XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Un modelo unidimensional de flujo sanguíneo obtenido mediante el método de desarrollos asintóticos

J. M. Rodríguez Seijo[1], M. V. Otero Piñeiro[1]

[1] *Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación, Universidade da Coruña, Campus da Zapateira, E-15071 A Coruña. E-mails:* `mmrseijo@udc.es, vickyo@udc.es`.

Palabras clave: Análisis asintótico, mecánica de fluidos, flujo sanguíneo.

Resumen

En este trabajo presentamos un modelo unidimensional del movimiento de un fluido newtoniano a través de un tubo elástico no necesariamente rectilíneo. En particular, el modelo obtenido es aplicable al estudio del flujo sanguíneo. Para obtener el modelo propuesto explotamos el hecho de que el área de la sección transversal del tubo es mucho menor que su longitud, lo que nos permitirá introducir un pequeño parámetro adimensional y utilizar el método de desarrollos asintóticos. El modelo así obtenido incorpora un nuevo término dependiente de la curvatura de la línea media del tubo, que no hemos encontrado en la literatura, y que se opone al avance del fluido.

1. Introducción

El interés en modelar el comportamiento de la biología humana es muy antiguo. Ya en 1775 Euler introdujo un modelo unidimensional del flujo sanguíneo y, desde entonces, muchos autores han estudiado este mismo problema (véase la introducción de [12] para un breve resumen). Básicamente estamos estudiando el movimiento de un fluido newtoniano a través de un tubo de paredes elásticas cuya sección es pequeña si la comparamos con su longitud. Uno de los modelos unidimensionales más completos que se pueden encontrar en la literatura (véase [8] para su deducción, o [12] donde se propone otro muy similar) es el siguiente, válido cuando la curvatura de la línea media del tubo es localmente pequeña y la sección transversal es circular:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{Q^2}{A}\right) + \frac{A}{\rho_f}\frac{\partial P}{\partial x} + K_r \frac{Q}{A} = 0 \tag{2}$$

$$\rho_s e \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{eE}{(1-\nu_s^2)(r_0)^2}\eta = P - P_{ext} \tag{3}$$

donde $A = A(t,x)$ es el área de la sección transversal, $Q = Q(t,x)$ es el flujo ($Q = A\bar{u}$, donde $\bar{u}$ es la velocidad media en la sección transversal), $P = P(t,x)$ es la presión media en cada sección transversal, ρ_f es la densidad del fluido, K_r es un parámetro de resistencia relacionado con la viscosidad del fluido y α es un coeficiente de corrección del momento (según la forma del perfil del fluido α puede variar entre 1 y 2, y como K_r se suele usar el valor $8\pi\nu_f$, donde ν_f es la viscosidad cinemática del fluido). Por último, ρ_s es la densidad de la pared del tubo, e es su espesor, E su modulo de Young, ν_s su coeficiente de Poisson, $r_0 = r_0(x)$ es el radio de la sección transversal en $t = 0$, $\eta = \eta(t,x)$ es el incremento del radio en cada instante (de modo que el radio de la sección transversal en un instante dado es $r_0 + \eta$) y P_{ext} es la presión exterior.

En general se asume en (3) que se llega muy rápidamente al estado de equilibrio, por lo que se desprecian las derivadas en t y se tiene que

$$P - P_{ext} = \frac{eE}{(1-\nu_s^2)(r_0)^2}\eta \tag{4}$$

lo que permite eliminar la presión del sistema (1)-(2).

Cuando el tubo no es rectilíneo aparece un flujo secundario que se puede observar experimentalmente y que fue analizado en primer lugar por Dean (véase [3]) y a continuación por diversos autores (véase [7] para una breve reseña histórica y [1] para más detalles sobre la forma del flujo secundario). Dicho flujo secundario, que no es unidimensional, influye en el comportamiento del flujo principal, por lo que debería de ser tenido en cuenta de alguna manera en (1)-(3) cuando la curvatura de la línea media del tubo es importante.

Nuestro objetivo en este artículo es obtener un modelo similar a (1)-(3), pero que sea válido también cuando la curvatura de la línea media del tubo no es pequeña. Para ello utilizaremos el método de desarrollos asintóticos, lo que nos permitirá obtener un modelo unidimensional, válido para cualquier curvatura, reduciendo al mínimo las hipótesis a priori necesarias sobre el comportamiento del fluido.

2. Problema de partida

Estamos interesados en estudiar el movimiento de un fluido en el interior de un tubo elástico y queremos que el tubo sea delgado si lo comparamos con su longitud. Por ello definimos el tubo como sigue:

$$\begin{aligned}\Omega^\varepsilon = \{&(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon) \in \mathbb{R}^3 | \\ &(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon) = \mathbf{c}(s_1) + \varepsilon s_3 r(t, s_1, s_2)[(\cos s_2)\mathbf{v}_2(s_1) + (\sin s_2)\mathbf{v}_3(s_1)], \\ &(s_1, s_2, s_3) \in [a,b] \times [0, 2\pi] \times [0,1]\}\end{aligned} \tag{5}$$

donde $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es la línea media del tubo (y hemos escogido s_1 de modo que sea parámetro natural, es decir, $\|\mathbf{c}'(s_1)\| = 1$). Con el superíndice ε queremos indicar la dependencia de dicho parámetro adimensional de las variables x_i^ε y del dominio Ω^ε. Definimos $\mathbf{v}_1(s_1) = \mathbf{c}'(s_1)$, escogemos $\mathbf{v}_2(s_1)$ ortogonal a $\mathbf{v}_1(s_1)$ (y unitario) y $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. De ese modo forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ para cada s_1. Cuando $\mathbf{v}_1' \neq \mathbf{0}$, podemos escoger $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1'/\|\mathbf{v}_1'\|$, y entonces $\{\mathbf{v}_i\}$ es el triedro de Frenet-Serret, por lo que verifica:

$$\mathbf{v}_1' = \kappa \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_2' = -\kappa \mathbf{v}_1 + \tau \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{v}_3' = -\tau \mathbf{v}_2 \tag{6}$$

donde $\kappa(s_1) = \|\mathbf{v}_1'(s_1)\|$ es la curvatura y $|\tau(s_1)| = \|\mathbf{v}_3'(s_1)\|$ es la torsión. Obsérvese que aún cuando $\mathbf{v}_1' = \mathbf{0}$, se puede escoger $\mathbf{v}_2$ de modo que se verifique (6).

Suponemos ahora que el fluido se mueve en Ω^ε obedeciendo las ecuaciones de Navier-Stokes y que la pared lateral de Ω^ε ($s_3 = 1$) obedece el modelo evolutivo lineal de Koiter (en [4] se justifica que cuando el espesor de la pared (e) tiende a cero el modelo de elasticidad lineal tridimensional y el modelo lineal de Koiter se comportan asintóticamente igual).

Las ecuaciones de Navier-Stokes pueden escribirse:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} + (\nabla^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon)\mathbf{u}^\varepsilon = \frac{1}{\rho_f} \nabla^\varepsilon \cdot \mathbf{T}^\varepsilon + \mathbf{F}^\varepsilon \tag{7}$$

$$\nabla^\varepsilon \cdot \mathbf{u}^\varepsilon = 0 \tag{8}$$

en Ω^ε, donde $\mathbf{u}^\varepsilon$ es el vector de velocidades, $\mathbf{T}^\varepsilon$ es el tensor de tensiones y $\mathbf{F}^\varepsilon$ es la fuerza exterior por unidad de masa. Como es conocido, el tensor de tensiones para un fluido newtoniano es de la forma

$$\mathbf{T}^\varepsilon = -p^\varepsilon \mathbf{I} + \mu_f [\nabla^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon + (\nabla^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon)^T] \tag{9}$$

donde p^ε es la presión y μ_f es la viscosidad absoluta (recordemos que $\nu_f = \mu_f/\rho_f$).

Las condiciones de contorno propuestas son que la velocidad y la presión son conocidas en $s_1 = a$ y $s_1 = b$, la componente normal de la velocidad en $s_3 = 1$ viene dada por el desplazamiento de la pared:

$$\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon = \frac{\partial r^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} [(\cos s_2)\mathbf{v}_2(s_1) + (\sin s_2)\mathbf{v}_3(s_1)] \cdot \mathbf{n}^\varepsilon \text{ en } s_3 = 1 \tag{10}$$

donde $r^\varepsilon = \varepsilon r$ y $\mathbf{n}^\varepsilon$ es la normal exterior unitaria. La condición de que la componente tangencial de la velocidad sea nula sobre la pared, la sustituimos por

$$(\mathbf{T}^\varepsilon \mathbf{n}^\varepsilon) \cdot \mathbf{t}^\varepsilon = -\mathbf{f}_R^\varepsilon \cdot \mathbf{t}^\varepsilon \text{ en } s_3 = 1 \tag{11}$$

para cualquier vector $\mathbf{t}^\varepsilon$ tangente a la pared del tubo, donde $-\mathbf{f}_R^\varepsilon$ es la fuerza de rozamiento que actúa sobre el fluido en la pared del tubo (típicamente será $\mathbf{f}_R^\varepsilon = \gamma^\varepsilon \mathbf{U}_\tau^\varepsilon$ o $\mathbf{f}_R^\varepsilon = \gamma^\varepsilon \|\mathbf{U}_\tau^\varepsilon\| \mathbf{U}_\tau^\varepsilon$, siendo $\mathbf{U}_\tau^\varepsilon$ la componente tangencial de la velocidad en $s_3 = 1$ y γ^ε un coeficiente (pequeño) a determinar experimentalmente).

3. Método asintótico

Usualmente, para deducir los modelos unidimensionales, se hace un promedio en la sección transversal del tubo que, debido al carácter no lineal de las ecuaciones de Navier-Stokes, requiere de hipótesis adicionales sobre el comportamiento del fluido (véase [8] y [12] para la deducción del modelo (1)-(3)).

El uso del método de desarrollos asintóticos nos permite prescindir (al menos inicialmente) de esas hipótesis sobre el comportamiento del fluido. Aplicamos el método de desarrollos asintóticos como en [4] y [13], es decir, haciendo un cambio de variable previo a un dominio de referencia (en [9] y [10] puede verse un ejemplo de aplicación de este método para deducir las ecuaciones de aguas poco profundas).

Para aplicar el método de desarrollos asintóticos, primero escribimos el problema (7)-(11), sin adimensionalizar, en su forma variacional. A continuación hacemos el cambio de variable

$$t^\varepsilon = t, \quad \mathbf{x}^\varepsilon = \mathbf{c}(s_1) + \varepsilon s_3 r(t, s_1, s_2)[(\cos s_2)\mathbf{v}_2(s_1) + (\sin s_2)\mathbf{v}_3(s_1)] \tag{12}$$

a un dominio de referencia $\Omega = [a, b] \times [0, 2\pi] \times [0, 1]$, y asociamos a cada función escalar en el dominio original una función en el dominio de referencia del siguiente modo:

$$p^\varepsilon(t^\varepsilon, x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon) = p(\varepsilon)(t, s_1, s_2, s_3) \tag{13}$$

Cuando las funciones son vectoriales o tensoriales, al asociar a las funciones definidas en el dominio original con las funciones definidas en el dominio de referencia, en lugar de hacerlo componente a componente, además hacemos un cambio de base:

$$\mathbf{u}^\varepsilon = u_i^\varepsilon \mathbf{e}_i = u_i(\varepsilon)\mathbf{v}_i = \mathbf{u}(\varepsilon), \quad \mathbf{T}^\varepsilon = T_{ij}^\varepsilon \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = T_{ij}(\varepsilon)\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j = \mathbf{T}(\varepsilon) \tag{14}$$

donde los índices repetidos indican suma de 1 a 3, y donde $\{\mathbf{e}_i\}$ es la base ortonormal asociada a la variable original $\mathbf{x}^\varepsilon$.

A continuación realizamos la hipótesis fundamental en el método de desarrollos asintóticos: suponemos que las incógnitas (y los datos) admiten un desarrollo en serie de potencias de ε:

$$\begin{aligned} &u_i(\varepsilon) = u_i^0 + \varepsilon u_i^1 + \varepsilon^2 u_i^2 + \cdots, \quad T_{ij}(\varepsilon) = T_{ij}^0 + \varepsilon T_{ij}^1 + \varepsilon^2 T_{ij}^2 + \cdots, \\ &p(\varepsilon) = p^0 + \varepsilon p^1 + \varepsilon^2 p^2 + \cdots, \quad F_i(\varepsilon) = F_i^0 + \varepsilon F_i^1 + \varepsilon^2 F_i^2 + \cdots \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{15}$$

Se obtienen de este modo una serie de ecuaciones que nos permiten identificar (al menos en parte) los diferentes términos de las series de potencias (15). Las ecuaciones así obtenidas son:

$$M_0^0(s_1)\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + I_0^0(s_1)\eta = L_0^0(s_1)\bar{P}^0(t, s_1) \tag{16}$$

donde

$$r(t,s_1,s_2)=r_0(s_1,s_2)+\eta(t,s_1)\quad (r_0(s_1,s_2)=r(0,s_1,s_2)) \tag{17}$$

$$M_0^0(s_1)=\int_0^{2\pi} e\rho_s\sqrt{(r_0)^2+\left(\frac{\partial r_0}{\partial s_2}\right)^2}ds_2 \tag{18}$$

$$L_0^0(s_1)=\int_0^{2\pi}\sqrt{(r_0)^2+\left(\frac{\partial r_0}{\partial s_2}\right)^2}ds_2 \tag{19}$$

$$I_0^0(s_1)=\int_0^{2\pi}\frac{eE}{1-\nu_s^2}\frac{[2(\frac{\partial r_0}{\partial s_2})^2-r_0\frac{\partial^2 r_0}{\partial s_2^2}+(r_0)^2]^2}{[(r_0)^2+(\frac{\partial r_0}{\partial s_2})^2]^{5/2}}ds_2 \tag{20}$$

$$\bar{P}^0(t,s_1)=\frac{1}{L_0^0}\int_0^{2\pi}(p_\Gamma^0-P_{ext})\sqrt{(r_0)^2+\left(\frac{\partial r_0}{\partial s_2}\right)^2}ds_2 \tag{21}$$

$$\begin{aligned}p_\Gamma^0(t,s_1,s_2)&=p^0+2\mu_f\frac{\partial u_1^0}{\partial s_1}+2\mu_f\left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial s_2}\right)^2\right]^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial s_2}(r\cos s_2)\frac{\partial u_2^1}{\partial s_2}\right.\\&\left.+\frac{\partial}{\partial s_2}(r\sin s_2)\frac{\partial u_3^1}{\partial s_2}\right]\quad \text{(valorado en } s_3=1)\end{aligned} \tag{22}$$

y también

$$\frac{\partial A^0}{\partial t}+\frac{\partial Q^0}{\partial s_1}=0 \tag{23}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial Q^0}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s_1}\left[\frac{(Q^0)^2}{A^0}\right]-\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial}{\partial s_1}\left[A^0\left(-\bar{p}^0+2\mu_f\frac{\partial u_1^0}{\partial s_1}\right)\right]+\nu_f\kappa^2Q^0+\nu_f\kappa t_{21}^0\\&\quad=-\frac{L^0}{\rho_f}\bar{f}_R^0-\frac{1}{\rho_f}\gamma_p^0+2\nu_f\frac{\partial u_1^0}{\partial s_1}\frac{\partial A^0}{\partial s_1}-2\nu_f\gamma_u^0+A^0\bar{F}_1^0\end{aligned} \tag{24}$$

donde

$$A^0=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2ds_2,\quad Q^0=A^0u_1^0,\quad \bar{F}_1^0=\frac{1}{A^0}\int_0^{2\pi}\int_0^1 F_1^0s_3r^2ds_3ds_2 \tag{25}$$

$$\bar{p}^0=\frac{1}{A^0}\int_0^{2\pi}\int_0^1 p^0s_3r^2ds_3ds_2,\quad L^0(t,s_1)=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial s_2}\right)^2}ds_2 \tag{26}$$

$$t_{21}^0=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left[-(r\sin s_2)\frac{\partial u_1^1}{\partial s_2}+\frac{\partial}{\partial s_2}(r\sin s_2)s_3\frac{\partial u_1^1}{\partial s_3}\right]ds_3ds_2 \tag{27}$$

$$\bar{f}_R^0=\frac{1}{L^0}\int_0^{2\pi}[f_{R1}^1-f_{R1}^0r\kappa\cos s_2]\sqrt{r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial s_2}\right)^2}ds_2 \tag{28}$$

$$\gamma_p^0=\int_0^{2\pi}\left(p^0_{|s_3=1}\right)r\left(\frac{\partial r}{\partial s_2}\tau-\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)ds_2 \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\gamma_u^0&=\int_0^{2\pi}\left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial s_2}\right)^2\right]^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial s_2}(r\cos s_2)\frac{\partial u_2^1}{\partial s_2}\right.\\&\left.+\frac{\partial}{\partial s_2}(r\sin s_2)\frac{\partial u_3^1}{\partial s_2}\right]_{|s_3=1}r\left(\frac{\partial r}{\partial s_2}\tau-\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)ds_2\end{aligned} \tag{30}$$

y f^0_{R1} y f^1_{R1} son los dos primeros términos del desarrollo en serie de potencias de ε de la componente de la fuerza de rozamiento en la dirección $\mathbf{v}_1$.

Se observa que para cerrar las ecuaciones (16)-(30) hace falta determinar $\mathbf{u}^1$ y la relación entre la presión media en la sección transversal $\bar{p}^0$ y la presión en la pared del tubo $p^0_{|s_3=1}$. Para ello necesitamos conocer como depende p^0 de s_3 y como se comporta el flujo secundario ($\mathbf{u}^1$). En [1] se describe el comportamiento de la presión y del flujo (principal y secundario) cuando hay curvatura, pero dicha información no nos permite determinar nuestras incógnitas.

Con el ánimo de generalizar el modelo (1)-(3), en la siguiente sección realizaremos algunas hipótesis adicionales que, aunque restringen la validez del modelo obtenido, nos permitirán proponer un modelo unidimensional del estilo de (1)-(3), pero añadiendo un nuevo término que tiene en cuenta la curvatura.

4. Modelo propuesto

Es usual suponer en este tipo de modelos que tanto la presión p^0 como la presión exterior P_{ext} son constantes en cada sección transversal (véase, por ejemplo, [8] o [12], o [1] cuando el producto $\varepsilon\kappa$ es pequeño). En ese caso tenemos que

$$p^0 = p^0(t, s_1), \qquad P_{ext} = P_{ext}(t, s_1) \tag{31}$$

y como consecuencia $\bar{p}^0 = p^0_{|s_3=1} = p^0$ y $\gamma^0_p = -\bar{p}^0 \frac{\partial A^0}{\partial s_1}$. Si además suponemos que

$$\left[\frac{\partial}{\partial s_2}(r\cos s_2)\frac{\partial u^1_2}{\partial s_2} + \frac{\partial}{\partial s_2}(r\sin s_2)\frac{\partial u^1_3}{\partial s_2}\right]_{|s_3=1} = 0 \tag{32}$$

(lo que se consigue si, por ejemplo, u^1_2 y u^1_3 son cero en $s_3 = 1$), obtenemos que $\gamma^0_u = 0$ y $\bar{P}^0 = \bar{p}^0 + 2\mu_f \frac{\partial u^0_1}{\partial s_1} - P_{ext}$. Por último, si suponemos también que

$$t^0_{21} = 0 \tag{33}$$

(lo que ocurre si, por ejemplo, $u^1_1 = u^1_1(t, s_1)$), entonces el modelo (16)-(30) se escribe:

$$M^0_0(s_1)\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + I^0_0(s_1)\eta = L^0_0(s_1)\left[\bar{p}^0 + 2\mu_f\frac{\partial u^0_1}{\partial s_1} - P_{ext}\right] \tag{34}$$

$$\frac{\partial A^0}{\partial t} + \frac{\partial Q^0}{\partial s_1} = 0 \tag{35}$$

$$\frac{\partial Q^0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_1}\left[\frac{(Q^0)^2}{A^0}\right] + \frac{A^0}{\rho_f}\frac{\partial\bar{p}^0}{\partial s_1} - 2\nu_f A^0\frac{\partial^2}{\partial s_1^2}\left[\frac{Q^0}{A^0}\right] + \nu_f\kappa^2 Q^0 = -\frac{L^0}{\rho_f}\bar{f}^0_R + 4\nu_f\frac{\partial A^0}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_1}\left[\frac{Q^0}{A^0}\right] + A^0\bar{F}^0_1 \tag{36}$$

Observaciones.- Si $\mathbf{f}^\varepsilon_R = \gamma^\varepsilon\mathbf{U}^\varepsilon_\tau$ o $\mathbf{f}^\varepsilon_R = \gamma^\varepsilon\|\mathbf{U}^\varepsilon_\tau\|\mathbf{U}^\varepsilon_\tau$ (con $\gamma^\varepsilon = \varepsilon\gamma^0$) entonces $\bar{f}^0_R = \gamma^0 u^0_1$ o $\bar{f}^0_R = \gamma^0|u^0_1|u^0_1$, respectivamente. Si $\mathbf{F}^\varepsilon = -g\mathbf{e}_3$ entonces $\bar{F}^0_1 = -g\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{v}_1$. Si la sección transversal es circular ($\frac{\partial r_0}{\partial s_2} = 0$), y si las distintas constantes que aparecen en (34) no dependen de s_2, entonces se escribe:

$$e\rho_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{eE}{(1-\nu_s^2)(r_0)^2}\eta = \bar{p}^0 + 2\mu_f \frac{\partial u_1^0}{\partial s_1} - P_{ext} \tag{37}$$

que es exactamente igual a (3) salvo por el término en $\frac{\partial u_1^0}{\partial s_1}$.□

El modelo (34)-(36) está planteado en el dominio de referencia, al que hemos llegado tras hacer un cambio de escala. Si escribimos este modelo en las dimensiones originales (para lo que definimos $r^\varepsilon = \varepsilon r$ y $r_0^\varepsilon = \varepsilon r_0$), resulta:

$$M_0^\varepsilon(s_1)\frac{\partial^2 \eta^\varepsilon}{\partial t^2} + I_0^\varepsilon(s_1)\eta^\varepsilon = L_0^\varepsilon(s_1)\left[\bar{p}^0 + 2\mu_f \frac{\partial u_1^0}{\partial s_1} - P_{ext}\right] \tag{38}$$

$$\frac{\partial A^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial Q^\varepsilon}{\partial s_1} = 0 \tag{39}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_1}\left[\frac{(Q^\varepsilon)^2}{A^\varepsilon}\right] + \frac{A^\varepsilon}{\rho_f}\frac{\partial \bar{p}^0}{\partial s_1} - 2\nu_f A^\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial s_1^2}\left[\frac{Q^\varepsilon}{A^\varepsilon}\right] + \nu_f \kappa^2 Q^\varepsilon \\ &\quad = -\frac{L^\varepsilon}{\rho_f}\bar{f}_R^\varepsilon + 4\nu_f \frac{\partial A^\varepsilon}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_1}\left[\frac{Q^\varepsilon}{A^\varepsilon}\right] + A^\varepsilon \bar{F}_1^0 \end{aligned} \tag{40}$$

donde ahora

$$r^\varepsilon(t,s_1,s_2) = r_0^\varepsilon(s_1,s_2) + \eta^\varepsilon(t,s_1) \tag{41}$$

$$A^\varepsilon = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(r^\varepsilon)^2 ds_2, \quad Q^\varepsilon = A^\varepsilon u_1^0 \tag{42}$$

$$M_0^\varepsilon(s_1) = \int_0^{2\pi} e\rho_s \sqrt{(r_0^\varepsilon)^2 + \left(\frac{\partial r_0^\varepsilon}{\partial s_2}\right)^2} ds_2 \tag{43}$$

$$L_0^\varepsilon(s_1) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r_0^\varepsilon)^2 + \left(\frac{\partial r_0^\varepsilon}{\partial s_2}\right)^2} ds_2 \tag{44}$$

$$I_0^\varepsilon(s_1) = \int_0^{2\pi} \frac{eE}{1-\nu_s^2}\frac{[2(\frac{\partial r_0^\varepsilon}{\partial s_2})^2 - r_0^\varepsilon \frac{\partial^2 r_0^\varepsilon}{\partial s_2^2} + (r_0^\varepsilon)^2]^2}{[(r_0^\varepsilon)^2 + (\frac{\partial r_0^\varepsilon}{\partial s_2})^2]^{5/2}} ds_2 \tag{45}$$

$$L^\varepsilon(t,s_1) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r^\varepsilon)^2 + \left(\frac{\partial r^\varepsilon}{\partial s_2}\right)^2} ds_2, \qquad \bar{f}_R^\varepsilon = \varepsilon \bar{f}_R^0 \tag{46}$$

Observación Si $\mathbf{f}_R^\varepsilon = \gamma^\varepsilon \mathbf{U}_\tau^\varepsilon$ o $\mathbf{f}_R^\varepsilon = \gamma^\varepsilon \|\mathbf{U}_\tau^\varepsilon\| \mathbf{U}_\tau^\varepsilon$ (con $\gamma^\varepsilon = \varepsilon\gamma^0$) entonces $\bar{f}_R^\varepsilon = \gamma^\varepsilon u_1^0$ o $\bar{f}_R^\varepsilon = \gamma^\varepsilon |u_1^0| u_1^0$, respectivamente.□

5. Conclusiones

El objetivo de este trabajo es obtener un modelo del movimiento de un fluido newtoniano en el interior de un tubo elástico. Realizando únicamente la hipótesis habitual en el método de desarrollos asintóticos (15), obtenemos un modelo (16)-(30), del que desconocemos alguno de los términos. Nuestra intención es, en futuros trabajos, determinar dichos términos para así obtener un modelo general que dependa sólo de la hipótesis (15). De momento nos hemos visto en la necesidad de realizar a mayores las hipótesis (31)-(33), lo que nos ha permitido obtener el modelo (38)-(40), que generaliza claramente al modelo usual (1)-(3), y que sigue siendo válido en el caso de grandes curvaturas. La principal novedad de este modelo es la incorporación del término $\nu_f \kappa^2 Q^\varepsilon$, cuyo efecto es oponerse al movimiento del fluido si la curvatura del tubo es distinta de cero (su efecto no es demasiado perceptible salvo cuando la curvatura es grande).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia mediante el proyecto MTM2006-14491.

Referencias

[1] S. A. Berger, L. Talbot, L.-S. Yao. *Flow in curved pipes.* Ann. Rev. Fluid Mech. 15 (1983), 461–512.

[2] S. Čanić, D. Lamponi, A. Mikelić, J. Tambača. *Self-consistent effective equations modeling blood flow in medium-to-large compliant arteries.* Multiscale Model. Simul. 3 (2005), 559–596.

[3] W. R. Dean. *The streamline motion of fluid in a curved pipe.* Phil. Mag. 5 (1928), 673–695.

[4] P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, volume III: Theory of Shells*, Elsevier, Amsterdam, 2000.

[5] A. E. Green, P. M. Naghdi. *A direct theory of viscous fluid flow in pipes I. Basic general developments.* Phil. Trans. R. Soc. London A 342 (1993), 525–542.

[6] A. E. Green, P. M. Naghdi, M. J. Stallard. *A direct theory of viscous fluid flow in pipes II. Flow of incompressible viscous fluids in curved pipes.* Phil. Trans. R. Soc. London A 342 (1993), 543–572.

[7] T. J. Pedley. *Mathematical modelling of arterial fluid dynamics.* Journal of Engineering Mathematics 47 (2003), 419–444.

[8] A. Quarteroni, L. Formaggia, *Mathematical Modelling and Numerical Simulation of the Cardiovascular System* en *Handbook of Numerical Analysis, Volume XII: Computational Models for the Human Body*, Ed. N. Ayache, Elsevier, 2004.

[9] J. M. Rodríguez, R. Taboada-Vázquez. *From Navier-Stokes equations to Shallow Waters with viscosity by asymptotic analysis.* Asymptotic Analysis 43 (2005), 267–285.

[10] J. M. Rodríguez, R. Taboada-Vázquez. *From Euler and Navier-Stokes Equations to Shallow Waters by Asymptotic Analysis.* Advances in Engineering Software 38 (2007), 399-409.

[11] N. Riley. *Unsteady fully-developed flow in a curved pipe.* Journal of Engineering Mathematics 34 (1998), 131–141.

[12] S. J. Sherwin, V. Franke, J. Peiró, K. Parker. *One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables.* Journal of Engineering Mathematics 47 (2003), 217–250.

[13] L. Trabucho, J. M. Viaño, *Mathematical Modelling of Rods* en *Handbook of Numerical Analysis, Volume IV*, P. G. Ciarlet y J. L Lions Eds., Elsevier, Amsterdam, 1996.