UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas

Departamento de Análisis Matemático

MONSTRUOS DE WEIERSTRASS

Trabajo Fin de Grado

presentado por

Pablo José Gerlach Mena

Directores:

María del Carmen Calderón Moreno

José Antonio Prado Bassas

Sevilla, Septiembre de 2015

Índice general

Abstract

Since the nineteenth century nowhere differentiable continuous functions have aroused the interest of both mathematicians and the general public due to its strong counter-intuitive character. In all this time, it has gone from defending its absence to show that not only are not "rare" but most continuous functions are nowhere differentiable. Throughout this report we will focus on the study of so called "Weierstrass Monsters".

This work is divided into four chapters. In the first one, so that reading is self-contained, we will make a brief review of basic notions and concepts of Mathematical Analysis, Series of Functions, Functional Analysis and Topology that we will use in later chapters.

In the second chapter we will see the first example of Weierstrass Monster and we will study the classic examples of Bolzano and van der Waerden.

In the third chapter we focus on the topological study of Monsters. We show that they form a set of second category and conclude its residuality in the space of continuous functions.

Finally, in the fourth chapter, we will see some algebraic structures inside the set of Monsters such as lineability or algebrability, connecting with some modern results in this field.

The completion of this work has allowed to introduce us into a line of research that combines concepts from Functional Analysis, Topology and Linear Algebra. It is a booming field in recent decades, although its origins date back to the late nineteenth century.

The bibliography has been divided into two parts. First we highlight the *Main bibliography*, which has collected the references that have been handled with greater intensity to the performance of work. Furthermore, under the heading *Other references* we have included a collection of some of the most important papers in the literature, both classical and modern, and illustrate the importance that the study of nowhere continuous functions has purchased.

Resumen

Desde el siglo XIX las funciones continuas no derivables en ningún punto han llamado la atención tanto de los matemáticos como del público en general debido a su fuerte carácter antiintuitivo. En todo este tiempo, se ha pasado desde la defensa de su no existencia hasta la demostración de que no solo no son "raras" sino que son mayoría. A lo largo de la presente memoria nos centraremos en su estudio y llamaremos "Monstruo de Weierstrass" a toda función continua no derivable en ningún punto.

Este trabajo se dividirá en cuatro capítulos. En el primero de ellos, con el fin de que la lectura sea autocontenida, realizaremos un breve repaso de las nociones y conceptos básicos del Análisis Matemático, Series de Funciones, Análisis Funcional y Topología que usaremos en los capítulos posteriores.

En el segundo Capítulo veremos el primer ejemplo de "Monstruo de Weierstrass" que da nombre a este tipo de funciones. Para finalizar, estudiaremos los ejemplos clásicos de Bolzano y van der Waerden.

En el Capítulo tercero nos centraremos en el estudio topológico de los Monstruos. Demostraremos que conforman un conjunto de segunda categoría y concluiremos la residualidad del mismo en el espacio de las funciones continuas.

Por último, en el cuarto Capítulo, finalizaremos la memoria buscando algunas estructuras algebraicas dentro del conjunto de Monstruos, tales como la lineabilidad o la algebrabilidad, enlazando con algunas resultados modernos en este campo.

La realización del presente trabajo nos ha permitido adentrarnos en una línea de investigación que conjuga conceptos propios del Análisis Funcional, la Topología o el Álgebra Lineal. Se trata de un campo en auge en las últimas décadas, aunque sus

orígenes se remonten a finales del siglo XIX.

La bibliografía la hemos dividido en dos partes. En primer lugar destacamos la *Bibliografía fundamental*, en la que hemos recogido las referencias que se han manejado con mayor intensidad para la realización del trabajo. Por otro lado, bajo el epígrafe de *Otras referencias* hemos incluido una colección de algunos de los artículos más importantes en la literatura, tanto clásicos como modernos, y que ilustran la importancia que el estudio de las funciones continuas no derivables en ningún punto ha adquirido.

Introducción

Cuando se trabaja con funciones derivables, a menudo se piensa que éstas deben tener un comportamiento regular, en parte al hecho de que deben ser continuas y en parte porque en la práctica siempre nos hemos encontrado con que esto era así. Nada más lejos de la realidad.

El 18 de julio de 1872, el matemático Karl Weierstrass [21] conmocionó a toda la comunidad matemática al presentar, ante la Real Academia de las Ciencias de Berlín, el primer ejemplo conocido de una función continua no derivable en ningún punto de $\mathbb{R}$.

A pesar de que posteriormente fueron muchos los matemáticas que siguieron buscando y construyendo ejemplos de funciones con estas características, y que incluso con anterioridad autores como Bolzano conocían de la existencia de las mismas, las funciones continuas no derivables en ningún punto han pasado a ser conocidas como "Monstruos de Weierstrass".

En el presente Trabajo veremos algunas de estas funciones, y que el conjunto $\mathcal{ND}([0,1])$ de todas las funciones continuas no derivables en ningún punto de $[0,1]$ es topológicamente grande. En este sentido, los autores Banach [7] y Mazurkiewicz [15] probaron que $\mathcal{ND}([0,1])$ es un conjunto residual en el espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}([0,1])$, convirtiendo así en algo excepcional el hecho de que una función continua poseyera derivada en algún punto.

A partir de estos resultados se desarrolló una gran atracción por la búsqueda de grandes estructuras que cumplieran ciertas propiedades para este tipo de funciones. A lo largo del Trabajo manejaremos la definición de lineabilidad acuñada por V. I.

Gurariy [11]. Esta definición se basa en la existencia de un espacio lineal infinito Y tal que $Y \subset \mathcal{ND}([0,1]) \cup \{0\}$.

Aunque Gurariy fue el primero en dar una prueba no constructiva de la $\aleph_0$-lineabilidad de $\mathcal{ND}([0,1])$, la lineabilidad de esta clase de funciones ha sido estudiada en profundidad. Los autores V. Fonf, V. Gurariy y V. Kadets [10] probaron en 1999 que el conjunto $\mathcal{ND}([0,1])$ era espaciable. Pero podemos afirmar mucho más. L. Rodríguez-Piazza [17] demostró que el espacio X en [10] puede escogerse isométricamente isomorfo a cualquier espacio de Banach separable.

En este Trabajo haremos una recopilación de algunos resultados acerca de lo mencionado anteriormente. Veremos la demostración original del propio Weierstrass [21], haremos un breve recorrido histórico por algunas de las funciones más importantes y profundizaremos en el aspecto topológico de las mismas. Gracias al Teorema de Baire seremos capaces de demostrar la residualidad de $\mathcal{ND}([0,1])$. Pero no nos limitaremos a recopilar los resultados existentes, sino que modificaremos alguna demostración original y completaremos o mejoraremos otras tantas, con el objetivo de unificar la notación utilizada a lo largo del estudio de estos temas.

Comenzaremos viendo en el Capítulo 1 algunas definiciones básicas y resultados necesarios relacionados con Series de Funciones, Análisis Funcional o Topología con el objetivo de facilitar la comprensión de los posteriores capítulos. Daremos diversos criterios de convergencia uniforme de series de funciones y hablaremos sobre espacios métricos, de Banach, residualidad y del Teorema de Categoría de Baire.

En el Capítulo 2 empezaremos viendo la demostración original de Weierstrass, la cual mejoraremos para hacer más fácil su comprensión. Continuaremos con algunos ejemplos clásicos como la función de Bolzano o la función de van der Waerden (esta última muy útil para demostrar posteriormente la espaciabilidad de $\mathcal{ND}([0,1])$), viendo al final algunas mejoras a las condiciones del Teorema de Weierstrass (Teorema 2.1) proporcionadas por Hardy [13].

Una vez introducidos los conceptos de residualidad, en el Capítulo 3 usaremos el Teorema de Categoría de Baire para demostrar, gracias a Banach [7] y Mazurkiewicz [15], que el conjunto $\mathcal{ND}([0,1])$ es de segunda categoría, concluyendo además que es residual en $\mathcal{C}([0,1])$.

Por último, en el Capítulo 4, estudiaremos el tamaño algebraico del conjunto formado por este tipo de funciones, es decir, aquellas estructuras algebraicas que tanto han fascinado a los matemáticos centrados en este área en las últimas décadas. Veremos la $\aleph_0$-lineabilidad de Gurariy y la $\mathfrak{c}$-lineabilidad. Además, no solo conseguiremos probar la lineabilidad densa, sino que el propio Gurariy junto con V. Fonf y V. Kadets [10] fueron capaces de demostrar la espaciabilidad (e incluso un poco más allá). Finalizaremos viendo otro tipo de estructuras algebraicas, como la algebrabilidad, y algunos resultados importantes.

Capítulo 1

Preliminares

Con el fin de que el presente trabajo sea autocontenido vamos a ver algunos de los conceptos básicos con los que trabajaremos a lo largo del mismo, así como algunos resultados que nos serán de gran utilidad a la hora de estudiar ciertas funciones.

1.1. Espacios métricos

La definición de los espacios métricos y normados, así como sus propiedades fundamentales son conocidas de los cursos básicos de cálculo. Vamos a ser breves recordando algunos conceptos.

Definición 1.1. *Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto. Una aplicación $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ se llama métrica o distancia sí y solo sí para todo $x, y, z \in X$ se verifican:*

(i) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$,

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

El par (X, d) se llama entonces espacio métrico.

Definición 1.2. *Sea* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *y sea* X *un espacio lineal (vectorial) sobre* $\mathbb{K}$. *Una aplicación* $|| \cdot || : X \longrightarrow [0, +\infty)$ *se llama norma sobre* X *sí y solo sí se verifican:*

(i) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = \theta$, *siendo* θ *el elemento nulo de* X,

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in X$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$.

El par $(X, \|\cdot\|)$ *se llama entonces espacio normado (sobre* $\mathbb{K}$*).*

Teorema 1.3. *Si* $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado, entonces* (X, d) *es un espacio métrico con respecto a la métrica*

$$d(x, y) := \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Todo espacio normado puede ser considerado por lo tanto de forma natural como un espacio métrico. En lo siguiente, cuando hablemos de espacios normados como espacios métricos consideraremos siempre la métrica inducida por la norma. En este sentido, todas las definiciones y propiedades de espacios métricos inducirán inmediatamente los correspondientes equivalentes en espacios normados.

1.2. Convergencia de funciones y series

A lo largo del presente trabajo vamos a estar tratando continuamente con series infinitas, por lo que nos serán de gran utilidad algunos conceptos sobre convergencia.

Definición 1.4. *Sea* $f_n : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *para* $n = 1, 2, \ldots$ *una sucesión de funciones en* A, *y sea* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. *Diremos que* f_n *converge uniformemente a* f *en* A *cuando* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq k$ *y* $\forall x \in A$.

Teorema 1.5. *Sea* $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una sucesión de funciones tales que* $f_n \to f$ *uniformemente en* A. *Sea* $x_0 \in A$. *Si cada* f_n *es continua en* x_0, *entonces* f *es continua en* x_0. *En particular, si cada* f_n *es continua en* A, *entonces* f *es continua en* A.

Definición 1.6. *Dada la sucesión de funciones $f_n : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que la serie de funciones $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en A a la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ cuando la sucesión de las sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \to f$ converge uniformemente en A.*

Análogamente al resultado proporcionado por el Teorema 1.5 se obtiene la continuidad de S si cada término de la suma f_n es continuo.

Teorema 1.7 (Condición de Cauchy). *Sea $f_n : A \subset\longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones. Son equivalentes:*

(a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ uniformemente en A para cierta función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

(b) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\sum_{j=n}^{m} f_j(x)\right| < \varepsilon \ \forall x \in A, \forall m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$.

Teorema 1.8 (Teorema M de Weierstrass). *Sea $f_n : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones. Supongamos que existe una serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $|f_n(x)| \leq a_n \ \forall x \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en A.*

1.3. Espacios de Banach clásicos

En esta sección recordaremos brevemente algunos espacios de Banach clásicos del Análisis Matemático con los que trabajaremos recurrentemente.

Definimos el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ como $\mathcal{C}([a, b]) := \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ f \text{ es continua en } [a, b]\}$.

Teorema 1.9. *El espacio $\mathcal{C}([a,b])$ dotado de la norma del supremo dada por*

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

es un espacio de Banach.

Consideremos un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y el espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}([a,b])$ con la distancia inducida por la norma del supremo. Entonces el conjunto de los polinomios

$$\mathcal{P} := \left\{ p(x) := \sum_{i=0}^{N} a_i x^i \; : \; N \in \mathbb{N} \right\}$$

es denso en $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

1.4. Categoría

Vamos a introducir los conceptos de categoría y residualidad que nos serán de gran utilidad a la hora de profundizar en el estudio de la cantidad de "Monstruos" que existe o podemos encontrar. El Teorema de Baire nos será de gran ayuda, ya que estaremos trabajando siempre en espacios métricos. Dado $A \subset X$, denotamos por $\overline{A}$ a su clausura y por $\mathrm{int}(A)$ a su interior. Comenzaremos viendo un par de conceptos previos.

Definición 1.10. *Sea (X,d) un espacio metrico:*

1. *Un subconjunto $M \subset X$ se llama denso en X si $\overline{M} = X$.*
2. *Un subconjunto $M \subset X$ se llama denso en ninguna parte si $int(\overline{M}) = \emptyset$.*

Definición 1.11. *Sea (X,d) un espacio metrico y $M \subset X$:*

1. *M se dice que es de primera categoría si M puede escribirse como la unión numerable de subconjuntos densos en ninguna parte de X.*
2. *Si M no es de primera categoría se llama entonces de segunda categoría.*

Definición 1.12. *Decimos que un espacio topológico X es de Baire si todo subconjunto de X, abierto y no vacío, es de segunda categoría.*

Definición 1.13. *Si el espacio topológico X es de Baire, decimos que un subconjunto $A \subset X$ es residual si su complementario es de primera categoría.*

En este aspecto, podemos interpretar que los conjuntos residuales de un espacio topológico de Baire X son topológicamente grandes.

Teorema 1.14 (Baire). *Todo conjunto abierto no vacío de un espacio métrico completo (X, d) es de segunda categoría. En particular, X es de Baire.*

Demostración. Sea $M \neq \emptyset$ un conjunto abierto. Por reducción al absurdo, supongamos que M no fuera de segunda categoría. Entonces, M sería de primera categoría, por lo que existiría una sucesión $\{M_n\}$ de subconjuntos de X tal que:

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \qquad \text{y} \qquad \operatorname{int}(\overline{M_n}) = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dado un elemento $x_0 \in M$, existe $r_0 > 0$ tal que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset M$, donde $B(x, r)$ denota a la bola abierta de centro x y radio r y $\overline{B}(x, r)$ a la bola cerrada.

Debido a que M_1 es denso en ninguna parte, existe una bola cerrada $\overline{B}(x_1, r_1) \subset \overline{B}(x_0, r_0/2)$ (por tanto $\overline{B}(x_1, r_1) \subset M$) tal que $\overline{B}(x_1, r_1) \cap M_1 = \emptyset$. De nuevo, debido a que M_2 es denso en ninguna parte, existe una bola cerrada $\overline{B}(x_2, r_2) \subset \overline{B}(x_1, r_1/2)$ con $\overline{B}(x_2, r_2) \cap M_2 = \emptyset$. Repitiendo este argumento inductivamente encontramos una sucesión de puntos $\{x_n\}$ y de radios $\{r_n\}$ (con $0 < r_n \leq r_0 2^{-n}$) satisfaciendo que:

(i) $\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \overline{B}(x_n, r_n) \subset M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = 0$.

(iii) $\overline{B}(x_n, r_n) \cap M_n = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, existe un único $\widetilde{x} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n) \subset M$. Sin embargo, por construcción de las bolas $\overline{B}(x_n, r_n)$ tenemos que $\widetilde{x} \notin M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego en particular $\widetilde{x} \notin M$, lo cual es una contradicción. □

Corolario 1.15. *Si M es de primera categoría en un espacio métrico completo (M, d) entonces $X \backslash M$ es denso en X.*

Demostración. Sea $N := X \backslash M$, y supongamos que existe $a \in X \backslash \overline{N}$. Debido a que $\overline{N}$ es un conjunto cerrado, tenemos que $\operatorname{dist}(a, \overline{N}) > 0$. En consecuencia, existe una bola abierta $B(a, \varepsilon)$ tal que $B(a, \varepsilon) \cap N = \emptyset$, es decir, $B(a, \varepsilon) \subset M$. Pero por el Teorema de Baire 1.14, $B(a, \varepsilon)$ es de segunda categoría, y por lo tanto también lo sería M, lo cual es una contradicción. □

Capítulo 2

Algunos ejemplos clásicos: Weierstrass, Bolzano y Van der Waerden

A principios del siglo XIX, el pensamiento general de la comunidad matemática era que una función continua debía poseer derivada en un conjunto significante de puntos, en el sentido de que la derivada podía no existir o ser infinita en algunos puntos aislados del dominio de la función, como ocurre por ejemplo con la función valor absoluto $f(x) = |x|$.

Esto es debido a que, en general, estaban más interesados en el cálculo explícito de la derivada de una función que en la hipotética existencia de una función continua que no poseyera derivada en ningún punto, lo cual había sido posible en la mayoría de los casos, exceptuando algunos puntos singulares del dominio.

Son estos hechos los que llevaron a la errónea creencia de que toda función continua iba a poseer derivada. Incluso el matemático y físico francés André-Marie Ampére [6] trató de consolidar, sin éxito, este pensamiento con una justificación teórica en su artículo de 1806 (sin embargo, no se tiene la certeza de si trataba de probarlo para toda función continua o para algún subconjunto menor).

Usando la cita que nos proporciona Hermite en una carta dirigida a Stieltjes fechada a 20 de mayo de 1893:

> *"Me alejo con miedo y horror de la lamentable plaga de funciones continuas que no poseen derivada..."*

no es de extrañar la reacción de los matemáticos del sigo XIX ante la existencia de este tipo de funciones.

Sin embargo, la respuesta afirmativa a la existencia de funciones continuas no derivables en ningún punto por parte de K. Weierstrass en 1872 [21] ocasionó una reconsideración del concepto de función continua y un incremento del rigor en el Análisis Matemático, tratando de evitar el engaño que podía ocasionar la intuición geométrica en estos aspectos.

Tras la publicación de la función de Weierstrass, muchos otros autores han tratado de construir funciones de similares características. Nosotros nos centraremos en la función original de Weierstrass, haremos un breve repaso por la función de Bolzano y finalizaremos viendo el ejemplo construido en el año 1930 por el matemático B. van der Waerden [20].

En la actualidad, las funciones continuas no derivables en ningún punto están siendo fundamentales en nuevas áreas de investigación y aplicaciones tales como los fractales, el caos o las ondas, por ejemplo.

2.1. Monstruos de Weierstrass

El 18 de julio de 1872 el matemático alemán Karl Weierstrass conmocionó a toda la comunidad matemática al presentar, durante una conferencia en la Real Academia de las Ciencias de Berlín, el primer ejemplo de una función continua no derivable en ningún punto. La función en cuestión venía definida por

$$W(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x),$$

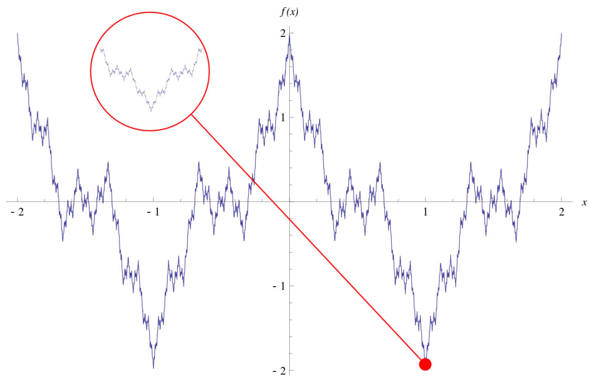

Figura 2.1: Función de tipo Weierstrass

siendo $a \in \mathbb{R}$ con $0 < a < 1$ y b un entero impar mayor que 1 verificando que $ab > 1 + \dfrac{3\pi}{2}$.

Durante su conferencia Weierstrass dijo que:

> *"Hasta la fecha se ha supuesto en general, que una función concreta continua de variable real siempre posee una primera derivada, cuyo valor podría ser indeterminado o infinito solo en unos valores aislados. Incluso en los artículos de Gauss, Cauchy o Dirichlet no se encuentra, por lo que sé, declaración alguna de la cual pueda deducirse innegablemente, que estos matemáticos, los cuales en su conocimiento estaban acostumbrados a realizar las críticas más fuertes, fueran de otra opinión. Primero Riemann, como he podido llegar a saber por algunos de sus pupilos, ha expresado con seguridad (en el año 1861 o quizás incluso antes) que toda suposición es ilícita, y que por ejemplo la función construida a través de la serie infinita*
>
> $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2x)}{n^2}$$
>
> *no resulta cierta. Lamentablemente la prueba de Riemann de este hecho no ha sido publicada, y tampoco parece conservarse en sus artículos o por transimisión oral. Es para lamentarlo más aún, ya que no he podido llegar a saber ni una sola vez con seguridad cómo Riemann ha sido capaz de explicar cara a cara a sus pupilos estos hechos con total claridad. Los*

matemáticos que, tras el conocimiento de la hipótesis de Riemann en más círculos, se han ocupado del tema, parecen haber sido de la opinión (al menos en su mayoría) que basta probar la existencia de funciones, las cuales se puedan representar en un intervalo tan pequeño de los valores de su argumento, donde no son derivables. Que existen funciones de este tipo se deja probar de forma extraordinariamente sencilla, y creo por ello, que Riemann solo tuvo en mente funciones que no poseían un cociente diferencial para ningún valor de su argumento. La prueba para ello, de que la serie anterior establece una función de estas características me resulta mientras tanto bastante complicada; se pueden construir fácilmente sin embargo funciones continuas de argumento real x, para las cuales puede demostrarse, con los medios más sencillos, que no poseen un cociente diferencial finito para ningún valor de x. Esto puede ocurrir de la siguiente manera.”

ÜBER CONTINUIRLICHE FUNCTIONEN EINES REELLEN ARGUMENTS, DIE FÜR KEINEN WERTH DES LETZTEREN EINEN BESTIMMTEN DIFFERENTIALQUOTIENTEN BESITZEN.

(Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 18. Juli 1872.)

Bis auf die neueste Zeit hat man allgemein angenommen, dass eine eindeutige und continuirliche Function einer reellen Veränderlichen auch stets eine erste Ableitung habe, deren Werth nur an einzelnen Stellen unbestimmt oder unendlich gross werden könne. Selbst in den Schriften von Gauss, Cauchy, Dirichlet findet sich meines Wissens keine Äusserung, aus der unzweifelhaft hervorginge, dass diese Mathematiker, welche in ihrer Wissenschaft die strengste Kritik überall zu üben gewohnt waren, anderer Ansicht gewesen seien. Erst Riemann hat, wie ich von einigen seiner Zuhörer erfahren, mit Bestimmtheit ausgesprochen (i. J. 1861, oder vielleicht auch schon früher), dass jene Annahme unzulässig sei und z. B. bei der durch die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

dargestellten Function sich nicht bewahrheite. Leider ist der Beweis hierfür von Riemann nicht veröffentlicht worden und scheint sich auch nicht in seinen Papieren oder durch mündliche Überlieferung erhalten zu haben. Dieses ist um so mehr zu bedauern, als ich nicht einmal mit Sicherheit habe erfahren können, wie Riemann seinen Zuhörern gegenüber sich ausgedrückt hat. Die Mathematiker, welche sich, nachdem die Riemann'sche Behauptung in weiteren Kreisen bekannt geworden war, mit dem Gegenstande beschäftigt haben, scheinen (wenigstens in ihrer Mehrzahl) der Ansicht gewesen zu sein,

Figura 2.2: Artículo original de K. Weierstrass

Teorema 2.1 (Weierstrass, 1872). *La función $W : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada a través de*

$$W(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

donde $0 < a < 1$, $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ y b es un entero impar mayor que 1, es una función continua no derivable en ningún punto.

Demostración. Vamos a comenzar viendo que la función $W(x)$ está bien definida, es decir, que las sumas parciales de $W(x)$ convergen uniformemente. Para ello, y con el objetivo de utilizar el Teorema M de Weierstrass (Teorema 1.8) acotamos cada uno de los términos que aparecen en dicha suma

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |a^k \cos(b^k \pi x)| \leq |a^k| = a^k.$$

Como la suma $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} < +\infty$, las sumas parciales $\sum_{k=0}^{n} a^k \cos(b^k \pi x)$ convergen uniformemente en $\mathbb{R}$. Debido a que el límite uniforme de funciones continuas es una función continua, tenemos además que $W \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Pasamos a continuación a la prueba de la no derivabilidad de $W(x)$ en ningún punto $x \in \mathbb{R}$. Demostraremos para ello que dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario los límites de los cocientes incrementales laterales derecho e izquierdo en x_0 no coinciden.

Dado $m \in \mathbb{N}$ arbitrario, escojemos $\alpha_m \in \mathbb{Z}$ de modo que $x_{m+1} := b^m x_0 - \alpha_m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, lo cual siempre es posible, ya que basta tomar

$$\alpha_m := \begin{cases} \lfloor b^m x_0 \rfloor & \text{si } \{b^m x_0\} \leq 1/2, \\ \lfloor b^m x_0 \rfloor - 1 & \text{si } \{b^m x_0\} > 1/2, \end{cases}$$

siendo $\lfloor y \rfloor$, $\{y\}$ las partes entera y fraccionarias respectivamente de $y \in \mathbb{R}$, de modo que $y = \lfloor y \rfloor + \{y\}$. Definimos los puntos que nos servirán para estudiar los cocientes incrementales a derecha e izquierda de x_0

$$y_m := \frac{\alpha_m - 1}{b^m}, \qquad z_m := \frac{\alpha_m + 1}{b^m}.$$

Observemos que

$$y_m - x_0 = \frac{\alpha_m - 1}{b^m} - x_0 = \frac{\alpha_m - 1 - b^m x_0}{b^m} = -\frac{1 + x_{m+1}}{b^m} < 0,$$

$$z_m - x_0 = \frac{\alpha_m + 1}{b^m} - x_0 = \frac{\alpha_m + 1 - b^m x_0}{b^m} = \frac{1 - x_{m+1}}{b^m} > 0.$$

Así, $y_m < x_0 < z_m$. Por otra parte $z_m - y_m = \dfrac{2}{b^m} \to 0$ porque $b > 1$. Luego, se tiene que $y_m \to x_0^-$ y $z_m \to x_0^+$.

Comenzaremos estudiando el cociente diferencial lateral izquierdo asociado al punto y_m

$$\begin{aligned}
\frac{W(y_m) - W(x_0)}{y_m - x_0} &= \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \frac{\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)}{y_m - x_0} = \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \left((ab)^k \frac{\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)}{b^k (y_m - x_0)} \right) + \\
&\quad + \sum_{k=m}^{+\infty} \left(a^{m+k} \frac{\cos(b^{m+k} \pi y_m) - \cos(b^{m+k} \pi x_0)}{y_m - x_0} \right) =: S_1 + S_2.
\end{aligned}$$

Con el objetivo de acotar cada una de las sumas por separado empezaremos por S_1. Debido a que $\left| \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \right| \leq 1$ y haciendo uso de la fórmula trigonométrica de la conversión de la suma de cosenos en producto de senos

$$\cos(A) - \cos(B) = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

podemos acotar

$$\begin{aligned}
|S_1| &= \left| \sum_{k=0}^{m-1} \left((ab)^k \frac{\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)}{b^k (y_m - x_0)} \right) \right| = \\
&= \left| \sum_{k=0}^{m-1} (ab)^k (-\pi) \operatorname{sen}\left(b^k \pi \frac{y_m + x_0}{2} \right) \frac{\operatorname{sen}\left(b^k \pi \frac{y_m - x_0}{2} \right)}{b^k \pi \frac{y_m - x_0}{2}} \right| \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1} \pi (ab)^k = \pi \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1} \leq \frac{\pi (ab)^m}{ab - 1}. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Por otro lado, para tratar de acotar S_2 intentaremos reescribir adecuadamente los términos que intervienen en dicha suma

$$\begin{aligned}\cos(b^{m+k}\pi y_m) &= \cos\left(b^{m+k}\pi\frac{\alpha_m - 1}{b^m}\right) = \cos(b^k\pi(\alpha_m - 1)) = \\ &= \cos(b^k\pi\alpha_m)\cos(-b^k\pi) - \operatorname{sen}(b^k\pi\alpha_m)\operatorname{sen}(-b^k\pi)\end{aligned}$$

Pero $b \in \mathbb{N}$ es impar, luego $\cos(-b^k\pi) = -1$ y $\operatorname{sen}(-b^k\pi) = 0$, luego

$$\cos(b^{m+k}\pi y_m) = -\cos(b^k\pi\alpha_m) = -\left((-1)^{b^k}\right)^{\alpha_m} = -(-1)^{\alpha_m}. \tag{2.2}$$

Análogamente, usando la fórmula trigonométrica del coseno de una suma y que $\alpha_m, b \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\begin{aligned}\cos(b^{m+k}\pi x_0) &= \cos\left(b^{m+k}\pi\frac{\alpha_m + x_{m+1}}{b^m}\right) = \cos(b^k\pi(\alpha_m + x_{m+1})) = \\ &= \cos(b^k\pi\alpha_m)\cos(b^k\pi x_{m+1}) - \operatorname{sen}(b^k\pi\alpha_m)\operatorname{sen}(b^k\pi x_{m+1}) = \\ &= \left((-1)^{b^k}\right)^{\alpha_m}\cos(b^k\pi x_{m+1}) = (-1)^{\alpha_m}\cos(b^k\pi x_{m+1}).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Por (2.2) y (2.3) tenemos que

$$\begin{aligned}S_2 &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(a^{m+k}\frac{\cos(b^{m+k}\pi y_m) - \cos(b^{m+k}\pi x_0)}{y_m - x_0}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} a^{m+k}\frac{-(-1)^{\alpha_m} - (-1)^{\alpha_m}\cos(b^k\pi x_{m+1})}{-\dfrac{1 + x_{m+1}}{b^m}} = \\ &= (ab)^m(-1)^{\alpha_m}\sum_{k=0}^{+\infty} a^k\frac{1 + \cos(b^k\pi x_{m+1})}{1 + x_{m+1}}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Debido a que cada término que aparece dentro de la suma es no negativo y que $x_{m+1} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ podemos encontrar la siguiente cota inferior

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k\frac{1 + \cos(b^k\pi x_{m+1})}{1 + x_{m+1}} \geq \frac{1 + \cos(\pi x_{m+1})}{1 + x_{m+1}} \geq \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Así

$$\begin{aligned}\frac{W(y_m)-W(x_0)}{y_m-x_0} &= S_1+S_2 = \\ &= (-1)^{\alpha_m}(ab)^m\left[\frac{S_1}{\frac{(-1)^{\alpha_m}\pi(ab)^m}{ab-1}}\frac{\pi}{ab-1}+\frac{S_2}{\frac{2}{3}(-1)^{\alpha_m}(ab)^m}\frac{2}{3}\right]= \\ &= (-1)^{\alpha_m}(ab)^m\left(\varepsilon_1\frac{\pi}{ab-1}+\eta_1\frac{2}{3}\right),\end{aligned}$$

donde por (2.1) se tiene $\varepsilon_1 := \frac{S_1}{\frac{(-1)^{\alpha_m}\pi(ab)^m}{ab-1}} \in [-1,1]$ y por (2.4) tenemos que $\eta_1 := \frac{S_2}{\frac{2}{3}(-1)^{\alpha_m}(ab)^m} > 1$.

Análogamente, estudiamos el cociente diferencial lateral derecho asociado a z_m.

$$\begin{aligned}\frac{W(z_m)-W(x_0)}{z_m-x_0} &= \sum_{k=0}^{+\infty} a^k\frac{\cos(b^k\pi z_m)-\cos(b^k\pi x_0)}{z_m-x_0} = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\left((ab)^k\frac{\cos(b^k\pi z_m)-\cos(b^k\pi x_0)}{b^k(z_m-x_0)}\right)+ \\ &\quad +\sum_{k=0}^{+\infty}\left(a^{m+k}\frac{\cos(b^{m+k}\pi z_m)-\cos(b^{m+k}\pi x_0)}{z_m-x_0}\right) =: T_1+T_2.\end{aligned}$$

Del mismo modo al realizado para la suma S_1 llegamos a la acotación

$$|T_1| = \left|\sum_{k=0}^{m-1}\left((ab)^k\frac{\cos(b^k\pi z_m)-\cos(b^k\pi x_0)}{b^k(z_m-x_0)}\right)\right| \leq \frac{\pi(ab)^m}{ab-1}. \tag{2.5}$$

La diferencia a la hora de estudiar los sumandos de T_2 como hicimos con S_2 es que ahora tenemos que

$$\begin{aligned}\cos(b^{m+k}\pi z_m) &= \cos(\left(b^{m+k}\pi\frac{\alpha_m+1}{b^m}\right) = \cos(b^k\pi(\alpha_m+1)) = \\ &= \cos(b^k\pi\alpha_m)\cos(b^k\pi)-\operatorname{sen}(b^k\pi\alpha_m)\operatorname{sen}(b^k\pi) = \\ &= -\cos(b^k\pi\alpha_m) = -\left((-1)^{b^k}\right)^{\alpha_m} = -(-1)^{\alpha_m}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Esto nos proporciona en este caso la reescritura de la suma dada por T_2 del siguiente modo

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(a^{m+k}\frac{\cos(b^{m+k}\pi z_m)-\cos(b^{m+k}\pi x_0)}{z_m-x_0}\right)= \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} a^{m+k}\frac{-(-1)^{\alpha_m}-(-1)^{\alpha_m}\cos(b^k\pi x_{m+1})}{\dfrac{1-x_{m+1}}{b^m}}= \\ &= -(ab)^m(-1)^{\alpha_m}\sum_{k=0}^{+\infty} a^k\frac{1+\cos(b^k\pi x_{m+1})}{1-x_{m+1}}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

siendo posible la obtención de la siguiente cota inferior

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k\frac{1+\cos(b^k\pi x_{m+1})}{1-x_{m+1}} \geq \frac{1+\cos(\pi x_{m+1})}{1-x_{m+1}} \geq \frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Razonando de forma análoga al caso del cociente diferencial izquierdo asociado a y_m, tenemos ahora para z_m que

$$\begin{aligned} \frac{W(z_m)-W(x_0)}{z_m-x_0} &= T_1+T_2= \\ &= -(-1)^{\alpha_m}(ab)^m\left[\frac{T_1}{\dfrac{-(-1)^{\alpha_m}\pi(ab)^m}{ab-1}}\frac{\pi}{ab-1}+\frac{T_2}{-\dfrac{2}{3}(-1)^{\alpha_m}(ab)^m}\frac{2}{3}\right]= \\ &= -(-1)^{\alpha_m}(ab)^m\left(\varepsilon_2\frac{\pi}{ab-1}+\eta_2\frac{2}{3}\right), \end{aligned}$$

donde por (2.5) se tiene $\varepsilon_2 := \dfrac{T_1}{\dfrac{-(-1)^{\alpha_m}\pi(ab)^m}{ab-1}} \in [-1,1]$ y por (2.7) tenemos que $\eta_2 := \dfrac{T_2}{-\dfrac{2}{3}(-1)^{\alpha_m}(ab)^m} > 1$.

Recordemos que las condiciones de nuestro teorema establecían que $ab > 1+\dfrac{3}{2}\pi$, lo cual es equivalente a decir que

$$\frac{\pi}{ab-1} < \frac{2}{3}.$$

Esto implica que los límites de los cocientes laterales tienen signo contrario, lo cual junto con que $(ab)^m \xrightarrow{m\to\infty} \infty$ debido a que $ab > 1$, concluimos que la función W no posee derivada en x_0. Debido a que el punto x_0 había sido arbitrariamente escogido en $\mathbb{R}$, se sigue que la función $W(x)$ no es derivable en ningún punto de $\mathbb{R}$. $\square$

Observación 2.2. A la hora de acotar las sumas S_2 y T_2, podemos tomar $\eta = \eta_1 = \eta_2$ en la desigualdad, ya que los puntos y_m, z_m no aparecen en las expresiones.

Definición 2.3. *Las funciones que verifican las condiciones del Teorema 2.1, es decir, aquellas que son continuas y no derivables en ningún punto de $\mathbb{R}$, se conocen actualmente como "Monstruos" de Weierstrass.*

La función de Weierstrass fue publicada en el año 1875 por Paul du Bois-Reymond [9], tras una serie de correcciones por parte de Weierstrass, convirtiéndose así en el primer ejemplo publicado de una función continua no derivable en ningún punto. Sin embargo, ni las construcciones de Weierstrass ni de Riemann fueron las primeras en esta dirección. Ya en el año 1830 el matemático checo B. Bolzano conocía este tipo de funciones, aunque sus resultados no fueron publicados hasta 1922. En torno a 1860 el suizo Charles Cellérier descubrió independientemente otro ejemplo, el cual no fue publicado hasta 1890. Incluso en 1870 H. Hankel proporciona otro ejemplo más.

En un artículo de G.H. Hardy en 1916 [13] el autor cita algunas de las últimas mejoras a las condiciones del Teorema 2.1 como la dada por Bromwich:

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi(1 - a),$$

la cual junto a la del propio Weierstrass restringen la existencia de un cociente diferencial finito o infinito. Para la no existencia de un cociente diferencial finito solo comenta las proporcionadas por:

(1) Dini: $ab \geq 1$ y $ab^2 > 1 + 3\pi^2$.

(2) Lerch: $ab \geq 1$ y $ab^2 > 1 + \pi^2$.

(3) Browmich: $ab \geq 1$ y $ab^2 > 1 + \frac{3}{4}\pi^2(1 - a)$.

Todas estas restricciones hacen referencia al caso en que b es un entero mayor que 1. Sin embargo, según Hardy comenta en su artículo, Dini nos asegura que si reemplazamos las condiciones (1) o (2) respectivamente por

(1') $ab \geq 1$ y $ab^2 > 1 + 15\pi^2 \dfrac{1-a}{5-21a}$,

(2') $ab > 1 + \dfrac{3}{2}\pi \dfrac{1-a}{1-3a}$,

podemos eliminar la restricción $b \in \mathbb{Z}$.

El propio Hardy da una demostración alternativa de la no derivabilidad en ningún punto de la función de Weierstrass cuando b es un entero usando series de Fourier y la Fórmula de Poisson, la cual es capaz de reemplazar más adelante escogiendo funciones adecuadas para probar la no derivabilidad en el caso de que b no sea un entero.

En años posteriores han sido numerosos los autores que han construido ejemplos de funciones continuas no derivables en ningún punto con alguna otra propiedad adicional.

2.2. La función de Bolzano

Quizás el primer ejemplo de una función continua no derivable en ningún punto sea debido al matemático checho Bernard Bolzano. Aunque fue descubierto en el año 1830, no pudo ser publicado hasta que en 1922 (debido a una larga lista de infortunios, incluyendo la Primera Guerra Mundial) otro matemático checo, Martin Jašek, halló el manuscrito que contenía el ejemplo de Bolzano.

A diferencia de la función de Weierstrass o de la mayoría de funciones no derivables en ningún punto, la función de Bolzano se basa en una construcción geométrica en lugar de una aproximación mediante una serie infinita. La función B de Bolzano está construida como el límite de una sucesión $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de funciones continuas lineales a trozos.

La idea de la construcción se basa en la elección del dominio de B_1, que será también el dominio de B, así como la elección del rango de B_1 y la construcción del rango de B_{k+1} a partir del de B_k. Comencemos denotando $[a,b]$ y $[A,B]$ al dominio y rango de B_1 respectivamente. Vamos a definir entonces la función B_1 como la siguiente función continua y lineal

$$B_1(x) := A + \frac{B-A}{b-a}(x-a).$$

A continuación, para definir la función B_2 dividimos el intervalo $[a,b]$ en cuatro subintervalos

(i) $I_1 = \left[a, a + \frac{3}{8}(b-a)\right]$,

(ii) $I_2 = \left[a + \frac{3}{8}(b-a), \frac{1}{2}(a+b)\right]$,

(iii) $I_3 = \left[\frac{1}{2}(a+b), a + \frac{7}{8}(b-a)\right]$,

(iv) $I_4 = \left[a + \frac{7}{8}(b-a), b\right]$,

y escogemos B_2 como la función lineal a trozos definida en cada intervalo que interpola los extremos con los siguientes valores en los nodos

(i) $B_2(a) := A$,

(ii) $B_2\left(a + \frac{3}{8}(b-a)\right) := A + \frac{5}{8}(B-A)$,

(iii) $B_2\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) := A + \frac{1}{2}(B-A)$,

(iv) $B_2\left(a + \frac{7}{8}(b-a)\right) := B + \frac{1}{8}(B-A)$,

(v) $B_2(b) := B$.

Observemos que $\mathrm{long}(I_1) = \mathrm{long}(I_3) = 3/8(b-a)$ y $\mathrm{long}(I_2) = \mathrm{long}(I_4) = 1/8(b-a)$. Ahora, cada una de las funciones B_k se definiría siguiendo el mismo proceso en cada subintervalo, con los correspondientes valores para a, b, A, B y la función de Bolzano sería $B(x) := \lim\limits_{k\to\infty} B_k(x)$.

Teorema 2.4. *La función de Bolzano B construida anteriormente es continua y derivable en ninún punto del intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$.*

La demostración original de Bolzano consiste en ver que el conjunto de puntos donde la función B no es derivable es denso en el intervalo $[a,b]$ donde está definida la función. Podemos encontrar la historia completa de las circunstancias que rodearon al hallazgo de la función de Bolzano junto con su prueba en el artículo de Hyksŏva [14].

2.3. La función de van der Waerden

El matemático holandés Bartel Leendert van der Waerden [20] publicó en 1930 un artículo donde construía una función continua no derivable en ningún punto muy similar al ejemplo dado por Takagi [19] en 1903, aunque de forma independiente. Van der Waerden tenía intención de presentar un ejemplo más simple de función continua no derivable en ningún punto que el proporcionado Weierstrass.

La definición de la función de van der Waerden se expresa mediante la siguiente serie infinita

$$V(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^k} \operatorname{dist}(10^k x, \mathbb{Z}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |10^k x - m|.$$

Antes de comenzar con la prueba de que la función construida por van der Waerden es no derivable en ningún punto necesitamos ver un lema que nos será de gran utilidad.

Lema 2.5. *Sean $a, b, x \in \mathbb{R}$ y $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ tales que $a < a_n < x < b_n < b$ y $a_n \to x, b_n \to x$. Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y existe $f'(x)$ entonces se verifica que*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x).$$

Demostración. Por hipótesis tenemos que

$$\left| \frac{b_n - x}{b_n - a_n} \right| \leq \frac{b_n - a_n}{b_n - a_n} = 1, \qquad \text{y} \qquad \left| \frac{x - a_n}{b_n - a_n} \right| \leq \frac{b_n - a_n}{b_n - a_n}.$$

Podemos estudiar entonces la diferencia

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}-f'(x)\right| &= \left|\frac{b_n-x}{b_n-a_n}\left(\frac{f(b_n)-f(x)}{b_n-x}-f'(x)\right)+\right.\\ &\left.+\frac{x-a_n}{b_n-a_n}\left(\frac{f(a_n)-f(x)}{a_n-x}-f'(x)\right)\right| = \\ &\leq \left|\frac{f(b_n)-f(x)}{b_n-x}-f'(x)\right|+\left|\frac{f(a_n)-f(x)}{a_n-x}-f'(x)\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

En consecuencia tenemos que efectivamente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(x).$$

□

Teorema 2.6. *La función $V(x)$ de van der Waerden es continua y no derivable en ningún punto de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Comencemos viendo la continuidad de la función $V(x)$. Comencemos definiendo $\phi(x) := \inf_{m\in\mathbb{Z}}|x-m|$. Sabemos que la función $\phi(x)=\inf_{m\in\mathbb{Z}}|x-m|$ es una función acotada en $\mathbb{R}$ con $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\inf_{m\in\mathbb{Z}}|x-m|\right|=\frac{1}{2}$. Por lo tanto, obtenemos que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{10^k}\inf_{m\in\mathbb{Z}}|10^kx-m|\right|\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^k},$$

y como la serie con este término general es convergente, el Teorema M de Weierstrass nos asegura la convergencia uniforme de la serie, de donde obtenemos en particular la continuidad de la función $V(x)$.

La prueba para la no diferenciabilidad en ningún punto se basa en el argumento proporcionado por Billingsley. Por reducción al absurdo, dado $x\in\mathbb{R}$ arbitrario supongamos que existe $V'(x)$. Con idea de usar el lema anterior, si tuviésemos dos sucesiones u_n, v_n con $u_n<v_n$ tales que $u_n\leq x\leq v_n$ y $v_n-u_n\to 0$, se cumpliría entonces que

$$\frac{V(v_n)-V(u_n)}{v_n-u_n}\to V'(x).$$

Nuestra intención es construir dos sucesiones que contradigan este hecho. Para ello, reescribimos la función de van der Waerden como sigue

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} \inf_{m\in\mathbb{Z}} |10^k x - m| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} \phi(10^k x).$$

Sea $\mathbb{D}_{10} := \{j10^{-n} \ : \ jn \in \mathbb{Z}\}$ el conjunto de los números racionales 10-aditivos, es decir, aquellos números racionales cuyo denominador es una potencia de 10. Si tomamos $u \in \mathbb{D}_{10}$ de modo que el orden de u sea n, es decir, $u = \dfrac{j}{10^n}$ con $j \in \mathbb{Z}$, entonces para cada entero $k \geq n$ se verifica que $10^k u \in \mathbb{Z}$. Como $\phi(p) = 0$ para cada $p \in \mathbb{Z}$, se deduce que

$$V(u) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{10^k} \phi(10^k u).$$

Sean $u_n, v_n \in \mathbb{D}_{10}$ números sucesivos de orden n (es decir, existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $u_n = (i-1)/10^n, v_n = i/10^n$) para los cuales se tiene $u_n \leq x \leq v_n$. Entonces $v_n - u_n = i10^{-n} - (i-1)10^{-n} = 10^{-n} \to 0$, y además

$$\frac{V(v_n) - V(u_n)}{v_n - u_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{10^k} \frac{\phi(10^k v_n) - \phi(10^k u_n)}{v_n - u_n}.$$

Claramente la función $\phi(x)$ es lineal para cada $x \in [10^k u_n, 10^k v_n]$ ya que el intervalo $[10^k u_n, 10^k v_n] = \left[\dfrac{i-1}{10^l}, \dfrac{i}{10^l}\right]$ donde $l = n - k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, para $0 \leq k < n$ tenemos que

$$\frac{1}{10^k} \frac{\phi(10^k v_n) - \phi(10^k u_n)}{v_n - u_n} = \frac{\pm 10^{-l}}{10^{-l}} = \pm 1,$$

lo cual nos proporciona

$$\frac{V(v_n) - V(u_n)}{v_n - u_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \pm 1.$$

Observemos que cuando $n \to \infty$ la serie definida a la derecha no converge, lo cual contradice la suposición de que $V'(x)$ existe. Ya que el punto $x \in \mathbb{R}$ había sido escogido arbitrariamente, podemos concluir que la función $V(x)$ es no derivable en ningún punto. □

Capítulo 3

Tamaño Topológico

En el Capítulo anterior hemos visto la existencia de varios “Monstruos de Weierstrass”. En concreto hemos visto que la función $W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$ pero no es derivable en ningún punto cuando $0 < a < 1$ y b es un entero impar mayor que 1 cumpliendo $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, y que de hecho no es el único ejemplo de función con estas características.

En este Capítulo nos preguntamos si estos ejemplos son casos excepcionales o, si por el contrario, existe una gran cantidad de “Monstruos”. Para ello nos basaremos en algunas propiedades topólogicas genéricas y en el concepto de residualidad, donde gracias al Teorema de Categoría de Baire y debido a que el espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}([a,b])$ es un espacio de Banach, podremos ver que no solo existen muchísimos “Monstruos” sino que de hecho dicha cantidad es topológicamente grande, en el sentido de la residualidad.

Comenzaremos introduciendo algunas definiciones con las cuales trabajaremos a lo largo del Capítulo.

Definición 3.1. *Denotamos $\mathcal{ND}([a,b])$, para $a < b$, al conjunto de todas las funciones continuas $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ no derivables en ningún punto.*

Recordemos que el espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}([a,b])$ junto con la norma del supremo dada por $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ conforma un espacio de Banach. Observemos que, aunque claramente el conjunto $\mathcal{ND}([a,b]) \subset \mathcal{C}([a,b])$ y esta contención es estricta, no es un espacio vectorial en sí mismo (es claro que $W \in \mathcal{ND}([a,b])$, pero $0 = W(x) - W(x) \in \mathcal{C}([a,b]) \backslash \mathcal{ND}([a,b])$).

Ya en el año 1931 autores como Banach [7] y Mazurkiewicz [15] dieron algunos resultados topológicos acerca del tamaño de $\mathcal{ND}([0,1])$, en respuesta a las cuestiones que planteaba el matemático polaco Hugo Steinhaus [18] en su artículo de 1929. Ambos autores se basaron fuertemente en el Teorema de Categoría de Baire, aunque nosotros aquí vamos a reproducir y completar la demostración dada por John C. Oxtoby [16]. Necesitaremos para ello de algunos resultados previos.

Definición 3.2. *Denotamos $\mathcal{P}([a,b])$ al conjunto de todas las poligonales, es decir, al conjunto de funciones continuas y lineales en un número finito de trozos definidas sobre el intervalo $[a,b]$ con $a < b$.*

Lema 3.3. *El conjunto $\mathcal{P}([a,b])$ es denso en $\mathcal{C}([a,b])$.*

Demostración. Es evidente que $\mathcal{P}([a,b]) \subset \mathcal{C}([a,b])$. Para ver la densidad basta probar que dado cualquier $\varepsilon > 0$ y $g \in \mathcal{C}([a,b])$ existe $h \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que $\|g - h\| < \varepsilon$.

Fijemos $g \in \mathcal{C}([a,b])$ y $\varepsilon > 0$. Por ser g uniformemente continua en $[a,b]$ existe $\delta > 0$ de modo que para $x_0 \in [a,b]$ dado y todo $x \in [a,b]$ con $|x - x_0| < \delta$ se tiene $|g(x) - g(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Sea una partición $P := \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ de modo que

$$\max_{i=0,\ldots,n-1} |t_{i+1} - t_i| < \delta,$$

y sea $h(x)$ la función definida por

$$h(x) := g(t_i)\frac{t_{i+1} - x}{t_{i+1} - t_i} + g(t_{i+1})\frac{x - t_i}{t_{i+1} - t_i}, \quad \forall x \in [t_i, t_{i+1}], \forall i = 0, 1, ..., n-1.$$

Claramente h es lineal a trozos y es continua para cualquier $t \in (t_i, t_{i+1})$ con $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Para ver la continuidad en cada nodo t_i con $i = 1, \ldots, n-1$, basta tener en cuenta que $h(t_i^+) = h(t_i^-) = h(t_i) = g(t_i)$. Luego, efectivamente $h \in \mathcal{P}([a,b])$.

Ahora, recordando la elección de nuestra partición, tenemos que

$$\begin{aligned}
|g(x)-h_n(x)| &= \left|g(x)-\frac{1}{t_{i+1}-t_i}(t_{i+1}g(t_i)-t_ig(t_{i+1})+x(g(t_{i+1})-g(t_i)))\right| = \\
&= \left|g(x)-\frac{t_{i+1}g(t_i)-t_ig(t_{i+1})}{t_{i+1}-t_i}-x\frac{g(t_{i+1})-g(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right| = \\
&= \left|g(x)-g(t_{i+1})-\frac{t_{i+1}-x}{t_{i+1}-t_i}(g(t_i)-g(t_{i+1}))\right| \leq \\
&\leq |g(x)-g(t_{i+1})|+\left|\frac{t_{i+1}-x}{t_{i+1}-t_i}\right||g(t_{i+1})-g(t_i)| \leq \frac{\varepsilon}{4}+1\cdot\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

En consecuencia hemos obtenido que

$$\|g-h_n\| \leq \max_{i=0,\ldots,n-1}\left(\sup_{x\in[t_i,t_{i+1}]}|g(x)-h_n(x)|\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

lo que concluye la demostración. □

Teorema 3.4 (Banach-Mazurkiewicz). *El conjunto $\mathcal{ND}([a,b])$ es de segunda categoría en $\mathcal{C}([a,b])$.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $[a,b]=[0,1]$. Sea BM_+ el conjunto de las funciones continuas que poseen derivada lateral derecha en algún punto, es decir

$$BM_+ := \{f\in\mathcal{C}([0,1]) \ : \ \exists x_0\in[0,1) \text{ tal que } \exists f'(x_0^+)\in\mathbb{R}\}.$$

Análogamente podemos definir BM_- como el conjunto de las funciones continuas que poseen derivada lateral izquierda en algún punto, y consideremos el conjunto $BM := BM_+\cup BM_-$. Para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos ahora los conjuntos

$$\begin{aligned}
E_n &:= \left\{f\in\mathcal{C}([0,1]) \ : \ \exists x\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right] \text{ tal que}\right. \\
&\qquad\qquad \left.\forall h\in(0,1-x) \text{ se tiene } |f(x+h)-f(x)|\leq nh\right\}.
\end{aligned}$$

Es claro que si una función $f\in\mathcal{C}([0,1])$ es derivable en algún punto $x_0\in[0,1)$, entonces existe su derivada lateral por la derecha, es decir

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0^+)\in\mathbb{R}.$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f'(x_0^+)|+1 \leq N$ y $x_0 \in \left[0, 1-\dfrac{1}{N}\right]$. Entonces, tomando $\varepsilon = N$ existe $\delta > 0$ con $\delta < 1 - x_0$ tal que

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| \leq |f'(x_0^+)| + 1 \leq Nh, \qquad \forall h \in (0, \delta). \tag{3.1}$$

Por otra parte, la función $g(h) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ es continua en $[\delta, 1-x_0]$, luego existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|g(h)| \leq Mh$ para todo $h \in [\delta, 1-x_0]$. Por tanto

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| \leq Mh, \qquad \forall h \in [\delta, 1-x_0]. \tag{3.2}$$

Sea $N_0 = \max\{N, M\}$. Entonces $1 - \dfrac{1}{N} \leq 1 - \dfrac{1}{N_0}$ y $x_0 \in \left[0, 1 - \dfrac{1}{N_0}\right]$. Además, por (3.1) y (3.2) tenemos que

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| \leq N_0 h, \qquad \forall h \in (0, 1-x_0).$$

Así, $f \in E_{N_0}$. Análogamente podemos probar que si existe la derivada lateral por la izquierda de f para algún $x_0 \in (0,1]$ entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f \in E_{N_1}$. Luego, $\mathcal{ND}([0,1]) \subset BM \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Para concluir la demostración del teorema basta probar ahora que los conjuntos E_n son densos en ninguna parte. Para ello veremos que son cerrados y de interior vacío.

- Los conjuntos E_n son cerrados para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dada $f \in \overline{E}_n$, sabemos que existe una sucesión $f_k \in E_n$ con $\|f_k - f\| \to 0$ cuando $k \to \infty$. Debido a que $f_k \in E_n$, por definición existe $x_k \in \left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$ tal que

$$|f_k(x_k+h) - f_k(x)| \leq nh, \qquad \forall h \in (0, 1-x_k).$$

La sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ está claramente acotada por 1, luego por el Teorema de Bolzano-Weierstrass podemos extraer una subsucesión $\{x_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ convergente a un cierto elemento $x \in \left[0, 1-\dfrac{1}{n}\right]$. Sea $\{f_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ la correspondiente subsucesión de $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Por construcción tenemos que

$$|f_{k_l}(x_{k_l}+h) - f_{k_l}(x_{k_l})| \leq nh, \qquad 0 < h < 1 - x_{k_l}, l \in \mathbb{N}.$$

Sea $h \in (0, 1-x)$. Como $x_{k_l} \to x$, existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall l \geq l_0$, $h \in (0, 1-x_{k_l})$. Así

$$\begin{aligned}
|f(x+h)-f(x)| &= |f(x+h)+f(x_{k_l}+h)-f(x_{k_l}+h)+f_{k_l}(x_{k_l}+h)- \\
&\quad -f_{k_l}(x_{k_l}+h)+f_{k_l}(x_{k_l})-f_{k_l}(x_{k_l})+f(x_{k_l})-f(x_{k_l})-f(x)| \leq \\
&\leq |f(x+h)-f(x_{k_l}+h)|+|f(x_{k_l}+h)-f_{k_l}(x_{k_l}+h)|+ \\
&\quad +|f_{k_l}(x_{k_l}+h)-f_{k_l}(x_{k_l})|+|f_{k_l}(x_{k_l})-f(x_{k_l})|+|f(x_{k_l})-f(x)| \leq \\
&\leq |f(x+h)-f(x_{k_l}+h)|+\|f-f_{k_l}\|+ \\
&\quad +nh+\|f_{k_l}-f\|+|f(x_{k_l})-f(x)|.
\end{aligned}$$

Por la continuidad de la función f en los puntos x y $x+h$ y la convergencia uniforme de f_{k_l} cuando $l \to \infty$ obtenemos la desigualdad

$$|f(x+h)-f(x)| \leq nh, \quad 0 < h < 1-x,$$

lo que indica que $f \in E_n$ y concluye la prueba de que los conjuntos E_n son efectivamente cerrados para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Los conjuntos E_n son densos en ninguna parte.

Consideremos el conjunto $\mathcal{P}([0,1])$, el cual es denso en $\mathcal{C}([0,1])$ por el Lema 3.3. Para probar que E_n es denso en ninguna parte basta ver que para cada $g \in \mathcal{P}([0,1])$ y cada $\varepsilon > 0$ existe una función $h \in \mathcal{C}([0,1]) \setminus E_n$ tal que $\|g-h\| < \varepsilon$, ya que entonces $B(g,\varepsilon) \not\subset E_n$ para cualquier n y cualquier $g \in \mathcal{P}([0,1])$, por lo que $\operatorname{int}(\overline{E_n}) = \operatorname{int}(E_n) = \emptyset$.

Dado $\varepsilon > 0$ sea M la pendiente máxima de cualquier trozo de la función g (es decir, consideramos la pendiente de la recta que une los puntos extremos de cualquier trozo de g). Sea $m \in \mathbb{N}$ de modo que $m\varepsilon > n+M$, y recordemos que

$$\phi(x) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x-k| = \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z}).$$

La demostración se basa ahora en escoger la función $h(x) := g(x)+\varepsilon\phi(mx)$, la cual claramente es continua en $[0,1]$ por ser suma de funciones continuas. Entonces, para cualquier punto $x \in [0,1)$ nuestra función $h(x)$ posee una derivada lateral derecha

$h'^{+}(x)$ de modo que se cumple que

$$|h'(x^+)| = |g'(x^+) + \varepsilon m\phi'(mx^+)| \geq \varepsilon m|\phi'(mx^+)| - |g'(x^+)| \geq \varepsilon m - M > n.$$

Por tanto, nuestra función h verifica que $h \in \mathcal{C}([0,1])$ pero $h \notin E_n$. Por último, $h \in B(\varepsilon, g)$ porque

$$\|g-h\| = \sup_{x\in[0,1]} |g(x)-h(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |g(x)-(g(x)-\varepsilon\phi(mx))| = \varepsilon \sup_{x\in[0,1]} |\phi(mx)| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Concluimos así que los conjuntos E_n son densos en ningún punto en $\mathcal{C}([0,1])$.

□

Corolario 3.5. *El conjunto* $\mathcal{ND}([0,1])$ *es residual en* $\mathcal{C}([0,1])$.

Los matemáticos Banach y Mazurkiewicz no probaron realmente lo mismo en sus artículos, aunque sus resultados coinciden cuando se formulan como en el Teorema 3.4. Mientras que Mazurkiewicz demostró que el conjunto de las funciones continuas que poseen una derivada lateral finita en algún punto es de primera categoría, Banach probó que el conjunto de las funciones continuas con derivada de Dini acotada en algún punto es de primera categoría, lo cual hace que realmente el Teorema de Banach sea más potente que el desarrollado por Mazurkiewicz.

Capítulo 4

Tamaño Algebraico

En el Capítulo anterior hemos visto que, en contra de lo que cabría esperar, la cantidad de “Monstruos” es bastante grande en sentido topológico. Es más, Banach y Mazurkiewicz consiguieron demostrar que es algo excepcional que una función continua tenga derivada al ver que el espacio $\mathcal{ND}([a,b])$ era residual.

Desde siempre, los grandes matemáticos de todas las épocas se han sentido atraídos y fascinandos por la existencia de grandes estructuras algebráicas que verifican ciertas propiedades que contradicen la intuición matemática. Podríamos destacar las curvas de Peano, los Monstruos de Weierstrass y algunas de las más novedosas y recientes como las funciones derivables no monótonas en ninguna parte.

Una de las herramientas más útiles y que han sabido explotar matemáticos como Banach ó Mazurkiewicz es el Teorema de Categoría de Baire (el cual ya hemos empleado anteriormente), debido a que cuando trabajamos en un espacio métrico completo E, nos garantiza que el complemento de un conjunto de primera categoría es denso en casi todo E, y usualmente dichos complementos son los conjuntos de extrañas características que tanto nos atraen.

Sin embargo, esto puede no sernos suficiente si a la hora de ver la densidad de los conjuntos o algunas otras propiedades se nos vuelve muy complicado. Es por ello que en las últimas décadas cada vez más matemáticos se han sentido sumamente atraídos por la busqueda de estas grandes estructuras algebraicas de nuestros objetos especiales.

4.1. Lineabilidad

Por fijar conceptos y notación a lo largo del presente capítulo, trabajaremos con la definición acuñada por el matemático ruso Vladimir I. Gurariy [11]:

Definición 4.1. *Dado un espacio vectorial topológico X, decimos que un subconjunto $M \subset X$ es lineable (respectivamente espaciable) en X si existe un espacio lineal infinito dimensional (respectivamente un espacio lineal cerrado infinito dimensional) Y tal que $Y \subset M \cup \{0\}$.*

Observemos que debemos añadir el elemento neutro o nulo 0 para poder garantizar la existencia de dicho espacio vectorial.

Uno de los primeros resultados en este campo y de los que más nos interesan a nosotros en este trabajo es el proporcionado por el propio Gurariy [12], quien fue el primero en dar una prueba no constructiva de la lineabilidad del conjunto de las funciones continuas no derivables en ningún punto.

Teorema 4.2 (Gurariy, 1966). *El espacio $\mathcal{ND}([0,1])$ es lineable.*

En cierto modo estamos viendo que aquello que en un principio podría ser algo excepcional como nos mostró K. Weierstrass con su ejemplo, no solo es lo normal como probaron Banach y Mazurkiewicz por separado, sino que además tiene una muy buena estructura algebraica en este sentido.

4.1.1. $\mathfrak{c}$-Lineabilidad

Con el fin de mejorar el resultado proporcionado por Gurariy necesitamos una definición más formal y completa de los conceptos con los que vamos a trabajar.

Definición 4.3. *Sea X un espacio vectorial topológico, M un subconjunto de X y μ un cardinal (finito o infinito). Decimos que M es μ-lineable (respectivamente μ-espaciable)* *si $M \cup \{0\}$ contiene un espacio vectorial (respectivamente un espacio vectorial cerrado) Y de dimensión μ. Es usual referirnos al conjunto M simplemente como lineable (respectivamente espaciable) en los casos en que la dimensión del espacio Y sea infinita. Cuando el espacio lineal Y anterior pueda escogerse denso en X decimos que M es μ-denso-lineable en X.*

Con esta definición Gurariy demostró realmente la $\aleph_0$-lineabilidad de $\mathcal{ND}([0,1])$ (donde $\aleph_0$ es la cardinalidad del conjunto de los naturales $\mathbb{N}$). Nuestro objetivo en lo que resta de capítulo es estudiar en profundidad la demostración constructiva de la $\mathfrak{c}$-lineabilidad (donde $\mathfrak{c}$ es la cardinalidad del continuo $\mathbb{R}$) de $\mathcal{ND}(\mathbb{R})$ de P. Jiménez-Rodríguez, G.A. Muñoz-Fernández y J.B. Seoane-Sepúlveda [4], quienes fueron los primeros en proporcionarla.

Teorema 4.4. *El conjunto $\mathcal{ND}(\mathbb{R})$ es $\mathfrak{c}$-lineable.*

Demostración. Vamos a definir para $\frac{7}{9} < a < 1$ las funciones $W_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a través de

$$W_a(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(9^k \pi x).$$

Observemos que, en particular, si tomamos $b = 9$, tenemos que $0 < a < 1$, $b > 1$ es un entero impar y $ab = 9a > 7 > 1 + \frac{3\pi}{2}$, por lo que estamos en las condiciones del Teorema de Weiestrass (Teorema 2.1) y las funciones W_a son continuas y no derivables en ningún punto.

La demostración del teorema se basará en probar que dichas W_a conformarán la base de nuestro espacio vectorial buscado. Para ello, en primer lugar veamos que cualquier conjunto finito de funciones W_a es linealmente independiente. Sean así $a_1, a_2, \ldots, a_l$ tales que $\frac{7}{9} < a_1 < a_2 < \ldots < a_l < 1$. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{R}$ tales que

$$g(x) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i W_{a_i}(x) \equiv 0.$$

Vamos a probar que $\lambda_i = 0$, $0 \leq i \leq l$. Para ello veamos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$

que

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_i^n = 0,$$

lo cual nos proporcionará el resultado deseado, debido a que si tomamos el sistema formado por las l primeras ecuaciones, la matriz de coeficientes de dicho sistema es una matriz de tipo Vandermonde, luego tiene determinante no nulo, y la única solución es $\lambda_i = 0$ para $0 \leq i \leq l$. Sin embargo, para ver esto necesitaremos probar también por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ que

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \frac{a_i^{n+1}}{1 - a_i} = 0.$$

Comenzaremos estudiando el caso inicial $n = 0$. Consideremos entonces para $\frac{7}{9} <$ $a < 1$

$$\begin{aligned} W_a\left(\frac{1}{3}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos\left(\frac{9^k}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} a^k \underbrace{\cos(3^{k-1}3^k\pi)}_{-1} = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sum_{k=1}^{+\infty} a^k = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{a}{1-a}. \end{aligned}$$

Deducimos por lo tanto que

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{a_i}{1-a_i}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i\right) - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \frac{a_i}{1-a_i} = 0. \quad (4.1)$$

De forma análoga obtendríamos ahora para $x = \frac{1}{9}$ que

$$g\left(\frac{1}{9}\right) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \left(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - \frac{a_i}{1-a_i}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i\right) - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \frac{a_i}{1-a_i} = 0. \quad (4.2)$$

Luego, restando ambas ecuaciones (4.1) y (4.2) llegamos a que

$$\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 0,$$

por lo que obtenemos efectivamente que $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 0$. Sustituyendo en la primera ecuación (4.1) (por ejemplo) llegamos también a que $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \frac{a_i}{1-a_i} = 0$, tal y como queríamos.

Veamos a continuación el paso inductivo. Supongamos pues que $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_i^n = 0$ y $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \frac{a_i^{n+1}}{1-a_i} = 0$ para $0 \leq n \leq m$. Nuestro objetivo ahora es probar que se cumple para $m+1$, es decir, que $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_i^{m+1} = 0$ y que $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \frac{a_i^{m+2}}{1-a_i} = 0$. De forma similar a lo anterior nos centramos en el cálculo de la siguiente expresión

$$\begin{aligned} W_{a_i}\left(\frac{1}{9^{m+2}}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_i^k \cos\left(\frac{9^k\pi}{9^{m+2}}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} a_i^k \cos\left(\frac{9^k\pi}{9^{m+2}}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_i^{k+m+1} \underbrace{\cos\left(\frac{9^{k+m+1}\pi}{9^{m+2}}\right)}_{-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} a_i^k \cos\left(\frac{9^k\pi}{9^{m+2}}\right) - \sum_{k=1}^{+\infty} a_i^{k+m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} a_i^k \cos\left(\frac{9^k\pi}{9^{m+2}}\right) - \frac{a_i^{m+2}}{1-a_i}. \end{aligned}$$

Usando ahora la hipótesis $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_i^n = 0$ para $0 \leq n \leq m$ podemos escribir

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{9^{m+2}}\right) &= \sum_{i=1}^{l} \lambda_i W_{a_i}\left(\frac{1}{9^{m+2}}\right) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \left(\sum_{k=0}^{m+1} a_i^k \cos\left(\frac{9^k\pi}{9^{m+2}}\right) - \frac{a_i^{m+2}}{1-a_i}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \cos\left(\frac{9^k\pi}{9^{m+2}}\right)\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_i^k\right) - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \frac{a_i^{m+2}}{1-a_i} = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_i^{m+1} - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \frac{a_i^{m+2}}{1-a_i} = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Junto con la hipótesis $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \frac{a_i^{n+1}}{1-a_i} = 0$ para $0 \leq n \leq m$ podemos reescribir la expresión (4.3) del siguiente modo

$$\begin{aligned} 0 &= \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\sum_{i=1}^{l}\lambda_i a_i^{m+1} - \sum_{i=1}^{l}\lambda_i\frac{a_i^{m+2}}{1-a_i} + \sum_{i=1}^{l}\lambda_i\frac{a_i^{m+1}}{1-a_i} = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\sum_{i=1}^{l}\lambda_i a_i^{m+1} - \sum_{i=1}^{l}\lambda_i\frac{a_i^{m+2}-a_i^{m+1}}{1-a_i} = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\sum_{i=1}^{l}\lambda_i a_i^{m+1} - \sum_{i=1}^{l}\lambda_i\frac{a_i^{m+1}(a_i-1)}{1-a_i} = \\ &= \left(1+\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)\sum_{i=1}^{l}\lambda_i a_i^{m+1}, \end{aligned}$$

lo cual equivale a

$$\sum_{i=1}^{l}\lambda_i a_i^{m+1} = 0.$$

Por último, volviendo a la ecuación (4.3) y sustituyendo lo obtenido llegamos a que efectivamente $\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\frac{a_i^{m+2}}{1-a_i} = 0$, concluyendo de este modo la prueba de la independencia lineal de las funciones W_{a_i}.

Debemos ver ahora que efectivamente las funciones $g(x) = \sum_{i=1}^{l}\lambda_i W_{a_i}$ son Monstruos de Weierstrass, es decir, funciones continuas no derivables en ningún punto. La continuidad es trivial, por lo que únicamente hay que estudiar la no derivabilidad en ningún punto. Para ello, asumamos $\lambda_i \neq 0$, para $1 \leq i \leq l$ y sea $\frac{7}{9} < a_l < a_{l-1} < \ldots < a_1 < 1$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ en el cual g fuera derivable.

Al igual que en la demostración del Teorema 2.1 obtenemos $\varepsilon_{1,m}^i, \varepsilon_{2,m}^i \in [-1,1]$ y $\eta_m^i \geq 1$ para cada $1 \leq i \leq l$ tales que

$$\frac{W_{a_i}(y_m) - W_{a_i}(x_0)}{y_m - x_0} = (-1)^{\alpha_m}(ab)^m\left(\frac{2}{3}\eta_m^i + \varepsilon_{1,m}^i\frac{\pi}{ab-1}\right) \tag{4.4}$$

$$\frac{W_{a_i}(z_m) - W_{a_i}(x_0)}{z_m - x_0} = -(-1)^{\alpha_m}(ab)^m\left(\frac{2}{3}\eta_m^i + \varepsilon_{2,m}^i\frac{\pi}{ab-1}\right). \tag{4.5}$$

Como hemos supuesto que la función g es derivable en el punto x_0, se verifica que

$g'(x_0) = g'(x_0^+) = g'(x_0^-)$, con lo que en particular se tiene que

$$\begin{aligned} g'^-(x_0) &= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \frac{W_{a_i}(y_m) - W_{a_i}(x_0)}{y_m - x_0} \right) = \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \frac{W_{a_i}(z_m) - W_{a_i}(x_0)}{z_m - x_0} \right) = g'^+(x_0). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Sustituyendo en (4.6) las expresiones de (4.4) y (4.5) tenemos

$$\begin{aligned} &\lim_{m\to\infty} \left((-1)^{\alpha_m} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i (9a_i)^m \left(\frac{\varepsilon_{1,m}^i \pi}{9a_i - 1} + \eta_m^i \frac{2}{3} \right) \right) = \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(-(-1)^{\alpha_m} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i (9a_i)^m \left(\frac{\varepsilon_{2,m}^i \pi}{9a_i - 1} + \eta_m^i \frac{2}{3} \right) \right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Sumando los límites obtenidos en (4.7) llegamos a que

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i (9a_i)^m \left(\frac{\pi}{9a_i - 1} (\varepsilon_{1,m}^i + \varepsilon_{2,m}^i) + \eta_m^i \frac{4}{3} \right) \right) = 0. \tag{4.8}$$

Podemos reescribir la expresión de (4.8) del siguiente modo

$$\lim_{m\to\infty} \left((9a_1)^m \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \left(\frac{a_i}{a_1} \right)^m \left(\frac{\pi}{9a_i - 1} (\varepsilon_{1,m}^i + \varepsilon_{2,m}^i) + \eta_m^i \frac{4}{3} \right) \right) = 0. \tag{4.9}$$

Usando ahora que $1 + x_{m+1} > \dfrac{1}{2}$ junto con (2.5) y (2.8) de la demostración del Teorema 2.1 llegamos a

$$\begin{aligned} &0 < \frac{4}{3} \leq \eta_m^i \frac{4}{3} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} a_i^k \frac{1 + \cos(9^k \pi x_{m+1})}{1 + x_{m+1}} \leq \\ &\leq 4 \sum_{k=0}^{+\infty} a_i^k (1 + \cos(9^k \pi x_{m+1})) \leq 8 \sum_{k=0}^{+\infty} a_i^k = 8 \frac{1}{1 - a_i} < +\infty. \end{aligned}$$

En consecuencia, tenemos que el término $\dfrac{\pi}{9a_i - 1}(\varepsilon_{1,m}^i + \varepsilon_{2,m}^i) + \dfrac{4}{3}\eta_m^i$ se encuentra acotado superior e inferiormente por una cantidad estrictamente positiva para todo

$1 \leq i \leq l$. Además, ya que $0 < a_i < a_1$ para $2 \leq i \leq l$ y $9a_i > 1$ obtenemos finalmente que:

$$\lim_{m\to\infty} \left((9a_1)^m \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \left(\frac{a_i}{a_1}\right)^m \left(\frac{\pi}{9a_i - 1}(\varepsilon_{1,m}^i + \varepsilon_{2,m}^i) + \eta_m^i \frac{4}{3} \right) \right) = \text{signo}(\lambda_1) \cdot \infty,$$

lo cual contradice la conclusión (4.9) acerca de que el valor de dicho límite es nulo. □

4.1.2. Lineabilidad densa

Una vez vista la lineabilidad del conjunto $\mathcal{ND}[a,b]$), nos preguntamos ahora si es posible escoger el espacio vectorial Y de modo que fuera denso, es decir, si el espacio de las funciones continuas no derivables en ningún punto es denso lineable.

Los autores R. M. Aron, F. J. García-Pacheco , D. Pérez-García y J. B. Seoane-Sepúlveda [1] ofrecen una demostración de este resultado, para la cual necesitaremos introducir algunos conceptos y resultados previos.

Definición 4.5. *Sean A y B dos subconjuntos de un espacio vectorial X. Decimos que A es más fuerte que B si $A + B \subseteq A$.*

Observemos que en general no vamos a poder garantizar que el elemento neutro $0 \in A$. Veremos a continuación un resultado que nos proporcionará un método para probar la lineabilidad densa de ciertos conjuntos X lineables.

Teorema 4.6. *Sea X un espacio de Banach separable, y consideremos dos subconjuntos A y B de X, de modo que A es lineable y B es denso lineable. Si A es más fuerte que B, entonces A es denso lineable en X.*

Demostración. Tenemos por definición que existen dos espacios vectoriales de dimensión infinita Y y Z tales que $Y \subset A \cup \{0\}$, $Z \subset B \cup \{0\}$ y además Z es denso en X. La idea se basa en tomar la familia infinita de elementos independientes $\{y_n : \|y_n\| = 1,\ n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ y una sucesión densa dada por $\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \subset Z$.

Definimos entonces W como el espacio generado por los siguientes elementos:

$$W := \operatorname{span}\left\{\frac{1}{n}y_n + z_n \ : \ n \in \mathbb{N}\right\},$$

el cual será nuestro candidato a subespacio vectorial denso contenido en A. Observemos primero que $W \subset A \cup \{0\}$. De hecho, si tomamos $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N}$ números naturales distintos tenemos que

$$\begin{aligned} &\lambda_1\left(\frac{1}{n_1}y_{n_1} + z_{n_1}\right) + \ldots + \lambda_p\left(\frac{1}{n_p}y_{n_p} + z_{n_p}\right) = \\ &= \sum_{j=1}^{p}\frac{\lambda_j}{n_j}y_{n_j} + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j z_{n_j} = y_0 + z_0 \in (Y\backslash\{0\}) + Z \subset A, \end{aligned}$$

debido a que $Y \subset A$, $Z \subset B$ y $A + B \subset A$ por ser A más fuerte que B.

Por último, obtenemos la densidad de W directamente de la construcción realizada, ya que el conjunto $\{z_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ había sido escogido denso en X, luego también lo es el conjunto $\left\{\frac{1}{n}y_n + z_n \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$. Para ello, fijemos $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Por la densidad de $\{z_n\}$ existe n_0 tal que $\|x - z_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto:

$$\left\|\frac{1}{n_0}y_{n_0} + z_{n_0} - x\right\| \leq \frac{1}{n_0}\|y_{n_0}\| + \|x - z_{n_0}\| = \frac{1}{n_0} + \|x - z_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Concluimos así que A es denso lineable en X. □

Teorema 4.7. *El conjunto $\mathcal{ND}([a,b])$ es denso lineable en $\mathcal{C}([a,b])$.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $[a,b] = [0,1]$. Sabemos por el Teorema 4.4 que el conjunto $\mathcal{ND}([0,1])$ es lineable, y consideremos ahora la variedad densa lineable de los polinomios en $\mathcal{C}([0,1])$, la cual llamaremos $\mathcal{P}$. Claramente el conjunto $\mathcal{ND}([0,1])$ es más fuerte que $\mathcal{P}$. En efecto, dado $W \in \mathcal{ND}([0,1])$ y $p \in \mathcal{P}$, consideremos $f(x) = W(x) + p(x) \in \mathcal{C}([0,1])$. Si $f(x)$ fuese derivable en algún punto x_0, entonces también lo sería $W(x) = f(x) - p(x)$, lo cual no es posible.

Luego tomando $A := \mathcal{ND}([0,1])$ y $B := \mathcal{P}$ el Teorema 4.6 garantiza que el conjunto $\mathcal{ND}([0,1])$ es denso lineable en $\mathcal{C}([0,1])$. □

En 2008, Bernal [2] prueba un teorema más general que el Teorema 4.6, y como aplicación, es capaz de demostrar varios resultados que veremos a continuación. Denotaremos $\mathcal{ND}^p([a,b])$ al conjunto de funciones de clase $\mathcal{C}^p$ en $[a,b]$ tales que $f^{(p)}$ no es derivable en ningún punto de $[a,b]$.

Teorema 4.8. *Sea $p \in \mathbb{N}_0$. Entonces, la clase de funciones $\mathcal{ND}^p([0,1])$ es denso-lineable en $\mathcal{C}^p([0,1])$.*

Demostración. Vamos a realizar la demostración usando el Teorema 4.6 y para el caso $p = 1$. El resto de casos se realizan de forma análoga.

Queremos probar que el conjunto

$$\mathcal{ND}^1([0,1]) = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1]) \ : \ f' \text{ no es derivable en ningun punto } x \in [0,1]\}$$

es denso lineable en $\mathcal{C}^1([0,1])$.

Como $\mathcal{ND}([0,1])$ es $\mathfrak{c}$-lineable, existe un subespacio lineal A' con $A' \subset \mathcal{ND}([0,1])\setminus\{0\}$. Denotemos

$$A := \left\{ g(x) = \int_0^x G(t)dt \ : \ G \in A' \right\}.$$

Claramente el conjunto A es un espacio lineal en sí mismo. En efecto, dadas $g, h \in A$, existen $G, H \in A'$ tales que

$$g(x) = \int_0^x G(t)dt \qquad \text{y} \qquad h(x) = \int_0^x H(t)dt.$$

Por lo tanto

$$\alpha g(x) + \beta h(x) = \alpha \int_0^x G(t)dt + \beta \int_0^x H(t)dt = \int_0^x (\alpha G(t) + \beta H(t))dt \in A$$

debido a que $\alpha G + \beta H \in A'$.

Así pues, el conjunto A es lineable y usando el Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral obtenemos que para $g \in A$

$$g'(x) = G(x) \in A',$$

es decir, las funciones $g \in \mathcal{C}^1([0,1])$ verifican que su derivada g' es una función continua no derivable en ningún punto de $[0,1]$. Por último, usando de nuevo que el conjunto

$B := \mathcal{P}$ de los polinomios es un subconjunto denso lineable de $\mathcal{C}^1([0,1])$ y que, de forma análoga al teorema anterior, A es más fuerte que B, el Teorema 4.6 nos garantiza la lineabilidad densa de A. $\square$

Pero Bernal es capaz de ver más incluso, demostrando que también se tiene un resultado similar cuando hacemos tender $p \to \infty$. Más concretamente vamos a denotar $\mathcal{ND}^\infty([a,b])$ al conjunto de funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $[a,b]$ tales que no son analíticas en ningún punto de $[a,b]$, es decir, aquellas funciones para las cuales no es posible encontrar un pequeño entorno de algún punto de su dominio en el cual poseen un desarrollo en serie de potencias convergente en dicho entrono.

Teorema 4.9. *La clase de las funciones $\mathcal{ND}^\infty([a,b])$ es denso-lineable en $\mathcal{C}^\infty([0,1])$.*

4.2. Otros resultados

Por último, para cerrar el capítulo y el trabajo veremos algunos resultados más en esta línea. Vista ya la lineabilidad densa, nos preguntamos si podemos un pedir un poco más y conseguir un subespacio vectorial lineal cerrado, siendo entonces el conjunto $\mathcal{ND}([0,1])$ no solo lineable sino espaciable.

En el año 1998, el mismo V.I. Gurariy da una respuesta afirmativa a esta cuestión junto a los autores V.P Fonf y M.I. Kadets [10]. En realidad, en su artículo son capaces de demostrar un resultado más fuerte.

Teorema 4.10. *Existen un subespacio vectorial cerrado infinito dimensional E de $\mathcal{C}([0,1])$ y un subconjunto A del intervalo $[0,1]$ de medida uno, tal que si la función $f \in E$ no es idénticamente nula, entonces f es no derivable en ninguna parte en $[0,1]$ y además tampoco posee derivadas laterales izquierda o derecha en el conjunto A.*

La demostración del Teorema 4.10 está basada en la construcción de unas funciones de tipo van der Waerden:

$$u_1(x) := \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{4}, \\ \\ \dfrac{1}{2} - x & \text{si} \quad \dfrac{1}{4} \le x \le \dfrac{3}{4}, \\ \\ x - 1 & \text{si} \quad \dfrac{3}{4} \le x \le 1, \end{cases}$$

extendiéndose periódicamente en $\mathbb{R}$. A partir de esta función construyen las funciones: $u_n(x) := 8^{1-n} u_1(8^{n-1}x)$ para $n = 2, 3, \ldots$, es decir:

$$u_n(x) := \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{4 \cdot 8^{n-1}}, \\ \\ \dfrac{1}{2 \cdot 8^{n-1}} - x & \text{si} \quad \dfrac{1}{4 \cdot 8^{n-1}} \le x \le \dfrac{3}{4 \cdot 8^{n-1}}, \\ \\ x - \dfrac{1}{8^{n-1}} & \text{si} \quad \dfrac{3}{4 \cdot 8^{n-1}} \le x \le \dfrac{1}{8^{n-1}}, \end{cases} \qquad \text{para } n = 2, 3, \ldots$$

las cuales extenderemos periódicamente en $\mathbb{R}$.

Sin embargo podemos afirmar mucho más. Posteriormente, L. Rodriguez-Piazza [17] generalizó el resultado anterior, probando que el conjunto E del Teorema 4.10 podía escogerse isométricamente isomorfo a cualquier espacio de Banach separable.

Teorema 4.11. *Todo espacio de Banach separable es linealmente isométrico a un subespacio cerrado X del espacio de las funciones continuas en $[0, 1]$, tal que cada elemento no nulo de X es no derivable en ningún punto.*

Para finalizar, podemos estudiar otras muchas estructuras algebraicas, tales como la algebrabilidad.

Definición 4.12. *Dado un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ y un subconjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ decimos que:*

(1) $\mathcal{B}$ es algebrable si existe un subálgebra $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \cup \{0\}$ y la cardinalidad de cualquier sistema de generadores de $\mathcal{C}$ es infinita.

(2) $\mathcal{B}$ es denso-algebrable si $\mathcal{C}$ puede escogerse además denso en $\mathcal{A}$.

En este ámbito Bayart y Quarta [8] nos proporcionan el siguiente resultado, relacionado con la estructura algebraica de $\mathcal{ND}([0,1])$, aunque es más fuerte de lo que necesitamos. Recordemos que una función $f \in \mathcal{C}([0,1])$ es Hölder continua si existe una constante $\alpha \in (0,1)$ tal que existe $M > 0$ con $|f(x) - f(y)| < M|x-y|^\alpha$.

Teorema 4.13 (Bayart y Quarta, 2007). *El conjunto de las funciones continuas que no son Hölder en ningún punto en $[0,1]$ (exceptuando la función nula) contiene un álgebra infinitamente generado. Es más, dicho álgebra puede escogerse denso en $\mathcal{C}([0,1])$. En otras palabras, el conjunto de las funciones continuas que no son Hölder continuas en ningún punto de $[0,1]$ es $\aleph_0$-denso-algebrable.*

En particular, como toda función derivable es Hölder continua, se tiene que $\mathcal{ND}([0,1])$ es $\aleph_0$-denso-algebrable.

Bibliografía

Bibliografía fundamental

[1] R. M. Aron, F. J. García-Pacheco , D. Pérez-García y J. B. Seoane-Sepúlveda, *On dense lineability of sets of functions on* $\mathbb{R}$, Topology **48** (2009) 149-156.

[2] L. Bernal-González, *Dense-lineability in spaces of continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **136**, (2008), no. 9, 3163-3169.

[3] L. Bernal-González, D. Pellegrino y J. B. Seoane-Sepúlveda, *Linear subsets of nonlinear sets in topological vector spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (2013), 71–130.

[4] P. Jiménez-Rodríguez, G. A. Muñóz-Fernández y J. B. Seoane-Sepúlveda, *On Weierstrass' Monsters and lineability*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **20** (2013), 577–585.

[5] J. Thim, *Continuous nowhere differentiable functions*, Luleå University of Technology, 2003. Master Thesis.

Otras Referencias

[6] A. M. Ampère, *Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui condiusent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, et à l' expression finie des termes qu'on néglie lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque*, J. École Polytech. **6** (1806), No. 13, 148-181.

[7] S. Banach, *Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, Studia Math. **3** (1931), 174-179.

[8] F. Bayart and L. Quarta, *Algebras ins sets of queer functions*, Israel J. Math. **158** (2007), 285-296, DOI 10.1007/s11856-007-0014-x. MR2342549 (2088g:26006)

[9] P. du Bois-Reymond, *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen*, J. Reine. Angew. Math. **79** (1875), 21-37.

[10] V. P. Fonf, V. I. Gurariy, and M. I. Kadets, *An infinite dimensional subspace of C[0,1] consisting of nowhere differentiable functions*, C. R. Acad. Bulgare Sci. **52** (1999), no. 11-12, 13-16. MR1738120 (2000j:26006)

[11] V. I. Gurariy. *Subspaces and bases in spaces of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **167** (1966), 971-973 (Russian).

[12] V. I. Gurariy. *Linear spaces composed of everywhere nondifferentiable functions*, C.R. Acad. Bulgare Sci. **44** (1991), no. 5, 13-16 (Russian).

[13] G. H. Hardy, *Weierstrass's non-differentiable function*, Trans. Amer. Math. Soc. **17** (1916), 301-325.

[14] M Hyksŏvá, *Bolzano's inheritance research in Bohemia*, History of Math. **17** (2001), 67-91.

[15] S. Mazurkiewicz, *Sur les fonctions non dérivables*, Studia Math. **3** (1931), 92-94.

[16] J. C. Oxtoby, *Measure and Category*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 2, Springer-Verlag, New York, 1980. A survey of the analogies between topological and measure spaces. MR584443 (81j:28003)

[17] L. Rodríguez-Piazza, *Every separable Banach space is isometric to a space of continuous nowhere differentiable functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 3649-3654. MR1328675 (96d:46007)

[18] H. Steinhaus, *Anwendungen der Funktionalanalysis auf einige Fragen der reellen Funktionentheorie*, Studia Math. **1** (1929), 51-81.

[19] T. Takagi, *A simple example of the continuous function without derivative*, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **1** (1903), 176-177.

[20] B.L. van der Waerden, *Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbare Stetige Funktion*, Math. Z **32** (1930), 474-475.

[21] K. Weierstrass, *Über continuirliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen*, Gelesen Akad. Wiss. 18. Juli 1872.