XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Sobre la región de accesibilidad de ciertas iteraciones de tercer orden

J. A. Ezquerro[1], M. A. Hernández[1], N. Romero[1]

[1] *Dpto. Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, C/ Luis de Ulloa s/n, E-26004 Logroño.*
E-mails: jezquer@unirioja.es, mahernan@unirioja.es, natalia.romero@unirioja.es.

Palabras clave: ecuaciones no lineales en espacios de Banach, método de Newton, iteraciones de tercer orden, convergencia semilocal, existencia y unicidad de soluciones, R-orden de convergencia.

Resumen

La región de accesibilidad de los procesos iterativos cuando se aplican a la resolución de ecuaciones no lineales adquiere cierto interés a la hora de elegir un proceso iterativo. Sabemos, a priori, que cuanto mayor es el orden de convergencia de los procesos iterativos, menor es su región de accesibilidad. Nosotros aquí presentamos una simple modificación de las iteraciones clásicas de tercer orden de manera que podamos considerar, para cada una de ellas, la misma región de accesibilidad que para el método de segundo orden más conocido, el método de Newton.

1. Introdución

En este trabajo vamos a considerar el problema de aproximar localmente una raíz z^* de la ecuación

$$F(z) = 0, \tag{1}$$

en un espacio de Banach X, donde F es un operador definido en un subconjunto abierto convexo no vacío Ω de X y con valores en otro espacio de Banach Y. Un gran número de problemas de matemática aplicada y de ingeniería se pueden formular como (1), por lo que su resolución adquiere cierta relevancia. La resolución de este tipo de ecuaciones se lleva a cabo comúnmente mediante la aplicación de procesos iterativos, de manera que, a partir de una o varias aproximaciones iniciales, se construye una sucesión de aproximaciones que converge a la raíz de la ecuación. Aquí sólo vamos a considerar procesos iterativos de un punto de la forma $x_{n+1} = G(x_n)$, $n \geq 0$, con x_0 dado. Un aspecto muy importante en el estudio de este tipo de procesos es la elección de una buena aproximación inicial. En general, es conocida la necesidad de imponer condiciones a las aproximaciones iniciales para obtener la convergencia semilocal de los procesos iterativos.

El método de Newton,

$$x_0 \in \Omega, \quad x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n), \quad n \geq 0,$$

es seguramente la iteración de un punto más conocida y utilizada para resolver ecuaciones como la anterior, siendo su convergencia al menos cuadrática ([9]). También son muy utilizados otros métodos iterativos de tercer orden, como el método de Chebyshev, el método de Halley, etc. Es bien sabido que cuanto mayor es el orden de convergencia de un proceso iterativo, mayor es su velocidad de convergencia a una solución de la ecuación. Pero también es conocido que uno de los problemas, entre otros, que tiene la utilización de iteraciones de alto orden es que la región de accesibilidad se reduce con respecto a la del método de Newton ([5]).

El principal objetivo de este trabajo se va a centrar en analizar la convergencia a una raíz de (1), desde los mismos puntos de salida que el método de Newton, de la siguiente familia de iteraciones con orden de convergencia al menos tres ([7]):

$$\begin{cases} z_0 \in \Omega, \quad y_n = z_n - [F'(z_n)]^{-1} F(z_n), \\ z_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} L_F(z_n) H(L_F(z_n))(y_n - z_n), \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

donde $L_F(z_n) = [F'(z_n)]^{-1} F''(z_n) [F'(z_n)]^{-1} F(z_n)$ y $H(w) = I + \sum_{i \geq 2} 2 A_i w^i$, con $A_i \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$, $i \geq 2$, y $\sum_{i \geq 2} A_i x^i < +\infty$ para $|x| < r = 1/\left(\text{lím}_i \left|\frac{A_{i+1}}{A_i}\right|\right)$. Notemos que la familia (2) se obtiene como caracterización de métodos iterativos tipo Newton de tercer orden (véase [7]), e incluye las iteraciones de tercer orden más usuales ([1], [2], [3], [4]): el método de Chebyshev, el método de Halley, el método de Super-Halley, los C-métodos, etc.

Prestaremos especial atención al estudio de la convergencia semilocal de los procesos iterativos bajo condiciones de tipo Newton-Kantorovich ([9]), así como a las regiones de existencia y unicidad de soluciones y al R-orden de convergencia. Para ello, utilizaremos una técnica que consiste en la construcción de un sistema de relaciones de recurrencia en el que ciertas sucesiones escalares están implicadas, demostrándose a partir de ellas la convergencia de las iteraciones.

A lo largo de todo el trabajo denotaremos $\overline{B(x,r)} = \{y \in X; \|y - x\| \leq r\}$ y $B(x,r) = \{y \in X; \|y - x\| < r\}$.

2. Convergencia semilocal

La convergencia semilocal de procesos iterativos punto a punto se ha estudiado tradicionalmente bajo condiciones de tipo Newton-Kantorovich ([9]). Supongamos así que existe $[F'(x_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$, para algún $x_0 \in \Omega$, donde $\mathcal{L}(Y,X)$ es el conjunto de los operadores lineales acotados de Y en X. Además, se tiene que

(C1) $\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq \beta$,

(C2) $\|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \leq \eta$, (C3) $\|F''(x)\| \leq M,\ x \in \Omega,$

(C4) $\|F''(x) - F''(y)\| \leq K\|x-y\|,\ x, y \in \Omega.$

Bajo las condiciones anteriores de convergencia, podemos garantizar los siguientes resultados de convergencia semilocal para el método de Newton (véase [6]) y la familia de iteraciones (2) (véase [8]).

Teorema 1 *Sean X e Y dos espacios de Banach y $F : \Omega \subseteq X \to Y$ un operador dos veces diferenciable Fréchet en un conjunto abierto convexo Ω.*

- *Supongamos que $[F'(x_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ existe para algún $x_0 \in \Omega$ y que se satisfacen (C1)–(C3). Si $B(x_0, R_1) \subseteq \Omega$, donde $R_1 = \frac{2(1-a)}{2-3a}\eta$ y $a = M\beta\eta$, y*
$$a = M\beta\eta < 1/2, \tag{3}$$
entonces la ecuación (1) tiene una solución z^* a la que converge cuadráticamente el método de Newton.

- *Supongamos que existe $[F'(z_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ para algún $z_0 \in \Omega$ y que se cumplen (C1)–(C4) para z_0. Si $B(z_0, R_2) \subseteq \Omega$, donde $R_2 = \frac{\psi(\tilde{a})\eta}{1-\tilde{f}(\tilde{a})\tilde{g}(\tilde{a},\tilde{b})}$, $\tilde{a} = M\tilde{\beta}\tilde{\eta}$, $\tilde{b} = K\tilde{\beta}\tilde{\eta}^2$,*
$$\psi(t) = 1 + \frac{t}{2}(1 + t\nu(t)), \quad \nu(t) = \sum_{i\geq 2} 2A_i\, t^{i-2}, \quad \tilde{f}(t) = \frac{2}{2 - 2t - t^2 - t^3\nu(t)},$$
$$\tilde{g}(s,t) = \frac{s^2}{2}\left(1 + (1+s)\nu(s) + \frac{s}{4}(1 + s\nu(s))^2\right) + t/6.$$
con $\|[F'(z_0)]^{-1}\| \leq \tilde{\beta}$, $\|[F'(z_0)]^{-1}F(z_0)\| \leq \tilde{\eta}$, y
$$\tilde{a} < r, \quad \tilde{a}\psi(\tilde{a}) < 1 \quad y \quad \tilde{b} < \varphi(\tilde{a}), \tag{4}$$
siendo
$$\varphi(t) = 12 + 6t - 6(2t+1)\psi(t) + 3t(2t-1)\psi(t)^2, \tag{5}$$
entonces la ecuación (1) tiene una solución z^* a la que converge cúbicamente cualquier iteración de la familia (2).

A simple vista, parece que la utilización de cualquier iteración de (2) es más restrictiva que la del método de Newton, puesto que para que se dé la convergencia semilocal en el método de Newton el punto inicial x_0 debe cumplir la condición (3), mientras que para las iteraciones de (2) el punto inicial z_0 debe satisfacer las condiciones que aparecen en (4).

El objetivo de este trabajo es construir una sencilla modificación de la familia (2) de manera que cualquier iteración de ésta converja desde los mismos puntos de salida que el método de Newton. Para ello, definimos el siguiente algoritmo:
$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x_0 \in \Omega, \\ x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1}F(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots, N_0 - 1, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} z_0 = x_{N_0}, \\ y_k = z_k - [F'(z_k)]^{-1}F(z_k), \\ z_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}L_F(z_k)H(L_F(z_k))(y_k - z_k), \quad k \geq 0, \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{6}$$

donde x_0 satisface sólo (3), mientras que $z_0 = x_{N_0}$ satisface (4). Entonces, si se cumple (3), podemos usar el método de Newton para un número finito de pasos N_0 hasta que $x_{N_0} = z_0$ cumpla (4), y aplicar después una iteración de (2) en vez del método de Newton. La clave del problema reside en garantizar la existencia de N_0.

A partir de las condiciones generales (C1)–(C3) para el método de Newton podemos definir los parámetros a y b de

$$M\|[F'(x_0)]^{-1}\|\|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\| \leq M\beta\eta = a,$$

$$K\|[F'(x_0)]^{-1}\|\|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\|^2 \leq K\beta\eta^2 = b,$$

y construir el siguiente sistema de relaciones de recurrencia ([6]):

$$\begin{aligned}
&\|[F'(x_n)]^{-1}\| \leq \tfrac{1}{1-a_{n-1}}\|[F'(x_{n-1})]^{-1}\|,\\
&\|x_{n+1}-x_n\| \leq \tfrac{a_{n-1}}{2(1-a_{n-1})}\|x_n - x_{n-1}\| \leq \left(\tfrac{a}{2(1-a)}\right)^n \|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\|,\\
&M\|[F'(x_n)]^{-1}\|\|[F'(x_n)]^{-1}F(x_n)\|\\
&\qquad\leq f(a_{n-1})g(a_{n-1})M\|[F'(x_{n-1})]^{-1}\|\|[F'(x_{n-1})]^{-1}F(x_{n-1})\| \leq a_n,\\
&K\|[F'(x_n)]^{-1}\|\|[F'(x_n)]^{-1}F(x_n)\|^2\\
&\qquad\leq f(a_{n-1})g(a_{n-1})^2K\|[F'(x_{n-1})]^{-1}\|\|[F'(x_{n-1})]^{-1}F(x_{n-1})\|^2 \leq b_n,\\
&\|x_{n+1}-x_0\| \leq \tfrac{2}{2-af(a)}\left(1-\left(\tfrac{a}{2(1-a)}\right)^{n+1}\right)\|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\| < \tfrac{2}{2-af(a)}\eta = R_1,
\end{aligned} \tag{7}$$

donde

$$\begin{cases} a_0 = a, \quad a_{n+1} = a_n f(a_n) g(a_n), \quad n \geq 0,\\ b_0 = b, \quad b_{n+1} = b_n f(a_n) g(a_n)^2, \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{8}$$

y

$$f(t) = \frac{1}{1-t} \qquad \text{y} \qquad g(t) = \frac{t}{2(1-t)}. \tag{9}$$

Notemos que la sucesión $\{a_n\}$ garantiza la convergencia del método de Newton. La clave es el decrecimiento estricto de la sucesión $\{a_n\}$ siempre que se cumpla (3).

La sucesión $\{b_n\}$ no es necesaria para probar la convergencia del método de Newton, pero es esencial para localizar un punto de salida válido para una iteración de (2) ([7]). Obsérvese que las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son estrictamente decrecientes a cero si $a_0 < 1/2$, ya que

$$0 < a_n < \gamma_1^{2^n-1}a_0 \quad \text{y} \quad 0 < b_n < \gamma_1^{2(2^n-1)}b_0, \quad n \geq 0,$$

donde $\gamma_1 = f(a_0)g(a_0) < 1$.

Análogamente, véase [7], de las condiciones generales (C1)–(C4) para la familia de iteraciones (2) y con punto inicial z_0, podemos definir los parámetros $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ tales que

$$M\|[F'(z_0)]^{-1}\|\|[F'(z_0)]^{-1}F(z_0)\| \leq M\tilde{\beta}\tilde{\eta} = \tilde{a},$$

$$K\|[F'(z_0)]^{-1}\|\|[F'(z_0)]^{-1}F(z_0)\|^2 \leq K\tilde{\beta}\tilde{\eta}^2 = \tilde{b},$$

y construir el sistema de relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned}
&\|[F'(z_n)]^{-1}\| \leq \tilde{f}(\tilde{a}_{n-1})\|[F'(z_{n-1})]^{-1}\|,\\
&\|[F'(z_n)]^{-1}F(z_n)\| \leq \tilde{f}(\tilde{a}_{n-1})\tilde{g}(\tilde{a}_{n-1},\tilde{b}_{n-1})\|[F'(z_{n-1})]^{-1}F(z_{n-1}\|\\
&\qquad\qquad \leq (\tilde{f}(\tilde{a})\tilde{g}(\tilde{a},\tilde{b}))^n\|[F'(z_0)]^{-1}F(z_0)\|,\\
&M\|[F'(z_n)]^{-1}\|\|[F'(z_n)]^{-1}F(z_n)\|\\
&\qquad\qquad \leq \tilde{f}(\tilde{a}_{n-1})^2\tilde{g}(\tilde{a}_{n-1},\tilde{b}_{n-1})M\|[F'(z_{n-1})]^{-1}\|\|[F'(z_{n-1})]^{-1}F(z_{n-1}) \leq \tilde{a}_n,\\
&\text{Existencia de } H(L_F(z_n) \text{ y } \|H(L_F(z_n)\| \leq 1+\tilde{a}_n\nu(\tilde{a}_n), \qquad (10)\\
&K\|[F'(z_n)]^{-1}\|\|[F'(z_n)]^{-1}F(z_n)\|^2\\
&\qquad\qquad \leq \tilde{f}(\tilde{a}_{n-1})^3\tilde{g}(\tilde{a}_{n-1},\tilde{b}_{n-1})^2K\|[F'(z_{n-1})]^{-1}\|\|[F'(z_{n-1})]^{-1}F(z_{n-1})^2 \leq \tilde{b}_n,\\
&\|z_{n+1}-y_n\| \leq \tfrac{\tilde{a}_n}{2}(1+\tilde{a}_n\nu(\tilde{a}_n))\|[F'(z_n)]^{-1}F(z_n)\|,\\
&\|z_{n+1}-z_n\| \leq \psi(\tilde{a}_n)\|[F'(z_n)]^{-1}F(z_n)\|,\\
&\|z_{n+1}-z_0\| \leq \psi(\tilde{a}_n)\,\tfrac{1-(\tilde{f}(\tilde{a})\tilde{g}(\tilde{a},\tilde{b}))^{n+1}}{1-\tilde{f}(\tilde{a})\tilde{g}(\tilde{a},\tilde{b})}\|[F'(z_0)]^{-1}F(z_0)\| < \tfrac{\psi(\tilde{a})\eta}{1-\tilde{f}(\tilde{a})\tilde{g}(\tilde{a},\tilde{b})} = R_2,
\end{aligned}$$

de manera que se garantice la convergencia semilocal de (2) a partir del decrecimiento estricto de las siguientes sucesiones reales:

$$\begin{cases} \tilde{a}_0 = \tilde{a}, \quad \tilde{a}_{n+1} = \tilde{a}_n\tilde{f}(\tilde{a}_n)^2\tilde{g}(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n), \quad n \geq 0,\\ \tilde{b}_0 = \tilde{b}, \quad \tilde{b}_{n+1} = \tilde{b}_n\tilde{f}(\tilde{a}_n)^3\tilde{g}(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)^2, \quad n \geq 0, \end{cases}$$

siempre que se cumpla (4).

La idea es aplicar una iteración de (2) para aproximar una solución z^* de la ecuación (1) a partir de la iteración $z_0 = x_{N_0}$, donde $x_1, x_2 \dots, x_{N_0}$ son aproximaciones dadas por el método de Newton empezando en $x_0 \in \Omega$. Veamos que esto es así. En primer lugar, como $\{a_n\}$ es una sucesión estrictamente decreciente a cero, siempre existirá un $N_1 \in \mathbf{N}$ tal que $a_{N_1} < r$. En segundo lugar, como $x\psi(x) = \phi(x)$ es una función creciente con $\phi(0) = 0$ y $\{a_n\}$ decrece estrictamente a cero, también existirá siempre un $N_2 \in \mathbf{N}$ tal que $a_{N_2}\psi(a_{N_2}) < 1$. Y en tercer y último lugar, como φ es una función decreciente y $\{a_n\}$ es una sucesión estrictamente decreciente, la sucesión $\{\varphi(a_n)\}$ es estrictamente creciente y, como $b_0 \geq \varphi(a_0)$ y $\{b_n\}$ decrece estrictamente a cero, podemos garantizar la existencia de un $N_3 \in \mathbf{N}$ tal que

$$b_{N_3} < \varphi(a_0) = \varphi(a) < \varphi(a_{N_3}),$$

para $\varphi(a_0) > 0$ dado. Podemos tomar así $N_0 = \text{máx}\{N_1, N_2, N_3\}$, elegir $z_0 = x_{N_0}$ y aplicar una iteración de (2), empezando en este punto, para garantizar la convergencia de (6).

Notemos que la condición $\tilde{a} < r$ se podría omitir en el caso en que tengamos la posibilidad de elegir un método de la familia (2), ya que r podría ser $+\infty$, como en los casos en que el desarrollo en serie que aparece en (2) sea finito, situación que se da por ejemplo en el método de Chebyshev.

Siempre que la sucesión (6) esté bien definida, el estudio de la convergencia se reduce a ver que esta sucesión es de Cauchy. En el siguiente resultado, probamos la convergencia semilocal de (6) y obtenemos conclusiones acerca de la existencia de soluciones y el dominio en el que éstas se localizan.

En primer lugar, reescribimos (6) de la siguiente forma:

$$w_n = \begin{cases} x_n, & \text{si} \quad n < N_0, \\ z_{n-N_0}, & \text{si} \quad n \geq N_0. \end{cases}$$

Teorema 2 *Sean X e Y dos espacios de Banach y $F : \Omega \subseteq X \to Y$ un operador dos veces diferenciable Fréchet definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω. Sea $x_0 \in \Omega$ y supongamos que se cumplen (C1)–(C4). Si se satisface (3) y $B(x_0, R_1 + R_2) \subseteq \Omega$, la sucesión (6), definida por $\{w_n\}$ y empezando en w_0, converge a una solución z^* de (1). Además, la solución z^* y las iteraciones w_n pertenecen a $\overline{B(x_0, R_1 + R_2)}$.*

Demostración. Observamos en primer lugar que $w_0, w_1, \ldots, w_{N_0} \in \Omega$ por ser iteraciones del método de Newton y, en consecuencia, $\|w_i - x_0\| \leq R_1 < R_1 + R_2$, para $i = 1, 2, \ldots, N_0$. Así, $w_i \in B(x_0, R_1) \subset B(x_0, R_1 + R_2) \subseteq \Omega$, para $i = 1, 2, \ldots, N_0$.

Ahora, si elegimos $w_{N_0} = z_0 = x_{N_0}$, las iteraciones w_i, para $i > N_0$, están dadas por (2) y, por tanto, $\|w_i - w_{N_0}\| < R_2$, para $i > N_0$. Luego, $\|w_i - x_0\| \leq \|w_i - w_{N_0}\| + \|w_{N_0} - x_0\| < R_1 + R_2$ y $w_i \in B(x_0, R_1 + R_2) \subseteq \Omega$, para $i > N_0$. Entonces, $w_n \in \Omega$, para todo $n \in \mathbf{N}$, y $\{w_n\}$ está bien definida.

Finalmente, veamos que $\{w_n\}$ es una sucesión de Cauchy en Ω. Para ello, basta con probarlo para $\{w_n\}_{n \geq N_0}$, que está generada por (2) (véase [7]). Por lo tanto, existe $z^* \in \overline{B(x_0, R_2)} \subset \overline{B(x_0, R_1 + R_2)}$ tal que $z^* = \lim_n w_n$. Para terminar, se sigue inmediatamente que $F(z^*) = 0$ (véase [7]). ■

Notemos que podemos aplicar (6) siempre que se cumplan las condiciones del teorema 2, ya que siempre existirá N_0. Sin embargo, podemos mejorar el algoritmo si somos capaces de estimar a priori el valor de N_0 para ahorrarnos así la verificación de la condición $\tilde{b} < \varphi(\tilde{a})$ en cada paso. La estimación del valor de N_0 se sigue del siguiente resultado.

Teorema 3 *Supongamos que se cumplen las hipótesis del teorema anterior y que se satisface (3), pero no (4), para algún $x_0 \in \Omega$ cumpliendo (C1) y (C2). Sea $z_0 = x_{N_0}$ con $N_0 = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, donde $N_1 = 1 + \left[\frac{\log r - \log a}{\log(f(a)g(a))}\right]$, $N_2 = 1 + \left[\frac{-\log(a\psi(a))}{\log(f(a)g(a))}\right]$, $N_3 = 1 + \left[\frac{\log\varphi(a) - \log b}{\log(f(a)g(a)^2)}\right]$, f and g están definidas en (9), φ en (5) y $[t]$ denota la parte entera del núemro real t. Entonces, z_0 cumple (4).*

Demostración. Teniendo en cuenta los razonamientos dados para garantizar que el algoritmo (6) esté bien definido, en el sentido de que siempre exista un $N_0 \in \mathbf{N}$, de forma que podamos aplicar una iteración de la familia (2) empezando en $z_0 = x_{N_0}$, se tienen que satisfacer las condiciones dadas en (4).

En primer lugar, como

$$a_{N_0} = a_{N_0-1} f(a_{N_0-1}) g(a_{N_0-1}) = \cdots = a_0 \prod_{j=0}^{N_0-1} f(a_j) g(a_j),$$

la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y f y g son funciones crecientes en $(0, 1/2)$, podemos escribir $a_{N_0} < a\,(f(a)g(a))^{N_0}$ y exigir que $a\,(f(a)g(a))^{N_0} < r$ para que $z_0 = x_{N_0}$ cumpla la primera condición dada en (4); es decir:

$$\log a + N_0 \log(f(a)g(a)) < \log r \qquad \text{o} \qquad N_0 > \frac{\log r - \log a}{\log(f(a)g(a))}.$$

Luego, se debe cumplir que $N_0 \geq N_1$, donde $N_1 = 1 + \left[\frac{\log r - \log a}{\log(f(a)g(a))}\right]$. En segundo lugar, como la función ψ es creciente en $\mathbf{R}_+$, siguiendo un razonamiento análogo al anterior, podemos decir que la segunda condición dada en (4) se reduce a ver que $a\,(f(a)g(a))^{N_0}\,\psi(a) < 1$, que es lo mismo que $N_0 > \frac{-\log(a\psi(a))}{\log(f(a)g(a))}$. Por tanto, se necesita que $N_0 \geq N_2$, donde $N_2 = 1 + \left[\frac{-\log(a\psi(a))}{\log(f(a)g(a))}\right]$. En tercer y último lugar, basta con exigir que $b\left(f(a)g(a)^2\right)^{N_0} < \varphi(a)$ para que $z_0 = x_{N_0}$ cumpla la tercera condición dada en (4), lo que lleva a que $N_0 > \frac{\log\varphi(a) - \log b}{\log(f(a)g(a)^2)}$ y $N_0 \geq N_3$, donde $N_3 = 1 + \left[\frac{\log\varphi(a) - \log b}{\log(f(a)g(a)^2)}\right]$. Finalmente, basta con elegir $N_0 = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. ■

Nota Notemos que si la condición $\tilde{a} < r$ de (4) se cumple, como la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente, $a_n < r$, para todo n, no es necesario calcular el valor N_1 y el cálculo de N_0 se reduce a $N_0 = \max\{N_2, N_3\}$. Si la que se cumple es la segunda condición $\tilde{a}\psi(\tilde{a}) < 1$ de (4), de nuevo por ser la sucesión $\{a_n\}$ decreciente, $a_n\psi(a_n) < 1$, para todo n, no es necesario calcular el valor N_2 y el cálculo de N_0 se reduce a $N_0 = \max\{N_1, N_3\}$. Análogamente para la tercera condición $\tilde{b} < \varphi(\tilde{a})$ de (4) y cualquier combinación de las condiciones que pueda darse.

3. Unicidad de solución

A continuación estudiamos la unicidad de la solución z^* de la ecuación (1).

Teorema 4 *Supogamos que se cumplen (C1)–(C4). La solución z^* de la ecuación (1) es única en la región $B\left(x_0, \frac{2}{M\beta} - (R_1 + R_2)\right) \cap \Omega$ siempre que $R_1 + R_2 < \frac{2}{M\beta}$.*

Demostración. Supongamos que existe otra solución y^* de la ecuación (1) en la región $B\left(x_0, \frac{2}{M\beta} - (R_1 + R_2)\right) \cap \Omega$. Entonces, para ver que $z^* = y^*$, de

$$\int_0^1 F'(z^* + t(y^* - z^*))\,dt\,(y^* - z^*) = F(y^*) - F(z^*) = 0,$$

se sigue que hay que probar que el operador $T = \int_0^1 F'(z^* + t(y^* - z^*))\,dt$ sea invertible. Por el lema de Banach, tenemos entonces que demostrar que $\|I - T\| < 1$. En efecto,

$$\|I - T\| \leq \|\Gamma_0\| \int_0^1 \|F'(z^* + t(y^* - z^*)) - F'(x_0)\|\,dt \leq M\beta \int_0^1 \|z^* + t(y^* - z^*) - x_0\|\,dt$$

$$\leq M\beta \int_0^1 \left((1-t)\|z^* - x_0\| + t\|y^* - x_0\|\right)\,dt < \frac{M\beta}{2}\left(R_1 + R_2 + \frac{2}{M\beta} - (R_1 + R_2)\right) = 1,$$

y la demostración queda así completada. ■

4. R-orden de convergencia

Las condiciones de convergencia de una iteración dependen de la elección de la distancia $\|\cdot\|$, pero, para una distancia dada, la velocidad de convergencia de la sucesión $\{w_n\}$ se caracteriza por la velocidad de convergencia de la sucesión de números no negativos $\|z^* - w_n\|$, donde $z^* = \lim_n w_n$. Una medida importante de la velocidad de convergencia es el R-orden de convergencia (véase [10]). Es conocido que una sucesión $\{w_n\}$ converge con R-orden al menos $\tau > 1$ si existen constantes $C \in (0, \infty)$ y $\gamma \in (0,1)$ tales que $\|z^* - w_n\| \leq C\gamma^{\tau^n}$, $n = 0, 1, \ldots$ Bajo las condiciones (C1)–(C3) el método de Newton converge con R-orden al menos dos ([6]), mientras que las iteraciones de (2) lo hacen con R-orden al menos tres si se satisfacen (C1)–(C4) ([8]). Además, para encontrar estimaciones a priori para las distancias $\|z^* - w_n\|$, $n = 1, 2, \ldots$, se busca una función $\delta : \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ tal que $\|z^* - w_n\| \leq \delta(n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Basándonos en la técnica desarrollada en [6] y [7] para el método de Newton y para las iteraciones de (2) respectivamente, obtenemos las siguientes cotas a priori del error para la sucesión (6):

$$\|z^* - w_n\| \leq \delta(n), \quad \text{donde} \quad \delta(n) = \begin{cases} \frac{\gamma_1^{2^n-1}\Delta_1^n}{1-\gamma_1^{2^n}\Delta_1}\,\eta, & 0 \leq n < N_0, \\ \psi(\tilde{a})\frac{\gamma_2^{\frac{3^n-1}{2}}\Delta_2^n}{1-\gamma_2^{3^n}\Delta_2}\,\eta, & n \geq N_0, \end{cases}$$

con $\gamma_1 = f(a)g(a)$, $\Delta_1 = 1/f(a)$, $\gamma_2 = \tilde{f}(\tilde{a})^2\tilde{g}(\tilde{a}, \tilde{b})$ y $\Delta_2 = 1/\tilde{f}(\tilde{a})$.

Por tanto, la sucesión (6) tiene R-orden de convergencia al menos dos hasta la iteración $N_0 - 1$ y R-orden de convergencia al menos tres desde la iteración N_0, puesto que

$$\|z^* - w_n\| \leq C_1\,\gamma_1^{2^n}, \quad 0 \leq n < N_0, \quad \text{donde} \quad C_1 = \frac{\eta}{\gamma_1(1-\gamma_1\Delta_1)},$$

$$\|z^* - w_n\| \leq C_2\left(\gamma_2^{1/2}\right)^{3^n}, \quad n \geq N_0, \quad \text{donde} \quad C_2 = \frac{\psi(\tilde{a})\,\eta}{\gamma_2^{1/2}(1-\gamma_2\Delta_2)}.$$

Referencias

[1] I. K. Argyros y D. Chen, *Results on the Chebyshev method in Banach spaces*, Proyecciones, 12, 2 (1993), 119–128.

[2] V. Candela y A. Marquina, *Recurrence relations for rational cubic methods I: the Halley method*, Computing, 44 (1990), 169–184.

[3] V. Candela y A. Marquina, *Recurrence relations for rational cubic methods II: the Chebyshev method*, Computing, 45 (1990), 355–367.

[4] D. Chen, I. K. Argyros y Q. S. Qian, *A note on the Halley method in Banach spaces*, Appl. Math. Comput., 58 (1993), 215–224.

[5] J. A. Ezquerro y M. A. Hernández, *Region of accessibility for a class of Newton-type iterations*, Proyecciones, 17, 1 (1998), 71–76.

[6] M. A. Hernández, *The Newton Method for Operators with Hölder Continuous First Derivative*, J. Optim. Theory Appl., 109 (2001), 631–648.

[7] M. A. Hernández y N. Romero, *On a characterization of some Newton-like methods of R-order at least three*, J. Comput. Appl. Math., 183, 1 (2005), 53–66.

[8] M. A. Hernández y M. A. Salanova, *Modification of the Kantorovich assumptions for semilocal convergence of the Chebyshev method*, J. Comput. Appl. Math., 126, 1-2 (2000), 131–143.

[9] L. V. Kantorovich y G. P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1982.

[10] F. A. Potra y V. Pták, *Nondiscrete induction and iterative processes*, Pitman, New York, 1984.