una matriz semidefinida positiva, es decir, cuando y^TQy ≥ 0 para todo y. Esta condición es equivalente a que Q tiene valores no negativos. Cuando se satisface esta condición, el problema PQ es un problema de optimización convexa y se puede resolver en tiempo polinómico. Los algoritmos de tiempo polinómico son eficientes en el sentido de que siempre podemos encontrar una solución óptima en cierto tiempo que garantiza que sea a lo sumo una función polinómica del tamaño de entrada.

1.2. Matemáticas Financieras

El estudios de las finanzas modernas se ha convertido en una cuestión cada vez más técnica, que requiere el uso de herramientas matemáticas sofisticadas tanto en la investigación como en práctica. Muchos encuentran las raíces de esta tendencia en los modelos de selección de carteras y métodos descritos por Markowitz en la década de 1950. Por el enorme efecto que estos resultados han tenido en la práctica financiera moderna, Markowitz fue galardonado con el premio Nobel de Economía en 1990. A continuación, presentamos los temas en finanzas que son especialmente adecuados para el análisis matemático.

1.2.1. Selección de Portfolios y Asignación de Activos

Como el mismo nombre indica, activo es algo o alguien que actúa. Sin embargo, cuando hablemos de un activo financiero debemos entender que se trata de un contrato que representa un derecho económico o una inversión para quien entrega cierta cantidad de un bien (dinero, parte de una compañía, un inmueble, etc.). Además, un activo financiero puede ser tomado al mismo tiempo como un mecanismo de financiación para quien lo emite, pensemos por ejemplo en las acciones de alguna compañía. En este caso quien expide las acciones está dando ciertos derechos sobre la compañía, a cambio de cierta cantidad de efectivo.
A la entidad o persona que expide un contrato de este tipo se le conoce como el emisor. Este sujeto adquiere una obligación de carácter económico con la persona o entidad que adquiere el título, y a la cual se le denomina tenedor.
Tipos de activos
Existen varios tipos de activos dentro del sistema económico-financiero. Algunos de los más importantes son los que mencionamos a continuación: Acciones, divisas, bonos, títulos de tesorería, pagarés, papeles comerciales, certificados de depósito.
Algunos de estos activos son muy apreciados por los agentes económicos debido a las propiedades intrínsecas de carácter financiero que poseen. Estos consumidores muestran su deseo de adquisición en base a la cantidad de dinero que están dispuestos a pagar por tales “mercancías”. De esta manera, cabe pensar en el precio que deben tener los activos más demandados con la finalidad de mantener un equilibrio en el mercado de valores. Es así que surge toda un área de estudio en economía, finanzas y matemáticas enfocada en encontrar tal precio.

Dentro de la matemática financiera uno de los objetos de estudio más importante por su utilidad y su interpretación son los portafolios o cartera de valores. De hecho, este concepto puede catalogarse como universal dentro de las finanzas matemáticas. En forma general podemos decir que un portafolio es un conjunto de instrumentos financieros en el que un determinado participante del mercado de valores coloca sus inversiones para su posterior intercambio.

La teoría de la selección óptima de las carteras fue desarrollado por Harry Markowitz en la década de 1950. Su trabajo formalizó el principio de diversificación en la selección del portafolio y, como se mencionó anteriormente, le valió el premio Nobel de Economía 1990.

1.2.2. Precios y Hedging de Opciones

Primero empezamos con una descripción de algunas de las opciones financieras. Una opción de compra europea es un contrato con las siguientes condiciones:

- En un momento prescrito en el futuro, conocida como la fecha de caducidad, el titular de la opción tiene el derecho, pero no la obligación de:
- comprar un activo prescrito, conocido como el subyacente, por una
- cantidad prescrita, conocido como el precio de ejercicio.

Una opción de venta europea es similar, excepto que confiere el derecho de vender el activo subyacente. Una opción americana es como una opción europea, pero puede ser ejercida en cualquier momento antes de la fecha de caducidad.
Ya que la recompensa de una opción depende del valor del activo subyacente, su precio también está relacionado con el valor actual y el comportamiento esperado de este activo subyacente. Para encontrar el valor razonable de una opción, tenemos que resolver un problema de precios. Cuando hay un buen modelo para el comportamiento del activo subyacente, el problema de valoración de

opciones se puede resolver utilizando técnicas matemáticas sofisticadas.
Los problemas de valoración de opciones a menudo se resuelven utilizando la siguiente estrategia. Tratamos de determinar un portafolio con precios conocidos que, si se actualiza correctamente a través del tiempo, producirán la misma recompensa que la opción. Ya que el portafolio y la opción tendrán los mismos beneficios finales, llegamos a la conclusión de que deben tener el mismo valor en la actualidad y por lo tanto podemos obtener el precio de la opción. Un portafolio que produce la misma ganancia que un instrumento financiero determinado se llama una cartera replicante (o un hedge) para ese instrumento. Encontrar el portafolio no siempre es fácil y lleva a un problema de replicación (hedging).
Veamos un ejemplo sencillo para ilustrar estas ideas. Supongamos que una parte de la acción XYZ está valorado actualmente en 40€. El precio de XYZ en un mes a partir de hoy es aleatorio. Supongamos que su valor se duplicará o se reducirá a la mitad, con probabilidades iguales.

$$\begin{tikzcd}
 & 80 = S_1(u) \\
S_0 = 40 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 20 = S_1(d)
\end{tikzcd}$$

Compramos una opción de compra europea de una acción de XYZ por 50€ al mes a partir de hoy. ¿Cuál es el precio justo de esta opción?
Supongamos que podemos pedir prestado o prestar dinero sin intereses entre hoy y el próximo mes, y que podemos comprar o vender cualquier cantidad de las acciones XYZ sin comisiones. Estos son parte de los supuestos "mercado sin fricción" que vamos a abordar más tarde.
Para resolver el problema de valoración de opciones, tenemos en cuenta el siguiente problema de hedging: ¿Podemos formar un portafolio de la acción subyacente hoy y efectivo, de manera que la rentabilidad del portafolio en la fecha de caducidad de la opción coincida con el pago de la opción? Tenga en cuenta que la rentabilidad de la opción será de 30€ si el precio de la acción sube y 0€ si cae. Si suponemos que este portafolio tiene Δ acciones de XYZ y B€ en efectivo, entonces tendría un valor de 40Δ + B en la actualidad. El próximo mes, los pagos de esta cartera serán:

$$\begin{tikzcd}
 & 80\Delta + B = P_1(u) \\
P_0 = 40\Delta + B \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 80\Delta + B = P_1(u)
\end{tikzcd}$$

Vamos a elegir un Δ y un B tal que:

$$\begin{aligned}
80\Delta \ + \ B \ &= \ 30 \\
20\Delta \ + \ B \ &= \ \ 0
\end{aligned}$$

por lo que el portafolio replica la rentabilidad de la opción en la fecha de caducidad. Esto le da a $\Delta = \frac{1}{2}$ y B = -10, que es la cartera que estábamos buscando. Esta cartera vale P_0 = 40Δ + B = 10$ hoy, por lo tanto, el precio razonable de la opción también debe ser de 10$.

Capítulo 2

Programación Lineal

2.1. Financiación A Corto Plazo

Un problema que puede tratarse mediante la programación lineal es el de la planificación de tesorería. El problema de la planificación financiera a corto plazo, o tesorería, intenta encontrar un equilibrio entre los flujos de entradas y salidas de fondos de la empresa. El problema tiene dos componentes principales:

- Por una parte hay que prever la cantidad de dinero necesaria para hacer frente a las necesidades,
- Por otra hay que decidir de qué fuentes se va a conseguir ese dinero. En la selección de estas fuentes entra como parte importante la consideración del coste de los fondos.

Entre las fuentes de financiación a corto plazo más habituales están: El descuento de papel comercial, el aplazamiento de pagos concedido por los proveedores, las líneas de crédito, los préstamos.
El propósito inicial es decidir entre varias fuentes de financiación tratando de tener el menor coste posible, teniendo en cuenta que se deben satisfacer unas necesidades de liquidez para hacer frente a unos pagos determinados al final de cada periodo; y que existen también unas restricciones sobre las fuentes de financiación.
Suponemos que la empresa mantiene el adecuado equilibrio del circulante, pero que el flujo de entradas y salidas de fondos no tiene por qué estar ajustada diariamente, así que tiene que prever de alguna manera el origen de los fondos necesarios a una fecha dada.
En particular vamos a suponer que la empresa debe hacer frente a unos pagos ineludibles al final de cada periodo, como pueden ser nóminas, o impuestos. Para conseguir la liquidez necesaria puede conseguir financiación de dos modos:

- dinero procedente de la actividad mercantil de la empresa, materializado en papel comercial que puede descontar en el banco,
- dinero procedente de un crédito o préstamo bancario.

La programación lineal puede ayudar a encontrar la combinación óptima de los instrumentos financieros para cumplir con estos compromisos. Para ilustrar esto, seguimos un ejemplo muy pequeño. Consideremos el siguiente problema:
Una empresa tiene el siguiente problema de financiación a corto plazo, donde sabemos que las necesidades de caja cada mes son:

Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Flujo Neto en Efectivo	-150	-100	200	-200	50	300

La empresa cuenta con las siguientes fuentes de fondos:

- Una línea de crédito de hasta 100€ a una tasa de interés del 1 % mensual,

- Se puede emitir papel comercial de 90 días que lleva un total de intereses del 2 % para el período de 3 meses,

- El exceso de fondos pueden ser invertidos a una tasa de interés del 0,3 % mensual.

Hay muchas preguntas que la compañía podría querer responder. ¿Qué pagos de interés tendrá la empresa que hacer entre enero y junio? ¿Es económico utilizar la línea de crédito en algunos de los meses? Si es así, ¿cuándo? ¿Cuánto? La programación lineal nos da un mecanismo para responder a estas preguntas de forma rápida y sencilla. También permite dar respuesta a algunas preguntas sobre los cambios en los datos sin tener que resolver el problema de nuevo. ¿Qué pasaría si el flujo neto de efectivo en enero fuese -200 (en lugar de -150). ¿Qué pasaría si el límite de la línea de crédito se incrementa de 100 a 200? ¿Qué pasaría si el flujo neto de efectivo negativo en enero se debe a la compra de una máquina que vale 150 y el proveedor permite que parte o la totalidad del pago de esta máquina se realiza en junio a un interés del 3 % para el período de 5 meses? Las respuestas a estas preguntas están disponibles cuando este problema se formula y resuelve como un programa lineal. Hay tres pasos en la aplicación de la programación lineal: el modelado, la resolución, y la interpretación.

2.1.1. El Modelado

Para modelar el problema de la financiación a corto plazo se utiliza el lenguaje de programación lineal. Hay reglas acerca de lo que se puede y no se puede hacer dentro de la programación lineal. Estas reglas están para asegurarse de que los pasos del proceso tenga éxito. La clave de un programa lineal son las variables de decisión, objetivos y restricciones.

Variables de decisión: Las variables de decisión representan las decisiones (desconocidas) que se hagan. Esto está en contraste con los datos de problemas, que son valores que, o bien se dan o se pueden simplemente calcular a partir de lo que se da. Para el problema de la financiación a corto plazo vamos a utilizar las siguientes variables de decisión: la cantidad x_i extraída de la línea de crédito en el mes i, la cantidad y_i de papel comercial emitido en el mes i, el exceso de fondos z_i en el mes i y la riqueza v de la compañía en junio.

Objetivo: Cada programa lineal tiene un objetivo. Este objetivo debe ser minimizado o maximizado. Este objetivo tiene que ser lineal en las variables de decisión, lo que significa que debe ser la suma de las constantes de las variables de decisión. 3x1 - 10x2 es una función lineal. x1x2 no es una función lineal. En este caso, nuestro objetivo es simplemente maximizar v.

Restricciones: Cada programa lineal también tiene restricciones que limitan las decisiones factibles. Aquí tenemos tres tipos de restricciones: entrada de efectivo = salida de caja para cada mes, límite superior en x_i y la no negatividad de las variables de decisión x_i, y_i y z_i. Por ejemplo, en enero (i = 1), hay un requisito en efectivo de 150$. Para cumplir con este requisito, la empresa puede sacar una cantidad x_1 de su línea de crédito y emitir una cantidad y_1 de papel comercial. Teniendo en cuenta la posibilidad de exceso de fondos z_1 (posiblemente 0), la ecuación de balance de flujo de caja es el siguiente.

$$x_1 + y_1 - z_1 = 150$$

A continuación, en febrero (i = 2), hay un requisito en efectivo de 100$. Además, se tiene los intereses de $1.01x_1$ debido a la línea de crédito y $1.003z_1$ debido al exceso de los fondos invertidos. Para cumplir con el requisito en febrero, la empresa puede sacar una cantidad x_2 de su línea de crédito y emitir una cantidad y_2 de papel comercial. Así, la ecuación de balance de flujo de efectivo para febrero es la siguiente:

$$x_2 + y_2 - 1{,}01x_1 + 1{,}003z_1 - z_2 = 100$$

Del mismo modo, para marzo, abril, mayo y junio, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$x_3 + y_3 - 1{,}01x_2 + 1{,}003z_2 - z_3 = -200$$
$$x_4 - 1{,}02y_1 - 1{,}01x_3 + 1{,}003z_3 - z4 = 200$$
$$x_5 - 1{,}02y_2 - 1{,}01x_4 + 1{,}003z_4 - z5 = -50$$
$$x_6 - 1{,}02y_3 - 1{,}01x_5 + 1{,}003z_5 - v = -300$$

Tenga en cuenta que x_i es el saldo de la línea de crédito en el mes i, no el interés incremental en el mes i. Del mismo modo, z_i representa los fondos excedentes totales en el mes i. Esta elección de variables es muy conveniente cuando se trata de escribir las restricciones de no negatividad y los límites superiores.

$$0 \leq x_i \leq 100$$
$$y_i \geq 0$$
$$z_i \geq 0$$

Luego tenemos que el modelo final es:

$$\begin{array}{ll}
\max & v \\
 & x_1 + y_1 - z_1 = 150 \\
 & x_2 + y_2 - 1.01x_1 + 1.003z_1 - z_2 = 100 \\
 & x_3 + y_3 - 1.01x_2 + 1.003z_2 - z_3 = -200 \\
 & x_4 - 1.02y_1 - 1.01x_3 + 1.003z_3 - z_4 = 200 \\
 & x_5 - 1.02y_2 - 1.01x_4 + 1.003z_4 - z_5 = -50 \\
 & - 1.02y_3 - 1.01x_5 + 1.003z_5 - v = -300 \\
 & x_1 \leq 100 \\
 & x_2 \leq 100 \\
 & x_3 \leq 100 \\
 & x_4 \leq 100 \\
 & x_5 \leq 100 \\
 & x_i,\, y_i,\, z_i \geq 0
\end{array}$$

La formulación de un problema como un programa lineal significa pasar por el proceso anterior de definir claramente las variables de decisión, objetivos y restricciones.

2.1.2. Resolución

Existen programas informáticos especiales que se pueden utilizar para encontrar soluciones de modelos lineales de programación. El programa más disponible es, sin duda, SOLVER, incluido en todas las versiones recientes del programa de hoja de cálculo Excel. SOLVER es una herramienta razonablemente fácil de usar para la programación lineal. SOLVER utiliza hojas de cálculo estándar para definir las variables, el objetivo y las restricciones. Veamos el modelo descrito anteriormente solucionado en SOLVER.

Variables de decision	x_i	y_i	z_i	v
1	0	150	0	92,4969492
2	50,9803922	49,0196078	0	
3	0	203,434364	351,944167	
4	0		0	
5	0		0	

Objetivo
92,4969492

Restricciones			
Enero	150	=	150
Febrero	100	=	100
Marzo	-200	=	-200
Abril	200	=	200
Mayo	-50	=	-50
Junio	-300	=	-300
x_1	0	$\leq$	100
x_2	50,9803922	$\leq$	100
x_3	0	$\leq$	100
x_4	0	$\leq$	100
x_5	0	$\leq$	100

2.1.3. Interpretación

Vamos a interpretar ahora las salidas que nos da SOLVER. Una vez planteado nuestro problema y resuelto con SOLVER, le decimos que nos de su salida de sensibilidad, donde podemos resolver muchas de las dudas planteadas anteriormente. Nuestro archivo de sensibilidad de dicho problema es:

Microsoft Excel 12.0 Informe de sensibilidad

Hoja de cálculo: [Libro2.xlsx]Hoja1

Informe creado: 10/08/2015 19:24:30

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Coste reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Disminución permisible
B2	x_1	0	-0,003213864	0	0,003213864	1E+30
B3	x_2	50,98039216	0	0	0,003182043	0
B4	x_3	0	-0,007118643	0	0,007118643	1E+30
B5	x_4	0	-0,003150847	0	0,003150847	1E+30
B6	x_5	0	0	0	0	1E+30
C2	y_1	150	0	0	0,003997536	0,003213864
C3	y_2	49,01960784	0	0	0	0,003182043
C4	y_3	203,4343636	0	0	0,007069307	0
D2	z_1	0	-0,003997536	0	0,003997536	1E+30
D3	z_2	0	-0,00714	0	0,00714	1E+30
D4	z_3	351,9441675	0	0	0,00393091	0,003160299
D5	z_4	0	-0,003919153	0	0,003919153	1E+30
D6	z_5	0	-0,007	0	0,007	1E+30
E2	v	92,49694915	0	1	0	1

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Precio Sombra	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Disminución permisible
B11	ENERO	150	-1,037288136	150	89,17189542	150
B12	FEBRERO	100	-1,0302	100	49,01960784	50,98039216
B13	MARZO	-200	-1,02	-200	90,68328348	203,4343636
B14	ABRIL	200	-1,016949153	200	90,95533333	204,0446667
B15	MAYO	-50	-1,01	-50	50	52
B16	JUNIO	-300	-1	-300	92,49694915	1E+30
B17	x_1	0	0	100	1E+30	100
B18	x_2	50,98039216	0	100	1E+30	49,01960784
B19	x_3	0	0	100	1E+30	100
B20	x_4	0	0	100	1E+30	100
B21	x_5	0	0	100	1E+30	100

Este informe es bastante fácil de leer: la riqueza v de la compañía en junio será 92,497€. Este es el valor final del objetivo. Para lograrlo, la empresa emitirá 150,000€ en papeles comerciales en enero, 49,000€ en febrero y 203,400€ en marzo. Además, se elaborará 50,980€ de su línea de crédito en febrero. El exceso de dinero en efectivo se invertirá en un solo mes, que es marzo con 351,944€. Todo esto se informa en la sección de celdas cambiantes del informe, en la columna de Valor Igual.

Recordemos que con el fin de formular un problema como un programa lineal, hemos tenido que suponer unos ciertos valores. A menudo, este supuesto es algo dudoso: los datos podrían ser desconocidos, o estimados de manera inexacta. ¿Cómo podemos determinar el efecto sobre las decisiones óptimas si los valores cambian? Es evidente que algunos números en los datos son más importantes que otros. ¿Podemos encontrar los números "importantes"?

Las columnas clave para el análisis de sensibilidad son coste reducido y precio sombra. El precio sombra u de una restricción C tiene la siguiente interpretación:

Si el lado derecho de la restricción C cambia en una cantidad Δ, el valor objetivo óptimo cambia por $u\Delta$.

Sin embargo, el precio sombra u es una cifra exacta, cuando la cantidad de cambio Δ está dentro del rango permitido dado en las dos últimas columnas de la salida SOLVER podemos calcular el valor objetivo de dicha forma, en cambio, cuando el cambio cae fuera de este rango, el precio sombra u no se puede utilizar. Cuando esto ocurre, uno tiene que resolver el programa lineal usando los nuevos datos.

A continuación, vemos un ejemplo de lo descrito anteriormente: Supongamos que el flujo Neto de

Efectivo de Enero cambia a -200, luego hay un cambio de 50€, valor que está dentro del aumento permisible. Por otro lado, tenemos que el precio sombra en Enero es u = -1,037288136, así, la riqueza de la compañia decrecerá en 1,0373 x 50,000 = 51,865€.
Supongamos ahora que el límite de crédito aumenta de 100 a 200, es decir, $\Delta = 100$. El aumento permisible es $+\infty$, así que está dentro de los límites permitidos, y tenemos que el valor u = 0. Luego el valor objetivo no variaría.
Supongamos que el flujo de caja neto negativo en enero se debe a la compra de una máquina de un valor de 150,000€. El proveedor permite que el pago se haga en junio a una tasa de interés del 3 % para el período de 5 meses. ¿Aumentaría la riqueza de la empresa o disminuiría mediante el uso de esta opción? ¿Y si la tasa de interés para el período de 5 meses fueron del 4 %?
El precio sombra de la restricción de enero es -1,0373. Esto significa que la reducción de efectivo en enero de 1€ aumenta la riqueza en junio por 1,0373€. En otras palabras, el tipo de interés, para el período de 5 meses es de 3,73 %. Por lo tanto, si el vendedor cobra un 3 %, deberíamos aceptar, pero si cobra el 4 % no debemos. Tenga en cuenta que el análisis es válido ya que la cantidad $\Delta =$ -150 está dentro de la disminución permisible.

Ahora, vamos a considerar los costes reducidos. Las variables básicas siempre tienen un coste reducido igual a cero. Las variables no básicas (que por definición tienen el valor 0) tienen un coste reducido no positiva.
Supongamos que la variable no básica x se establece en un valor positivo Δ en lugar de su valor óptimo 0. Entonces, dado el coste reducido c, el valor objetivo se cambia por cΔ. Por ejemplo, ¿cuál sería el efecto de la financiación de efectivo de enero a través de la línea de crédito? La respuesta está en la reducción del coste de la variable x_1. Debido a que este gradiente reducido -0,0032 es estrictamente negativo, la función objetivo disminuiría. En concreto, cada euro financiado a través de la línea de crédito en enero se traduciría en una disminución de 0,0032€en la riqueza v de la compañía en junio.

Otro ejemplo distinto que podemos resolver con este modelo es el siguiente: Consideremos un restaurante que está abierto los siete días de la semana. Basado en experiencias pasadas, el número de trabajadores que necesita cada día en el restaurante es el siguiente:

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Número	14	13	15	16	19	18	11

Cada trabajador trabaja cinco días seguidos y luego descansa dos, el problema se basa en encontrar el mínimo número de trabajadores que debe contratar el restaurante de forma que cumpla todas las restricciones.
Sea x_i el número de trabajadores que empiezan a trabajar el día i. Luego tenemos las siguientes restricciones.

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 14 \\ x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 &\geq 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 &\geq 16 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 19 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\geq 18 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 11 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Solucionamos nuestro problema con SOLVER, de la siguiente manera:

	Variables						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	4	7	1	4	3	3	0

Objetivo:

22

	Restricciones		
Lunes	14	$\geq$	14
Martes	17	$\geq$	13
Miercoles	15	$\geq$	15
Jueves	16	$\geq$	16
Viernes	19	$\geq$	19
Sabado	18	$\geq$	18
Domingo	11	$\geq$	11

Ahora, podemos observar que el Lunes empiezan a trabajar 4 personas, el martes 7, el miércoles 1, el jueves 4, el viernes 3, el sábado 3 y el domingo ninguna, y que nuestra solución es 22 trabajadores en total.

2.2. Dedicación

El cash-flow matching o casación de flujos de caja es una técnica que procura equilibrar no conceptos medios como la duración, sino los propios flujos de caja. Es decir, si un gestor tiene que pagar dentro de un año una cantidad fija en concepto de pensiones, procurará mantener una cartera que le asegure que obtendrá ese flujo y no otro en esa precisa fecha. En la medida en que los flujos de caja activos y pasivos coincidan, la cartera no tendrá riesgo, en el sentido de que siempre podrá hacer frente a sus pagos.

¿Qué es la dedicación? La dedicación es un caso particular del cash-flow matching, donde lo que se hace es separar la cartera en diversas subcarteras, dedicando cada subcartera a la producción de un flujo que coincida exactamente con los diversos fines que pueda perseguir el inversor. Así, si un inversor necesita producir un cierto pago dentro de un cierto plazo, podrá recurrir a la dedicación como estrategia eliminando parte del riesgo. Obsérvese que con esta técnica consigue que el valor de los pasivos iguales exactamente a las de los activos, con lo que el conjunto de la cartera no sufre ese riesgo. La mecánica normal es la de buscar o construir cupones cero a cada uno de los plazos necesarios para dedicar esa fracción de la cartera a su objetivo. No siempre será sencillo encontrar esos cupones cero, pero si no se dan en el mercado, siempre se pueden replicar sintéticamente. Cabe señalar sin embargo, que las carteras dedicadas cuestan normalmente entre 3 % y 7 % más en términos de euros que hacer carteras "inmunizadas" que se construyen basadas en la coincidencia de valor presente, la duración y convexidad de los activos y de los pasivos. El valor actual de la responsabilidad de L_t, t = 1,...,T es P = $\sum_{t=1}^{T} \frac{L_t}{(1+r_t)^t}$, donde r_t denota la tasa libre de riesgo del año t. Su duración es D = $\frac{1}{P} \sum_{t=1}^{T} \frac{tL_t}{(1+r_t)^t}$ y su convexidad es C = $\frac{1}{P} \sum_{t=1}^{T} \frac{t(t+1)L_t}{(1+r_t)^{t+2}}$.

Intuitivamente, la duración es el tiempo promedio a la que se producen los pasivos, mientras que la convexidad, un poco como la varianza, indica cuán concentrados están los flujos de efectivo sobre el tiempo. Para una cartera que consta sólo de bonos libres de riesgo, el valor de P^* de la cartera futura puede calcularse utilizando la misma tasa libre de riesgo r_t(esto no sería el caso de una cartera que contiene bonos de riesgo). Del mismo modo para la duración D^* y la convexidad C^* de la cartera futura. Una cartera "inmunizada" se basa en la coincidencia de P^* = P, D^* = D y C^* = C. Las carteras que son construidas a través de estos tres factores están inmunizados contra movimientos paralelos de la curva de rendimientos.

Este hecho es utilizado por algunos fondos de pensiones pequeños. Por ejemplo, las empresas a veces quieren financiar los pasivos derivados de bonos que hayan expedido. Cuando las empresas utilizan cash-flow matching, la costumbre estándar es llamar a unos bancos de inversión, enviarles los calendarios de responsabilidad y solicitar ofertas. La empresa luego compra sus valores desde el banco que ofrece el precio más bajo trás un exitoso cahs-flow-matching. Para simplificar la ex-

plicación, vamos a poner un ejemplo sencillo.
Un banco recibe el siguiente calendario de responsabilidad:

Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Año 6	Año 7	Año 8
12.000	18.000	20.000	20.000	16.000	15.000	12.000	10.000

Los bonos disponibles para su compra hoy (año 0) se dan en la siguiente tabla. Todos los bonos tienen un valor nominal de \$100. La cifra cupón es anual. Por ejemplo, Bono 5 cuesta 98€ hoy. Todos estos bonos están ampliamente disponibles y se pueden comprar en cualquier cantidad en el precio indicado.

	Bono 1	Bono 2	Bono 3	Bono 4	Bono 5	Bono 6	Bono 7	Bono 8	Bono 9	Bono 10
Precio	102	99	101	98	98	104	100	101	102	94
Cupon	5	3.5	5	3.5	4	9	6	8	9	7
Caducidad	Año 1	Año 2	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Año 5	Año 6	Año 7	Año 8

Formular y resolver un problema de programación lineal para encontrar la cartera de menor costo de los bonos para la compra de hoy en día, para cumplir con las obligaciones de la empresa durante los próximos ocho años. Para eliminar la posibilidad de cualquier riesgo de reinversión, se asume una tasa de reinversión del 0 %.

2.2.1. El Modelado

Igual que para el modelo de Financiación a Corto Plazo, estudiamos quienes son las variables de decisión, el objetivo y las restricciones.

Variables de decisión: Al igual que en la sección anterior, son las decisiones que debemos determinar para cumplir nuestro objetivo, en este caso tenemos las variables: cantidad x_i de bonos i en la carpeta y z_t es el excedente al final del año t.

Objetivo: En este caso, nuestro objetivo simplemente es cumplir con las obligaciones de la empresa minimizando el coste de los bonos, es decir minimizar $z_0 + \sum_{i=1}^{N} P_i x_i$, donde P_i es el precio del bono i.

Restricciones: Para cada periodo deben obtenerse flujos suficientes de forma que se pueda hacer frente a todos y cada uno de los pagos a realizar, no sólo en cuantía sino también en tiempo. En este caso tenemos una restricción para cada año, para el Año 1 tenemos:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 + c_6x_6 + c_7x_7 + c_8x_8 + c_9x_9 + c_{10}x_{10} + 100x_1 - z_1 + z_0 = L_1$$

donde c_i es el cupón anual de bonos i y L_t es la responsabilidad en el año t. Para los años siguientes, tenemos:

$$\begin{gathered}
c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 + c_6x_6 + c_7x_7 + c_8x_8 + c_9x_9 + c_{10}x_{10} + 100x_2 + 100x_3 - z_2 + z_1 = L_2 \\
c_4x_4 + c_5x_5 + c_6x_6 + c_7x_7 + c_8x_8 + c_9x_9 + c_{10}x_{10} + 100x_24 - z_3 + z_2 = L_3 \\
c_5x_5 + c_6x_6 + c_7x_7 + c_8x_8 + c_9x_9 + c_{10}x_{10} + 100x_5 - z_4 + z_3 = L_4 \\
c_6x_6 + c_7x_7 + c_8x_8 + c_9x_9 + c_{10}x_{10} + 100x_6 + 100x_7 - z_5 + z_4 = L_5 \\
c_8x_8 + c_9x_9 + c_{10}x_{10} + 100x_8 - z_6 + z_5 = L_6 \\
c_9x_9 + c_{10}x_{10} + 100x_9 - z_7 + z_6 = L_7 \\
c_{10}x_{10} + 100x_{10} - z_8 + z_7 = L_8
\end{gathered}$$

Dichas restricciones podríamos resumirlas así:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ M_i > t-1}}^{N} (C_i x_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ M_i = t}}^{N} (100x_i - z_t + z_{t-1}) = L_t$$

donde M_i es el año de caducidad del bono i dado en la tabla anterior.
Nótese que en estas restricciones no aparecen los precios de los títulos. En una estrategia inmunizadora en base a una congruencia absoluta, el fondo inversor debe concentrarse únicamente en los flujos y aunque varíen los precios de los títulos a lo largo de los años, está garantizado el cumplimiento de los compromisos siempre que los flujos sean completos (en cuantía) y puntuales (en vencimiento).

2.2.2. Resolución

Usamos SOLVER para resolver nuestro problema.

	T = Numero de años									
	1	2	3	4	5	6	7	8		
	N = numero de bonos									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	L_t = responsabilidad año T									
	12000	18000	20000	20000	16000	15000	12000	10000		
	P_i Precio del Bono i									
	102	99	101	98	98	104	100	101	102	94
	C_i cupon anual									
	5	3,5	5	3,5	4	9	6	8	9	7
	M_i madurez									
	1	2	2	3	4	5	5	6	7	8
	Variables									
x_i	62,136	0	125,243	151,505	156,808	123,080	0	124,157	104,090	93,458
z_t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	Objetivo									
	93944,50354									
	Restricciones									
	Año 1	12000	=	12000						
	Año 2	18000	=	18000						
	Año 3	20000	=	20000						
	Año 4	20000	=	20000						
	Año 5	16000	=	16000						
	Año 6	15000	=	15000						
	Año 7	12000	=	12000						
	Año 8	10000	=	10000						

Nos encontramos con que podemos hacer frente a los pasivos de la empresa de 93,944€ con la siguiente cartera: 62 Bono 1, 125 Bono 3, 152 Bono 4, 157 Bono 5, 123 Bono 6, 124 Bono 8, 104 Bono 9 y 93 Bono 10.

2.2.3. Interpretación

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Coste reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Disminución permisible
$B14$	x_1	62,136	0	102	2,999999995	5,590909089
$C14$	x_2	0	0,830	99	1E+30	0,830612247
$D14$	x_3	125,243	0	101	0,842650106	3,311081441
$E14$	x_4	151,505	0	98	3,374149659	4,712358277
$F14$	x_5	156,808	0	98	4,917243419	17,2316607
$G14$	x_6	123,080	0	104	9,035524156	3,748170219
$H14$	x_7	0	8,787	100	1E+30	8,786840005
$I14$	x_8	124,157	0	101	3,988878398	8,655456271
$J14$	x_9	104,090	0	102	9,456887407	0,860545483
$K14$	x_{10}	93,458	0	94	0,900020046	56,09891267
$B15$	z_0	0	0,028571429	1	1E+30	0,028571429
$C15$	z_1	0	0,055782313	0	1E+30	0,055782313
$D15$	z_2	0	0,03260048	0	1E+30	0,03260048
$E15$	z_3	0	0,047281187	0	1E+30	0,047281187
$F15$	z_4	0	0,179369792	0	1E+30	0,179369792
$G15$	z_5	0	0,036934059	0	1E+30	0,036934059
$H15$	z_6	0	0,086760435	0	1E+30	0,086760435
$I15$	z_7	0	0,008411402	0	1E+30	0,008411402
$J15$	z_8	0	0,524288903	0	1E+30	0,524288903

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Precio sombra	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Disminución permisible
$B19$	Año 1 Restricciones	12000	0,971428571	12000	1E+30	6524,293381
$B20$	Año 2 Restricciones	18000	0,915646259	18000	137010,161	13150,50805
$B21$	Año 3 Restricciones	20000	0,883045779	20000	202579,3095	15680,77583
$B22$	Año 4 Restricciones	20000	0,835764592	20000	184347,1716	16308,00686
$B23$	Año 5 Restricciones	16000	0,6563948	16000	89305,96314	13415,72748
$B24$	Año 6 Restricciones	15000	0,619460741	15000	108506,7452	13408,98568
$B25$	Año 7 Restricciones	12000	0,532700306	12000	105130,9798	11345,79439
$B26$	Año 8 Restricciones	10000	0,524288903	10000	144630,1908	10000

El precio sombra en el año t es el costo de la cartera de renta fija que se puede atribuir a un euro de la responsabilidad en el año t. Por ejemplo, cada euro de la responsabilidad en el año 3 se encarga de 0,883€ en el costo de la cartera de bonos. Tenga en cuenta que, al fijar el precio sombra en Año t igual a $\frac{1}{(1+r_t)^t}$, obtenemos una estructura temporal de tasas de interés. Aquí $r_3 = 0{,}0423$. La reducción del costo de bonos i indica cuánta importancia i es dada para su inclusión en la

cartera óptima. Por ejemplo, la variable x_2 tendría que ser 0,83€ más baja, en 98,17€, para su inclusión en la cartera óptima.
La reducción del costo de la variable z_t indica lo que la tasa de interés tendría que ser con el fin de mantener el exceso de efectivo en el año t.

EJEMPLO. Veámos otro ejemplo parecido de cash-flow-matching. Una pequeña empresa encuentra el siguiente calendario de responsabilidad (en millones).

Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Año 6	Año 7	Año 8	Año 9
24	26	28	28	26	29	32	33	34

Los bonos disponibles para su compra son:

	Bono 1	Bono 2	Bono 3	Bono 4	Bono 5	Bono 6	Bono 7	Bono 8
Precio	102.44	99.95	100.02	102.66	87.90	85.43	83.42	103.82
Cupon	5.625	4.75	4.25	5.25	0.00	0.00	0.00	5.75
Caducidad	Año 1	Año 2	Año 2	Año 3	Año 3	Año 4	Año 5	Año 5

	Bono 9	Bono 10	Bono 11	Bono 12	Bono 13	Bono 14	Bono 15	Bono 16
Precio	110.29	108.85	109.95	107.36	104.62	99.07	103.78	64.66
Cupon	6.875	6.5	6.625	6.125	5.625	4.75	5.5	0.00
Caducidad	Año 6	Año 6	Año 7	Año 7	Año 8	Año 8	Año 9	Año 9

Escribimos y resolvemos nuestro problema en SOLVER:

	Datos							
	T =	Numero años						
	1	2	3	4	5	6	7	
	8	9						
	N =	numero de	bonos					
	1	2	3	4	5	6	7	8
	9	10	11	12	13	14	15	16
	L(t) =	responsabilidad	año T					
	24	26	28	28	26	29	32	
	33	34						
	P(i)=	Precio de	Bonos					
	102,44	99,95	100,02	100,66	87,9	85,43	83,42	103,82
	110,29	108,85	109,95	107,36	104,62	99,07	103,78	64,66
	C(i) =	cupon anual						
	5,625	4,75	4,25	5,25	0	0	0	5,75
	6,875	6,5	6,625	6,125	5,625	4,75	5,5	0
	M(i)=	madurez						
	1	2	2	3	3	4	5	5
	6	6	7	7	8	8	9	9
	Variables							
x_i	0,13655673	0,16423805	0	0,19203936	0	0,20212142	0	0,18212142
	0,22259341	0	0,2678967	0	0,29564486	0	0,32227488	0
z_t	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0					
	Objetivo							
	204,291347							
	Restricciones							
	Año 1	24	=	24				
	Año 2	26	=	26				
	Año 3	28	=	28				
	Año 4	28	=	28				
	Año 5	26	=	26				
	Año 6	29	=	29				
	Año 7	32	=	32				
	Año 8	33	=	33				
	Año 9	34	=	34				

2.3. Opciones financieras

Uno de los problemas más estudiados en matemáticas financieras es el precio de los valores derivados. Estos son valores cuyo precio depende del valor de otro “valor subyacente”. Las Opciones financieras son los ejemplos más comunes de ‘valores derivados’. Una opción financiera es un instrumento financiero derivado que se establece en un contrato que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, a comprar o vender bienes o valores a un precio predeterminado, hasta una fecha concreta. Existen dos tipos de opciones: “call” y “put”. Por ejemplo, una “European call option” da el derecho de comprar un valor subyacente de una cantidad prescrita (llamado precio de ejercicio) en una tiempo prescrito en el futuro, conocido como el vencimiento o la fecha de ejercicio. La fecha de ejercicio también es conocido como la fecha madurez del valor derivado. Conocemos también la put Option y la American option, descritas en la introducción.
Recordemos el ejemplo sencillo de un modelo binomial de un período. A continuación, resumimos algunas de las informaciones de ese ejemplo:
Consideramos el precio de las acciones de XYZ que está valorada actualmente en 40€. Un mes a partir de hoy, esperamos que el precio de las acciones de XYZ se dupliquen o reduzcan a la mitad, con probabilidades iguales. También consideramos una “European call option” sobre XYZ con un precio de ejercicio de 50€ que expirará en un mes a partir de hoy. Asumimos que las tasas de interés son cero y que cualquier cantidad de acciones de XYZ puede ser comprado o vendido sin comisión.

$$\begin{tikzcd} & 80 = S_1(u) & & & (80-50)^+ = 30 \\ S_0 = 40\$ \arrow[ur] \arrow[dr] & & y & C_0 = ? \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 20 = S_1(d) & & & (20-50)^+ = 0 \end{tikzcd}$$

Nosotros obtenemos un precio razonable de 10€ para la opción usando una estrategia de replicación.

Replicación: En el ejemplo anterior, hemos formulado y resuelto la siguiente pregunta para determinar el precio razonable de una opción: ¿Podemos formar una cartera de valor subyacente de tal manera que la ganancia de la cartera en la fecha de vencimiento de la opción coincida con la ganancia de la opción? En otras palabras, ¿podemos replicar la opción de usar una cartera de los activos subyacentes y dinero en efectivo?
Vamos a trabajar en un ambiente ligeramente más general. Sea S_0 el precio actual del valor subyacente y se supone que hay dos resultados posibles al final del período: $S_1^u = S_0 \cdot u$ y $S_1^d = S_0 \cdot d$ (Supongamos u > d). Nosotros también suponemos que hay una tasa interés fijo pagado en efectivo r para el periodo indicado. Sea R = 1 + r.
Por último, consideramos un valor derivado que tiene beneficios de C_1^u y C_1^d en lo alto y bajo de los estados, respectivamente:

$$\begin{tikzcd} & S_1^u = S_0 \cdot u & & & C_1^u \\ S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & y & C_0 = ? \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & S_1^d = S_0 \cdot d & & & C_1^d \end{tikzcd}$$

Para el precio del valor derivado, vamos a tratar de replicarlo. Para la replicación se cuenta con una carpeta de acciones Δ de los subyacentes y B€. ¿Qué valores de Δ y B hacen que esta cartera tenga los mismos beneficios a la defcha de expiración que el valor derivado?
Tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \Delta S_0 \cdot u \ + \ BR \ &= \ C_1^u \\ \Delta S_0 \cdot d \ + \ BR \ &= \ C_1^d \end{aligned}$$

Luego, obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta \ &= \ \frac{C_1^u - C_1^d}{S_0(u-d)} \\ B \ &= \ \frac{uC_1^u - dC_1^d}{R(u-d)} \end{aligned}$$

Esta carpeta vale $S_0\Delta$+ B hoy, que debería ser el precio del valor derivado, así:

$$\begin{aligned} C_0 \ &= \ \frac{C_1^u - C_1^d}{u-d} \ + \ \frac{uC_1^u - dC_1^d}{R(u-d)} \ = \\ &= \ \frac{1}{R}\left[\frac{R-d}{u-d}C_1^u + \frac{u-R}{u-d}C_1^d\right] \end{aligned}$$

Probabilidad Risk-Neutral
Sea $p_u \ = \ \frac{R-d}{u-d} \ y \ p_d \ = \ \frac{u-R}{u-d}$. Tenga en cuenta que debemos tener d < R < u. Una consecuencia inmediata de esta observación es que tanto $p_u > 0$ y $p_d > 0$. Observando también que $p_u \ + \ p_d = 1$ se puede interpretar p_u y p_d como probabilidades. De hecho, estos son las llamadas probabilidades neutrales al riesgo (Risk-Neutral probabilities) (RNP) de los estados arriba y abajo, respectivamente. Tenga en cuenta que son completamente independiente de las probabilidades reales de estos estados. El precio de cualquier valor derivado ahora se puede calcular como el valor actual del valor esperado de sus pagos futuros donde el valor esperado es tomado con las probabilidades neutrales al riesgo. En nuestro ejemplo anterior u = 2, d = $\frac{1}{2}$ y r = 0 de manera que R = 1. Por lo tanto $p_u \ = \ \frac{1-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} \ = \ \frac{1}{3} \ y \ p_d \ = \ \frac{2-1}{2-\frac{1}{2}} \ = \ \frac{2}{3}$.
Como resultado, tenemos:

$$S_0 = 40 = \frac{1}{R}(p_u S_1^u + p_d S_1^d) = \frac{1}{3}80 \ + \ \frac{2}{3}20$$

$$C_0 = 10 = \frac{1}{R}(p_u C_1^u + p_d C_1^d) = \frac{1}{3}30 \ + \ \frac{2}{3}0$$

como se esperaba. Usando probabilidades neutrales al riesgo también ponemos precios a otros valores derivados de la acción XYZ. Por ejemplo, considere una opción de venta europea con un precio de ejercicio de 60€y con la misma fecha de caducidad como el ejemplo.

$$\begin{tikzcd} & P_1^u = max\{0, 60-80\} = 0 \\ P_0 =? \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & P_1^d = max\{0, 60-20\} = 40 \end{tikzcd}$$

Podemos calcular fácilmente:
$P_0 = \frac{1}{R}(p_u P_1^d + p_d P_1^d) = \frac{1}{3}0 + \frac{2}{3}40 = \frac{80}{3}$
sin necesidad de replicar la opción de nuevo.

Ahora generalizamos el conjunto binomial para un ajuste más general, sea:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\}, \tag{2.2}$$

Un conjunto (finito) de los posibles estados futuros "estados". Por ejemplo, estos podrían ser precios de un valor en una fecha futura. Para los valores S^i, i = 0,. . . ,n, denotamos por $S_1^i(w_j)$ el precio de este valor (security) en el estado w_j en el tiempo 1. Tambien vamos a denotar a S_0^i al precio actual (tiempo 0) del valor S^i. Usamos i = 0 para el valor "sin riesgo" que paga la tasa de interés r > 0 entre el tiempo 0 y el tiempo 1. Es conveniente asumir que $S_0^0 = 1$ y que $S_1^0(w_j) = R := 1 + r, \forall$ j.

Definición: Una medida de probabilidad neutral al riesgo es un vector de números positivos (p_1, p_2,..., p_m) tal que $\sum_{j=1}^m p_j = 1$ y para cada valor S^i, i = 0,. . . ,n,

$$S_0^i = \frac{1}{R}\left(\sum_{j=1}^m p_j S_1^i(w_j)\right) = \frac{1}{R}\hat{\mathrm{E}}[S_1^i].$$

donde $\hat{\mathrm{E}}[S]$ denota el valor esperado de la variable aleatoria S bajo la distribución de probabilidad (p_1, p_2, ..., p_m).

Teorema: Cuando tanto los problemas de programación lineal primal y dual

$$\begin{aligned} (LP) \qquad & min_x \;\; c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} (LD) \qquad & max_y \;\; b^T y \\ & A^T y \leq c, \end{aligned} \tag{2.4}$$

tengan soluciones factibles, tendrán soluciones óptimas que satisfagan complementariedad estricta, es decir, existen x^* y y^* óptimos para los respectivos problemas de tal manera que:

$$x^* + (c - A^T y^*) > 0$$

2.3.1. Modelado

Considere un valor subyacente con un (tiempo 0) precio actual de S_0 y un precio (al azar) S_1 en el tiempo 1. Considere los n valores derivados escritos sobre estos valores que se dan en el tiempo 1, y tienen funciones de pago lineal a trozos $\Psi_i(S_1)$, cada uno con un solo punto de interrupción K_i, para i = 1,..., n. La motivación obvia es la colección de calls y puts de este valor. Si, por ejemplo, el i-ésimo valor derivado fuera una European call con precio de ejercicio K_i, tendríamos $\Psi_i(S_1) = (S_1 - K_i)^+$. Suponemos que los K_is están en orden creciente, sin pérdida de generalidad. Finalmente, denotamos S_0^i el precio actual del i-ésimo valor derivado. Consideremos una carpeta x = (x_1,...,x_n) de los valores derivados 1 a n y denotamos $\Psi^x(S_1)$ la función de pago de la carpeta:

$$\Psi^x(S_1) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(S_1)x_i$$

El coste de la carpeta x viene dada por:

$$\sum_{i=1}^n S_0^1 x_i$$

Dado que todos los $\Psi_i(S_1)$'s son lineales a trozos, por lo que $\Psi^x(S_1)$ son puntos de interrupción en K_1 a K_n. Tenga en cuenta que una función lineal a trozos es no negativo sobre [0,1) si y sólo si es no negativo en 0 y en todos los puntos de interrupción. A partir de esta observación, fácilmente se deduce que:

1. $\Psi^x(0) \geq 0$,
2. $\Psi^x(K_j) \geq 0, \forall j$,

Ahora consideramos el siguiente problema de programación lineal,

$$\begin{aligned} min_x \quad & \sum_{i=1}^{n} S_0^i x_i \\ & \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(0) x_i \geq 0, \\ & \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(k_j) x_i \geq 0, j = 1, ..., n \end{aligned} \tag{2.5}$$

A continuación, nos centramos en el caso de que los valores derivados bajo consideración son opciones European call con precios de ejercicio K_i para i = 1, ..., n, de modo que $\Psi_i(S_1) = (S_1 - K_i)^+$. Así:

$$\Psi_i(K_j) = (K_j - K_i)^+$$

En este caso, (2.5) se reduce al siguiente problema:

$$\begin{aligned} min_x \quad & c^T x \\ & Ax \geq 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde $c^T = [S_0^1, ..., S_0^n]$ y

$$A = \begin{bmatrix} K_2 - K_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K_3 - K_1 & K_3 - K_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_n - k_1 & K_n - K_2 & K_n - K_3 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Se ilusta los descrito anteriormente en un ejemplo para facilitar la comprensión.

EJEMPLO

Usted tiene 20,000€ para invertir. Las acciones XYZ se venden a 20€ ahora mismo. Una opción European call permite comprar 100 acciones de XYZ a 15€ y exactamente a seis meses a partir de hoy se venden por 1000€. También se puede aumentar fondos adicionales que pueden ser invertidos de inmediato, si se desea, mediante la venta de opciones de compra con las características anteriores. Además, a 6 meses un bono de valor 100€ se vende por 90€. Usted ha decidido limitar la número de opciones de compra que usted compra o vende a un máximo de 50.

Se tienen en cuenta tres escenarios para el precio de las acciones de XYZ a seis meses a partir hoy: el precio será el mismo que hoy en día, el precio subirá a 40€, o bajará a 12€. Su mejor estimación es que cada uno de estos escenarios es igualmente probable. Formular y resolver un problema de programación lineal para determinar la cartera de acciones, bonos y opciones que maximiza el beneficio esperado.

En primer lugar, definimos las variables de decisión.

B = número de bonos comprados,

S = número de acciones XYZ compradas,

C = número de opciones de compra compradas (si> 0) o vendidas (si <0).

Los beneficios esperados se calculan de la siguiente manera:

Bonos: 10

Acciones XYZ: $\frac{1}{3}$(20 + 0 - 8) = 4

Call Option: $\frac{1}{3}$(1500 - 500 - 1000) = 0

Donde para sacar el valor de la Call option se ha calculado así:

Sea el escenario 1, que las acciones suben a 40$. Luego como tenemos que el precio strike es 15$ y que compramos 100 acciones que se venden en 6 meses a 1000$ tenemos: 100*(40-15) - 1000 = 1500. Igual para el segundo escenario y el tercero.

Y para sacar el precio de las acciones simplemente se calcula del siguiente modo:
Para el escenario 1, que el precio sube a 40$. Tenemos que el precio de la acción es 40 - 20 = 20. Igual en los otros dos casos.

$$\begin{aligned} max \qquad 10B + 4S \\ 90B + 20S + 1000C \leq 20000 \\ C \leq 50 \\ C \geq -50 \\ B, S \geq 0 \end{aligned}$$

Una vez descrito nuestro modelo, formulando y solucionando nuestro problema en SOLVER obtenemos:

	Variables		
S	3500		
B	0		
C	-50		

	Objetivo		
	14000		

	Restricciones		
	20000	<=	20000
	-50	<=	50
	-50	>=	-50
	0	>=	0
	3500	>=	0

Luego observamos que tenemos una ganancia esperada de 14.000€, para B = 0, C = -50 y S = 3500.

Supongamos ahora que el inversor quiere una ganancia de por lo menos 2000€ en cualquiera de los tres escenarios. Escriba un programa lineal que maximizará el beneficio esperado del bajo esta restricción adicional.
Sea P_i = La ganancia en el escenario i. Tenemos el problema:

$$\begin{aligned} max \qquad \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3 \\ 90B + 20S + 1000C \leq 20000 \\ 10B + 20S + 1500C = P_1 \\ 10B \qquad - 500C = P_2 \\ 10B - \ 8B - 1000C = P_3 \\ P_1 \geq 2000 \\ P_2 \geq 2000 \\ P_3 \geq 2000 \\ C \leq 50 \\ C \geq -50 \\ B, S \geq 0 \end{aligned}$$

Una vez más, resolviendo con SOLVER obtenemos:

Variables	
P1	2000
P2	18000
P3	13600
B	3,82926E-13
S	2800
C	-36

Objetivo
11200

Restricciones		
20000	<=	20000
2000	=	2000
18000	=	18000
13600	=	13600
2000	>=	2000
18000	>=	2000
13600	>=	2000
-36	<=	50
-36	>=	-50
2800	>=	0
3,82926E-13	>=	0

Seguimos añadiendo restricciones a nuestro ejemplo.
La ganancia libre de riesgo se define como la mayor ganancia posible que una cartera garantiza para ganar, no importa en que escenario se produzca. ¿Cuál es la cartera que maximiza el beneficio sin riesgo para los tres escenarios anteriores?

Para resolver esta cuestión, podemos utilizar una ligera modificación de la modelo anterior, mediante la introducción de una variable más.
Tenemos el problema:
Sea Z = ganancia libre de riesgo.

$$\begin{aligned} max \quad & Z \\ 90B + 20S + 1000C &\leq 20000 \\ 10B + 20S + 1500C &= P_1 \\ 10B \qquad - 500C &= P_2 \\ 10B - \;\; 8B - 1000C &= P_3 \\ P_1, P_2, p_3 &\geq Z \\ C &\leq 50 \\ C &\geq -50 \\ B, S &\geq 0 \end{aligned}$$

y resolviendo en SOLVER obtenemos:

Variables	
P1	7272,72727
P2	12727,2727
P3	7272,72727
B	0
S	2272,72727
C	-25,4545455
Z	7272,72727

Objetivo
7272,72727

Restricciones		
20000	<=	20000
7272,72727	=	7272,72727
12727,2727	=	12727,2727
7272,72727	=	7272,72727
7272,72727	>=	7272,72727
12727,2727	>=	7272,72727
7272,72727	>=	7272,72727
-25,4545455	<=	50
-25,4545455	>=	-50
2272,72727	>=	0
0	>=	0

Capítulo 3

Programación Cuadrática

Como ya comentamos en el capítulo introductorio, la programación cuadrática (PQ) se refiere al problema de la minimización de una función cuadrática sujetos a restricciones de igualdad y desigualdad lineales. En su forma estándar, este problema se representa como sigue:

$$
\begin{aligned}
(Q.P) \qquad\qquad min_x \qquad & \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \\
& Ax = b, \\
& x \geq 0,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

donde A $\in \mathbb{R}^{mxn}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$, $y\ x \in \mathbb{R}^n$. Los problemas de programación cuadráticas se encuentran con frecuencia en los modelos de optimización. Los problemas de optimización media-varianza desarrollado por Markowitz para la selección de carteras eficientes son problemas QP. Además, y quizás más importante, los problemas de QP se resuelven como subproblemas en la solución de los problemas de optimización no lineal a través de la programación cuadrática secuencial (SQP).
Recordemos que, como Q es una matriz semidefinida positiva, la función objetivo del problema PQ es una función convexa de x. Dado que el conjunto factible es un conjunto poliédrico (es decir, un conjunto definido por restricciones lineales) es un conjunto convexo. Por lo tanto, cuando Q es semidefinida positiva, el PQ (3.1) es un problema de optimización convexa. Como tal, sus soluciones óptimas locales también son soluciones óptimas globales.
Al igual que en la programación lineal, podemos desarrollar el problema de programacion cuadratica dual. El dual del problema (3.1) es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
(Q.D) \qquad\qquad min_{x,y,s} \qquad & b^T y - \frac{1}{2}x^T Qx \\
& A^T y - Qx + s = c, \\
& x, s \geq 0,
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Tenga en cuenta que, a diferencia del caso de la programación lineal, las variables del problema de programación cuadrática primal también aparecen en el dual PQ.

3.1. Optimización de Media Varianza

En el capítulo de introducción, hemos hablado de la teoría de Markowitz de la optimización de media-varianza (MVO) para la selección de portafolios de valores (o clases de activos) de manera que se negocia la rentabilidad esperada y el riesgo percibido . La principal aportación de Markowitz se halla, en haber recogido de forma explícita en su modelo los rasgos fundamentales de lo que en un principio podemos calificar de conducta racional del inversor, consistente en buscar la cartera eficiente, o una composición de la cartera que haga máximo su rendimiento para un determinado nivel de riesgo o que minimice el riesgo para un rendimiento dado.
El rendimiento o rentabilidad de la cartera que un inversor espera obtener en el futuro se mide

gracias a la esperanza matemática del rendimiento de la cartera.
El riesgo se medirá con la desviación típica o estándar de los rendimientos, por proporcionar ésta una medida de dispersión de los mismos respecto a la media.
Considere los activos $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (n≥2) con retornos aleatorios. Sean μ_i y σ_i el rendimiento esperado y la desviación estándar del retorno de los activos S_i. Para i ≠ j, ρ_{ij} denota el coeficiente de correlación de los rendimientos de los activos S_i y S_j. Sea $\mu = [\mu_1, \ldots, \mu_n]^T$, y Q = (σ_{ij}) será la matriz de covarianza simétrica con $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ y $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ para i ≠ j. Denotando por x_i la proporción de los fondos totales invertidos en la seguridad i, se puede representar el rendimiento esperado y la varianza de la cartera resultante x = $(x_1, \ldots, x_n)$ como sigue:

$$E[x] \;=\; x_1\mu_1 \;+\; \ldots \;+\; x_n\mu_n \;=\; \mu^T x$$

y

$$Var[x] \;=\; \sum_{i,j} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j x_i x_j \;=\; x^T Q x$$

donde $\rho_{ij} \equiv 1$.
Ya que la varianza es siempre no negativa, se sigue que $x^T Q x \geq 0$ para cualquier x, es decir, Q es semidefinida positiva. Vamos a suponer que en realidad es definida positiva, que es esencialmente equivalente a asumir que no hay activos redundantes en nuestra colección $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Suponemos también que el conjunto de carteras admisibles es un conjunto no vacío poliédrico y representamos como χ := {x | Ax = b, Cx ≥ d}, donde A es una matriz mxn, b es un vector m-dimensional, C es una matriz pxn y d es un vector p-dimensional.
Markowitz plantea como objetivo la definición de la cartera óptima para un inversor, siendo ésta la mejor posible, de entre todas las que se pueden formar considerando su actitud ante el riesgo. La cartera óptima para un inversor puede no serlo para otro. Para lograr este objetivo, Markowitz en su modelo divide la búsqueda de una cartera óptima en tres etapas.

Primera Etapa:Formación de las carteras Eficientes
Una cartera es "eficiente" cuando proporciona la máxima ganancia de entre todas las carteras con la misma varianza para un riesgo dado, o proporciona el mínimo riesgo para un determinado valor de la esperanza matemática. Puesto que suponemos que Q es definida positiva, la variación es una función estrictamente convexa de las variables de la cartera y existe una cartera única de χ que tiene la varianza mínima. Denotemos esta cartera con x_{min} y retorno $\mu^T x_{min}$ para R_{min}. Tenga en cuenta que x_{min} es una cartera eficiente. Dejamos que R_{max} denote el máximo retorno de una cartera admisible. El problema de optimización de media-varianza de Markowitz(MVO) se puede formular encontrando la cartera de mínima varianza de los valores del 1 al n que produce al menos un valor objetivo del rendimiento esperado (digamos b).
Cuando se usa optimización para obtener la frontera eficiente, se debe resolver el problema de optimización, para cada nivel de retorno R elegido por el inversor. Así pues, el conjunto de carteras "eficientes" se determina resolviendo el problema de programación cuadrática siguiente

$$\begin{aligned} min_x \qquad & \frac{1}{2}x^T Q x \\ & \mu^T x \geq R, \\ & Ax = b, \\ & Cx \geq d. \end{aligned} \tag{3.3}$$

En particular, una de las limitaciones del conjunto χ es $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.
La primera restricción indica que el rendimiento esperado es nada menos que el valor objetivo R. Solucionando este problema para los valores de R que oscilan entre R_{min} y R_{max}, obtenemos todas las carteras eficientes. Como hemos comentado anteriormente, la función objetivo corresponde a (la mitad) de la varianza total de la cartera. La constante $\frac{1}{2}$ se añade para mayor comodidad en las condiciones de optimalidad-obviamente no afecta a la solución óptima.
Todas las carteras posibles que se pueden formar con un cierto número de títulos se pueden representar gráficamente a partir de su riesgo y de su rentabilidad esperada, de manera que se

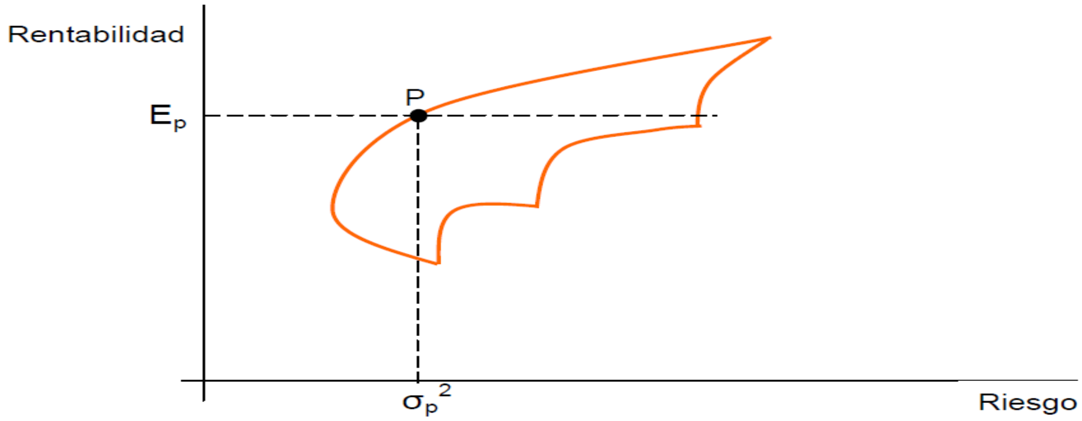
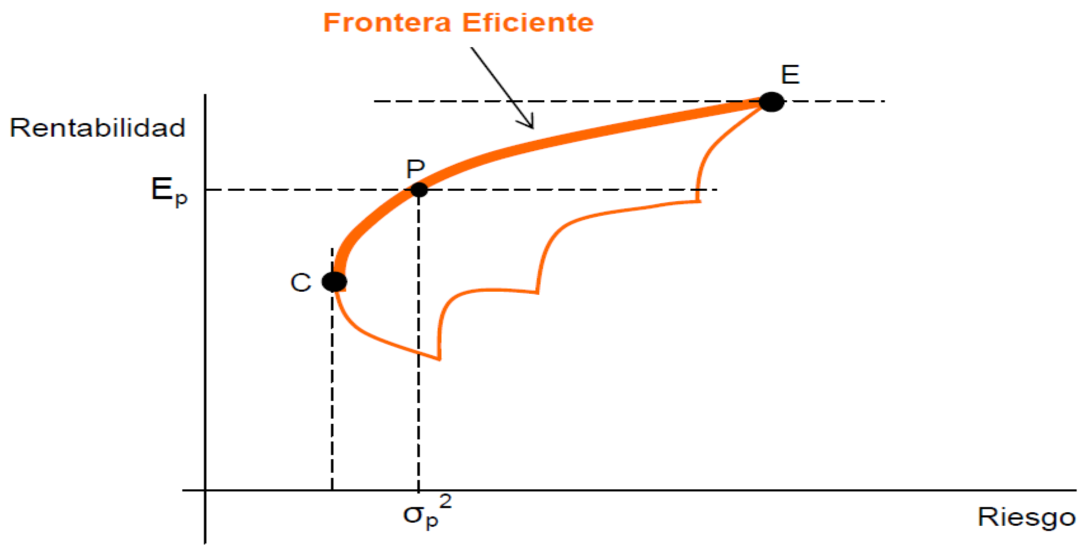


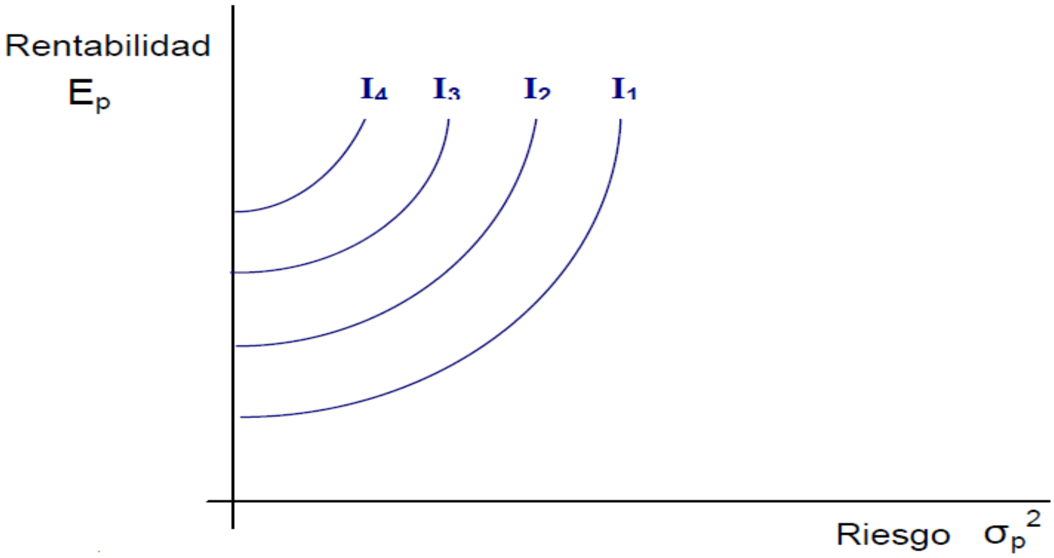
Figura 3.1: Conjunto de carteras eficientes

encontrarán dentro de una región como la siguiente:
La cartera P es una cartera eficiente ya que entre todas las que tienen un riesgo σ_p^2 es la de mayor rentabilidad, y de todas las que tienen la misma rentabilidad E_p, es la que tiene menor riesgo.
El conjunto de todas las carteras eficientes forman una curva que se denomina **frontera eficiente**.
La frontera eficiente es a menudo representado como una curva en un gráfico de dos dimensiones, donde las coordenadas de un punto se corresponde con el rendimiento esperado y la desviación estándar en el retorno de una cartera eficiente.
En el siguiente gráfico CE es la denominada curva de la frontera eficiente proporcionando dichas carteras un valor de E_p máximo para cada valor de σ_p^2, o un valor de σ_p^2 mínimo para cada valor de E_p.

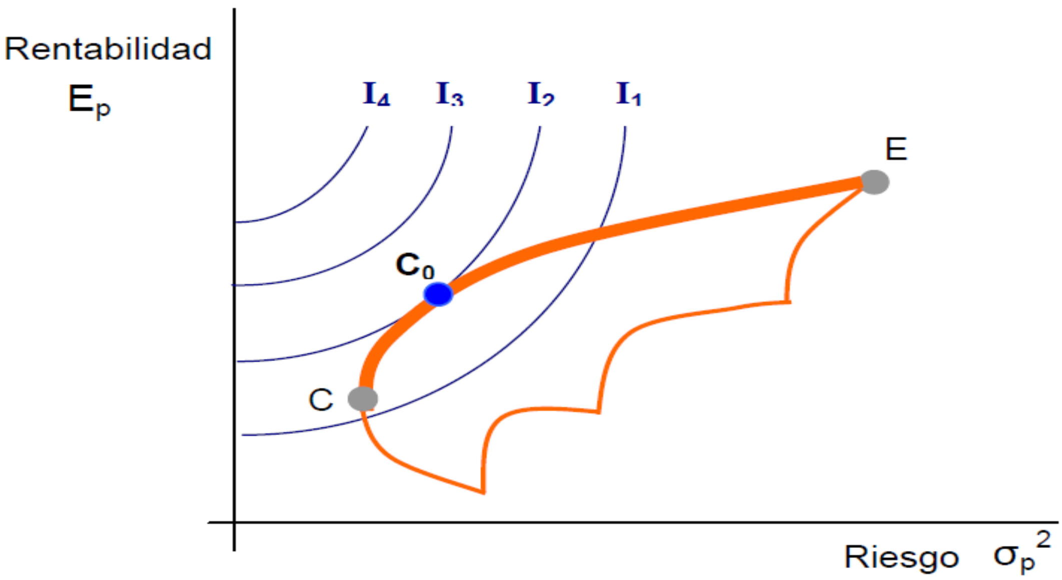


El punto C representa la cartera eficiente de mínimo riesgo y el punto E la cartera de máxima rentabilidad esperada.

Segunda etapa: La actitud del inversor frente al riesgo
El inversor elegirá entre las carteras "eficientes" aquella que mejor responda a sus preferencias.
Para los inversores las curvas de indiferencia (combinación ganancia-riesgo que reportan la misma satisfacción) deberán ser crecientes, siendo las curvas más alejadas del origen de coordenadas las que representarán mayores niveles de satisfacción.
Una forma bastante usual de las curvas de indiferencia es la representada en la siguiente figura:



Tercera etapa: La determinación de la cartera óptima
La cartera óptima para cada inversor dependerá del grado de aversión al riesgo de cada uno de ellos. Por lo tanto, la selección de la cartera óptima del inversor será una cuestión subjetiva que dependerá de su forma de ser, patrimonio, nivel de ahorro, edad,...
Superponiendo las figuras 2 y 3 obtenemos la figura 4. La cartera óptima se corresponde por el punto C_0, en el cual es tangente la curva de de la frontera eficiente CE con la curva de indiferencia I_2. La cartera óptima es C_0 ya que cualquier otro punto de la curva CE se correspondería con una curva de indiferencia de un menor índice de utilidad o satisfacción.



Una vez que el problema es resuelto con alguna técnica de programación matemática, se logra obtener la proporción de cada activo dentro de la cartera de inversiones que satisfacen las restricciones planteadas en el modelo.

Las carteras elegidas por este programa cuadrático pueden estar sujetas a riesgo idiosincrásico. Se suelen utilizar restricciones adicionales en x_i para asegurar que la cartera elegida está bien diversificada.

Por ejemplo, un límite m podrá imponerse en el tamaño de cada x_i, digamos:

$$x_i \leq m, i = 1, \ldots, n$$

También se puede reducir el riesgo del sector mediante la agrupación de las inversiones en valores de un sector y el establecimiento de un límite a este sector.
Por ejemplo, si m_k es el máximo que puede ser invertido en el sector k, añadimos la restricción:

$$\sum_{ienelsectork} x_i \leq m_k \tag{3.4}$$

Tenga en cuenta sin embargo, que, mientras más restricciones se añada a un modelo, más se deteriora el valor objetivo. Así que el conseguir la diversificación deseada puede ser bastante costoso.

Igual que hicimos anteriormente, ilustramos el modelo descrito para una mejor comprensión.

3.1.1. EJEMPLO

Aplicamos el modelo de Markowitz MVO al problema de construcción de una cartera de acciones de Estados Unidos, bonos y efectivo. Utilizamos los datos históricos de los retornos de estas tres clases de activos: El índice S&P500 para los retornos de las acciones, el índice de bonos, y suponemos que el dinero en efectivo se invierte en una cuenta de mercado de dinero cuyo retorno es la tasa de fondos federales en 1 día. Para el "Total Return" se dan a continuación para cada activo entre 1960 y 2003.

Año	Accion	Bonos	Efectivo
1960	20.2553	262.935	100.00
1961	25.6860	268.730	102.33
1962	23.4297	284.090	105.33
1963	28.7463	289.162	108.89
1964	33.4484	299.894	113.08
1965	37.5813	302.695	117.97
1966	33.7839	318.197	124.34
1967	41.8725	309.103	129.94
1968	46.4795	316.051	137.77
1969	42.5448	298.249	150.12
1970	44.2212	354.671	157.48
1971	50.5451	394.532	164.00
1972	60.1461	403.942	172.74
1973	51.3114	417.252	189.93
1974	37.7306	433.927	206.13
1975	51.7772	457.885	216.85
1976	64.1659	529.141	226.93
1977	59.5739	531.144	241.82
1978	63.4884	524.435	266.07
1979	75.3032	531.040	302.74
1980	99.7795	517.860	359.96
1981	94.8671	538.769	404.48

Año	Accion	Bonos	Efectivo
1982	115.308	777.332	440.68
1983	141.316	787.357	482.42
1984	150.181	907.712	522.84
1985	197.829	1200.63	566.08
1986	234.755	1469.45	605.20
1987	247.080	1424.91	646.17
1988	288.116	1522.40	702.77
1989	379.409	1804.63	762.16
1990	367.636	1944.25	817.87
1991	479.633	2320.64	854.10
1992	516.178	2490.97	879.04
1993	568.202	2816.40	905.06
1994	575.705	2610.12	954.39
1995	792.042	3287.27	1007.84
1996	973.897	3291.58	1061.15
1997	1298.82	3687.33	1119.51
1998	1670.01	4220.24	1171.91
1999	2021.40	3903.32	1234.02
2000	1837.36	4575.33	1313.00
2001	1618.98	4827.26	1336.89
2002	1261.18	5558.40	1353.47
2003	1622.94	5588.19	1366.73

Denotamos a las I_{it} anteriores como el precio de cotización del título al final del periodo t, "Total Return" para el activo i = 1,2,3 y t = 0,. . .,T, donde t = 0 corresponde a 1960 y t = T es 2003. Para cada activo i, podemos convertir el dato I_{it}, t = 0,. . .,T, en el rendimiento o retorno promedio del título i-ésimo en el periodo t, como: r_{it}, t = 1,. . .,T usando la fórmula:

$$r_{it} = \frac{I_{i,t} - I_{i,t-1}}{I_{i,t-1}}.$$

Año	Accion	Bonos	Efectivo
1961	26.81	2.20	2.33
1962	-8.78	5.72	2.93
1963	22.69	1.79	3.38
1964	16.36	3.71	3.85
1965	12.36	0.93	4.32
1966	-10.10	5.12	5.40
1967	23.94	-2.86	4.51
1968	11.00	2.25	6.02
1969	-8.47	-5.63	8.97
1970	3.94	18.92	4.90
1971	14.30	11.24	4.14
1972	18.99	2.39	5.33
1973	-14.69	3.29	9.95
1974	-26.47	4.00	8.53
1975	37.23	5.52	5.20
1976	23.93	15.56	4.65
1977	-7.16	0.38	6.56
1978	6.57	-1.26	10.03
1979	18.61	-1.26	13.78
1980	32.50	-2.48	18.90
1981	-4.92	4.04	12.37
1982	21.55	44.28	8.95

Año	Accion	Bonos	Efectivo
1983	22.56	1.29	9.47
1984	6.27	15.29	8.38
1985	31.17	32.27	8.27
1986	18.67	22.39	6.91
1987	5.25	-3.03	6.77
1988	16.61	6.84	8.76
1989	31.69	18.54	8.45
1990	-3.10	7.74	7.31
1991	30.46	19.36	4.43
1992	7.62	7.34	2.92
1993	10.08	13.06	2.96
1994	1.32	-7.32	5.45
1995	37.58	25.94	5.60
1996	22.96	0.13	5.29
1997	33.36	12.02	5.50
1998	28.58	14.45	4.68
1999	21.04	-7.51	5.30
2000	-9.10	17.22	6.40
2001	-11.89	5.51	1.82
2002	-22.10	15.15	1.24
2003	28.68	0.54	0.98

Denotamos R_i como la tasa aleatoria media de retorno de activos i. A partir de los datos históricos anteriores, se ha supuesto que el rendimiento esperado de los títulos en el siguiente periodo coincide con el rendimiento medio obtenido en el pasado, esto es, $\mathrm{E}(r_i) = \bar{r}_i$.:

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it},$$

lo que da:

	Accion	Bonos	Efectivo
Media Aritmética $\bar{r}_i$	12.06 %	7.85 %	6.32 %

La matriz de varianza-covarianza representa toda la variabilidad y, por ende, el riesgo de los activos financieros. Su estimación precisa es fundamental en la determinación de la cartera eficiente en el modelo de media-varianza.

$$cov(R_i, R_j) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} (r_{it} - \bar{r}_i)(r_{jt} - \bar{r}_j).$$

Covarianza	Accion	Bonos	Efectivo
Accion	0.02778	0.00387	0.00021
Bonos	0.00387	0.01112	-0.00020
Efectivo	0.00021	-0.00020	0.00115

Aunque no es necesario para resolver el modelo de Markowitz, es interesante para calcular la volatilidad de la tasa de rendimiento de cada activo. Se define la volatilidad de un activo como la desviación típica de su rentabilidad. Mide el grado de dispersión de la rentabilidad respecto a la rentabilidad esperada y se denota σ_i $\sigma_i = \sqrt{cov(R_i, R_i)}$

	Accion	Bonos	Efectivo
Volatilidad	16.67 %	10.55 %	3.40 %

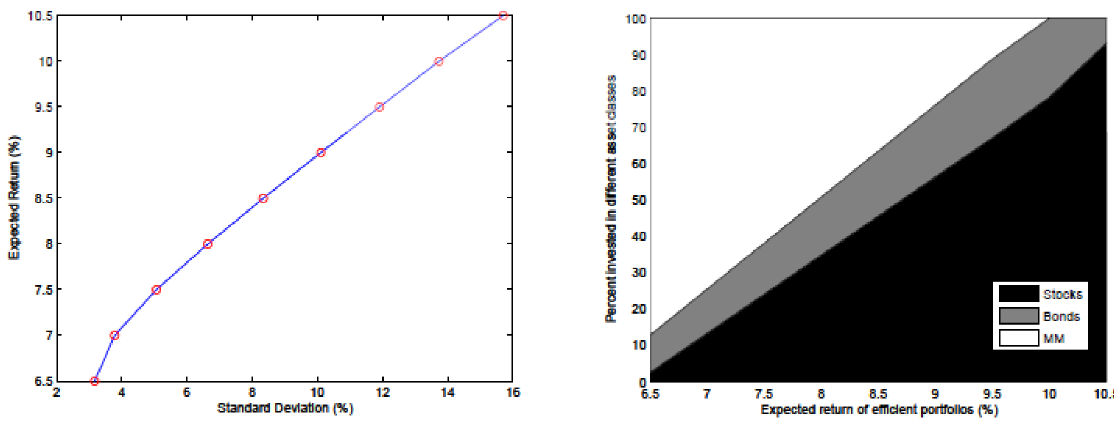
y la matriz de correlación, que mide la relación lineal entre las variables, pero no depende de las unidades de medida y está siempre comprendido entre −1 y 1. $\rho_{ij} = \frac{cov(R_i,R_j)}{\sigma_i \sigma_j}$:

Correalación	Accion	Bonos	Efectivo
Accion	1	0.2199	0.0366
Bonos	0.2199	1	-0.0545
Efectivo	0.0366	-0.0545	1

Luego tenemos que para la PQ de la cartera se tiene:

$$\begin{aligned} min \quad & 0{,}02778x_A^2 + 2x0{,}00387x_Ax_B + 2x0{,}00021x_Ax_E + 0{,}01112x_B^2 \\ & -2x0{,}00020x_Bx_E + 0{,}00115x_E^2 \\ & 0{,}1073x_A + 0{,}0737x_B + 0{,}0627x_E \geq R \\ & x_A + x_B + x_E = 1 \\ & x_A, x_B, x_E \geq 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Además, al resolverlo para R = 6,5 % a R = 10,5 %, con incrementos del 0,5 % obtenemos las carteras óptimas mostradas en la Tabla que veremos a continuación y la varianza correspondiente. Las asignaciones óptimas sobre la frontera eficiente se representan también en el gráfico de la derecha en la Figura.
Sobre la base de las dos primeras columnas de la Tabla, el gráfico del lado izquierdo de la Figura dibuja la tasa esperada máxima de retorno R de una cartera en función de su volatilidad (desviación estándar), es decir, la frontera eficiente.



Valores de R	Varianza	Acciones	Bonos	Efectivo
0.065	0.0010	0.02	0.10	0.88
0.070	0.0012	0.09	0.12	0.79
0.075	0.0017	0.17	0.14	0.69
0.080	0.0028	0.25	0.15	0.60
0.085	0.0042	0.33	0.17	0.50
0.090	0.0060	0.42	0.19	0.39
0.095	0.0083	0.50	0.21	0.29
0.100	0.0110	0.58	0.23	0.19
0.105	0.0142	0.66	0.25	0.09

Cuadro 3.1: Carteras Eficientes.

Vemos un ejemplo de como se ha resuelto el modelo en SOLVER, para llegar a la solución, es decir, a la minima varianza. Lo vemos para el ejemplo en el que R tiene un valor de 6,5 %.

Datos			
Matriz Covarianzas	A	B	C
A	0,02778	0,00387	0,00021
B	0,00387	0,01112	-0,0002
C	0,00021	-0,0002	0,00115
Media Aritmética	0,1206	0,0785	0,0632
Variables			
x_A	0,0153		
x_B	0,1005		
x_C	0,8842		
Objetivo			
0,0010			
Restricciones			
0,06561632	>=	0,065	
1	=	1	

Luego vemos que x_A es 0.0153, $x_B = 0.1005$ y $x_E = 0.8842$, y nos da un objetivo, una varianza, igual a 0,0010. Hacemos esto para los distintos valores de R.

Veamos ahora el mismo ejemplo pero con más datos, para ver cuanto tarda el programa en solucionar el problema.
Usamos los mismos valores que antes, pero ahora añadimos una columna nueva, es decir:

Año	A	B	C	D
1960	20.2553	262.935	100.00	34.461
1961	25.6860	268.730	102.33	45.373
1962	23.4297	284.090	105.33	38.556
1963	28.7463	289.162	108.89	46.439
1964	33.4484	299.894	113.08	57.175
1965	37.5813	302.695	117.97	66.982
1966	33.7839	318.197	124.34	63.934
1967	41.8725	309.103	129.94	80.935
1968	46.4795	316.051	137.77	101.79
1969	42.5448	298.249	150.12	99.389
1970	44.2212	354.671	157.48	89.607
1971	50.5451	394.532	164.00	114.12
1972	60.1461	403.942	172.74	133.73
1973	51.3114	417.252	189.93	92.190
1974	37.7306	433.927	206.13	59.820
1975	51.7772	457.885	216.85	77.620
1976	64.1659	529.141	226.93	97.880
1977	59.5739	531.144	241.82	105.05
1978	63.4884	524.435	266.07	117.98
1979	75.3032	531.040	302.74	151.14
1980	99.7795	517.860	359.96	202.34
1981	94.8671	538.769	404.48	195.84

Año	A	B	C	D
1982	115.308	777.332	440.68	232.41
1983	141.316	787.357	482.42	278.60
1984	150.181	907.712	522.84	247.35
1985	197.829	1200.63	566.08	324.39
1986	234.755	1469.45	605.20	348.81
1987	247.080	1424.91	646.17	330.47
1988	288.116	1522.40	702.77	381.38
1989	379.409	1804.63	762.16	454.82
1990	367.636	1944.25	817.87	373.84
1991	479.633	2320.64	854.10	586.34
1992	516.178	2490.97	879.04	676.95
1993	568.202	2816.40	905.06	776.80
1994	575.705	2610.12	954.39	751.96
1995	792.042	3287.27	1007.84	1052.1
1996	973.897	3291.58	1061.15	1291.0
1997	1298.82	3687.33	1119.51	1570.3
1998	1670.01	4220.24	1171.91	2192.7
1999	2021.40	3903.32	1234.02	4069.3
2000	1837.36	4575.33	1313.00	2470.5
2001	1618.98	4827.26	1336.89	1950.4
2002	1261.18	5558.40	1353.47	1335.5
2003	1622.94	5588.19	1366.73	2003.4

Despues de obtener nuestras nuevas r_i correspondientes calculadas igual que antes, también obtenemos que nuestra media aritmética es:

	A	B	C	D
Media Aritmética $\bar{r}_i$	12.06 %	7.85 %	6.32 %	12.90 %

y nuestra matriz de varianzas y covarianzas es:

Covarianza	A	B	C	D
A	0.02778	0.00387	0.00021	0,03491
B	0.00387	0.01112	-0.00020	0,00054
C	0.00021	-0.00020	0.00115	-0,00043
D	0,03491	0,00054	-0,00043	0,06343

Luego, resolviendo con SOLVER obtenemos los siguientes resultados para los distintos valores de R.

Valores de R	Varianza	A	B	C	D
0.065	0.0010	0.00	0.10	0.88	0.02
0.070	0.0011	0.03	0.14	0.79	0.04
0.075	0.0017	0.13	0.13	0.69	0.03
0.080	0.0028	0.23	0.16	0.59	0.02
0.085	0.0042	0.33	0.17	0.50	0.00
0.090	0.0060	0.42	0.19	0.39	0.00
0.095	0.0083	0.50	0.21	0.29	0.00
0.100	0.0110	0.58	0.23	0.19	0.00
0.105	0.0142	0.66	0.25	0.09	0.00

Cuadro 3.2: Carteras Eficientes.

Se puede observar que prácticamente obtenemos los mismos resultados que antes, además de que el programa no ha tardado mucho en encontrar la solución.

EJEMPLO: Realizamos un ejemplo más con 6 títulos de acciones diferentes.
Los datos que se van a utilizar para este trabajo corresponden a títulos que fueron negociados en la Bolsa de Comercio de Santiago de Chile en el período que va desde el 2 de Enero de 1995 al 29 de Diciembre de 2000. Los títulos que conformarán los portafolios de inversión son: COPEC (sector recursos naturales), CAP (sector industria), CTC-A y ENTEL (sector servicios), COLBUN y ENDESA (sector eléctrico). Tenemos los siguientes datos:

Tabla1: Media de los retornos para cada activo en el período considerado.

Acción	COPEC	CTC-A	CAP	COLBUN	ENDESA	ENTEL
Media	0,021 %	0,040 %	-0,034 %	-0,028 %	-0,005 %	0,006 %

Donde la matriz de varianza covarianza, en este modelo será:

Tabla2: Matriz varianza covarianza no condicional

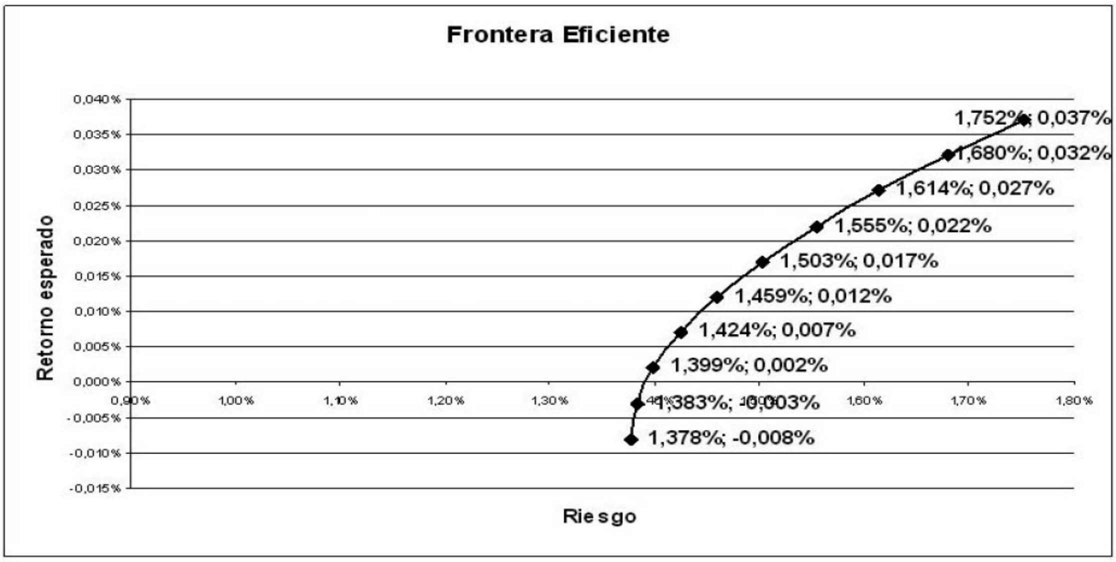
	COPEC	CTC-A	CAP	COLBUN	ENDESA	ENTEL
COPEC	0,038 %	0,020 %	0,017 %	0,014 %	0,019 %	0,017 %
CTC-A	0,020 %	0,043 %	0,015 %	0,013 %	0,021 %	0,014 %
CAP	0,017 %	0,015 %	0,034 %	0,011 %	0,014 %	0,014 %
COLBUN	0,014 %	0,013 %	0,011 %	0,044 %	0,014 %	0,011 %
ENDESA	0,019 %	0,021 %	0,014 %	0,014 %	0,040 %	0,014 %
ENTEL	0,017 %	0,014 %	0,014 %	0,011 %	0,014 %	0,046 %

Solucionando con SOLVER para distintos valores esperados, tenemos la tabla con los siguientes resultados.

Tabla3: Porcentajes invertidos por cada activo en la cartera con varianza-covarianza.

Valores de R	Desviación Típica	COPEC	CTC-A	CAP	COLBUN	ENDESA	ENTEL
0,037 %	1,752 %	39,630 %	52,652 %	-18,096 %	0,312 %	2,081 %	23,420 %
0,032 %	1,680 %	36,324 %	48,042 %	-13,201 %	2,667 %	3,428 %	22,739 %
0,027 %	1,614 %	33,018 %	43,432 %	-8,306 %	5,022 %	4,776 %	22,058 %
0,022 %	1,555 %	29,712 %	38,822 %	-3,411 %	7,377 %	6,123 %	21,377 %
0,017 %	1,503 %	26,406 %	34,212 %	1,484 %	9,732 %	7,471 %	20,695 %
0,012 %	1,459 %	23,100 %	29,601 %	6,379 %	12,087 %	8,819 %	20,014 %
0,007 %	1,424 %	19,794 %	24,991 %	11,274 %	14,442 %	10,166 %	19,333 %
0,002 %	1,399 %	16,487 %	20,381 %	16,169 %	16,797 %	11,514 %	18,652 %
-0,003 %	1,383 %	13,181 %	15,771 %	21,064 %	19,152 %	12,861 %	17,971 %
-0,008 %	1,378 %	9,624 %	11,688 %	26,242 %	21,394 %	14,283 %	16,769 %

Frontera eficiente obtenida



Al igual que antes, ponemos un ejemplo de como hemos resuelto nuestro problema en SOLVER, con un R esperado de -0,008 %

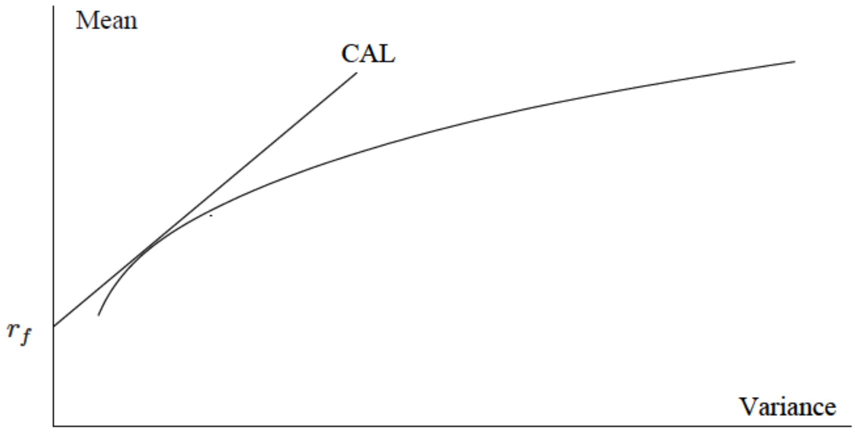
Datos							
Matriz Covarianzas	COPEC	CTC-A	CAP	COLBUN	ENDESA	ENTEL	
COPEC	0,00038	0,0002	0,00017	0,00014	0,00019	0,00017	
CTC-A	0,0002	0,00043	0,00015	0,00013	0,00021	0,00014	
CAP	0,00017	0,00015	0,00034	0,00011	0,00014	0,00014	
COLBUN	0,00014	0,00013	0,00011	0,00044	0,00014	0,00011	
ENDESA	0,00019	0,00021	0,00014	0,00014	0,0004	0,00014	
ENTEL	0,00017	0,00014	0,00014	0,00011	0,00014	0,00046	
Esperanza	0,00021	0,0004	-0,00034	-0,00028	-0,00005	0,00006	
Variables			%				
x_{COPEC}	0,10		9,624				
x_{CTC-A}	0,12		11,688				
x_{CAP}	0,26		26,242				
x_{COLBUN}	0,21		21,394				
x_{ENDESA}	0,14		14,283				
x_{ENTEL}	0,17		16,769				
					Desviación Típica		%
Objetivo	0,0002				0,013788709		1,37887
Restricciones							
-7,92423E-05	>=	-0,00008					
1,00	=	1					

3.2. Modelo Radio Sharpe

Siguiendo la teoría de carteras, la rentabilidad obtenida por una cartera no resulta relevante si no es analizado a su vez el riesgo asociado a dicha cartera; es decir, “en un mercado en equilibrio

existe un trade-off entre rendimiento y riesgo″ (Suárez, 2005; p.531). Es por ello que se requiere de medidas o indicadores que relacionen la rentabilidad obtenida por una cartera con el riesgo asociado a la misma y que permitan establecer una correcta evaluación y comparación de los resultados de su gestión o performance.
Existen diversos índices o medidas de rentabilidad, entre los más conocidos y utilizados se encuentran el Ratio de Sharpe, el Índice de Treynor y el Alfa de Jensen, aunque nosotros vamos a trabajar solamente con el Ratio de Sharpe. El ratio de Sharpe es una medida para analizar el rendimiento de una inversión, según el riesgo que suponga esa inversión.
Recordemos que denotamos con R_{min} y R_{max} el mínimo y máximo de los retornos esperados para las carteras eficientes. Definamos la función σ(R): $[R_{min}, R_{max}] \to \mathbb{R}$ como σ(R):= $(x_R^T Q x_R)^{\frac{1}{2}}$, donde x_R indica la solución única de problema (3.1). Puesto que se asumió que Q es definida positiva, es fácil demostrar que la función σ(R) es estrictamente convexa en su dominio. Como se mencionó antes, la frontera eficiente es la gráfica E = {(R, σ(R)): R $\in$ $[R_{min}, R_{max}]$}.
Ahora consideramos un activo libre de riesgo cuya rentabilidad esperada es $r_f \geq 0$. Se asumirá que $r_f < R_{min}$, que es natural ya que la cartera x_{min} tiene un riesgo positivo asociado, mientras que el activo sin riesgo no tiene.

El riesgo de las diferentes combinaciones de una cartera de riesgo con el activo libre de riesgo pueden ser representados como una línea recta — una línea de asignación de capital (CAL) — en la gráfica de media vs. desviación estándar. En dicha recta se encuentran todas las carteras que puede formar el inversor con la cartera de riesgo y con el activo libre de riesgo. Esta línea de asignación de activos no es la única donde puede invertir un inversor. Vamos a poder formar distintas rectas CAL dependiendo de donde se sitúe la cartera con riesgo que elijamos.
La CAL óptima es la CAL que se encuentra por debajo de todas las demás CAL para R > r_f donde las carteras correspondientes tendrán la desviación estándar más baja. A continuación, se deduce que la pendiente de la CAL óptima es una sub-derivada de la función σ(R) que define la frontera eficiente. El punto donde la CAL óptima toca la frontera eficiente corresponde a la cartera de riesgo óptima.



Matemáticamente, esto se puede expresar como la cartera de x que maximiza la cantidad:

$$h(x) = \frac{\mu^T x - r_f}{(x^T Q x)^{\frac{1}{2}}}$$

entre todos x $\in$ S. Esta cantidad es precisamente la relación introducida por Sharpe para medir la rentabilidad de los fondos de inversión. Esta cantidad es ahora más comúnmente conocida como el ratio de Sharpe.
Ejemplo
Imaginemos que Alberto es el gestor de un fondo de inversión y ha obtenido una rentabilidad del 14 % durante el año pasado, mientras que Blanca, gestora de otro fondo de inversión, ha conseguido un 8 % de rentabilidad en el mismo año. A simple vista diríamos que Alberto es mucho mejor gestor que Blanca. Sin embargo, si Alberto ha invertido en productos con mucho más riesgo, tendríamos que ajustar la rentabilidad según su riesgo para saber quién ha obtenido más rendimiento. Vamos a averiguar quién ha sacado más jugo a su inversión. Para ello, vamos a utilizar el ratio de Sharpe.

Para calcular este ratio necesitaremos saber cuánta rentabilidad ofreció el rf (activo sin riesgo). Vamos a utilizar como rf el bono alemán a 10 años, que el año pasado tuvo un interés medio aproximado del 1,4 %. Si la desviación típica del fondo de Alberto es del 8 % y la de Blanca es del 3 %. El ratio de Sharpe para Alberto será de 1,58 ((14-1.4)/8), mientras que para Blanca será 2,2 ((8-1.4)/3).
La cartera que maximiza el ratio de Sharpe se encuentra resolviendo el siguiente problema:

$$\begin{aligned} max_x \qquad & \frac{\mu^T x - r_f}{(x^T Qx)^{\frac{1}{2}}} \\ & Ax = b, \\ & Cx \geq 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

De esta forma, este problema no es fácil de resolver. A pesar de que tiene una bonita región factible poliédrica, su función objetiv0 es algo complicada, y lo peor, es posiblemente no cóncava. Por lo tanto, (3.6) no es un problema de optimización convexa. La estrategia estándar de encontrar la cartera que maximiza del ratio de Sharpe, a menudo llamada la cartera de riesgo óptima, es la siguiente: En primer lugar, se traza la frontera eficiente. Entonces, el punto en este gráfico correspondiente a la cartera de riesgo óptima se encuentra en el punto de la línea que va a través del punto que representa el activo sin riesgo y es tangente a la frontera eficiente. Una vez que este punto se identifica, se puede recuperar la composición de esta cartera.
Aquí se describe un método directo para obtener la cartera de riesgo óptima mediante la construcción de un problema de programación cuadrática convexa equivalente a (3.6). El único supuesto que necesitamos es que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ para cualquier cartera factible x. Esta es una suposición natural ya que los x_i's son las proporciones de la cartera en diferentes clases de activos.

En primer lugar, observar que el uso de la relación e^Tx = 1 con e = $[1\ 1\ \ldots 1]^T$, h(x) puede ser reescrita como una función homogénea de x.
Llamamos a esta función g(x):

$$\mathrm{h(x)} = \frac{\mu^T x - r_f}{\sqrt{x^T Q x}} = \frac{(\mu - r_f e)^T x}{\sqrt{x^T Q x}} := \mathrm{g(x)} = \mathrm{g}\left(\frac{x}{\kappa}\right),\ \forall \kappa \geq 0,$$

El vector $\mu - r_f$ es el vector de retornos en exceso de la tasa de interés activa libre de riesgo.
A continuación, homogeneizamos χ = {x : Ax = b, Cx ≥ d} aplicando la técnica *lifting*, i.e., consideramos el conjunto χ^+:

$$\chi^+ \ = \ \{x \in \mathbb{R}, \kappa \in \mathbb{R} | \kappa > 0, \frac{x}{\kappa} \in \chi\} \cup (0,0). \tag{3.7}$$

Añadimos el vector (0,0) al conjunto para lograr un conjunto cerrado. Cuando χ es poliédrica, $\chi\ = \{x | Ax\ \geq\ b, Cx\ =\ d\}$, tenemos $\chi^+\ =\ \{(x,\kappa)|Ax - b\kappa\ \geq\ 0, Cx - d\kappa\ =\ 0, \kappa\ \geq\ 0\}$. Ahora, usando la observación de que h(x) = g(x); ∀x ∈ χ y que g(x) es homogénea, se concluye que (3.6) es equivalente a:

$$max \ \ g(x) \quad s.t(x,\kappa) \in \chi^+ \tag{3.8}$$

De nuevo, usando la observación de que g(x) es homogénea, se ve que añadiendo la restricción de normalización $(\mu - r_f e)^T x = 1$ no afecta a la solución óptima. Por lo tanto, sustituyendo $(\mu - r_f e)^T x$ = 1 dentro de g(x), nosotros obtenemos el siguiente resultado:

$$max \ \ \frac{1}{\sqrt{x^T Q x}} \qquad s.t.\ (x^+, \kappa^+) \ \in \ \chi^+,\ (\mu - r_f e)^T x = 1.$$

Por tanto, tenemos que:
Dado un conjunto χ de las carteras factibles con la propiedad de que $e^T x = 1$, $\forall x \ \in \ \chi$, la cartera x^* con el máximo ratio de Sharpe en este conjunto se puede encontrar resolviendo el siguiente problema con una función objetivo cuadrática convexa

$$min \ \ x^T Q x \quad s.t.\ (x^+, \kappa^+) \ \in \ \chi^+,\ (\mu - r_f e)^T x = 1. \tag{3.9}$$

con χ^+ como en (3.7). Si $x,\ \kappa$ es la solución de (3.9) entonces $x^* = x\kappa$. Este último problema se puede resolver utilizando las técnicas que hemos discutido los problemas de programación cuadrática convexa.

Se puede concluir que el objetivo de la administración activa de portafolios es la de incrementar la pendiente del CAL, vale decir que, idealmente, los clientes preferirán invertir sus fondos con los gestores más hábiles, que de manera consistente obtengan el mayor indicador de Sharpe y que, presumiblemente, tengan habilidades reales para realizar mejores pronósticos.

Como en todos los métodos anteriores, vamos a resolver un ejemplo con SOLVER. Usando los datos del apartado anterior y suponiendo un r_f del 4 %.

Datos				
Matriz Covarianzas	a	b	c	
a	0,02778	0,00387	0,00021	
b	0,00387	0,01112	-0,0002	
c	0,00021	-0,0002	0,00115	r_f
				0,04
Media Aritmética	0,1206	0,0785	0,0632	
Variables				
x_a	16,02			
x_b	3,76			
x_c	-18,77			
Objetivo	8,0558			
Restricciones				
1,00	=	1		
1,00	=	1		

Bibliografía

[1] Cornuejols, Gerard y tütüncü, Reha, *Optimization Methods in Finance*,Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 15213 USA, Summer 2005.

[2] MENDIZÁBAL ZUBELDIA, ALAITZ, MIERA ZABALZA, LUIS M.ª y ZUBIA ZUBIAURRE, MARIAN,*El modelo de Markowitz en la gestión de carteras*,Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea.

[3] *Programa de Gestión Financiero*, Nivel II, FIKAI<http://www.fikai.com>

[4] Patricio Gálvez, Patricio,Salgado, Marcelo y {textscGutiérrez, Mauricio, *OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS DE INVERSIÓN MODELO DE MARKOWITZ Y ESTIMACIÓN DE VOLATILIDAD CON GARCH*

[5] Martínez Plasencia, Adrián, *Gestión de carteras de inversión*, Trabajo Fin de Grado, Año 2013

[6] Moreno, J. David y Gutiérrez, Maria, *Tema 4- TEORÍA DE CARTERAS*, Economía Financiera, Universidad Carlos III de Madrid.

[7] *Manual de opciones y futuros*, Segunda edición, Inversión.

[8] <http://www.fundspeople.com/noticias/la-importancia-del-ratio-de-sharpe-a-la-hora-de-seleccionar-fondos-91843>

[9] <http://economipedia.com/definiciones/opciones-financieras-tipos-y-ejemplo.html>

[10] <http://es.slideshare.net/Leytonn/3-ejercicios-rentabilidad-y-riesgo-de-carteras>